ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 517.948.33

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ЗАДАВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

В. А. Брусин

Результаты, полученные в [1] для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, переносятся на интегральные уравнения в конечно-мерном пространстве.

В работе [1] был рассмотрен класс нелинейных неавтономных динамических систем, описывающихся дифференциальными уравнениями первого порядка в гильбертовом пространстве Ф, и получен ряд результатов, относящихся к их свойствам, равномерно справедливым относительно некоторых классов нелинейностей и входных воздействий. В связи с этим возникло желание перенести эти результаты на неавтономные динамические системы, описывающиеся нелинейными интегральными уравнениями. Основная трудность здесь заключается в том, что при доказательстве теорем работы [1] существенно используются понятие «фазовое пространство» динамической системы и специальный вид дифференциального уравнения, при котором нелинейность и внешнее воздействие входят аддитивно в правую часть. Спрашивается, можно ли эффективным образом выделить класс интегральных уравнений, который все же допускал бы такое перенесение?

В настоящей статье решение поставленной задачи достигается на следующем пути. Для исходного интегрального уравнения вводится понятие «фундаментальное пространство», которое призвано сыграть ту же роль, что и «фазовое пространство» в работе [1]; более того, «погружая» нашу динамическую систему в фундаментальное пространство, придаем ей и необходимые для применения теорем работы [1] свойства. Применяя затем эти теоремы к «погруженной» системе, как следствие, получим результаты и для исходной, остается только выразить соответствующие достаточные условия через заданные параметры.

В первом разделе настоящей работы вводится понятие «фундаментальное пространство» и доказывается теорема существования; во втором — приводятся теоремы, перенесенные с помощью этого понятия из работы [1], и поясняется процедура их получения.

Основные обозначения: $C^n = \{x,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i$ — комплексное число$\}$, $\langle x, y\rangle_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ (черта—знак сопряжения), $\| x_n \|^2 = \langle x, x\rangle_n$;

$$L_n^{2,\varepsilon} = \Big\{ x(t);\ t \in (0, \infty),\ x \in C^n,\ \langle x(t), y(t)\rangle_{L_n^{2,\varepsilon}} \equiv \langle x(t), y(t)\rangle_L - \int\limits_0^\infty \langle x(t), y(t)\rangle_n e^{2\varepsilon t}\, dt < \infty \Big\};$$

$L_n^\sigma = \{x(t);\ t \in (0, \infty),\ x \in C^n,\ \| x(t) \|_n \leqslant \text{const}\, e^{\sigma t}\}$; $\Phi = \{z,\ \langle z_1, z_2\rangle_\Phi$ — скалярное произведение$\}$, $\| z \|_\Phi^2 = \langle z, z\rangle_\Phi$, θ — нулевой элемент Φ; $G = \| G_{ij} \|_{n\times n}$, — $(n \times n)$-матрица, $| G |_{n\times n}^2 \equiv$

$\equiv \sum_{i, j=1}^{n} \| G_{ij} \|_n^2$; $A\ (\Phi_1 \to \Phi_2)$ — линейный оператор, действующий из пространства Φ_1 в Φ_2, $D(A) \subset \Phi_1$ — область его определения, $R(A) \subset \Phi_2$ — область значений; если A — ограниченный оператор, то $\| A \|_{\Phi_1 \to \Phi_2}$ — его норма; $R(\lambda, A)$ — резольвента оператора A; A^* — оператор, сопряженный к A; если $\Phi_1 = \Phi_{11} \times \Phi_{12}$, то A/Φ_{11} — ограничение A на Φ_{11}; $A_л^{-1}$ — левый, обратный к A оператор, $Pr(C^n)$ — проекционный оператор, для которого $R(Pr(C^n)) = C^n$, E_Φ — единичный оператор $(\Phi \to \Phi)$;

$\hat{x}_T(\omega) \equiv [F_T x(t)](\omega) = \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt$, $(x(t) \in L_n^\sigma,\ T > 0,\ j = \sqrt{-1})$. Для оператора $D(\Phi \to \Phi)$ через $\hat{D}(\Phi \to \Phi)$ обозначается оператор, удовлетворяющий для любого $x(t) \in L_n^\sigma$ и при любом $T > 0$ равенству Парсеваля

$$\int_0^T \langle x(t),\ Dx(t) \rangle_\Phi\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{x}_T(\omega),\ \hat{D} \hat{x}_T(\omega) \rangle_\Phi\, d\omega.$$

Для оператора $H\ (\Phi_1 \to \Phi_2)$, $\Phi_1 \subset \Phi_2$ обозначим H_* — оператор $(\Phi_1 \to R(H))$, удовлетворяющий для любого $\xi \in \Phi_1$ равенству $\langle H_* \xi, H\xi \rangle_{\Phi_2} = \langle \xi, \xi \rangle_{\Phi_1}$. Далее, $\eta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0) \end{cases}$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $\mathrm{Re} \| G_{ij} \|_{n \times n} = \frac{1}{2} \| G_{ij} + \bar{G}_{ji} \|_{n \times n}$.

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В ПРОСТРАНСТВЕ L_n^σ $(\sigma > 0)$

Будем рассматривать линейный интегральный оператор Q_ε $(L_n^\sigma \to L_n^\sigma)$, ($\sigma$ — произвольное, достаточно большое число):

$$(Q_\varepsilon h)(t) = \int_0^t G(t - \tau) h(\tau)\, d\tau, \qquad h(t) \in L_n^\sigma \quad (\sigma > 0,\ \varepsilon > 0), \tag{1.1}$$

матричное ядро $G(t) = \| G_{ij}(t) \|_{n \times n}$ которого удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty | G(\tau) |_{n \times n}^2 e^{2\varepsilon\tau} d\tau < \infty, \qquad |G(t)|_{n \times n} \leqslant \mathrm{const}\, e^{-\varepsilon t}. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Будем говорить, что линейное гильбертово пространство Φ является фундаментальным для оператора Q_ε, если существуют линейный оператор A со всюду плотной в Φ областью определения $D(A)$ и имеющий по крайней мере одну регулярную точку, линейный ограниченный оператор $G(\Phi \to C^n)$ и линейный ограниченный оператор $H(C^n \to \Phi)$, такие, что

а) $(Q_\varepsilon h)(t) = Gz(t) \qquad (z \in \Phi,\ z(0) = \theta)$, (1.3)

$$\frac{dz}{dt}(t) = Az(t) + \Psi(t), \tag{1.4}$$

$$\Psi(t) = Hh(t - \theta) \qquad (\theta \geqslant 0); \tag{1.5}$$

б) однопараметрическая полугруппа $\{U(t)\}$ $(t>0)$ линейных ограниченных операторов $(\Phi\to\Phi)$, соответствующая задаче Коши для однородного уравнения $\frac{dv}{dt}=Av$ [2], удовлетворяет условию

$$\| U(t) \|_{\Phi\to\Phi} \leqslant \text{const}\, e^{-\rho(\varepsilon)t}, \tag{1.6}$$

$$\int\limits_0^\infty \| GU(t) \|_{(\Phi\to C^n)} e^{\varepsilon t} dt < \infty , \tag{1.7}$$

где $\rho(\varepsilon)>0$.

Систему (1.3)—(1.5) будем называть тогда „погружением оператора Q_ε в пространство Φ“.

Из а) и б), в частности, вытекает, что между полугруппой операторов $\{U(t)\}$ и оператором A, с одной стороны, и ядром $G(t)$, с другой стороны, имеют место соотношения

$$G(t)=GU(t-\theta)\, H, \tag{1.8}$$

$$K(p)=GR(p,\ A)\, He^{-p\theta} \qquad (Re p \geqslant -\rho), \tag{1.9}$$

где $K(p)$ — преобразование Лапласа от $G(t)$ или передаточная матрица оператора Q_ε.

Введем далее в рассмотрение семейство $\{Q_\varepsilon\}$ операторов $(L_n^\sigma\to L_n^\sigma)$ вида $h(t)\to(Q_\varepsilon h)(t)+f(t)$, где $f(t)$—произвольная функция из $L_n^{2,\varepsilon}\cap L_n^\sigma$. При замене $t\to t-\tau$ $(\tau>0)$ это семейство в силу (1.2) переходит в себя.

Кроме того, мы выделим семейство операторов $(L_n^\sigma\to L_n^\sigma)$ вида $h(t)\to(Q_\varepsilon h)(t)+GU(t)\,z_0$, где z_0—произвольный элемент из Φ, которое в силу (1.7) входит в семейство $\{Q_\varepsilon\}$. Так как $(Q_\varepsilon h)(t)+GU(t)z_0=Gz(t,z_0)$, где $z(t,z_0)$ — решение абстрактного дифференциального уравнения (1.4), отвечающее начальному условию $z(0,z_0)=z_0$*, то это семейство также будет при замене $t\to t-\tau$ $(\tau>0)$ переходить в себя.

Определение 1.2. Семейство операторов вида $h(t)\to(Q_\varepsilon h)(t)+GU(t)z_0$, $z_0\in\Phi$ будем называть ограничением семейства $\{Q_\varepsilon\}$ на фундаментальном пространстве Φ и обозначать $\{Q_\varepsilon/\Phi\}$.

Имеет место следующая теорема существования фундаментального пространства.

Теорема 1.1. Предположим, что функция $K(p)$—аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p\geqslant-\lambda_0$ $(\lambda_0>\varepsilon)$ и может быть представлена там в виде

$$K(p)=[N(p)+F(p)]^{-1}M(p)\,e^{-\theta p} \qquad (\theta\geqslant 0), \tag{1.10}$$

где $N(p)$, $M(p)$ и $F(p)$—функции, удовлетворяющие следующим условиям:

А) $N(p)$, $M(p)$—полиномы,

$$\begin{aligned} N(p)&=A_0p^s+A_1p^{s-1}+\ldots+A_s,\\ M(p)&=B_1p^{s-1}+B_2p^{s-2}+\ldots+B_s; \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\det A_0\neq 0, \qquad \mathrm{rang}\,(B_1,\ldots,B_s)=n; \tag{1.12}$$

Б) функция $[N(p)+F(p)]^{-1}$ — аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p\geqslant-\lambda_0$;

---

* Это решение, как известно [2], имеет вид $z(t,z_0)=U(t)\,z_0+\int\limits^t U(t-\tau)\Psi(\tau)\,d\tau$

В) функция $F(p)$ есть преобразование Лапласа [3] от функции $l(t)$ вида*

$$l(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(t - \nu_k) + l^0(t) \qquad (\nu_k \geqslant 0),$$
$$\int_0^\infty | l^0(t) |^2_{n \times n} \exp(\lambda_0 t)\, dt < \infty, \qquad | l^0(t) |_{n \times n} \leqslant \mathrm{const} \exp(\lambda_0 t), \tag{1.13}$$

при этом функции $\frac{d^k}{dt^k} l^0(t)$ (при $k = 1, \ldots, s-1$) также являются оригиналами по Лапласу.

Тогда справедливо следующее:

1) фундаментальным пространством оператора Q_ε будет гильбертово пространство $\Phi = L_n^{2,\varepsilon} \times C^{ns}$,

2) оператор G в представлении (1.3) имеет вид

$$Gz \equiv x = Cy, \tag{1.14}$$

где $z \equiv (u, y)$, $y \in C^{ns}$, $u \in L_n^{2,\varepsilon}$, $x \in C^n$, C — $(n \times ns)$-матрица:

3) оператор $A = A(\varepsilon)$ имеет следующую структуру:

$$D(A) = \{(u(\xi), y) \in L_n^{2,\varepsilon} \times C^{ns},\ u(0) = Cy,\ u'(\xi) — \text{существует}\},$$

$$Az = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} - \lambda_0 & \theta \\ B\tilde{L} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\xi) \\ y \end{pmatrix}^{**}, \tag{1.15}$$

где P — $(ns \times ns)$-матрица, $B\tilde{L}$ — оператор $(L_n^{2,\varepsilon} \to C^{ns})$ вида

$$B\tilde{L}v(\xi) = B \int_0^\infty l(\xi) \exp(\lambda_0 \xi)\, v(\xi)\, d\xi, \tag{1.16}$$

B — $(n \times ns)$-матрица;

4) оператор $H(C^n \to \Phi)$ удовлетворяет условию

$$Hx = (\theta, y), \tag{1.17}$$

где $y = Dx$, $x \in C^n$, $y \in C^{ns}$, D — $(ns \times n)$-матрица, один (по крайней мере) из n-миноров которой отличен от нуля.

Фундаментальное пространство, которое удовлетворяет условиям настоящей теоремы, будем в дальнейшем называть универсальным.

Доказательство. Будем доказывать теорему поэтапно.

1) Установим сначала, что пространство $L_n^{2,\varepsilon} \times C^{ns}$ удовлетворяет требованиям пункта а) определения 1.1 с указанными в пунктах 1—4 теоремы 1.1 операторами A, G и H.

---

* Отсюда следует, что $K(p)$ может иметь в полуплоскости $Re p \geqslant -\lambda^0$ не более конечного числа нулей.

** Здесь используется обозначение

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{col}\left(\sum_1^2 L_{1j} x_j,\ \sum_1^2 L_{2j} x_j\right).$$

На основании (1.10) между изображениями по Лапласу функций $x(t) \equiv (Q_\varepsilon h)(t)$ и $h(t)$, соответственно $X(p)$ и $\Phi(p)$, имеет место соотношение

$$[N(p) + F(p)]\,X(p) = M(p)\,e^{-\theta p}\Phi(p), \tag{1.18}$$

причем в силу (1.13) $F(p)$—функция, аналитическая в полуплоскости $Re p > -\lambda_0$.

Обозначим через $\overline{u}_t(\xi)$ $(u \in C^n,\ \xi \geqslant 0)$ решение краевой задачи

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial \xi} = -\lambda_0 u \qquad (\xi \in (0,\ \infty)); \tag{1.19}$$

$$u_t(0) = (Q_\varepsilon h)(t) \equiv x(t) \qquad (t > 0),$$

$$\int\limits_0^\infty \| u_t(\xi) \|_n^2 e^{\varepsilon\xi} d\xi < \infty, \tag{1.20}$$

отвечающее нулевому начальному условию

$$\overline{u}_0(\xi) = 0 \qquad (\xi > 0). \tag{1.21}$$

Такое решение имеет вид $\overline{u}_t(\xi) = \exp(-\lambda_0\xi)\,x(t-\xi)\,\eta(t-\xi)$. Отсюда следует, что абсолютно-сходящийся интеграл $\widetilde{L}\,\overline{u}_t \equiv \int\limits_0^\infty l(\xi)\,e^{\varepsilon\xi}\,\overline{u}_t(\xi)\,d\xi$ будет оригиналом по Лапласу от функции $F(p)X(p)$. В свою очередь, отсюда вытекает, что при $t > 0$

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) x(t) + \widetilde{L}u_t = M\left(\frac{d}{dt}\right) h(t-\theta), \tag{1.22}$$

если

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(s-1)}(0) = 0, \qquad u_0 = \theta. \tag{1.23}$$

Известно [4], что матричное дифференциальное уравнение (1.22) можно также представить в таком виде:

$$\frac{dy}{dt} = Py + B\widetilde{L}u_t + Dh(t-\theta), \qquad x = Cy$$
$$(y = (y_1, \ldots, y_s), \quad y_i \in C^n, \qquad i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.24}$$

причем так, что

$$y_s = A_0 x, \ \ y_{s-1} = A_1 x + A_0 \dot{x} - B_1 h,$$
$$y_{s-2} = A_2 x + A_1 \dot{x} + A_0 \ddot{x} - B_2 h - B_1 \dot{h}, \ldots \tag{1.25}$$
$$y_1 = A_{s-1} x + \ldots + A_0 x^{(s-1)} - B_{s-1} h - \ldots - B_1 h^{(s-2)} - \widetilde{L}u_t.$$

Соотношения (1.12), (1.19)—(1.24) и устанавливают справедливость доказываемого утверждения.

2) Покажем теперь, что операторы A и G удовлетворяют условию б) определения 1.1. Обозначим через $W(p)$ функцию

$$W(p) \equiv [E_{ns}p - P - BF(p)\,C]^{-1} = -Pr(C^{ns})\,R(p,\ A)\,e^{-\theta p}/C^{ns},$$

которая, как очевидно, будет изображением функции

$$\beta(t) \equiv -Pr(C^{ns})\,U(t)/C^{ns}.$$

В силу (1.8), (1.14) $G(t) = C\beta(t-\theta) D$ (при $t>0$). С помощью матрицы $\beta(t)$, имея в виду (1.14)—(1.17), (1.19), (1.20), (1.22), (1.24), можно написать явное выражение для $U(t)$:

$$U(t)\begin{pmatrix} u_0(\xi) \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t(\xi) \\ y_t \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_t = y(t), \\ u_t(\xi) = \exp(-\lambda_0\xi)\, Cy(t-\xi)\,\eta(t-\xi) + \exp(-\lambda_0 t)\, u_0(\xi - t)\eta(\xi - t), \end{cases} \tag{1.26}$$

где

$$y(t) \equiv \beta(t) y_0 + \int_0^t \beta(t-\tau) B \int_\tau^\infty l(\xi) \exp[\lambda_0(\xi-\tau)]\, u_0(\xi-\tau)\, d\xi d\tau.$$

Покажем, что

$$|\beta(t)|_{ns\times ns} \leqslant \mathrm{const}\exp(-\lambda_0 t). \tag{1.27}$$

Нам надлежит, следовательно, оценить решение $v(t, v_0)$ системы

$$\frac{dv}{dt} = Pv + B\int_0^t l(\xi)\, Cv(t-\xi)\, d\xi, \tag{1.28}$$

отвечающее начальному условию

$$v(0,\ v_0) = v_0. \tag{1.28a}$$

Для этого мы сначала проведем оценку решения $w(t,\ M_0)$ $(w \in C^n$, $M_0 = (x_0^0,\ x_1^0, \dots,\ x_{s-1}^0)$, $x_i \in C^n)$ линейного уравнения

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) w(t) + \int_0^t l(\xi)\, w(t-\xi)\, d\xi = 0, \tag{1.29}$$

отвечающего начальному условию

$$w^{(k)}(t=0) = x_k^0 \qquad (k = 0,\ 1, \dots,\ s-1). \tag{1.29a}$$

Ввиду (1.12) такое решение существует для любого вектора $M_0 \in C^{ns}$ и определяется этим вектором однозначно [5]; оно легко находится в явном виде (с помощью преобразования Лапласа), и его можно оценить с учетом условия Б) теоремы. В результате получаем

$$\| w(t,\ M_0) \|_n \leqslant C_0 \| M_0 \|_{ns} \exp(-\lambda_0 t). \tag{1.30}$$

Далее, дифференцируя (1.29) по t и обозначая $w_1(t,\ M_0) = \dot{w}(t,\ M_0)$, получим, что при $t > 0$ $w_1(t,\ M_0)$ удовлетворяет уравнению

$$N\left(\frac{d}{dt}\right) w_1(t) + \int_0^t l(\xi)\, w_1(t-\xi)\, d\xi = -l(t)\, w(0),$$

откуда вполне аналогичным путем устанавливаем, что

$$\| w_1(t,\ M_0) \|_n \leqslant C_1 \| M_0 \|_{ns} \exp(-\lambda_0 t). \tag{1.30a}$$

Мы видим, что процедура получения оценок (1.30), (1.30 а) имеет рекуррентный характер, и, проделав ее еще $s-1$ раз (с учетом еще условия В теоремы), мы найдем, что

$$\| w^{(k)}(t, M_0) \|_n \leqslant \text{const} \| M_0 \|_{ns} \exp(-\lambda_0 t) \tag{1.31}$$
$$(k = 0, 1, \dots, s-1).$$

В силу того, что между $w(t, M_0)$ и соответствующим решением $v(t, v_0)$ уравнения (1.29) имеют место соотношения (1.25) с $h \equiv 0$, из (1.31) будет следовать, что $\| v(t) \|_{ns} \leqslant \text{const} \| v_0 \|_{ns} \exp(-\lambda_0 t)$, т. е. оценка (1.27).

Имея оценку (1.27), из (1.26) легко получить оценку (1.6), а также оценку (1.7). Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 1.1. Доказанная теорема определяет фундаментальное пространство неоднозначно и, более того, дает целый континуум таких пространств. То же самое, вообще говоря, можно сказать и об определении операторов A, G и H для данного фундаментального пространства. Однако в тех приложениях теоремы 1.1, которые нас будут интересовать ниже, эта неоднозначность не скажется, поскольку основной конечный результат выражается только через передаточную матрицу $K(p)$.

В качестве иллюстрации проверки условий теоремы 1.1 приведем простой пример: $n = 1$.

$$K(p) = (\rho_2 e^{\rho_2} - \rho_1 e^{\rho_1}) \left[\rho_2 e^{\rho_2} - \rho_1 e^{\rho_1} - \frac{k}{a} (e^{\rho_2} - e^{\rho_1}) (p - d) \right]^{-1},$$

где

$$\rho_1 = -\frac{b + \gamma(p)}{a}, \quad \rho_2 = \frac{-b + \gamma(p)}{a}, \quad \gamma(p) = (ap^2 + b^2 - ad)^{1/2}*.$$

Отметим, что соответствующее этому $K(p)$ интегральное уравнение (1.1) эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных на отрезке $[0,1]$ параболического типа.

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + d w(x, t)$$
$$(x \in (0, 1), \quad t > 0),$$
$$w(0, t) + k \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = h(t), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(1, t) = 0,$$
$$(Q_\varepsilon h)(t) \equiv w(0, t).$$

При выполнении очевидных условий**

$$c < 0, \quad b^2 > ad,$$
$$\rho_2 e^{\rho_2} - \rho_1 e^{\rho_1} \neq \frac{k}{a} (e^{\rho_2} - e^{\rho_1}) \tag{1.32}$$
$$(\operatorname{Re} p \geqslant 0)$$

функция $K(p)$ будет при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ аналитической и отличной от нуля. Легко установить также, что $K^{-1}(p) = C_{-1} p + c_0 + \frac{c_1}{p} + O\left(\frac{1}{|p|^2}\right)$ при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, где c_{-1} — вычет в бесконечно удаленной точке функции $-\frac{k}{a}(p - d) \rho_2^{-1}(p)$.

* Точнее, $\gamma(p)$ есть та ветвь корня, которая отображает комплексную плоскость в ее правую полуплоскость

** Используя метод работы [6], можно показать, что последнее условие из (1.32) будет выполнено, если $k < 0$, $d < 0$, $a > 0$.

В силу известных теорем операционного исчисления [3, 7] функция $F(p) = K^{-1}(p) - c_{-1}p$ — const есть сумма изображений от сдвигов дельта-функции Дирака и от обычного оригинала. Таким образом, $K(p)$ удовлетворяет при указанных выше условиях условиям теоремы 1.1 с $M(p) = \text{const}$, $\theta = 0$, $N(p) = c_{-1}p + \text{const}$.

Замечание 1.2. Отметим очевидный случай нахождения фундаментального пространства, не требующий применения теоремы 1.1. Это случай, когда интегральный оператор порожден априорно известным дифференциальным оператором, фазовое пространство которого само является фундаментальным для данного оператора в смысле определения 1.1. Так, например, интегральный оператор, порожденный дифференциальным оператором

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial w}{\partial x} + dw + g(x)\,h(t)$$

$$(x \in (0,\ 1),\quad t > 0),$$

$$w(0,\ t) + k\frac{\partial w}{\partial x}(0,\ t) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(1,\ t) = 0 \qquad (t > 0),$$

$$(Q_{\varepsilon}h)(t) \equiv w(0,\ t), \qquad h(t) \in L_1^{\sigma},$$

при условиях (1.32) и достаточной гладкости функций $g(x)$ и $h(t)$ будет иметь помимо фундаментального (универсального) пространства Φ, которое дается теоремой 1.1, еще и фундаментальное пространство

$$\Phi' = \Big\{(u(x),\ v(x));\ x \in [0,\ 1],\ u(x),\ v(x) \text{ — дважды дифференцируемы},$$
$$u(0) + k\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1) = 0\Big\}.$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ «ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО» К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим теперь класс интегральных уравнений

$$x(t) = \int_0^t G(t-\tau)\,(\varphi(x(\tau)) + \Psi(\tau))\,d\tau + f(t), \tag{2.1}$$

порожденный семейством операторов $\{Q_{\varepsilon}\}$ при $h(t) = \varphi(x,\ t) + \Psi(t)$. Как уже было сказано, основной целью настоящей работы является перенесение результатов, полученных в работе [1] (а также их обобщений), на уравнения вида (2.1). Здесь мы покажем, каким образом, используя понятие фундаментального пространства, осуществляется такое перенесение. Достаточным условием, обеспечивающим возможность перенесения, служит условие П), которому должно удовлетворять погружение в фундаментальное пространство*.

П). Если $\varphi(x,\ t) \subset K(C^n;\ L,\ M,\ \delta E_n)$ $(\delta > 0)$ [1], где L, M — некоторые комплексные $(n \times n)$-матрицы, то существуют такие ограниченные линейные $(\Phi \to \Phi)$ - операторы L_{Φ}, M_{Φ}, что $H\varphi(x,\ t) \subset K(\Phi;\ L_{\Phi};\ M_{\Phi},\ \delta' E_{\Phi})$ $(\delta' > 0)$.

В случае выполнения условия П) схема перенесения заключается в следующем. Интегральный оператор семейства $\{Q_{\varepsilon}\}$ погружается в пространство Φ, где он принимает вид дифференциального оператора.

* Ниже мы используем обозначения работы [1].

С учетом того, что $h(t)=\varphi(x, t)+\Psi(t)$, при условии, что $h(t)\subset L_1^\sigma$, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве с запаздывающим, вообще говоря, аргументом. Если величина запаздывания $\theta=0$, то к последнему непосредственно применимы теорема 4.1 и теорема 1.2 работы [1]. Аналогичные результаты могут быть получены (с небольшими отличиями в доказательствах) и для случая $\theta>0$. «Отображая» эти результаты снова в пространство C^n, приходим к искомым утверждениям относительно класса уравнений, порождаемого семейством $\{Q_\varepsilon/\Phi\}$ при $h(t)=\varphi(x, t)+\Psi(t)$. Это вместе с уже известными результатами [8] и дает искомое перенесение.

Мы приведем здесь два таких «перенесенных» результата для случая, когда погружение осуществляется с помощью теоремы 1.1. Погружение в универсальное фундаментальное пространство теоремы 1.1 имеет две существенные особенности, ввиду которых основные результаты оказываются естественными и не зависящими от произвольных параметров погружения:

1) условие П) всегда может быть выполнено,

2) при $L_\Phi\equiv H_*LG$, $M_\Phi\equiv H_*MH_л^{-1}$ скалярное произведение (см. обозначения) $(\langle\hat{L}_\Phi R(j\omega, A)e^{-i\omega\theta}+\hat{M}_\Phi)\,\hat{H}\xi,\ \hat{H}\xi\rangle_\Phi$ инвариантно относительно погружения и равняется $\langle(LK(j\omega)+M)\,\hat{\xi},\ \hat{\xi}\rangle_n$.

Итак, на основе теоремы 1.1 и теорем 4.1, 1 и 2 работы [1] устанавливаются следующие два основных результата.

*Теорема 2.1**. Предположим, что для класса интегральных уравнений (2.1), порожденных семейством $\{Q_\varepsilon\}$, выполняются следующие условия:

а$_1$) $\varphi(x, t)\subset K(C^n;\ L,\ M,\ \delta E_n)\qquad(\delta>0)$,

б$_1$) $\varphi(x, t)\doteq\varphi(x, t+\Omega)\qquad(\Omega\geqslant 0)$,

в$_1$) ядро $G(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1,

г) решения уравнения (1.2) при $f\equiv 0$ обладают свойством диссипативности**

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \|x(t)\|_n\leqslant C(\varepsilon)\qquad(\text{если }\sup_t\|\Psi(t)\|_n\leqslant\varepsilon),$$

д) $\operatorname{Re}[LK(j\omega)+M]\leqslant 0\qquad(\omega\in(-\infty,\ \infty))$.

Тогда, если $\Psi(t)$ есть Γ_Ω-почти-периодическая [1] (почти-периодическая) функция, то будет существовать такой элемент $\tilde{z}_0$ фундаментального пространства Φ, что а) решение $\tilde{x}(t)$ уравнения $x(t)=$ $=\int\limits_0^t G(t-\tau)\,(\varphi(x, \tau)+\Psi(\tau))\,d\tau+GU(t)\tilde{z}_0$, где G и $U(t)$ имеют вид (1.14), (1.26), является Γ_Ω почти-периодической (почти-периодической) функцией; б) при $t\to\infty$ любое решение уравнения класса (2.1) по норме стремится к функции $\tilde{x}(t)$, причем $\|x(t)-\tilde{x}(t)\|_n\leqslant\mathrm{const}\,e^{-\rho t}\quad(\rho>0)$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия а$_1$), в$_1$) теоремы 2.1 и, кроме того, следующие условия:

а$_2$) $\Psi(t)=\Psi_0(t)+\xi(t)$, где функция $\Psi_0(t)$ — Ω-периодическая, а $\xi(t)$ — случайный процесс класса $TS_+H_\gamma^n(\sigma)$ [1];

---

* Эта теорема является обобщением результатов Якубовича [9] на интегральные уравнения. (Нужно отметить, что в теоремах работы [9] условие г) отсутствует.)

** Это свойство, в частности, будет иметь место, если $\sup\limits_{x,\,t}\|\Psi(x, t)\|_n<\infty$.

б$_2$) при $\xi^{(t)}\equiv 0$ существует уравнение из рассматриваемого класса (2.1), обладающее периодическим решением (см. по этому поводу теорему 2.1);

в$_2$) существуют такие матрицы M', R, R', что для всех $\omega\in(-\infty, \infty)$ осуществляется неравенство $\operatorname{Re} R(j\omega) \leqslant 0$,

где

$$R(p) \equiv \begin{pmatrix} LK(p) + M & LK(p) + R' \\ e^{-\varepsilon p} LK(p)\, S(p) + M' & e^{-\varepsilon p} LK(p) S(p) + R \end{pmatrix},$$

$S(p)$ — функция, входящая в определение класса $TS_+H^n_\nu(\sigma)$ [1], ε — положительное число, большее величины $\nu - \nu_0$, где ν_0 — число, определяющееся условием $\| s(t) \|_n = 0$ (при $t < \nu_0$), $\frac{d}{dt} \| s(t) \|_n > 0$ (при $t = \nu_0$) и где $s(t)$ — оригинал от $S(p)$.

г$_2$) существует $\sigma > 0$, $\sigma = \sigma(\lambda)$, такое, что с вероятностью 1 $\| \xi t,) (\lambda \|_n + \varphi(x(t), t) \|_n \leqslant \text{const}, e^{\sigma t}, t > 0$.

Тогда имеет место оценка с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{T} \int_0^T \| \varphi(x, t) - \varphi(\tilde{x}(t), t) \|_n^2 dt \leqslant \frac{\sigma^2}{\delta} | R |_{n\times n}.$$

Замечание 2.1. Во многих случаях аналогичные этим результаты могут быть получены и без погружения в универсальное пространство, т. е. без выполнения условия в$_1$). Примером может служить уравнение в замечании 1.2. Более общий случай будет, когда в универсальное фундаментальное пространство погружается не «весь» оператор, а лишь его ограничение на каком-либо подпространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, 1632 (1969).
2. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, изд. Наука, М, 1967.
3. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Операционное исчисление, изд Высш. шк, М, 1966.
4. В. А. Катковник, Р А. Полуэктов, Многомерные системы управления, изд. Наука, М., 1966.
5. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, М., 1961
6. В. А Брусин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 321 (1969).
7. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально разностные уравнения, изд Мир, М., 1967.
8 В А. Якубович, Вестник ЛГУ, № 7, 109 (1967).
9. В. А. Якубович, ДАН СССР, 171, № 3, 533 (1966).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1969 г

ON ONE CLASS OF NON-AUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEMS DETERMINED BY NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

V. A. Broosin

Results obtained in [1] for differential equations in the Hilbert space are generalized for integral equations in finite-dimensional space.