ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1970

УДК 62—505:519.2

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ АДАПТИВНОМ ОЦЕНИВАНИИ АПРИОРНО НЕПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Д. Д. Мамаев, Р. Л. Стратонович

Выводится оптимальный итерационный алгоритм оценивания априорно непостоянных параметров распределения вероятностей в предположении марковского характера их изменения. Критерием оптимальности служит условие максимальности апостериорной плотности распределения оцениваемых параметров. Вывод алгоритма проводится методом гауссовой аппроксимации указанного апостериорного распределения. Полученный алгоритм конкретизируется для случая оценки непостоянного математического ожидания гауссовского распределения.

Обычная для математической статистики задача оценивания параметров ставится, как правило, следующим образом: требуется по независимым и одинаково распределенным реализациям $(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^n$ одной и той же случайной величины X оценить параметры ϑ плотности распределения вероятностей $p(x/\vartheta)$ последней (см., например, [1], гл. 5; [2], гл. 6).

Однако, как уже было отмечено в [3], предположение о независимости и одинаковой распределенности значений $x_1, \ldots, x_n$ можно рассматривать иногда лишь как первое приближение к действительности. В таком обычном приближении поставленная задача рассматривалась, например, в [4].

В настоящей работе снимается предположение об одинаковой распределенности реализаций в выборке $x_1, \ldots, x_n$, т. е. плотность вероятностей $p(x/\vartheta)$ уже не является постоянной, вследствие непостоянства ϑ. Относительно непостоянных параметров ϑ предполагается, что их изменение имеет марковский характер, точнее, что они априори удовлетворяют уравнению

$$\vartheta_i = \vartheta_{i-1} + m(\vartheta_i) + \xi_i;$$

ξ_i — независимые гауссовы случайные величины с нулевым средним значением и дисперсией ρ. В варианте непрерывного времени это уравнение имеет вид

$$\dot{\vartheta} = m(\vartheta) + \xi(t).$$

По выборке $x_1^n = (x_1, \ldots, x_n)$ оцениваются значения параметров ϑ_n в последний момент времени, их «снос» $m(\vartheta)$ и локальная дисперсия ρ.

При получении оптимального алгоритма оценивания используются результаты и методы теории условных марковских процессов. Так, для вывода итеративного алгоритма адаптации применен метод гауссовой аппроксимации апостериорного распределения оцениваемых параметров, ранее использовавшийся в [3, 5, 7]. Условием его применимости в данном случае служит предполагаемая относительная малость дисперсии оцениваемых параметров.

При нулевых значениях параметров, описывающих непостоянство плотности вероятностей $p(x/\vartheta)$, полученный алгоритм оценивания совпадает с соответствующими алгоритмами в работах [3, 4], выведенными для случая априорно постоянной плотности распределения $p(x/\vartheta)$.

1. ОБЩАЯ МЕТОДИКА ВЫВОДА ОПТИМАЛЬНОГО АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА

Пусть $x_1^n=(x_1, \dots , x_n)$ — совокупность наблюдаемых реализаций некоторой случайной величины X. Их условную плотность распределения $p(x/\vartheta)$ предполагаем известным образом зависящей от набора неизвестных параметров ϑ, меняющихся от наблюдения к наблюдению.

Процесс изменения параметров ϑ предполагается марковским с переходной вероятностью $p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha)$, зависящей от параметров α, также заранее неизвестных. Требуется по результатам наблюдений x_1^n оптимальным образом оценить параметры ϑ и α в последний «n»-ый момент времени.

Предполагая, что при фиксированных $\vartheta_1, \dots , \vartheta_n$ значения $x_1, \dots , x_n$ являются независимыми, запишем для совокупности $\vartheta_1^n = (\vartheta_1, \dots , \vartheta_n)$, x_1^n и α совместную плотность распределения

$$p(x_1^n, \vartheta_1^n, \alpha) = p(\alpha) \prod_{k=1}^{n} p(x_k/\vartheta_k)\, p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha). \tag{1.1}$$

Чтобы не вводить дополнительной неизвестной функции, будем предполагать, что априорное распределение

$$p(\alpha) = \text{const}.$$

По формуле обратной вероятности находим апостериорное распределение для оцениваемых параметров

$$p(\vartheta_1^n, \alpha/x_1^n) = \text{const} \prod_{k=1}^{n} p(x_k/\vartheta_k)\, p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha), \tag{1.2}$$

откуда финальная плотность вероятностей выражается в виде

$$p(\vartheta_n, \alpha/x_1^n) = \text{const} \int \dots \int p(x_k/\vartheta_k)\, p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha)\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}. \tag{1.3}$$

Для финальной вероятности (1.3) имеет место следующее рекуррентное соотношение, типичное в теории условных марковских процессов [6, 7]

$$p(\vartheta_n, \alpha/x_1^n) = \text{const}\, p(x_n/\vartheta_n) \int p(\vartheta_{n-1}, \alpha/x_1^{n-1})\, p(\vartheta_n/\vartheta_{n-1}, \alpha)\, d\vartheta_{n-1}. \tag{1.4}$$

Оно вытекает непосредственно из (1.3).

Требуемые оптимальные оценки $\hat{\vartheta}_n$ и $\hat{\alpha}_n$ параметров ϑ_n и α могут быть найдены из условия максимума апостериорной плотности вероятностей (1.3). Для получения искомого оценочного алгоритма в итеративной форме удобно воспользоваться методом гауссовой аппроксимации апостериорной плотности вероятностей $p(\vartheta_n, \alpha/x_1^n)$ [5, 6, 7], применяя его к уравнению (1.4).

2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПАРАЛЛЕЛЬНО С ОЦЕНКОЙ ВЕКТОРА ИХ СНОСОВ

Будем предполагать, что процесс изменения параметров $\vartheta = (\vartheta^{(1)}, \dots , \vartheta^{(r)})$ описывается уравнением

$$\vartheta_k = \vartheta_{k-1} + m(\vartheta_k) + \xi_k, \tag{2.1}$$

где

$$m(\vartheta) = \mu - \eta\vartheta; \quad \mu = \text{const}; \quad \eta = \text{const}, \tag{2.2}$$

а ξ_k — независимые случайные величины с гауссовской плотностью распределения вероятностей

$$p(\xi\,|\,\rho) = \det{}^{1/2} \frac{\rho}{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}\xi^T \rho \xi\right). \tag{2.3}$$

Как легко видеть из (2.1) и (2.3), плотность распределения переходных вероятностей $p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha)$ имеет вид

$$p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \mu, \eta, \rho) = \mathrm{const} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(1+\eta)\vartheta_k - \vartheta_{k-1} - \mu]^T \times \right.$$
$$\left. \times \rho[(1+\eta)\vartheta_k - \vartheta_{k-1} - \mu]\right\}. \tag{2.4}$$

Таким образом, параметры α, введенные выше, имеют в данном случае смысл вектора «сносов» μ, коэффициентов η и локальных дисперсий ρ^{-1}. В этом разделе будем предполагать, что среди параметров μ, η, ρ неизвестными являются лишь только μ и только они подлежат оцениванию. Отказ от оценок матриц η и ρ связан единственно с уменьшением объема выкладок и не носит принципиального характера.

Апостериорное распределение для оцениваемых параметров ϑ_n и μ аппроксимируем гауссовой функцией

$$p(\vartheta_n, \mu/x_1^n) \approx \mathrm{const} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vartheta_n - \hat\vartheta_n)^T b_n (\vartheta_n - \hat\vartheta_n) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(\mu - \hat\mu_n)^T c_n (\mu - \hat\mu_n) - (\vartheta_n - \hat\vartheta_n)^T d_n (\mu - \hat\mu_n)\right\}. \tag{2.5}$$

Представляя в аналогичной форме $p(\vartheta_{n-1}\ \mu/x_1^{n-1})$ и учитывая, что плотность переходных вероятностей $p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \mu)$ берется в виде (2.4), мы уже можем провести интегрирование в правой части уравнения (1.4), пользуясь при этом известной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^T \gamma \alpha + \alpha^T \beta\right) d\alpha = \det{}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\beta^T \gamma^{-1} \beta\right), \tag{2.6}$$

γ — положительно определенная невырожденная матрица. Логарифмируя получившееся после интегрирования в (1.4) соотношение и затем приравнивая порознь коэффициенты при линейных, квадратичных и перекрестных по $(\vartheta_n - \hat\vartheta_{n-1})$ и $(\mu_n - \hat\mu_{n-1})$ членах, приходим к следующим уравнениям для оптимального алгоритма

$$b_n(\hat\vartheta_n - \hat\vartheta_{n-1}) + d_n(\hat\mu_n - \hat\mu_{n-1}) = \frac{\partial \ln p(x_n/\eta_{n-1})}{\partial \vartheta^T} +$$
$$+ (1+\eta)^T b_{n-1}(b_{n-1} + \rho)^{-1} \rho(\hat\mu_{n-1} - \eta\hat\vartheta_{n-1}); \tag{2.7}$$
$$d_n^T(\hat\vartheta_n - \hat\vartheta_{n-1}) + c_n(\hat\mu_n - \hat\mu_{n-1}) = (d_{n-1}^T - b_{n-1})(b_{n-1} + \rho)^{-1} \rho(\hat\mu_{n-1} - \eta\hat\vartheta_{n-1}),$$

где матричные коэффициенты b_n, d_n и c_n определяются рекуррентным образом по формулам

$$b_n = (1+\eta)^T b_{n-1}(1+\eta) - (1+\eta)^T b_{n-1}(b_{n-1} + \rho)^{-1} b_{n-1}(1+\eta) -$$

$$-\frac{\partial^2 \ln p\,(x_n/\hat{\vartheta}_{n-1})}{\partial\vartheta^T\,\partial\vartheta};$$

$$c_n = c_{n-1} + \rho - (d_{n-1} + \rho)^T (b_{n-1} + \rho)^{-1} (d_{n-1} + \rho); \tag{2.8}$$
$$d_n = (1 + \eta)^T d_{n-1} - (1 + \eta)^T b_{n-1} (b_{n-1} + \rho)^{-1} (d_{n-1} + \rho).$$

Разумеется, систему уравнений (2.7) можно разрешить относительно $\hat{\vartheta}_n - \hat{\vartheta}_{n-1}$ и $\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1}$, что даст искомый оценочный алгоритм в окончательном виде. Начальные значения $\hat{\vartheta}_0$, $\hat{\mu}_0$, b_0, c_0, d_0 в алгоритме (2.7), (2.8) — нулевые.

При выводе (2.7), (2.8) мы предполагали, что матрица локальных дисперсий ρ^{-1} и параметры η известны.

Такого предположения, конечно, можно и не делать, производя параллельно с оценкой ϑ и μ также оценку η и ρ. Эта задача рассматривается ниже для одномерных ϑ, μ, η и ρ.

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПАРАЛЛЕЛЬНО С ОЦЕНКОЙ ЕГО СНОСА И ЛОКАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ

Включая локальную дисперсию ρ^{-1} (точнее, обратную ей величину ρ) и параметр η «сноса» $m(\vartheta) = \mu - \eta\vartheta$ в число оцениваемых параметров α и ограничиваясь одномерным случаем (ϑ — единственный параметр), будем финальную плотность вероятностей (1.3) аппроксимировать гауссовой функцией следующего вида:

$$p\,(\vartheta_n,\ \mu,\ \rho,\ \eta/x_1^n) = \text{const} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(\Theta_n - \hat{\Theta}_n)^T B_n\,(\Theta_n - \hat{\Theta}_n)\right\}, \tag{3.1}$$

где

$$\Theta_n = \begin{Vmatrix} \vartheta_n \\ \alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vartheta_n \\ \mu \\ \rho \\ \eta \end{Vmatrix};\ \hat{\Theta}_n = \begin{Vmatrix} \hat{\vartheta}_n \\ \hat{\alpha}_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{\vartheta}_n \\ \hat{\mu}_n \\ \hat{\rho}_n \\ \hat{\eta}_n \end{Vmatrix};\ B_n = \begin{Vmatrix} a_n & c_n \\ c_n^T & h_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{ij}^{(n)} \end{Vmatrix} \tag{3.1a}$$

$$(ij = 1,\ \ldots,\ 4)$$

($(B_n$ — оценочная матрица обратных дисперсий параметров Θ_n). Таким образом, в данном случае параметры α в (1.3), (1.4) являются совокупностью величин μ, ρ, η; $\alpha^T = (\mu, \rho, \eta)$. Представляя в аналогичной (3.1) форме плотность вероятностей предыдущего шага, подставляя оба эти выражения в рекуррентные соотношения (1.4) (переходная плотность вероятностей, входящая в (1.4), при этом имеет вид (2.4), производя интегрирование, логарифмирование и сравнение коэффициентов при линейных, квадратичных и перекрестных по $(\vartheta_n - \hat{\vartheta}_{n-1})$, $(\mu - \hat{\mu}_{n-1})$, $(\rho - \hat{\rho}_{n-1})$ и $(\eta - \hat{\eta}_{n-1})$ членах, приходим к следующему оптимальному алгоритму оценки.

$$\hat{\Theta}_n = \hat{\Theta}_{n-1} + B_n^{-1} Y_n(x_n);$$
$$B_n = B_{n-1} + \Delta_n(x_n), \tag{3.2}$$

где $Y_n = \| Y_i^{(n)} \|$ и $\| \Delta_n = \| \Delta_{ij}^{(n)} \|$ $(i,j = 1, \ldots, 4)$ определяются через оценочные значения параметров $\hat{\Theta}_{n-1}$ и B_{n-1} на предыдущем шаге алгоритма и новое наблюдение x_n по формулам (I), (II) приложения. Начальные условия в алгоритме (3.2) могут быть выбраны следующими

$$
\begin{gathered}
\hat{\vartheta}_1 = -\frac{\partial \ln p(x_1/0)}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial^2 \ln p(x_1/0)}{\partial \vartheta^2} \right]^{-1}; \\
\hat{\mu}_1 = 0; \\
\hat{\rho}_1 = -\frac{\partial^2 \ln p(x_1/0)}{\partial \vartheta^2}; \\
\hat{\eta}_1 = 0; \\
B_1 = 0,
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

В отличие от алгоритма (2.8), (2.9) для работы которого необходимо знать параметры η и ρ, полученный алгоритм (3.2) замечателен тем, что при его использовании не требуется привлечения никаких априорных данных.

4. ПРИМЕР: ОЦЕНКА НЕПОСТОЯННОГО СРЕДНЕГО ДЛЯ ГАУССОВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим в качестве примера случай, когда распределение $p(x/\vartheta)$ является гауссовым с фиксированной дисперсией, которую будем считать известной, и переменным средним значением ϑ

$$
p(x/\vartheta) = \text{const} \exp\left[-\frac{1}{2} (x - \vartheta)^2 \right]. \tag{4.1}
$$

Локальную дисперсию ρ^{-1} и параметр η в выражении $m(\vartheta) = \mu - \eta\vartheta$ будем предполагать известными. Переходная плотность вероятностей $p(\vartheta_k/\vartheta_{k-1}, \alpha)$ по-прежнему берется в виде (2.4).

Требуется по заданной выборке x_1^n оценить значение параметра ϑ_n в последний момент времени; попутно определяется и постоянный снос μ этого параметра.

Используя формулы (2.7), (2.8) для оптимального алгоритма, будем иметь

$$
\begin{gathered}
b_n (\hat{\vartheta}_n - \hat{\vartheta}_{n-1}) + d_n (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1}) = \sigma (\hat{\vartheta}_{n-1} - x_n) + \\
+ \frac{(1+\eta)\, b_{n-1} \rho (\hat{\mu}_{n-1} - \eta \hat{\vartheta}_{n-1})}{b_{n-1} + \rho};
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

$$
\begin{gathered}
d_n (\hat{\vartheta}_n - \hat{\vartheta}_{n-1}) + c_n (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1}) = \frac{(d_{n-1} - b_{n-1}) \rho (\hat{\mu}_{n-1} - \eta \hat{\vartheta}_{n-1})}{b_{n-1} + \rho}; \\
b_n = (1+\eta)^2 \left[b_{n-1} - \frac{b_{n-1}^2}{b_{n-1} + \rho} \right] + \sigma; \\
c_n = c_{n-1} + \rho - \frac{(d_{n-1} + \rho)^2}{b_{n\ 1} + \rho};
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

$$d_n = (1+\eta)\left[d_{n-1} - \frac{(d_{n-1}+\rho)\, b_{n-1}}{b_{n-1}+\rho} \right].$$

Начальные условия $\hat{\vartheta}_0$, $\hat{\mu}_0$, b_0, d_0, c_0 — нулевые. Разрешая (4.2) относительно $(\hat{\vartheta}_n - \hat{\vartheta}_{n-1})$ и $(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})$, получим совместно с уравнениями (4.3) искомый итеративный алгоритм.

Несколько иную форму итеративного алгоритма оценивания удается отыскать, если исходить из соотношения (1.3), имеющего в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} p(\vartheta_n, \mu/x_1^n) = \mathrm{const} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\,\sigma \sum_{k=1}^{n} (x_k - \vartheta_k)^2 - \\ -\frac{1}{2}\,\rho \sum_{k=1}^{n} [(1+\eta)\,\vartheta_k - \vartheta_{k-1} - \mu]^2 \Big\}\, d\vartheta_1 \cdot \ldots \cdot d\vartheta_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Пользуясь формулой (2.6), взятой для одномерного случая, проведем $(n-1)$-кратное интегрирование в выражении (4.4). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} p(\vartheta_n\, \mu/x_1^n) = \mathrm{const}\, \exp\Big\{ \frac{\eta\rho\mu^2}{2} + \frac{[\Psi_{n-1} + \rho(1+\eta)\,\vartheta_n]^2}{2\,\Phi_{n-1}} - \\ -\frac{1}{2}\,\rho(1+\eta)^2\vartheta_n^2 - 2\vartheta_n(1+\eta)\,\mu] - \frac{1}{2}\,\sigma\,(x_n - \vartheta_n)^2 \Big\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где величины Φ_{n-1} и Ψ_{n-1} задаются следующими рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sigma + \rho + (1+\eta)^2\rho; \\ \Phi_n &= \sigma + \rho + (1+\eta)^2\rho - \frac{\rho^2(1+\eta)^2}{\Phi_{n-1}}; \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sigma x_1 + \eta\mu\rho; \\ \Psi_n &= (1+\eta)\,\rho\,\frac{\Psi_{n-1}}{\Phi_{n-1}} + \sigma x_n + \eta\mu\rho. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя критерий максимума апостериорного распределения (4.5), приходим к следующим уравнениям для оптимальных оценок

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\left\{ \hat{\vartheta}_n(1+\eta) + \frac{\Psi_{n-1} + \rho(1+\eta)\,\hat{\vartheta}_n}{\rho\,\Phi_{n-1}}\, \Omega_{n-1} \right\}; \tag{4.8}$$

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{\Psi_n + \rho\hat{\mu}_n}{\Phi_n - \rho}, \tag{4.9}$$

где величины Ω_{n-1} определяются рекуррентным образом по формулам

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \eta\rho; \\ \Omega_n &= \rho(1+\eta)\,\frac{\Omega_{n-1}}{\Phi_{n-1}} + \rho\eta. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Формулы (4.10) получаются дифференцированием (4.7) по μ. Алгоритм в форме (4.8), (4.9) математически эквивалентен полученному ранее алгоритму (4.2), (4.3) и может быть сведен к нему путем несложных преобразований. Для случая, когда $\eta = 0$, т. е. имеется только постоянный на каждом шагу снос μ параметра ϑ, выражение (4.8) приобретает более простой вид

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\hat{\vartheta}_n. \tag{4.11}$$

При этом $\hat{\vartheta}_n$ по-прежнему определяется формулой (4.9), где следует положить η, равным нулю.

5. ПЕРЕХОД К НЕПРЕРЫВНОМУ ВРЕМЕНИ

Все выведенные ранее уравнения для оптимального алгоритма адаптации записаны в варианте дискретного времени.

Представляет интерес получение аналогичных уравнений и для случая непрерывного времени. Будем, как и в разделе 3, рассматривать вектор $\bar{\theta}$ параметров ϑ, α (см. 3.1 а)).

При переходе к непрерывному времени уравнение (1.4), определявшее трансформацию апостериорного распределения, заменяется на следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial p_{\text{пс}}(\theta)}{\partial t} = L_{\text{пс}}\, p_{\text{пс}}(\theta), \tag{5.1}$$

где $p_{\text{пс}}$ — апостериорная плотность вероятностей, $L_{\text{пс}}$ — апостериорный оператор для процесса θ.

$$L_{\text{пс}} = L_{\text{пр}} + F(x,\ \theta,\ t) - \overline{F(x,\ \theta,\ t)} \tag{5.2}$$

Здесь $L_{\text{пр}}$ — априорный оператор [6] для процесса θ, имеющий вид

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vartheta^T}\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\mu - \eta\vartheta), \tag{5.3}$$

а функция $F(x,\ \theta,\ t)$ связана с функцией правдоподобия соотношением

$$F(x,\ \theta,\ t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\ln p(x/\theta)}{\Delta}. \tag{5.4}$$

Подробнее об этом см. [5–7].

Черта сверху в (5.2) означает усреднение с вероятностью $p_{\text{пс}}(\theta)$. Вместо дифференциального уравнения (5.1) можно рассматривать систему дифференциальных уравнений для параметров, заменяющих плотность распределения вероятностей.

В гауссовом приближении (см. [5]) такими параметрами являются вектор математических ожиданий $\hat{\theta}$ и матрица обратных дисперсий B

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix}\hat{\vartheta}\\ \hat{\alpha}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a & c\\ c^T & h\end{pmatrix}.$$

Используя результаты работы [5] (см. (59) из [5]), можем записать следующую систему дифференциальных уравнений для компонент $\hat{\vartheta}$, $\hat{\alpha}$ вектора $\hat{\theta}$ и элементов a, c, h матрицы B.

$$
\begin{gathered}
a\,\frac{d\hat{\vartheta}}{dt}+c\,\frac{d\hat{\alpha}}{dt}=a\hat{m}\,(\hat{\vartheta})+\frac{\partial F(x,\,\hat{\theta},\,t)}{\partial\vartheta^{T}};\\
c^{T}\,\frac{\partial\hat{\vartheta}}{dt}+h\,\frac{d\hat{\alpha}}{dt}=\frac{\partial F\,(x,\,\hat{\theta},\,t)}{\partial\alpha^{T}};\\
\frac{da}{dt}=a\,\hat{\eta}+\hat{\eta}^{T}\,a-a\,\hat{\rho}^{-1}\,a-\frac{\partial^{2}F(x,\,\hat{\theta},\,t)}{\partial\vartheta^{T}\,\partial\vartheta};\\
\frac{dc}{dt}=-\frac{\partial^{2}F\,(x,\,\hat{\theta},\,t)}{\partial\vartheta^{T}\,\partial\alpha};\\
\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial^{2}\,F\,(x,\,\hat{\theta},\,t)}{\partial\alpha^{T}\,\partial\alpha};\\
\hat{m}\,(\hat{\vartheta})=\hat{\mu}-\hat{\eta}\,\hat{\vartheta}.
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

Система уравнений (5.5) и представляет собой те дифференциальные уравнения, в которые переходит выведенный ранее алгоритм адаптации, если перейти к непрерывному времени ($\Delta t\to 0$).

В заключение заметим, что для перехода к случаю оценки параметров априорно постоянной плотности распределения, следует устремить параметры μ и η к нулю, ρ — к бесконечности. При этом алгоритм, задаваемый уравнениями (2.7), (2.8), переходит в соответствующие алгоритмы из [3, 4] следующего вида:

$$
\begin{gathered}
\hat{\vartheta}_{n}=\hat{\vartheta}_{n-1}+b_{n}^{-1}\,\frac{\partial\ln p\,(x_{n}/\hat{\vartheta}_{n-1})}{\partial\vartheta^{T}};\\
b_{n}=b_{n-1}-\frac{\partial^{2}\ln p\,(x_{n}/\vartheta_{n-1})}{\partial\vartheta^{T}\,\partial\vartheta}.
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

Более того, естественно ожидать, что если наблюдения являются реализациями случайной величины с фиксированной плотностью распределения, то выведенные в настоящей работе алгоритмы будут работать так же, как и алгоритм (5.6), оптимальный для априорно постоянного случая.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Явный вид столбца $Y_n(x_n)$ и матрицы $\Delta_n(x_n)$, входящих в алгоритм (3.2):

$$
Y_{1}^{(n)}=(1+\hat{\eta}_{n-1})\,\frac{b_{11}^{n-1}\,\hat{\rho}_{n-1}\,\hat{m}_{n-1}\,(\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}}+\frac{\partial\ln p\,(x_{n}/\hat{\vartheta}_{n-1})}{\partial\vartheta};
$$

$$
Y_{2}^{(n)}=\frac{\hat{\rho}_{n-1}\,(b_{12}^{n-1}-b_{11}^{n-1})\,\hat{m}_{n-1}\,(\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}};
$$

$$
Y_{3}^{(n)}=\frac{b_{13}^{n-1}\,\hat{\mu}_{n-1}\,\hat{\rho}_{n-1}}{\varkappa_{n-1}}-\frac{b_{11}^{n-1}}{2\,\hat{\rho}_{n-1}\,\varkappa_{n-1}}-\frac{(b_{11}^{n-1})^{2}\,\hat{\mu}_{n-1}^{2}}{2\varkappa_{n-1}^{2}}+
\tag{I.}
$$

$$+\frac{(\hat{\vartheta}_{n-1}\hat{\eta}_{n-1})^2}{\varkappa_{n-1}^2}\left[\frac{(b_{11}^{n-1})^2}{2}-\hat{\rho}_{n-1}^2\right];$$

$$Y_4^{(n)}=\frac{1}{\varkappa_{n-1}}\left[\hat{\rho}_{n-1}(\hat{\vartheta}_{n-1}^2\hat{\rho}_{n-1}+b_{14}^{n-1}\hat{\mu}_{n-1})-\right.$$

$$\left.-\hat{\eta}_{n-1}(\hat{\vartheta}_{n-1}^2\hat{\rho}_{n-1}+b_{14}^{n-1}\hat{\vartheta}_{n-1})-\hat{\mu}_{n-1}\hat{\vartheta}_{n-1}\right].$$

Здесь всюду

$$\hat{m}_n(\hat{\vartheta}_n)=\hat{\mu}_n-\hat{\eta}_n\hat{\vartheta}_n;$$

$$\varkappa_n=b_{11}^n+\hat{\rho}_n.$$

$$\Delta_{11}^{(n)}=-(2\hat{\eta}_{n-1}+\hat{\eta}_{n-1}^2)\,b_{11}^{n-1}-(1+\hat{\eta}_{n-1})^2\frac{(b_{11}^{n-1})^2}{\varkappa_{n-1}}-$$

$$-\frac{\partial^2\ln p(x_n/\hat{\vartheta}_{n-1})}{\partial\vartheta^2};$$

$$\Delta_{22}^{(n)}=\hat{\rho}_{n-1}-\frac{(b_{12}^{n-1}+\hat{\rho}_{n-1})^2}{\varkappa_{n-1}}; \qquad \text{II.}$$

$$\Delta_{33}^{(n)}=\frac{1}{2\hat{\rho}_{n-1}^2}-\frac{1}{2\varkappa_{n-1}}\left\{1+\frac{2\,[b_{13}^{n-1}\varkappa_{n-1}+b_{11}^{n-1}\hat{\mu}_{n-1}]^2}{\varkappa_{n-1}}\right\}-$$

$$-\frac{\hat{\vartheta}_{n-1}\hat{\eta}_{n-1}}{\varkappa_{n-1}^3}\left\{2b_{11}^{n-1}\hat{\mu}_{n-1}\hat{\rho}_{n-1}+\hat{\vartheta}_{n-1}\left[\left(b_{11}^{n-1}\right)^2\hat{\eta}_{n-1}+2\hat{\rho}_{n-1}\varkappa_{n-1}(1+\hat{\eta}_{n-1})\right]\right\};$$

$$\Delta_{44}^{(n)}=\hat{\vartheta}_{n-1}^2\hat{\rho}_{n-1}-\frac{(b_{14}^{n-1}+\hat{\vartheta}_{n-1}\hat{\rho}_{n-1})^2}{\varkappa_{n-1}};$$

$$\Delta_{12}^{(n)}=\hat{\eta}_{n-1}b_{12}^{n-1}-\frac{(\hat{\eta}_{n-1}+1)\,b_{11}^{n-1}(b_{12}^{n-1}+\hat{\rho}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}};$$

$$\Delta_{13}^{(n)}=\hat{\eta}_{n-1}b_{13}^{n-1}-(\hat{\eta}_{n-1}+1)\left[\frac{b_{11}^{n-1}b_{13}^{n-1}}{\varkappa_{n-1}}+\frac{(b_{11}^{n-1})^2\hat{m}_{n-1}(\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}^2}\right.;$$

$$\Delta_{14}^{(n)}=-\frac{b_{11}^{n-1}}{\varkappa_{n-1}}(\hat{\eta}_{n-1}+1)(b_{14}^{n-1}+\hat{\rho}_{n-1}\hat{\vartheta}_{n-1})+\frac{b_{11}^{n-1}\hat{\rho}_{n-1}\hat{m}_{n-1}(\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}}+$$

$$+\hat{\eta}_{n-1}b_{14}^{n-1};$$

$$\Delta_{23}^{(n)}=\frac{\hat{\mu}_{n-1}b_{11}^{n-1}(b_{11}^{n-1}-b_{12}^{n-1})}{\varkappa_{n-1}^2}-\frac{b_{13}^{n-1}(b_{12}^{n-1}+\hat{\rho}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}};$$

$$\Delta_{24}^{(n)}=-\frac{b_{14}^{n-1}(b_{12}^{n-1}+\hat{\rho}_{n-1})+\hat{\vartheta}_{n-1}\hat{\rho}_{n-1}(b_{12}^{n-1}+b_{11}^{n-1})}{\varkappa_{n-1}};$$

$$\Delta_{34}^{(n)} = \frac{b_{11}^{n-1}\,(b_{14}^{n-1} - b_{11}^{n-1}\,\hat{\vartheta}_{n-1})\,\hat{m}_{n-1}(\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}^{2}} - \frac{\hat{\vartheta}_{n-1}^{2}\,(b_{11}^{n-1} + 2\hat{\rho}_{n-1}) + b_{13}^{n-1}\,(b_{14}^{n-1} + \hat{\rho}_{n-1}\,\hat{\vartheta}_{n-1})}{\varkappa_{n-1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Р. Рао, Линейные статистические методы и их применения, изд. Наука, М., 1968.
2. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1968.
3. Р. Л. Стратонович, Автоматика и телемеханика, № 1, 96, 1968.
4 Р. Л. Стратонович, Быстрота сходимости алгоритмов оценки плотности распределения вероятностей, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 3 (1969).
5. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, 5, № 11, 1751 (1960).
6. Р. Л. Стратонович, Теория условных марковских процессов и ее применение к теории оптимального управления, изд. МГУ, 1966.
7. И. А Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович, Математические основы современной радиоэлектроники, изд. Сов. радио, М., 1968.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 21 июля 1969 г.

ON OPTIMAL ADAPTIVE ESTIMATION OF A PRIORI INCONSTANT PARAMETERS OF DISTRIBUTION

D. D. Mamaev, R. L. Stratonovich

An optimal iterative algorithm is derived for estimation of a priori inconstant parameters of probabilities distribution under the assumption of the Markovian character of their changing. The condition of a posteriori density maximum of estimated parameters distribution serves as an optimality criterion. The algorithm is derived by the method of the Gauss approximation of the mentioned a posteriori distribution. The obtained algorithm is particularized for the estimation of an inconstant mathematical expectation of the Gaussian distribution.