

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Макаров Г. И., Новиков В. В., Орлов А. Б.</b> Современное состояние исследований распространения СДВ в волноводном канале Земля—ионосфера (Обзор)	321
<b>Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В.</b> Излучение и распространение электромагнитных волн в хаотически неоднородных средах (Обзор) . . . . .	356
<b>Лапшин В. И., Саломонович А. Е., Соломонов С. В., Троицкий В. Ф., Фрадков А. Б., Хайкин А. С.</b> Измерение яркостной температуры излучения атмосферы Земли в субмиллиметровом диапазоне с высоты 35 км . . . . .	388
<b>Валаева С. Р., Сухоруков А. П.</b> О генерации второй оптической гармоники при взаимодействии $oe - e$ . . . . .	395
<b>Гулин Э. П.</b> Корреляция волнового поля, рассеянного взволнованной водной поверхностью . . . . .	401
<b>Орлов Ю. И.</b> Коротковолновая асимптотика отраженного поля диполя, расположенного над неоднородным линейным слоем . . . . .	412
<b>Буц В. А.</b> Возбуждение плоского гиротропного волновода . . . . .	422
<b>Буц В. А.</b> Теория резонаторов с невзаимным заполнением . . . . .	426
<b>Розенберг В. И.</b> Дифракция и рассеяние электромагнитных волн на неоднородном шаре . . . . .	431
<b>Власов Б. И., Котосонов Н. В., Пьяных Ю. М.</b> О пространственном разрешении теплового способа записи и визуализации электромагнитного поля на плечевых структурах' . . . . .	446
<b>Биленко Д. И., Луньков А. Е., Язиков В. Н.</b> Измерение модуля и фазы коэффициента отражения полупроводников в миллиметровом диапазоне длин волн . . . . .	453
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Литвинова Т. П.</b> О ширине частотного спектра при сильных флуктуациях амплитуды волн в турбулентной атмосфере . . . . .	462
<b>Панченко Б. А.</b> Поляризационные характеристики перфорированных экранов . . . . .	465
<b>Панченко Б. А., Соловьевянова И. П.</b> Аномальные отражения электромагнитных волн от дифракционной решетки со слоем диэлектрика . . . . .	467
<b>Коновалова Т. А.</b> Возбуждение диполем открытого плоского волновода . . . . .	470

**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВ В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ  
ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА**

(Обзор)

*Г. И. Макаров, В. В. Новиков, А. Б. Орлов*

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Общая теория . . . . .	321
2 Приближенные методы исследования поведения собственных значений . . . . .	329
3. Результаты теоретических расчетов и сопоставление их с экспериментальными данными . . . . .	337

В настоящей работе будут рассмотрены основные особенности электромагнитных полей СДВ диапазона. К этому диапазону относят обычно электромагнитные колебания с частотой от 1 до 60 кгц, причем границы диапазона носят, разумеется, довольно условный характер. Интерес к изучению распространения сверхдлинных радиоволн возродился примерно с 50-х годов и вызван возможностью использования СДВ (особенно частот 10—20 кгц) для связи в глобальном масштабе. Одной из существенных особенностей полей этого диапазона является их довольно высокая стабильность по отношению к трудно предсказуемым нерегулярным вариациям ионосферы. Это делает перспективным использование его при построении фазовых навигационных систем.

Остановимся на трех аспектах проблемы: состояние общей теории; развитые за последние годы приближенные методы расчетов, позволяющие проводить качественные исследования; основные результаты численных расчетов и их сопоставление с экспериментом.

**1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ**

За последние 20 лет появилось весьма большое число теоретических работ, посвященных расчету электромагнитных полей в волноводном канале Земля—ионосфера. Их число столь велико, что даже простое перечисление их заняло бы слишком много места. Однако положение облегчается тем, что в настоящее время наметились некоторые общие идеи исследований [1—17], причем методы, используемые большинством авторов, отличаются в малосущественных деталях, на которых не имеет смысла останавливаться.

Прежде всего остановимся коротко на физической модели явления. Заметим, что эффективное число соударений, характерное для высот 60—90 км (только эта часть ионосферы существенно влияет на формирование поля СДВ в волноводном канале), заметно превышает частоту сигналов. Поэтому ионосфера ведет себя как неоднородный по высоте и анизотропный (из-за влияния постоянного магнитного поля Земли) проводник. Кроме того, следует учитывать, что волны рассматриваемого диапазона сравнительно глубоко проникают в почву, и поэтому необходимо принимать во внимание также неоднородность (по глубине) земной поверхности. Что же касается рефракции в тропосфере, то можно думать\*, что ее роль в данном случае несущественна, поскольку дли-

\* Эти соображения можно подтвердить также количественными расчетами.

ны волн электромагнитных колебаний превышают характерные для тропосферной рефракции масштабы.

Сказанное выше приводит к следующей математической постановке задачи. Ищется поле, создаваемое вертикальным электрическим диполем, расположенным между двумя концентрическими сферами. Внутренняя сфера с границей  $r = a$  неоднородна по радиусу и изотропна; внешняя ( $r = d$ ) — неоднородна и анизотропна. Возможны также случаи, когда свойства сред достаточно медленно меняются вдоль направления распространения (координаты  $\Theta$ ). Построение формального решения такой задачи при учете анизотропии оказывается затруднительным, так как переменные в уравнениях Максвелла не разделяются. Мы начнем анализ с изотропной модели, поскольку в анизотропном случае решение может быть получено (при наличии некоторых упрощающих предположений, имеющих реальный физический смысл) путем тривиального обобщения изотропного случая.

В изотропном случае решение уравнений Максвелла сводится к задаче об интегрировании скалярного дифференциального уравнения второго порядка для потенциала при соответствующих граничных условиях:

$$L_r U + L_\theta U = -f, \quad (1.1)$$

где  $f$  — функция, характеризующая источник, а  $L_r$  и  $L_\theta$  — дифференциальные операторы:

$$L_r \equiv r^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \epsilon_m'^*(r) \right]; \quad (1.2)$$

$$L_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta; \quad (1.3)$$

$$\epsilon_m'^*(r) = \epsilon_m'(r) + \frac{1}{2\epsilon_m'} \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \epsilon_m'}{dr^2} - \frac{3}{4\epsilon_m'^2 k^2} \left( \frac{d \epsilon_m'}{dr} \right)^2. \quad (1.4)$$

Существует два метода построения решения задачи — разложение потенциала  $U$  по собственным функциям углового оператора  $L_\theta$  или по спектральным функциям поперечного оператора  $L_r$ . Первый путь более широко распространен. Это связано с тем, что спектр оператора  $L_\theta$  проще: он чисто дискретен, а собственными функциями являются полиномы Лежандра  $P_n(\cos \theta)$ . В результате простых, но довольно громоздких вычислений получается следующее выражение для наиболее интересующей нас вертикальной составляющей электрического поля\*:

$$E_r = \frac{I h_a}{4\pi(ka)^2 a^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_{n=0}^{\infty} n \left( n + \frac{1}{2} \right) (n+1) \zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(ka) \times \\ \times \frac{[1 + R_s(n)][1 + R_u(n)[\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)/\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)]]}{1 - R_s(n) R_u(n)[\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)/\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)]} P_n(\cos \theta). \quad (1.5)$$

Здесь  $\zeta_n^{(1), (2)}(x) \equiv \sqrt{\pi x/2} H_{n+1/2}^{(1), (2)}(x)$ , а  $H_{n+1/2}^{(1), (2)}(x)$  — функции Ханкеля соответственно первого или второго рода,  $R_u(n)$  — коэффициент отражения от ионосферы спиральной волны (зональной гармоники — по терминологии Бреммера [1]) вида  $\zeta_n^{(1)}(kr) \zeta_n^{(2)}(kd) P_n(\cos \theta)$ ,  $R_s(n)$  — коэффициент отражения от Земли зональной гармоники

\* Здесь и далее зависимость от времени предполагается в виде  $e^{-j\omega t}$ .

$\zeta_n^{(2)}(kr) \zeta_n^{(1)}(ka) P_n(\cos \Theta)$ ,  $I$  — ток в основании антенны,  $h_d$  — ее действующая высота. Чтобы не слишком усложнять формулу, мы предполагаем также, что источник и точка наблюдения расположены на поверхности Земли  $r = a$ .

В рассматриваемом нами изотропном случае оказывается, что зональная гармоника номера  $n$  при отражении как от Земли, так и от ионосферы переходит в зональную гармонику с тем же номером  $n$  (в случае анизотропной ионосферы это обстоятельство не имеет места). Если воспользоваться соответствующими асимптотическими представлениями для бесселевых функций и полиномов Лежандра, то можно убедиться, что отношение  $n/ka$  имеет смысл синуса угла падения  $\phi$  волны на Землю, а  $n/kd$  — на ионосферу. Таким образом, отмеченное выше обстоятельство соответствует равенству угла падения углу отражения, а зависимость коэффициентов отражения от  $n$  может быть интерпретирована как зависимость от углов падения.

Если написать для компонент полей  $E_\theta$  и  $H_\varphi$  разложения, аналогичные (1.5), и ввести приведенный поверхностный импеданс Земли  $\delta_s(n)$  и ионосферы  $\delta_u(n)$  по формулам

$$\begin{aligned} \delta_s(n) &\equiv \frac{1}{Z_0} \left. \frac{(E_\theta)_n}{(-H_\varphi)_n} \right|_{r=a}, \\ \delta_u(n) &\equiv \frac{1}{Z_0} \left. \frac{(E_\theta)_n}{(H_\varphi)_n} \right|_{r=a}, \\ Z_0 &\equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $(E_\theta)_n$  и  $(H_\varphi)_n$  —  $n$ -е члены рядов для  $E_\theta$  и  $H_\varphi$  соответственно, то окажется, что коэффициенты  $R_s(n)$  и  $R_u(n)$  следующим образом связаны с  $\delta_s(n)$  и  $\delta_u(n)$ :

$$\begin{aligned} R_s(n) &= -\frac{\zeta_n^{(2)'}(ka)/\zeta_n^{(2)}(ka) + i\delta_s(n)}{\zeta_n^{(1)'}(ka)/\zeta_n^{(1)}(ka) + i\delta_s(n)}, \\ R_u(n) &= -\frac{\zeta_n^{(1)'}(kd)/\zeta_n^{(1)}(kd) - i\delta_u(n)}{\zeta_n^{(2)'}(kd)/\zeta_n^{(2)}(kd) - i\delta_u(n)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В том случае, когда свойства Земли или ионосферы произвольным образом зависят от переменной  $r$ ,  $\delta_s(n)$  и  $\delta_u(n)$  могут быть получены только численными методами. В однородном же случае их можно найти и в явном виде:

$$\begin{aligned} \delta_s(n) &= -\frac{i}{V\epsilon'_{m3}} \frac{\psi_n(k V\epsilon'_{m3} a)}{\psi_n(k V\epsilon'_{m3} a)}, \\ \delta_u(n) &= -\frac{i}{V\epsilon'_{mn}} \frac{\zeta_n^{(1)'}(k V\epsilon'_{mn} d)}{\zeta_n^{(1)}(k V\epsilon'_{mn} d)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\epsilon'_{m3}$  и  $\epsilon'_{mn}$  — относительные комплексные диэлектрические проницаемости Земли и ионосферы соответственно, а

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x).$$

Нетрудно убедиться, что каждый член ряда  $(E_r)_n$  для компоненты  $E_r$  удовлетворяет на поверхности Земли и ионосфера граничному условию вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E_r)_n}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -ik\delta_s(n)(E_r)_n, \\ \frac{\partial(E_r)_n}{\partial r} \Big|_{r=d} &= ik\delta_u(n)(E_r)_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В случае рассмотренной выше строгой постановки задачи эти граничные условия не приносят ничего существенно нового, однако с условиями такого типа связаны так называемые приближенные импедансные методы постановки задачи. Они основаны на том, что часто импеданс  $\delta_s(n)$  или  $\delta_u(n)$  довольно слабо зависит от параметра  $n$  (т. е. угла падения волны) и вместо условий (1.9), строгих применительно к каждому отдельному члену, используется соотношение того же типа для компоненты  $E_r$  в целом с некоторым «средним»  $\delta$ . Иногда в таких задачах удается использовать импеданс плоской волны. Можно убедиться путем численных расчетов [14], что замена ионосферного импеданса импедансом для плоской волны с сохранением зависимости от угла приводит к весьма малым погрешностям в полях.

Для однородной ионосферы приближенная импедансная постановка возможна, если  $|\epsilon'_m| > 1$ ,  $\operatorname{Im}\epsilon'_m \neq 0$ . В этом случае для главной части ряда (1.5) (соответствующей членам  $n \sim ka$ ) можно воспользоваться асимптотическим представлением бесселевых функций по формулам Дебая первого рода [18]. В результате получится

$$\begin{aligned} \delta_{s,u} &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon'_{m3,u}}} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi_{s,u}}{\epsilon'_{m3,u}}}, \\ \sin \psi_u &\equiv n/kd, \\ \sin \psi_s &\equiv n/ka, \end{aligned} \quad (1.10)$$

что совпадает с приведенным поверхностным импедансом для плоской волны.

После этих предварительных замечаний вернемся к формуле (1.5), называемой рядом зональных гармоник или рядом Дебая, и попытаемся придать ему «квазигеометрооптический» вид, удобный для расчета полей на сравнительно небольших (до 1000—2000 км) расстояниях от источника. С этой целью воспользуемся формулой геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} &\left[ 1 - R_s(n) R_u(n) \frac{\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)}{\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)} \right]^{-1} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \frac{\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)}{\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)} R_s(n) R_u(n) \right]^q \end{aligned}$$

и преобразуем ряд Дебая к виду

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{Ih_a}{4\pi(ka)^2 a^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n \left( n + \frac{1}{2} \right) (n+1) P_n(\cos \Theta) \times \\ &\times \zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(ka) [1 + R_s(n)] \left[ 1 + R_u(n) \frac{\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)}{\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)} \right] \times \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\times \left[ \frac{\zeta_n^{(2)}(ka) \zeta_n^{(1)}(kd)}{\zeta_n^{(1)}(ka) \zeta_n^{(2)}(kd)} R_s(n) R_u(n) \right]^q.$$

Каждый член ряда по  $q$  (являющийся в свою очередь бесконечным рядом) представляет собой волну, число отражений которой от Земли и от ионосферы определяется степенью величины  $R_s(n)$  или  $R_u(n)^*$ . Член с  $(R_u(n))^0$  соответствует нулевому дифракционному лучу, т. е. более, характерной для открытой сферы.

Смысл последующих членов зависит от взаимного положения источника и точки наблюдения. Так, слагаемые, содержащие  $R_u(n)$ , описывают волну, однократно отраженную от ионосферы. Если точка наблюдения находится в области геометрической видимости для такой волны, то ей может быть придан геометрооптический смысл. В противном случае мы опять получаем дифракционный луч (обладающий, однако, меньшим проскальзыванием по поверхности Земли, чем ранее рассмотренный). Остальные слагаемые ряда по  $q$  имеют также смысл геометрооптических или дифракционных лучей (начиная с  $q = 10$ , все лучи будут геометрооптическими).

Для нахождения полей ряды, описывающие тот или иной луч, заменяют контурными интегралами по значку  $n$ , который будет теперь, вообще говоря, комплексным. Если луч оказывается геометрооптическим, то последние вычисляются асимптотическими, а если дифракционным, то численными методами [13]. В случае геометрооптических лучей при этом получаются сравнительно простые, легко интерпретируемые формулы. Например, выражение для волны,  $q_0$  раз отраженной от ионосферы, имеет вид

$$(E_r)_{q_0} = \frac{i\omega\mu_0 I h_d}{2\pi} \frac{\exp(i2R_{q_0}q_0)}{2q_0 R_{q_0}} g_{q_0}(R_u)_{q_0} (R_s)_{q_0-1} (1 + R_s)^2 \sin^2 \psi_{q_0, z}. \quad (1.12)$$

В формуле (1.12) введены следующие обозначения:  $R_s$ ,  $R_u$  — коэффициенты отражения плоской волны от Земли или ионосферы, падающей под углом, соответствующим геометрооптическому приближению\*\*;  $R_{q_0}$  — расстояние от источника до точки отражения на нижней кромке ионосферы,  $\psi_{q_0, z}$  — угол выхода луча из источника. Множитель  $\sin^2 \psi_{q_0, z}$  учитывает дипольный характер направленности передающей и приемной антенн. Наконец, множитель  $g_{q_0}$  учитывает сходимость или расходимость волны при ее отражении от ионосферы и Земли соответственно. В данном случае этот множитель имеет вид

$$g_{q_0} = \sqrt{\frac{2q_0 \sin \Theta / 2q_0}{\sin \Theta}} \sqrt{\frac{\cos \psi_{q_0, u}}{\cos \psi_{q_0, z}}}, \quad (1.13)$$

где  $\psi_{q_0, u}$  — угол падения волны на ионосферу. Очевидно, что  $\psi_{q_0, u} < \psi_{q_0, z}$  и  $\sin \Theta / 2q_0 > 1 / 2q_0 \sin \Theta$ , т. е.  $g_{q_0} > 1$  и сходимость преобладает.

В зависимости от расстояния от источника до точки наблюдения приходится учитывать различное число членов ряда  $q$ . Сходимость последнего определяется в основном двумя факторами: быстрым убыванием  $R_u$  с уменьшением угла падения волны на ионосферу (т. е. с ростом  $q$ ) и аналогичным поведением множителя направленности  $\sin^2 \psi_{q_0, z}$ .

\* Наряду с волнами, распространяющимися кратчайшим путем, в каждый член входят волны, имеющие смысл кругосветных эхо. Ими обычно пренебрегают.

\*\* Для неоднородной по высоте ионосферы  $R_u$  имеет смысл коэффициента отражения, который зафиксировал бы наблюдатель, расположенный на ее нижней кромке. Истинный же путь волны в ионосфере и ее ослабление учитываются соответственно фазой и модулем  $R_u$ .

Если на небольших расстояниях (до 1000—1500 км) часто оказывается достаточным учесть всего 3—4 луча, то с ростом расстояния число необходимых членов ряда по  $q$  (т. е. лучей) растет и данный метод расчета оказывается неудобным.

В таком случае предпочтительнее использовать решение в другой форме. Для этого решение представляется в виде разложений по спектральным функциям радиального оператора  $L_r$ , которые могут быть получены либо непосредственно с помощью соответствующих спектральных теорем, либо в результате некоторых преобразований рядов Дебая. Оператор  $L_r$  несамосопряжен и сингулярен, вследствие чего спектр его обладает заметно более сложной структурой, чем спектр  $L_\theta$ . Наряду с дискретной он содержит также сплошную часть и в случае произвольных неоднородных сред недостаточно изучен. Поэтому более формальный путь получения разложений с помощью рядов Дебая, с нашей точки зрения, предпочтительнее.

С этой целью применяют преобразование, называемое преобразованием Ватсона: ряд Дебая заменяют контурным интегралом (значок суммирования  $n$  переходит в переменную интегрирования  $v$ ). В дальнейшем контур деформируется с таким расчетом, чтобы свести интеграл к вычетам в нулях выражения

$$1 - R_s(v_n) R_u(v_n) \frac{\zeta_{v_n}^{(2)}(ka)}{\zeta_{v_n}^{(1)}(ka)} \frac{\zeta_{v_n}^{(1)}(kd)}{\zeta_{v_n}^{(2)}(kd)} = 0. \quad (1.14)$$

Эти вычеты соответствуют дискретной части спектра. Однако в процессе такой деформации выделяется интеграл от нечетной части подынтегральной функции исходного, который представляет разложение по функциям сплошного спектра  $L_r$ \*. Обычно пренебрегают сплошной частью спектра  $L_r$ , что в случае однородных сред вполне оправдано, так как эта часть по порядку величины может быть сопоставлена с волной, прошедшей до центра Земли и обратно. Разложение, определяемое дискретной частью спектра, называют обычно суммой мод или нормальных волн.

В процессе вычислений, как правило, делаются приближения, соответствующие пренебрежению кругосветным эхом. В результате сравнительно простых вычислений получается следующее выражение для радиальной компоненты электрического поля в дальней зоне  $ka\Theta > 1$  [14, 24]:

$$E_r = \frac{i\omega\mu I h_x}{2h} \sqrt{\frac{2}{\pi ka\Theta}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} e^{i\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}_n \exp(i v_n \Theta). \quad (1.15)$$

Здесь  $h = d - a$  — высота волноводного канала,  $v_n$  — корень уравнения (1.14),  $\tilde{\Lambda}_n$  — так называемый коэффициент возбуждения — величина, пропорциональная коэффициенту Фурье в разложении источника по собственным функциям радиального оператора. Выражение (1.15) справедливо при условии  $ka(\pi - \Theta) > 1$ , т. е. точка наблюдения должна находиться вне окрестности антиподы. Величина  $\text{Im } v_n$  быстро растет с ростом  $n$ , что приводит к быстрой сходимости ряда нормальных волн на больших расстояниях от источника. В этом смысле оба метода — метод многократно отраженных волн и метод нормальных волн — хорошо дополняют друг друга.

Коротко остановимся на особенностях, возникающих при учете анизотропии ионосферы. Новым физическим явлением, возникающим

\* В приближенной импедансной постановке эта часть решения отсутствует.

при учете анизотропии, является то, что волна ТМ поляризации при каждом отражении от ионосферы частично переходит в волну TE поляризации. Это обстоятельство нетрудно учесть, если во всех наших формулах писать вместо  $R_i$  и  $R_s$  матричные коэффициенты отражения  $\hat{R}_i$  и  $\hat{R}_s$ . Другой эффект заключается в том, что спиральная волна с индексом  $n$  при отражении, кроме волны с тем же индексом, порождает бесконечный (дискретный) цуг волн с другими индексами. Физически это соответствует тому, что при падении волны под углом  $\sin \psi = n/kd$  возникает не только волна, отраженная под тем же углом, но бесконечный цуг волн, отраженных под другими углами.

При построении решения в случае анизотропной ионосферы используется гипотеза о том, что главной является «геометрооптическая» волна с номером  $n$ , равным номеру падающей волны. Эта гипотеза, заключающаяся в использовании диагонального приближения для матричного коэффициента отражения, формально соответствует «принудительному» разделению переменных в уравнениях Максвелла, к которому прибегает Краснушкин [1]. В этом случае все формулы, выведенные для изотропного случая, автоматически переходят в «анизотропные» при замене коэффициентов отражения на соответствующие матрицы. оказывается, что учет анизотропии особенно существен в ночных условиях. Главными новыми физическими эффектами, возникающими при таком учете, являются появление новых компонент поля и невзаимность распространения в направлениях восток — запад и запад — восток.

Изложенная выше теория относится к случаю, когда волноводный канал Земля — ионосфера является регулярным, т. е. предполагается, что его свойства — высота  $h$ , профиль электронной концентрации и параметры, характеризующие свойства Земли, — не зависят от продольной координаты  $\Theta$ . Такой волновод принято называть регулярным. Очевидно, что этот случай не соответствует реальной ситуации, существующей в волноводном канале, поэтому приведенные выше методы нуждаются в дальнейшем развитии. Проще всего учесть неоднородность волновода, предположив, что зависимость его параметров от  $\Theta$  описывается медленно меняющейся в масштабе длины волны функцией. Если пренебречь при этом связью между нормальными волнами, то получится решение, называемое приближением ВКБ [2]. Соответствующие формулы могут быть получены из (1.15) несущественным изменением коэффициента возбуждения  $\tilde{\Lambda}_n$  и заменой в показателе собственного числа  $v_n$  величиной

$$\frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta v_n(\Theta') d\Theta',$$

где  $v_n(\Theta)$  — собственное число регулярного (однородного) волновода, параметры которого совпадают с параметрами неднородного в сечении с координатой  $\Theta$ .

Строгий учет неоднородности волновода вдоль координаты  $\Theta$  не удается выполнить даже в изотропной модели. Однако положение несколько облегчается тем, что, как показывают качественные исследования, выполненные для изотропного волновода (см. следующий раздел), а также численные расчеты, параметры ионосферы и главным образом высота волновода более существенно влияют на поведение собственных чисел, чем параметры земной поверхности\*. Поэтому во всех выполненных

\* Это утверждение справедливо лишь для наиболее интересной низкочастотной части диапазона (до 15—18 кГц).

ных до настоящего времени исследованиях неоднородность земной поверхности вдоль трассы распространения не учитывалась.

Сложность модели заставляет часто производить также дальнейшие упрощения, касающиеся граничных условий. Принято считать, что условия на земной поверхности соответствуют бесконечной проводимости ( $E_t = 0$ ), а на поверхности ионосферы — условиям для магнитной стенки ( $H_t = 0$ ). В этой постановке удается приблизенно учесть только явления, связанные с изменением свойств ионосферы на границе между дневной и ночной частями волновода.

Итак, в результате перечисленных выше упрощений задача свелась к обычной задаче о поле в нерегулярном волноводе. Методы решения такой задачи сравнительно хорошо разработаны [19]. Наиболее перспективными являются, по-видимому, два направления: метод сшивания, согласно которому осуществляется переразложение на границе между двумя волноводами собственных функций одного по полной системе собственных функций другого, и метод волноводов сравнения, развитый в основном в работах Б. З. Каценеленбаума. Идея последнего метода состоит в том, что поле в нерегулярном волноводе представляется в виде суперпозиции полей волн, существующих в более простых регулярных. Можно показать [19], что коэффициенты этих разложений удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, из решения которой и находятся амплитуды волн, рассеянных неоднородным участком.

При рассмотрении вопросов о распространении СДВ в нерегулярном волноводе используются исключительно методы, перечисленные выше. С помощью переразложений решались задачи о ступенчатых переходах между дневной и ночной частями волновода. В одной из работ этого цикла [20] рассматривается ступенчатый переход между двумя сферическими волноводами. Такая постановка далека от действительной ситуации, поскольку для рассматриваемого диапазона переходная область составляет, по крайней мере, несколько длин волн. В этой задаче возникают также некоторые трудности с удовлетворением граничных условий на самой ступеньке, которых мы здесь не будем касаться. Такие же переразложения использовались Уэйтром [21] при решении аналогичной задачи для сферического волновода с переходной областью в виде набора ступенек, число которых доходило до 6. Поскольку число ступенек сравнительно невелико, то искажение физической ситуации может оказаться существенным. Однако одновременный учет сферичности и плавного характера переходной области до настоящего времени не выполнен.

Имеется ряд работ, в которых рассмотрен плавный переход для плоской модели. Для такой модели с помощью переразложений собственных функций плоского волновода по собственным функциям конического [22] рассчитывался линейный переходный слой, причем предполагалось, что угол раствора конического волновода достаточно мал. С помощью метода волноводов сравнения, в качестве которых выбирались конические волноводы, результаты этой работы были обобщены [23] на случай, когда переходная область описывалась некоторой гладкой кривой. При этом обозримые результаты получались только при игнорировании вторичного рассеяния.

Характерной особенностью перечисленных выше работ является то, что непосредственно рассчитывается только переход от дневного к ночному волноводу. Предполагается, что в этом случае можно пренебречь волнами, отраженными в сторону дневного волновода, где расположен источник. Для расчета же полей при распространении в обратном направлении используется теорема взаимности.

Из приведенного выше краткого обзора работ, касающихся расчета полей в волноводе Земля—ионосфера с параметрами, зависящими от  $\Theta$ , можно заключить, что исследования эти находятся в начальной стадии. В последние годы они интенсивно развиваются. Что же касается регулярного случая, то здесь разработку теории можно считать в основных чертах завершенной.

## 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для дальнейшего исследования решения в виде суммы нормальных волн (1.15) и извлечения конкретных физических результатов необходимо определить собственные значения радиального оператора задачи, удовлетворяющие характеристическому уравнению (1.14). Нахождение корней этого уравнения составляет основную трудность при исследовании решения рассматриваемой задачи. Точное определение собственных значений возможно только при численном решении характеристического уравнения. Методы численного решения в настоящее время хорошо разработаны, и в ряде работ приводятся результаты численных расчетов собственных значений для различных моделей ионосферы и анализируются основные свойства нормальных волн при конкретных свойствах волноводного канала [2–7, 9, 11, 12, 14–17].

Однако исследование закономерностей поведения собственных чисел в зависимости от частоты и параметров волновода требует проведения трудоемких расчетов большого объема. Поэтому существенное значение приобретают приближенные методы исследования, позволяющие получить достаточно простые аналитические выражения для собственных чисел. К таким методам, прежде всего, следует отнести вариационные методы [24–26], использование которых дает приближенные выражения с достаточно широкими границами применимости. Применение вариационных методов требует знания общего характера поведения собственных значений в зависимости от частоты и параметров волновода, который можно представить на основе приближенного качественного исследования характеристического уравнения [24, 25]. В настоящем разделе мы приведем результаты анализа общей картины поведения собственных значений и некоторые приближенные выражения для них, полученные с помощью вариационных методов, в случае изотропной ионосферы. Эти приближенные выражения будут использованы для выяснения ряда особенностей в поведении собственных чисел.

Рассмотрим прежде всего основные результаты, касающиеся динамики собственных значений. Поскольку нас интересует общая, достаточно грубая картина поведения нулей характеристического уравнения, то при его исследовании целесообразно использовать ряд упрощающих предположений. Во-первых, будем считать земную поверхность идеально проводящей; во-вторых, отражающие свойства ионосферы будем описывать с помощью приведенного поверхностного импеданса  $\delta$ , единого для всего поля, который может быть найден путем численных расчетов для любой конкретной модели ионосферы, неоднородной по высоте. И, наконец, используем для цилиндрических функций, входящих в характеристическое уравнение (1.14), их асимптотические представления через функции Эйри.

Как показывают результаты численного анализа, использование таких асимптотических представлений приводит к незначительной погрешности в определении собственных значений в диапазоне СДВ [27]. После некоторых преобразований [25] характеристическое уравнение принимает вид

$$U'(y_{0n}) V'(y_{1n}) - U'(y_{1n}) V'(y_{0n}) = \frac{t}{\gamma} [U'(y_{0n}) V(y_{1n}) - U(y_{1n}) V'(y_{0n})], \quad (2.1)$$

где введены следующие обозначения:  $W(z) = U(z) + iV(z)$  — функция Эйри [28];

$$\begin{aligned} y_{0n} &= -\frac{\eta_n^2}{\gamma^2}, & y_{1n} &= -\gamma - \frac{\eta_n^2}{\gamma^2}, & \eta_n &= \beta \sqrt{\mu_n}, \\ \mu_n &= 1 - \left(\frac{\eta_n}{ka}\right)^2, & \beta &= kh, & \gamma &= (2S)^{1/3}, \\ S &= \beta^2 \frac{h}{a}, & t &= -i\delta\beta. \end{aligned}$$

Из уравнения (2.1) следует, что собственное значение  $\eta_n$  зависит от трех параметров  $-ka$ ,  $\beta$  и  $\delta$ . С другой стороны, величина  $\eta_n$ , связанная с  $\eta_n$  простым соотношением

$$\eta_n = ka \sqrt{1 - \frac{\eta_n^2}{\beta^2}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{8k^2 a^2}\right) \right] \simeq ka \sqrt{1 - \frac{\eta_n^2}{\beta^2}}, \quad (2.2)$$

зависит только от двух параметров  $-S$  и  $t$ . Поэтому в дальнейшем целесообразно анализировать поведение величин  $\eta_n$ , которые мы будем называть модифицированными собственными значениями. Влияние кривизны волновода на модифицированные собственные значения определяется параметром сферичности  $S$ , а влияние импеданса ионосферы — ионосферным параметром  $t$ . Для физически осуществимых структур  $\operatorname{Re} \delta \geqslant 0$ , т. е.  $\operatorname{Im} t \leqslant 0$ .

Уравнение (2.1) позволяет проследить изменение спектра радиального оператора задачи при переходе от плоского к сферическому волноводу и выяснить общую картину поведения модифицированных собственных значений в зависимости от ионосферного параметра  $t$  для различных значений параметра сферичности  $S$ . В случае плоского волновода ( $a = \infty$ ) параметр сферичности обращается в нуль и модифицированные собственные значения определяются только одним параметром  $t$ . Остановимся прежде всего на этом случае. При  $S \rightarrow 0$  можно использовать асимптотические представления функций Эйри и характеристическое уравнение (2.1) переходит в уравнение для плоского волновода

$$\eta_n \operatorname{tg} \eta_n = t = |t| e^{i\alpha}, \quad \alpha = \arg t. \quad (2.3)$$

При анализе корней уравнения (2.3) удобно рассматривать его как конформное преобразование плоскости  $(t)$  в плоскость  $(\eta)$  и выяснить, в какие линии на плоскости  $(\eta)$  переходят полупрямые  $\alpha = \text{const}$  ( $-\pi \leqslant \alpha \leqslant 0$ ) на плоскости  $(t)$ . Эти линии мы будем называть линиями нулей. Поскольку корни уравнения (2.3) расположены симметрично относительно начала координат, то достаточно рассмотреть только полуплоскость  $\operatorname{Re} \eta \geqslant 0$ . Качественный анализ поведения линий нулей был дан в работе [21]. Здесь же мы приведем без вывода окончательные результаты.

Начало координат плоскости  $(t)$  преобразованием (2.3) переводится в счетное число точек «выхода» на плоскости

$$\eta_{\text{вых}} = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Значению же  $|t| = \infty$  соответствуют точки «входа»

$$\eta_{\text{вх}} = \frac{2m + 1}{2} \pi.$$

Кроме этих точек «входа», в случае индуктивного поверхностного импеданса имеется еще одна точка «входа», расположенная на бесконечности в нижней полуплоскости. Собственное значение, находящееся в окрестности этой точки «входа» ( $|t| \rightarrow \infty$ ), дается выражением

$$\eta \approx it. \quad (2.4)$$

Точки «выхода» и «входа» являются опорными точками при построении линий нулей. Картина линий нулей оказывается различной в случае емкостного ( $\text{Im } \delta > 0$ ) и индуктивного ( $\text{Im } \delta < 0$ ) поверхностных импедансов, что связано с наличием «дополнительной» точки «входа» для индуктивного импеданса.

В случае емкостного импеданса линии нулей из точек «выхода»  $\eta_{\text{вых}} = m\pi$  идут в точки «входа»  $\eta_{\text{вх}} = (2m + 1)\pi/2$ , целиком располагаясь в полосах (рис. 1)

$$m\pi \leq \text{Re } \eta \leq \frac{2m + 1}{2} \pi.$$

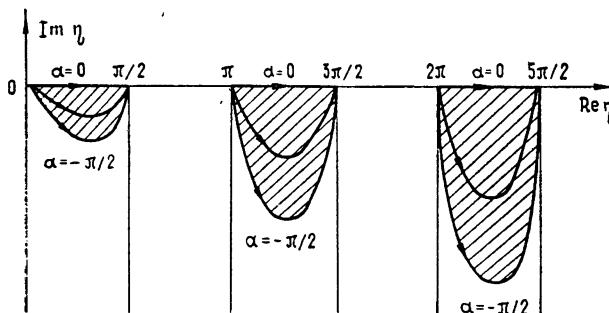


Рис. 1. Поведение линий нулей для плоского волновода в случае емкостного импеданса.

При индуктивном импедансе ход линий нулей усложняется. Для представления картины нулей в этом случае рассмотрим постепенное изменение двух соседних линий нулей по мере уменьшения аргумента индуктивного поверхностного импеданса. При уменьшении аргумента петли, представляющие эти линии нулей и идущие из соседних точек «выхода», постепенно «раздуваются», все больше и больше сближаясь друг с другом (рис. 2). При некотором критическом значении  $\alpha_{kp}$ , зависящем от номера  $m$ , происходит касание линий нулей, выходящих из соседних точек «выхода», что соответствует возникновению (при определенном  $|t_{kp}|$ ) двойного корня характеристического уравнения (2.3). По мере дальнейшего уменьшения аргумента поверхностного импеданса (или уменьшения  $\alpha$ ) происходит «отщепление» линии нулей, идущей из левой точки «выхода». Эта линия уходит теперь на бесконечность, согласно (2.4), линия же нулей, идущая из правой точки «выхода», оканчивается теперь в левой точке «входа», где раньше (при  $\alpha > \alpha_{kp}$ ) оканчивалась линия нулей, выходящая из левой точки «выхода».

Таким образом, в случае индуктивного поверхностного импеданса всегда имеется линия нулей, уходящая на бесконечность и разделяющая две группы линий нулей: слева от нее линии нулей идут из точек

«выхода» в соседние точки «входа», расположенные справа от точек «выхода»; справа же от нее они идут в точки «входа», расположенные

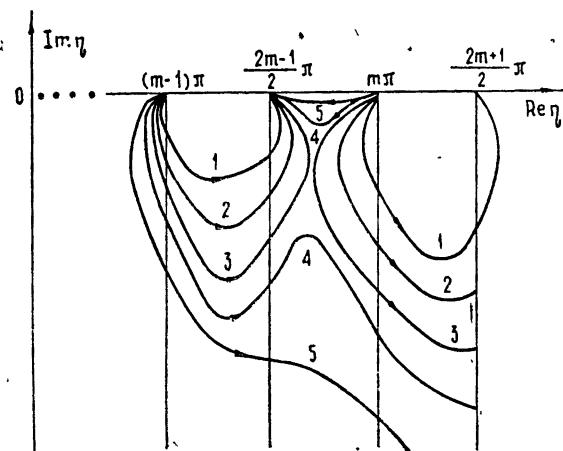


Рис. 2. График, иллюстрирующий образование кратного корня характеристического уравнения:

$$\operatorname{tg} \alpha_{i+1} < \operatorname{tg} \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, 5).$$

слева от точек «выхода» (рис. 3). Наличие линий нулей, уходящих на бесконечность, связано с касанием линий нулей или с явлением вырождения собственных значений. Расчеты показывают, что касание линий

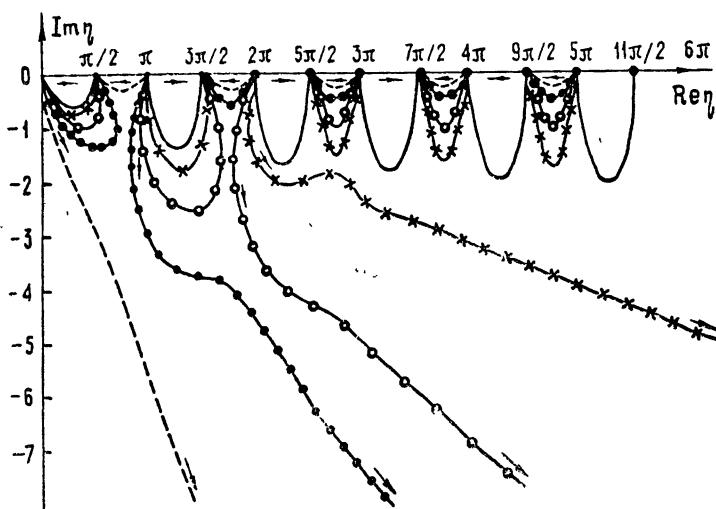


Рис. 3. Общая картина поведения линий нулей для плоского волновода при различных аргументах импеданса:

1 — ———, 2 — -×-×-, 3 — -○-○-, 4 — -●-●-,  
5 — ----- соответствуют  $\operatorname{tg} \alpha_{i+1} < \operatorname{tg} \alpha_i$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \infty$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 < 5$ .

нулей, выходящих из точек «выхода» с  $m = 0$  и  $m = 1$ , происходит при аргументе поверхности импеданса, равном  $\varphi_{kp}^{(0)} = -39^\circ$ . Для других линий нулей (с  $m = n$  и  $m = n + 1$ ) касание имеет место при

$$\operatorname{tg} \alpha_{kp}^{(n)} \simeq \frac{(4n + 3)\pi}{2 \ln(4n + 3)\pi}.$$

Теперь обратимся к выяснению влияния сферичности на поведение линий нулей. Корни уравнения (2.1) на плоскости ( $\eta$ ) располагаются

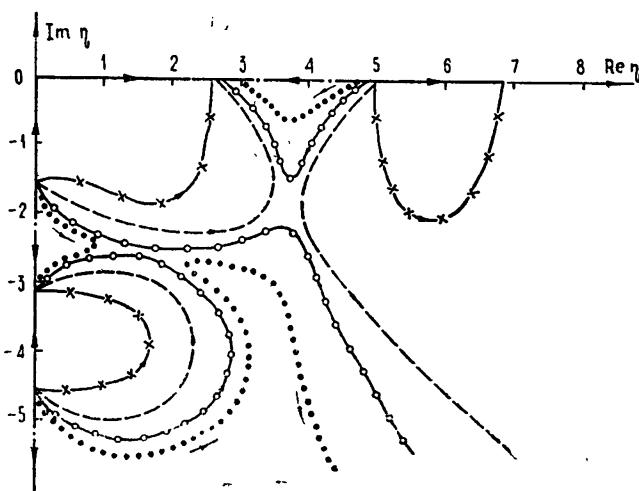
во втором и четвертом квадрантах симметрично относительно начала координат, так что мы можем ограничиться рассмотрением уравнения (2.1) только в четвертом квадранте. Если в случае плоского волновода все точки «выхода» и «входа» лежат на вещественной оси (за исключением одной точки «входа» на бесконечности для индуктивного импеданса ионосферы), то для сферического волновода они могут располагаться также и на мнимой оси (в окрестности начала координат  $|\eta| < 2\sqrt{S}$ ). При этом в случае сферического волновода для индуктивного поверхностного импеданса  $\delta$  также имеется линия нулей, уходящая при  $|t| \rightarrow \infty$  на бесконечность

$$\eta \simeq i\sqrt{t^2 + 2S}.$$

Для точек «выхода» и «входа», расположенных на мнимой или вещественной оси, можно найти соответствующие приближенные выражения, справедливые при  $S < 1$  и  $S > 1$  [25]. Исследования показывают, что общий характер поведения линий нулей для сферического волновода такой же, как и для плоского, за исключением двух отличий. Во-первых, по мере увеличения параметра сферичности  $S$  все точки «выхода» и «входа», расположенные на вещественной оси, двигаются к началу координат, достигают его и затем удаляются от начала координат по мнимой оси (рис. 4). Число точек «выхода» и «входа»  $n$ , ле-

Рис. 4. Влияние сферичности на поведение линий нулей:

1—\_\_\_\_\_, 2—x-x-x-,  
3---, 4—○○○,  
5●●●, 6—-----  
соответствует  $\operatorname{tg} z_{i+1} < \operatorname{tg} z_i$ ,  
 $a_1 = 0$ ,  $x_0 = -\pi$ .



жащих на мнимой оси, зависит от параметра сферичности и увеличивается по мере его роста ( $n \sim 0,2\sqrt{S}$ ). С увеличением параметра сферичности наряду со смещением точек «выхода» и «входа» происходит, очевидно, и некоторая деформация линий нулей. При этом сферичность оказывает наибольшее влияние на модифицированные собственные значения, расположенные в области  $|\eta| < \sqrt{2S}$ .

По мере же роста  $|\eta|$  влияние сферичности на соответствующие модифицированные собственные значения уменьшается. Качественная картина линий нулей для сферического волновода при  $S \approx 16$  изображена на рис. 4. Стрелками обозначено направление перемещения нулей вдоль линий при увеличении  $|t|$ . Второе отличие в поведении линий нулей для сферического волновода заключается в том, что касание линий нулей при индуктивном поверхностном импедансе происходит при его аргументе, увеличивающемся с ростом  $S$ .

В сферическом волноводе вырождение соответствующих собственных значений имеет место при менее индуктивном поверхностном импедансе по сравнению с плоским волноводом. Так, вырождение собственных значений двух первых нормальных волн в сферическом волноводе при  $S \gg 1$  происходит при аргументе поверхностного импеданса  $\varphi_{kp}^{(0)} \approx -10^\circ$ . На рис. 5 приведена зависимость величины  $\delta_{\text{выр}} \beta$  от  $S$ , где  $\delta_{\text{выр}}$  соответствует значению приведенного поверхностного импеданса, при котором имеет место вырождение двух первых собственных значений.

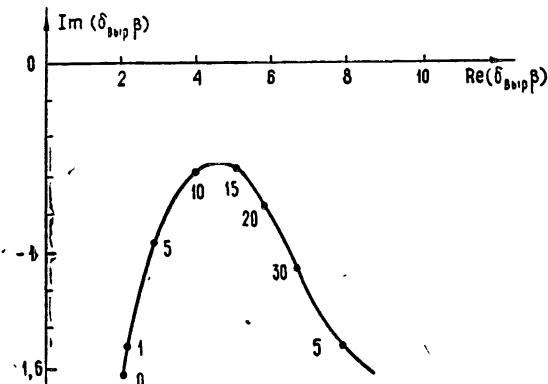


Рис. 5. Зависимость параметра  $\delta_{\text{выр}} \beta$  от  $S$  для случая вырождения двух первых собственных значений. Цифрами около точек на кривой указаны значения  $S$ .

Таким образом, качественная картина поведения линий нулей зависит от конкретного значения аргумента поверхностного импеданса ионосфера. Полуплоскость  $\text{Re } \delta \geq 0$  можно разбить на три области линиями  $\arg \delta = 0$  и  $\arg \delta = \varphi_{kp}^{(0)}$ . В области  $\text{Im} \delta \geq 0$  все линии нулей представляют собой криволинейные отрезки конечной длины, идущие из точек «выхода» в точки «входа», расположенные выше или правее точек «выхода». В области  $0 > \arg \delta > \varphi_{kp}^{(0)}$  появляется линия нулей, уходящая на бесконечность и выходящая из точки «выхода», номер которой зависит как от конкретного значения аргумента поверхностного импеданса, так и от параметра сферичности  $S$  и уменьшается по мере уменьшения  $\arg \delta$ . Это изменение точки «выхода» бесконечной линии нулей связано с явлением касания линий нулей при определенных значениях аргумента поверхностного импеданса. И, наконец, в области  $-\pi/2 \leq \arg \delta \leq \varphi_{kp}^{(0)}$  также имеется одна линия нулей, идущая на бесконечность, но она всегда выходит из точки «выхода» нулевой моды\*, и явление касания (вырождения) в этой области отсутствует. Следовательно, вырождение собственных значений может иметь место только при аргументе поверхностного импеданса, лежащем в интервале  $0 > \arg \delta \geq \varphi_{kp}^{(0)}$ . Значение  $\varphi_{kp}^{(0)}$  зависит от параметра сферичности и возрастает с увеличением  $S$  от  $-39^\circ$  до  $-10^\circ$ .

Рассмотренная картина поведения линий нулей позволяет провести однозначную нумерацию собственных значений. Естественно нумеровать собственные значения по точкам «выхода» соответствующих им линий нулей. Точки же «выхода» следует нумеровать, начиная с точек, расположенных на мнимой оси, в порядке их приближения к началу координат и затем, после их перехода на вещественную ось, — в порядке удаления от начала координат. Точка «выхода», расположенная на мнимой оси и наиболее удаленная от начала координат, соответствует нулевой моде\*\*.

\* Вопрос о нумерации нормальных волн будет рассмотрен ниже.

\*\* Такая нумерация удобна, так как в случае плоского волновода ( $S = 0$ ) она переходит в общепринятоую.

Для определения номера собственного значения необходимо при фиксированной частоте, высоте волновода и аргументе поверхностного импеданса ионосферы совершить предельный переход  $|\delta| \rightarrow 0$  и определить номер соответствующей точки «выхода». Вопрос о нумерации мод не имеет принципиального значения и является терминологическим. Мы остановились на нем потому, что некоторые авторы (в частности, Бадден и Уэйт [29, 30]) относили одно и то же собственное значение к нормальным волнам с различными номерами, не указывая четко принципа нумерации мод. По существу во всех работах по распространению СДВ главной модой в диапазоне частот 5—20 кгц считается первая. При этом подразумевается, что существует еще и нулевая мода, которая оказывается основной в диапазоне СНЧ ( $f < 1$  кгц). Однако расчеты показывают, что это одна и та же мода (для СДВ и для СНЧ) [25], которую при введенной выше нумерации следует назвать нулевой (что совпадает с терминологией Баддена).

Качественное исследование поведения корней характеристического уравнения (2.1) позволяет представить общую динамику собственных значений, найти приближенные выражения для точек «выхода» и «входа», точек касания линий нулей и определить области изменения собственных значений различных нормальных волн. Эти результаты существенны как для дальнейшего численного решения характеристического уравнения, так и для применения вариационных методов с целью получения достаточно простых приближенных выражений для собственных значений [24—26].

Используя приближенные выражения для собственных значений, полученные вариационными методами, остановимся на некоторых особенностях характеристик нулевой моды в сферическом волноводном канале Земля—ионосфера. При этом мы ограничимся диапазоном частот от 6 до 20 кгц, в котором нулевая мода является основной, по крайней мере, в дневных условиях на расстояниях от источника, превышающих несколько тысяч километров. Зависимость поля нулевой моды от расстояния вдоль земной поверхности  $d = a\theta$  в дальней зоне описывается множителем вида (см. (1.15) и (2.2))

$$\frac{1}{V \sin \theta} \exp(i k \sqrt{1 - \mu_0} d) = \frac{1}{V \sin \theta} \exp\left(i \frac{\omega}{v_{\phi_0}} d - \alpha_0 d\right),$$

где  $v_{\phi_0}$  и  $\alpha_0$  — фазовая скорость и коэффициент затухания нулевой моды, определяемые соотношениями

$$v_{\phi_0} = \frac{c}{\operatorname{Re} V \sqrt{1 - \mu_0}}, \quad \alpha = k \operatorname{Im} V \sqrt{1 - \mu_0}.$$

В первом приближении метода Галеркина при выполнении условий  $\beta \gg 1$ ,  $|\delta_a| \beta \gg 1$  и  $|\delta_s| \beta < 1$ , которые имеют место в рассматриваемом диапазоне частот\*, для фазовой скорости и коэффициента затухания нулевой моды получаются следующие выражения [26]:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\phi_0}}{c} = 1 + \frac{1,23}{\beta^2} (1 - 0,24S) - \frac{2,47}{\beta^2} \frac{\operatorname{Im} \delta_a}{|\delta_a|^2} (1 + 0,06S) + \\ + \frac{\operatorname{Im} \delta_s}{\beta} (1 - 0,02S); \end{aligned} \quad (2.5)$$

\* Следует отметить, что условие  $|\delta_s| \beta < 1$  имеет место при проводимости земной поверхности, не меньшей  $10^{-3} \text{ м} \cdot \text{м}^{-1}$ .

$$\alpha_0 = \frac{1}{h} \left[ \frac{2,47}{\beta^2} \frac{\operatorname{Re} \delta_n}{|\delta_n|^2} (1 + 0,06S) + \operatorname{Re} \delta_s (1 - 0,02S) \right]. \quad (2.6)$$

Эти достаточно простые приближенные выражения позволяют легко проанализировать поведение фазовой скорости и затухания нулевой моды в зависимости от частоты и параметров волновода. Влияние сферичности волноводного канала на фазовую скорость и коэффициент затухания нулевой моды описывается в (2.5) и (2.6) членами, содержащими параметр сферичности  $S = \beta^2 h/a$ , члены же, не содержащие  $S$ , определяют соответственно фазовую скорость и коэффициент затухания в плоском волноводе ( $a = \infty$ ,  $S = 0$ ).

Из выражения (2.5) следует, что фазовая скорость нулевой моды определяется главным образом геометрическими характеристиками волноводного канала — его высотой и кривизной, а свойства ионосферы и Земли влияют на фазовую скорость в меньшей степени. Поэтому для выяснения качественной зависимости фазовой скорости от частоты, высоты волновода и его кривизны можно использовать упрощенное выражение

$$\frac{v_{\Phi_0}}{c} \simeq 1 + \frac{1,23}{\beta^2} (1 - 0,24S) = 1 + \frac{1,23}{k^2 h^2} - 0,3 \frac{h}{a}. \quad (2.7)$$

Сферичность волноводного канала приводит к уменьшению фазовой скорости, в результате чего она может принимать в сферическом волноводе, в отличие от плоского, значения, меньшие скорости света.

Как видно из (2.7), фазовая скорость монотонно уменьшается с ростом частоты, причем она оказывается равной скорости света на частоте

$$f_{c_0} \simeq \frac{c \sqrt{a}}{\pi h^{3/2}}. \quad (2.8)$$

Частота  $f_{c_0}$  обратно пропорциональна высоте волновода в степени 3/2. Такой же закон зависимости  $f_{c_0}$  от  $h$  можно получить, анализируя результаты численных расчетов работы [31]. Приведенная формула позволяет не только определить общий характер зависимости  $f_{c_0}(h)$ , но и дает достаточно точные значения  $f_{c_0}$ . Так, при высоте волновода  $h = 70 \text{ км}$  частота  $f_{c_0}$  равна, согласно (2.8), 13,2 кгц, что хорошо согласуется с известными из теоретических и экспериментальных работ результатами.

В рассмотренном выше приближении (2.7) фазовая скорость не зависит от импеданса земли и ионосферы, а сферичность приводит к частотно-независимому уменьшению фазовой скорости. Однако выражение (2.7) может использоваться только для выяснения качественной зависимости фазовой скорости от частоты и геометрических параметров волновода, и его точность недостаточна для расчетов фазовой структуры поля и формы низкочастотных электромагнитных импульсов на больших расстояниях от источника. При таких расчетах в выражении для фазовой скорости необходимо учитывать члены, содержащие импеданс ионосферы и земли. Заметим, что при этом сферичность приведет к изменению фазовой скорости, зависящему от частоты.

Относительное влияние электрических свойств земли и ионосферы на фазовую скорость нулевой моды определяется частотой электромагнитных колебаний. В нижней части рассматриваемого диапазона на частотах 6—10 кгц свойства ионосферы, как видно из (2.5), более

сильно влияют на фазовую скорость, чем свойства земли. С ростом же частоты относительное влияние свойств земной поверхности увеличивается и оказывается на частотах 18—20 кгц более заметным, чем влияние свойств ионосферы.

Обратимся теперь к коэффициенту затухания нулевой моды (2.6). На частотах ниже 10 кгц затухание резко возрастает с уменьшением частоты и определяется в основном характеристиками ионосферы—ее высотой и поверхностным импедансом. Затухание на этих частотах обратно пропорционально  $h^3$ . С увеличением частоты влияние свойств ионосферы на коэффициент затухания уменьшается, а влияние свойств земной поверхности возрастает, так как вклад в затухание, обусловленный конечной проводимостью земли,

$$\Delta\alpha_{03} \simeq \frac{\operatorname{Re} \delta_3}{h} \simeq \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{2\sigma_3}}$$

растет с частотой как  $\sqrt{\omega}$ . На частоте 10 кгц при  $\sigma_3 = 10^{-2} \text{ мо}\cdot\text{м}^{-1}$  и  $h = 70 \text{ км}$  величина  $\Delta\alpha_{03}$  составляет около 1 дБ·(тыс. км) $^{-1}$ . Этот результат находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными и теоретическими расчетами (см., например, [31]).

Из (2.6) следует, что сферичность волноводного канала различным образом действует на слагаемые, обусловленные электрическими свойствами ионосферы и земли, в выражении для коэффициента затухания. Часть коэффициента затухания, определяемая свойствами ионосферы, увеличивается за счет сферичности, тогда как часть, определяемая свойствами земли, уменьшается. Такое влияние сферичности можно объяснить тем обстоятельством, что вследствие сферичности волновода происходит перераспределение электромагнитного поля по высоте, при котором оно уменьшается около земной поверхности и «отжимается» к верхней стенке волновода. В результате влияние ионосферы усиливается, а земной поверхности—ослабляется.

Выше отмечалось, что влияние сферичности волноводного канала на фазовую скорость и коэффициент затухания нулевой моды определяется параметром сферичности  $S = \beta^2 h/a$ . Пренебрежение сферичностью возможно только при выполнении условия  $S < 1$ . В рассматриваемом диапазоне частот параметр сферичности меняется от 0,5 до 10, так что на частотах, превышающих 10 кгц, сферичность оказывает заметное влияние на характеристики нулевой моды.

Приближенные формулы для собственных значений, о которых шла речь в настоящем разделе, пригодны для анализа зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания нормальных волн от частоты и параметров волновода. Однако в ряде случаев точность этих формул может оказаться недостаточной для расчета фазовой структуры электромагнитного поля, в частности, на больших расстояниях от источника в условиях многомодового распространения. Необходимую для таких расчетов точность определения собственных значений в достаточно широком частотном интервале можно обеспечить только при численном решении характеристического уравнения. В следующем разделе мы остановимся на результатах численных расчетов электромагнитных полей, иллюстрирующих основные особенности распространения СДВ, и проведем их сопоставление с экспериментальными изменениями.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ И СОПОСТАВЛЕНИЕ ИХ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

К настоящему времени опубликованы результаты разнообразных, теоретических и экспериментальных исследований процессов распрост-

ранения СДВ сигналов. Ниже будут приведены только наиболее интересные, по мнению авторов, данные, а также обсуждены некоторые особенности распространения.

Как отмечалось выше, на достаточно больших расстояниях от источника излучения поле для СДВ диапазона удобно представлять в виде суммы нормальных волн (1.15). Для последующего изложения эту сумму удобно переписать в виде\*

$$E(d) = E_0(d) W(d), \quad W(d) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(d),$$

$$|W_m(d)| = \frac{\Theta}{\sqrt{\sin \Theta}} |\Lambda_m| \exp\left(-\frac{\alpha_m d}{20 \lg e}\right),$$

$$\arg W_m(d) = \arg \Lambda_m + \omega d \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right),$$

где  $E_0(d)$  — поле над плоской бесконечно проводящей земной поверхностью,  $W(d)$  — функция ослабления сферического волноводного канала Земля—ионосфера,  $W_m(d)$  — функция ослабления  $m$ -й моды,  $d = a\Theta$  — расстояние между приемником и источником излучения,  $\Lambda_m$  — некоторые коэффициенты, прямо пропорциональные коэффициентам возбуждения нормальных волн  $\tilde{\Lambda}_m$  в сферическом волноводном канале (см. разд. 1),

$$\Lambda_m = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi a}{k}} e^{i\pi/4} \tilde{\Lambda}_m,$$

а обозначения  $\Theta$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $\alpha_m$  и  $v_m$  — те же, что и в предыдущих разделах. Ниже для краткости коэффициент  $\Lambda_m$  мы будем называть также коэффициентом возбуждения. Расчет напряженности поля  $E_0(d)$  (амплитудного значения) в милливольтах на метр может быть выполнен по формуле

$$|E_0(d)| = \frac{300 \sqrt{2P}}{d},$$

где  $P$  — излучаемая мощность в киловаттах, а  $d$  — расстояние в километрах.

Особенности зависимости поля  $E$  от расстояния определяются функцией ослабления. В случае, когда существенны несколько мод, аргумент функции ослабления, называемый дополнительной фазой,  $\varphi_{\text{доп}} = \arg W$ , и величина  $|W|$  изменяются с расстоянием сложным образом. Интерференционный характер поля приводит к тому, что его амплитуда и фаза могут существенно изменяться при сравнительно малых изменениях условий распространения (например, высоты ионосферы).

Наиболее полные данные для зависимостей  $|W(d)|$  и  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  для дневных иочных условий распространения получены в [14] для неоднородной изотропной модели ионосферы и слоистой модели земли с проводимостью порядка  $10^{-2} \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$ . Зависимость от частоты величин  $|\Lambda_m|$ ,  $\alpha_m$  и  $v_m$ , использованная в [14] для расчета функций ослабления, приведена на рис. 6, 7, 8\*\*. Наименьшее затухание наблюдается у нулевой

\* Здесь и далее рассматривается только вертикальная компонента электрического поля, возбуждаемого вертикальным электрическим диполем.

\*\* На рис. 6, 7, 8 и в дальнейшем тексте принята нумерация нормальных волн ТМ типа в соответствии с замечанием, сделанным в предыдущем разделе.

моды. Поэтому на достаточно больших расстояниях для частот ниже 15—20 кгц она должна быть преобладающей\*. Модуль коэффициента возбуждения  $|\Lambda_m|$  при увеличении высоты ионосферы, а также частоты уменьшается. Наиболее заметное уменьшение наблюдается для нулевой моды в ночных условиях на частотах выше 15—20 кгц. Уменьшение

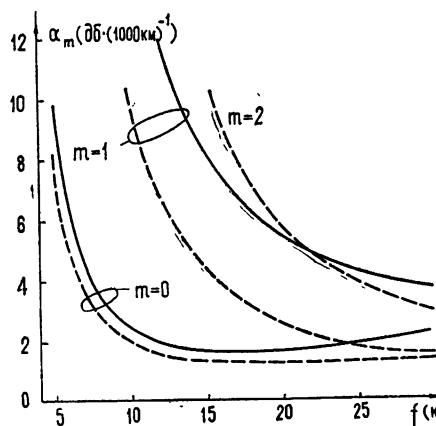


Рис. 6. Зависимость коэффициентов затухания от частоты для различных мод [14],  $m=0, 1, 2$ .

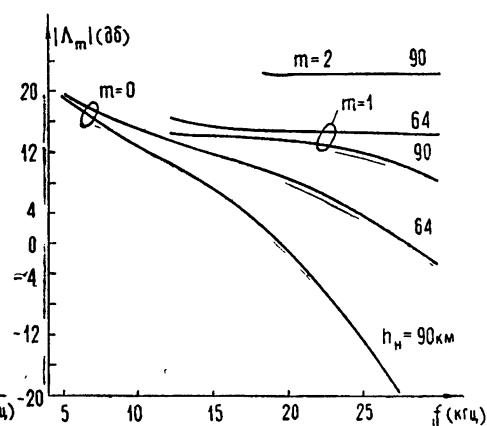


Рис. 7. Зависимость модулей коэффициентов возбуждения от частоты для дневных и ночных условий [14].

величины  $|\Lambda_m|$  с ростом частоты определяется, как показывают расчеты, в основном сферичностью Земли. Электрические же характеристики стенок волновода Земля—ионосфера играют меньшую роль. Так, при изменении проводимости земной поверхности от  $5 \cdot 10^{-3} \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$  до бесконечности для частот  $f < 25$  кгц величина  $|\Lambda_0|$  изменяется не более, чем на 1,5 дБ [31].

С увеличением номера моды модуль коэффициента возбуждения возрастает, особенно в высокочастотной части рассматриваемого диапазона частот. Это приводит к тому, что при  $f > 16$  кгц днем и  $f > 12$  кгц ночью на расстояниях от 1000 до 10000 км в зависимости от удаления преобладающей может быть первая, а в отдельных случаях — даже вторая мода.

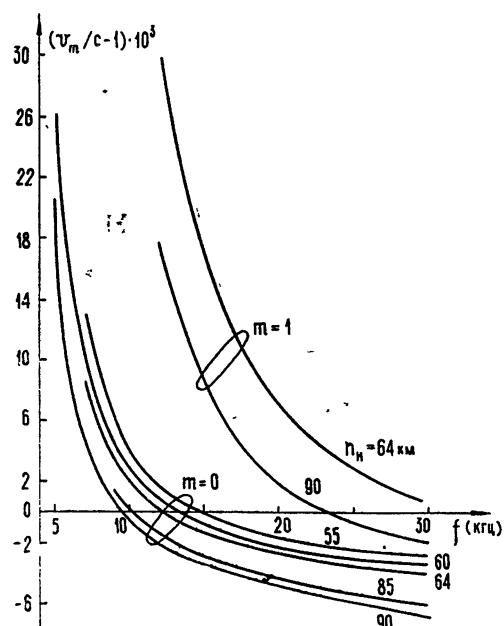


Рис. 8. Зависимость фазовой скорости от частоты для дневных и ночных условий [14].

\* Из-за наличия магнитного поля Земли преобладающей может быть также в отдельных случаях волна типа TE<sub>1</sub> (см. далее).

Для иллюстрации на рис. 9 и 10 для дневных и ночных условий при различных частотах приведена зависимость от расстояния величины

$$\left| \frac{W_m}{W_0} \right| = \left| \frac{\Lambda_m}{\Lambda_0} \right| \exp \left( - \frac{(\alpha_m - \alpha_0) d}{20 \lg e} \right) \quad (m = 1, 2),$$

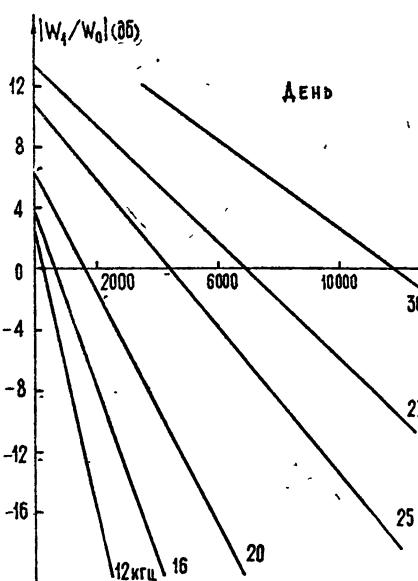


Рис. 9. График, иллюстрирующий степень относительного вклада первой моды для дневных условий распространения.

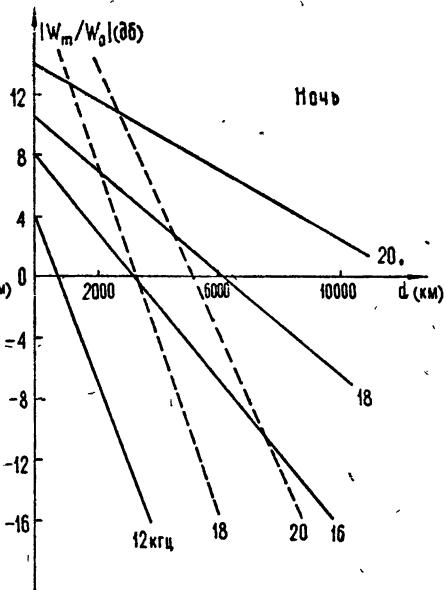


Рис. 10. График, иллюстрирующий степень относительного вклада первой (—) и второй (---) мод для ночных условий распространения.

характеризующей относительный уровень полей первой и второй мод. В ночных условиях влияние высших мод существенно увеличивается. Так, например, для частоты 20 кГц в дневных условиях распространение можно считать близким к одномодовому, начиная с расстояния 5000 км (при относительном уровне первой моды не более 20%). Для этой же частоты в ночных условиях первая мода является преобладающей вплоть до 12 000 км, а учет второй моды необходим до 8000 км (при том же относительном уровне 20%).

Характер изменения суммарного поля с расстоянием зависит также и от фазовых соотношений мод, которые определяются главным образом различиями фазовых скоростей (рис. 8). Графики для величин  $\arg \Lambda_m$  не приведены, так как в диапазоне частот 10–20 кГц соответствующие значения для дневных и ночных условий отличаются несущественно, от частоты практически не зависят и с погрешностью, не превышающей 0,025 рад, могут быть приняты равными  $\arg \Lambda_0 = 0,7$  рад и  $\arg \Lambda_1 = 0,78$  рад.

Примеры зависимостей модуля функции ослабления от расстояния приведены на рис. 11 и 12. Расчеты на расстояниях, меньших 3000 км, выполнены с использованием метода многократно отраженных волн [32] путем суммирования трех-четырех лучей. На больших расстояниях вычисления произведены методом нормальных волн, при этом для дневных условий учитывались две первые нормальные волны, а для ночных—три [14].

Представляет интерес сопоставить результаты расчетов  $|E(d)|$  с экспериментальными данными. На рис. 13 приведена эксперименталь-

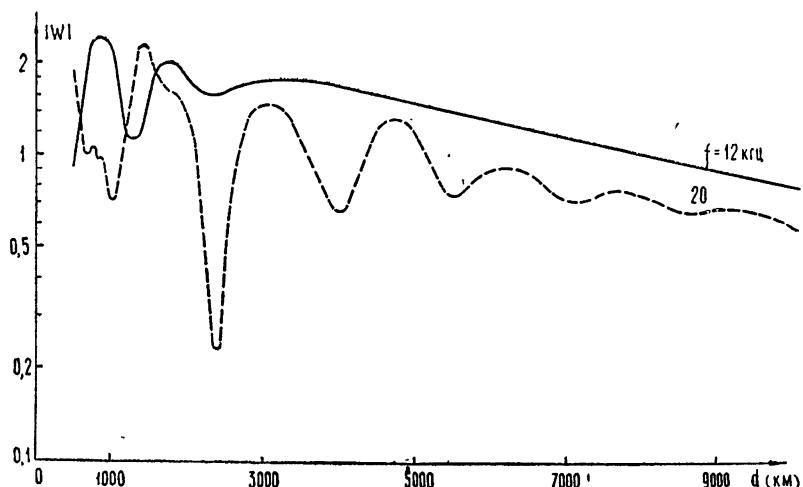


Рис. 11. Примеры зависимости модуля функции ослабления от расстояния для дневных условий.

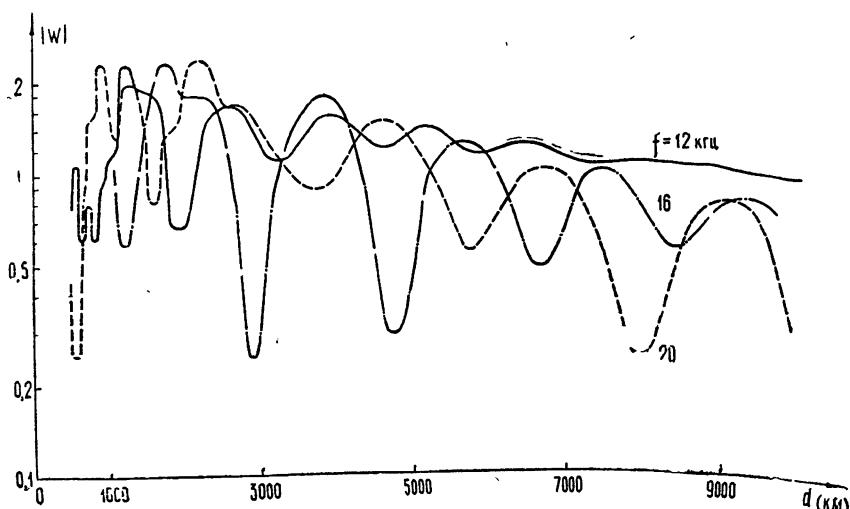


Рис. 12. Примеры зависимости модуля функции ослабления от расстояния для ночных условий.

ная зависимость  $|E(d)|$ , полученная для частот 16,6 и 17,0 кгц [33], и расчетные результаты работ [14, 32], которые, как следует из рисунка, близки к экспериментальным. Практически идеальное совпадение измеренных и рассчитанных дневных зависимостей  $|E(d)|$  получили Роудс и Гарнер [34] (рис. 14). Расчеты выполнялись по методике Уэйта [31, 35]. Наилучшее совпадение было получено для изотропной модели ионосферы при зависимости проводимости от высоты вида  $\sigma_n \sim \exp \beta(z-h)$ ,  $\beta=0,5 \text{ км}^{-1}$  и  $h = 70 \text{ км}$ . Следует отметить, что модель ионосферы Уэйта при этих значениях параметров  $\beta$  и  $h$  очень близка к модели, используемой Краснушкиным и Байбулатовым [36]; модель же работы [14] также незначительно отличается от этих двух моделей при начальной высоте дневного профиля  $h = 58 \div 60 \text{ км}$ . Сопоставляя результаты своих измерений, выполненных на частотах 19—26 кгц, в основном на расстояниях, меньших 4000 км, с расчетными данными, Роудс и Гарнер

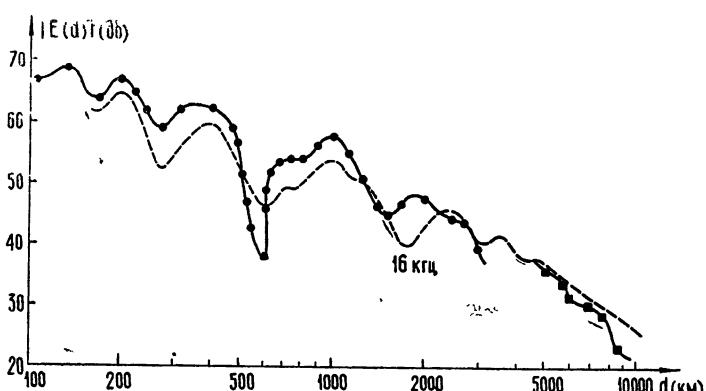


Рис. 13. Сравнение теоретической зависимости  $|E(d)|$  [14, 32] с экспериментальными данными [33] ( $h=64$  км).

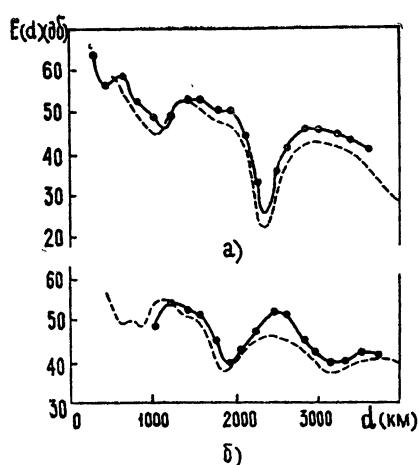


Рис. 14. Сравнение теоретической [31, 35] зависимости  $|E(d)|$  ( $m=0, 1, 2$ ,  $\beta=0,5$  км $^{-1}$ ,  $h=70$  км) с экспериментальными [34] данными.

показали, что в дневных условиях можно не учитывать влияния магнитного поля Земли на вертикальную компоненту электрического поля. Хорошее совпадение, наблюдавшееся для дневных условий, не удалось получить для ночных данных даже в том случае, когда расчеты были выполнены с учетом магнитного поля.

Исследования зависимости фазы поля от расстояния представляют наибольший интерес, так как их результаты могут быть непосредственно использованы при разработке радионавигационных систем. Результаты теоретических расчетов [14, 32] зависимости  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  приведены на рис. 15 и 16. Кривые имеют ряд особенностей, обусловливаемых сменой преобладающей моды (рис. 9 и 10), например, на расстояниях 1000—2000 км в дневных условиях на частоте 20 кГц и на расстоянии порядка 4000 км при  $f=16$  кГц в ночных условиях наблюдаются специфические «котлообразные» участки. Левее этих участков преобладающей модой является первая, правее—нулевая.

Если в момент смены ведущей моды, когда  $|W_0| \approx |W_1|$ , интерферирующие моды оказываются в противофазе, то для полного поля наблюдается глубокий минимум, например, на частоте 16 кГц при  $d=d_{\min}=2500$  км (рис. 12). Наличие такого глубокого минимума сопровождается специфической неустойчивостью зависимости  $\varphi_{\text{доп}}(d)$ .

при  $d > d_{\min}$ . Выражается это в том, что при незначительных изменениях условий (например, высоты ионосферы) происходит скачкообразное изменение фазы  $\varphi_{\text{доп}}$  на величину, близкую к  $2\pi$ . На рис. 16 для частоты 16 кгц приведен пример такой неустойчивости. Скачкообразное изменение фазы происходит при некотором значении высоты ионосферы

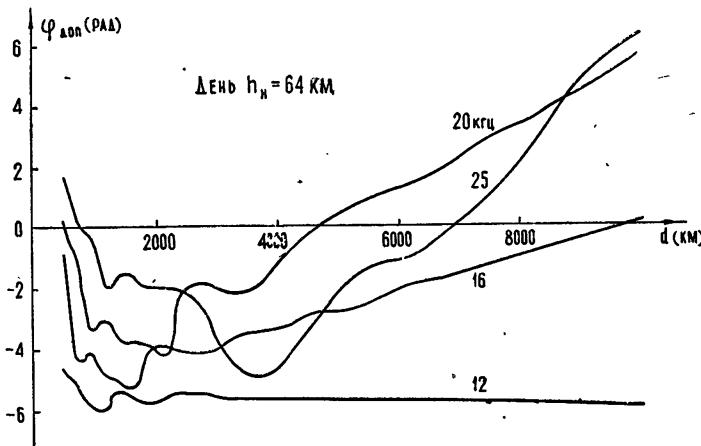


Рис. 15. Примеры зависимости  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  для дневных условий [14, 32].

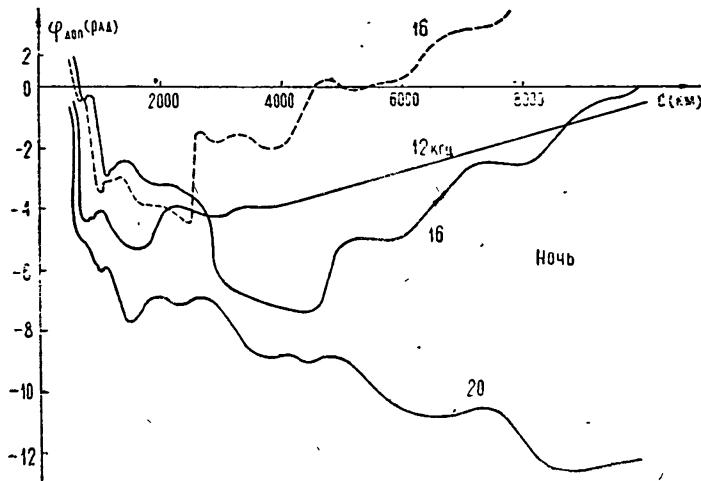


Рис. 16. Примеры зависимости  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  для ночных условий.

$85 \text{ км} < h < 90 \text{ км}$ . Заметим, что наблюдатель, находящийся на фиксированном расстоянии от передатчика  $d > d_{\min}$ , скачок фазы на  $2\pi$  зафиксировать не может. Обнаружить же этот скачок можно только при самолетных измерениях зависимости  $\varphi_{\text{доп}}(d)$ .

Интересные результаты при самолетных измерениях зависимости фазы поля от расстояния на частоте 16 кгц получены Бэрджессом [37]. По приведенным в работе материалам нетрудно вычислить значения  $\varphi_{\text{доп}}$  для ряда фиксированных расстояний\*. К этим результатам очень

\* При этих вычислениях значение  $\varphi_{\text{доп}}$  на расстоянии  $d = 125 \text{ км}$  (относительно этого пункта измерялась зависимость фазы поля от расстояния) мы положили равным нулю, допуская при этом погрешность не более чем 0,1—0,2 rad.

близки результаты расчетов  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  [14, 32], приведенные на рис. 17. В частности, хорошее совпадение наблюдается на расстояниях 1500—3000 км, где происходит резкое изменение фазы ( $\sim \pi$ ) из-за смены ведущей моды. По результатам измерений только для дневных условий на расстояниях 3100 и 7000 км, где поле с достаточной степенью точности определялось одной нулевой модой, Бэрджесс вычислил значение

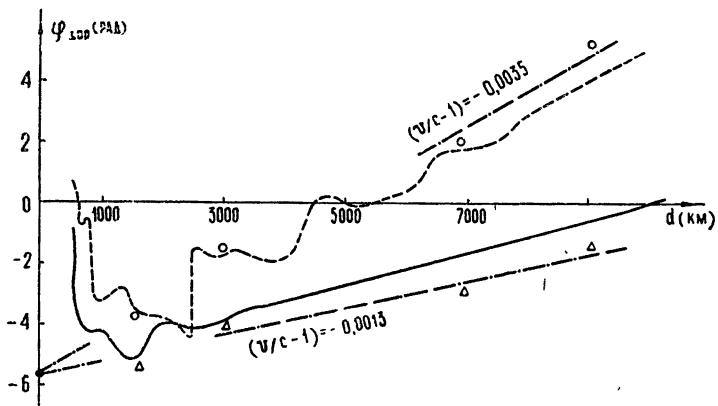


Рис. 17. Теоретическая [14, 32] и экспериментальная [37] зависимость дополнительной фазы от расстояния. Все экспериментальные точки работы [37] смешены на графике вниз на  $2\pi$ .

фазовой скорости  $v_0$ . Необходимо заметить, что точность определения значения  $v_0$  можно повысить, если при расчетах учесть точку, получающуюся при пересечении асимптоты функции  $\varphi_{\text{доп}}(d)$  с осью ординат (в данном случае эта величина равна  $\arg \Delta_0 - 2\pi$ ). При такой методике, как следует из расчетной зависимости, представленной на рис. 17,

определение  $v_0$  возможно также и для ночных условий, если использовать точки, у которых  $d > 6000$  км. Таким образом, по численным данным работы [37] несложно получить следующие значения фазовой скорости нулевой моды:  $(v_0/c - 1) = -1,3 \cdot 10^{-3}$  для дневных условий и  $(v_0/c - 1) = -3,5 \cdot 10^{-3}$  для ночных условий. Погрешность определения этих значений  $v/c$  составляет  $(0,3 - 0,5) \cdot 10^{-3}$ .

Бэрджессом были выполнены также измерения на частотах 11,6; 11,8 и 13,8 кгц, однако только в двух пунктах (расстояния 3100 и 7000 км). По приращению фазы между этими пунктами автор вычис-

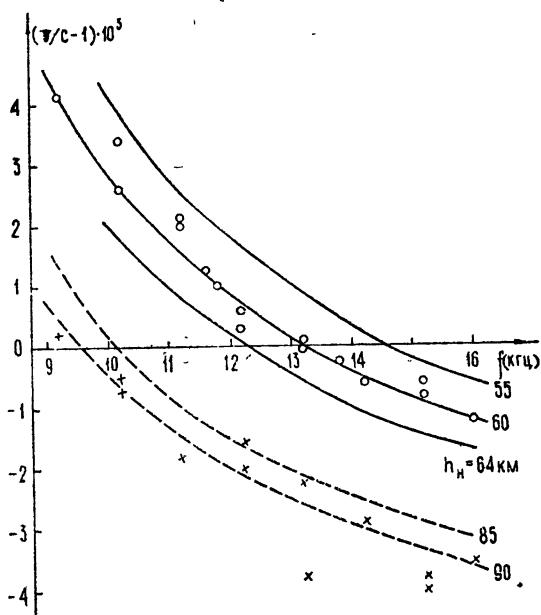


Рис. 18. Зависимость фазовой скорости от частоты по экспериментальным [37-39] и теоретическим [14] результатам.

лил фазовые скорости, которые приведены на рис. 18. Там же представлены результаты измерений других авторов [38, 39] и расчетные зависимости [14] для различных значений высоты ионосферы. Из рис. 18 следует, что наилучшее совпадение теоретических данных с экспериментальными наблюдается при  $h = 60 \text{ км}$  днем и  $h = 90 \text{ км}$  ночью.

Хорошие результаты дает также сопоставление экспериментальных и расчетных данных для величины изменения фазы от дня к ночи  $\Delta\varphi_{\text{сут}}$  (суточные фазовые вариации). На достаточно больших расстояниях,  $d > 8000 \text{ км}$ , наблюдается практически линейная зависимость  $\Delta\varphi_{\text{сут}}(d)$  (рис. 19), так как одномодовый механизм распространения

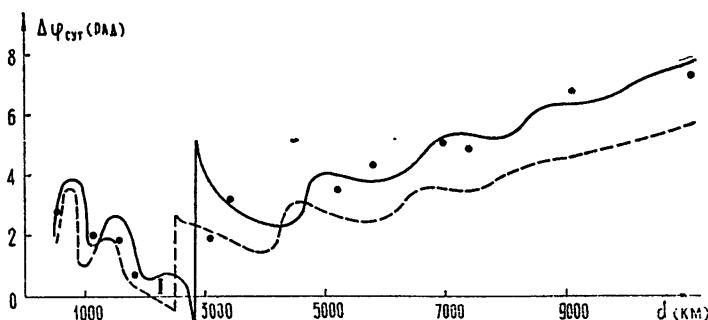


Рис. 19. Сравнение теоретических [14, 32] и экспериментальных [38] зависимостей  $\Delta\varphi_{\text{сут}}(d)$  для частоты 16 кгц. Высота дневной ионосферы  $h = 64 \text{ км}$ , высота ночной ионосферы  $85 \text{ км}$  (---) и  $90 \text{ км}$  (—).

имеет место как в дневных, так и вочных условиях. Небольшие осцилляции, имеющиеся на расстояниях 4000 — 8000 км, вызываются первой модой в ночных условиях. На расстояниях порядка 2000 — 3000 км, где ночью происходит смена ведущей моды, наблюдаются крайне нерегулярные вариации фазы от дня к ночи (при небольших изменениях расстояния величина  $\Delta\varphi_{\text{сут}}$  изменяется в масштабе  $2\pi$ ). В связи с этим нам представляется неправильным утверждение авторов работ [38, 40, 41] о том, что на расстояниях  $\sim 2000$  —  $3000 \text{ км}$  величина суточных вариаций фазы минимальна. При построении зависимости  $\Delta\varphi_{\text{сут}}(d)$  в [38] допущена еще одна ошибка, так как при этом использованы результаты работы [42], полученные для суточных вариаций фазы не полного поля, а только сигнала, однократно отраженного от ионосферы. Поэтому на приводимом в [38] графике величина  $\Delta\varphi_{\text{сут}}$  увеличивается при уменьшении расстояния от 500 до 100 км.

Зависимость величины суточных вариаций фазы от частоты представлена на рис. 20 ( $\Delta\tau = \Delta\varphi_{\text{сут}}/\omega d$ ). Из рис. 20 следует, что расчетные зависимости [14] наиболее близки к экспериментальным данным [38, 43] при высоте дневной ионосферы  $h = 60 \text{ км}$ . Относительно экспериментальных данных, приведенных нами на рис. 20, заметим, что все они получены в условиях, близких к одномодовому распространению. Протяженности трасс при измерениях были: для частот 10.2 — 13.2 кгц не менее 4000 км и для частот 14 — 16 кгц не менее 5000 км.

В последнее время выполнено большое количество интересных экспериментальных исследований явлений, наблюдавшихся на протяженных трассах распространения во время восхода и захода Солнца [44—53]. Эти работы имеют большое значение не только для прогнозирования изменений поля в переходные периоды, но и для определения характе-

ристик нормальных волн в однородном вдоль трассы распространения волноводном канале.

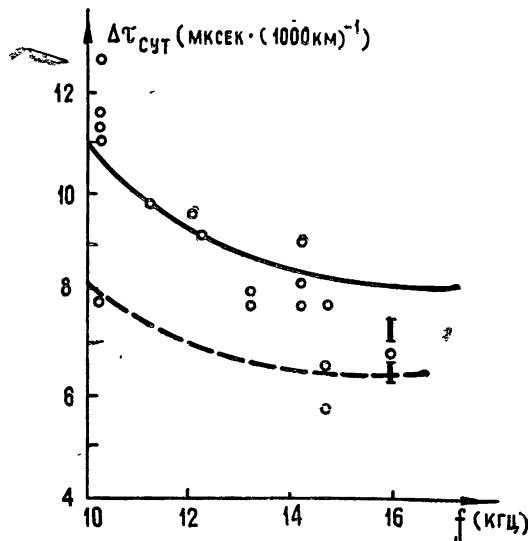
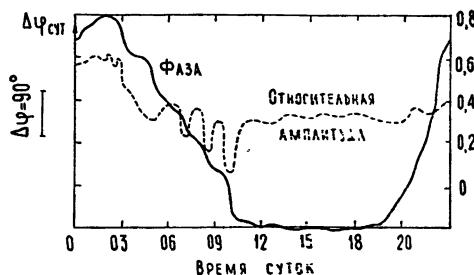


Рис. 20. Зависимость величины суточных изменений фазы от частоты:  $\circ$  — экспериментальные значения [38, 43], — теоретическая кривая [14] для высот дневной и ночной ионосферы соответственно 60 и 90 км; — — — то же для высот 64 и 90 км.

Типичный пример суточных вариаций поля, наблюдавшихся при восходе Солнца, приведен на рис. 21. На рисунке хорошо видны периодические замещания амплитуды сигнала и специфические ступенчатообразные изменения фазы. Глубина замещаний увеличивается по мере окончания процесса восхода на трассе (т. е. при приближении линии

Рис. 21. Типичные суточные фазовые и амплитудные вариации поля на трассе NBA — Франкфурт протяженностью 9100 км ( $f=18$  кГц) [45].



терминатора к передатчику). Объяснение механизма возникновения таких вариаций поля впервые было дано Кромби [44]. В дальнейшем рядом авторов были выполнены разнообразные исследования, подтверждающие его предположения.

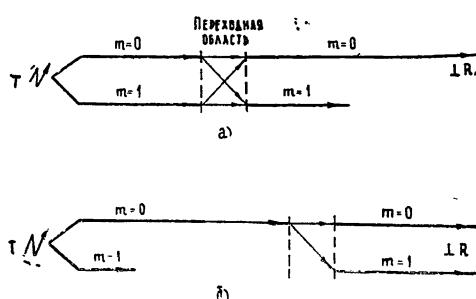


Рис. 22.

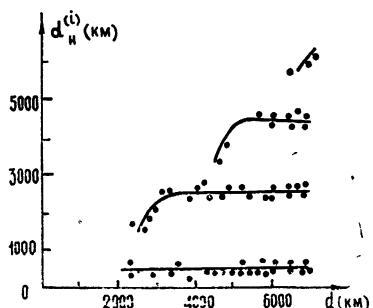
Из всевозможных ситуаций (различное положение приемника и передатчика, восход и заход Солнца, местоположение терминатора на трассе) можно выделить два наиболее интересных основных случая. В первом случае падающее поле вблизи линии терминатора со стороны передатчика определяется двумя модами (рис. 22 а). Удаление приемника от тер-

минатора полагается достаточно большим, так что в точке приема поле определяется только одной модой. При таких предположениях величина принимаемого сигнала будет зависеть от амплитудных и фазовых соотношений мод, падающих на границу раздела. Так как это соотношение определяется удаленностью терминалора от передатчика, то при перемещении терминалора по трассе в приемном пункте будут наблюдаться периодические вариации амплитуды и фазы сигнала. Их период будет определяться разностью фазовых скоростей нулевой и первой моды на левом участке трассы. Следует заметить, что эти вариации должны происходить одновременно во всех точках трассы правее переходной области, где уже существенна только одна нулевая мода. При приближении линии терминалора к передатчику относительный вклад первой моды, падающей на переходную область, будет увеличиваться и поэтому в точке приема замирания поля будут усиливаться (рис. 21). В рассмотренном случае наиболее четкие и характерные явления наблюдаются, когда распространение происходит из ночного участка в дневной.

Во втором случае типичным является распространение сигнала из освещенного участка трассы в ночной. При этом полагается, что поле на границе раздела со стороны передатчика определяется только одной модой (нулевой). Наличие в волноводном канале неоднородности приводит к появлению высших мод, и поэтому поле на втором участке трассы будет носить интерференционный характер. При движении терминалора по трассе интерференционная картина будет перемещаться синхронно с ним и в точке приема будут наблюдаться периодические вариации поля. При двухмодовом распространении период этих вариаций будет определяться разностью фазовых скоростей нулевой и первой мод на правом (ночном) участке трассы. В данном случае глубина замираний будет увеличиваться при приближении линии терминалора к приемнику.

Наиболее обстоятельные экспериментальные исследования, подтверждающие возможность использования приближенных представлений, описанных выше, выполнены Уолкером [46]. Все измерения проводились по сигналам станции NBA (18 кгц), которые принимались в стационарном пункте в Найроби (Кения), удаленном от передатчика на 12950 км, и на корабле, курсировавшем между приемником и передатчиком в экваториальной области. Расстояние от корабля до передатчика изменялось от 2000 до 7000 км. Результаты измерений на корабле показаны на рис. 23. При восходе Солнца (распространение из ночного

Рис. 23. Зависимость расстояния  $d_n^{(i)}$  от протяженности трассы  $d$  при восходе Солнца (измерения на корабле).



участка трассы в дневной) замирания поля наблюдаются одновременно во всех точках освещенной части трассы. Минимумы амплитуды наступают периодически, и расстояние, проходимое линией терминалора за время между двумя последовательными минимумами  $D = d_n^{(i)} - d_n^{(i+1)}$ ,

составляет около 2000 км (здесь  $d_n^{(i)}$  — протяженность ночного участка трассы в момент наступления  $i$ -го минимума). При малых протяженностях дневного участка трассы ( $d - d_n < 1000$  км) в точке приема существенна первая мода, и поэтому расстояния  $d_n^{(i)}$  зависят от протяженности трассы. Аналогичные измерения были выполнены также и для захода Солнца. Параметр  $D$  имел несколько меньшее значение ( $D \approx 1900$  км).

Используя полученные значения  $D$  по формуле

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{2\pi c}{\omega D},$$

Уолкер вычислил разность фазовых скоростей интерферирующих мод:  $\Delta v/c = 0,0083$  по измерениям на восходе Солнца и  $\Delta v/c = 0,0088$  по измерениям на заходе. Сопоставляя результаты расчетов Уэйта с экспериментально полученными значениями, автор определил, что они соответствуют разности фазовых скоростей нулевой и первой мод для ночных условий распространения (и тем самым подтвердил механизм, предложенный Кромби).

Стил и Кромби [47] по результатам измерений на восходе Солнца в диапазоне частот от 10 до 26 кГц получили зависимость параметра  $D$  от частоты, а также разность коэффициентов затухания первой и нулевой мод  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ . Для определения значений  $\Delta\alpha$  измерялись величины последовательных фазовых отклонений значений  $\Delta\Phi_{\text{сут}}$  от соответствующей зависимости, которая бы имела место в случае распространения на всей трассе только одной нулевой моды. Сопоставляя результаты собственных экспериментов с теоретическими данными работы [38], авторы [47] нашли, что при значении параметра ионосферного профиля  $\beta = 0,5 \text{ км}^{-1}$  наиболее хорошее совпадение получается при  $h = 80 \div 90$  км. Данные работы [14] для ночных условий ( $h_n = 90$  км) очень близки к результатам [38]. На рис. 24 и 25 приведены экспериментальные результаты Стила и Кромби [47], а также теоретические расчеты по данным [14].

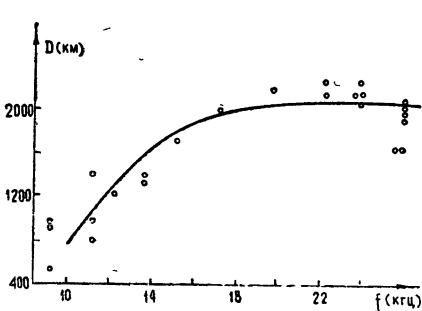


Рис. 24. Зависимость величины  $D$  от частоты:  $\circ$  — эксперимент [47], — теория [14] ( $h=90$  км).

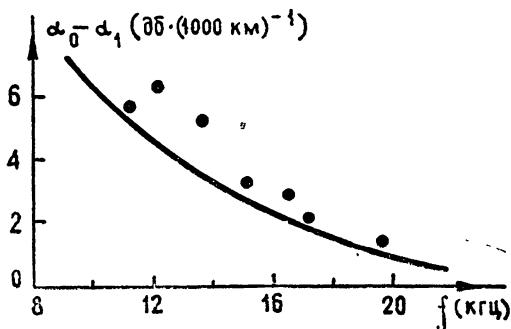


Рис. 25. Зависимость от частоты разности коэффициентов затухания первой и нулевой мод для ночных условий:  $\circ$  — экспериментальные данные [47], — теоретический расчет [14] ( $h=90$  км).

Анализируя только амплитудные вариации сигнала, по минимальным и максимальным значениям можно определить величину, связанную с коэффициентами преобразования мод. Не останавливаясь на методике обработки экспериментальных данных [46], мы приведем окончательные результаты работ [46, 48]. Авторы этих работ находят величину

$a_0/a_1$ , которая имеет следующий физический смысл. В случае, когда распространение происходит из ночного участка трассы в дневной, величина  $a_0/a_1$  равна отношению интенсивностей полей нулевой моды, возникшей из нулевой же моды, падающей слева на переходную область (рис. 22 а), и нулевой моды, образующейся за счет преобразования из первой. В случае, когда передатчик находится в освещенной части трассы, величина  $a_0/a_1$  есть отношение амплитуд нулевой и первой мод на ночном участке трассы непосредственно около переходной области. В первом разделе указывалось, что в общем случае при строгом рассмотрении задачи отношения  $a_0/a_1$  для указанных двух случаев отличаются друг от друга, так как отраженное поле существенно только, когда распространение происходит из ночного участка в дневной. Однако, как это следует из экспериментальных записей суточных изменений поля, отраженное поле не наблюдается. Имеющиеся же вариации поля хорошо как качественно, так и количественно, объясняются при использовании упрощенных схем рис. 22. Поэтому можно полагать, что принцип взаимности для отношения  $a_0/a_1$  соблюдается так же, как и для полного поля.

Пользуясь своими экспериментальными данными, Уолкер [46] и Лин [48] получили, что в случае, когда линия терминатора практически перпендикулярна к трассе распространения, для частоты 18 кгц отношение  $a_0/a_1$  при восходе Солнца равно 1,4—1,6 и при заходе — 2,3. То, что явления преобразования мод при заходе Солнца выражены слабее, чем при восходе, подтверждается многочисленными наблюдениями других авторов.

Лин [48] исследовал также зависимость отношения  $a_0/a_1$  от угла между направлением распространения и терминатором. На рис. 26 эта экспериментальная зависимость сравнивается с результатами теоретических расчетов Уэйта [21]. Последние определяют зависимость отношения  $a_1/a_0$  от ширины переходной области. Поэтому для сравнения по данным Лина получена аналогичная зависимость, при этом ширина переходной области при нормальном падении волны на нее выбрана 500 км. При расчетах в [21] использована модель изотропной однородной ионосферы и бесконечно проводящей земли. Переходная область представлена шестью последовательными ступеньками одинаковой протяженности, высота ионосферы в освещенной части волновода равна 70 км, в ночной — 90 км. Из рис. 26 следует, что при увеличении ширины переходной области, а также с понижением частоты взаимное преобразование мод ослабевает. Важно отметить, что максимальное значение отношения  $a_1/a_0$  для частот ниже 18—20 кгц не превосходит единицы (по крайней мере, в обычных условиях). Для более высоких частот, а также для частот 18—20 кгц, но в аномальных случаях, когда трасса проходит в экваториальной области [48], отношение  $a_1/a_0$  может заметно

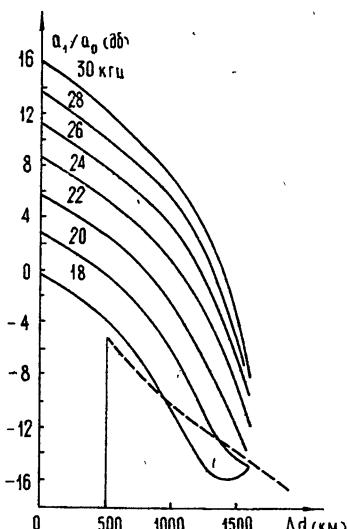


Рис. 26. Зависимость величины  $a_1/a_0$  от ширины переходной области и частоты [21]. Пунктиром показана зависимость, рассчитанная по экспериментальным значениям [48] для  $f=18,6$  кгц.

превышать единицу. В этих случаях наблюдается явление, получившее название потери фазового цикла.

Явление это заключается в том, что начальное и конечное значения фазы поля при суточных записях отличаются на  $\pm 2\pi k$  (обычно  $k = 1$ ) (рис. 27). Не вдаваясь в подробности, отметим, что явление потери фазового цикла может возникнуть только в случае, когда два интерфе-

рирующих сигнала (две моды) в некоторый момент времени переходного периода в точке приема близки по амплитуде и противофазны. При восходе или при заходе Солнца в этот момент времени могут преобладать различные сигналы (моды) и поэтому ход фазы может быть также существенно различным (рис. 27). Причиной потери фазового цикла может являться также обычная интерференция двух мод без их взаимного преобразования [49]. Существенную роль в случае протяженных трасс ( $d > 12000$  км) играет кругосветный сигнал. Интерференция прямого сигнала и кругосветного

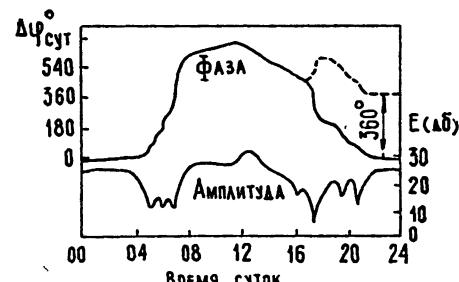


Рис. 27. Типичные суточные фазовые и амплитудные вариации на трассе NPG — Смитфилд (Южная Австралия) протяженностью 13420 км [48] ( $f = 18,6$  кгц); пунктирная кривая соответствует случаю потери фазового цикла.

в принципе может также привести к потере фазового цикла [50—52].

Следует заметить, что каждая из указанных выше причин в отдельности приводит к явлению потери фазового цикла сравнительно редко. Благодаря же их совместному действию вероятность потери фазового цикла, особенно для протяженности трасс, становится значительно большей.

Перейдем к обсуждению особенностей распространения, определяемых магнитным полем Земли. Еще в 1925 г. Раундом [53] были проведены экспериментальные исследования, свидетельствующие о нарушении принципа взаимности. Из полученных результатов следовало, что при распространении сигналов СДВ радиостанций с востока на запад наблюдается большее затухание, чем при распространении в обратном направлении. К настоящему времени опубликован ряд экспериментальных исследований [33, 54—56], в которых получены аналогичные результаты. Явление невзаимности для зависимости фазы поля от расстояния исследовано в значительно меньшей степени [57, 58].

Из теоретических расчетов [12, 15, 36] следует, что влияние магнитного поля на характеристики распространения наиболее существенным должно быть в ночных условиях. При расчетах поля в этом случае необходимо учесть всех трех компонент магнитного поля Земли [12]: горизонтальной, поперечной к трассе распространения компоненты  $H_\phi^{(3)}$ , горизонтальной продольной —  $H_\theta^{(3)}$  и вертикальной —  $H_r^{(3)}$ . При расчетах для дневных условий оказывается возможным ограничиться учетом только компоненты  $H_\phi^{(3)}$  [36]. Именно эта компонента магнитного поля и приводит к явлению невзаимности, а две другие,  $H_r^{(3)}$  и  $H_\theta^{(3)}$ , лишь несколько изменяют характеристики распространения. Поэтому очевидно, что явление невзаимности наиболее сильно должно проявляться, когда распространение происходит в экваториальной области в направлении, перпендикулярном к магнитному меридиану.

Наиболее подробные теоретические исследования влияния магнитного поля на характеристики распространения выполнены Краснушкиным и Байбулатовым [12, 36]. Из расчетов следует, что в дневных усло-

виях магнитное поле изменяет, главным образом, только коэффициенты затухания нормальных волн (рис. 28). Для волны  $\text{TM}_0$  (нулевая мода) с понижением частоты эффект невзаимности увеличивается: так, на частоте 14 кгц  $\Delta\alpha = \alpha_{3-\text{в}} - \alpha_{\text{в}-3} \approx 1 \text{ дБ} \cdot \text{тыс. км}^{-1}$ , а на частоте 8 кгц  $\Delta\alpha \approx 2,5 \text{ дБ} \cdot \text{тыс. км}^{-1}$ . Эти расчетные данные хорошо согласуются с экспериментальными результатами работ [33, 56].

Для фазовой скорости волны  $\text{TM}_0$  невзаимность проявляется незначительно [36]. На частотах 10—20 кгц величина  $\Delta v/c = (v_{3-\text{в}} - v_{\text{в}-3})/c$  как для средних широт, так и экваториальной области имеет порядок  $10^{-4}$ . Интересно отметить, что магнитное поле изменяет фазовую скорость при распространении с запада на восток в несколько большей степени (по сравнению со случаем, когда магнитного поля нет), чем при распространении в обратном направлении. Проведенные данные подтверждаются экспериментальными результатами Редера [58], который

при специальных самолетных измерениях для частоты 14,2 кгц получил  $\Delta v/c = (1 \div 2) \cdot 10^{-4}$ .

Как уже отмечалось, в ночных условиях магнитное поле влияет на характеристики распространения очень существенно. Кроме явления невзаимности, в ночных условиях наблюдаются дополнительные особенности, обусловливаемые наличием волны  $\text{TE}_1^*$ . Характеристики нормальных волн  $\text{TM}_0$ ,  $\text{TM}_1$  и  $\text{TE}_1$  для ночных условий на частотах 10, 15, 25 кгц для различных значений компонент магнитного поля  $H_r^{(3)}$ ,  $H_\varphi^{(3)}$  и  $H_\theta^{(3)} = 0,1 \text{ э}$  получены в работе [12] (авторами рассмотрена задача с  $\sigma_3 = \infty$ ). В табл. 1 приведены приближенные значения  $|\Lambda|$ ,  $\alpha$  и  $v/c - 1$ , вычисленные по географическим данным работы [12] при значениях  $H_r^{(3)} = 0,3 \text{ э}$  и  $H_\varphi^{(3)} = \pm 0,15 \text{ э}$  (средние широты).

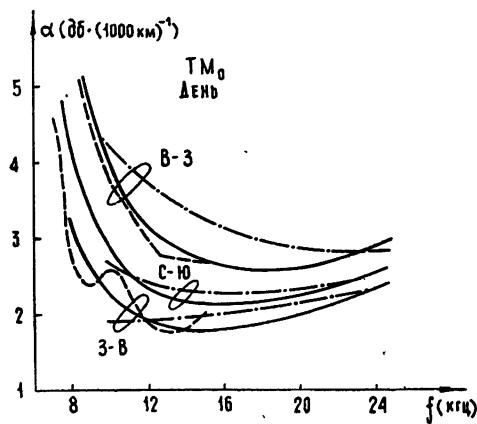


Рис. 28.

Таблица 1

		$ \Lambda  (\text{дБ})$	$\alpha (\text{дБ} \cdot (1000 \text{ км})^{-1})$		$(v/c - 1) \cdot 10^3$		$\frac{\Delta v}{c} \cdot 10^3$
			B-3	3-B	B-3	-3-B	
10 кгц	$\text{TM}_1$	13	4,0	0,7	0	0	0
	$\text{TM}_2$	15	22,0	3,8	27,0	34,0	-7,0
	$\text{TE}_1$	-20	3,1	3,6	5,0	8,0	-3,0
15 кгц	$\text{TM}_1$	7	4,9	0,8	-4,0	-3,0	-1,0
	$\text{TM}_2$	15	9,6	1,8	7,0	8,0	-1,0
	$\text{TE}_1$	-14	1,0	2,1	-2,5	-1,5	-1,0

Из табл. 1 следует, что в ночных условиях эффекты невзаимности очень существенны. Для нормальных волн  $\text{TM}$  типа коэффициенты затухания для направления восток—запад значительно превышают соот-

\* Относительно нумерации волн  $\text{TE}$  типа заметим, что для ее обоснования необходимы специальные исследования, аналогичные выполненным в [24], § 1. Здесь же мы используем нумерацию, принятую в [12, 15].

ветствующие значения для противоположного направления. У волн TE типа эффект невзаимности сравнительно невелик и имеет обратный знак. Фазовая скорость для направлений восток—запад и запад—восток отличается в четвертом знаке, причем  $v_{B-3} < v_{3-B}$  (для дневных же условий  $v_{B-3} > v_{3-B}$ ).

Коэффициенты возбуждения  $|\Lambda|$  волны TE<sub>1</sub> много меньше, чем волны TM<sub>0</sub> и TM<sub>1</sub> (на 20—30 дБ). Однако несмотря на это, для направления восток—запад на достаточно больших расстояниях нормальная волна TE<sub>1</sub> становится преобладающей вследствие значительно меньшего коэффициента затухания, чем у волн TM типа. Для иллюстрации на рис. 29, 30 построены зависимости от расстояния величин  $|W_{TM_1}/W_{TM_0}|$  и  $|W_{TE_1}/W_{TM_0}|$ , характеризующих относительный вклад волн TM<sub>1</sub> и TE<sub>1</sub> по сравнению с волной TM<sub>0</sub>.

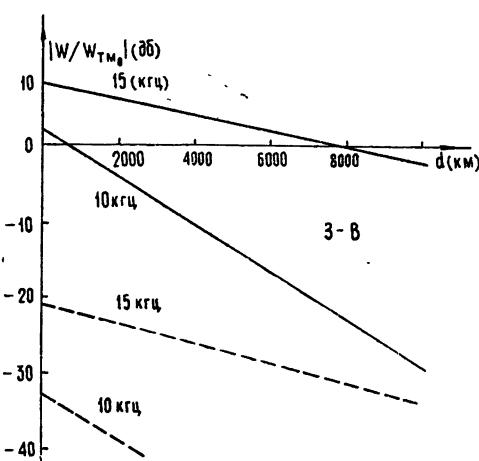


Рис. 29. Зависимость от расстояния  $|W_{TM_1}/W_{TM_0}|$  (сплошные линии) и  $|W_{TE_1}/W_{TM_0}|$  (пунктирные линии) для направления запад—восток.

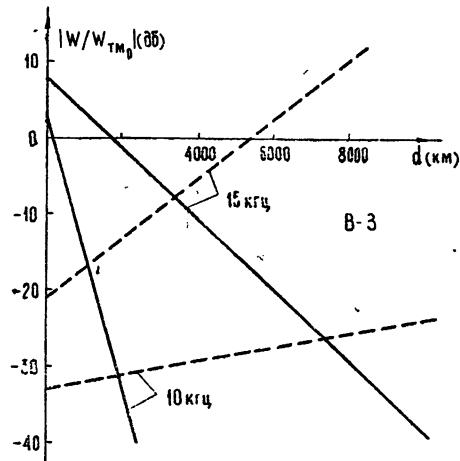


Рис. 30. Зависимость от расстояния  $|W_{TM_1}/W_{TM_0}|$  (сплошные линии) и  $|W_{TE_1}/W_{TM_0}|$  (пунктирные линии) для направления восток—запад.

Для направления запад—восток волна TE<sub>1</sub> играет несущественную роль. Волна TM<sub>1</sub> из-за действия магнитного поля затухает более медленно и, например, для частоты 15 кГц является преобладающей до 8000 км (без магнитного поля она преобладает над волной TM<sub>0</sub> только до 3000 км, рис. 10). При распространении с востока на запад относительный вклад в поле волны TM<sub>1</sub> уменьшается, а волны TE<sub>1</sub> — увеличивается. Однако для частоты 10 кГц волна TE<sub>1</sub> возбуждается очень слабо и поэтому вплоть до 10000 км не играет существенной роли. На частоте 15 кГц и более высоких частотах волна TM<sub>0</sub> затухает значительно быстрее, чем волна TE<sub>1</sub>. Это приводит к тому, что для направления распространения восток—запад сложный интерференционный характер поля будет наблюдаться до расстояний порядка 8000 км. На расстояниях, больших 8000 км, поле будет носить одномодовый характер, но при этом затухание и фазовая скорость поля будут определяться волной TE<sub>1</sub>.

Следует заметить, что выше были приведены характеристики распространения для однородных вдоль направления распространения трасс. В действительности же на протяженных трассах магнитное поле существенно изменяется. Поэтому степень влияния волны TE<sub>1</sub> может быть меньше, чем следует из рис. 30.

В литературе опубликовано сравнительно мало экспериментальных данных по влиянию магнитного поля Земли вочных условиях. По большей части эти данные характеризуют только лишь явление невзаимности при измерениях напряженностей полей. Так, по результатам измерений Хансельмана [54], полученных для частоты 10,2 кГц на протяженных трассах ( $d \sim 8000$  км), нетрудно вычислить значение  $\Delta\alpha = -1,3 \text{ дБ} \cdot (\text{тыс. км})^{-1}$ . Предположение о наличии одномодового механизма распространения при этих вычислениях вполне оправдано (рис. 30). Однако полученное значение  $\Delta\alpha$  существенно меньше ожидаемого из теоретических расчетов (табл. 1).

В работах [55, 59–61] проводятся результаты измерений суточных изменений напряженности поля (частоты 15–25 кГц) для случаев, когда приемник располагался в антиподной по отношению к передатчику точке (или же был незначительно удален от нее). Результаты, полученные в этих работах, не противоречат данным табл. 1. Но при этом они и не являются прямым подтверждением того, что для протяженных трасс ( $d \sim 20$  тыс. км) при приеме сигналов с восточного направления преобладает волна TE<sub>1</sub>.

Необходимость учета волны TE<sub>1</sub> в какой-то мере подтверждают данные, полученные Кромби [57] для частот 18–20 кГц при исследовании зависимости величины  $D$  (расстояние, проходимое терминатором за время между двумя последовательными минимумами амплитуды сигнала в пункте наблюдения) от направления распространения. Для меридионального направления и направления запад — восток значения  $D$  отличаются мало и составляют 1900 — 2000 км, что хорошо согласуется с результатами расчета для случая, когда на ночном участке трассы существенны две нормальные волны TM<sub>0</sub> и TM<sub>1</sub> (при этом, как следует из табл. 1, для частот 15 и 25 кГц величина  $D$  равна соответственно 1800 и 2100 км). Для направления восток — запад величина параметра  $D$  больше,  $D \approx 2200 \div 3200$  км. Увеличение параметра  $D$  авторы работы [12] объясняют тем, что при распространении с востока на запад на ночном участке трассы доминирующими являются нормальные волны TE<sub>1</sub> и TM<sub>1</sub> (величина  $D$  в этом случае для частот 15 и 25 кГц соответственно 2100 и 2900 км).

Однако такое предположение не всегда может соответствовать условиям эксперимента. В ряде случаев на ночном участке трассы поле может носить двухмодовый (TM<sub>0</sub>, TM<sub>1</sub>,  $d < 2000 \div 3000$  км) или трехмодовый характер ( $d \sim 4000 \div 6000$  км). Это безусловно должно приводить к значительному разбросу величины  $D$  для трасс восток — запад, что и наблюдалось экспериментально ( $D \approx 2200 \div 3200$  км). Таким образом, особенности распространения вочных условиях, вызываемые магнитным полем, экспериментально исследованы недостаточно и необходимы дальнейшие работы в этом направлении.

В заключение коротко остановимся на наиболее перспективных, с нашей точки зрения, направлениях дальнейших исследований. Для регулярного волноводного канала построение общей теории и методов расчета полей можно считать в основных чертах законченным. В математическом отношении здесь представляет интерес исследование точности «диагонального» приближения, которое используется при нахождении коэффициентов отражения зональных гармоник от сферической анизотропной ионосферы. Кроме того, не рассмотрен также вопрос о роли сплошной части спектра оператора  $L$ , для случая неоднородной анизотропной ионосферы.

Значительно больше нерешенных проблем имеется в случае, когда параметры волноводного канала зависят от продольной координаты (нерегулярный волновод). Здесь не рассмотрен практически важный случай, когда одновременно с переходным участком день — ночь на трас-

се имеются резко очерченные неоднородности земной поверхности, например, переход типа суши—море. Не изучены эффекты типа береговой рефракции при наклонном падении волны на переходный слой. И, наконец, полностью отсутствует совместный учет неоднородности волновода и анизотропии ионосферы за исключением приближения ВКБ, не учитывающего связь между нормальными волнами.

Аналитические исследования поведения собственных чисел выполнены только в изотропном случае. При этом обнаружено явление двукратного вырождения. Представляло бы интерес продолжить эти исследования и рассмотреть динамику собственных чисел для сферического анизотропного волновода, где вырождение может быть уже четырехкратным. Двукратное вырождение в этом случае уже обнаружено [15].

Следует заметить, что развитый к настоящему времени математический аппарат позволяет производить расчеты при произвольной структуре ионосферы (в регулярном случае). Однако мы располагаем весьма бедными сведениями о строении нижней части ионосферы и поэтому несомненный интерес представляют исследования, касающиеся обратной задачи. Некоторые результаты в этом направлении получены в [62] путем согласования расчетных и экспериментальных данных о СДВ полях. Заметим, что для дневных условий вполне удовлетворительное соответствие данных теории и эксперимента имеет место даже при современных сведениях об ионосфере [63]. Для ночных же условий совпадение теоретических и экспериментальных результатов наблюдается в значительно меньшей степени. Это связано с более сложной пространственной структурой поля, а также с тем, что на формирование поля оказывают влияние ионосферные слои с меньшей электронной концентрацией. Поэтому решение обратной задачи наиболее актуально для ночных условий. Особенно плодотворным при этом является использование результатов самолетных измерений зависимости поля от расстояния и измерений для протяженных трасс в переходные периоды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Времтег, *Terrestrial radio waves*, Elsevier Publ. Co., N. Y., Amsterdam, London, 1949.
2. П. Е. Краснушкин, Н. А. Яблочкин, Теория распространения сверхдлинных волн, Тр. гос. научн.-исслед. института, вып. 4 (12), изд. ВЦ АН СССР, М., 1955, 1963.
3. Я. Л. Альперт, О распространении электромагнитных волн над земной поверхностью, изд. АН СССР, М., 1955.
4. K. G. Budden, *The wave-guide mode theory of wave propagation*, Logos Press, Acad. Press, 1961.
5. J. R. Wait, *Electromagnetic waves in stratified media*, Pergamon Press, Oxford—Paris, 1962.
6. J. R. Johler, L. A. Berry, *Propagation radio waves at frequencies below 300 kc/s*, Pergamon Press, Oxford—Paris, 1964, p. 101.
7. Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля—ионосфера, изд. Наука, М., 1967.
8. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Теория распространения радиоволн, в сб. I Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, М., 1968, стр. 242.
9. J. R. Wait, *Canad. J. Phys.*, 41, № 2, 299 (1963).
10. J. R. Johler, *J. Res. NBS*, 68D, № 1, 67 (1964).
11. П. Е. Краснушкин, ДАН СССР, 171, № 1, 61 (1966).
12. Р. Б. Байбулатов, П. Е. Краснушкин, ДАН СССР, 174, № 1, 84 (1967).
13. Э. М. Гюнниен, И. Н. Забавина, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 7, изд. ЛГУ, 142 (1968).
14. С. Т. Рыбачек, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 7, изд. ЛГУ, 152 (1968).

15. Г. Ф. Ременец, Г. И. Макаров, В. В. Новиков, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 8, изд. ЛГУ, 109 (1968).
16. J. Galejs, Radio Sci., 2, № 6, 557 (1967).
17. J. Galejs, J. Geophys. Res., 73, № 1, 339 (1968).
18. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., ч. 1, 1949.
19. Б. З. Каценеленбаум, Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
20. D. Rugg, Radio Sci., 2, № 6, 551 (1967).
21. J. R. Wait, Radio Sci., 3, № 8, 787 (1968).
22. J. R. Wait, E. Bahar, Radio Sci., 69D, № 11, 1445 (1965).
23. E. Bahar, Proc. IEE, 113, № 11, 1741 (1966).
24. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 7, изд. ЛГУ, 19 (1968).
25. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, С. Т. Рыбачек, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 9, изд. ЛГУ (в печати).
26. А. Б. Орлов, А. И. Смирнов, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 10, изд. ЛГУ (в печати).
27. С. Т. Рыбачек, Геомагнетизм и аэрономия, 8, № 3 (1968).
28. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, изд. АН СССР, М., 1946.
29. K. G. Budden, Proc. IRE, 45, № 6, 778 (1957).
30. J. R. Wait, Proc. IRE, 45, № 6, 760 (1957).
31. J. R. Wait, K. P. Spies, J. Res. NBS, 69D, № 10, 1359 (1965).
32. И. Н. Забавина, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 9, изд. ЛГУ (в печати).
33. A. D. Watt, R. D. Croghan, J. Res. NBS, 68D, № 1, 1 (1964).
34. F. J. Rhoads, W. E. Garner, Radio Sci., 2, № 6, 539 (1967).
35. J. R. Wait, K. P. Spies, NBS Techn. Note, № 300 (1964).
36. П. Е. Краснушкин, Р. Б. Байбулатов, ДАН СССР, 171, № 2, 340 (1966).
37. B. Burgess, Conf. on MF, LF and VLF radio propagation, IEE publication, 1967.
38. W. D. Westfall, Radio Sci., 2, № 1, 119 (1967).
39. J. R. Wait, Proc. IRE, 49, № 6, 1089 (1961).
40. W. T. Blackband, J. Res. NBS, 68D, № 2, 575 (1964).
41. A. Volland, J. Res. NBS, 68D, № 2, 225 (1964).
42. C. J. Chilton, D. D. Crombie, A. G. Jean, Propagation of radio waves at frequencies below 300 kc/s, Pergamon Press, Oxford—Paris, 1964, p. 257.
43. W. T. Blackband, Propagation of radio waves at frequencies below 300 kc/s, Pergamon Press, Oxford—Paris, 1964, p. 219.
44. D. D. Crombie, J. Res. NBS, 68D, № 1, 271 (1964).
45. G. Ries, Radio Sci., 2, № 6, 531 (1967).
46. D. Walker, J. Res. NBS, 68D, № 4, 1435 (1965).
47. A. B. Kaiser, Radio Sci., 3, № 6, 547 (1968).
48. K. J. W. Lynn, Radio Sci., 2, № 6, 521 (1967).
49. D. Walker, Conf. on MF, LF and VLF radio propagation, IEE publication, 1967.
50. A. M. Thompson, R. W. Arehier, I. K. Harvey, JEEE, 51, № 11 (1963).
51. F. A. McNeill, A. H. Allan, J. Geophys. Res., 70, № 3, 731 (1965).
52. A. B. Kaiser, J. Atmos. and Terr. Phys., 29, № 1, 73 (1967).
53. H. J. Round, T. L. Eckersley et al., J. IEE, 63, 346 (1925).
54. J. C. Hanselman, J. Res. NBS, 68D, № 1, 11 (1964).
55. D. D. Crombie, J. Atmos. and Terr. Phys., 12, № 23, 110 (1958).
56. W. L. Taylor, J. Geophys. Res., 65, № 7, 1933 (1960).
57. D. D. Crombie, Radio Sci., 1, № 1, 47 (1966).
58. F. H. Reder, Propagation of radio waves at frequencies below 300 kc/s, Pergamon Press, Oxford—Paris, 1964, p. 335.
59. J. E. Bickel, Radio Sci., 2, № 6, 578 (1967).
60. J. E. Rogerson, Radio Sci., 2, № 6, 581 (1967).
61. F. P. Snyder, J. E. Bickel, Radio Sci., 2, № 7, 659 (1967).
62. П. Е. Краснушкин, ДАН СССР, 139, № 1 (1961).
63. Распределение электронов в верхней атмосфере, изд. Мир, М., 1969.

# ИЗЛУЧЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

(Обзор)

Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	356
<b>1. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ</b>	357
1. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной среды	357
2 Приближение метода возмущений. Предельные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных неоднородностей	362
3. Связь мнимальной части $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$ с сечением рассеяния	364
4 Общие свойства эффективной диэлектрической проницаемости	364
<b>2. АНИЗОТРОПНЫЕ ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ</b>	363
5. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости	368
6. Магнитоактивная плазма. Метод возмущений. Предельные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных флюктуаций	371
7. Изотропная среда с анизотропными неоднородностями	374
<b>3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ</b>	376
8. Излучение элементарного электрического диполя в неоднородной среде	377
9. Излучение тонкой металлической антенны в хаотически неоднородной среде	378
10. Излучение равномерно движущегося заряда в среде с неоднородностями	380
11. Тепловое излучение в хаотически неоднородной среде	383

## ВВЕДЕНИЕ

Флюктуационные явления, возникающие при распространении волн в хаотически неоднородных средах, уже давно стали предметом экспериментального и теоретического изучения в многочисленных работах. Практически любая реальная среда является в той или иной степени неоднородной. Флюктуации параметров волн, распространяющихся в таких средах, имеют непосредственное отношение к целому ряду научных и технических проблем астрономии, радиоастрономии, радионавигации, радио- и гидролокации, связи, физики Солнца и межпланетной среды, ионосферы Земли, акустики, оптики и т. п. Флюктуации в принимаемом сигнале зачастую превосходят собственные шумы аппаратуры, и могут, следовательно, стать определяющим фактором в вопросах точности и разрешающей способности.

Интерес, вызванный этими проблемами, привел к заметному прогрессу в статистической теории распространения волн, и последняя очень быстро сформировалась в самостоятельную область с многочисленными ответвлениями. Круг вопросов, относящихся к рассматриваемой теме, очень широк. Общность теоретических методов исследования делает родственными статистические задачи радиотехники, распростра-

нения электромагнитных волн, акустики, квантовой теории поля и т. д. В настоящем обзоре мы не ставили своей целью трудную задачу охватить полный круг проблем такого рода. Вопросы статистической теории распространения волн достаточно полно исследовались и обсуждались в ряде работ [1–24]. В обзорной работе [19] дана картина современного состояния теории распространения волн в случайно неоднородных средах. Там же приведена обширная библиография, достаточно полно отражающая состояние проблемы в целом. Вне круга задач, рассмотренных в [19], остались вопросы теории распространения электромагнитных волн в тех случаях, которые не сводятся к исследованию на основе скалярного волнового уравнения.

В настоящем обзоре внимание сконцентрировано на вопросах электродинамики случайно неоднородных сред. Уравнения электромагнитного поля имеют особенности, требующие модификации методов решения, развитых для скалярного случая. Одним из стандартных путей для решения электродинамических задач случайно неоднородных сред является метод составления уравнений для моментов поля: уравнения Дайсона для среднего поля и уравнения Бете—Солпитера для квадратичных по полю величин. Значительную информацию можно извлечь уже из решений для среднего поля. В частности, знания среднего поля достаточно для нахождения потерь на излучение в задачах, решаемых в приближении заданных токов. Существенно, что среднее электрическое поле в хаотически неоднородной среде линейно связано со средней электрической индукцией и связь между ними дается тензором эффективной диэлектрической проницаемости. Использование тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  упрощает решение многих задач об излучении и распространении волн в неоднородных безграничных средах, сводя их к решению соответствующих задач для однородной поглощающей среды. В обзоре мы ограничились вопросами, относящимися к среднему полю и понятию  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , а также родственными проблемами, которые могут быть решены с помощью тензора эффективной диэлектрической проницаемости, определенного для бесконечной среды.

## 1. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

### 1. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной среды

Средняя электрическая индукция в хаотически неоднородной среде является линейной функцией среднего электрического поля:

$$\langle \mathbf{D}_i \rangle = \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}} \langle \mathbf{E}_j \rangle.$$

В статистически однородной среде оператор  $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}$  является интегральным оператором с разностным ядром. Имеется много работ, в которых вычислена эффективная диэлектрическая проницаемость в различных приближениях. В [25] методом возмущений найдена диэлектрическая проницаемость смеси в электростатическом поле. Обобщение на случай переменных полей было дано в работах [26–29]. Результаты, полученные в этих работах, справедливы в случае слабых флуктуаций диэлектрической проницаемости ( $\langle \Delta \epsilon^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle^2 \ll 1$ ). Кроме того, не учитывалась пространственная дисперсия хаотически неоднородной среды (за исключением работы [29]). Результаты, выходящие за пределы применимости метода возмущений, были получены методами, заимствованными из квантовой теории поля [30–38]. Большинство из указанных

работ посвящено исследованию скалярного волнового уравнения. Электромагнитный случай был рассмотрен в статьях [33, 34, 36–38]. Здесь мы будем следовать работе [37], где наиболее полно исследовалось влияние пространственной дисперсии.

Векторное волновое уравнение для поля точечного источника в неоднородной среде (зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ )

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} = p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.1)$$

перепишем в виде

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon_0 \mathbf{E} = p \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - k_0^2 [\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0] \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

где  $\epsilon_0$  — некоторая вспомогательная диэлектрическая проницаемость, не зависящая от координат. Ее величина и физический смысл будут определены ниже.

Уравнению (1.2) соответствует интегральное уравнение

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = G_{ij}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) p_j - k_0^2 \int G_{ij}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) [\epsilon(\mathbf{r}_1) - \epsilon_0] \mathbf{E}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (1.3)$$

Здесь  $G_{ij}^0(\mathbf{r})$  — тензор Грина векторного волнового уравнения, который целесообразно представить в форме

$$G_{ij}^0(\mathbf{r}) = G_{ij}^{0'}(\mathbf{r}) + R_{ij} \delta(\mathbf{r}), \quad R_{ij} = \delta_{ij}/3k_0^2 \epsilon_0, \quad (1.4)$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера,

$$G_{ij}^{0'}(\mathbf{r}) = -P \left[ \delta_{ij} + \frac{1}{k_0^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] \frac{\exp(i k_0 \sqrt{\epsilon_0} r)}{4\pi r}. \quad (1.5)$$

Символ  $P$  означает, что интегрирование с  $G_{ij}^{0'}$  выполняется в смысле главного значения. Учитывая (1.4) и (1.5), уравнение (1.3) можно записать в новых переменных:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = G_{ij}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) p_j - k_0^2 \epsilon_0 \int G_{ij}^{0'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_1) F_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r}) + 2\epsilon_0}{3\epsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \xi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0}{\epsilon(\mathbf{r}) + 2\epsilon_0}. \quad (1.7)$$

Из соотношений (1.7) следует тесная связь рассмотренных преобразований с электростатической задачей о поле внутри диэлектрического шара с проницаемостью  $\epsilon(\mathbf{r})$ , помещенного в однородное поле в среде с проницаемостью  $\epsilon_0$ . При этом величина  $\xi(\mathbf{r})$  совпадает с поляризуемостью шара, а величины  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{E}$  играют соответственно роль внешнего и внутреннего полей.

До сих пор мы предполагали величину диэлектрической проницаемости  $\epsilon_0(\omega)$  произвольной. Успех всего способа нахождения величины  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , справедливого как при слабых, так и при сильных флуктуациях показателя преломления, существенно зависит от выбора  $\epsilon_0(\omega)$ , точнее, от того, насколько вспомогательное поле  $G_{ij}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) p_j$  (определенное проницаемостью  $\epsilon_0(\omega)$ ) близко по своей структуре к реальному среднему полю  $\langle \mathbf{E} \rangle$ . Мы будем считать, что  $\epsilon_0(\omega)$  определяется из условия

$$\langle \xi(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (1.8)$$

В произвольной среде (например, в анизотропной, см. разд. 2) поляризуемость  $\xi$  является тензором и зависит от тензора  $R_{ik}$ , который, в свою очередь, представляет собой функцию  $\epsilon_0(\omega)$ . Учитывая неодно-

значность представления (1.4), мы приходим к выводу, что правильный выбор тензора  $R_{ik}$  — наиболее существенный момент в рассматриваемом методе. Правильный выбор  $R_{ik}$  и переход к новым переменным  $F$ ,  $\xi$  эквивалентен суммированию бесконечного ряда для квазистатической части  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , не зависящей от параметров  $k_0 l, kl^*$ . Этот бесконечный ряд может быть получен, если методом итераций решать уравнение (1.3) непосредственно. В дальнейшем на частных примерах будут высказаны некоторые соображения, позволяющие выбирать тензор  $R_{ik}$  для различных типов среды. Интересен в этом отношении пример с анизотропными неоднородностями в изотропной среде (см. ниже гл. 7).

Уравнение (1.6) отличается от уравнения, соответствующего скалярному случаю, более сложным ядром. Его можно решать последовательными итерациями, получая ряд по степеням  $\xi(r)$ . Усредняенный ряд и используя известный в квантовой теории поля метод суммирования фейнмановских диаграмм, для среднего поля  $\langle F \rangle$  получаем интегральное уравнение типа Дайсона

$$\langle F_i(r) \rangle = G_{ij}^0(r - r_0) p_i - k_0^2 \epsilon_0 \iint G_{ij}^0(r - r_1) \xi_{jn}^{\text{эфф}}(r_1 - r_2) \langle F_n(r_2) \rangle dr_1 dr_2, \quad (1.9)$$

где

$$\xi_{ij}^{\text{эфф}}(r) = -\frac{1}{k_0^2 \epsilon_0} Q_{ij}(r), \quad (1.10)$$

а  $Q_{ij}(r)$  — так называемый массовый оператор, представляющий собой бесконечный ряд\*\* вида

$$\begin{aligned} Q_{ij}(r_1 - r_2) &= k_0^4 \epsilon_0^2 B_\xi(r_1 - r_2) G_{ij}^{0'}(r_1 - r_2) + \\ &+ k_0^8 \epsilon_0^4 \iint G_{ii}^{0'}(r_1 - r_3) G_{ln}^{0'}(r_3 - r_4) G_{nj}^{0'}(r_4 - r_2) [B_\xi(r_1 - r_2) B_\xi(r_3 - r_4) + \\ &+ B_\xi(r_1 - r_3) B_\xi(r_2 - r_4) + B_\xi(r_1 - r_4) B_\xi(r_2 - r_3)] dr_3 dr_4 + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $B_\xi(r_1 - r_2) = \langle \xi(r_1) \xi(r_2) \rangle$  — корреляционная функция случайной величины  $\xi(r)$ ; поле флюктуаций  $\xi(r)$  предполагается однородным.

Обычно при конкретных вычислениях приходится ограничиваться учетом лишь первого члена массового оператора (приближение Бурре). Отбрасываемые при этом члены можно не учитывать при.

$$\langle \xi^2 \rangle k_0 \sqrt{\epsilon_0} l \ll 1 \quad (1.12)$$

в случае крупномасштабных неоднородностей ( $k_0 \sqrt{\epsilon_0} l \gg 1$ ,  $l$  — масштаб неоднородностей  $\xi(r)$ ) и

$$\langle \xi^2 \rangle k_0^2 \epsilon_0 l^2 \ll 1 \quad (1.13)$$

при мелкомасштабных неоднородностях [46]. Из (1.13) видно, что в предельном случае мелкомасштабных неоднородностей имеется довольно слабое ограничение на величину флюктуаций  $\xi(r)$  (и соответственно  $(r)$ ): неравенство (1.13) допускает значения  $\langle \xi^2 \rangle \geq 1$  (сильные флюктуации).

\* В работах [34, 36] суммирование ряда для квазистатической части произведено не было. Поэтому результаты справедливы лишь при  $(\langle \Delta \epsilon^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle^2) \ll 1$ .

\*\* При выводе (1.9) и (1.11) предполагалось, что  $\xi(r)$  является гауссовой случайной величиной. В работах [10, 20] показано, что это предположение не является необходимым. Разумеется, при других распределениях  $\xi(r)$  вид массового оператора будет иным.

Из формул (1.7) — (1.10) для полей вида  $e^{ikr}$  следует

$$\begin{aligned}\xi_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) &= 3[\varepsilon_{ik}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_0 \delta_{ik}] [\varepsilon_{kj}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) + 2\varepsilon_0 \delta_{kj}]^{-1}, \\ \xi_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) &= \int \xi_{ij}^{\text{эфф}}(\mathbf{r}) e^{-ikr} d\mathbf{r}, \\ \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) &= \int \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\mathbf{r}) e^{-ikr} d\mathbf{r},\end{aligned}\quad (1.14)$$

где  $\varepsilon_{ik}^{\text{эфф}}(\mathbf{r})$  и  $\xi_{ik}^{\text{эфф}}(\mathbf{r})$  — ядра интегральных соотношений

$$\langle \xi(\mathbf{r}) F_i(\mathbf{r}) \rangle = \int \xi_{ij}^{\text{эфф}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle F_j(\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1; \quad (1.15)$$

$$\langle D_i(\mathbf{r}) \rangle = \langle \varepsilon(\mathbf{r}) E_i(\mathbf{r}) \rangle = \int \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \langle E_j(\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1. \quad (1.16)$$

Отсюда видно, что в хаотически неоднородной среде связь между средней электрической индукцией и средним электрическим полем пространственно-нелокальна, и, следовательно, среда, свойства которой описываются эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) = \int \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\mathbf{r}) e^{-ikr} d\mathbf{r}, \quad (1.17)$$

обладает пространственной дисперсией. Поскольку пространственная дисперсия возникает благодаря рассеянию среднего поля на неоднородностях среды, то естественно, что характерный масштаб ее определяется масштабом  $l$  хаотических неоднородностей.

Для изотропных флуктуаций связь (1.14) может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \frac{1 + (2/3) \xi_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k})}{1 - (1/3) \xi_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k})}; \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \frac{1 + (2/3) \xi_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k})}{1 - (1/3) \xi_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k})}, \quad (1.19)$$

где  $\varepsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k})$  — продольная и поперечная эффективные диэлектрические проницаемости соответственно, а

$$\xi_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k}) = -2 \langle \xi^2 \rangle q(p, p_0); \quad (1.20)$$

$$\xi_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = \langle \xi^2 \rangle p_0^2 p^{-1} \int_0^\infty \Gamma_\xi(x) \exp(ip_0 x) \sin(px) dx + \langle \xi^2 \rangle q(p, p_0). \quad (1.21)$$

Здесь  $p = kl$ ,  $p_0 = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} l$ ,

$$\begin{aligned}q(p, p_0) &= \sqrt{\frac{\pi p}{2}} \int_0^\infty \Gamma_\xi(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(ip_0 x) \left[ \left( \frac{1}{px} - i \frac{p_0}{p} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times J_{5/2}(px) - \frac{p_0^2}{p^2} J_{3/2}(px) \right] dx,\end{aligned}\quad (1.22)$$

$J_{n/2}$  — функции Бесселя с полуцелым индексом,  $\Gamma_\xi(x)$  — нормированная корреляционная функция флуктуаций  $\xi(r)$  ( $B_\xi(r) = \langle \xi^2 \rangle \Gamma_\xi(r/l)$ ).

В дальнейшем мы достаточно подробно оценим роль пространст-

венной дисперсии, связанной с неоднородностью среды\*. Здесь же мы отметим важную особенность поведения среднего продольного поля. Дисперсионное уравнение продольных волн

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) = 0 \quad (1.23)$$

имеет при действительных  $\omega$  лишь комплексные корни  $k$ , причем, как можно убедиться,  $\text{Im}k \gg \text{Re}k$ . Отсюда следует, в частности, что продольное поле элементарного диполя спадает на расстоянии порядка масштаба корреляции  $l$ .

$\epsilon_0(\omega)$  для неоднородной плазмы. В качестве примера рассмотрим холодную изотропную плазму с изотропными случайными неоднородностями электронной плотности  $N(r)$ . Если плотность распределения вероятностей  $N(r)$  задать в виде (при  $\langle (\Delta N)^2 \rangle / \langle N \rangle^2 \ll 1$ )

$$W(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[ -\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1.24)$$

где  $\bar{N}$ ,  $\sigma^2 = \langle (\Delta N)^2 \rangle$  — средняя электронная концентрация и дисперсия флюктуаций  $N(r)$  соответственно, то уравнение (1.8) принимает следующую форму:

$$I_+ \left( \frac{\langle \epsilon \rangle + 2\epsilon_0}{\alpha\sigma} \right) = \frac{\alpha \sqrt{2\pi}\sigma}{3\epsilon_0}. \quad (1.25)$$

Здесь

$$I_+(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2/2)}{z-x} dx, \quad \alpha = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.25) в наиболее интересном случае, когда частота поля  $\omega$  близка к ленгмюровской частоте  $\omega_0 = (4\pi e^2 \langle N \rangle / m)^{1/2}$  (точнее, при  $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll \sigma/\langle N \rangle$ ), дает

$$\epsilon_0 \approx 0,56 \langle \epsilon \rangle + i 0,52 \sigma \langle N \rangle^{-1}. \quad (1.27)$$

Появление мнимой части в (1.27) связано с тем, что в неоднородной плазме на частотах, близких к плазменной (случай сильных относительных флюктуаций  $\epsilon(r)$ ), происходит перекачка энергии среднего поля в энергию флюктуационных плазменных колебаний. Величина  $\langle \xi^2 \rangle$  равна

$$\langle \xi^2 \rangle = 9 \left[ 3 \frac{\epsilon_0(\langle \epsilon \rangle - \epsilon_0)}{\alpha^2\sigma^2} - 1 \right]. \quad (1.28)$$

Следовательно, вблизи резонанса, учитывая формулу (1.27), имеем

$$\langle \xi^2 \rangle \approx -1,7 - i 1,6 \langle \epsilon \rangle (\sigma^2 / \langle N \rangle^2)^{-1}. \quad (1.29)$$

*Модель Лоренца — Лорентца.* Рассмотрим диэлектрик, описываемый формулой Лоренца — Лорентца

$$(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \gamma, \quad (1.30)$$

где  $\gamma$  — величина, пропорциональная плотности. Поскольку при изменениях плотности  $\epsilon$  принимает значения от 1 до  $\infty$ , то  $\gamma$  изменяется в пределах от нуля до единицы. Поэтому для адекватного описания исследуемой модели нельзя использовать, например, гауссово распределение

\* Ниже под пространственной дисперсией среды будем понимать дисперсию, связанную с неоднородностью среды. Пространственная дисперсия, связанная с другими причинами, предполагается отсутствующей.

вероятностей случайной величины  $\epsilon$ , поскольку это привело бы к значению  $\langle \gamma \rangle = \infty$ .

В связи с этим положим

$$\gamma = a^2/(a^2 + a^2), \quad (1.31)$$

где величину  $a$  будем считать распределенной по нормальному закону

$$W(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle a^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\langle a^2 \rangle}\right). \quad (1.32)$$

Величины  $a^2$  и  $\langle a^2 \rangle$  могут быть выражены через  $\langle \epsilon \rangle$  и  $\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle$ , вычисленные с помощью (1.32):

$$\langle \epsilon \rangle = 1 + 3M; \quad (1.33)$$

$$\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle = 18M^2, \quad M = \langle a^2 \rangle/a^2. \quad (1.34)$$

Тогда равенство (1.8) приводит к следующему значению  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = 3Mx_0^2 - 1/2, \quad (1.35)$$

где  $x_0$  — корень уравнения

$$\sqrt{\pi}x \exp(x^2)[1 - \Phi(x)] = \frac{4Mx^2}{6Mx^2 - 1}, \quad (1.36)$$

$\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Значение  $x_0$  может быть найдено графически.

На рис. 1 приведены графики функций  $f(x) = \sqrt{\pi}x \exp(x^2)[1 - \Phi(x)]$  и  $\varphi(x, M) = 4Mx^2/(6Mx^2 - 1)$  для трех значений  $M = 1/2, 2, \infty$ . Точки пересечения этих кривых дают корни  $x_0$ . Соответствующие им значения  $\epsilon_0$  равны:

$$\epsilon_0 = \begin{cases} 1,55 \langle \epsilon \rangle - 2,05 \\ 0,8 \langle \epsilon \rangle - 1,3 \\ 0,55 \langle \epsilon \rangle - 1,05 \end{cases}. \quad (1.37)$$

Как видно из (1.37), отличие  $\epsilon_0$  от  $\langle \epsilon \rangle$  довольно значительное.

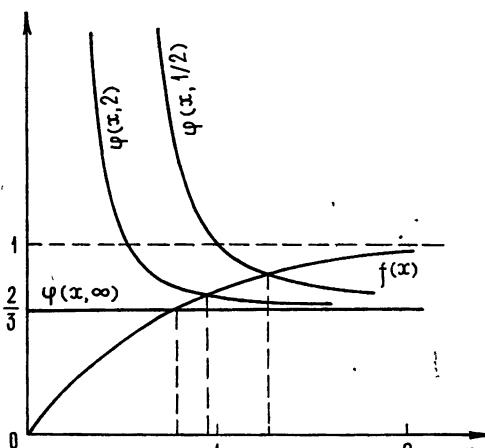


Рис. 1.

## 2. Приближение метода возмущений. Предельные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных неоднородностей

В практических приложениях, как правило, приходится иметь дело со средами, в которых относительные флуктуации диэлектрической проницаемости малы ( $\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle \ll \langle \epsilon \rangle^2$ ). В этом случае выражения (1.18) и (1.19) могут быть упрощены. Действительно, отличие  $\epsilon_0$  от  $\langle \epsilon \rangle$  при слабых флуктуациях будет, очевидно, порядка  $\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle$ . Тогда, полагая  $\epsilon(r) = \langle \epsilon \rangle + \Delta\epsilon(r)$  и удерживая в (1.18) лишь члены  $\sim \langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle$ , получаем (ср. с [25])

$$\epsilon_0 \simeq \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} \frac{\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} + \dots \quad (2.1)$$

Аналогично  $\langle \xi^2 \rangle \simeq \langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle^2$ .

С учетом (2.1) формулы для  $\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k)$  и  $\epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k)$  принимают вид

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) = \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} - 2 \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} q(p, p_0); \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k) = \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} + \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \frac{p_0^2}{p} \int_0^\infty \Gamma_\epsilon(x) \exp(ip_0 x) \times \\ \times \sin(px) dx + \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} q(p, p_0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где в выражениях для  $p_0 \epsilon_0$  нужно заменить на  $\langle \epsilon \rangle$ . Функция  $q(p, p_0)$  может быть вычислена до конца, например, для экспоненциального вида коэффициента корреляции  $\Gamma_\epsilon(x) = e^{-x}$ :

$$q(p, p_0) = \frac{1 + ip_0 + (2/3)p^2}{2p^2} - \frac{1 + p_0^2 + p^2}{2p^3} \operatorname{arctg} \left( \frac{p}{1 - ip_0} \right). \quad (2.4)$$

Отсюда легко получить эффективный показатель преломления для поперечной волны, распространяющейся в хаотически неоднородной среде. Например, в случае мелкомасштабных флуктуаций ( $p_0 \ll 1$ ), полагая в (2.2)–(2.4)  $p = p_0$ , имеем

$$n_{\text{эфф}}^{tr} \simeq \sqrt{\langle \epsilon \rangle} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle^2} + \frac{2}{3} i \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle^2} (k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l)^3 \right]. \quad (2.5)$$

Второй член в (2.5) определяет изменение фазовой и групповой скоростей волны, а третье слагаемое учитывает затухание плоской волны за счет перехода энергии среднего поля в энергию рассеянных волн.

В обратном предельном случае крупномасштабных неоднородностей ( $p_0 \gg 1$ ) из (2.2)–(2.4) получаем

$$n_{\text{эфф}}^{tr} \simeq \sqrt{\langle \epsilon \rangle} \left[ 1 + \frac{i}{4} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle^2} (k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l) + \frac{1}{8} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle^2} \right]. \quad (2.6)$$

Выражения (2.5) и (2.6) впервые были получены в [27]. Из (2.6) видно, что при  $p_0 \gg 1$  в отличие от мелкомасштабного случая мнимая поправка, определяющая затухание среднего поля волны за счет рассеяния, значительно превосходит действительную. Следует заметить, что можно легко получить также из следующих соображений. Как известно [1, 2], при  $k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l \gg 1$  в плоской волне возникают (в приближении геометрической оптики) преимущественно фазовые флуктуации  $s \simeq (1/2) k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} \int_0^L (\Delta \epsilon(x, y, z)/\langle \epsilon \rangle) dz$ , где  $L$  — путь, проходимый волной в среде со случайными неоднородностями  $\epsilon$ . При  $L \gg l$  фаза  $s(r)$ , в силу центральной предельной теоремы вероятностей, распределена по нормальному закону. Следовательно, среднее поле волны можно представить в виде

$$\langle E \rangle \sim \exp(i k_0 n_{\text{эфф}}^{tr} L) \sim \exp(i k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} L - (1/2) \langle s^2 \rangle), \quad (2.7)$$

где средний квадрат флуктуаций фазы  $\langle s^2 \rangle$  в случае экспоненциального коэффициента корреляции  $\Gamma_\epsilon(r) = e^{-r/l}$  равен

$$\langle s^2 \rangle \simeq \frac{1}{2} k_0^2 L l \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle \frac{1}{\langle \epsilon \rangle}. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) определяем мнимую часть  $n_{\text{эфф}}^{tr}$ , которая полностью совпадает с мнимой поправкой в (2.6). Разумеется, этот же результат можно получить и в приближении метода плавных возмущений. Правда, при расчете оказывается необходимым учитывать также второе приближение метода плавных возмущений [2, 54].

### 3. Связь мнимой части $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ с сечением рассеяния\*

Как отмечалось выше, среднее поле плоской волны затухает из-за процесса рассеяния на случайных неоднородностях диэлектрической проницаемости, что проявляется в наличии мнимой части  $n_{\text{эфф}}^{tr}$ . Покажем, что последняя связана с интегральным сечением рассеяния (так называемым коэффициентом экстинкции  $h$ ). Запишем уравнение переноса для интенсивности среднего поля  $J \sim \langle E \rangle^2$

$$\frac{dJ}{dL} = -hJ, \quad (3.1)$$

где

$$h = \int_{4\pi} \sigma(0, \chi) d\Omega, \quad (3.2)$$

а дифференциальное сечение рассеяния равно [2]

$$\sigma(0, \chi) = (1/2) \pi k_0^4 \sin^2 \chi \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}). \quad (3.3)$$

Здесь  $\chi$  — угол между электрическим полем  $E_0$  падающей волны и волновым вектором  $\mathbf{k}'$  рассеянной волны,  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$  — спектр корреляционной функции флуктуаций  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'$  ( $\mathbf{k}_0$  — волновой вектор падающей волны),  $|\mathbf{q}| = 2k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \sin(\theta/2)$ ,  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}'$ .

Соотношения (3.1) — (3.3) справедливы, строго говоря, в приближении однократного рассеяния волн, поэтому уравнение (3.1) является приближенным и учитывает лишь уход энергии среднего поля в энергию рассеянных волн. В этом приближении  $\langle E \rangle \sim e^{-hL^2}$ , и задача отыскания  $\text{Im } n_{\text{эфф}}^{tr}$  сводится, по существу, к вычислению коэффициента экстинкции  $h$ . Для этого выберем систему координат так, как указано на рис. 2. Учитывая, что  $\cos \chi = \sin \theta \cos \varphi$ , и предполагая поле флуктуаций  $\varepsilon(\mathbf{r})$  изотропным, имеем\*\*

$$h = 4\pi^2 k_0^4 \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(2k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} t) (1 - 2t^2 + 2t^4) t dt. \quad (3.4)$$

Для экспоненциального вида коэффициента корреляции спектр  $\Phi_\varepsilon(2k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} t)$  равен

$$\Phi_\varepsilon(2k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} t) = (1/\pi) \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle L^3 (1 + 4k_0^2 \langle \varepsilon \rangle L^2 t^2)^{-2}. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.4), легко убедиться, что величина  $h/2k_0$  действительно совпадает с  $\text{Im } n_{\text{эфф}}^{tr}$  (см. формулы (2.5), (2.6)) как в случае мелкомасштабных, так и в случае крупномасштабных неоднородностей.

### 4. Общие свойства эффективной диэлектрической проницаемости

Единственность решения уравнения  $\langle \xi \rangle = 0$ , определяющего  $\varepsilon_0(\omega)$

\* В оптике такая связь составляет содержание оптической теоремы.

\*\* Несколько отличная по виду, но легко преобразующаяся к (3.4) формула, связывающая  $h$  и  $\sigma(0, \chi)$ , получена в [34].

Случайная поляризуемость среды  $\xi(r)$  связана с диэлектрической проницаемостью формулой

$$\xi(r) = 3 \frac{\epsilon(r) - \epsilon_0}{\epsilon(r) + 2\epsilon_0}. \quad (4.1)$$

Проницаемость  $\epsilon_0(\omega)$ , определяет квазистатическую часть тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$ , не зависящую от  $k_0 l$ ,  $k l$ , и является корнем уравнения  $\langle \xi \rangle = 0$ . В [39] показано, что в зависимости от характера функции распределения  $W(x)$  процесса  $\epsilon(\omega, r)$  могут иметь место следующие случаи.

1) Если величина  $\epsilon(\omega, r)$  принимает действительные значения только одного знака (например,  $W(x) = 0$  при  $x < 0$ ), то уравнение  $\langle \xi \rangle = 0$  имеет единственное решение—действительный корень  $\epsilon_0(\omega)$  соответствующего знака.

2) Если  $\epsilon(\omega, r)$  может обращаться в нуль, то уравнение  $\langle \xi \rangle = 0$  имеет два комплексных сопряженных корня, из которых имеет смысл лишь корень, определяющий затухание среднего поля из-за рассеяния. Физический смысл комплексности  $\epsilon_0(\omega)$  в этом случае связан с возможностью продольных колебаний поля в такой среде. Дисперсионное уравнение продольных колебаний среднего поля  $\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) = 0$  распадается на два уравнения, из которых одно —  $\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) = -3/2$  — описывает продольную волну, затухающую на радиусе корреляции хаотических неоднородностей  $l$  (гл. 1), а второе —  $\epsilon_0(\omega) = 0$  — определяет декремент затухания продольных колебаний среднего поля.

Вернемся к соотношению (4.1). Последнее является дробно-линейной функцией и осуществляет конформное преобразование полной плоскости  $\epsilon$  в плоскость  $\xi$ . Используя свойства функции (4.1), можно указать пределы изменения величины  $\xi$ , не конкретизируя картины флюктуаций. Рассмотрим функцию  $\xi = 3(z-1)/(z+2)$ . На рис. 3 одинаковым образом заштрихованы те части комплексных плоскостей  $z = x + iy$  и  $\xi = u + iv$ , которые взаимно однозначно преобразуются одна в другую. Правая полуплоскость  $x \geq 0$  отображается во внутренность круга с центром в точке  $\xi = 3/4$  и радиусом  $R = 9/4$ . Граница этого круга является отображением мнимой оси  $x = 0$ . Верхняя полуплоскость  $z$  преобразуется в верхнюю полуплоскость  $\xi$ . Величина  $z$  связана с  $\epsilon$  соотношением  $z = \epsilon/\epsilon_0$ .

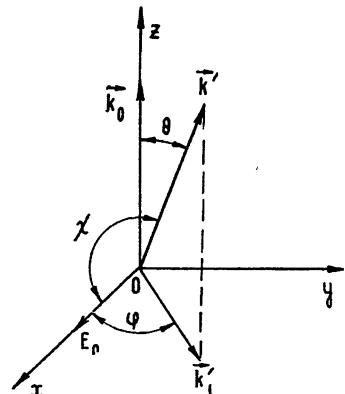


Рис. 2.

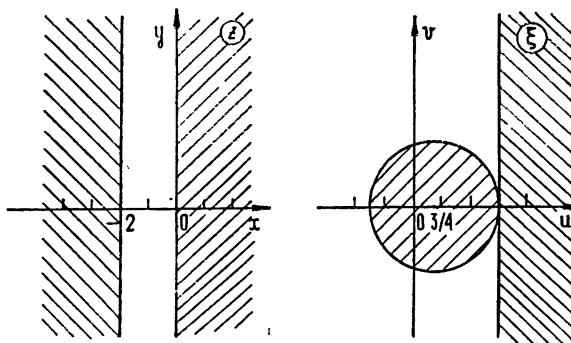


Рис. 3.

Пусть  $\epsilon$  — действительная величина. Учитывая свойства  $\epsilon_0(\omega)$ ,

рассмотренные выше, легко видеть, что если  $\epsilon$  принимает значения одного знака и в нуль не обращается, то  $z = x > 0$  и  $\xi$  принимает лишь действительные значения, внутри круга  $-3/2 \leq \xi \leq 3$ .

Если же  $\epsilon_0(\omega)$  комплексно ( $\epsilon$  может обращаться в нуль), то величина  $\xi$ , вообще говоря, не ограничена какими-либо условиями, вытекающими из свойств (4.1). Однако расчеты с конкретными моделями среды показывают, что обычно  $|\langle \xi^2 \rangle|$  не может заметно превышать единицу.

*Соотношения Крамерса — Кронига для эффективной диэлектрической проницаемости* [39]. Соотношения Крамерса — Кронига для  $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r})$  являются следствием принципа причинности по отношению к средним полям. Они могут быть получены из соответствующей формулы для  $\epsilon(\omega, \mathbf{r})$ , которую целесообразно записать в форме

$$\epsilon(\omega, \mathbf{r}) - 1 = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\epsilon(\omega', \mathbf{r}) - 1}{\omega' - \omega}. \quad (4.2)$$

Умножим левую и правую части (4.2) на вектор поля  $E(\omega, \mathbf{r})$  и усредним полученное соотношение по ансамблю реализаций неоднородностей среды. Слева получим соотношение

$$\langle \epsilon(\omega, \mathbf{r}) E_i(\omega, \mathbf{r}) \rangle = \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle E_j(\mathbf{r}') \rangle. \quad (4.3)$$

Под знаком интеграла

$$\langle \epsilon(\omega_1, \mathbf{r}) E_i(\omega_2, \mathbf{r}) \rangle = \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle E_j(\omega_2, \mathbf{r}') \rangle. \quad (4.4)$$

Явный вид оператора  $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  можно определить, умножая ряд, полученный методом возмущений для  $E_i(\omega_2, \mathbf{r})$ , на величину  $\epsilon(\omega_1, \mathbf{r})$  и усредняя по ансамблю. Аналогично тому, как находится соотношение (4.3), можно получить (4.4). Для нас здесь существенно лишь то, что при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  оператор  $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  переходит в сператор  $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

В результате можно записать:

$$\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega', \omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4.5)$$

Это равенство показывает, что обобщенная функция  $P/(\omega' - \omega)$  здесь совпадает с функцией  $i\pi\delta(\omega' - \omega)$ . Поэтому величина интеграла в правой части (4.5) не изменится, если в функции  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega', \omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$  положить  $\omega' = \omega$ . Таким образом, справедливо равенство

$$\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega', \mathbf{r} - \mathbf{r}') - \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (4.6)$$

и вытекающие из него следствия:

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{r}) - \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''_{ij}^{\text{эфф}}(\omega', \mathbf{r})}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (4.7)$$

$$\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_{ij} \text{эфФ}(\omega', \mathbf{r}) - \delta_{ij} \delta(r)}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

Формулы (4.7) являются обобщением соотношений Крамерса — Кронига на случай хаотически неоднородных сред. Они имеют смысл и в физически прозрачной рассеивающей среде, в которой истинное поглощение отсутствует. Мнимая часть  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$ , описывает процесс трансформации энергии регулярной компоненты электрического поля в хаотическую (рассеянное поле). Заметим также, что из соотношений (4.6), (4.7) следует регулярность функции  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$  в верхней полуплоскости комплексной частоты  $\omega$ .

*Асимптотическое разложение эффективной диэлектрической проницаемости при  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$  в случае мелкомасштабных флуктуаций.* Рассмотрим случай неоднородного диэлектрика, когда  $\varepsilon_0, \langle \xi \rangle^2$  — действительные величины. Пусть  $p_0 = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} l \ll 1$  (мелкомасштабные флуктуации) и  $|\xi_{ij}| \ll 1$  (приближение Бурре). Запишем выражения для  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}$  и  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}$  в этом предельном случае:

$$\varepsilon''_{ij} \text{эфФ} \simeq \varepsilon_0(\omega) [1 + \xi_{ij}^l(\omega, \mathbf{k})],$$

$$\varepsilon''_{ij} \text{эфФ} \simeq \varepsilon_0(\omega) [1 + \xi_{ij}^{tr}(\omega, \mathbf{k})],$$

$$q(p, p_0) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \int_0^{\infty} \Gamma_\xi(x) x^{-3/2} J_{5/2}(px) + \quad (4.8)$$

$$+ \frac{p_0^2}{2p} \int_0^{\infty} \Gamma_\xi(x) \left\{ \frac{1}{px} \left[ \frac{\sin(px)}{px} - \cos(px) \right] - \sin(px) \right\} dx -$$

$$- i \frac{p_0^3}{3p} \int_0^{\infty} \Gamma_\xi(x) x \sin(px) dx.$$

Зависимость функции  $q(p, p_0)$  от  $p$  связана с пространственной дисперсией хаотически неоднородной среды. Если пространственный масштаб поля становится сравнимым по величине с радиусом корреляции хаотических неоднородностей, то учет зависимости  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$  от  $\mathbf{k}$  существенен. Поэтому интересно проследить, какие свойства случайного процесса  $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$  ответственны за асимптотическое поведение  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ , которое определяет характер сходимости интегралов, возникающих при рассмотрении задач излучения в неоднородной среде и расчете флукуационного поля в такой среде.

С помощью интегрирования по частям [70] можно получить следующие асимптотические разложения для  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon''_{ij} \text{эфФ}(\omega, \mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ :

$$\text{Im } \varepsilon''_{ij} \text{эфФ} = \text{Im } \varepsilon''_{ij} \text{эфФ} = -\frac{4}{3} \varepsilon_0(\omega) \langle \xi^2 \rangle p_0^3 \left[ \frac{\partial \Gamma_\xi(0)}{\partial x} \frac{1}{p^4} - 2 \frac{\partial^3 \Gamma_\xi(0)}{\partial x^3} \frac{1}{p^6} + \dots \right],$$

$$\text{Re } \varepsilon''_{ij} \text{эфФ} = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \langle \xi^2 \rangle \right) - \frac{\pi}{2} \varepsilon_0 \langle \xi^2 \rangle \frac{\partial \Gamma_\xi(0)}{\partial x} \frac{1}{p} + \dots, \quad (4.9)$$

$$\text{Re } \varepsilon''_{ij} \text{эфФ} = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \langle \xi^2 \rangle \right) + \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 \langle \xi^2 \rangle \frac{\partial \Gamma_\xi(0)}{\partial x} \frac{1}{p} + \dots$$

В реальных частях мы опустили члены  $\sim p_0^2$ .

Наиболее интересна первая из формул (4.9), поскольку именно зависимость  $\text{Im} \epsilon_{\text{эфф}}^l$ ,  $\text{Im} \epsilon_{\text{эфф}}^{lr}$  от волнового числа определяет сходимость интегралов, выражающих интенсивность тепловых флуктуаций поля в среде, средний поток мощности от точечного диполя и т. п. Коэффициентами разложения в (4.9) являются нечетные производные коэффициента корреляции  $\Gamma_\xi(x)$  при  $x = 0$ . Поскольку  $\Gamma_\xi(x)$  — функция четная, то отличие ее нечетных производных от нуля при  $x = 0$  означает, что эти производные терпят разрыв в точке  $x = 0$ , причем в (4.9) имеются в виду при этом значения производных в точке  $x = +0$ . Разрывы производных  $\Gamma_\xi(x)$  при  $x = 0$ , в свою очередь, связаны с разрывами функции  $\epsilon(\omega, r)$  и ее производных (т. е. с отсутствием непрерывности самих реализаций процесса). Если функция  $\Gamma_\xi(x)$  аналитическая, то  $\text{Im} \epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k)$ ,  $\text{Im} \epsilon_{\text{эфф}}^{lr}(\omega, k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $e^{-ak}$  (например, при  $\Gamma_\xi(x) = \exp(-x^2)$   $\text{Im} \epsilon_{\text{эфф}}^{lr} \sim \exp(-p^2/4)$ ). Как следует из приведенных рассуждений, характер рассеяния ближнего поля источников, помещенных в неоднородную среду, сильно связан со степенью гладкости функции  $\epsilon(\omega, r)$ .

## 2. АНИЗОТРОПНЫЕ ХАОСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

### 5. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных теории рассеяния электромагнитных волн в анизотропных (гиротропных) неоднородных средах [40–47]. В [40, 41] методом возмущений были вычислены флуктуации комплексного поля, амплитуды и фазы волны, проходящей через слой магнитоактивной плазмы с флуктуациями электронной плотности. В [42] рассмотрены флуктуации электромагнитных полей в приближении геометрической оптики при наличии неоднородностей электронной плотности и магнитного поля. Работы [44–47] посвящены выводу тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$  в различных приближениях. В [44] методом возмущений найдены компоненты  $\parallel$  тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$ . В [46] получено решение, справедливое для случая сильных флуктуаций компонент тензора диэлектрической проницаемости. Родственные задачи рассматривались в [26], где для среды, изотропной в среднем, но содержащей «вкрапления» с тензорным характером диэлектрической проницаемости, получены выражения для  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ . Остановимся на анализе выражения для тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$  в среде с сильными флуктуациями. Как и в изотропной хаотически неоднородной среде, средняя электрическая индукция в анизотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{nk}(r) = \langle \epsilon_{nk} \rangle + \Delta \epsilon_{nk}(r)$  является линейным функционалом среднего электрического поля:

$$\langle D_n \rangle = \langle \epsilon_{nk} E_k \rangle = \overset{\wedge}{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}} \langle E_k \rangle. \quad (5.1)$$

Оператор  $\overset{\wedge}{\epsilon}_{nk}^{\text{эфф}}$  в общем случае — линейный интегральный оператор.

Отсылая читателя за подробностями к работе [46], мы здесь ограничимся кратким изложением результатов. В анизотропной среде в приближении

$$|\xi_{nm}^{\text{эфф}}(\omega, k)| \ll 1 \quad (5.2)$$

(это неравенство соответствует ограничению первым членом массового оператора — приближению Бурре) эффективный тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k) \simeq \epsilon_{ij}^0(\omega) + \xi_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k). \quad (5.3)$$

Тензор  $\epsilon_{ij}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  содержит квазистатическую часть  $\epsilon_{ij}^0$ , не зависящую от параметров  $k_0 l, k l; \epsilon_{ij}^0$  находится из системы уравнений

$$\langle \xi_{nm}(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\xi_{nm} = [\epsilon_{nk}(\mathbf{r}) - \epsilon_{nk}^0] \eta_{km}^{-1}, \quad \eta_{ik} = \delta_{ik} + k_0^2 R_{im} (\epsilon_{mk} - \epsilon_{mk}^0).$$

Тензор  $R_{im}$  определяет сингулярную часть функции Грина векторного волнового уравнения

$$G_{ik}^0(\mathbf{r}) = G_{ik}^{0'}(\mathbf{r}) + R_{ik} \delta(\mathbf{r}). \quad (5.5)$$

Для изотропного поля флюктуации среды

$$R_{11} = R_{22} = R_1 = \frac{1}{2k_0^2(\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0)} \left[ \frac{\epsilon_{33}^0}{\sqrt{\epsilon_{11}^0(\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0)}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0}{\epsilon_{11}^0} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (5.6)$$

$$R_{33} = R_3 = \frac{1}{k_0^2(\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0)} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_{11}^0}{\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\epsilon_{33}^0 - \epsilon_{11}^0}{\epsilon_{11}^0} \right)^{1/2} \right], \\ \epsilon_{11}^0 = \epsilon_{22}^0.$$

Тензор  $\xi_{ij}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$  является фурье-преобразованием массового оператора  $Q_{ij}(\mathbf{r})$ :

$$\xi_{ij}^{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{k_0^2} \int Q_{ij}(\mathbf{r}) e^{-ikr} d\mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Тензор эффективной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы (сильные флюктуации). Рассмотрим в качестве примера хаотически неоднородную плазму в постоянном магнитном поле с изотропными флюктуациями электронной плотности, распределенной по закону

$$W(N) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\sigma^2} \right] & (N \geq 0) \\ 0 & (N < 0) \end{cases}, \quad (5.8)$$

$$\sigma^2 = \langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle.$$

Будем считать, что  $\sigma/N \ll 1$ . Это условие позволяет распространять интегрирование с функцией распределения (5.8) до  $N \rightarrow -\infty$ . В рассматриваемом случае

$$\epsilon = 1 - \alpha N, \quad g = \alpha N \sqrt{\mu}, \quad \eta = 1 - \beta N, \quad \beta = 4\pi e^2/m\omega^2,$$

$$\alpha = (1 - u)^{-1} \beta, \quad u = \omega_H^2/\omega^2,$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix}, \quad \epsilon_{ij}^0 = \begin{vmatrix} \epsilon_0 & -ig_0 & 0 \\ ig_0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

На этой простой модели проиллюстрируем общие соотношения. Начнем с вывода уравнений для тензора  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$ . Система уравнений, определяющая тензор  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$  в (5.4), в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} I_+(\gamma_1) &= \sqrt{2\pi} k_0^2 R_1 \alpha \sigma (1 + \sqrt{u}), \\ I_+(\gamma_2) &= \sqrt{2\pi} k_0^2 R_1 \alpha \sigma (1 - \sqrt{u}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$I_+(\gamma_3) = \sqrt{2\pi} k_0^2 R_3 \beta \sigma,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1 + k_0^2 R_1 (p - r)}{k_0^2 R_1 \alpha \sigma (1 + \sqrt{u})}, \quad \gamma_2 = \frac{1 + k_0^2 R_1 (p + r)}{k_0^2 R_1 \alpha \sigma (1 - \sqrt{u})}, \quad \gamma_3 = \frac{1 + k_0^2 R_3 q}{k_0^2 R_3 \beta \sigma}, \\ p &= \langle \epsilon \rangle - \epsilon_0, \quad r = \langle g \rangle - g_0, \quad q = \langle \eta \rangle - \eta_0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$I_+(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2/2)}{\gamma - x} dx = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau$$

$$(\operatorname{Im} \gamma > 0).$$

Правая часть равенства (5.11) служит аналитическим продолжением функции  $I_+(\gamma)$  в нижнюю полуплоскость. Система трансцендентных уравнений (5.10) довольно сложна. Получить конкретные результаты можно лишь в отдельных частных случаях, например, при  $u \rightarrow 0$  (слабая гиротропия),  $u \rightarrow \infty$  (сильная гиротропия), либо с помощью численного счета. При  $\sigma \rightarrow 0$  (борновское приближение) получаем следующее разложение для  $p, r, q$ :

$$\begin{aligned} p - r &= k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + \sqrt{u})^2 + k_0^6 R_1^3 \alpha^4 \sigma^4 (1 + \sqrt{u})^4 + \dots, \\ p + r &= k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 - \sqrt{u})^2 + k_0^6 R_1^3 \alpha^4 \sigma^4 (1 - \sqrt{u})^4 + \dots, \\ q &= k_0^2 R_3 \beta^2 \sigma^2 + k_0^6 R_3^3 \beta^4 \sigma^4 + \dots, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где в функциях  $R_1, R_3$  вместо  $\epsilon_0, \eta_0$  нужно подставить  $\langle \epsilon \rangle, \langle \eta \rangle$ .

Условие применимости выражений (5.12) можно записать в виде

$$\left| k_0^2 R_1 \beta \sigma \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - u} \right| \ll 1, \quad |k_0^2 R_3 \beta \sigma| \ll 1. \quad (5.13)$$

Эти соотношения обеспечивают неравенства  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \gg 1$ , которые позволяют заменить левые части уравнений (5.10) первыми членами асимптотического разложения функции  $I_+(\gamma) = (\sqrt{2\pi}/\gamma)(1 + 1/\gamma^2 + 3/\gamma^4 + \dots)$ . В частности, мы видим, что борновское приближение для тензора  $\epsilon_{ij}^0(\omega)$  несправедливо при  $u \rightarrow 1$  ( $\omega \rightarrow \omega_H$ ).

Теперь рассмотрим тензор  $\xi_{ij}^{eff}(\omega, \mathbf{k})$ . Будем считать, что выполнены условия приближения Бурре  $|\xi_{ij}^{eff}(\omega, \mathbf{k})| \ll 1$ . Кроме того, допустим, что флуктуации в среде мелкомасштабны, т. е. выполняются неравенства

$$k_0 n_1(\theta) l \ll 1, \quad k_0 n_2(\theta) l \ll 1, \quad (5.14)$$

где  $l$  — масштаб флуктуаций величины  $\xi_{nm}$ ,  $n_1(\theta)$  и  $n_2(\theta)$  — коэффициенты преломления нормальных волн анизотропной среды. Наконец, мы ограничимся расчетом  $\xi_{nm}^{eff}$  при  $k = 0$ . Это приближение соответствует пренебрежению пространственной дисперсией. Из (5.7) получаем

$$\xi_{np}^{eff}(\omega) = -(2\pi)^3 k_0^2 B_{nlqp}(0) \int \Phi_\xi(p) G_{lq}^0(p) dp + k_0^2 B_{nlqp}(0) R_{lq},$$

$$\begin{aligned} B_{nlqp}(r) &= \langle \xi_{nl}(r_1) \xi_{qp}(r_1 + r) \rangle = B_{nlqp}(0) \Gamma_\xi(r), \\ \Phi_\xi(p) &= \int \Gamma_\xi(r) e^{-ipr} dr, \\ G_{lq}^0(p) &= G_{lq}^0(p) - R_{lq}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Выражение для тензора  $\xi_{np}^{\varphi\varphi}(\omega)$ , найденное в предположении, что  $\Gamma_\xi(r) = \exp(-r^2/l^2)$ , имеет вид:

$$\xi_{np}^{\varphi\varphi}(\omega) = \begin{vmatrix} \xi_{11}^{\varphi\varphi} & \xi_{12}^{\varphi\varphi} & 0 \\ \xi_{21}^{\varphi\varphi} & \xi_{22}^{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33}^{\varphi\varphi} \end{vmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\xi_{11}^{\varphi\varphi} = \xi_{22}^{\varphi\varphi}, \quad \xi_{12}^{\varphi\varphi} = -\xi_{21}^{\varphi\varphi};$$

$$\xi_{11}^{\varphi\varphi} \simeq B_1(k_0 l)^2 + iC_1(k_0 l)^3 + iC'_1(k_0 l)^3,$$

$$\xi_{33}^{\varphi\varphi} \simeq B_2(k_0 l)^2 + iC_2(k_0 l)^3 + iC'_2(k_0 l)^3, \quad (5.17)$$

$$\xi_{12}^{\varphi\varphi} \simeq B_3(k_0 l)^2 + iC_3(k_0 l)^3 + iC'_3(k_0 l)^3.$$

Коэффициенты  $B_i$  вычисляются в конечном виде. Мы их выписывать не будем из-за громоздкости выражений. При  $k_0 l \ll 1$  члены  $B_i(k_0 l)^2$  мало влияют на величину тензора  $\xi_{ij}^{\varphi\varphi}(\omega, k)$ . В то же время малые члены  $C_i(k_0 l)^3$ ,  $C'_i(k_0 l)^3$  существенны, так как они определяют затухание регулярного поля из-за рассеяния соответственно в необыкновенную и обыкновенную волну. Выражения для  $C_i$ ,  $C'_i$  имеются в [46].

## 6. Магнитоактивная плазма. Метод возмущений. Предельные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных флюктуаций

*Мелкомасштабные неоднородности.* Остановимся подробнее на приближении, соответствующем решению методом возмущений (борновское приближение). Необходимые формулы могут быть получены из общих выражений (5.16), (5.17), либо непосредственным расчетом методом возмущений [44].

Мы уже получили выражения для  $p, r, q$ , отвечающие борновскому приближению. Использование этих формул при выполнении неравенств (5.13) дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(\omega) &\simeq \langle \varepsilon \rangle - k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + u) + \dots, \\ \tau_{ij}(\omega) &\simeq \langle \tau_i \rangle - k_0^2 R_3 \beta^2 \sigma^2 + \dots, \\ g_0(\omega) &\simeq \langle g \rangle - 2k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 \bar{V} u. \end{aligned} \quad (6.1)$$

В этом же приближении

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\sqrt{u}}{8} \sigma^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} \{ \alpha^2(1 + u)n_1^5 \sin^2 \theta - n_1^3[2\alpha^2 \langle \varepsilon \rangle (1 + u) \sin^2 \theta + \\ &+ 4\alpha^2 \langle g \rangle \bar{V} u \sin^2 \theta + \alpha^2 \langle \eta \rangle (1 + u)(1 + \cos^2 \theta)] + 2\langle \eta \rangle n_1[\alpha^2(1 + u)\langle \varepsilon \rangle + 2\alpha^2 \langle g \rangle \bar{V} u] \}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \beta^2 \sigma^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} [n_1^5 \cos^2 \theta - n_1^3 \langle \epsilon \rangle (1 + \cos^2 \theta) + (\langle \epsilon \rangle^2 - \langle g \rangle^2) n_1],$$

$$C_3 = -i \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^2 \sigma^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} [n_1^5 \sqrt{u} \sin^2 \theta - n_1^3 [2\sqrt{u} \langle \epsilon \rangle \sin^2 \theta +$$

$$+ \langle \eta \rangle \sqrt{u} (1 + \cos^2 \theta) + \langle g \rangle (1 + u) \sin^2 \theta] + n_1 \langle \eta \rangle [2\langle \epsilon \rangle \sqrt{u} + \langle g \rangle (1 + u)]],$$

$$N(\theta) = \langle \epsilon \rangle \sin^2 \theta + \langle \eta \rangle \cos^2 \theta.$$

Дальнейшее интегрирование в общем виде затруднительно, однако в ряде случаев можно получить простые конечные выражения.

*Случай слабой гиротропии ( $u \ll 1$ ).* Ограничимся первой степенью величины  $\sqrt{u}$  в разложении всех выражений (6.1):

$$\begin{aligned} k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 (1 + u) &\simeq k_0^2 R_3 \beta^2 \sigma^2 \simeq \frac{1}{3} \frac{\langle (\Delta \eta)^2 \rangle}{\langle \eta \rangle}, \\ 2k_0^2 R_1 \alpha^2 \sigma^2 \sqrt{u} &\simeq -\frac{2}{3} \frac{\langle g \rangle \langle (\Delta \eta)^2 \rangle}{\langle \eta \rangle (\langle \eta \rangle - 1)}; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} C_1 + C'_1 &= C_2 + C'_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \langle (\Delta \eta)^2 \rangle \sqrt{\langle \eta \rangle}, \\ C_3 + C'_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\langle \Delta g \Delta \eta \rangle}{\langle \eta \rangle} \left( \frac{5}{3} \langle \eta \rangle + 1 \right) \sqrt{\langle \eta \rangle}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

*В сильном магнитном поле ( $u \rightarrow \infty$ )*

$$\langle \epsilon \rangle \simeq 1, \quad \langle g \rangle \simeq 0,$$

$$n_2^2 \simeq 1, \quad n_1^2(\theta) \simeq \frac{\langle \eta \rangle}{\sin^2 \theta + \langle \eta \rangle \cos^2 \theta}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.2), имеем

$$A_1 = A_3 = C_1 = C_2 = C_3 = C'_1 = C'_3 = 0,$$

$$A_2 = -\frac{\sigma^2}{\langle N \rangle^2} (\langle \eta \rangle - 1) \left( 1 - \frac{1}{\langle \eta \rangle - 1} \operatorname{arctg} \sqrt{\langle \eta \rangle - 1} \right), \quad (6.6)$$

$$C'_2 = (\sqrt{\pi}/3) \sigma^2 (\langle \eta \rangle - 1)^2.$$

Очевидно, рассеяние происходит только в необыкновенную волну. По отношению к обычной волне плазма с сильным магнитным полем ведет себя как вакуум:

$$n_{2 \text{ эф}}^2 \simeq 1, \quad (6.7)$$

$$n_{1 \text{ эф}}^2 \simeq \frac{\langle \eta \rangle}{\sin^2 \theta + \langle \eta \rangle \cos^2 \theta} + i C'_2 (k_0 \ell)^3 \frac{\sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta + \langle \eta \rangle \cos^2 \theta)^2}.$$

Необыкновенная волна, распространяющаяся вдоль магнитного поля,

также не рассеивается. Разумеется, все эти утверждения справедливы с той точностью, с какой можно считать  $\langle \epsilon \rangle = 1$ ,  $\langle g \rangle = 0$ .

Физический смысл формул (6.6) и (6.7) ясен. Из-за сильного магнитного поля дипольные моменты, возникающие в среде, направлены всегда вдоль магнитного поля. Последние могут излучать только необыкновенные волны [48]. В случае продольного распространения необыкновенной волны и произвольного распространения обыкновенной волны дипольные моменты, равны нулю.

*Крупномасштабные неоднородности.* Поведение среднего поля произвольного распределения источников в хаотически неоднородной магнитоактивной плазме описывается тензором  $\epsilon_{ij}^{\text{ЭФФ}}(\omega, k)$ . Используя этот тензор, можно отыскать выражения для эффективных показателей преломления обыкновенной  $n_2^{\text{ЭФФ}}$  и необыкновенной  $n_1^{\text{ЭФФ}}$  волн. При произвольном направлении распространения волн  $n_1^{\text{ЭФФ}}$  и  $n_2^{\text{ЭФФ}}$  зависят как от угла  $\theta$ , так и от угла  $\phi$  между проекцией волнового вектора на плоскость  $xy$  и осью  $x$ . Заметим, что такая задача рассматривалась [45] в приближении слабого внешнего однородного магнитного поля, когда можно ограничиться лишь членами  $\sim \sqrt{u}$ , причем конкретные результаты приведены для случая продольного распространения волн. Однако полученные в [45] формулы для  $n_{1,2}^{\text{ЭФФ}}$  при  $\theta = 0$  не переходят в известные выражения для изотропного случая ( $u = 0$ ).

Дисперсионное соотношение при продольном распространении волн имеет вид

$$n^4 - \bar{n}^2 (\epsilon_{11}^{\text{ЭФФ}} + \epsilon_{22}^{\text{ЭФФ}}) + \epsilon_{11}^{\text{ЭФФ}} \epsilon_{22}^{\text{ЭФФ}} - \epsilon_{12}^{\text{ЭФФ}} \epsilon_{21}^{\text{ЭФФ}} = 0 \quad (6.8)$$

(предполагаем, что внешнее магнитное поле направлено по оси  $z$ ). Уравнение (6.8) можно решать методом итераций, взяв за нулевое приближение  $n_{1,2}^2 = \langle \epsilon \rangle \mp \langle g \rangle$  — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн при  $\theta=0$  в отсутствие флюктуаций в среде. Тогда при

$$k_0 l n_{1,2} \gg 1, \quad k_0 l \langle \eta \rangle \gg 1, \quad |k_0 l (n_1 - n_2)| \ll 1 \quad (6.9)$$

и при гауссовом коэффициенте корреляции флюктуаций электронной концентрации ( $\Gamma_N(r) = \exp(-r^2/l^2)$ ) выражения для мнимых частей  $n_1^{\text{ЭФФ}}$  и  $n_2^{\text{ЭФФ}}$  принимают вид\*

$$\text{Im } n_{1,2}^{\text{ЭФФ}} \simeq (\sqrt{\pi}/2) \langle (\Delta n_{1,2})^2 \rangle / k_0 l, \quad (6.10)$$

где  $\langle (\Delta n_{1,2})^2 \rangle$  — средний квадрат флюктуаций показателей преломления необыкновенной и обыкновенной волн соответственно. Следовательно, при выполнении условий (6.9) ослабление среднего поля нормальных волн в анизотропной среде за счет рассеяния на случайных неоднородностях можно рассчитывать так же, как в изотропном случае. Единственное отличие состоит в том, что в качестве  $\langle (\Delta n_{1,2})^2 \rangle$  необходимо подставлять дисперсию флюктуаций показателей преломления соответствующих нормальных волн.

Заметим, что аналогичное утверждение можно сделать и при произвольном направлении распространения волны по отношению к внешнему магнитному полю.

Выясним теперь условия, при которых превалирует тот или иной

\* Последнее неравенство (6.9) есть условие слабого взаимодействия нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме [9]. В этом случае происходит, в основном, рассеяние отдельной нормальной волны в тот же тип нормальных волн.

коэффициент ослабления  $\alpha_{1,2} = k_0 \operatorname{Im} n_{1,2}^{\text{эфф}}$  нормальных волн. Как следует из (6.10), их отношение равно

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left( \frac{1 + \sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} \right)^2 \frac{n_2^2}{n_1^2}. \quad (6.11)$$

Отсюда видно, что при  $u < 1$ , по крайней мере, в области, где могут распространяться одновременно обе нормальные волны ( $v = \omega_0^2/\omega^2 < 1 - \sqrt{u}$ ), затухание необыкновенной волны оказывается более значительным по сравнению с затуханием обыкновенной. Этот факт согласуется с результатом, полученным в работах [9, 40] в задаче о рассеянии (в борновском приближении) волн в гиротропной плазме со случайными неоднородностями электронной плотности. Такая «универсальная» ситуация, однако, не имеет места при  $u > 1$ ; в области, где могут одновременно распространяться обе нормальные волны ( $v < 1 + \sqrt{u}$ ), отношение  $\alpha_1/\alpha_2 > 1$  лишь при  $v < 2$ . В условиях, когда  $2 < v < 1 + \sqrt{u}$  рассеяние в необыкновенную волну оказывается менее значительным по сравнению с рассеянием в обыкновенную волну ( $\alpha_1/\alpha_2 < 1$ ).

## 7. Изотропная среда с анизотропными неоднородностями

До сих пор рассматривались лишь среды, у которых случайные неоднородности являются изотропными. Если при этом невозмущенная среда изотропна, то эффективная диэлектрическая проницаемость ее при наличии флюктуаций—скалярная величина. Иная ситуация имеет место в случае, когда поле флюктуаций изотропной среды однородно, но не изотропно. В качестве примера можно рассмотреть случай, когда масштаб корреляции флюктуаций среды вдоль осей  $x$  и  $y$  равен  $l_1$ , а вдоль оси  $z$  —  $l_2$ . Тогда эффективная диэлектрическая проницаемость и ее квазистатическая часть представляют собой тензоры даже в условиях, когда невозмущенная среда является изотропной.

В работах [28, 38] компоненты тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  получены в приближении слабых флюктуаций среды. Здесь мы приведем результаты [49], пригодные в условиях сильных флюктуаций. Разумеется, они переходят как частный случай в формулы работы [38]. В последней выбор квазистатической части  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  в виде скаляра  $\epsilon_0(\omega)$  привел к тому, что при сильной анизотропии неоднородностей ( $\langle \xi^2 \rangle (l_1 - l_2)/l_1 \sim 1$ ) результаты описывают слабые флюктуации среды.

Естественно с самого начала искать квазистатическую часть тензора  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  не в виде скаляра, а в виде тензора  $\epsilon_{ij}^0$ , в котором отличны от нуля лишь диагональные члены  $\epsilon_{11}^0 = \epsilon_{22}^0 = \epsilon_1^0$ ,  $\epsilon_{33}^0 = \epsilon_2^0$ . Такая среда, очевидно, аналогична одноосному кристаллу, в котором могут распространяться две нормальные волны (обыкновенная и необыкновенная). Компоненты  $\epsilon_{11}^0$  и  $\epsilon_{22}^0$  могут быть найдены из решения известной электростатической задачи о поле внутри диэлектрического эллипсоида [25], помещенного во внешнее однородное электрическое поле, и определяются из условий [49]

$$\langle \xi_1 \rangle = \epsilon_1^0 \left\langle \frac{\epsilon - \epsilon_1^0}{\epsilon \rho_1 + \epsilon_1^0(1 - \rho_1)} \right\rangle = 0, \quad \langle \xi_2 \rangle = \epsilon_2^0 \left\langle \frac{\epsilon - \epsilon_2^0}{\epsilon \rho_2 + \epsilon_2^0(1 - \rho_2)} \right\rangle = 0, \quad (7.1)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — коэффициенты деполяризации, равные [25]

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (1 - \rho_2), \quad \rho_2 = \frac{\epsilon^2 + 1}{\epsilon^3} (\epsilon - \operatorname{arctg} \epsilon); \quad (7.2)$$

$$e = \left( \frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_1^0} - 1 \right)^{1/2} \text{ — эксцентризитет.} \quad (7.3)$$

Опуская промежуточные выкладки, приведём формулы для компонент тензора  $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$  в пренебрежении пространственной дисперсией

$$\left[ \Gamma_\xi(\mathbf{r}) = \exp \left( - \frac{x^2 + y^2}{l_1^2} - \frac{z^2}{l_2^2} \right) \right];$$

$$\varepsilon_{22}^{\text{эфф}}(\omega) = \varepsilon_{11}^{\text{эфф}}(\omega) \simeq \varepsilon_1^0 + A_1 k_0^2 l_1 l_2 \langle \xi_1^2 \rangle + i \frac{\sqrt{\pi}}{8} \langle \xi_1^2 \rangle k_0^3 \sqrt{\varepsilon_1^0} l_1^2 l_2 \left( 1 + \frac{\varepsilon_2^0}{3\varepsilon_1^0} \right); \quad (7.4)$$

$$\varepsilon_{33}^{\text{эфф}}(\omega) \simeq \varepsilon_2^0 + A_2 k_0^2 l_1 l_2 \langle \xi_2^2 \rangle + i \frac{\sqrt{\pi}}{6} k_0^3 \sqrt{\varepsilon_2^0} l_1^2 l_2 \langle \xi_2^2 \rangle. \quad (7.5)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{[1 - (l_2/l_1)^2]^{1/2}} \arcsin \left( 1 - \frac{l_2^2}{l_1^2} \right)^{1/2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2^0/\varepsilon_1^0} e^3}{(e^2 - 1)^{3/2}} \arcsin \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} - \frac{e^2 (l_2/l_1)}{e^2 - 1} \right\}, \quad (7.6)$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0^0/\varepsilon_1^0} e}{4\sqrt{e^2 - 1}} \left[ \arcsin \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \left( \frac{3e^2 - 2}{e^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \right) \right]. \quad (7.7)$$

Выражения (7.4) и (7.5) получены при условиях, когда выполнены неравенства

$$k_0 \sqrt{\varepsilon_1^0} \max \{l_1, l_2\} \ll 1, \quad (7.8)$$

$$k_0 \sqrt{\varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0} \max \{l_1 / \sqrt{\varepsilon_1^0}, l_2 / \sqrt{\varepsilon_2^0}\} \ll 1,$$

т. е. в приближении мелкомасштабных флуктуаций.

В заключение этой главы остановимся на случае одномерно неоднородной среды. Этот случай не может быть рассмотрен на основании предельного перехода при  $l_1 \rightarrow \infty$  в формулах (7.4) и (7.5), и расчет необходимо проводить заново. Эта задача была решена в [28] в приближении слабых флуктуаций  $\varepsilon$ . Такая среда также аналогична односоставному кристаллу, компоненты эффективной диэлектрической проницаемости которого имеют вид

$$\varepsilon_{11}^{\text{эфф}} = \varepsilon_{22}^{\text{эфф}} = \langle \varepsilon \rangle,$$

$$\varepsilon_{33}^{\text{эфф}}(\omega) \simeq \langle \varepsilon \rangle - \frac{\langle (\Delta \varepsilon)^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} + i (k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} l) \frac{\langle (\Delta \varepsilon)^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad (7.9)$$

причем выражения (7.9) справедливы при  $k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} l \ll 1$ , где

$$l = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\xi(z) dz.$$

### 3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Большинство работ, которые можно отнести к проблеме излучения, имеет дело с распространением сформировавшихся пучков излучения в неоднородной среде [50–54]. Такие вопросы обсуждались в [19], и мы на них останавливаться не будем, а рассмотрим ряд задач об излучении электромагнитных волн источниками, погруженными в неоднородную среду. Мы уже обсуждали в гл. 4 влияние степени гладкости случайногого процесса  $\epsilon(\omega, \mathbf{r})$  на характер излучения источников, помещенных в среду. Здесь существенную роль начинает играть рассеяние квазистатических полей источника на неоднородностях ближней зоны и пространственная дисперсия хаотически неоднородной среды.

Чтобы пояснить роль пространственной дисперсии в вопросах излучения, воспользуемся законом сохранения энергии для хаотически неоднородной среды [39]. Из уравнений поля для среднего за период потока энергии находим

$$-\mathbf{E}\mathbf{j}_{\text{cr}} = \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (1)$$

С другой стороны, для среднего поля с тем же заданным сторонним током закон сохранения принимает форму

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}\mathbf{j}_{\text{cr}} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{H} \rangle] + Q_0, \\ Q_0 &= \frac{i\omega}{4\pi} (\langle \mathbf{E}_\omega \rangle \langle \mathbf{D}_\omega^* \rangle - \langle \mathbf{E}_\omega^* \rangle \langle \mathbf{D}_\omega \rangle), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^* e^{i\omega t},$$

$Q_0$  — плотность «эффективного тепла», выделяющегося в пространстве, окружающем излучатель. Если из усредненного уравнения (1) вычесть (2), то для среднего по времени и ансамблю (знак усреднения за период высокой частоты опущен) потока рассеянного поля

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{eh}] = \langle \mathbf{S} \rangle - \langle \mathbf{S}_0 \rangle$$

( $\langle \mathbf{S}_0 \rangle$  — поток энергии среднего поля) получим

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{s} \rangle = Q_0. \quad (3)$$

Источником среднего потока хаотического излучения является «эффективное тепло», выделяемое в среде из-за поглощения энергии среднего поля (т. е. трансформации его энергии в энергию рассеянной компоненты). Здесь ясна аналогия ряда задач электродинамики хаотически неоднородных сред и поглощающих сред.

Допустим, что мы имеем дело с точечным источником тока  $\mathbf{j} = n\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ . Если не учитывать пространственную дисперсию, то величина полного поглощенного «тепла»  $\int Q_0 d\mathbf{r}$  расходится (соответственно расходится поток рассеянной энергии). Расходимость связана с поглощением рассеяния ближнего квазистатического поля диполя. Эту расходимость можно устранить, поместив элементарный диполь в малую полость. Меняя размеры полости, мы можем менять степень трансформации энергии ближнего среднего поля в хаотическое (рассеянное) излучение и сопротивление излучения диполя. Из приведен-

ногого примера ясно, что учет пространственной дисперсии, обусловленной неоднородностью вещества, необходим для правильного описания процессов излучения источников в неоднородной среде.

Если излучатель имеет конечные размеры, то можно указать критерий пренебрежения пространственной дисперсией. В самом деле, максимальное волновое число поля излучателя с размерами  $a_0$  по порядку величины равно  $k_{\max} \sim 1/a_0$ . При выполнении условия  $k_{\max} l \ll 1$  ( $l$  — радиус корреляции флюктуации  $\epsilon$ ), когда поле мало меняется на размерах  $\sim l$ , пространственной дисперсией можно пренебречь в ряде важных случаев. Например, в приближении Бурре для случая мелкомасштабных флюктуаций среды, когда  $k_0 l \sqrt{\epsilon_0(\omega)} \ll 1$ , пространственной дисперсией вообще можно пренебречь, если размеры источника больше  $l(l/a_0 \ll 1)$ . В этом же приближении для точечных источников пространственной дисперсией можно пренебречь лишь частично (пренебречь зависимостью  $\operatorname{Re} \epsilon_{\text{эфф}}^l$  от  $k$ ).

## 8. Излучение элементарного электрического диполя в неоднородной среде

Излучение элементарным диполем в мелкомасштабной хаотически неоднородной среде подробно анализируется в работах [55, 56]. Здесь мы рассмотрим решение задачи методом реакции излучения. Пусть имеется диполь с моментом  $p = z_0 p_0 \delta(r) e^{-i\omega t}$ . Потери на излучение можно подсчитать по формуле

$$\langle I \rangle = -\frac{(2\pi)^3}{2} \operatorname{Re} \int j_z^*(k) \langle E_z(\omega, k) \rangle dk, \quad (8.1)$$

где  $j_z(k) = -i\omega p_0/(2\pi)^3$  — сторонний ток, соответствующий моменту  $p$ , а

$$\langle E_z(\omega, k) \rangle = -\frac{4\pi i \omega}{k^2} \left\{ \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k)} - \frac{k^2(1 - k_z^2/k^2)}{c^2 [k^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k)]} \right\} j_z(\omega, k). \quad (8.2)$$

В случае слабонеоднородной среды ( $\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle^2 \ll 1$ )

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l \simeq \epsilon_{\text{эфф}}^{tr} \simeq \epsilon_0(\omega) + i\epsilon_2(\omega, k)^*,$$

$$\epsilon_0(\omega) = \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} \frac{\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle}.$$

При функции корреляции  $\Gamma_\epsilon(r) = \exp(-r^2/l^2)$

$$\epsilon_2(\omega, k) = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} (k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l)^3 \exp(-k^2 l^2/4).$$

Для средних потерь энергии получаем

$$\langle I \rangle = -\frac{2\omega^3 p_0^2}{3\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\epsilon_0 + i\epsilon_2(\omega, k)} - \frac{2}{c^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2 \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k)} \right]. \quad (8.3)$$

Первый интеграл в (8.3) связан с трансформацией энергии ближнего поля диполя в энергию поля излучения:

\* Зависимостью от  $k$  в  $\operatorname{Re} \epsilon_{\text{эфф}}(\omega, k)$  в этом предельном случае можно пренебречь, так как от  $k$  зависит малая добавка к  $\epsilon_0(\omega)$ , которая не существенна ни в одном из интегралов, содержащихся в  $\langle I \rangle$ .

$$J_1 = \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\varepsilon(\omega, k)} \simeq - \int_0^\infty \frac{k^2 \varepsilon_2(\omega, k) dk}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \simeq \frac{1}{3} \frac{\pi k_0^3 \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^{3/2}}. \quad (8.4)$$

Зависимостью  $|\varepsilon(\omega, k)|^2$  от  $k$  в (8.4) можно пренебречь, учитывая сказанное в подстрочном примечании. Второй интеграл  $J_2$  описывает рассеяние волнового поля диполя на неоднородностях. При вычислении вклада в  $\langle I \rangle$ , даваемого волновым полем, пространственной дисперсией, вообще можно пренебречь. В самом деле,  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_0(\omega)$  при любых  $k$ . Поэтому основной вклад в интеграл  $J_2$  дают значения  $k \simeq k_0 \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ .

В силу условия  $k_0 l \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} \ll 1$  ясно, что экспонента в  $\varepsilon_2(\omega, k)$  может быть заменена единицей. С учетом сказанного интеграл  $J_2$  легко вычисляется. Конечный результат выражается формулой

$$\langle I \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2 V \langle \varepsilon \rangle}{3 c^3} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle} \right]. \quad (8.5)$$

Таким образом, интенсивность излучения в слабооднородной среде возрастает на величину, пропорциональную  $\langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle / \langle \varepsilon \rangle$  и связанную с рассеянием ближнего поля\*.

В работе [56] методом возмущений вычислена диаграмма направленности электрического диполя, помещенного в центр сферы радиуса  $R$  со случайными неоднородностями:

$$S_2 = \frac{\omega^4 \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle}{120\pi c^3} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + k_0^4 l^3 R_0 (2 + 7 \sin^2 \theta) \right], \quad (8.6)$$

$S_2 d\Omega = (c/8\pi) \langle ee^* \rangle r^2 d\Omega$ ,  $e$  — рассеянное поле. Интегрирование по телесному углу дает

$$S = \frac{2\omega^4 \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle}{9c^3} \left( \frac{1}{4} + k_0^4 l^3 R_0 \right). \quad (8.7)$$

Первый член в (8.7) связан с рассеянием ближнего поля (совпадает с соответствующей добавкой в (8.5)), второй определяется рассеянием волнового поля диполя.

В заключение остановимся на работе [16], в которой было рассчитано излучение элементарного диполя в крупномасштабной неоднородной среде. Методом возмущений был найден поток энергии, связанный с рассеянием волнового поля излучателя. При этом остался невыясненным вопрос о вкладе в излучение рассеяния ближнего поля. Результаты [16] показывают, что в крупномасштабной среде с малыми флуктуациями сопротивление излучения диполя не зависит от флуктуаций в среде с той степенью точности, с которой вклад рассеяния ближнего поля в энергию излучения можно считать малым.

## 9. Излучение тонкой металлической антенны в хаотически неоднородной среде

Если излучатель, погруженный в неоднородную среду, имеет конечные размеры, то при определенных соотношениях между размерами излучателя и масштабом неоднородностей пространственной дисперсией можно вообще пренебречь. Примером такого рода может служить тонкая металлическая антenna длины  $L$  и радиуса (максимального) кругового сечения  $a_0$  при условии, что размеры неоднородностей малы по сравнению с радиусом сечения антенны,  $l/a_0 \ll 1$ .

\* Можно подсчитать величину  $\langle I \rangle$  по формуле  $\langle I \rangle = \int Q_0 dr$ .

В хаотически неоднородной среде ток в антенне является случайной величиной. Импеданс антенны, определяемый по отношению к среднему току, будем называть эффективным. В [58] в приближении теории тонких антенн,  $2L/a_0 \gg 1$ ,  $\lambda/a_0 \gg 1$ ,  $\ln(2L/a_0) \gg l$ , рассчитан эффективный импеданс одиночной металлической антенны, помещенной в мелкомасштабную хаотически неоднородную среду ( $\lambda/l \gg 1$ ). При вычислениях использовалась эффективная диэлектрическая проницаемость безграничной неоднородной среды. Такой подход является приближенным. Вблизи границ тел, помещенных в неоднородную среду,  $\epsilon_{\text{эфф}}^{\text{вн}}$  отличается от проницаемости безграничной статистически однородной среды. Это отличие существенно на расстояниях порядка  $l$  и может не приниматься в расчет, если поперечные размеры антенны велики по сравнению с  $l$ .

В рассматриваемом приближении задача об эффективном импедансе антены сводится к нахождению импеданса антены в поглощающей однородной среде. Для антены в среде с поглощением ( $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega) = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ ) эффективный характеристический импеданс антены выражается следующим образом через ее среднее поле в пространстве с объемом  $V_R$ , окружающем антенну:

$$T^{\text{эфф}} = \frac{1}{I} \int K(z) \Psi^*(z) dz = -\frac{i\omega}{4\pi} \int_{V_R \rightarrow \infty} [HH^* - \epsilon^{\text{эфф}*} EE^*]_0 dV. \quad (9.1)$$

В (9.1) в приближении теории тонких антенн безразмерный ток  $\Psi(z) = \sin(\alpha' - k'|z|)$  ( $\alpha' = k_0 L \sqrt{\epsilon_1 + i\epsilon_2}$ ) является первым членом ряда в разложении по степеням малой величины  $\chi = 1/2 \ln(a_0/L)$ , решения уравнений для среднего тока

$$\frac{d^2 J}{dz^2} + k'^2 J = ik_0 \epsilon^{\text{эфф}} c \chi [K + G(J, z)], \quad (9.2)$$

где  $J(\pm L) = 0$ ,  $k'^2 = k_0^2 \epsilon^{\text{эфф}}$ ,  $K(z)$ —сторонняя ЭДС,  $G(J, z)$ —интегральный оператор [57],

$$J(z) = J_0(z) + J_1(z) + J_2(z) + \dots$$

При комплексных  $k'$   $J_0 = 0$  и ряд начинается с  $J_1(z) \sim \chi$ . Если  $K(z) = e\delta(z)$ , то

$$J_1(z) = \frac{ic\chi\sqrt{\epsilon^{\text{эфф}}}}{2\cos(k'L)} \Psi(z) = I\Gamma(z). \quad (9.3)$$

Выражение (9.1) можно переписать в следующем виде:

$$T^{\text{эфф}} = P^{\text{эфф}} - iQ^{\text{эфф}} = \frac{\omega\epsilon_2}{4\pi} \int (EE^*)_0 dV - \frac{i\omega}{4\pi} \int (HH^* - \epsilon_1 EE^*)_0 dV. \quad (9.4)$$

Из этой записи ясно, что активное сопротивление антены определяется «эффективным количеством тепла», выделяющимся в пространстве, окружающем антенну. В хаотически неоднородной среде от формы и профиля антены будет зависеть и активная составляющая импеданса антennы.

В качестве примера рассмотрим сфероидальный диполь. Обозначая характеристический импеданс последнего в вакууме через  $P_0^{\text{вн}} - iQ_0^{\text{вн}}$ , можно из (9.4) получить выражение для эффективного характеристического импеданса. Здесь мы выпишем результаты вычислений для двух предельных случаев.

1)  $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$  ( $\langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle^2 \ll 1$ ),

$$\begin{aligned} P_{\text{эл}}^{\text{эф}} &= \frac{P_0^{\text{эл}}(\alpha)}{\sqrt{\epsilon_1}} - \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_1^{3/2}} \left\{ Q^{\text{эл}}(\alpha) - \frac{4\alpha}{c} \ln \frac{2L}{a_0} + \frac{2\alpha}{c} \times \right. \\ &\quad \times [(\sin 2\alpha \operatorname{Si} 4\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{Di} 4\alpha) - 2\cos \alpha (\sin \alpha \operatorname{Si} 2\alpha - \cos \alpha \operatorname{Di} 2\alpha)] \Big\}, \\ Q_{\text{эл}}^{\text{эф}} &= \frac{Q^{\text{эл}}(\alpha)}{\sqrt{\epsilon_1}} + \frac{\epsilon_2}{2\epsilon_1^{3/2}} \left\{ P_0^{\text{эл}}(\alpha) + \frac{2\alpha}{c} [4\ln 2 \sin 2\alpha \sin^2 \alpha - (\sin 2\alpha \operatorname{Di} 2\alpha + \right. \quad (9.5) \\ &\quad \left. + \cos 2\alpha \operatorname{Si} 2\alpha) - (\sin 4\alpha \operatorname{Di} 2\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{Si} 2\alpha) + (\sin 4\alpha \operatorname{Di} 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{Si} 4\alpha)] \right\}, \\ \operatorname{Di}(x) &= \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

2)  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ . Этот предельный случай соответствует сильным флюктуациям диэлектрической проницаемости. Примером может служить неоднородная плазма на частоте, близкой к ленгмюровской (см. гл. 1). В этом случае

$$P_{\text{эл}}^{\text{эф}} = \frac{4k_0 L}{c} \ln \frac{L}{a_0}, \quad Q_{\text{эл}}^{\text{эф}} \simeq 0, \quad (9.6)$$

т. е. сопротивление диполя носит активный характер.

Располагая выражениями для характеристического импеданса, легко вычислить входной импеданс антенны  $S^{\text{эф}}$ . Например, во втором предельном случае ( $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ )

$$S^{\text{эф}} = \frac{4 \ln(L/a_0)}{k_0 L c \epsilon_2}. \quad (9.7)$$

Для неоднородной плазмы на резонансной частоте  $\epsilon_2 \simeq (1/2)\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle / \langle N \rangle}$ , где  $\Delta N = N - \langle N \rangle$  — флюктуации электронной плотности. Из (9.7) получаем

$$R^{\text{эф}} \simeq \frac{8 \ln(L/a_0)}{ck_0 L} \left[ \frac{\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle}}{\langle N \rangle} \right]^{-1}. \quad (9.8)$$

Таким образом, учет флюктуаций электронной плотности приводит к конечному (хотя и очень большому) значению входного импеданса антенны на плазменной частоте.

В формулах (9.5) содержится существенный эффект влияния неоднородностей на сопротивление излучения. Выбором  $a_0$  можно сделать величину  $P^{\text{эф}}(z)$  очень большой. Здесь проявляется влияние рассеяния ближних сильных квазистатических полей антенны; трансформация энергии последних за счет рассеяния в поле излучения приводит к появлению фактора  $\ln(L/a_0)$  в выражении для активной части сопротивления антенны.

## 10. Излучение равномерно движущегося заряда в среде с неоднородностями

Задача об излучении заряженной частицы в случайно неоднородной среде впервые была рассмотрена в [59] в борновском приближении для случая, когда масштаб неоднородностей мал по сравнению с дли-

ной волны. В [60, 61] учтены особенности излучения при пролете частицы через среду с крупномасштабными неоднородностями. Обобщение этой задачи для неоднородной плазмы с учетом теплового движения электронов было дано в [63]. В указанных работах и частично в [62] задача об излучении заряда в неоднородной среде решалась путем подсчета потока рассеянного излучения.

Последняя может быть решена также другим методом, основанным на использовании тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Средние потери энергии на единицу длины можно определить как работу силы радиационного трения по формуле

$$\left\langle \frac{dW}{dz} \right\rangle = -\operatorname{Re} q \langle E_z \rangle v. \quad (10.1)$$

Здесь  $q$  — заряд частицы,  $v$  — ее скорость, которая предполагается направленной по оси  $z$ .

В случае изотропной среды с изотропными неоднородностями выражение (10.1) можно представить в виде [64]

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W}{\partial z} \right\rangle = & -\frac{2q^2}{\pi v^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{x dx}{x^2 + \omega^2/v^2} \left[ \frac{1}{\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, x)} - \right. \\ & \left. - \frac{\beta^2 x^2}{x^2 + (\omega^2/v^2)(1 - \epsilon_{\text{эфф}}^{tr} \beta^2)} \right], \end{aligned} \quad (10.2)$$

где  $x$  — поперечное волновое число,  $x^2 + \omega^2/v^2 = k^2$ ,  $\beta = v/c$ . Из (10.2) следует, что задача о потерях энергии частицы на излучение электромагнитных волн в хаотически неоднородной среде эквивалентна известной задаче об ионизационных потерях [25] в однородной поглощающей среде, характеризуемой тензором  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$ .

Ограничимся случаем слабых флуктуаций среды. Кроме того, будем считать, что скорость заряда меньше фазовой скорости распространения волн в среде ( $\langle \epsilon \rangle \beta^2 < 1$ ). При этом единственным видом потерь заряда будет переходное излучение на случайных неоднородностях среды.

В случае мелкомасштабных неоднородностей при гауссовом коэффициенте корреляции  $\Gamma_\epsilon(r) = \exp(-r^2/l^2)$  выражения для  $\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k)$  и  $\epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k)$  можно представить в виде

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) \simeq \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, k) \simeq \langle \epsilon \rangle + i \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} (k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l)^3 \exp\left(-\frac{k^2 l^2}{4}\right). \quad (10.3)$$

Тогда для спектральной плотности потерь на единицу длины имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle = & \frac{\omega^4 q^2 \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle l^3}{6 \sqrt{\pi} v^2 c^3 \langle \epsilon \rangle^{3/2}} \left\{ \left[ 1 - \frac{k_0^2 l^2 \langle \epsilon \rangle}{4} (1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2) \right] \times \right. \\ & \left. \times E_\perp \left[ -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2) \right] - \langle \epsilon \rangle \beta^2 \exp\left[-\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} (1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Здесь  $E_\perp(x)$  — интегральная показательная функция.

Из (10.4) следует, что при  $(\omega/v) l \gg 1$  интенсивность излучения заряда экспоненциально мала. При выполнении обратного неравенства она максимальна и равна

$$\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle \approx \frac{\omega^4 q^2 \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle l^3}{6 \sqrt{\pi} v^2 c^3 \langle \epsilon \rangle^{3/2}} \left[ \ln \left( \frac{\omega l}{2v} \sqrt{1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2} \right)^{-1/2} - \langle \epsilon \rangle \beta^2 \right]. \quad (10.5)$$

Следовательно, при приближении к черенковскому порогу излучения электромагнитных волн ( $\langle \epsilon \rangle \beta^2 \rightarrow 1$ ) интенсивность логарифмически возрастает. Правда, на самом пороге формула (10.4) становится несправедливой и необходимо более корректное вычисление интеграла (10.2). В этом случае [11]

$$\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle \sim \ln \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{24} \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle k_0^5 l^5 \langle \epsilon \rangle^{3/2} \right]^{-1}, \quad (10.6)$$

т. е. на пороге черенковского излучения (точнее, при  $|1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2| \ll \ll (\sqrt{\pi}/6) (\langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle) (k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l)^3$ ) интенсивность излучения остается конечной величиной.

Заметим, что в [11, 59–61] при подсчете спектральной плотности излучения не учитывалась пространственная дисперсия мнимой части  $\epsilon_{\text{эфф}}$ , что привело к необходимости «обрезать» интегралы (10.2) при  $x \approx x_{\max} \sim 1/\rho_{\min}$ . Это допустимо, если расстояние, на котором существенно изменяется поле заряда, велико по сравнению с масштабом неоднородностей  $l$ . Однако вблизи оси движения поле заряда изменяется резко, поэтому пространственная дисперсия мнимой части  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  становится существенной: как мы видели выше, учет ее приводит к сходимости интеграла (10.2) при больших  $x$ , а роль величины  $\rho_{\min}$  играет масштаб изменения свойств среды  $l$ .

Аналогичная ситуация имеет место при подсчете  $\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle$  путем вычисления потока вектора Пойнтинга: учет того, что флюктуации  $\epsilon$  неоднородной среды не  $\delta$ -коррелированы, «снимает» логарифмическую расходимость выражений для интенсивности излучения [62].

В условиях, когда выполнено неравенство

$$k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l \gg 1 \quad (10.7)$$

(крупномасштабные неоднородности) выражения для спектральной плотности излучения без учета пространственной дисперсии двумя различными методами были получены в [11, 60]. Они так же, как и в мелкомасштабном случае, имеют логарифмическую расходимость при  $x \rightarrow \infty$ . Эта особенность отсутствует в результатах [62], где при вычислении потока рассеянного излучения учитывалось «размытие» корреляционной функции  $\Gamma_\epsilon(r)$ . Соответствующая формула имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle \approx \frac{\omega^2 q^2 \langle (\Delta \epsilon)^2 \rangle l}{4 \sqrt{\pi} c^3 \langle \epsilon \rangle^{3/2}} \left\{ 2 \ln \left[ \frac{\omega l}{2\sqrt{2} v} (1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2) \right]^{-1} - 1 \right\}, \quad (10.8)$$

причем, она справедлива при выполнении неравенства

$$\frac{\omega^2 l^2}{8v^2} (1 - \langle \epsilon \rangle \beta^2)^2 \ll 1. \quad (10.9)$$

В обратном предельном случае величина  $\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle$  экспоненциально мала. Следовательно, интенсивность излучения движущихся частиц в среде с крупномасштабными неоднородностями достаточно велика лишь при релятивистских скоростях.

Укажем еще на одну особенность излучения зарядов при  $k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l \gg 1$ : излучение в основном сосредоточено в узком конусе углов  $\theta \simeq 2/k_0 \sqrt{\langle \epsilon \rangle} l$  по направлению движения частиц [60].

Приведем также формулу для  $\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle$  в случае, когда заряд движется в среде с хаотически ориентированными по углам кристаллитами [67, 68]. Такая среда описывается тензором

$$\varepsilon_{ik}^{\text{шфф}} = (\epsilon + \epsilon_1 + i \epsilon_2) \delta_{ik}, \quad (10.10)$$

где

$$\epsilon = \frac{1}{3} \tilde{\epsilon}_{ii}, \quad \epsilon_1 = \frac{1}{50} \frac{\nu}{\epsilon}, \quad \epsilon_2 = \frac{7}{60} \cdot \frac{\nu l}{c \sqrt{\epsilon}} \omega, \quad \nu = (\tilde{\epsilon}_{ik})^2 - 3\epsilon^2, \quad (10.11)$$

$\tilde{\epsilon}_{ik}$  — тензор диэлектрической проницаемости отдельных кристаллитов,  $\nu$  — параметр анизотропии, который, например, для одноосного кристалла имеет вид  $\nu = (2/3)(\tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{33})^2$ . Учитывая (10.2), (10.10) и (10.11), для спектральной плотности потерь энергии частицы на единицу длины при  $k_0 l \gg 1$  можно получить

$$\left\langle \frac{\partial W_\omega}{\partial z} \right\rangle \simeq \frac{7}{60} \frac{q^2 \omega^2 l}{\pi v^2 c} \frac{\nu}{\sqrt{\epsilon} (\epsilon + \nu/50\epsilon)^2} \left[ \ln \frac{x_{\max}^2 v^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \beta^2(\epsilon + \nu/50\epsilon)} - \left( \epsilon + \frac{\nu}{50\epsilon} \right) \beta^2 \right]. \quad (10.12)$$

В заключение заметим, что излучение заряда в магнитоактивной плазме при наличии хаотических неоднородностей электронной плотности было рассмотрено в [69] в приближении мелкомасштабных флюктуаций. Соответствующие формулы мы здесь не приводим ввиду их громоздкости.

## 11. Тепловое излучение в хаотически неоднородной среде

Связь между эффективной диэлектрической проницаемостью среды и флюктуационным тепловым полем была получена в работе [39] в виде

$$\langle E_i(r) E_j(r') \rangle = \frac{4\Theta}{\omega} \Phi_{ij}(\omega, r - r'),$$

$$\Phi_{ij}(\omega, R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Psi_{ij}(\omega, k) e^{ikR} dk, \quad (11.1)$$

$$\Psi_{ij}(\omega, k) = \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\operatorname{Im} \epsilon'_{\text{шфф}}(\omega, k)}{|\epsilon'_{\text{шфф}}(\omega, k)|^2} + k_0^4 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\operatorname{Im} \epsilon'^r_{\text{шфф}}(\omega, k)}{|k^2 - k_0^2 \epsilon'^r_{\text{шфф}}(\omega, k)|^2}.$$

Выражения (11.1) рассмотрим в применении к физически прозрачной среде. В этом случае они выражают свойства теплового излучения в хаотически неоднородной среде с учетом рассеяния и дифракции. Если пренебречь пространственной дисперсией, то формула для корреляционной функции

$$\langle E(r_1) E(r_2)_\omega \rangle = \frac{4\Theta}{\omega} \left[ \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_{\text{eff}}(\omega)}{|\varepsilon'_{\text{eff}}(\omega)|^2} \delta(R) + \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \exp(-k_2^{\text{eff}} R) \frac{\sin k_1^{\text{eff}} R}{R} \right], \quad (11.2)$$

где  $\Theta = kT$ ,  $k^{\text{eff}} = k_1^{\text{eff}} + ik_2^{\text{eff}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}}$ ,  $R = r_1 - r_2$ , показывает, что пренебрежение пространственной дисперсией приводит к расходимости интенсивности флюктуаций продольного поля.

С другой стороны, учет пространственной дисперсии делает конечными выражения для флюктуаций поля в отсутствие «истинной» пространственной дисперсии вещества (определенной микроскопическими параметрами в кристаллах или тепловым движением и радиусом Дебая в нагретой плазме).

Присутствие первого члена в (11.1) и (11.2), связанного с флюктуациями теплового продольного поля в прозрачной среде, может показаться непонятным. В физически прозрачной однородной среде этот член отсутствует, флюктуационное поле чисто поперечно и его интенсивность равна

$$\langle E^2(r)_\omega \rangle = 2\omega^2 \sqrt{\varepsilon_0/\pi c^3}. \quad (11.3)$$

Дело здесь, разумеется, в неоднородности среды. В неоднородной среде имеется продольное поле даже в отсутствие «истинного» поглощения.

Интересно проиллюстрировать приведенные рассуждения следующим расчетом для неоднородного диэлектрика.

Пусть флюктуации мелкомасштабны, т. е.  $p_0 = k_0 l \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} \ll 1$ , и выполнено неравенство  $|\xi_{ij}^{\text{eff}}(\omega, k)| \ll 1$  (приближение Бурре). В этом случае

$$\operatorname{Im} \varepsilon'_{\text{eff}}(\omega, k) = \frac{2\varepsilon_0(\omega) \langle \xi^2 \rangle p_0^3}{3p} \int_0^\infty \Gamma_\xi(x) x \sin(px) dx, \quad (11.4)$$

где  $\varepsilon_0(\omega)$ ,  $\langle \xi^2 \rangle$  — действительные величины. Подставляя (11.4) в (11.1) можно получить

$$\langle E^l(r_1) E^l(r_2) \rangle = \frac{2\omega^2 \sqrt{\varepsilon_0(\omega)\Theta} \langle \xi^2 \rangle}{3\pi c^3} \Gamma_\xi \left( \frac{R}{l} \right). \quad (11.5)$$

Т. е. в рассматриваемом приближении корреляционная функция продольного теплового поля определяется корреляционной функцией поляризуемости  $\xi(\omega, r)$ , что совершенно понятно, если вспомнить характер поведения продольного поля вблизи каждой неоднородности (см. гл. 1).

Для слабонеоднородной среды  $\langle \xi^2 \rangle \simeq \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle / \langle \varepsilon \rangle^2$  и (11.5) переходит в

$$\langle (E^l)^2 \rangle = \frac{2\omega^2 \Theta \langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle}{3\pi \langle \varepsilon \rangle^{3/2}}. \quad (11.6)$$

Эту же формулу можно получить и другим путем. В самом деле, при  $\langle (\Delta\varepsilon)^2 \rangle / \langle \varepsilon \rangle^2 \ll 1$  продольное поле из (11.6) должно определяться рассеянием невозмущенного поперечного поля (11.3) в приближении однократного рассеяния. Соответствующий расчет можно найти в [7].

## ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

3. J. A. Ratcliffe, Some aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere, *Rep. Prog. Phys.*, **19**, 188 (1956).
4. Д. М. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких волн, изд. АН СССР, М., 1958.
5. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Некоторые вопросы теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, № 4, 521 (1959).
6. Ф. Г. Басс, К статистической теории распространения радиоволны, Диссертация. Акустический институт АН СССР, М., 1963.
7. Ю. А. Рыжов, Некоторые вопросы распространения волн в неоднородных средах. Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1963.
8. М. Ф. Бахарева, Вопросы корреляционной теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Диссертация, Госуниверситет, Харьков, 1964.
9. Н. Г. Денисов, Вопросы статистической теории распространения и дифракции волн, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1964.
10. U. Frisch, *Wave propagation in Random Media. A Theory of Multiple Scattering*, Institut d'Astrophysique, Paris, 1965.
11. В. В. Тамойкин, К теории излучения движущихся источников в неоднородных средах, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1965.
12. Л. М. Ерухимов, Исследование неоднородностей электронной концентрации в ионосфере радиоастрономическим методом и с помощью искусственных спутников Земли, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1965.
13. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, London—New York—Paris—Los Angelos, 1959.
14. E. Wolf, *Progress in Optics*, North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1961.
15. N. G. Denisov, L. S. Dolin, *Diffraction of fluctuating fields. Electromagnetic Waves*, **6**, 819, Pergamon Press, 1963.
16. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, Флуктуации электромагнитных волн в тропосфере при наличии поверхности раздела. УФН, **73**, 89 (1961).
17. В. М. Комиссаров, Некоторые вопросы статистической теории распространения волн в неоднородных средах, Диссертация, Акустический институт АН СССР, М., 1966.
18. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
19. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, Состояние теории распространения волн в случайно неоднородных средах, УФН (в печати), М., 1969; Доклад на сессии отд. общей физики и астрономии АН СССР и на IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Харьков, 1960.
20. В. М. Финкельберг, К теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями, Диссертация, ИТЭФ АН СССР, М., 1967.
21. Ю. А. Кравцов, Метод геометрической оптики и его обобщения, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1969.
22. А. И. Кон, Влияние геометрических факторов на статистические характеристики волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере, Диссертация, Институт физики атмосферы АН СССР, М., 1969.
23. З. И. Фейзуллин, Распространение ограниченных волновых пучков в средах с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью, Диссертация, Институт физики атмосферы АН СССР, М., 1969.
24. Некогрентное рассеяние радиоволн, изд. Мир, М., 1965.
25. Л. Д. Ландau, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.
26. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Распространение электромагнитных колебаний в неоднородных анизотропных средах, Уч. зап. ХГУ, **2**, 41 (1950).
27. Э. А. Канер, К теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, № 5, 827 (1959).
28. Ф. Г. Басс, О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости в среде со случайными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 6, 1015 (1959).
29. J. B. Keller, F. C. Kagaal, *Effective Dielectric Constant, Permeability and Conductivity of Random Medium and the Velocity and Attenuation Coefficient of Coherent Waves*, J. Math. Phys., **7**, 661 (1966).
30. R. C. Bourret, *Stochastically Perturbed Fields with Applications to Wave Propagation in Random Media*, Nuovo Cim., **26**, 1 (1962).
31. R. C. Bourret, *Propagation of Randomly perturbed Fields*, Kanad. J. Phys., **40**, 782 (1962).
32. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, Распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления, ЖЭТФ, **44**, 676 (1963).

33. В. М. Финкельберг, Диэлектрическая проницаемость смесей, ЖТФ, 34, 503 (1964).
34. K. Furutsu, On the Statistical Theory of Electromagnetic Waves in a Fluctuating Medium, J. Res. NBS, D 67, 303 (1963).
35. В. М. Финкельберг, Среднее значение поля в неоднородной среде, ЖЭТФ, 46, 725 (1964).
36. В. И. Татарский, Распространение электромагнитных волн в среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, ЖЭТФ, 46, 1399 (1964).
37. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, О пространственной дисперсии неоднородных сред, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
38. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Среднее поле в среде с хаотическими анизотропными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 205 (1966).
39. Ю. А. Рыжов, Об аналитических свойствах эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородных сред, ЖЭТФ, 55, 567 (1968).
40. Н. Г. Денисов, Дифракция электромагнитных волн в гиротропном слое, содержащем случайные неоднородности, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 393 (1960).
41. Н. Г. Денисов, Статистические параметры электромагнитной волны, прошедшей через неоднородный слой магнитоактивной плазмы, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 619 (1960).
42. Ф. Г. Басс, С. И. Ханина, Флуктуации электрического поля в гиротропной среде со случайными неоднородностями в приближении геометрической оптики, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 384 (1960).
43. Ф. Г. Басс, Флуктуации параметров электромагнитного поля, распространяющегося в магнитоактивной плазме со случайными изменениями концентрации электронов и магнитного поля, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 465 (1961).
44. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной магнитоактивной плазмы, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 605 (1964).
45. C. H. Liu, Effective Dielectric Tensor and Propagation Constant of Plane Waves in a Random Anisotropic Medium, J. Math. Phys., 8, № 11, 2236 (1967).
46. Ю. А. Рыжов, Тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильнонеоднородной анизотропной среды, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 39 (1966).
47. А. А. Янцевич, Об одной задаче электродинамики неоднородной анизотропной среды, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 137 (1967).
48. Ю. В. Чугунов, К теории тонкой металлической антенны в анизотропных средах, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 830 (1969).
49. В. В. Тамойкин, Среднее поле в среде с сильными анизотропными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
50. Л. С. Долинин, О распространении узкого пучка света в среде с сильно анизотропным рассеянием, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 61 (1966).
51. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, О средней диаграмме направленности излучателя в турбулентной атмосфере, Радиотехника и электроника, 9, 1944 (1964).
52. А. И. Кон, В. И. Татарский, О флуктуациях параметров пространственно-ограниченного пучка света в турбулентной атмосфере, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 870 (1965).
53. З. И. Фейзуллин, Ю. А. Кравцов, К вопросу о расширении лазерного пучка в турбулентной среде, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
54. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1964.
55. В. П. Докучаев, Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Излучение элементарного диполя в хаотически неоднородной среде, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1512 (1969).
56. Я. М. Дорфман, Об излучении электрического диполя в случайно неоднородной среде, Радиотехника и электроника (в печати).
57. М. А. Леонтович, М. Л. Левин, К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн, ЖТФ, 14, 481 (1944).
58. Ю. А. Рыжов, Об излучении тонкой металлической антенны в хаотически неоднородной среде, Радиотехника и электроника, 13, 2122 (1968).
59. С. П. Каца, Излучение заряда, движущегося в неоднородной среде, ЖЭТФ, 39, 1367 (1960).
60. М. Л. Тер-Микаэлян, Излучение фотонов быстрыми частицами в неоднородной среде, Изв. АН Арм. ССР, 14, вып. 2, 103 (1961).
61. М. Л. Тер-Микаэлян, Излучение быстрых частиц в неоднородной среде, ДАН СССР, 134, 318 (1960).
62. В. В. Тамойкин, Об излучении заряда в среде со случайными неоднородностями, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1879 (1968).
63. В. В. Тамойкин, Излучение заряда в неоднородной среде с пространственной дисперсией, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 257 (1963).

64. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
65. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, Ионизационные потери в неоднородной среде, ЖЭТФ, 45, 325 (1963).
66. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, О реакции излучения при движении малых тел в неоднородных газообразных средах, ЖЭТФ, 44, 1544 (1963).
67. Г. А. Бегиашвили, Ю. С. Монин, Излучение заряда, движущегося в случайно неоднородной анизотропной среде, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 627 (1966).
68. Г. А. Бегиашвили, Ю. С. Монин, Излучение заряда, движущегося в статистически неоднородной анизотропной среде, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 139 (1967).
69. В. В. Тамойкин, Об излучении заряда, движущегося в неоднородной магнитоактивной плазме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 42 (1965).
70. А. Эрдэйи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
71. Ю. А. Рыжов, Тепловое излучение в хаотически неоднородной прозрачной среде, ЖЭТФ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 декабря 1969 г.

УДК 523.164

**ИЗМЕРЕНИЕ ЯРКОСТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ  
АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ В СУБМИЛЛИМЕТРОВОМ  
ДИАПАЗОНЕ С ВЫСОТЫ 35 км**

*В. И. Лапшин, А. Е. Саломонович, С. В. Соломонов,  
В. Ф. Троицкий, А. Б. Фрадков, А. С. Хайкин*

Описан радиометр и приведены результаты первых измерений яркостной температуры излучения атмосферы Земли, проведенных с высоты 35 км в субмиллиметровом диапазоне волн (0,5 — 2 мм). Получены угловые распределения яркостной температуры в вертикальной плоскости. Характер распределения и относительно низкая яркостная температура показывают, что основной вклад в субмиллиметровое излучение вносят верхние, относительно холодные слои атмосферы.

Вынос радиометрической аппаратуры субмиллиметрового диапазона за пределы земной атмосферы позволяет проводить весьма интересные астрономические наблюдения в этом диапазоне, невозможные в наземных условиях из-за поглощения и собственного излучения, вносимых атмосферой. Одним из простейших средств внеатмосферной субмиллиметровой астрономии является подъем аппарата на высотных аэростатах [1, 2]. В процессе создания радиометрической аппаратуры субмиллиметрового диапазона, необходимой при внеатмосферных наблюдениях, нами разработан и испытан в полетах аэростатный радиометр. В ходе испытаний оказалось возможным произвести измерение яркостной температуры излучения атмосферы Земли в субмиллиметровом диапазоне, представляющее самостоятельный интерес. В настоящем сообщении приводятся сведения о разработанном радиометре и результатах первых аэростатных измерений.

С целью повышения флюктуационной чувствительности радиометра и увеличения его быстродействия в качестве приемника мы использовали охлаждаемые до температуры жидкого гелия (4,2°К) фотосопротивления из  $n$ -InSb [3], что повлекло за собой необходимость создания специального криостата.

На рис. 1 приведена блок-схема радиометра. Исследуемое излучение после отражения от двух плоских зеркал (1) и (2) с помощью сферических зеркал (3) и (4) и плоского зеркала (5) фокусируется на приемнике (6), расположенном в криостате. Модуляция исследуемого излучения осуществляется с частотой 340 Гц с помощью механического обтюратора (МО), расположенного между зеркалами (1) и (2). В качестве фильтра, отрезающего коротковолновую часть излучения, служат кварцевые окна криостата и черная бумага. Приемник через согласующий трансформатор присоединен ко входу предварительного усилителя низкой частоты (ПУНЧ), выполненного на нувисторных лампах 6С51Н и 6С52Н, вслед за которым включен усилитель низкой частоты (УНЧ) на транзисторах П28 и МП16Б, синхронный детектор (СД) и балансный усилитель постоянного тока (УПТ) на диодах Д220 и транзисторах МП103. Опорное напряжение на СД поступает с фототранзи-

стора ФТ-1 (7), освещаемого периодически при вращении обтюратора, после усиления усилителем опорного напряжения (УОН).

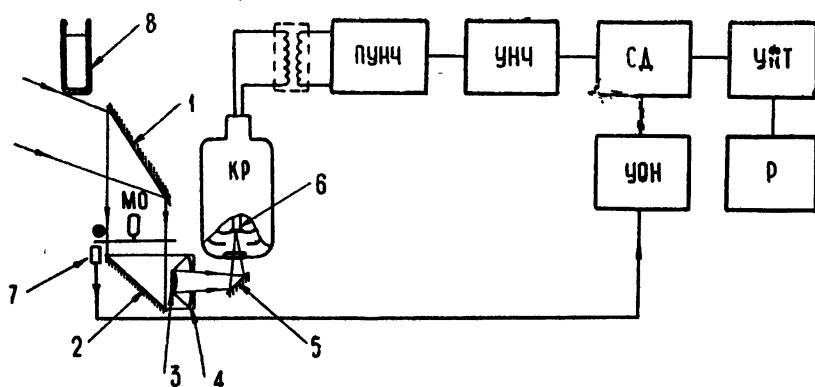


Рис. 1. Блок-схема радиометра:

1, 2—плоские зеркала; 3, 4—сферические зеркала системы Кассегрена; 5—плоское зеркало; 6—приемник излучения; 7—фототранзистор; 8—калибровочная кювета; МО—механический обтюратор; КР—гелиевый криостат с приемником излучения; ПУНЧ—предварительный усилитель низкой частоты; УНЧ—усилитель низкой частоты; СД—синхронный детектор; УПТ—усилитель постоянного тока; УОН—усилитель опорного напряжения; Р—регистратор.

В качестве регистратора (Р) выходного сигнала используется шлейфовый осциллограф типа К 12-21 (скорость лентопротяжки  $3 \text{ мм} \times \text{сек}^{-1}$ ). Для обеспечения возможности приема излучения в пределах углов  $\pm 45^\circ$  к горизонту плоское зеркало (1) совершает качания (сканирует) вокруг горизонтальной оси в пределах углов  $\pm 22,5^\circ$  с периодом 2 мин. В крайнем верхнем положении зеркала (1) в поле зрения радиометра попадает полиэтиленовая кювета (8), заполненная водой, температура которой регистрируется во время эксперимента с помощью терморезистора ММТ-1. Кювета служит для относительной калибровки интенсивности излучения. Разработанный для аэростатного радиометра гелиевый криостат не требует вспомогательного азотного охлаждения и обеспечивает охлаждение приемника в течение 12 часов в рабочих условиях. Номинальный объем гелиевой ванны криостата около 2,8 л. Тепловая изоляция обеспечивается высоким вакуумом и одним радиационным экраном. Отвод испаряющегося гелия в атмосферу производится через специальный клапан, постоянно поддерживающий давление над жидким гелием на уровне 760 мм рт. ст., что соответствует температуре хладоагента  $4,2^\circ\text{K}$ .

Рама, на которой укреплен радиометр, помещена в пенопластовый контейнер, имеющий окно, которое открывается перед началом эксперимента.

После подъема аэростата на заданную высоту, по радиокоманде с Земли открывается крышка контейнера и включается аппаратура. В конце каждого цикла сканирования вход УНЧ замыкается, чем осуществляется контроль постоянства нулевой линии записи выходного сигнала.

Проведению эксперимента предшествовала наладка и измерение параметров радиометра в лабораторных условиях. Отбор приемников с максимальной чувствительностью, а также подбор нувисторных ламп позволили обеспечить удовлетворительную чувствительность и стабиль-

ность работы радиометра. Была разработана и испытана в вакууме конструкция обтюратора, обеспечивающая малые (не более 5%) изменения частоты модуляции в условиях разреженной атмосферы. Юстировка оптической системы производилась с помощью отфильтрованного излучения ртутной лампы. Измеренный полный угол поля зрения (диаграмма направленности) радиометра составляет  $6^\circ$ . Регулировка коэффициента усиления и положения нулевой линии выходного регистратора, а также оценка чувствительности радиометра производились помещением в его поле зрения кювет с водой, кипящей или нагретой до комнатной температуры, и с жидким азотом. Флуктуационная чувствительность радиометра при  $\tau = 1$  сек оказалась не хуже  $2^\circ\text{K}$ .

Полоса пропускания радиометра определялась с помощью вакуумного спектрометра далекого ИК диапазона путем замещения оптико-

акустического приемника (ОАП) измеряемым радиометром. Спектральная характеристика чувствительности радиометра  $S$  приведена на рис. 2. С учетом спадания спектральной плотности теплового излучения атмосферы к длинным волнам и на основании приведенной выше спектральной характеристики чувствительности радиометра можно сделать вывод, что основной вклад в принимаемый радиометром сигнал вносит тепловое излучение в интервале  $0,5-2$  м.м.

Особенность работы на высотном аэростате потребовала проведения настройки, проверки и калибровки радиометра непосредственно перед полетом. После установки криостата на раме контейнера проверялись юстировка оптической системы по

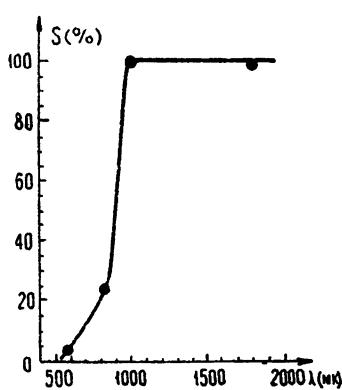
Рис. 2. Спектральная характеристика чувствительности радиометра  $S$ .

удаленному источнику света и затем производилась абсолютная калибровка радиометра по кювете с кипящей водой и излучению при температуре окружающего воздуха. После закрывания крышки контейнер отправлялся на стартовую позицию.

Было произведено два полета. Первый происходил утром 27 июня 1968 г. Над местом старта стояла ясная погода, но в соседних районах мощность кучевой облачности достигала 8—10 баллов, а местами был туман. Радиометр, включенный в 10 час 05 мин по местному времени, продолжал работать в течение 83 мин. Полет происходил на высоте 35 км. После окончания программы контейнер с радиометром был отделен и благополучно парашютирован. Второй полет был произведен 17 июля 1968 г. При этом метеорологическая обстановка в районе полета характеризовалась облачностью различной мощности: от перистой 2-балльной до многослойной 10-балльной с дождем. Особенность этого полета состояла в том, что эксперимент был начат ночью в 2 час 25 мин по местному времени и продолжался в течение 86 мин.

В 3 час 30 мин на высоте полета начался восход Солнца, так что в последующие 15—20 мин радиометр принимал излучение в условиях разогрева атмосферы Солнцем. В обоих полетах аппаратура работала хорошо и после приземления была в работоспособном состоянии.

При обсуждении результатов двух серий измерений необходимо иметь в виду, что на высоте, где производились измерения (35 км), линия визирования видимого горизонта составляла угол с надиром  $\approx 84^\circ$ . При меньших углах  $\alpha$  линия визирования оказывалась направ-



ленной на поверхность земли, а при больших углах  $\alpha$  (в пренебрежении рефракцией) она проходила сквозь слои атмосферы.

При  $\alpha > 105^\circ$  в поле зрения радиометра попадало излучение калибровочной кюветы. Полученные в обоих полетах повторяющиеся записи излучения при изменяющихся углах  $\alpha$  были усреднены. С учетом данных калибровки (при этом уровень интенсивности излучения, приходящего с углов  $\alpha > 97^\circ$ , принимался за нулевой) были получены усредненные зависимости яркостной температуры  $T_y(\alpha)$  (рис. 3 и 4)\*.

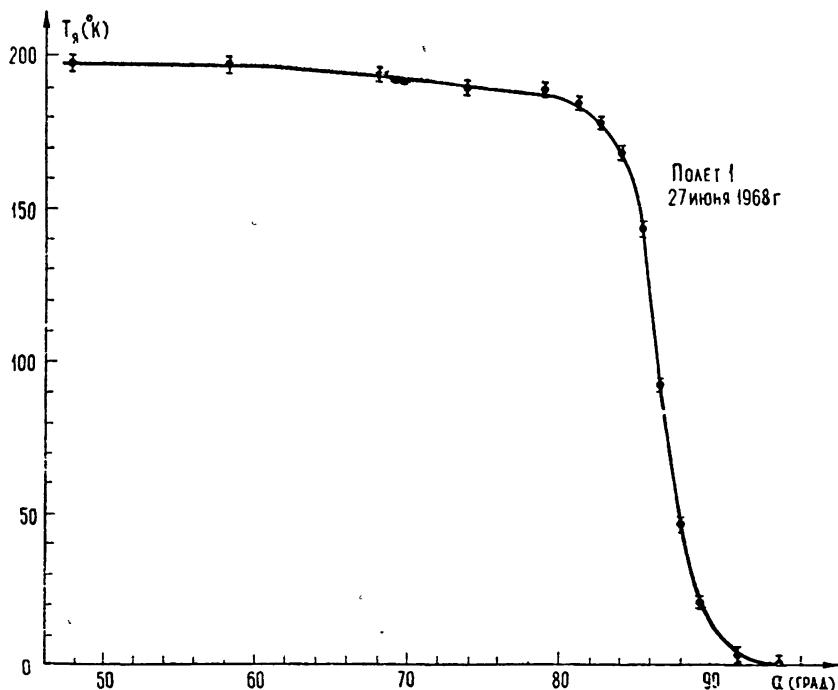


Рис. 3. Усредненная зависимость яркостной температуры  $T_y$  от угла  $\alpha$ , полученная в полете 27 июня 1968 г.

Имеет место вполне отчетливый контраст вблизи от углов  $\alpha = 90^\circ$ . При минимальных углах  $\alpha \approx 50^\circ$  в дневное время  $T_y = 200 \pm 2^\circ\text{K}$ , в преддроссветное время  $T_y = 160 \pm 4^\circ\text{K}$ . Здесь указаны случайные ошибки, полученные при усреднении яркостных температур для угла  $\alpha \approx 50^\circ$ . Кроме того, возможна систематическая ошибка, обусловленная засветкой объектива радиометра при больших углах  $\alpha$ . Эта засветка, вызванная внешним рассеянным излучением, должна сместить нулевой уровень, как мы полагаем, на 10—15% от истинного. Эта величина и определяет окончательную точность измерения яркостных температур в первом полете. Во втором полете, помимо этого, на точность измерений влияют ошибки при расшифровке записей, поскольку чувствительность радиометра в этом полете была загрублена и предполетная абсолютная калибровка по горячей воде не позволяла точно оценить полученные яркостные температуры. Эти два обстоятельства снижают точность измерений яркостных температур во втором полете и, как мы полагаем, увеличивают ошибку измерения до 30%.

\* Яркостная температура  $T_y(\alpha)$ , разумеется, сглажена диаграммой направленности радиометра.

Зависимости  $T_y(\alpha)$ , полученные в дневное и ночные времена, оказываются монотонными. Лишь на записях, сделанных во время рассвета вблизи от  $\alpha = 95^\circ$  появляется небольшой ( $5-10^\circ\text{K}$ ) выброс яркостной температуры. По данным контроля азимутального положения контейнера, имевшимся для дневного полета, известно, что оптическая ось радиометра медленно (со скоростью  $6^\circ$  за 1 мин) поворачивалась во-

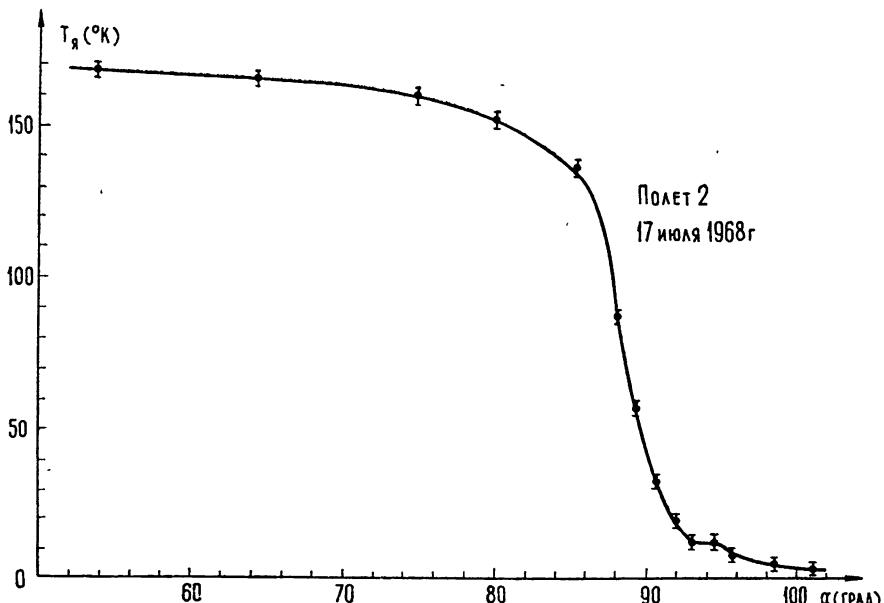


Рис. 4. Усредненная зависимость яркостной температуры  $T_y$  от угла  $\alpha$ , полученная в полете 17 июля 1968 г.

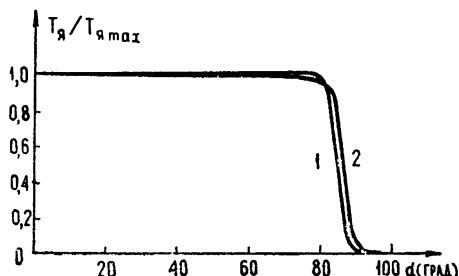
круг вертикальной оси. Таким образом, наряду со сканированием по углу  $\alpha$  имело место медленное сканирование по азимуту. Сопоставление между собой кривых сканирования по  $\alpha$  полученных 27 июня, показывает отсутствие систематических изменений формы кривых, выходящих за пределы случайных ошибок измерений. Это дает основание считать субмиллиметровое излучение атмосферы Земли в значительной степени изотропным по азимуту. Хотя данные о характере азимутальных движений радиометра во время второго полета (в ночные времена) отсутствуют, нет оснований считать, что азимут оси радиометра оставался неизменным. Так как и в этом полете отсутствуют заметные изменения от кривой к кривой (за исключением отмеченных выше выбросов), то можно полагать, что и в ночные времена имеет место изотропия излучения по азимуту.

Полученные в экспериментах кривые углового распределения яркостной температуры сравнивались с рассчитанными на основе грубой модели атмосферы. В этой модели сферическая слоисто-симметричная атмосфера разбивалась на небольшое число слоев, в каждом из которых коэффициент поглощения и температура принимались постоянными. Температура в каждом слое бралась по усредненным значениям нормальной атмосферы [6], а коэффициенты поглощения, усредненные в полосе 0,5—2 мм, принимались равными значениям, найденным путем интерполяции между соответствующими величинами поглощения, полученными на основании работ [4, 5] для уровня моря и высот 10 и 20 км, а также экстраполяцией к высотам в интервале 30—35 км.

Так как в исследуемом интервале длин волн основной вклад в излучение атмосферы вносит водяной пар, влиянием кислорода мы пренебрегли. Было учтено также, что данные о поглощении в водяном паре [4, 5] занижены в 1,5—2 раза. Отсутствие абсолютной калибровки в условиях полета и недостаточная чувствительность радиометра не позволяли также надежно измерить интенсивность излучения при углах  $\alpha > 97^\circ$ . Уровень сигнала при таких углах, как указывалось выше, принимался за нулевой. В связи с этим мы не можем пока оценить вклад излучений слоев атмосферы, расположенных выше уровня, с которого велись измерения. Соответственно при расчетах излучение этих слоев не учитывалось. Затем решались соответствующие уравнения переноса для сферически-слоистой атмосферы.

Результаты расчетов ожидаемых изменений яркостной температуры атмосферы с углом  $\alpha$  с учетом конечной ширины диаграммы направленности радиометра приведены на рис. 5. Относительное измене-

Рис. 5. Сравнение кривой  $T_y(\alpha)/T_{y\max}$ , полученной из расчета сферически-слоистой модели атмосферы (1), и соответствующей кривой, полученной в полете 27 июня 1968 г. (2).



ние яркостной температуры  $T_y(\alpha)/T_{y\max}$  хорошо совпадает с результатами измерений. Вместе с тем абсолютное значение  $T_y$ , рассчитанное для углов  $\alpha < 50^\circ$  ( $T_y = 269^\circ\text{K}$ ), оказывается выше измеренного. Это расхождение не может быть объяснено отмеченным выше пренебрежением поглощения в кислороде. Для совпадения с наблюдавшейся яркостной температурой необходимо предположить наличие сильно поглощающего во всем измеренном интервале длин волн слоя на высотах 10—30 км, однако такое предположение маловероятно. Дальнейшие более тщательные измерения и детальные расчеты, по-видимому, позволят улучшить согласие теории с экспериментом.

В разработке аппаратуры и проведении экспериментов принимали участие В. И. Дубинкин, А. А. Шибаров, которым авторы выражают свою признательность.

Авторы считают также своим приятным долгом выразить благодарность М. Р. Шамилеву, Ф. А. Лаврухину и В. Н. Мурзину за внимание и помощь в проведении эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. J. Woolf, W. F. Hoffmann, G. L. Frederick, F. G. Low, Science, 157, 187 (1967).
2. J. Gay, J. Lequeux, J. P. Verdet, P. Tugon-Lacarrigue, M. Bardet, J. Roucher, Y. Zeau, Astroph. Lett., 2, 169 (1968).
3. E. H. Putley, Appl. Opt., 4, 649 (1965).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 4, 666 (1963).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 6, № 4, 674 (1963).
6. К. Я. Кондратьев, Лучистый теплообмен в атмосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1956.

MEASUREMENT OF THE BRIGHTNESS TEMPERATURE OF THE EARTH'S  
ATMOSPHERE RADIATION IN SUBMILLIMETER RANGE FROM  
THE HEIGHT OF 35 km

*V. I. Lapshin, A. E. Salomonovich, S. V. Solomonov, V. F. Troitskii,  
A. B. Fradkov, A. S. Khaykin*

The results of the first measurement of the brightness temperature of the Earth's atmosphere radiation made from 35 km height in submillimeter range (0.5—2 mm) and description of the radiometer are given. The angular distributions of the brightness temperature in the vertical plane are obtained. The character of distribution and the relatively low brightness temperature show that the main contribution to the submillimeter radiation is made by the upper relatively cold atmospheric layers.

---

УДК 621.378.32

## О ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ $oe-e$

*C. P. Валаева, A. P. Сухоруков*

В работе исследована угловая структура дальнего поля и мощность излучения второй гармоники, генерируемой в одноосном квадратичном кристалле при сложении обыкновенной и необыкновенной волн основной частоты. Если пучки накачки расходятся на длине кристалла  $L$ , то происходит насыщение мощности гармоники, причем величина мощности насыщения быстро уменьшается с увеличением расходимости лазерного пучка по сравнению с дифракционной расходимостью.

Максимальная мощность гармоники достигается при фокусировке лазерного пучка цилиндрической линзой на переднюю грааль нелинейного кристалла таким образом, чтобы радиус пучка в главной оптической плоскости был равен  $a_x = \beta L$ , а в перпендикулярной плоскости —  $a_y = \sqrt{L/k}$ . Угловая структура гармоники, генерируемой расходящимся пучком, за счет двумерных взаимодействий становится существенно несимметричной.

Для эффективного преобразования оптического излучения во вторую гармонику используются, как известно, синхронные взаимодействия волн различной поляризации в анизотропных кристаллах с квадратичной поляризуемостью. В настоящее время наиболее детально изучены особенности процесса генерации при взаимодействии  $\gamma_0(\omega) + \gamma_0(\omega) = \gamma_e(2\omega)$  (при взаимодействии  $oo-e$ ). В частности, весьма подробно обсуждены апертурные эффекты, связанные с влиянием двулучепреломления среды на генерацию гармоники ограниченными расходящимися пучками (см., например, [1-3]). Взаимодействие пучков при синхронизме  $oe-o$  обсуждалось ранее при анализе процесса генерации разностной частоты [4]. Для синхронного взаимодействия типа  $oe-e$  подобные исследования почти не проводились\*, хотя в этом случае апертурные эффекты проявляются весьма своеобразно.

В настоящей работе проведены подробные исследования угловой структуры дальнего поля и мощности второй гармоники, генерируемой двумя пучками разной поляризации (обыкновенной и необыкновенной). Из полученных результатов особо следует выделить два обстоятельства, отличающих данный тип взаимодействия,  $oe-e$ , от хорошо известного  $oo-e$ . Во-первых, из-за двулучепреломления обыкновенный и необыкновенный пучки основной частоты разносятся в пространстве на длине  $L_3 \approx d/\beta$  (где  $d$  — диаметр пучка,  $\beta$  — угол двулучепреломления), что приводит к насыщению мощности гармоники в зависимости от длины кристалла при  $L > L_3$ . При этом оказывается, что величина мощности быстро уменьшается с увеличением расходимости пучка  $\alpha$  по сравнению с дифракционной расходимостью  $\alpha_d = 2/ka$  ( $k$  — волновое число). Во-вторых, при генерации гармоники расходящимися пучками происходит пересечение элементарных лучей, принадлежащих к разным пучкам; появляются двумерные взаимодействия и угловая картина гармоники становится асимметричной.

\* В очень общей интегральной форме задача о генерации гармоники при  $oe-e$  взаимодействии сформулирована в [5].

Указанные свойства справедливы для данного типа взаимодействия  $oe - e$  при любом преобразовании частоты — как при генерации суммарной частоты, так и при генерации разностной (ср. с [4]).

Задача о генерации гармоники рассматривается нами в приближении заданного поля; в качестве нелинейной среды взят прозрачный однородный кристалл с квадратичной поляризуемостью. Расчеты поля гармоники проводятся в квазиоптическом приближении [3].

### 1. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИКИ СЛАБОРАСХОДЯЩИМИСЯ ПУЧКАМИ

Пусть на вход нелинейной среды ( $z = 0$ , ось  $Z$  направлена вдоль одномерного синхронизма,  $k_{1,o} + k_{1,e} = k_{2,e}$ ) падает пучок с гауссовым распределением амплитуды:

$$A_1(x, y, 0) = E_1 \exp \left[ -\left( \frac{1}{a_x^2} + \frac{i k_1}{2 R_x} \right) x^2 - \left( \frac{1}{a_y^2} + \frac{i k_1}{2 R_y} \right) y^2 \right]. \quad (1)$$

Здесь  $a_{x,y}$  — радиусы пучков вдоль осей  $X$  и  $Y$ ,  $R_{x,y}$  — расстояния до фазовых центров,  $\alpha = a/R$  — расходимость пучка. Параллельному пучку соответствует  $\alpha = 0$ ,  $R = \infty$ , сферическому фронту волны —  $a_x = a_y$  и т. д.

В анизотропной среде основной пучок (1) разбивается на два: обыкновенный и необыкновенный, причем необыкновенный пучок идет под углом  $\beta$  по отношению к первому (эффект двулучепреломления). В результате взаимодействия этих пучков на квадратичной нелинейности в среде генерируется необыкновенная волна второй гармоники. Амплитуда второй гармоники при  $z = 0$  равна нулю:

$$A_{2,e}(0) = 0. \quad (2)$$

Если длина кристалла  $L \ll R$ ,  $l_d$  ( $l_d = ka^2/2$  — дифракционная длина пучка), то сечение основных пучков практически не меняется, и для нахождения поля гармоники можно воспользоваться уравнениями геометрической оптики: для амплитуды обыкновенной и необыкновенной волн накачки

$$\frac{\partial A_{1,o}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_{1,e}}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_{1,e}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

а для амплитуды необыкновенной волны гармоники

$$\frac{\partial A_{2,e}}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial A_{2,e}}{\partial x} = i\gamma A_{1,o} A_{1,e}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — коэффициент нелинейности.

Решение системы уравнений (3), (4) с граничными условиями (1), (2) приводит к следующему выражению для интенсивности углового спектра гармоники (далее поле гармоники):

$$I_2(\Theta, \varphi, L) = \frac{\gamma^2 P^2 L^2 a_{x,o} a_{y,o}}{16 c^2 n^2 a_{x,o}^2} \exp \left[ -4 \left( \frac{\Theta^2}{a_{x,o}^2} + \frac{\varphi^2}{a_{y,o}^2} \right) \right] \Phi_\beta(\Theta). \quad (5)$$

Здесь  $\Theta$  — угол наблюдения гармоники в плоскости главной оптической оси кристалла (плоскость  $XZ$ ),  $\varphi$  — угол наблюдения в перпендикулярной плоскости,  $a_{x,o}^2 + a_{y,o}^2 = a_{x,o}^2$  — полная расходимость пучка в плоскости  $XZ$ , а  $a_{y,o}^2$  — в плоскости  $YZ$ ,  $P$  — мощность волны накачки.

Для простоты выкладок считаем, что  $k_{1,o} = k_{1,e} = k_1$ . Дисперсия угла анизотропии мала, поэтому полагаем  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Функция  $\Phi_\beta$

описывает влияние двулучепреломления среды на генерацию гармоники, т. е. апертурные эффекты, и имеет вид

$$\Phi_\beta(\Theta) = \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{L^2 \beta^2 m}{a_x^2} z^2 - ik_1 \Theta \beta L z\right) dz \right|^2, \quad (6)$$

где

$$m = \left(1 + \frac{i a_x}{a_{d,x}}\right).$$

1.1. *Диафрагменный апертурный эффект.* В случае генерации гармоники параллельным пучком ( $\alpha = 0$ ,  $R = \infty$ ,  $m = 1$ )

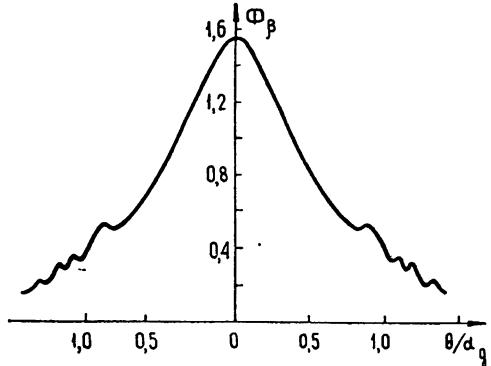
$$\Phi_\beta(\Theta) = \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{L^2 \beta^2}{a_x^2} z^2 - ik_1 \Theta \beta L z\right) dz \right|^2. \quad (7)$$

На малых длинах  $L \ll L_\beta$  обычновенный и необыкновенный пучки основной частоты не успевают пространственно разнести. При этом  $\Phi_\beta = 1$ , и угловая структура гармоники определяется основным излучением лазера, т. е. остается гауссовой. Если длина кристалла велика, так что  $L \gg L_\beta$ , то генерация гармоники происходит в ограниченном объеме на длине  $L_\beta$ . В этом случае асимптотическое значение апертурной функции следующее:

$$\Phi_\beta(\Theta) = \exp\left(-\frac{4\Theta^2}{a_{d,x}^2}\right) \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{4\Theta^2}{a_{d,x}^2} \left[ F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2\Theta^2}{a_{d,x}^2}\right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Здесь  $F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция. График функции  $\Phi_\beta(\Theta)$  изображен на рис. 1. Кривая симметрична. Максимум функции совпадает с направлением точного синхронизма. Зависимость апертурной функции от  $\Theta$  выражена слабо. Угловая ширина равна  $\Delta\Theta \simeq a_{d,x}$ .

Рис. 1. График апертурной функции при генерации гармоники параллельным пучком в случае, когда обычновенный и необыкновенный пучкинакачки расходятся на длине кристалла.



1.2. *Угловой апертурный эффект.* Для выяснения влияния собственно расходимости лазерного пучка полагаем, что длина кристалла  $L \ll L_\beta$ . В этом случае диафрагменный апертурный эффект проявляться не будет.

Апертурная функция (6) запишется через интегралы Френеля  $S$  и  $C$  следующим образом:

$$\Phi_\beta(\Theta) = \frac{1}{\eta^2} \{ [C(\eta + \mu) - C(\mu)]^2 + [S(\eta + \mu) - S(\mu)]^2 \}. \quad (9)$$

Здесь  $\eta = (\pi/2) \sqrt{\alpha_x \alpha_{d,x}} / \sqrt{2} \Theta_c$ ,  $\mu = \Theta/2 \sqrt{\alpha_x \alpha_{d,x}}$ ,  $\Theta_c = \pi/k_0 \beta L$  — угловая ширина синхронизма, встречающаяся и при взаимодействии  $oo-e$  [1-3].

График функции (9) изображен на рис. 2. Картинка смещена в область отрицательных углов, т. е. ближе к оптической оси кристалла. С увеличением расходимости пучка кривая уширивается и все более сме-

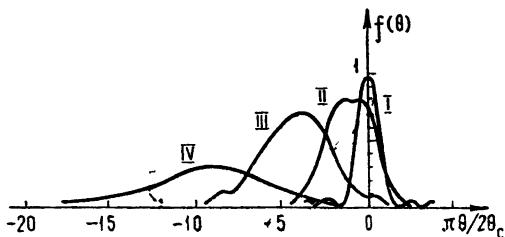


Рис. 2. Графики апертурной функции при различных значениях параметра  $\eta = (\pi/2) \sqrt{\alpha_x \alpha_{d,x}} / \sqrt{2} \Theta_c$ ; I —  $\eta=0$  (генерация в параллельных пучках), II —  $\eta=1$ , III —  $\eta=2$ , IV —  $\eta=3$ . Кривые имеют ось симметрии  $\Theta = -\Theta_c(2/\pi)\eta^2$ .

шаетсяся. Кривая имеет ось симметрии  $\Theta = -\Theta_c(2/\pi)\eta^2$ . Смещение углового спектра гармоники объясняется тем, что вследствие пересечения лучей обычного и необыкновенного расходящихся пучков имеют место двумерные взаимодействия. Напомним, что при синхронизме  $oo-e$  двумерные взаимодействия проявляются лишь в сфокусированных пучках [1-3].

1.3. *Мощность второй гармоники.* В кристалле с  $L \gg L_\beta$  гармоника генерируется в ограниченном объеме и происходит насыщение ее мощности. Величина мощности насыщения гармоники, генерируемой расходящимся пучком, определяется выражением

$$P_{2,n} = \frac{\gamma^2 P^2 a_x}{8 c n \beta^2 a_y} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left( \pi - \arctg \frac{\sqrt{\xi}}{\tau} \right), \quad (10)$$

где

$$\xi = 4 \left( \frac{\alpha_{x,0}^2}{\alpha_{d,x}^2} + 1 \right) + \frac{\alpha_x}{\alpha_{d,x}}, \quad \tau = \frac{\alpha_{x,o}^2}{\alpha_{d,x}^2}.$$

При генерации гармоники параллельным пучком ( $\alpha = 0$ )

$$P_{2,n} = \frac{0,1 \gamma^2 P^2 a_x}{c n \beta^2 a_y}. \quad (11)$$

Если расходимость пучка увеличивать по сравнению с дифракционной  $\alpha_{d,x}$ , то величина мощности будет быстро уменьшаться обратно пропорционально  $\alpha_x$ . Зависимость мощности насыщения от угла расходимости показана на рис. 3. Таким образом, в режиме  $L \approx L_\beta$  мощность гармоники очень сильно зависит от расходимости лазерного пучка.

С увеличением  $\alpha_x$  апертурная длина  $L_\beta$  увеличивается, так что при  $L_\beta \gg L$  насыщения мощности не происходит. В этом случае мощность гармоники (при  $\alpha = 0$ )

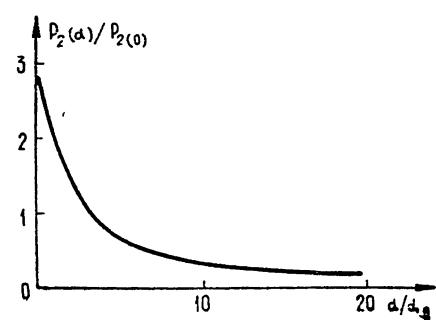


Рис. 3. Зависимость мощности насыщения второй гармоники от угла расходимости лазерного пучка.

$$P_2(L) = \frac{\gamma^2 P^2 L^2}{32 c n a_x a_y}. \quad (12)$$

Сравнение формул (11) и (12) показывает, что существует оптимальное значение радиуса  $a_x$ . Вычислено, что при генерации в параллельных пучках  $P_2$  достигает своего максимального значения при  $a_x = L\beta$ , равного

$$P_{2 \max} = \frac{0,02 \gamma^2 P^2 L}{c n \beta a_y}. \quad (13)$$

Как следует из (13),  $P_2$  можно увеличить, если уменьшать  $a_y$ , например, фокусируя пучок. Предел на уменьшение  $a_y$  определяется дифракционными эффектами в фокусе.

## 2. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИКИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Для расчета дифракционных эффектов воспользуемся квазиоптическим приближением, добавляя в правые части уравнений (3) и (4) члены вида  $(1/2ik)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)$ , описывающие поперечную диффузию лучевых амплитуд. Уравнения (3), (4) переходят, таким образом, в уравнения параболического типа (см. [6]), решая которые совместно с условиями (1), (2), на границе среды получаем следующее выражение для полной мощности второй гармоники:

$$P_2(L) = \frac{\gamma^2 P^2 a_x a_y k_1^2}{32 c n} \int_0^L \frac{\exp[-(b+d)z^2]}{[(l_{d,x} - iz)(l_{d,y} - iz)]^{1/2}} \times \\ \times dz \int_0^L \frac{\exp[-(g+d)\tau^2]}{[(l_{d,x} + i\tau)(l_{d,y} + i\tau)]^{1/2}} \exp(2dz\tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$b = \frac{\beta^2 k_1}{4(l_{d,x} - iz)}, \quad d = \frac{\beta^2 k_1}{8l_{d,x}}, \quad g = \frac{3^2 k_1}{4(l_{d,x} + i\tau)}.$$

Исследование общего случая трехчастотного взаимодействия ( $k_{1,o} \neq k_{1,e}$ ) показало, что пренебрегать различием волновых векторов  $k_{1,o}$ ,  $k_{1,e}$  нельзя, если  $|k_{1,o} - k_{1,e}| \approx k_1$ . следовательно, в нашем случае генерации гармоники можно положить  $k_{1,o} = k_{1,e} = k_1$ , что и сделано в (14). Если пренебречь апертурными эффектами, то

$$P_2(L) = \frac{\gamma^2 P^2 k_1 a_y}{16 c n a_x} [(l_{d,y}^2 + L^2)^{1/2} - l_{d,y}^{1/2}(l_{d,y} + iL)^{1/2} - \\ - l_{d,y}^{1/2}(l_{d,y} - iL)^{1/2} + l_{d,y}]. \quad (15)$$

Анализируя это выражение, получаем, что полная мощность гармоники достигает своего максимального значения при  $a_y = \sqrt{L/k}$  и равна

$$P_{2 \max} = \frac{0,02 \gamma^2 P^2 \sqrt{k} L}{c n \beta}. \quad (16)$$

Таким образом, максимальную мощность гармоники при взаимодействии  $oe - e$  можно получить, фокусируя пучок на переднюю грань нелинейного кристалла так, что  $a_x = \beta L$ , а  $a_y = \sqrt{L/k}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Kleinman, Phys. Rev., **128**, 1761 (1962).
2. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 550 (1966).
3. А. П. Сухоруков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 4, 765 (1966).
4. Г. В. Венкин, Б. В. Зубов, А. П. Сухоруков, в сб. Труды II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, 1968, стр. 471.
5. А. Г. Хаткевич, Б. В. Бокутъ, в сб. Труды II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, 1968, стр. 381.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
21 июля 1969 г.

GENERATION OF THE SECOND OPTICAL HARMONIC AT *oe-e* INTERACTION

*S. R. Valaeva, A. P. Sukhorukov*

The authors investigated the angular structure of the far field and the radiation power of the second harmonic generated in uniaxial quadratic crystal in adding the ordinary and extra-ordinary waves of the fundamental frequency. If the pumping beams are diverged at the crystal length  $L$ , the power of the harmonic is saturated, the value of the saturation power being rapidly decreased with increasing the divergence of the laser beam as compared with the diffraction divergence.

The maximum harmonic power is achieved in focusing the laser beam by a cylindrical lens on the front face of the nonlinear crystal in such a way that the radius of the beam in the main optical plane was equal to  $a_x = \beta L$  and in the perpendicular plane it was equal to  $-a_y = \sqrt{L/k}$ . The angular structure of the harmonic generated by diverging beams at the expense of two-dimensional interaction becomes considerably asymmetrical.

УДК 538.57

## КОРРЕЛЯЦИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ВЗВОЛНОВАННОЙ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Э. П. Гулин

В приближении метода малых возмущений рассматривается задача о рассеянии скалярного волнового поля точечного источника гравитационными волнами, бегущими по поверхности водного бассейна. Получено общее интегральное соотношение, описывающее совместную частотно-пространственно-временную корреляцию рассеянного поля. Даётся оценка характера убывания корреляции при разнесении приемников в пространстве, во времени и по частоте для случая малых углов рассеяния.

Одной из наиболее общих и пока мало изученных характеристик волнового поля в средах со случайно изменяющимися параметрами является его пространственно-временная корреляционная функция. Обычно ограничиваются расчетом пространственной корреляции, для чего достаточно задать лишь характерные пространственные масштабы случайных параметров. Для расчета пространственно-временных корреляционных связей необходимо задать закон изменения случайных параметров, что далеко не всегда удается сделать из-за недостаточного объема сведений о свойствах реальных волновых каналов. Одной из представляющих для практики интерес ситуаций, когда пространственно-временные характеристики параметров канала известны или легко могут быть получены, является рассеяние звука или радиоволн на взволнованной водной поверхности. Рассмотрение этого случая и будет предметом настоящего сообщения.

Поскольку в ряде практических приложений, например, при построении систем разнесенного приема нужно знать также характер корреляции поля при «частотном разнесении», будем вести расчет для совместной частотно-пространственно-временной (ЧПВ) корреляции рассеянного поля. Отметим, что предлагаемые расчеты представляют собой обобщение результатов работ [1-3] на случай, когда наряду с разнесением приемников имеют место временной и частотный сдвиги.

1. В первом приближении метода малых возмущений поле скалярной волны, рассеянной мягкой неровной границей, описывается выражением

$$P(\mathbf{R}, t, \omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial P_0}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ikp}}{p} \right) F(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$ ,  $\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$ ,  $p = |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ ,  $P_0$  — волновое поле в отсутствие неровностей,  $F(\mathbf{r}, t)$  — возвышение поверхности. Приведенное выражение справедливо лишь в квазистатическом приближении, когда частота колебаний уровня поверхности значительно меньше частоты падающего излучения.

Для расчета совместной ЧПВ корреляционной функции рассеянного поля

$$\Gamma_P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \omega_1, \omega_2, t_1, t_2) = \langle P(\mathbf{R}_1, \omega_1, t_1) P^*(\mathbf{R}_2, \omega_2, t_2) \rangle$$

нужно задать пространственно-временную корреляционную функцию возвышений поверхности. Пользуясь методом, изложенным в работе [4], для гравитационных волн на поверхности бассейна глубины  $h$  не-трудно получить

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{r}_1, t) F(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle &= \langle F^2 \rangle K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau) = \langle F^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \times \\ &\quad \times \cos [\Omega(\nu) \tau - \nu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d\nu, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\nu = \{\sigma, s\}$ ,  $\nu = \sqrt{\sigma^2 + s^2}$ ,  $S(\nu)$  — пространственный спектр возвышений поверхности,  $\Omega(\nu) = \sqrt{g \nu \operatorname{th}(\nu h)}$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести. В случае глубокого бассейна, когда основная часть энергии волн сосредоточена в области  $\nu h \gg 1$ ,  $\Omega(\nu) = \sqrt{g \nu}$ ; в случае мелкого бассейна при условии  $\nu_{\max} h \ll 1$  получаем  $\Omega(\nu) = \sqrt{gh} \nu$ . В частном случае двумерной волны, распространяющейся под углом  $\alpha$  к оси  $x$ ,

$$K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos [\Omega(\sigma) \tau - \sigma(u_1 - u_2)] d\sigma, \quad (3)$$

где

$$u_{1,2} = x_{1,2} \cos \alpha + y_{1,2} \sin \alpha.$$

Предположим, что поверхность облучается точечным источником с координатами  $(0, 0, z)$ . Подставляя (2) в (1) и пользуясь разложением сферических волн на плоские, приходим после несложных преобразований к интегральному выражению; которое дает решение задачи в наиболее общем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_P = \frac{\exp(-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2)}{2\pi^2} \langle F^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) &[e^{i\Omega(\nu)\tau} I_1(\nu) I_2^*(\nu) + \\ &+ e^{-i\Omega(\nu)\tau} I_3(\nu) I_4^*(\nu)] d\nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $I_1, I_2^*, I_3, I_4^*$  — интегралы вида

$$I_{\mp} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i[(\mathbf{x} \mp \mathbf{v}) \cdot \mathbf{R} + z \sqrt{k^2 - |\mathbf{x}|^2} + Z \sqrt{k^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{v}|^2}] \} d\mathbf{x}, \quad (5)$$

причем  $I_1 = I_-$ ,  $I_3 = I_+$  при  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$ , а  $I_2^* = I_+^*$ ,  $I_4^* = I_-^*$  при  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2$ ; символ  $*$  введен для обозначения комплексно-сопряженной величины,  $\mathbf{x} = \{x_x, x_y\}$ . Проинтегрировать выражение (4) во всей области изменения параметров не удается. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая малых углов рассеяния, когда участки поверхности, ответственные за рассеяние, лежат в достаточно малой окрестности точки зеркального отражения от средней плоскости  $z = 0$ .

2. Предположим, что пространственный спектр волнения существенно отличен от нуля в некоторой области  $[\nu_1, \nu_2]$ . Пользуясь методом стационарной фазы для вычисления интеграла (5) и удерживая квадратичные по  $\sigma, s$  члены, при выполнении условий

$$\frac{\nu_2}{k \sin^2 \Psi} \ll 1, \quad k(z + Z) \sin \Psi \gg 1, \quad (6)$$

где  $\Psi = \operatorname{arctg}(z + Z)/\sqrt{X^2 + Y^2}$ , получаем

$$\Gamma_P = \frac{\Phi_1 \Phi_2 \sin \Psi_1 \sin \Psi_2}{(z + Z_1)(z + Z_2)} K_P.$$

Здесь

$$K_P = \exp[i(f_1 - f_2)] \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) \exp \left\{ i \left[ \frac{\sigma^2}{4} \left( \frac{1}{p_{x_1}} - \frac{1}{p_{x_2}} \right) + \frac{s^2}{4} \left( \frac{1}{p_{y_1}} - \frac{1}{p_{y_2}} \right) + \frac{\sigma s}{2} \left( \frac{1}{p_{xy_2}} - \frac{1}{p_{xy_1}} \right) \right] \right\} \cos [\Omega(\nu) \tau - \nu \Delta \widetilde{R}] d\nu \left\{ 1 + O \left[ \frac{1}{k_{1,2}(z+Z_{1,2}) \sin \Psi_{1,2}} \right] \right\}, \quad (7)$$

$$\Phi = 2k \sin \Psi \sqrt{\langle F^2 \rangle}, \quad f = -\omega t + k(z+Z) \sin \Psi, \quad \Delta \widetilde{R} = \{ \Delta \widetilde{X}, \Delta \widetilde{Y} \},$$

$$\Delta \widetilde{X} = X_1 \frac{z}{z+Z_1} - X_2 \frac{z}{z+Z_2}, \quad \Delta \widetilde{Y} = Y_1 \frac{z}{z+Z_1} - Y_2 \frac{z}{z+Z_2},$$

$$p_x = \frac{k \sin^2 \Psi}{R_0(1 - \cos^2 \Psi \sin^2 \varphi)}, \quad p_y = \frac{k \sin^2 \Psi}{R_0(1 - \cos^2 \Psi \cos^2 \varphi)},$$

$$p_{xy} = \frac{k \sin^2 \Psi}{R_0 \cos^2 \Psi \sin \varphi \cos \varphi}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad R_0 = \frac{2zZ}{(z+Z) \sin \Psi}.$$

Индексы 1, 2 присвоены значениям параметров в «разнесенных» точках (имеется в виду разнесение в пятимерном пространстве  $\{x, y, z, t, \omega\}$ ).

В случае двумерного волнения выражение (7) принимает вид

$$K_P = 2 \exp[i(f_1 - f_2)] \int_0^\infty S(\sigma) \cos [\Omega(\sigma) \tau - \sigma |\Delta \widetilde{R}| \cos \vartheta_0] \times \times \exp \left[ i \frac{\sigma^2}{4} \left( \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \right) \right] d\sigma, \quad (8)$$

где

$$p = \frac{k \sin^2 \Psi}{R_0 [1 - \cos^2 \Psi \sin^2 (\alpha - \varphi)]}, \quad \vartheta_0 = \beta - \alpha, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{\Delta \widetilde{Y}}{\Delta \widetilde{X}}.$$

Если точки приема лежат в горизонтальной плоскости, то при разнесении вдоль направления распространения волн  $\vartheta_0 = 0$  и  $\pi$ , а при разнесении вдоль гребня  $-\vartheta_0 = \pm \pi/2$ . В дальнейшем мы не будем учитывать быстроосциллирующий фазовый множитель  $\exp[i(f_1 - f_2)]$ , т. е. перейдем к комплексным амплитудам рассеянного поля  $\widetilde{P}$ .

Сравнивая выражения (7) и (2) в отсутствие пространственного и частотного сдвигов, приходим к равенству  $K_P(\tau) = K(\tau)$ . Таким образом, временные корреляционные функции рассеянного поля и волнения, а значит и их частотные спектры, полностью совпадают. Заметим, что при рассеянии участком волнистой поверхности, расположенным в зоне Фраунгофера, в отличие от рассматриваемого случая наблюдается линейчатый спектр рассеянного поля [5-7]. Некоторое размытие линий обусловлено конечными размерами рассеивающей области и диссипативными процессами при распространении гравитационных волн.

При наличии пространственного разнесения связь между корреляционными функциями рассеянного поля и волнения становится более сложной. Но в области достаточно малых пространственных сдвигов,

когда можно пренебречь в (7) квадратичными членами разложения по  $s$ , они имеют одинаковый вид:

$$K_{\tilde{P}}(\Delta \mathbf{R}, \tau) = K(\Delta \tilde{\mathbf{R}}, \tau), \quad (9)$$

где

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \{X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2\}.$$

Равенство (9) нарушается на «хвостах» корреляционных функций, при разнесении приемников вдоль зеркального луча, а также в окрестности углов  $|\vartheta_0| \approx \pi/2$  (в случае, когда волнение близко к двумерному).

3. Остановимся подробнее на характере спада пространственно-временной корреляции рассеянного поля и на соотношении между временными и пространственными масштабами корреляции. Рассмотрим вначале случай двумерного волнения. Тогда в соответствии с формулой (9) существует однозначная связь между частотным спектром рассеянного поля  $G(\Omega)$  (или спектром волнения, поскольку они идентичны) и пространственным спектром неровностей

$$G(\Omega) = S[\sigma(\Omega)] \sigma'(\Omega), \quad (10)$$

где  $\sigma'(\Omega)$  — производная от функции, обратной  $\Omega = \Omega(\sigma)$ . При этом пространственно-временная корреляционная функция рассеянного поля полностью определяется частотным спектром (или временной автокорреляционной функцией) волнения:

$$K_{\tilde{P}}(\Delta \mathbf{R}, \tau) = 2 \int_0^{\infty} G(\Omega) \cos [\Omega \tau - \sigma(\Omega) |\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0] d\Omega. \quad (11)$$

Аналогичное выражение было получено в работе [8] для электромагнитного поля вертикального диполя вблизи идеально проводящей черновой границы. В случае мелкого бассейна, когда  $\sigma(\Omega) = \Omega/v$ , а  $v = \sqrt{gh}$ , будем иметь  $K_{\tilde{P}}(\Delta \mathbf{R}, \tau) = K(|\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0 - v\tau)$ . Отсюда следует, что при  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0 = v\tau$  сохраняется полная корреляция ( $K_{\tilde{P}} \equiv 1$ ), а интервалы корреляции связаны соотношением  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}|_0 \cos \vartheta_0 = v\tau_0$ , причем  $\tau_0 = a/v$ , где  $a$  — пространственный интервал корреляции возмущений поверхности вдоль направления распространения гравитационных волн.

В случае глубокого бассейна, когда  $\sigma(\Omega) = \Omega^2/g$ , вид пространственно-временной корреляционной функции зависит от ширины спектра  $G(\Omega)$ . Предположим, что волнение является квазигармоническим процессом, который описывается корреляционной функцией  $R(\tau) = R_1(\tau) \cos \Omega_0 \tau - R_2(\tau) \sin \Omega_0 \tau$ , где  $R_1(\tau)$  — четная, а  $R_2(\tau)$  — нечетная функции. Тогда спектр  $G(\Omega)$  будет существенно отличен от нуля лишь в некоторой полосе  $\Delta \Omega$  около средней частоты  $\Omega_0$ , причем  $\Delta \Omega / \Omega_0 \ll 1$ . В результате вычисления интеграла (10) мы получаем корреляционную функцию, осцилляционно спадающую с ростом  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}|$  и  $\tau$ . Интервалы корреляции оказываются связанными соотношением  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}|_0 \cos \vartheta_0 = v\tau_0/2$ . Максимумы и минимумы корреляции расположены соответственно при  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0 - v\tau = 2\pi m/\Omega_0$  и  $\pi(2m+1)/\Omega_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), но заметный уровень корреляции может наблюдаться лишь в достаточно малой окрестности прямой  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0 - v\tau/2 = 0$  на плоскости  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}|/\tau$ , а именно, при  $||\Delta \tilde{\mathbf{R}}| \cos \vartheta_0 - v\tau/2| < \tau_0$ . Быстрота спада огибающей корреляционных максимумов и минимумов вдоль этой прямой с ростом  $|\Delta \tilde{\mathbf{R}}|$  и  $\tau$ .

определяется некоторой функцией, зависящей от параметра  $b_\tau = -4|\Delta \widetilde{R}| \cos \vartheta_0 / v \tau_0 \Omega_0 \tau_0$ . При  $|b_\tau| \approx 1 \div 4$ , в зависимости от формы спектра  $G(\Omega)$ , уровень корреляции существенно уменьшается. Поскольку в наших расчетах  $\Omega_0 \tau_0 \gg 1$ , а  $|\Delta \widetilde{R}|_0 \cos \vartheta_0 \approx v \tau_0 / 2$ , заметная корреляция сохраняется и при  $\tau > \tau_0$ ,  $|\Delta \widetilde{R}| > |\Delta \widetilde{R}|_0$ . Сопоставляя результаты расчетов для мелкого и для глубокого бассейнов, мы приходим к заключению, что дисперсия волн приводит к спаду пространственно-временной корреляции рассеянного поля при достаточно больших пространственно-временных сдвигах, а также к сокращению пространственного интервала корреляции примерно в два раза по сравнению со случаем переноса волн без изменения формы.

В случае достаточно широкополосного волнения, когда ширина полосы  $\Delta\Omega$  сравнима со средней частотой, результаты расчетов сильно зависят от конкретного вида спектра  $G(\Omega)$ . Ограничимся грубыми качественными оценками, справедливыми для произвольной формы спектра. Согласно этим оценкам, уровень пространственно-временной корреляции существенно убывает при  $|\Delta \widetilde{R}|_1 \cos \vartheta_0 \approx (4 \div 16) g/\Delta\Omega^2 = g \tau_0^2/(1 \div 4)$ , а пространственный интервал корреляции приближенно равен  $|\Delta \widetilde{R}|_0 \approx \approx (1,2 \div 2) g/\Omega_0 \Delta\Omega \cos \vartheta_0$ . Поскольку при любой ширине полосы  $|\Delta \widetilde{R}|_1/|\Delta \widetilde{R}|_0 > 1$ , вторичные максимумы пространственно-временной корреляции будут иметь заметную величину и в области  $|\Delta \widetilde{R}| > |\Delta \widetilde{R}|_0$ . При этом быстрота спада пространственно-временной корреляции нарастает с ростом  $\Delta\Omega$ .

На убывание пространственно-временной корреляции поля оказывает влияние и деформация рассеивающей области при изменении положения приемника, которая проявляется при учете квадратичных по  $\sigma$  членов в фазовом множителе выражения (8). В случае мелкого бассейна это единственная причина уменьшения пространственно-временной корреляции с ростом  $\tau$  и  $|\Delta \widetilde{R}|$ . Оценка интеграла (8) с учетом членов порядка  $\sigma^2$  показывает, что спад корреляции характеризуется некоторой функцией, зависящей от параметра  $b = (1/p_2 - 1/p_1)/a^2$  и заметно убывающей при  $|b| \approx 1 \div 4$  (в зависимости от формы спектра). В случае глубокого бассейна, за исключением областей, в которых  $|\Delta \widetilde{R}| \cos \vartheta_0 \ll a$  при  $|\Delta \widetilde{R}| \approx a$ , дисперсия гравитационных волн влияет на спад пространственно-временной корреляции значительно сильнее, чем деформация рассеивающей области, т. е.  $b_\tau^2 \gg b^2$ .

Приведем теперь пример расчета корреляции поля для конкретного вида частотного спектра  $G(\Omega)$ . Задаваясь спектром, соответствующим квазигармонической функции корреляции вида  $R(\tau) = \exp(-\tau^2/\tau_0^2) \cos \Omega_0 \tau$ , получим после интегрирования

$$K_P(|\Delta \widetilde{R}|, \vartheta_0, \tau) = \frac{1}{2} \exp\left(i \frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{16} b\right) \left[ (1 + b_-^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - i \Omega_0 \tilde{\tau}_-\right) + (1 + b_+^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2} + i \Omega_0 \tilde{\tau}_+\right) \right], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_\pm &= \left( \frac{2|\Delta \widetilde{R}| \cos \vartheta_0}{v} - \tau \pm \frac{\Omega_0 \tau_0^2 b}{4} \right) (1 + b_\pm^2)^{-1/2}, \\ \Omega_0 \tilde{\tau}_\pm &= \Omega_0 \left( \frac{|\Delta \widetilde{R}| \cos \vartheta_0}{v} - \tau \right) - b_\pm \frac{\tau_\pm^2}{\tau_0^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b_\pm, \end{aligned}$$

$$b_{\pm} = (n - 1) b_{\tau} \pm 0,5(n + 1) b;$$

$n = 1$  и  $2$  соответственно для случаев мелкого и глубокого бассейна. Из (12) следует, что наряду с уменьшением уровня корреляционных максимумов при  $|b_{\pm}| > 1$  имеет место «расплывание» максимумов и изменение периода осцилляций. Формула (12) позволяет также оценить характер спада пространственно-временной корреляции в областях  $|\Delta \tilde{R}| \cos \vartheta_0 \approx 0$  при  $|\Delta R| \geq a$ , когда  $b_{\tau} \approx 0$ ,  $b_{\pm} \approx b$ . В этих областях корреляционная функция имеет два масштаба: уже при  $\tau \approx \tau_0$  уровень корреляции в максимумах  $K_P$  спадает примерно вдвое, но лишь при  $|b| \approx (\tau/\tau_0)(4/\Omega_0 \tau_0) \approx 4$  (т. е. при  $\tau \gg \tau_0$ ) он становится близким к нулю.

4. В случае трехмерного волнения для произвольного вида двумерного энергетического спектра  $S(v, \vartheta)$  не существует однозначной связи между пространственной и временной корреляционными функциями поля. Частотный спектр  $G(\Omega)$  определяет лишь некоторый интеграл от  $S(v, \vartheta)$  по углу:

$$\int_0^{2\pi} S[v(\Omega), \vartheta] d\vartheta = 2G(\Omega) \frac{1}{v(\Omega) v'(\Omega)}.$$

Для проведения качественных оценок ограничимся рассмотрением класса функций  $S(v, \vartheta)$ , допускающих разделение переменных:  $S(v, \vartheta) = \tilde{S}(v) \Theta(\vartheta)$ . Тогда при пренебрежении квадратичными по  $\sigma, s$  членами справедливо такое представление:

$$K_P(\Delta R, \tau) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{\Theta}(\vartheta) K_P^{(1)}(|\Delta \tilde{R}|, \vartheta_0, \vartheta, \tau) d\vartheta, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Theta}(\vartheta) = \frac{\Theta(\vartheta)}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Theta(\vartheta) d\vartheta}, \quad K_P^{(1)} = 2 \int_0^{\infty} G(\Omega) \cos[\Omega\tau - v(\Omega)|\Delta \tilde{R}| \cos(\vartheta + \vartheta_0)] d\Omega; \quad (14)$$

$K_P^{(1)}$  имеет смысл корреляционной функции поля в случае двумерной волны, идущей под углом  $\vartheta + \alpha$  к оси  $x$  (здесь  $\alpha$  — угол, который составляет положительное направление оси  $x$  с «генеральным» направлением распространения гравитационных волн).

Таким образом, пространственно-временную корреляционную функцию рассеянного поля при трехмерном волнении можно представить в виде суперпозиции пространственно-временных корреляционных функций, соответствующих двумерным волнам, идущим с разных направлений. Поскольку интегрирование по углу ведется в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , из рассмотрения исключаются «встречные» волны. Подобные условия характерны для открытых бассейнов.

Если волны распространяются в достаточно узком секторе углов  $|\vartheta| \leq \Delta\vartheta$  около «генерального» направления (случай зыби), то пространственно-временную функцию корреляции можно оценивать выражением

$$K_P(|\Delta \tilde{R}|, \vartheta_0, \tau) \approx 2 \int_0^{\infty} G(\Omega) M(\Omega, |\Delta \tilde{R}|, \Delta\vartheta) \cos[\Omega\tau - v(\Omega)|\Delta \tilde{R}| \cos \vartheta_0] d\Omega. \quad (15)$$

Функция  $M$  характеризует дополнительный спад пространственной корреляции, обусловленный интерференцией волн, идущих под разными

углами. В области  $|\operatorname{tg} \vartheta_0| \gg \Delta\vartheta$   $M = \sin[\nu(\Omega)|\Delta\widetilde{R}| \Delta\vartheta \sin \vartheta_0]/\nu(\Omega)|\Delta\widetilde{R}| \times \Delta\vartheta \sin \vartheta_0$ , а в окрестности  $\vartheta_0 = 0$  и  $\vartheta_0 = \pi$  при  $\nu(\Omega)|\Delta\widetilde{R}| \gg 1$   $M \simeq [2\pi/\nu(\Omega)|\Delta\widetilde{R}|(\Delta\vartheta)^2]^{1/2}$ .

Нетрудно показать, что при узкополосном волнении, когда  $\nu(\Omega) \simeq \Omega_0/v = q$ , пространственные интервалы (по спаду огибающей корреляционных функций в 2–3 раза) для случаев глубокого и мелкого бассейна определяются из соотношений

$$\begin{aligned} |\Delta\widetilde{R}|_0 &\simeq \min\left(\frac{\nu \tau_0}{n |\cos \vartheta_0|}, \frac{2}{q \Delta\vartheta |\sin \vartheta_0|}\right) \quad (|\operatorname{tg} \vartheta_0| \gg \Delta\vartheta), \\ |\Delta\widetilde{R}|_0 &\simeq \min\left(\frac{\nu \tau_0}{n}, \frac{2\pi}{q \Delta\vartheta^2}\right) \quad (|\operatorname{tg} \vartheta_0| \ll \Delta\vartheta). \end{aligned} \quad (16)$$

Уменьшение интервала корреляции по сравнению со случаем двумерного волнения (сравнение ведется при одинаковых спектрах  $G(\Omega)$ ) имеет место лишь при условии  $[\pi n/2(\Delta\vartheta)^2](\Delta\Omega/\Omega_0) < 1$ , т. е. для весьма узкополосного волнения, если  $\vartheta_0 \simeq 0$  и  $\vartheta_0 \simeq \pi$ , и при  $(n/2)[\operatorname{tg} \vartheta_0 |\Delta\vartheta|](\Delta\Omega/\Omega_0) < 1$ , если  $|\operatorname{tg} \vartheta_0| \gg \Delta\vartheta$ . В тех случаях, когда относительная ширина частотного спектра хотя бы в несколько раз превышает ширину углового спектра (взятую в радианах), пространственные масштабы корреляции определяются по формулам, выведенным на основе модели двумерного волнения\* (исключение составляет достаточно малая окрестность углов вблизи  $|\vartheta_0| \simeq \pi/2$ ). В частности, для пространственных периодов осцилляций корреляционных функций будем иметь  $\Lambda \simeq \min(2\pi/q |\cos \vartheta_0|, 2\pi/q \Delta\vartheta |\sin \vartheta_0|)$ .

От множителя  $M$  в подынтегральном выражении (15) в еще большей степени зависит спад уровня пространственно-временной корреляции. Он полностью определяет быстроту спада в случае мелкого бассейна, а при выполнении условий  $(2 \div 8)\Delta\vartheta |\operatorname{tg} \vartheta_0| [\Omega_0^2/(\Delta\Omega)^2] > 1$  (в области  $|\operatorname{tg} \vartheta_0| \gg \Delta\vartheta$ ) и  $[(2 \div 8)(\Delta\vartheta)^2/\pi] [\Omega_0^2/(\Delta\Omega)^2] > 1$  (в окрестности  $\vartheta_0 = 0$  и  $\vartheta_0 = \pi$ ) характеризует убывание корреляции в случае глубокого бассейна (при этом в отличие от случая двумерного волнения корреляция спадает быстрее всего при  $|\vartheta_0| \simeq \pi/2$  и наиболее медленно—при  $\vartheta_0 \simeq 0, \pi$ ). В то же время при выполнении неравенств, обратных вышеприведенным, можно пользоваться формулами, полученными для двумерного волнения (если исключить окрестность  $|\vartheta_0| = \pi/2$ ).

Рассмотрим теперь характер пространственно-временной корреляции поля при достаточно широком угловом спектре волнения. В качестве примера возьмем эмпирический спектр развитого ветрового волнения на поверхности глубокого бассейна, когда  $\Theta(\vartheta) = \cos^2 \vartheta$ \*. В этом случае для пространственной корреляционной функции поля получается выражение, содержащее под интегралом бесселевы функции первого и второго порядка. Используя их асимптотические разложения, получаем

$$\begin{aligned} K_{\widetilde{P}}(|\Delta\widetilde{R}|, \vartheta_0) &= 4 \int_0^\infty G(\Omega) \left[ J_0\left(\frac{\Omega^2}{g} |\Delta\widetilde{R}|\right) \cos^2 \vartheta_0 - \frac{g}{\Omega^2 |\Delta\widetilde{R}|} J_1\left(\frac{\Omega^2}{g} |\Delta\widetilde{R}|\right) \times \right. \\ &\times \left. \cos 2\vartheta_0 \right] d\Omega \simeq 2 \int_0^\infty G(\Omega) \sqrt{\frac{8g}{\pi \Omega^2 |\Delta\widetilde{R}|}} \left[ \cos\left(\frac{\Omega^2}{g} |\Delta\widetilde{R}| - \frac{\pi}{4}\right) \cos^2 \vartheta_0 - \right. \\ &\end{aligned} \quad (17)$$

\* Полученные результаты могут служить оправданием для использования модели двумерного волнения при расчетах корреляции поля, рассеянного на гравитационных волнах типа длинногребневой збы.

$$-\frac{g}{\Omega^2 |\Delta \widetilde{R}|} \cos \left( \frac{\Omega^2}{g} |\Delta \widetilde{R}| + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2\vartheta_0 \Big] d\Omega.$$

Задаваясь узкополосным спектром  $G(\Omega)$ , нетрудно показать, что период  $\Lambda$  не зависит от угла  $\vartheta_0$  и по всем направлениям равен  $\Lambda \approx 2\pi g/\Omega_0^2$ , причем этот период устанавливается лишь при достаточно больших сдвигах  $|\Delta \widetilde{R}|$ , а по положению первых нулей функции  $K_p(|\Delta \widetilde{R}|, \vartheta_0)$  нельзя судить о величине  $\Lambda$ . Для оценки интервалов корреляции можно пользоваться следующими соотношениями:

$$|\Delta \widetilde{R}|_0 \approx \min \left( \frac{v\tau_0}{2}, \frac{10g \cos^4 \vartheta_0}{\Omega_0^2} \right) \quad (|\cos \vartheta_0| > 0,6). \quad (18)$$

$$|\Delta \widetilde{R}|_0 \approx \min \left( \frac{v\tau_0}{2}, \frac{2g}{\Omega_0^2} |\cos 2\vartheta_0|^{2/3} \right) \quad (|\cos \vartheta_0| < 0,6).$$

По сравнению со случаем двумерного волнения имеет место уменьшение интервалов корреляции тем более существенное, чем уже спектр  $G(\Omega)$  и меньше  $|\cos \vartheta_0|$ . И только в окрестности значений  $|\cos \vartheta_0| = 1$  при выполнении неравенства  $5 \cos^4 \vartheta_0 (\Delta\omega/\Omega_0) > 1$ , как и в случае двумерного волнения,  $|\Delta \widetilde{R}|_0 \approx v\tau_0/2$ . Приведенные оценки остаются в силе и для достаточно широкого спектра  $G(\Omega)$ , когда  $\Omega_0 \approx \Delta\omega$ .

Пространственно-временная корреляционная функция поля в общем случае может быть представлена в виде интеграла, содержащего функции Бесселя, Струве и неполные функции Вебера. Не приводя этого выражения из-за его громоздкости, отметим, что в области  $\Delta\omega/\Omega_0 \leq 1$  быстроту спада пространственно-временной корреляции можно оценивать по формулам (18), имея в виду вторые значения в скобках. Уровень пространственно-временной корреляции в рассматриваемом случае спадает быстрее, чем при двумерном волнении, при этом заметная корреляция может наблюдаться лишь в области  $|\Delta \widetilde{R}| \leq |\Delta \widetilde{R}|_0$ . В заключение данного раздела отметим, что полученные результаты могут быть использованы для ориентировочных оценок размеров области пространственно-временной корреляции и пространственных масштабов корреляции по временным масштабам в условиях рассеяния сигналов на ветровых волнах и волнах типа зыби.

5. Рассмотрим частотную корреляцию рассеянного поля. В случае двумерного волнения исходное выражение имеет вид

$$K_p(\Delta\omega) = 2 \int_{\delta}^{\infty} S(\sigma) \exp \left( i \frac{\sigma^2}{4p_0} \tilde{\delta} \right) d\sigma, \quad (19)$$

где

$$p_0 = \frac{\omega_0 \sin^2 \Psi}{c R_0 [1 - \cos^2 \Psi \sin^2(\alpha - \varphi)]}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{1 - \delta^2/4}, \quad \delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Интегрируя (19) при достаточно узкополосном волнении ( $qa \gg 1$ ), получаем

$$K_p(\Delta\omega) \exp \left( i \frac{q^2}{4p_0} \tilde{\delta} \right) \left[ R_1 \left( \frac{q\tilde{\delta}}{2p_0 a} \right) - i R_2 \left( \frac{q\tilde{\delta}}{2p_0 a} \right) \right]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что частотный интервал корреляции определяется из соотношения  $\tilde{\delta} \simeq 2/D_\alpha qa$ , где  $D_\alpha = 1/p_0 a^2$  — некоторый параметр, пропорциональный квадрату отношения размера зоны Френеля к пространственному интервалу корреляции волнения, взятых вдоль «генерального» направления;  $D_\alpha$  является аналогом хорошо известного волнового параметра. При условии  $2/D_\alpha qa \gg 1$  частотный интервал корреляции (по отношению к средней частоте) равен  $\tilde{\delta}_0 = \Delta\omega/\omega_0 \simeq 2/D_\alpha qa$ . Если же  $2/D_\alpha qa \ll 1$ , то  $\tilde{\delta}_0 = 2(1 - qaD_\alpha/2)$ . При малых  $\Psi$  величина  $\tilde{\delta}_0$  существенно зависит от угла  $\alpha$ , причем минимальное значение  $\tilde{\delta}_0$  соответствует случаю «продольной» шероховатости ( $\alpha - \varphi = 0, \pi$ ). Спад корреляции сопровождается также осцилляциями, период которых равен  $\Delta\omega_0 \simeq 4\pi\tilde{\delta}/qa$ .

В случае трехмерного волнения исходное выражение для расчета частотной корреляции можно представить в виде

$$K_P(\Delta\omega) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(v, \vartheta) v \exp\left[-\frac{i v^2 \tilde{\delta}}{4p_0(\vartheta)}\right] d v d \vartheta, \quad (21)$$

где  $p_0(\vartheta)$  отличается от  $p_0$  заменой  $\alpha - \varphi$  на  $\vartheta + \alpha - \varphi$ . Как и в предыдущем разделе, перейдем от пространственного спектра к частотному, полагая  $S(v, \vartheta) = \tilde{S}(v)\Theta(\vartheta)$ , и рассмотрим два случая — узкого углового спектра, когда  $\Theta(\vartheta)$  существенно отлична от нуля при  $|\vartheta| \leq \Delta\vartheta \ll 1$ , и  $\Theta(\vartheta) = \cos^2 \vartheta_0$ . В первом случае при  $\Omega_0 \tau_0 \gg 1$  получаются следующие оценки частотного интервала корреляции:

$$\tilde{\delta}_0 \simeq \min \left[ \frac{2}{D_\alpha qa} \frac{v \tau_0}{na}, \frac{4}{(D_{||} - D_\perp) q^2 a^2 \Delta\vartheta |\sin 2(\alpha - \varphi)|} \right] \text{ в области } |\tg 2(\alpha - \varphi)| \gg \Delta\vartheta, \quad (22)$$

$$\tilde{\delta}_0 \simeq \min \left[ \frac{2}{D_{||} qa} \frac{v \tau}{na}, \frac{16}{(D_{||} - D_\perp) q^2 a^2 (\Delta\vartheta)^2} \right] \text{ в области } \Delta\vartheta \gg |\tg 2(\alpha - \varphi)|.$$

Здесь  $D_{||} = D_\alpha(\alpha - \varphi = 0, \pi)$ ,  $D_\perp = D_\alpha(\alpha - \varphi = \pm\pi/2)$ , а величина  $a$  определяется по формуле (16) предыдущего раздела при  $\vartheta_0 = 0$ . При условии  $\Delta\vartheta > n/\Omega_0 \tau_0$  и для достаточно малых углов  $\Psi$  частотная корреляция, согласно (22), спадает быстрее, чем в случае двумерного волнения (напомним, что сравнение проводится при одном и том же спектре  $G(\Omega)$ ). Если же  $\Delta\vartheta < n/\Omega_0 \tau_0$  и  $\Psi > 0,2 - 0,3$ , быстрота спада корреляции при двумерном и трехмерном (типа зыби) волнении одинакова.

В случае  $\Theta(\vartheta) = \cos^2 \vartheta$  (для глубокого бассейна) получаем

$$K_P(\Delta\omega) = \int_0^\infty G(\Omega) \exp\left(i \frac{\Omega^4}{g^2 q^2} l_+\right) \left[ J_0\left(\frac{\Omega^4}{g^2 q^2} l_-\right) + i \cos 2(\alpha - \varphi) \times \right. \\ \left. \times J_1\left(\frac{\Omega^4}{g^2 q^2} l_-\right) \right] d\Omega, \quad (23)$$

где  $l_\pm = l_{||} \pm l_\perp = \tilde{\delta} q^2 a^2 (D_{||} \pm D_\perp)/8$ .

Для оценки интервала корреляции в области  $\Omega_0 \tau_0 \cos^2 \Psi / 4 < 1$  при  $\Omega_0 \tau_0 \gg 1$  можно приближенно заменить выражение в квадратных скобках (23) единицей. Тогда после вычисления интеграла будем иметь

$\tilde{\delta}_0 \approx [4/q a (D_{\parallel} + D_{\perp})] (v \tau_0 / 2a)$ , при этом интервал корреляции оказывается не зависящим от угла  $\alpha$ . Для вычисления интеграла в области  $\Omega_0 \tau_0 \cos^2 \Psi / 4 > 1$  воспользуемся асимптотическим разложением функций Бесселя. В результате для оценки быстроты спада корреляционной функции при  $l_- > 1 - 2$  получим такое выражение:

$$K_P(\Delta\omega) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l_-}} \left\{ \left[ R_1 \left( \frac{8l_{\parallel}}{\Omega_0 \tau_0} \right) + i R_2 \left( \frac{8l_{\parallel}}{\Omega_0 \tau_0} \right) \right] \exp \left( i 2l_{\parallel} - i \frac{\pi}{4} \right) \cos^2(\alpha - \varphi) + \right. \\ \left. + \left[ R_1 \left( \frac{8l_{\perp}}{\Omega_0 \tau_0} \right) + i R_2 \left( \frac{8l_{\perp}}{\Omega_0 \tau_0} \right) \right] \exp \left( i 2l_{\perp} + i \frac{\pi}{4} \right) \sin^2(\alpha - \varphi) \right\}. \quad (24)$$

Оно содержит три масштаба корреляции  $\delta_{01}$ ,  $\delta_{02}$ ,  $\delta_{03}$  (или  $\tilde{\Delta\omega}_1$ ,  $\tilde{\Delta\omega}_2$ ,  $\tilde{\Delta\omega}_3$ ), определяемых соотношениями

$$\tilde{\delta}_{01} \simeq \frac{2}{qaD_{\parallel}} \frac{v\tau_0}{2a}, \quad \tilde{\delta}_{02} \simeq \frac{2}{qaD_{\perp}} \frac{v\tau_0}{2a}, \quad \tilde{\delta}_{03} \simeq \frac{20}{q^2 a^2 (D_{\parallel} - D_{\perp})}.$$

Если  $\tilde{\delta}_{03}/\tilde{\delta}_{02} = 20 \operatorname{tg}^2 \Psi / \Omega_0 \tau_0 > 1$ , то, поскольку  $\tilde{\delta}_{02} \geq \tilde{\delta}_{01}$ , спад корреляции характеризуется масштабами  $\tilde{\delta}_{01}$  и  $\tilde{\delta}_{02}$ , причем в области  $|\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)| < 1$  преобладает масштаб  $\tilde{\delta}_{01}$ , а в области  $|\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)| > 1 - \tilde{\delta}_{02}$ . По направлениям  $\alpha - \varphi \approx 0, \pi; \alpha - \varphi \approx \pm \pi/2$  масштабы корреляции остаются такими же, как и в случае двумерного волнения. Лишь при больших значениях  $qa$  и достаточно малых  $\Psi$ , когда  $\tilde{\delta}_{03} < \tilde{\delta}_{02}$ , корреляция спадает быстрее, чем при двумерном волнении.

В работе [10] рассматривалась задача о частотной корреляции волнового поля при нормальном прохождении плоской волны через случайный дифракционный экран. При этом вычисления проводились для гауссовой пространственной корреляционной функции. В этом случае, как нетрудно показать с помощью (21), частотная корреляция описывается выражением  $K_P(\Delta\omega) = (1 + \tilde{\delta} D_{\parallel})^{-1/2} (1 + \tilde{\delta} D_{\perp})^{-1/2}$ , которое при  $\Psi = \pi/2$  согласуется с формулой (9) работы [10].

Отметим в заключение, что функция частотной корреляции рассеянного поля позволяет определить максимальную ширину полосы сигнала, который не исказится при отражении от неровной поверхности. Полезные сведения несет также функция  $W_P(\Delta t)$ , являющаяся фурье-преобразованием  $K_P(\Delta\omega)$ . Она характеризует распределение интенсивности рассеянного поля по времени запаздывания (относительно прихода сигнала, соответствующего зеркальному отражению от средней плоскости). Например, в случае двумерной квазигармонической волны при  $qa \gg 1$  и  $2/D_a q a \ll 1$  получается такое выражение:

$$W_P(\Delta t) = \tilde{\Delta\omega} \left\{ S_1 \left[ \tilde{\Delta\omega} \left( \Delta t - \frac{q^2}{4p_0 \omega_0} \right) \right] + S_2 \left[ \tilde{\Delta\omega} \left( \Delta t - \frac{q^2}{4p_0 \omega_0} \right) \right] \right\}, \quad (25)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — преобразования Фурье от  $R_1(\xi)$  и  $R_2(\xi)$  (четной и нечетной функций). Максимум рассеяния приходится на  $\Delta t_0 = q^2 / 4p_0 \omega_0$ . Средняя «продолжительность» рассеянного сигнала определяется величиной, обратной частотному интервалу корреляции:  $\sigma_{\Delta t} \simeq 1/\tilde{\Delta\omega}$ . Наконец, уширение сигнала по сравнению с отражением от плоскости равно  $\tilde{\Delta t} \simeq \Delta t_0 + 1 \Delta\omega = (1/\tilde{\Delta\omega})(qa/2 + 1)$ . Аналогичные соотношения получаются и в случае трехмерного волнения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. П. Гулин, Акуст. ж., 8, 426 (1962).
2. Э. П. Гулин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1144 (1963).
3. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 104 (1965).
4. А. А. Свешников, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 3, 32 (1959).
5. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 1, 58 (1961).
6. Ф. Г. Басс, в сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, изд. АН УССР, Киев, 1962.
7. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 290 (1963).
8. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 191 (1965).
9. Р. Артур, сб. Основы предсказания ветровых волн, зыбы и прибоя, ИЛ, М, 1951.
10. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 75 (1964).

Акустический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
11 июля 1967 г.,  
после доработки  
25 июня 1969 г.

## CORRELATION OF A WAVE FIELD SCATTERED BY RUFFLED WATER SURFACE

*E. P. Gulin*

In the small perturbation method, the problem is considered of scattering of a scalar wave field of the point source by gravity waves traveling over the surface of a water reservoir. A general integral relation describing the joint frequency-space-time correlation of the scattered field is derived. The character of diminishing the correlation when the receivers are differed in space time and frequency is estimated for the case of small angles of scattering.

УДК 538.574.6

# КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ОТРАЖЕННОГО ПОЛЯ ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО НАД НЕОДНОРОДНЫМ ЛИНЕЙНЫМ СЛОЕМ\*

Ю. И. Орлов

Рассмотрена дифракция сферической волны, созданной вертикальным магнитным диполем, на неоднородном линейном полуограниченном плазменном слое. Исходя из точных интегральных представлений функции Грина, применением асимптотики и модификации метода перевала построены асимптотические выражения для отраженного поля при наличии особой катакаустики (каустики отраженных лучей). Получены и исследованы асимптотические формулы для поля в области регулярности лучевого поля, в окрестности неособых ветвей катакаустики и ее точек возврата. Сделаны оценки ширины особого и неособого каустических слоев, в которых не применимы формулы геометрической оптики. Проведено сравнение полученных формул с результатами эвристических методов геометрической оптики и эталонных функций.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $z = z_0 > 0$ ,  $r = 0$  — цилиндрические координаты вертикального магнитного диполя с моментом  $p_z^m$ , расположенного над полубесконечным линейным слоем

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= 1 + az \quad (a > 0; \quad z \leq 0), \\ \varepsilon(z) &= 1 \quad (z > 0).\end{aligned}\tag{1}$$

Поля  $E$  и  $H$  в рассматриваемой задаче можно выразить через вертикальную компоненту магнитного вектора Герца  $\Pi_z^m = (p_z^m / 4\pi\mu_0) u$ :

$$E_\varphi = i\omega \frac{p_z^m}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad H_z = -\frac{p_z^m}{4\pi\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad H_r = \frac{p_z^m}{4\pi\mu_0} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \tag{2}$$

(подразумевается временной фактор  $e^{i\omega t}$  и используется система единиц «СИ»).

В работе [1] приведены результаты исследования лучевых картин и каустических поверхностей, создаваемых точечным источником, расположенным над слоем (1). В [1], в частности, показано, что даже при однократном отражении сферической волны от неоднородного полупространства (1) отраженные лучи в случае  $\tau \equiv az_0 < 1/2$  фокусируются на особой каустике (катакаустике\*\* с ребром возврата). Явление фокусировки волн неоднородными плоско-слоистыми средами рассматривалось во многих работах и, в частности, в [2—7]. Однако особый характер катакаустики однократно отраженных лучей, связанный с наличием на ней точек возврата [1], остался незамеченным как при теоретическом анализе [2, 3, 7], так и при анализе результатов эксперимента [5—7].

\* Основные результаты работы докладывались на IV Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (Харьков, февраль 1967) [26].

\*\* В соответствии с принятой в оптике терминологией каустику отраженных лучей будем называть катакаустикой, а каустику преломленных лучей — дпакаустикой.

В регулярных и иррегулярных областях лучевой картины [1] поле и может быть найдено с помощью формул лучевого метода или его различных эвристических модификаций при наличии каустик [8–16]. В настоящей работе аналогично [2, 3] коротковолновая асимптотика отраженного поля при наличии в общем случае особой катакаустики определяется при асимптотическом исследовании точного интегрально-го представления функции Грина  $u = \exp(-ik_0 R)/R + u_1$  при  $z \geq 0$ :

$$u_1 = -\frac{ik_0}{2} \int_C \frac{i\sqrt{-x_0} v(x_0) + v'(x_0)}{i\sqrt{-x_0} v(x_0) - v'(x_0)} H_{0,2}^{(2)}(\rho\xi \sin \theta) e^{-i\rho(\zeta+\tau) \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (3)$$

где  $C \equiv (-\pi/2 - i\infty, -\pi/2, \pi/2, \pi/2 + i\infty)$  — контур Зоммерфельда на плоскости  $\theta$ ,  $v(x)$  — функция Эйри в обозначении Фока [17],  $\sqrt{-x_0} = \rho^{1/3} \cos \theta$ ,  $\rho = k_0/a$ ,  $\xi = ar$ ,  $\zeta = az$ ,  $\tau = az_0$ . Проведено сравнение и показано совпадение с результатами лучевого метода и метода эталонных функций [11, 12, 14]. Получены формулы, упрощающие результаты метода эталонных функций [11, 12, 14] в непосредственной окрестности особых и неособых точек на катакаустике и дающие локальную асимптотику поля в каустических слоях.

## 2. ОБЛАСТИ РЕГУЛЯРНОСТИ ЛУЧЕВОЙ КАРТИНЫ

«Первичная» асимптотика функции Грина  $u_1$  при  $|\rho^{2/3} \cos^2 \theta| \gg 1$  и  $|\rho\xi \sin \theta| \gg 1$  находится из (3) применением ВКБ-асимптотики и имеет вид разложения по ВКБ-модам

$$u_1 \sim \left( \frac{k_0}{2\pi r} \right)^{1/2} \int_C V \sin \theta \exp \left[ -ik_0 f(\theta, z, r) + i \frac{\pi}{4} \right] d\theta, \quad (4)$$

где

$$f(\theta, z, r) = (z + z_0) \cos \theta + r \sin \theta + \frac{4}{3a} \cos^3 \theta.$$

Вычисление интеграла (4) при  $k_0/a \gg 1$  методом перевала, как обычно, приводит к геометрооптическому приближению для отраженного поля, которое при  $\tau \equiv az_0 < 1/2$  имеет различный вид в разных областях I, II (рис. 1) свободного полупространства  $z \geq 0$ :

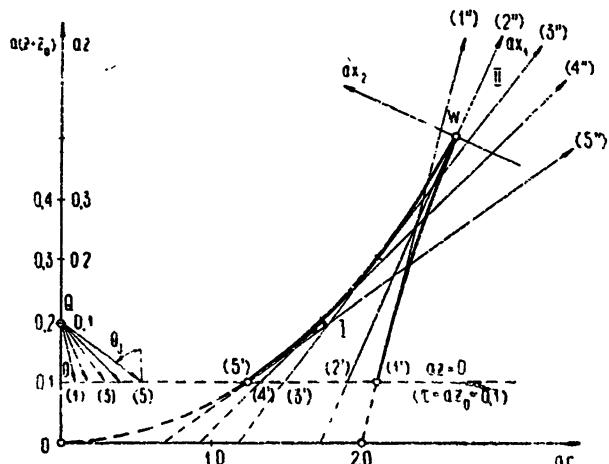


Рис. 1. Особая катакаустика при  $45^\circ < \theta_j < 90^\circ$  в координатах  $ar$ ,  $a(z+z_0)$  и ее вид в координатах  $ar$ ,  $az$  при  $\tau = az_0 = 0,1$  ( $46,5^\circ < \theta_j < 80,6^\circ$ ).

$$u_1 \simeq \begin{cases} \Phi(\theta_s) e^{i\pi/2} & (r, z) \in \text{II}; \\ \Phi(\theta_1) + \sum_{j=2}^3 \Phi(\theta_j) e^{i\pi/2} & (r, z) \in \text{I}, \end{cases} \quad (5a)$$

где

$$\Phi(\theta_j) = \left[ \frac{\cos \theta_j \sin \theta_j}{r |z + z_0 + 4a^{-1} \cos^2 \theta_j \cos(2\theta_j)|} \right]^{1/2} \exp[-ik_0 f(\theta_j, z, r)]. \quad (6)$$

В (5) углы  $\theta_j = \theta_j(z, r)$  являются корнями уравнения

$$(\zeta + \tau) \operatorname{tg}^3 \theta_j - \xi \operatorname{tg}^2 \theta_j + (\zeta + \tau + 4) \operatorname{tg} \theta_j - \xi = 0 \quad (7)$$

и определяют отраженные лучи

$$r = (z + z_0) \operatorname{tg} \theta_j + 2a^{-1} \sin(2\theta_j) \equiv r(\theta_j), \quad (8)$$

проходящие через точку наблюдения  $P \equiv (r, z)$ .

Зависимости  $\theta_j = \theta_j(z, r)$  представлены на рис. 2 и соответствуют

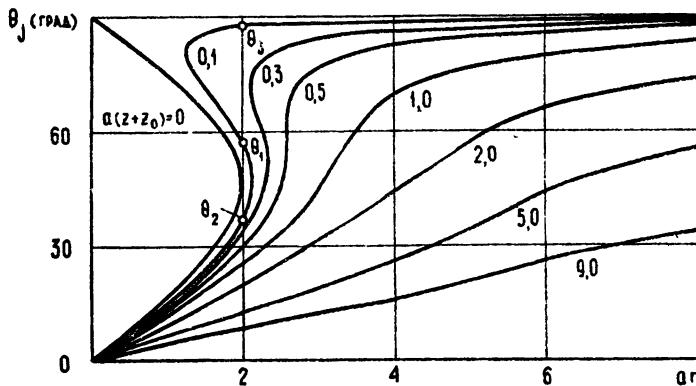


Рис. 2. Зависимость вещественной лучевой координаты  $\theta_j$  от обобщенных координат  $ar$ ,  $a(z + z_0)$  точки наблюдения.

исследованной в [1] лучевой картине и каустике (рис. 3, 4). При этом в (5 б)  $\theta_2 < \theta_1 < \theta_3$  (рис. 2). Зоны многократного облучения I и II в (5) разграничены при  $\tau < 1/2$  особой катакаустикой (рис. 1, 3), уравнения которой имеют вид

$$\xi = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1 - 2(\zeta + \tau)}]^{1/2} [3 \mp \sqrt{1 - 2(\zeta + \tau)}]^{3/2} \quad (9)$$

или в параметрической форме [1, 2]

$$z = -z_0 - 4a^{-1} \cos^2 \theta \cos(2\theta) \equiv z_k(\theta); \quad (10a)$$

$$r = 4a^{-1} \sin^2 \theta \sin(2\theta) \equiv r_k(\theta). \quad (10b)$$

При  $\tau > 1/2$  семейство отраженных лучей (8) регулярно при  $z \geq 0$  [1], а при  $z < 0$  образует мнимую катакаустику (пунктир на рис. 3, 4). Асимптотика отраженного поля (4) всюду (при  $z \geq 0$ ) описывается в приближении геометрической оптики формулой (5 а), согласно которой амплитуда поля  $u_1$  определяется расстоянием от мнимой катакаустики. Другие два корня  $\theta_j$  уравнения (7) при  $\tau > 1/2$  комплексны и соответствуют комплексным лучам, которые следует отбросить, так как их учет приводит к превышению допустимой точности. С физической точки зрения поля комплексных лучей в освещенной области опи-

сывают экспоненциально слабый дополнительный фон, соизмеримый с дифракционным фоном другой природы, на котором выделяются сво-

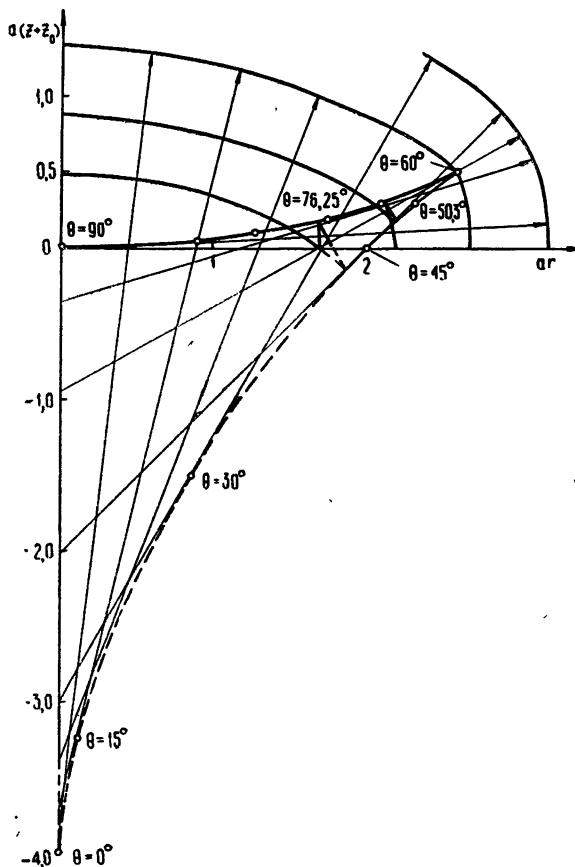


Рис. 3. Реальная и мнимая катакаустика, фронты и лучи, возникающие при отражении сферической волны от неоднородного полупространства.

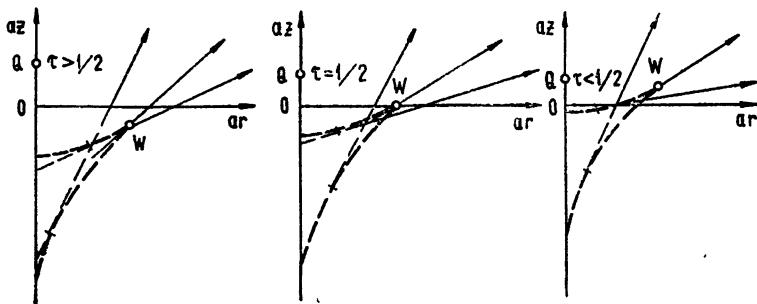


Рис. 4. Зависимость вида катакаустики от  $\tau = az_0$  (пунктиром показана мнимая катакаустика).

ей интенсивностью вещественные лучи и каустика. Вклад комплексных лучей существен только вблизи каустики, где они при  $\tau < 1/2$  создают своеобразный «օրոել», который гаснет при увеличении  $\tau$  ( $\tau > 1/2$ ).

Как следует из вывода формул (4), необходимым условием приме-

нимости приближения геометрической оптики (5) является соотношение

$$|\cos \theta| > \left( \frac{a}{k_0} \right)^{1/3}, \quad (11)$$

исключающее из рассмотрения пологие лучи и сильно неоднородные среды. Условие  $|k_0 r \sin \theta| \gg 1$  является лишним, так как исследование асимптотики отраженного поля (3) при  $|\rho^{2/3} \cos^2 \theta| \gg 1$

$$u_1 \sim k_0 \int_C J_0(\rho \xi \sin \theta) \exp \left\{ -i\rho \left[ (\zeta + \tau) \cos \theta + \frac{4}{3} \cos^3 \theta \right] \right\} d\theta,$$

где  $C' \equiv (0, \pi/2, \pi/2 + i\infty)$ , показывает, что формула геометрической оптики (5 а) справедлива и в области малых углов отражения  $\theta_s$  (в области  $r \sim 0$ ).

### 3. ОКРЕСТНОСТЬ НЕОСОБОГО УЧАСТКА КАТАКАУСТИКИ (ВДАЛИ ОТ ТОЧЕК ВОЗВРАТА)

Вычисление интеграла (4) с помощью модификации метода перевала в случае двух произвольно расположенных седловых точек  $\theta_1$  и  $\theta_2$  [18—21] приводит к следующей асимптотике отраженного поля в окрестности неособого участка катакаустики (9), (10):

$$u_1 \sim u_{1k} + F(\theta_s) \exp[-ik_0 f(\theta_s, z, r) + i\pi/2]; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_{1k} \sim & \exp(-ik_0 \psi_+) \{ e^{i\pi/4} t^{1/4} [F(\theta_l) + F(\theta_1)] v(-t) + \\ & + e^{-i\pi/4} t^{-1/4} [F(\theta_l) - F(\theta_1)] v'(-t) \}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F(\theta_1) = & \left\{ \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{r [z_k(\theta_1) - z]} \right\}^{1/2}, \quad F(\theta_{l,s}) = \left\{ \frac{\sin \theta_{l,s} \cos \theta_{l,s}}{r [z - z_k(\theta_{l,s})]} \right\}^{1/2}, \\ t = & \left( \frac{3}{2} k_0 \psi_- \right)^{2/3}, \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{2} [f(\theta_l, z, r) \pm f(\theta_1, z, r)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В (12)—(14) угол  $\theta_s$  соответствует несфокусированному лучу, пересекающему рассматриваемую ветвь катакаустики,  $\theta_l$  — лучу, проходящему через точку наблюдения в области I (рис. 1) после касания с рассматриваемым участком катакаустики ( $z > z_k(\theta_l)$ ), а  $\theta_1$  — до касания ( $z < z_k(\theta_1)$ ). Пользуясь обозначениями формулы (5 б), имеем  $l = 2, 3$ ,  $s = 5 - l$ . Асимптотика (12)—(14) может быть получена также с помощью эвристического метода эталонных функций\* [11, 12, 14].

Формулы (13), (14) метода эталонных функций [11, 12, 14] не удобны для вычислений. Их упрощение в неособом каустическом слое достигается применением к (4) модификации метода перевала в случае двух близко расположенных седловых точек и результатов [18—21]. Получающееся при этом представление эквивалентно разложению (13), (14) в ряд Тейлора в окрестности катакаустики (9), (10), на которой  $\theta_1 = \theta_l = \theta_0$ , и имеет вид

$$u_{1k} \simeq \frac{(2a^3 \rho \sin \theta_0)^{1/6}}{2\sqrt{r} [\sin(\theta_0 + \pi/3) \sin(\theta_0 - \pi/3)]^{1/3}} \times \quad (15)$$

\* Таким образом, устанавливается адекватность модификаций метода перевала и метода эталонных функций для неособых каустик. Из разд. 4 следует аналогичная адекватность для особых каустик.

$$\times \left\{ v(-t) + \frac{i v'(-t)}{8(2\rho)^{1/3} \cos^{-1} \theta_0 [\sin \theta_0 \sin(\theta_0 + \pi/3) \sin(\theta_0 - \pi/3)]^{4/3}} \right\} \times \\ \times \exp[-ik_0 f(\theta_0) + i\pi/4],$$

где

$$\theta_0 = \arccos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 \pm \sqrt{1-2(\zeta+\tau)}} \right], \quad f(\theta_0) = f[\theta_0, z_k(\theta_0)], r_k(\theta_0) = \\ = \frac{8}{3a} \cos \theta_0 (4 \sin^2 \theta_0 - 1), \quad (16)$$

$$t = \frac{\Delta \xi}{2} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2/3} \cos \theta_0 \left[ \sin \theta_0 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) \right]^{-1/3}, \quad \Delta \xi = a \Delta r,$$

$\Delta r = r - r_k$  — горизонтальное расстояние от каустики (9), (10) до точки наблюдения,  $r_k$  — радиальная координата каустики (9), (10). В формуле (15) углы  $\theta_0$  определяют лучи, касающиеся катакаустики (9), (10) на заданной высоте  $\zeta = az$ . В силу особого характера катакаустики (9), (10) при  $\zeta = \text{const}$  существуют два значения  $\theta_{01,2}$ , которые совпадают в острье катакаустики, где  $\xi = 3\sqrt{3}/2$ ,  $\zeta = 1/2 - \tau$ ,  $\theta_{01} = \theta_{02} = \pi/3$  [1].

В случае, когда представляет интерес характер изменения поля вдоль некоторого луча, задаваемого углом падения  $\theta_0$ , формула (15) сохраняется, но при этом

$$t = \left( \frac{\Delta z}{\cos \theta_0} \right)^2 \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2/3} \left[ 32 \sin \theta_0 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left| \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right| \right]^{-4/3}, \quad (17)$$

где  $\Delta z = a \Delta r$ ,  $\Delta r = r - r_k(\theta_0)$  — вертикальное расстояние от катакаустики (10) до точки наблюдения,  $\Delta z / \cos \theta_0 = \Delta l$  — аналогичное расстояние вдоль луча  $\theta = \theta_0$ .

Воспользовавшись асимптотикой (15), можно найти уравнения границ неособого каустического слоя, вне которого применимы формулы геометрической оптики (5):

$$ar = ar_k(\theta_0) \pm 2 \cos^{-1} \theta_0 \left[ 4 \sin \theta_0 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left| \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right| \right]^{1/3} \rho^{-2/3}. \quad (18)$$

Аналогичные уравнения следуют из (17) для ширины слоя на фиксированном луче  $\theta_0$ :

$$\Delta(al) \equiv \frac{a[z - z_k(\theta_0)]}{\cos \theta_0} = \pm 8 \left[ 2 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left| \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right| \right]^{2/3} \rho^{-1/3}. \quad (19)$$

При получении (18) и (19) учтено, что ВКБ-асимптотика удовлетворительно аппроксимирует функцию Эйри  $v(x)$  в области  $|x| \geq 1$ , т. е. вплоть до ее первого максимума. Из формул (18), (19) следует, что  $\Delta r \equiv r - r_k = O(k_0^{-2/3})$  [22—24], а  $\Delta l = O(k_0^{-1/3})$ . При этом  $\Delta r, \Delta l \rightarrow 0$  при  $\theta_0 \rightarrow \pi/3$ , что связано с образованием при  $\theta_0 \sim \pi/3$  и  $\tau < 1/2$  особого каустического слоя шириной  $O(k_0^{-1/2})$  (см. ниже разд. 4).

Из формулы (15) при

$$8(2\rho)^{1/3} \cos^{-1} \theta_0 \left| \sin \theta_0 \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) \right|^{4/3} \gg |v'(-t) v^{-1}(-t)| \quad (20)$$

получим асимптотическое выражение для  $u_{ik}$  в окрестности неособого участка катакаустики:

$$u_{1k} \simeq \frac{(2a^3\rho \sin \theta_0)^{1/6}}{2\sqrt{r} \left[ \sin \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left| \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right| \right]^{1/3}} v(-t) \times \\ \times \exp \left[ -ik_0 f(\theta_0) + i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (21)$$

Из (20) следует, что член асимптотики (15) с  $v'(-t)$  становится главным вблизи нулей функции  $v(-t)$ , т. е. при  $|t - t_x| \ll k_0^{-1/3}$ , где  $v(-t_x) = 0$ , а также при приближении к точкам возврата катакаустики, когда  $\theta_0 \rightarrow \pi/3$ . В последнем случае следует воспользоваться формулами разд. 4.

Асимптотические представления (12)–(21) исправляют и дополняют результаты работ Бреховских [2, 3], стр. 438, [7] стр. 73) и поэтому требуют более тщательного анализа результатов эксперимента [5–7], стр. 177.

#### 4. ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧЕК ВОЗВРАТА КАТАКАУСТИКИ (СЛУЧАЙ $\tau < 1/2$ )

Для определения отраженного поля  $u_1$  в окрестности точек возврата катакаустики, определяемых координатами [1]

$$\theta_j = \frac{\pi}{3}, \quad \xi = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta = \frac{1}{2} - \tau \quad (\tau < 1/2), \quad (22)$$

следует воспользоваться модификацией метода стационарной фазы в случае трех близко расположенных стационарных точек. Разлагая после замены переменных  $x = \sin \theta$  фазовую функцию

$$\tilde{f}(x, z, r) = rx + (z + z_0)(1 - x^2)^{1/2} + \frac{4}{3a}(1 - x^2)^{3/2} \quad (23)$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $x^0$ , где  $\tilde{f}_{x^3}(x^0, z, r) = 0$ , из (4) несложно получить следующее асимптотическое представление для  $u_1$ :

$$u_1 \simeq \frac{(3k_0 \cos \theta^0)^{1/4}}{r^{1/2}(1 + 4 \cos^2 \theta^0)^{1/4}} \exp \left[ -ik_0 f(\theta^0, z, r) + i \frac{\pi}{4} \right] V(t, s). \quad (24)$$

Здесь  $V(t, s)$  — обобщенная функция Эйри, аналогичная функции, введенной Людвигом в [12]:

$$V(t, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ i \left( t\eta - s \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4} \right) \right] d\eta, \quad (25)$$

а остальные величины в формуле (24) имеют следующий вид:

$$\theta^0 = \arcsin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{5 - \sqrt{1 + 6(\zeta + \tau)}} \right],$$

$$s = -k_0^{1/2} 4(3a)^{-1/2} \operatorname{ctg} \theta^0 \cos^{-1/2} \theta^0 (4 \cos^2 \theta^0 - 1) (4 \cos^2 \theta^0 + 1)^{-1/2}, \quad (26)$$

$$t = -k_0^{3/4} \left[ \frac{3}{4} a \operatorname{ctg}^2 \theta^0 \cos^3 \theta^0 (4 \cos^2 \theta^0 + 1)^{-1} \right]^{1/4} \Delta r,$$

$$\Delta r = r - \frac{4}{3a} \sin(2\theta^0) (3 - \sin^2 \theta^0),$$

$\Delta r$  — расстояние от геометрического места точек, где  $\tilde{f}_{z^3}(x^0, z, r) = 0$ , до точки наблюдения.

Учитывая, что в окрестности точек возврата

$$x^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \zeta + \tau - \frac{1}{2} \right) \right] + O \left[ \left( \zeta + \tau - \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

из (24) можно найти более простую асимптотическую формулу для  $u_1$ :

$$u_1 \simeq \frac{(3k_0 a)^{1/4}}{\sqrt{2r}} \exp \left[ -ik_0 f \left( \frac{\pi}{3}, z, r \right) + i \frac{\pi}{4} \right] V(t, s), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho^{3/4} [-ar + \sqrt{3}a(z + z_0) + \sqrt{3}], \\ s &= -\frac{1}{2} \rho^{1/2} [2a(z + z_0) - 1]. \end{aligned}$$

Формула (27) соответствует результату работы [25], ибо в окрестности острия уравнения катакаустики (9), (10) можно записать в локальных координатах  $x_1, x_2$  (рис. 1)

$$(ax_1)^3 \simeq -27(ax_2)^2,$$

где  $ax_1 = (\sqrt{3}/2)ar + (1/2)a(z + z_0) - 5/2$  — координата вдоль луча  $\theta_j = \pi/3$ , отсчитываемая от точки возврата катакаустики,  $ax_2 = -ar/2 + (\sqrt{3}/2)a(z + z_0) + \sqrt{3}/2$  — ортогональная ей координата.

В точке  $W$  возврата катакаустики  $t = s = 0$ . Так как  $V(0, 0) = [\Gamma(1/4)/2\sqrt{2\pi}] e^{i\pi/8}$ , из (27) находим поле в точке возврата катакаустики

$$u_1 \simeq \frac{a\rho^{1/4}\Gamma(1/4)}{2(6\pi)^{1/2}} \exp \left( i \frac{3\pi}{8} - i \frac{8\rho}{3} \right). \quad (28)$$

Из (27) можно также найти асимптотику поля на луче  $\theta_j = \pi/3$ , проходящем через точку возврата  $W$ . Учитывая, что на луче  $\theta_j = \pi/3$ ,  $t = 0$  и

$$V(0, s) = 2^{-3/4} \exp \left( i \frac{\pi}{8} - i \frac{s^2}{8} \right) D_{-1/2}(2^{-1/2} e^{i3\pi/4} s), \quad (29)$$

где  $D_{-1/2}(w)$  — функция параболического цилиндра порядка  $-1/2$ , из (27) найдем асимптотику поля на луче  $\theta_j = \pi/3$

$$\begin{aligned} u_1 \simeq & \frac{a\rho^{1/4}}{2^{5/4}\sqrt{a(z+z_0)+1}} \exp \left\{ i \frac{3\pi}{8} - i \frac{s^2}{8} - i\rho \left[ 2a(z+z_0) + \frac{5}{3} \right] \right\} \times \\ & \times D_{-1/2}(2^{-1/2} e^{i3\pi/4} s). \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что асимптотическая формула (30) может быть получена также применением модификации метода стационарной фазы [23] в случае трех близко расположенных симметричных стационарных точек.

Асимптотическое выражение (30) позволяет определить на луче  $\theta_j = \pi/3$  ширину особого каустического слоя, в котором не применимы формулы геометрической оптики

$$az = \frac{1}{2} - \tau \pm 2\rho^{-1/2}. \quad (31)$$

Как обычно [22–25], ширина  $\Delta$  особого каустического слоя (31) такого типа имеет порядок  $O(k_0^{-1/2})$ .

В заключение следует отметить, что все предыдущие вычисления легко переносятся на случай дифракции цилиндрической волны на неоднородном полупространстве.

Автор выражает глубокую благодарность Г. Т. Маркову и Е. Н. Васильеву за внимание к работе и Ю. А. Кравцову за обсуждение вопросов, затронутых в статье.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 497 (1966).
2. Л. М. Бреховских, Акуст. ж., 2, 124 (1956).
3. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
4. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
5. А. Н. Бархатов, И. И. Шмелев, Акуст. ж., 4, 100 (1958).
6. А. Н. Бархатов, Моделирование распространения звука в море, Гидрометеоиздат, Л., 1968.
7. И. Толстой, К. С. Клей, Акустика океана, изд. Мир, М., 1969.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1964.
9. R. N. Vischel, J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Math., 13, 85 (1960).
10. Ю. Л. Газарян, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 5, изд. ЛГУ, 1961, стр. 73.
11. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964); 7, № 6, 1049 (1964); 8, № 4, 659 (1965).
12. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., 19, 215 (1966).
13. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
14. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, 3 (1968).
15. С. В. Худяков, ЖЭТФ, 56, 938 (1969).
16. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
17. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1957.
18. C. Chester, B. Friedman, F. Ursell, Proc. Cambridge Philos. Soc., 53, № 3, 599 (1967).
19. В. С. Булдырев, сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, 5, изд. ЛГУ, 1961, стр. 153.
20. В. А. Фок, Таблица функций Эйри, Гостехиздат, М., 1946.
21. М. В. Федорюк, ЖВМ и МФ, 4, 671 (1964).
22. Л. Фельсен, Квазиоптика, изд. Мир, М., 1966, стр. 11.
23. L. B. Felsen, IEEE Trans., AP-12, 624 (1964).
24. I. Kay, J. B. Keller, J. Appl. Phys., 25, 876 (1954).
25. T. Pearcey, Phil Mag., 37, 311 (1946).
26. Ю. И. Орлов, Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Харьков, 1967, стр. 4.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
7 мая 1968 г.,  
после переработки  
24 июля 1969 г.

## A SHORTWAVE ASYMPTOTICS OF THE REFLECTED FIELD OF THE DIPOLE SITUATED OVER A NONUNIFORM LINEAR LAYER

*Yu. I. Orlov*

The diffraction of a spherical wave caused by a vertical magnetic dipole, on nonuniform linear semi-bounded plasma layer is considered. From exact integral representations of the Green's function, the asymptotic expressions are built for the reflected field in the presence of special katacaustic (the caustic of reflected rays) using the asymptotics and modification of the method. The formulas are derived and

Investigated for the field in the region of regularity of the ray field, in the vicinity of nonspecial branches of catacaustic and its reciprocity points. The widths of special and nonspecial catacaustic layers, in which the formulas of the geometrical optics are not used, are estimated. The obtained formulas are compared with the results of heuristic methods of the geometrical optics and standard functions.

---

УДК 621.372.8

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛОСКОГО ГИРОТРОПНОГО ВОЛНОВОДА

B. A. Буц

В работе рассматривается вопрос о возбуждении плазменного слоя, находящегося в поперечном магнитном поле ( $H_0 \perp k$ ), плоским волноводом. Задача отыскания амплитуд возбужденных полей при этом приводится к векторной задаче сопряжения аналитических функций. Показано, что в случаях слоя, ограниченного металлической или резонансной поверхностью, и слоя, симметрично расположенного относительно пластин внешнего волновода, векторная задача переходит в скалярную или систему скалярных. Выражения для амплитуд возбуждающихся при этом полей получены в квадратурах, а при наличии малых параметров — аналитически.

Задача о возбуждении плоским волноводом плазменного слоя, находящегося в поперечном внешнем магнитном поле ( $H_0 \perp k$ ), была рассмотрена в работе [1]. Однако найденные в ней симметричные по поперечной координате решения соответствуют слою плазмы, ограниченному резонансной поверхностью [2, 3]. Ниже рассматривается общий случай произвольного расположения плазменного слоя относительно стенок волновода.

Пусть плоский плазменный слой ( $-\infty < x < \infty, -a < y < a$ ), находящийся в поперечном внешнем магнитном поле ( $H_0 \parallel z$ ), с полубесконечными металлическими стенками ( $-\infty < x < 0, y = \pm a$ ) помещен в волновод, образованный двумя проводящими плоскостями ( $-\infty < x < \infty, y = -b, y = c$ ). Тензор диэлектрической проницаемости слоя имеет тот же вид, что и в [1]. Со стороны  $x = -\infty$  на слой набегает ТМ-волна. Определим амплитуды волн, возбуждаемых в полубесконечных плазменных волноводах ( $x > 0$ ) и ( $x < 0$ ).

Решение для полей будем искать в виде

$$H_z^{(1)} = e^{i\gamma_1 x} \cos [p(y+b)] + \int_{-\infty}^{\infty} h_1 \cos [v(y+b)] e^{itx} dt \quad (-b < y < -a),$$

$$H_z^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} [h_2 \cos (v_2 y) + h_4 \sin (v_2 y)] e^{itx} dt \quad (-a < y < a), \quad (1)$$

$$H_z^{(3)} = A e^{i\gamma_1 x} \cos [p_1(c-y)] + \int_{-\infty}^{\infty} h_3 \cos [v(c-y)] e^{itx} dt \quad (a < y < c),$$

где  $v^2 = k^2 - t^2$ ,  $v_2^2 = (k^2/\epsilon_1 - t^2)$ ,  $p = v(\gamma)$ ,  $p_1 = v(\gamma_1)$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_\perp / (\epsilon_\perp^2 - \epsilon_2^2)$ . Выражения (1) удовлетворяют уравнениям Максвелла, а неизвестные амплитуды  $h_s(t)$  должны быть определены из граничных условий. Так, если поверхность  $y = 0$  является резонансной, то  $h_4 = 0$ , и мы получаем результат, содержащийся в работе [1]. В общем случае, подставляя поля в граничные условия и пользуясь леммой Винера — Пэли [4], найдем связь неизвестных амплитуд Фурье  $h_s$  с граничными значениями функций, аналитическими в верхней (+) и нижней (—) полуплоскостях комплексной переменной  $t$ :

$$h_1 \cos [v(b-a)] - h_2 \cos (v_2 a) + h_4 \sin (v_2 a) + f = \Phi^+,$$

$$h_3 \cos [v(c-a)] - h_2 \cos (v_2 a) - h_4 \sin (v_2 a) + f_1 = \Psi^*,$$

$$Y(a) h_2 \cos (v_2 a) - Y_1(a) h_4 \sin (v_2 a) = \varphi^-, \quad (2)$$

$$Y(-a) h_2 \cos (v_2 a) + Y_1(-a) h_4 \sin (v_2 a) = \varphi^-,$$

$$Z h_1 \sin [v(b-a)] = \varphi^-, \quad Z h_3 \sin [v(c-a)] = \psi^-.$$

Здесь

$$f = \frac{\cos [p(b-a)]}{2\pi i(t-\gamma)}, \quad f_1 = \frac{A \cos [p_1(c-a)]}{2\pi i(t-\gamma_1)},$$

$$Y = Z_2 \operatorname{tg} (v_2 y) - \frac{t}{k} \varepsilon_{II}, \quad Y_1 = Z_2 \operatorname{ctg} (v_2 y) + \frac{t}{k} \varepsilon_{II},$$

$$Z = \frac{v}{ik}, \quad Z_2 = \frac{v_2}{ik} \varepsilon_I, \quad \varepsilon_{II} = \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}.$$

Исключая из (2) амплитуды  $h_s$ , получим следующую векторную задачу сопряжения для отыскания аналитических функций:

$$\Phi_i^+ = G_{ij} \Phi_j^- + F_i \quad (i, j = 1, 2),$$

где

$$\Phi_1^+ = \Phi^+ + \Psi^+, \quad \Phi_2^+ = \Phi^+ - \Psi^+, \quad \Phi_1^- = \varphi^-,$$

$$\Phi_2^- = \psi^-, \quad F_1 = f + f_1, \quad F_2 = f - f_1,$$

$$G_{11} = \left( \frac{1}{Z_b} - \frac{2Z_2 \operatorname{ctg} (v_2 a)}{\Delta} + \frac{2t \varepsilon_{II}}{k\Delta} \right), \quad Z_b = Z \operatorname{tg} [v(b-a)], \quad (3)$$

$$G_{12} = \left( \frac{1}{Z_c} - \frac{2Z_2 \operatorname{ctg} (v_2 a)}{\Delta} + \frac{2t \varepsilon_{II}}{k\Delta} \right), \quad Z_c = Z \operatorname{tg} [v(c-a)],$$

$$G_{21} = \left( \frac{1}{Z_b} + \frac{2Z_a}{\Delta} - \frac{2t \varepsilon_{II}}{k\Delta} \right), \quad G_{22} = - \left( \frac{1}{Z_c} + \frac{2Z_a}{\Delta} + \frac{2t \varepsilon_{II}}{k\Delta} \right),$$

$$Z_a = Z_2 \operatorname{tg} (v_2 a), \quad \Delta = -2 \left( Z_2^2 + \frac{t^2}{k^2} \varepsilon_{II} \right).$$

Индекс системы (3) равен нулю, а искомые аналитические функции исчезают на бесконечности ( $t \rightarrow \infty$ ), поэтому эта система имеет единственное решение [5], которое может быть получено численными методами [6].

Рассмотрим те предельные случаи, в которых система (3) упрощается и позволяет получить решение в квадратурах, а при наличии параметров и аналитически.

1. Пусть  $b = a$ , тогда векторная задача (3) становится скалярной:

$$\Psi^+ = G \Psi_1^- + f_1, \quad (4)$$

где

$$\Psi_1^- = \frac{\psi^- N}{t-i}, \quad N = -ik(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$G = \frac{t-i}{N} \left[ \frac{1}{Z_c} + \frac{Z_2 [\operatorname{ctg}(v_2 a) - \operatorname{tg}(v_2 a)]}{\Delta} + \frac{2t \epsilon_{II}}{k \Delta} \right].$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$\Psi_1^+ = f_1 \left[ 1 - \frac{X^+}{X^+(\gamma_1)} \right], \quad \Psi_1^- = -f_1 \frac{X^-}{X^-(\gamma_1)}, \quad (5)$$

где  $X^+$  и  $X^-$  — ограниченные на бесконечности решения соответствующей однородной задачи:

$$X^+ = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln G dt}{t-t_0} \right), \quad X^- = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln G dt}{t-t_0} \right). \quad (6)$$

Интеграл в  $X^+$  вычисляется при обходе полюса  $t = t_0$  в верхней полуплоскости, а в  $X^-$  — в нижней.

При наличии малого параметра интегралы в (6) могут быть вычислены аналитически. Так, в случае плотной плазмы ( $\omega_p^2 \gg \omega^2$ ,  $\omega_p^2 \gg \omega_H^2$ )

$$X^+ = X^- = 1, \quad \Psi^+ = 0, \quad \psi^- = f_1 \frac{\omega \omega_H}{ik \omega_p^2} \left( t - k \frac{\omega_p}{\omega_H} \right). \quad (7)$$

Заменив ориентацию внешнего магнитного поля на противоположную, получим

$$\Psi^+ = 0, \quad \psi^- = \frac{k \omega}{i \omega_H} \frac{f_1}{\left( t - k \frac{\omega_p}{\omega_H} \right)}. \quad (8)$$

Зная аналитические функции, с помощью (2) и (1) легко найти выражение для полей, возбужденных в правом плазменном волноводе ( $x > 0$ ). Отношение амплитуд этих полей при различной ориентации внешнего магнитного поля равно

$$R \sim \left( 1 + \frac{\omega_H}{\omega_p} \right). \quad (9)$$

Если параметры плазмы таковы, что выполняется, например, одно из следующих неравенств:

- 1)  $\omega^2 \ll \omega_p^2 \ll \omega_H^2$ ,  $\omega \omega_H \ll \omega_p^2$ ;
- 2)  $(\omega_p^2 - \omega^2) \ll \omega_H^2 \ll 1$ ;
- 3)  $\omega_H^2 \ll (\omega_p^2 - \omega^2) \ll 1$ ,

то под интегралом в (6) можно положить  $G \sim (t-i)/NZ_c$ . Пользуясь при этом разложением целой функции в произведение бесконечного числа функций [7], получим следующие выражения для аналитических функций:

$$\Psi^+ = f_1 \left( 1 - \sqrt{k+\gamma_1} L^+(\gamma_1) / \sqrt{t+k} L^+ \right), \quad (10)$$

$$\psi^- = -ik \sqrt{k-t} L^- \sqrt{\gamma_1+k} L^+(\gamma_1) f_1,$$

где

$$L^+ = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(t+t_m)}{t_m(t+t_n)}, \quad L^- = \operatorname{tg}[k(c-a)] \prod_{n=1}^{\infty} \frac{t_n(t_m-t)}{t_m(t_n-t)},$$

$$t_n^2 = k^2 \left[ 1 + \pi^2 \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 / k^2(c-a)^2 \right], \quad m = n + \frac{1}{2}.$$

2. Пусть  $c = b$ . Плазменный слой в этом случае расположен симметрично относительно пластин волновода и не обладает невзаимностью. Векторная задача (3) при этом распадается на две скалярные:

$$\Phi_1^+ = G_{11} (\Phi_1^- + \Phi_2^-) + F_1; \quad (11)$$

$$\Phi_2^+ = G_2 (\Phi_1^- - \Phi_2^-) - \frac{2t\epsilon_{11}}{k\Delta} (\Phi_1^- + \Phi_2^-) + F_2, \quad (12)$$

где  $G_2 = (1/Z_b + 2Z_a/\Delta)$ .

Решая вначале (11) и подставляя результат в (12), легко найти в квадратурах общее решение этой системы. При наличии малого параметра аналитический результат можно получить так же, как в п. 2.

В заключение автор благодарит В. И. Курилко за постоянную помощь и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Буц, УФЖ, 14, № 2, 268 (1969).
2. М. А. Гинцбург, ЖЭТФ, 34, № 6, 1635 (1958).
3. И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 5, 987 (1964).
4. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, изд. Наука, М., 1964.
5. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. Физматгиз, М., 1962.
6. В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, изд. Наукова думка, Киев, 1968.
7. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию  
6 июня 1969 г.

#### EXCITATION OF A PLANE GYROTROPIC WAVEGUIDE

V. A. Buts

The paper deals with excitation of plasma layer lying in a transverse magnetic field ( $H_0 \perp k$ ) by a plane waveguide. The problem of determining the amplitudes of excited fields in this case is reduced to the vector problem of conjugation of analytical functions. It is shown that in the case of the layer bounded by a metal or resonance surface and in the case of the layer symmetrically situated relative to plates of the outer waveguide, the vector problem is reduced to a scalar or the system of scalars. The expressions for the amplitudes of excited fields are derived in quadratures and for the small parameters they are analytically obtained.

УДК 621.372.8 : 621 372 413

## ТЕОРИЯ РЕЗОНАТОРОВ С НЕВЗАИМНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

B. A. Буц

Построена строгая теория плоского резонатора, заполненного невзаимным ферритом. Показано, что в общем случае для вычисления коэффициентов, входящих в формулу, определяющую частоту колебаний такого резонатора, необходимо решить векторную задачу сопряжения для аналитических функций. При наличии малых параметров она упрощается и решение ее может быть получено аналитически. Подробно рассмотрен случай ферритовой пластины, прилегающей к нижней стенке резонатора, при  $\mu_{\perp} \gg 1$ ; получены поправки к частоте, обусловленные гиротропией.

Теория резонаторов, заполненных взаимной гиротропной средой, основанная на решении соответствующей бесконечной волноводной задачи, достаточно хорошо разработана [1–2]. Аналитическое рассмотрение резонаторов с невзаимным заполнением до сих пор проводилось только в квазистатическом приближении, когда линейные размеры среды малы по сравнению с длиной волны [3, 4]\*. Сложность построения строгой теории такого резонатора обусловлена тем, что при отражении электромагнитной волны из-за различия в структуре прямых и обратных волн происходит возбуждение всех собственных типов колебаний. Определение амплитуд этих колебаний наталкивается на существенные математические трудности [5].

В данной работе на примере плоского резонатора, частично заполненного поперечно намагниченным ферритом, показан возможный способ построения строгой теории резонаторов с невзаимной средой. Вначале рассмотрена ключевая задача об отражении электромагнитной волны, распространяющейся в полубесконечном плоском волноводе с поперечно намагниченной ферритовой пластиной, от проводящей поверхности, перпендикулярной оси волновода. Результаты решения этой задачи используются для построения теории резонатора.

1. Пусть в полубесконечном ( $y < 0$ ) волноводе, образованном идеально проводящими плоскостями ( $x = 0$ ,  $x = c$ ) и частично заполненном поперечно намагниченным ( $H_0 \parallel z$ ) ферритом ( $a < x < b$ ), со стороны  $y = -\infty$  распространяется волна, которая отражается от проводящего торца  $y = 0$ . Определим амплитуды возбуждаемых при этом волн. Магнитная проницаемость ферритовой пластины представляется тензором

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}.$$

\* Универсальные алгоритмы численного расчета резонаторов с гиротропным заполнением можно найти, например, в монографии В. В. Никольского «Вариационные методы для внутренних задач электродинамики», изд. Наука, М., 1967.

Поля будем искать в виде

$$E_z^{(1)} = A \sin(px) e^{ity} - A \sin(px) e^{-ity} + \int_{-\infty}^{\infty} h_1 \sin(vx) e^{-ity} dt \quad (0 < x < a),$$

$$E_z^{(2)} = \{C \sin[g(x-a)] + D \cos[g(x-a)]\} e^{ity} - \{C \sin[g(x-a)] +$$

$$+ D \cos[g(x-a)]\} e^{-ity} + \int_{-\infty}^{\infty} \{h_2 \sin[v_1(x-a)] +$$

$$+ h_4 \cos[v_1(x-a)]\} e^{-ity} dt \quad (a < x < b), \quad (1)$$

$$E_z^{(3)} = B \sin[p(c-x)] e^{ity} - B \sin[p(c-x)] e^{-ity} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} h_3 \sin[v(c-x)] e^{-ity} dt \quad (b < x < c),$$

где

$$v^2 \equiv k^2 - t^2, \quad v_1^2 \equiv k^2 \mu_{\perp} - t^2, \quad p = v(\gamma), \quad g = v_1(\gamma),$$

$$\mu_{\perp} \equiv \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu}, \quad D = A \sin(pa), \quad C = A \sin(pa) \frac{Y_0^*}{\beta_0},$$

$$B = A \frac{L_{10}}{\beta_0} \frac{\sin(pa)}{\sin[p(c-b)]}, \quad \beta \equiv \frac{v_1}{ik\mu_{\perp}}, \quad Y \equiv \left[ \frac{\mu_a t}{ik\mu\mu_{\perp}} + Z \operatorname{ctg}(va) \right],$$

$$L_1 \equiv \sin v_1(b-a) \{Y_1^* + \beta \operatorname{ctg}[v_1(b-a)]\}, \quad Z \equiv \frac{v}{ik},$$

$$Y_1 \equiv \left\{ \frac{\mu_a t}{ik\mu\mu_{\perp}} + Z \operatorname{ctg}[v(c-b)] \right\}.$$

Индексом 0 здесь и ниже обозначены значения функций в точке  $t=\gamma$  ( $L_{10} = L_1(\gamma)$ ), а звездочками отмечены функции, отличающиеся знаком аргумента:  $Y^* = Y(-t)$ .

Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла. Первые слагаемые в (1) представляют собой падающие волны, вторые—отраженные, без учета гиротропии, интегралы описывают поле, возникающее благодаря эффекту невзаимности. Неизвестные амплитуды  $h_s(t)$  этих полей должны быть определены из граничных условий и условия ограниченности поля вблизи угловых точек ( $x = a, b, y = 0$ ) (условие Мейкснера). Подставляя поля в граничные условия на поверхности феррита и пользуясь леммой Винера—Пэли [6], получим связь неизвестных компонент Фурье  $h_s$  с функциями, аналитическими в верхней полуплоскости (+) комплексной переменной  $t$ :

$$h_1 \sin(va) - h_4 = z^+,$$

$$h_3 \sin[v(c-b)] - h_2 \sin[v_1(b-a)] - h_4 \cos[v_1(b-a)] = \xi^+, \quad (2)$$

$$h_4 Y - \beta h_2 + f = \varphi^+, \quad h_4 L_2 + h_2 L_1 - f_1 = \psi^+,$$

где

$$L_2 \equiv \cos[v_1(b-a)] \{Y_1^* - \beta \operatorname{tg}[v_1(b-a)]\},$$

$$f \equiv \frac{A \sin(pa) (Y_0 - Y_0^*)}{2\pi i (t - \gamma)}, \quad f_1 \equiv \frac{A \sin(pa) [\Delta_0 + L_{10} (Y_0^* - Y_0)]}{2\pi i \beta_0 (t - \gamma)},$$

$$\Delta \equiv YL_1 + \beta L_2.$$

Границные условия на торце дают [7, 8]

$$h_s = -h_s^*. \quad (3)$$

Используя это соотношение и условие Мейкснера, из которого в нашем случае следует обращение в нуль аналитических функций на бесконечности, получим

$$\xi^+ = 0, \quad \kappa^+ = 0. \quad (4)$$

Тогда для определения неизвестных  $h_s$  получим следующую векторную задачу сопряжения аналитических функций  $\varphi^+$  и  $\psi^+$ :

$$\Phi_i^+ = G_{ij} \Phi_j^- + F_i \quad (i, j = 1, 2). \quad (5)$$

Здесь

$$\Phi_1^\pm \equiv \psi^\pm, \quad \Phi_2^\pm \equiv \varphi^\pm, \quad \psi^- \equiv \psi^+(-t), \quad \varphi^- \equiv \varphi^+(-t),$$

$$G_{11} \equiv \frac{1}{\Delta^*} [\beta L_2 + Y^* L_1], \quad G_{12} \equiv \frac{1}{\Delta^*} [L_2 L_1^* - L_1 L_2^*],$$

$$G_{21} \equiv \frac{1}{\Delta^*} \beta (Y - Y^*), \quad G_{22} \equiv \frac{1}{\Delta^*} [YL_1^* + \beta L_2^*],$$

$$F_1 \equiv G_{11} f_1^* - G_{12} f^* - f_1, \quad F_2 \equiv G_{21} f_1^* - G_{22} f^* + f.$$

Индекс этой задачи равен нулю, поэтому исчезающее на бесконечности решение является единственным [9]. В общем случае это решение можно получить численно [10], однако при наличии малых параметров задача отыскания решения упрощается.

Если пластина прилегает к нижней стенке волновода ( $a = 0$ ), то  $G_{12} = G_{21} = 0$ ,  $G_{11} = 1$  и векторная задача (5) сводится к скалярной [11]. Если  $\mu_\perp \gg 1$  или  $\mu \gg \mu_a$ , решение векторной задачи может быть получено методом итераций. В нулевом приближении по параметру  $\mu_a/\mu\mu_\perp$  получим

$$\psi^+ = f_1^*, \quad \varphi^+ = -f^*. \quad (6)$$

Подставляя эти значения в (2), мы найдем  $h_s$ . Зная  $h_s$ , из (1) определим коэффициенты возбуждения  $a_{mn}$  волн с номером  $m$  и волновым числом  $\tau_m$ , бегущих справа налево при падении на торец волны с номером  $n$  и волновым числом  $\gamma_n$ , бегущей слева направо:

$$a_{mn} = \frac{2\gamma_m B \sin[p(c-b)] \sin[v_1(b-a)]}{L_{10} \sin[v(c-b)] (\gamma_m^2 - \gamma_n^2)} \left\{ [\Delta_0 Y - (Y_0 - Y_0^*) (YL_{10} + \beta_0 L_2)] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg}[v_1(b-a)] [\Delta_0 \beta - (Y_0 - Y_0^*) (\beta L_{10} - \Delta_1 \beta_0)] \right\} |_{\gamma_m}. \quad (7)$$

**2.** Применим теперь полученные выше результаты к резонатору с невзаимной ферритовой пластиной. Обозначим через  $b_{nm}$  коэффициенты трансформации волны с номером  $m$  в волну с номером  $n$ . Пусть теперь в резонаторе длиной  $L$  возбуждаются волны с амплитудами  $B_n$ . Приравнивая эти амплитуды амплитудам волн, которые получаются

в результате взаимной трансформации всех возбужденных колебаний на правой и левой стенках резонатора, получим следующее условие существования стационарных колебаний:

$$B_n = \sum_{m,s} b_{nm} \{ a_{ms} B_s \exp [iL(\gamma_s + \tau_m)] \}, \quad (8)$$

которое определяет в общем случае собственные частоты колебаний резонатора с невзаимной средой.

Найдем эти частоты для случая, когда пластина прилегает к нижней стенке резонатора, а  $\mu_\perp \gg 1$ . Для этого, положив в (7)  $a = 0$ , получаем

$$a_{mn} = - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{\mu_a}{\mu \mu_\perp} \frac{\gamma_n(c-b)}{n^2 - m^2} \Big|_{m \neq n}, \quad a_{mn} = - \left( \frac{\gamma_n}{\tau_m} \right) \Big|_{m=n}, \quad (9)$$

$\gamma_n$  и  $\tau_m$  здесь определяются дисперсионным уравнением

$$\lambda \operatorname{ctg} \lambda = A, \quad (10)$$

где

$$\lambda \equiv v(c-b), \quad A \equiv - \left[ k(c-b) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_\perp}} \operatorname{ctg}(kb) \sqrt{\epsilon \mu_\perp} \pm \frac{\mu_a}{\mu \mu_\perp} \gamma_n(c-b) \right].$$

Считая  $A \ll 1$ , находим

$$t^2 = k^2 - \left( \frac{\pi n}{2(c-b)} \right)^2 + \frac{2A}{(c-b)^2} \quad (n = 1; 3; 5; \dots).$$

Верхний знак в  $A$  относится к волнам, идущим слева направо ( $\gamma_n$ ), нижний — к волнам, идущим справа налево ( $\tau_m$ ). Значения  $b_{nm}$  получаются из выражения для  $a_{mn}$  заменой в нем  $\gamma_n$  на  $\tau_m$  и наоборот.

Предположим теперь, что поперечные размеры резонатора таковы, что распространяются только два типа волн ( $m, n = 1, 3$ ). Тогда, сохранив в (8) члены, квадратичные по  $\mu_a/\mu \mu_\perp$ , получим следующее уравнение для определения резонансных частот:

$$\{\exp[iL(\gamma_1 + \tau_1)] - 1\} \{\exp[iL(\gamma_3 + \tau_3)] - 1\} = \alpha \{\tau_1 \gamma_3 \exp[iL(\gamma_3 + \tau_1)] + \gamma_1 \tau_3 \times \\ \times \exp[iL(\gamma_1 + \tau_3)] - (\gamma_1 \gamma_3 + \tau_1 \tau_3) \exp[iL(\gamma_1 + \tau_1 + \gamma_3 + \tau_3)]\}, \quad (12)$$

где

$$\alpha \equiv (2/\pi)^4 (\mu_a/\mu \mu_\perp)^2 [(c-b)/2]^2.$$

При отсутствии гиротропии  $\alpha = 0$  и

$$\gamma_1 = \frac{\pi s}{L}, \quad \gamma_3 = \frac{\pi m}{L} \quad (s, m = 1; 2; 3; \dots). \quad (13)$$

Если  $\alpha \neq 0$ , то решение можно искать в виде

$$\gamma_1 + \tau_1 = \frac{2\pi s}{L} + \frac{\xi}{\Delta}, \quad \gamma_3 + \tau_3 = \frac{2\pi m}{L} + \frac{\xi_1}{\Delta}, \quad (14)$$

где  $\xi$  и  $\xi_1$  — малые добавки, обусловленные гиротропией. Подставляя (14) в (12), легко определить  $\xi$  и  $\xi_1$ . Особый интерес представляет случай вырождения ( $\omega_1 = \omega_3$ ), когда условия (14) выполняются одновременно. Тогда при нечетном ( $s+m$ )

$$\xi \xi_1 = \alpha \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 sm, \quad \xi = -\frac{W}{2} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4} + V}, \quad (15)$$

где

$$W \equiv \frac{\pi}{m} \left[ m^2 - s^2 + \frac{2L^2}{(c-b)^2} \right], \quad V = \alpha \left( \frac{2\pi s}{L} \right)^2.$$

Так как  $\xi \ll 1$  и  $\xi_1 \ll 1$ , необходимо, чтобы  $W \ll 1$ . При  $W \ll V$  (случай, аналогичный вырождению в резонаторе с изотропной средой)

$$\xi = \pm \frac{2\pi s}{L} \sqrt{\alpha}, \quad \xi_1 = \pm \frac{2\pi m}{L} \sqrt{\alpha}. \quad (16)$$

Здесь нужно одновременно брать либо верхние, либо нижние знаки.

Таким образом, при вырождении поправки пропорциональны первой степени ( $\mu_a/\mu_{\perp}$ ) и происходит расщепление резонансной линии. Если  $(s+m)$  — четно, то

$$\xi \sim \xi_1 \sim \left( \frac{\mu_a}{\mu_{\perp}} \right)^{3/2}. \quad (17)$$

В заключение автор благодарит В. И. Курилко за постоянную помощь в работе и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Радиотехника и электроника, 3, № 12, 1475 (1958).
2. И. П. Якименко, Т. Р Кельнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 815 (1967).
3. В. В Никольский, Радиотехника и электроника, 1, № 4, 447; № 5, 638 (1956)
4. В. Н. Васильев, Радиотехника и электроника, 1, № 11, 1444 (1956)
5. П. Эпштейн, УФН, 65, № 2, 283 (1958).
6. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной плоскости, изд. Наука, М., 1964.
7. С. С. Калмыкова, В. И Курилко, ДАН СССР, 154, № 5, 1066 (1964); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 796 (1964).
8. В. А. Буз, С С Калмыкова, В. И Курилко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 92 (1968).
9. Н И Мусхелишивили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
10. В. В. Иванов, Теория приближенных методов, изд. Наукова думка, Киев, 1968.
11. В. А. Буз, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 4, 628 (1969).

Поступила в редакцию  
7 апреля 1969 г

#### THEORY OF RESONATORS WITH NONMUTUAL FILLING

V. A. Buts

A strict theory of a plane resonator with nonmutual ferrite filling is developed. It is shown that in the general case it is necessary to solve the vector problem of conjugation for analytical functions in order to calculate the coefficients entering the formula which determines the frequency of such resonator oscillations. For the small parameters, the formula is simplified and its solution can analytically be obtained. The case of a ferrite plate adjacent to the lower wall of the resonator is considered in detail at  $\mu_{\perp} \gg 1$ . The corrections for the frequency caused by gyrotropy are obtained.

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ

B. I. Розенберг

На основе строгого решения задачи дифракции и рассеяния электромагнитных волн произвольно расположенного и ориентированного в пространстве дипольного излучателя на шаре с неконцентрическим шаровым включением получены выражения для случая плоской волны. Найдены эффективные площади радиолокационного и полного рассеяний, ослабления, а также интенсивность, диаграмма и индикаториса рассеяния. Приводятся примеры численного расчета на ЭВМ.

### 1. ШАР С НЕОДНОРОДНЫМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ПОЛЕ ДИПОЛЬНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ\*

Пусть в безграничном пространстве (среда 1) расположен шар радиуса  $b$  (среда 2) с центром в точке 0 с шаровым включением (среда 3) радиуса  $a$  с центром в точке  $O_1$ , причем границы сред 2 и 3 не имеют общих точек (рис. 1). Предположим также, что в некоторой точке  $A$  среды 1 ( $A_0 = h > b$ ) находится источник возбуждения электромагнитных волн, представляющий собой элементарный электрический диполь момента  $pe^{-i\omega t}$ , произвольно ориентированный в пространстве. При этом  $p_1e^{-i\omega t}$  — его горизонтальная, а  $p_2e^{-i\omega t}$  — вертикальная составляющие. Диэлектрическая ( $\epsilon_j$ ) и магнитная ( $\mu_j$ ) проницаемости каждой из трех сред ( $j = 1, 2, 3$ ) считаются произвольными комплексными числами.

Ставится задача определения вторичных электромагнитных полей во всех трех средах.

Введем три декартовых системы координат  $XYZ$ ,  $X_1Y_1Z_1$  и  $X_2Y_2Z_2$  так, как это показано на рис. 1. Здесь  $\varphi_0$  и  $\theta_0$  — углы Эйлера, которые однозначно определяют положение системы координат  $X_1Y_1Z_1$  для всех  $\theta_0 \neq 0; \pi$ . Если же  $\theta_0 = 0; \pi$  (это соответствует

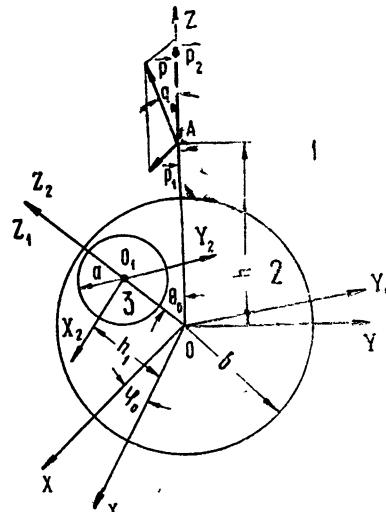


Рис. 1.

\* В работе [1], содержащей строгое решение данной задачи, имеется ряд неточностей, обусловленных использованием разложений других авторов, в основу которых положены различные определения функций  $P_n^m(z)$ . Так, например, при принятом в формуле (3.3.20) работы [1] определении функций  $P_n^m(z)$  выражения (3.3.30), (3.3.24), (7.1.5), (7.1.24), (7.1.28) и др. неверны. Это приводит также к неточности выражения для составляющей падающего поля  $H_r^{(0)}$  (7.2.12). Если же в качестве определения  $P_n^m(z)$  принять выражение (3.3.30), то неточной будет составляющая  $E_r^{(0)}$ . Эти и другие неточности (например, (3.4.24), выражение для  $W_2(\theta_1, \varphi)$  на стр. 382, 385) требуют корректировки окончательных результатов.

положению точки  $O_1$  на оси  $Z$ ), то будем предполагать для обоих случаев как  $\theta_0 = 0$ , так и  $\varphi_0 = 0$ .

Связем с каждой из декартовых систем сферические координаты:  $XYZ - r, \theta, \varphi; X_1 Y_1 Z_1 - r, \theta_1, \varphi_1; X_2 Y_2 Z_2 - r_2, \theta_2, \varphi_1$ , причем  $0 \leq \theta, \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ ,  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ . Выпишем решение задачи:

$$\begin{aligned} E_r^{(j)} &= \frac{\partial^2(rU_j)}{\partial r^2} + k_j^2(rU_j), & H_r^{(j)} &= \frac{\partial^2(rV_j)}{\partial r^2} + k_j^2(rV_j), \\ E_\theta^{(j)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU_j)}{\partial r \partial \theta} - \frac{\beta_j}{r \sin \theta} \frac{\partial(rV_j)}{\partial \varphi}, & H_\theta^{(j)} &= \frac{\alpha_j}{r \sin \theta} \frac{\partial(rU_j)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV_j)}{\partial r \partial \theta}, \\ E_\varphi^{(j)} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rU_j)}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\beta_j}{r} \frac{\partial(rV_j)}{\partial \theta}, & H_\varphi^{(j)} &= -\frac{\alpha_j}{r} \frac{\partial(rU_j)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rV_j)}{\partial r \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E_{r, \theta, \varphi}^{(j)}$ ,  $H_{r, \theta, \varphi}^{(j)}$  — соответственно проекции векторов  $E$  и  $H$  среды  $j$  в сферической системе  $r, \theta, \varphi$ ;  $\alpha_j = -i\epsilon_j\omega$ ;  $\beta_j = -i\mu_j\omega$ ;  $k_j^2 = -\alpha_j\beta_j = \omega^2\epsilon_j\mu_j$ , причем  $\operatorname{Re} k_j > 0$ ;  $\omega = 2\pi c/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волн,  $c$  — скорость света в среде 1;  $T_0 = \{U_0, V_0\}$ ,  $T_{1B} = \{U_{1B}, V_{1B}\}$ ,  $T_j = \{U_j, V_j\}$ ,  $T_0$  и  $T_{1B}$  — потенциалы\*. Дебая, соответствующие первичному ( $E^{(0)}, H^{(0)}$ ) и вторичному ( $E^{(1B)}, H^{(1B)}$ ) электромагнитным полям в первой среде,  $T_j$  — суммарному полю в  $j$  среде;  $T_1 = T_0 + T_{1B}$ . При  $r < h$

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 t_{0n}^m j_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2)$$

где

$$t_{0n}^m = \begin{cases} -n(n+1)\beta_0 t_{1n} & (m = -1) \\ t_{2n} & (m = 0) \\ \alpha_0 t_{1n} & (m = 1) \\ 0 & (|m| > 1) \end{cases} \quad (3)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots);$

$$t_{1n} = \left\{ -\frac{ik_1 |p_1|}{h} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta'_n(k_1 h), \quad -i\alpha_1 k_1 |p_1| \frac{2n+1}{n(n+1)} h_n(k_1 h) \right\}$$

$(n = 1, 2, \dots);$

$$t_{10} = \{0, 0\}; \quad (4)$$

$$t_{2n} = \{ik_1 h^{-1} |p_2| h_n(k_1 h) (2n+1), 0\};$$

$$\alpha_0 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{i}{2} \right\}, \quad \beta_0 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{i}{2} \right\},$$

$$\zeta_n(x) = x h_n(x), \quad \zeta'_n(x) = \frac{d}{dx} \zeta_n(x).$$

Для  $r > h$

\* Здесь и в дальнейшем совокупность двух выражений (разделенных запятой) в фигурных скобках следует понимать так, что первое из них соответствует потенциалу  $U$ , второе  $V$ .

$$T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 t_{0n}^{*m} h_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где

$$t_{0n}^{*m} = \begin{cases} -n(n+1)\beta_0 t_{1n}^* & (m = -1) \\ t_{2n}^* & (m = 0) \\ \alpha_0 t_{1n}^* & (m = 1) \\ 0 & (|m| > 1) \end{cases}$$

 $(n = 0, 1, 2, \dots);$ 

$$t_{1n}^* = \left\{ -\frac{i k_1 |p_1|}{h} \frac{2n+1}{n(n+1)} \psi'_n(k_1 h), -i \alpha_1 k_1 |p_1| \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_1 h) \right\}$$

$$(n = 1, 2, \dots);$$

$$t_{10}^* = \{0, 0\};$$

$$t_{2n}^* = \left\{ \frac{i k_1 |p_2|}{h} j_n(k_1 h) (2n+1), 0 \right\};$$

$$\psi_n(x) = x j_n(x), \quad \psi'_n(x) = \frac{d}{dx} \psi_n(x);$$

$$T_1 = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m h_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m j_n(k_2 r) P_n^m(\cos \theta_1) e^{im\varphi_1} + C_n^m h_n(k_2 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(im\varphi_1); \quad (6)$$

$$T_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_n^m j_n(k_3 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(im\varphi_1); \quad (7)$$

$$A_n^m = \frac{q_2 i}{k_2 b \delta_n} \sum_{l=-n}^n B_n^l a_{nm}^l - \frac{\delta_n^{(3)}}{\delta_n} t_{0n}^m;$$

$$\delta_n^{(3)} = q_1 j_n(k_1 b) \zeta'_n(k_2 b) - q_2 \psi'_n(k_1 b) h_n(k_2 b);$$

$$a_{nm}^l = (-1)^{m+l} \exp(-im\varphi_0) \left[ \frac{(n+l)! (n-m)!}{(n-l)! (n+m)!} \right]^{1/2} P_{l,m}^n(\cos \theta_0),$$

$q_j = \{ \alpha_j, \beta_j \}$ ,  $P_{m,r}^n(z)$  — функции, через которые выражаются [2, 3] матричные элементы неприводимых представлений  $T_l(g)$  группы  $SL(2, C)$ ,

$$D_n^l = \frac{q_2 i}{k_2 a \delta_n^{(1)}} C_n^l, \quad (8)$$

$$\delta_n^{(1)} = q_2 j_n(k_2 a) \psi'_n(k_3 a) - q_3 \psi'_n(k_2 a) j_n(k_3 a);$$

$$B_n^l = b_n^l \sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l)!}} \frac{(2n+1)!!}{(k_2 b)^n}, \quad C_n^l = c_n^l \sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l)!}} \frac{(k_2 a)^n}{(2n+1)!!}, \quad (9)$$

$b_n^l$  и  $c_n^l$  удовлетворяют\* бесконечной алгебраической системе, разрешимой в  $l_2$ :

$$\begin{aligned} b_n^l + \sum_{p=|l|}^{\infty} c_p^l S_{np}^l &= \Phi_n^l, \\ c_n^l &= \sum_{p=|l|}^{\infty} b_p^l L_{np}^l, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$S_{np}^l = \left[ \frac{(n+l)! (p-l)!}{(n-l)! (p+l)!} \right]^{1/2} \frac{\delta_n(k_2 a)^p (k_2 b)^n}{\Omega_n (2n+1)!! (2p+1)!!} F_{np}^l,$$

$$L_{np}^l = \left[ \frac{(n+l)! (p-l)!}{(n-l)! (p+l)!} \right]^{1/2} \frac{\omega_n (2n+1)!! (2p+1)!!}{(k_2 a)^n (k_2 b)^p} K_{np}^l,$$

$$\Phi_n^l = \frac{(k_2 b)^n}{(2n+1)!! \Omega_n} [f_{n,l}^{(1)} + f_{n,l}^{(2)} + f_{n,l}^{(3)}],$$

$$\Omega_n = q_2 j_n(k_2 b) \zeta'_n(k_1 b) - q_1 \psi'_n(k_2 b) h_n(k_1 b),$$

$$\delta_n = q_2 h_n(k_2 b) \zeta'_n(k_1 b) - q_1 \zeta'_n(k_2 b) h_n(k_1 b),$$

$$\delta_n^{(2)} = q_2 h_n(k_2 a) \psi'_n(k_3 a) - q_3 \zeta'_n(k_2 a) j_n(k_3 a),$$

$$\omega_n = -\delta_n^{(1)} [\delta_n^{(2)}]^{-1},$$

$$f_{n,l}^{(1)} = -[P_{-1,l}^n(\cos \theta_0) - P_{1,l}^n(\cos \theta_0)] T_n^{(1)},$$

$$f_{n,l}^{(2)} = [P_{-1,l}^n(\cos \theta_0) + P_{1,l}^n(\cos \theta_0)] T_n^{(2)},$$

$$f_{n,l}^{(3)} = P_{0,l}^n(\cos \theta_0) T_n^{(3)},$$

$$T_n^{(1)} = \frac{q_1 i t_{1n} \sqrt{n(n+1) \alpha_{0,0}}}{2 k_1 b}, \quad T_n^{(2)} = -\frac{q_1 t_{1n} \sqrt{n(n+1) \beta_{0,0}}}{2 k_1 b},$$

$$T_n^{(3)} = \frac{q_1 i}{k_1 b} t_{2n},$$

$$\alpha_{0,0} = \{ \cos \varphi_0, \sin \varphi_0 \}, \quad \beta_{0,0} = \{ \sin \varphi_0, -\cos \varphi_0 \},$$

$$F_{np}^l = \frac{(p+l)!}{(p-l)!} (2n+1) i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^{-\sigma+2\sigma \cos(\theta_0/2)} j_\sigma(k_2 h_1) \delta_{\sigma p n}^l,$$

$$K_{np}^l = \frac{(p+l)!}{(p-l)!} (2n+1) i^{n-p} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^{\sigma-2\sigma \sin(\theta_0/2)} j_\sigma(k_2 h_1) \delta_{\sigma p n}^l,$$

$$\delta_{\sigma p n}^l = \frac{2\sigma+1}{2} \int_{-1}^1 P_p^{-l}(x) P_n^{-l}(x) P_\sigma(x) dx.$$

\* В аналогичных случаях обычно используются другие преобразования переменных (см., например, [1] и др.), в которых выражения  $\frac{(2n+1)!!}{(k_2 b)^n}$  и  $\frac{(k_2 a)^n}{(2n+1)!!}$  из (9) заменены соответственно функциями  $h_n(k_2 b)$  и  $j_n(k_2 a)$ . Помимо усложнения вычислительных аспектов задачи такая замена теряет смысл и не приводит к окончательным результатам в случае, если  $(k_2 a)$  — корень уравнения  $j_n(z) = 0$ .

Здесь  $\theta_{01}$  — сферическая координата  $\theta_1$  начала  $0_1$ ; штрих в сумме означает, что суммирование распространяется на индексы, имеющие ту же четность, что и верхний индекс суммирования.

Выпишем решения важных для практики случаев вертикального ( $q_0 = 0$ ) и горизонтального ( $q_0 = \pi/2$ ) диполей и соответствующие им вторичные поля в среде 1.

*Вертикальный диполь.* В этом случае  $\varphi_0 = \pi/2$ ,

$$T_{1B} = \frac{1}{k_1 r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m A_n^m \zeta_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi),$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \geq 1) \end{cases},$$

значения составляющих напряженности вторичного поля в дальней зоне среды 1

$$E_{\theta}^{(1B)} = \chi_0 H_{\varphi}^{(1B)} = \frac{\exp(i k_1 r)}{r} S_1(\theta, \varphi), \quad E_{\varphi}^{(1B)} = -\chi_0 H_{\theta}^{(1B)} = -\frac{2 \exp(i k_1 r)}{r} S_2(\theta, \varphi),$$

где

$$S_1(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m A_n^m i^{-n} \tau_n^m \cos(m\varphi), \quad \chi_0 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1},$$

$$S_2(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n m A_n^m i^{-n} \pi_n^m \sin(m\varphi),$$

$$\tau_n^m = \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta), \quad \pi_n^m = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}.$$

*Горизонтальный диполь.* В этом случае  $q_0 = \pi/2$  и  $f_{n,l}^{(3)} = 0$ . Обозначая в дальнейшем решения системы (10)  $b_n^l$ ,  $c_n^l$  и выражающиеся через них  $B_n^l$ ,  $C_n^l$ ,  $A_n^l$ , соответствующие случаю  $T = U$ , — через  $\tilde{b}_n^l$ ,  $\tilde{c}_n^l$ ,  $\tilde{B}_n^l$ ,  $\tilde{C}_n^l$ ,  $\tilde{A}_n^l$ , а  $T = V$  — через  $b_n^l$ ,  $c_n^l$ ,  $\tilde{B}_n^l$ ,  $\tilde{C}_n^l$ ,  $\tilde{A}_n^l$ , можно показать, что в приближении дальней зоны среды 1 справедливы следующие выражения:

$$E_r \sim 0, \quad H_r \sim 0,$$

$$E_{\theta}^{(1B)} = \gamma_0 H_{\varphi}^{(1B)} = \frac{\exp(i k_1 r)}{r} [S_3(\theta, \varphi) + i \chi_0 S_4(\theta, \varphi)],$$

$$E_{\varphi}^{(1B)} = -\chi_0 H_{\theta}^{(1B)} = \frac{\exp(i k_1 r)}{r} [i S_5(\theta, \varphi) - \chi_0 S_6(\theta, \varphi)],$$

где

$$S_3(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^m i^{-n} \tau_n^m e^{im\varphi},$$

$$S_4(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^m i^{-n} \pi_n^m m e^{im\varphi},$$

$$S_5(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^m i^{-n} m \pi_n^m e^{im\varphi},$$

$$S_6(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^m i^{-n} \tau_n^m e^{im\varphi}.$$

## 2. ШАР С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь другое важное следствие вышеприведенного решения для дальней зоны в случае горизонтального диполя  $p_1$ . Устремляя точку  $A$  (рис. 1) расположения диполя вдоль положительной полуоси  $Z$  в бесконечность и сохраняя при этом его ориентацию, в пределе получим плоскую волну, распространяющуюся вдоль отрицательной части оси  $Z$ , электрический вектор которой поляризован вдоль оси  $X$ . При этом составляющие падающего поля примут вид

$$\begin{aligned} E_x^{(0)} &= k_1^2 E_0 \exp(-ik_1 z), \quad E_y^{(0)} = 0 = E_z^{(0)}, \quad H_x^{(0)} = 0 = H_z^{(0)}, \quad H_y^{(0)} = \\ &= -ik_1 a_1 E_0 \exp(-ik_1 z), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $E_0 = [\exp(ik_1 h) |p_1|]/h$ . Отсюда следует  $E_x^{(0)} = \chi_0 H_y^{(0)}$ .

Разумеется, в этом предельном случае и составляющие поля плоской волны не должны зависеть от  $h$ . Преобразуем выражения для поля горизонтального дипольного излучателя, выделяя множитель  $E_0$ . Обозначая

$$g_{1n} = \left\{ i^{-(n+1)} k_1 \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad -i^{-n} a_1 \frac{2n+1}{n(n+1)} \right\} \quad (n \geq 1), \quad g_{10} = \{0, 0\},$$

$$g_{0n}^m = \begin{cases} -n(n+1)\beta_0 g_{1n} & (m = -1) \\ 0 & (|m| \neq 1), \\ a_0 g_{1n} & (m = 1) \end{cases}$$

$$G_n^{(1)} = \frac{q_1 i g_{1n} \sqrt{n(n+1)} a_{00}}{2 k_1 b}, \quad G_n^{(2)} = -\frac{q_1 g_{1n} \sqrt{n(n+1)} \beta_{00}}{2 k_1 b},$$

$$F_{nl}^{(1)} = -[P_{-l, l}^n(\cos \theta_0) - P_{l, l}^n(\cos \theta_0)] G_n^{(1)},$$

$$F_{nl}^{(2)} = [P_{-l, l}^n(\cos \theta_0) + P_{l, l}^n(\cos \theta_0)] G_n^{(2)}$$

и используя асимптотику функций при  $h \rightarrow \infty$ , формулам (3), (4), (11) можно придать следующий вид\*:

$$\begin{aligned} t_{1n} &\sim E_0 g_{1n}, \quad t_{0n}^m \sim E_0 g_{0n}^m, \quad T_n^{(1)} = E_0 G_n^{(1)}, \\ f_{nl}^{(1)} &\sim E_0 F_{nl}^{(1)}, \quad f_{nl}^{(2)} \sim E_0 F_{nl}^{(2)}, \quad T_n^{(2)} \sim E_0 G_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заменяя в системе (10) неизвестные по формулам

$$b_n^l = E_0 b_n^{*l}, \quad c_n^l = E_0 c_n^{*l}, \quad (14)$$

придем к уравнениям

$$b_n^{*l} + \sum_{p=|l|}^{\infty} c_p^{*l} S_{np}^l = \Phi_n^{*l}, \quad (15)$$

$$c_n^{*l} = \sum_{p=|l|}^{\infty} b_p^{*l} L_{np}^l,$$

где

$$\Phi_n^{*l} = (F_{nl}^{(1)} + F_{nl}^{(2)}) \frac{(k b)^n}{(2n+1)!! \Omega_n}.$$

\* Символ  $\sim$  означает эквивалентность, т. е. справа от него стоит только главный член асимптотического ряда при  $h \rightarrow \infty$ .

Введем обозначения

$$B_n^{*l} = b_n^{*l} \sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l)!}} \frac{(2n+1)!!}{(k_2 b)^n}, \quad C_n^{*l} = c_n^{*l} \sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l)!}} \frac{(k_2 a)^n}{(2n+1)!!}. \quad (16)$$

Тогда учитывая выражения (8), (9), (14) и др., получим

$$B_n^l = E_0 B_n^{*l}, \quad C_n^l = E_0 C_n^{*l}, \quad A_n^m = E_0 A_n^{*m}, \quad D_n^l = E_0 D_n^{*l}, \quad (17)$$

где

$$A_n^{*m} = \frac{q_2 i}{k_2 b \delta_n} \sum_{l=-n}^n B_n^{*l} a_{nm}^l - \frac{\delta_n^{(3)}}{\delta_n} g_{0n}^m, \quad D_n^{*l} = \frac{q_2 i}{k_2 a \delta_n^{(1)}} C_n^{*l}. \quad (18)$$

Формулы (5) — (7) с учетом соотношений (2), (13) — (18) можно преобразовать к виду, соответствующему случаю плоской волны:

$$\begin{aligned} T_1 &= E_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{0n}^m j_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{*m} h_n(k_1 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \right], \\ T_2 &= E_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^{*m} j_n(k_2 r) P_n^m(\cos \theta_1) \exp(im\varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{*m} h_n(k_2 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(im\varphi_1) \right], \\ T_3 &= E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_n^{*m} j_n(k_3 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(im\varphi_1), \end{aligned} \quad (19)$$

которые по формулам (1) дадут все составляющие поля. Нас, в частности, будут интересовать характеристики падающего и рассеянного полей среды 1 в дальней зоне.

Так, используя в (19) асимптотику  $\psi_n(x)$  и  $\psi'_n(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  с учетом (1), получаем в дальней зоне выражения для составляющих падающего поля  $E^0$ ,  $H^0$ :

$$\begin{aligned} E_0^{(0)} &= \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} [iS_9^*(\theta, \varphi) - \chi_0 S_{12}^*(\theta, \varphi)] - \\ &\quad - \frac{\exp(-ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} [iS_9(\theta, \varphi) + \chi_0 S_{12}(\theta, \varphi)], \\ E_\varphi^{(0)} &= -\frac{\exp(ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} [S_{10}^*(\theta, \varphi) + i\chi_0 S_{11}^*(\theta, \varphi)] + \\ &\quad + \frac{\exp(-ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} [S_{10}(\theta, \varphi) - i\chi_0 S_{11}(\theta, \varphi)], \\ H_\theta^{(0)} &= \frac{\exp(ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} \left[ \frac{1}{\chi_0} S_{10}^*(\theta, \varphi) + iS_{11}^*(\theta, \varphi) \right] + \\ &\quad + \frac{\exp(-ik_1 r)}{r} \frac{E_0}{2} \left[ \frac{1}{\chi_0} S_{10}(\theta, \varphi) - iS_{11}(\theta, \varphi) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$H_{\varphi}^{(0)} = \frac{\exp(i\mathbf{k}_1 r)}{r} \left[ \frac{i}{2} S_9^*(\theta, \varphi) - S_{12}^*(\theta, \varphi) \right] + \\ + \frac{\exp(-ik_1 r)}{r} \left[ \frac{i}{2} S_9(\theta, \varphi) + S_{12}(\theta, \varphi) \right].$$

Рассеянное поле  $\mathbf{E}^{(1B)}$ ,  $H^{(1B)}$  дается формулами

$$E_{\theta}^{(1B)} = \chi_0 H_{\varphi}^{(1B)} = S_7^*(\theta, \varphi) \frac{\exp(i\mathbf{k}_1 r)}{r} E_0, \\ E_{\varphi}^{(1B)} = -\chi_0 H_{\theta}^{(1B)} = S_8^*(\theta, \varphi) \frac{\exp(i\mathbf{k}_1 r)}{r} E_0, \quad (21)$$

где

$$S_3^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^{*m} i^{-n} \tau_n^m e^{im\varphi}, \\ S_4^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^{*m} i^{-n} \pi_n^m m e^{im\varphi}, \\ S_5^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^{*m} i^{-n} m \pi_n^m e^{im\varphi}, \\ S_6^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{A}_n^{*m} i^{-n} \tau_n^m e^{im\varphi}, \\ S_7^*(\theta, \varphi) = S_3^*(\theta, \varphi) + i \chi_0 S_4^*(\theta, \varphi), \\ S_8^*(\theta, \varphi) = i S_5^*(\theta, \varphi) - \chi_0 S_6^*(\theta, \varphi), \\ S_9(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^m \tau_n^m e^{im\varphi}, \quad (22) \\ S_9^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \tau_n^m e^{im\varphi}, \\ S_{10}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^m \pi_n^m m e^{im\varphi}, \\ S_{10}^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \pi_n^m m e^{im\varphi}, \\ S_{11}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^n \tilde{\Gamma}_{0n}^m \tau_n^m e^{im\varphi}, \\ S_{11}^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \tau_n^m e^{im\varphi}, \\ S_{12}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^m \pi_n^m m e^{im\varphi}, \\ S_{12}^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \pi_n^m m e^{im\varphi},$$

$$S_{12}^*(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 \tilde{I}_{0n}^{*m} \pi_n^m m e^{im\varphi},$$

$$\tilde{g}_{0n}^m = \tilde{g}_{0n}^m \exp\left(\frac{n+1}{2}\pi i\right), \quad \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} = \tilde{g}_{0n}^m \exp\left(-\frac{n+1}{2}\pi i\right),$$

$$\tilde{g}_{0n}^m = \tilde{g}_{0n}^m \exp\left(\frac{n+1}{2}\pi i\right), \quad \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} = \tilde{g}_{0n}^m \exp\left(-\frac{n+1}{2}\pi i\right).$$

Здесь одна или две волнистые черты под символом имеют тот же смысл, что и в формулах в разд. I.

### 3. ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ ОБРАТНОГО (РАДИОЛОКАЦИОННОГО) РАССЕЯНИЯ

В предыдущем разделе в приближении дальней зоны были получены выражения для плоской волны, падающей на шар с неконцентрическим шаровым включением, и для отраженного поля. При этом плоская волна распространялась в отрицательном направлении оси  $Z$  с электрическим вектором, поляризованным вдоль оси  $X$ .

В этом случае эффективная площадь обратного рассеяния  $\sigma_0$  определяется следующим образом:

$$\sigma_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E_x^{(1B)}|^2}{|E_x^{(0)}|^2}, \quad (23)$$

где значение числителя следует взять в направлении на источник, знаменателя—в начале координат. При определении эффективных площадей рассеяния, ослабления и других характеристик будем в дальнейшем предполагать  $k_1$  вещественным числом, что отвечает достаточно широкому числу приложений. Из формул (12), (21) следует, что  $|E_x^{(0)}| = k_1^2 |E_0|$ ,  $|E_\theta^{(1B)}|_{\theta=0} = \frac{|E_0|}{r} |S_7^*(0, 0)|$ , которые в силу (23)

и соотношения  $E_x^{(1B)} = E_\theta^{(1B)} \cos \theta \cos \varphi - E_\varphi^{(1B)} \sin \varphi$  дают

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k_1^4} |S_7^*(0, 0)|^2. \quad (24)$$

Для вычисления  $S_7^*(0, 0)$  воспользуемся значениями  $\pi_n^m$  и  $\tau_n^m$  при  $\theta = 0$ :

$$\pi_n^m|_{\theta=0} = \tau_n^m|_{\theta=0} = \begin{cases} 1/2 & (m = -1) \\ 0 & (m \neq 1) \\ (-1/2)n(n+1) & (m = 1) \end{cases}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) с учетом (22), находим

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{k_1^4} \left| \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} [\tilde{A}_n^{*-1} - \tilde{A}_n^{*1}(n+1)n - i\chi_0 \tilde{A}_n^{*-1} - i\chi_0 \tilde{A}_n^{*1} n(n+1)] \right|^2. \quad (26)$$

Введем обозначения

$$\tilde{L}_n^m = \frac{i^{n-1}}{k_1(2n+1)} \left[ \frac{(n+m)!(n+1)n}{(n-m)!} \right]^{1/2} \tilde{A}_n^{*m}, \quad (27)$$

$$\tilde{L}_n^m = \frac{i^{n-1} \beta_1}{k_1^2(2n+1)} \left[ \frac{(n+m)!n(n+1)}{(n-m)!} \right]^{1/2} \tilde{A}_n^{*m}.$$

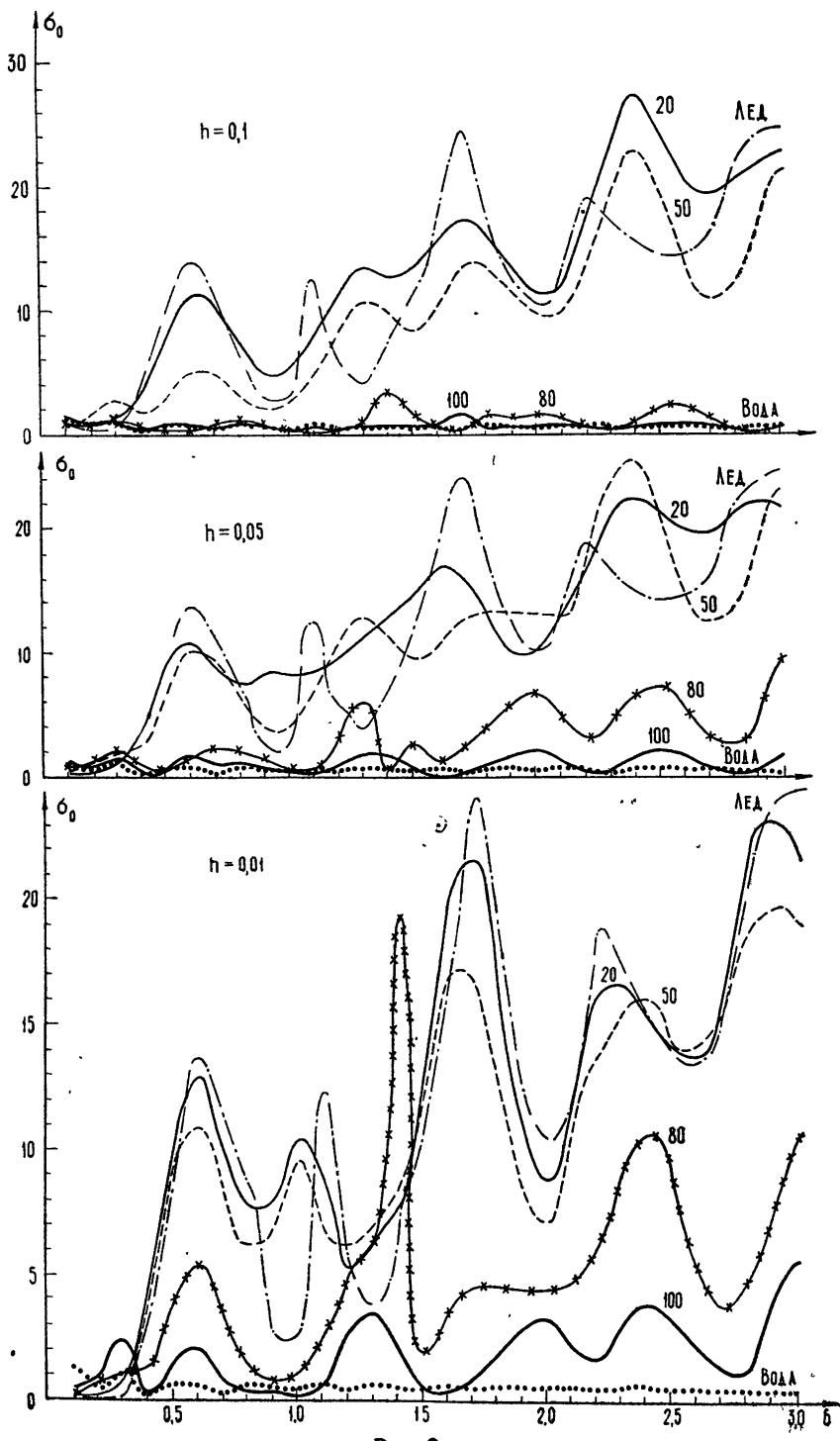


Рис. 2.

Нормируя  $\sigma_0$  делением на площадь большого шара ( $\pi b^2$ ) и используя замену (27) в (26), будем иметь безразмерное значение эффективной площади обратного (радиолокационного) рассеяния:

$$\sigma_0 = \frac{1}{(k_1 b)^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (\tilde{L}_n^{-1} - \tilde{L}_n^1 + \tilde{L}_n^{-1} + \tilde{L}_n^1) \right|^2. \quad (28)$$

На рис. 2 в качестве примера построены зависимости  $\sigma_0$ , вычисленные на ЭВМ по формуле (28), от  $b$  для тающей градины ( $t = 0^\circ\text{C}$ ) с ледяным ядром и оболочкой, представляющей собой однородную смесь воды ( $\rho$  — процент воды в смеси) и льда единичной плотности. При этом предполагалось:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2$  — для каждой пары  $\lambda$  и  $\rho$  согласно данным [4],  $\varepsilon_3 = 3,17 + 8,54 \cdot 10^{-8} i$ ,  $\lambda = 0,86 \text{ см}$ ,  $b - a = 0,1; 0,05; 0,01 \text{ см}$ ,  $h_1 = 0$ .

Графики рис. 2 наглядно иллюстрируют зависимость эффективной площади обратного рассеяния двухслойной градины от агрегатного состояния и толщины ее оболочки.

#### 4. ИНТЕНСИВНОСТЬ, ДИАГРАММА И ИНДИКАТРИСА РАССЕЯНИЯ. ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ ПОЛНОГО РАССЕЯНИЯ

Интенсивность  $J(\theta, \varphi)$  поля, рассеянного шаром с шаровым включением, определяется следующим образом:

$$J(\theta, \varphi) = |\tilde{\sigma}^{(1B)}|.$$

Здесь  $\tilde{\sigma}^{(1B)}$  — вещественное среднее значение вектора Пойнтинга  $\sigma^{(1B)}$  в дальней зоне, выражющееся соотношением\*

$$\sigma^{(1B)} = \frac{1}{4} [(E^{(1B)} \times \hat{H}^{(1B)}) + (\hat{E}^{(1B)} \times H^{(1B)})].$$

Отсюда с учетом (21) получим

$$J(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\chi_0} (|E_\theta^{(1B)}|^2 + |E_\varphi^{(1B)}|^2)$$

или в терминах выражений (22)

$$J(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\chi_0 r^2} (|S_7^*(\theta, \varphi)|^2 + |S_8^*(\theta, \varphi)|^2).$$

Поступая аналогичным образом с падающим полем, найдем его интенсивность  $J_0(\theta, \varphi)$  в дальней зоне:

$$J_0(\theta, \varphi) = |\tilde{\sigma}^{(0)}| = \frac{k_1^4 |E_0|^2}{2\chi_0}.$$

Отношение  $J(\theta, \varphi)/J_0(\theta, \varphi)$  дает нам относительные значения интенсивности  $J'$ ,

$$J'(\theta, \varphi) = \frac{1}{k_1^4 r^2} (|S_7^*(\theta, \varphi)|^2 + |S_8^*(\theta, \varphi)|^2), \quad (29)$$

и безразмерную функцию направления

$$F(\theta, \varphi) = (k_1 r)^2 J'(\theta, \varphi). \quad (30)$$

\* Значок \* над символом соответствует комплексно-сопряженной величине.

При этом заметим, что  $F(\theta, \varphi)/k_1^2$  имеет размерность площади. Относительные значения  $J$  или  $F$  можно нанести на полярную диаграмму в функции угла  $\theta$  при фиксированном  $\varphi$ .

Это даст нам диаграмму рассеяния шара с шаровым включением. Из (29), (30) следует формула

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{k_1^2} (|S_7^*(\theta, \varphi)|^2 + |S_8^*(\theta, \varphi)|^2). \quad (31)$$

Индикатриса рассеяния  $\Phi(\theta, \varphi)$  и эффективная площадь полного рассеяния  $\sigma_1$ , отнесенная к  $\pi b^2$ , определяются соотношениями

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\Phi_0} F(\theta, \varphi), \quad \sigma_1 = \frac{1}{\pi(k_1 b)^2} \Phi_0,$$

где

$$\Phi_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (32)$$

Заменяя в (31) квадрат модуля на произведение двух комплексно-сопряженных выражений и используя формулы (22), а также формулы

$$\int_0^\pi (\tau_{n'}^m \tau_n^m + m^2 \pi_n^m \pi_{n'}^m) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq n') \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)! n(n+1)}{(n-m)!} & (n = n') \end{cases}$$

$$\int_0^\pi (\pi_n^m \tau_{n'}^m + \pi_{n'}^m \tau_n^m) \sin \theta d\theta = 0 \quad (m \neq 0),$$

при интегрировании в (32) получим

$$\Phi_0 = \frac{4\pi}{k_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[ |\tilde{A}_n^{*m}|^2 \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} + \chi_0^2 |\tilde{A}_n^{*m}|^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} m^2 \right].$$

Если перейти от  $\tilde{A}_n^{*m}$ ,  $\tilde{A}_n^{*m}$  к  $\tilde{L}_n^m$ ,  $\tilde{L}_n^m$  соответственно по формулам (27), то выражение для  $\Phi_0$  можно представить в следующем виде:

$$\Phi_0 = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) (|\tilde{L}_n^m|^2 + m^2 |\tilde{L}_n^m|^2).$$

Отсюда, согласно (31), индикатриса и поперечник полного рассеяния будут описываться следующими выражениями:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{|S_7^*(\theta, \varphi)|^2 + |S_8^*(\theta, \varphi)|^2}{4\pi k_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) (|\tilde{L}_n^m|^2 + m^2 |\tilde{L}_n^m|^2)},$$

$$\sigma_1 = \frac{4}{(k_1 b)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) (|\tilde{L}_n^m|^2 + m^2 |\tilde{L}_n^m|^2).$$

Проиллюстрируем (рис. 3) численным расчетом на ЭВМ выражение (33) для той же тающей градины, что и на рис. 2, т. е. при условии, что  $p = 20; 50; 80; 100\%$ ,  $b - a = 0,05 \text{ см}$ ,  $\lambda = 0,86; 3, 2; 5,6; 11; 17 \text{ см}$ ,  $h_1 = 0$ . Построенные кривые позволяют проследить изменение эффективной площади полного рассеяния радиоволн сантиметрового диапазона градиной на различных этапах ее таяния.

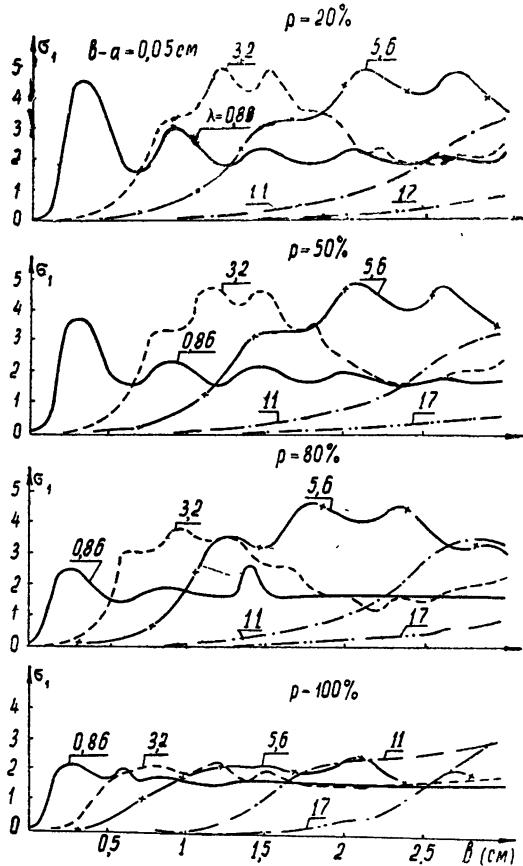


Рис. 3.

### 5. ЭФФЕКТИВНАЯ ПЛОЩАДЬ ОСЛАБЛЕНИЯ

Эффективная площадь ослабления ( $\sigma_2$ ) определяется следующей формулой:

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2\pi b^2 J_0} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_\theta^{(0)} \tilde{H}_\varphi^{(1B)} + E_\theta^{(1B)} \tilde{H}_\varphi^{(0)} - E_\varphi^{(0)} \tilde{H}_\theta^{(1B)} - E_\varphi^{(1B)} \tilde{H}_\theta^{(0)}) \times r^2 \sin \theta d\varphi d\theta. \quad (34)$$

Подставляя значения составляющих (20) в (34) и производя преобразования, получим

$$\sigma_2 = \frac{4}{k_1^2 (k_1 b)^2} (-\operatorname{Re}) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^1 (\tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \tilde{A}_n^{*m} + \chi_0^2 \tilde{\Gamma}_{0n}^{*m} \tilde{\tilde{A}}_n^{*m}) i^{n+1} \times \right. \\ \left. \times \frac{(n+m)! n(n+1)}{(n-m)!(2n+1)} \right]. \quad (35)$$

Если перейти в (35) к переменным  $\tilde{L}_n^m$ ,  $\tilde{L}_n^m$  по формулам (27) с использованием (22) и др. и учетом свойств оператора  $\text{Re}$ , то после преобразований будем иметь

$$\sigma_2 = \frac{2}{(k_1 b)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \text{Re} [ -\tilde{L}_n^{-1} + \tilde{L}_n^1 + \tilde{B}_n^{-1} + \tilde{B}_n^1 ]. \quad (36)$$

На рис. 4 приведен пример численного расчета  $\sigma_2$  двухслойной ледяной градины с плотностями ядра  $0,916 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  и оболочки  $0,380 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Выражения, определяющие формулу (36), вычислялись при следующих соответствующих этому примеру значениях параметров:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2,25 + 3,09i$ ,  $\varepsilon_3 = 3,17 + 8,19 \cdot 10^{-3}i$ ,  $h_1 = 0$ ;  $\lambda = 3,2 \text{ см}$ ;  $a/b = 0,0; 0,5; 0,8; 1,0$ . Распространяя качественно зависимости рис. 4 на градовые облака и осадки, можно заключить, что неоднородность градины может оказывать весьма существенное влияние\* на ослабление радиоволн.

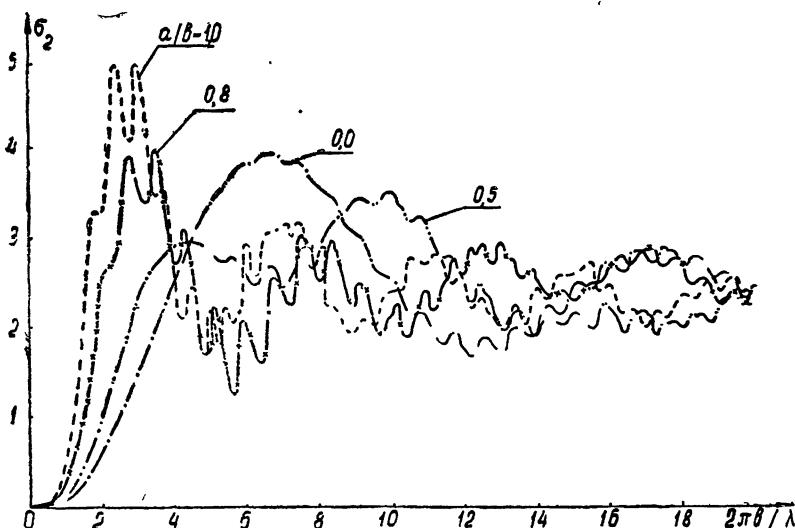


Рис. 4.

В заключение заметим, что из построенного общего решения (разд. 1, 2) и радиолокационных характеристик (разд. 3, 4, 5) шара с неконцентрическим шаровым включением получаются частные решения и характеристики, совпадающие с известными частными задачами. Так, например, при  $a = 0$  мы получаем составляющие электромагнитного поля и радиолокационные характеристики одной сферы;  $h_1 = 0$ —двух концентрических сфер;  $\theta_0 = 0$ —двух сфер, когда источник находится на их общей оси;  $b \rightarrow \infty$ —полупространства с шаровым включением;  $b = a$ ;  $k_2^2 = i \infty$  (идеально проводящий шар)—при излучении элементарной кольцевой щели и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.

\* См. также [5].

2. Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представления групп, изд. Наука, М., 1965.
3. И. М. Гельфond, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращения и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
4. В. И. Розенберг, Тр. СЭПИ, Радиоэлектроника, вып. 5, 34 (1969).
5. В. И. Розенберг, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 2, 168 (1970).

Ленинградский институт водного транспорта

Поступила в редакцию  
21 октября 1968 г.

## DIFFRACTION AND SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON AN INHOMOGENEOUS SPHERE

*V. I. Rozenberg*

A strict solution is built as a series over spherical functions for the problem of diffraction and scattering of electromagnetic waves of arbitrarily situated and oriented in the space dipole irradiator on the sphere with nonconcentrated spherical insertion. The expressions are derived for the case of a plane wave by means of the limit transition. The effective areas of radar and total scattering, the attenuation, as well as the intensity, radiation pattern and scattering indicatrix are found. The results of numerical calculation using the electron computer are presented.

---

УДК 621.391.245 : 539.216.2

## О ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАЗРЕШЕНИИ ТЕПЛОВОГО СПОСОБА ЗАПИСИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПЛЕНОЧНЫХ СТРУКТУРАХ

*Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Ю. М. Пьяных*

Приводится общее решение (двумерный и одномерный случаи) задачи формирования температурного рельефа на пленочных структурах, отображающего пространственно-периодическое энергетическое воздействие. Теоретически и экспериментально определяется температурная разрешающая способность теплового способа записи информации в зависимости от теплофизических параметров структур, используемых для исследования и визуализации пространственного распределения потока вектора Умова—Пойнтинга.

Одним из перспективных направлений в анализе распределения электромагнитных полей в некоторой конечной области пространства представляется использование явлений, возникающих при непосредственном взаимодействии излучения с веществом. Предложен ряд методов индикации [1—4], в которых получение информации о пространственном распределении потока мощности СВЧ связан с поглощением и преобразованием энергии поля в тепловую энергию и возникновением температурного рельефа на пленочных структурах. Таким образом, задача исследования полей СВЧ в определенном приближении сводится к изучению температурного распределения. В работе [2] показана возможность визуализации радиоизображений на металлополупроводниковых пленочных структурах с использованием люминофора, обладающего термографическим эффектом (тушение люминесценции при нагревании люминофора). Известно применение люминофоров, обладающих термографическим эффектом, для визуализации ИК излучения [4]. Авторы [3] описывают устройство для визуального наблюдения образованного ИК излучением температурного рельефа, изменяющего прозрачность освещаемой монохроматическим светом структуры вследствие резкой температурной зависимости смешения края спектрально-го поглощения применяемой полупроводниковой пленки.

В работах [2—4] высказываются общие качественные соображения об условиях адекватности теплового и электромагнитного рельефов. Несоответствие их в той или иной мере возникает вследствие конечного значения теплопроводности структуры [1]. Поскольку устройства для анализа распределения излучения основаны на регистрации картины теплового поля, то естественно возникает вопрос о разрешающей способности, т. е. о числе разрешимых линий на единице длины. Очевидно, что разрешающая способность в этом случае ограничивается растеканием теплового рельефа.

Представляет интерес анализ температурной разрешающей способности пленочных индицирующих структур в зависимости от теплофизических параметров.

### УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим практически наиболее интересный случай воздействия СВЧ излучения на пленочную структуру, когда интенсивность выделения тепловой энергии в единице объема пленки постоянна во времени, однородна по толщине, а в плоскости  $(x, y)$  имеет вид шахматной доски:

$$P(x, y) = \varphi \left\{ 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{mn} \times \right. \\ \left. \times \sin \left( \frac{m\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} y \right) \right\},$$

где  $\varphi$  — интенсивность выделения тепла в  $vt \cdot cm^{-3}$ ,  $2L$  — период функции  $P(x, y)$  в направлениях  $x$  и  $y$ .

Будем считать, что толщина пленки  $d_0$  равна сумме толщин  $d^i$  слоев структуры, а теплопроводность ее определяется из выражения

$$\lambda d_0 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3,$$

где  $\lambda$  и  $\lambda_i$  — коэффициенты теплопроводности пленки и слоев соответственно. Краевые эффекты не учитываются ( $|x| \rightarrow \infty$ ,  $|y| \rightarrow \infty$  — бесконечная пленка).

Для элемента приведенной пленки толщиной  $d_0$  с площадью  $dx dy$  составим уравнение теплового баланса в случае нестационарного процесса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - b^2 u + p(x, y), \quad (1)$$

$a^2 = \lambda/c\rho$ ,  $b^2 = \eta/d_0 c\rho$ ,  $p(x, y) = P(x, y)/c\rho$ ,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — удельная теплоемкость,  $\rho$  — плотность,  $\eta$  — коэффициент теплообмена,  $T(x, y) — T_0 = u$  — перепад температуры пленки относительно температуры окружающей среды  $T_0$ , принятой равной нулю. В рассматриваемом случае краевые условия записываются в виде

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x = \frac{m}{2}[1 - (-1)^m] \frac{L}{2}} = \\ = \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y = \frac{n}{2}[1 - (-1)^n] \frac{L}{2}} = 0. \quad (2)$$

Решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям (2), можно представить в виде ряда

$$u(x, y, t) = \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{Lk} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{Lk} \right)^2 + 1 \right] \right. \\ \left. \times \sin \left( \frac{m\pi}{L} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} y \right) \right\} - \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ \exp(-b^2 t) + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] \exp \left[ - \left( \frac{am\pi}{L} \right)^2 t - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t - b^2 t \right]}{mn[(m\pi/Lk)^2 + (n\pi/Lk)^2 + 1]} \right\} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\Bigg\},$$

где  $k^2 = b^2/a^2 = \eta/\lambda d_0$ .

Формула (3) описывает процесс формирования температурного рельефа на пленочной структуре: выражение в первой фигурной скобке соответствует установившемуся тепловому состоянию, выражение во второй — возрастанию температуры при  $t > 0$ .

В целях упрощения анализа температурной разрешающей способности пленочных структур рассмотрим одномерный случай образования теплового изображения миры Фуко, большое практическое применение которой при аналогичных оптических исследованиях оправдывает выбор этого примера. Тогда линейное неоднородное уравнение, представляющее распределение температуры на пленке в нормальном к нагреваемым и ненагреваемым бесконечным полосам направлении,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 v + f(x), \quad (4)$$

где

$$f(x) = \frac{\varphi}{c\rho} \left[ 1 + \frac{4C_0}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) \right]$$

при краевых условиях

$$v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x = \frac{m}{2}[1 - (-1)^m]\frac{L}{2}} = 0 \quad (5)$$

будет иметь решение

$$v(x, t) = \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ 1 + \frac{2C_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{[1 + (m\pi/Lk)^2] m} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right\} - \\ - \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ \exp(-b^2 t) + \frac{2C_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{[1 + (m\pi/Lk)^2] m} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\left(\frac{a^2 m^2 \pi^2}{L^2} + b^2\right)t\right] \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right\}, \quad (6)$$

где  $C_0$  — параметр, изменяющийся от 0 до 1 и определяющий температурный контраст миры в случае отсутствия теплопроводности вдоль пленки.

В установившемся тепловом режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) периодическое температурное распределение можно записать так:

$$v(x, \infty) = \begin{cases} \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ 1 + C_0 \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}[k(x' - L/2)]}{\operatorname{ch}[k(L/2)]} \right] \right\} & (0 \leq x' \leq L) \\ \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ 1 - C_0 \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch}[k(x' - 3L/2)]}{\operatorname{ch}[k(L/2)]} \right] \right\} & (L \leq x' \leq 2L) \end{cases}, \quad (7)$$

$x' = x - 2nL, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Здесь  $\varphi d_0/\eta$  — температура единицы объема пленки, находящейся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой выделяется тепловая мощность  $\varphi d_0$  в отсутствие теплопередачи от соседних участков.

Из выражения (7) видно, что отклонение стационарного температурного рельефа от закона распределения выделяемой тепловой энергии определяется теплофизическими параметрами пленки  $k = \sqrt{\eta/\lambda d_0}$  и пространственной частотой повторения нагреваемых и ненагреваемых полос на единицу длины  $N = 1/2L \text{ см}^{-1}$ .

Обычно разрешающая способность устройства характеризуется числом разрешимых линий на единицу длины сформированного изображения, если в качестве объекта выбирается периодическая структура (мира Фуко). В рассматриваемом случае естественно ввести, по аналогии с оптикой, понятие температурного контраста для термоизображения миры:

$$K = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\min}} = 2 \frac{\operatorname{ch}[k(L/2)] - 1}{1 + (1/C_0 - 1) \operatorname{ch}[k(L/2)]}. \quad (8)$$

Принимая величину минимально регистрируемого термоконтраста  $K_{\min} = 0,1$ , из соотношения (8) получим максимальное число разрешимых линий (предел разрешения):

$$N_{\max} = \frac{k}{4} \left[ \operatorname{Arch} \frac{K_{\min} + 2}{K_{\min} + 2 - K_{\min}/C_0} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Кривые рис. 1, согласно (9), изображают зависимость температурной разрешающей способности от численных значений параметра  $k$  и  $C_0$ . Легко видеть, что разрешающая способность падает с ростом теплопроводности вдоль пленки ( $k \rightarrow 0$ ).

Представляет интерес сопоставление теплового рельефа на идеальной структуре (продольная теплопроводность отсутствует) и теплового рельефа, возникающего на структуре с конечной величиной теплопроводности, при одинаковых условиях облучения с точки зрения разрешающей способности. С этой целью рассмотрим отношение коэффициентов  $C_0$  и  $C$ , определяющих контраст термоизображения миры на соответствующих структурах, т. е.

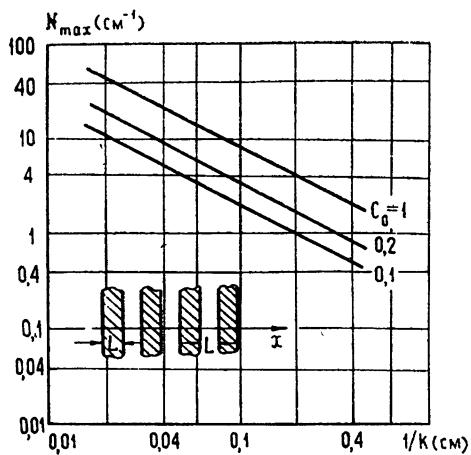


Рис. 1. Зависимость предельной частоты разрешения  $N_{\max}$  от  $k$  и параметра  $C_0$ .

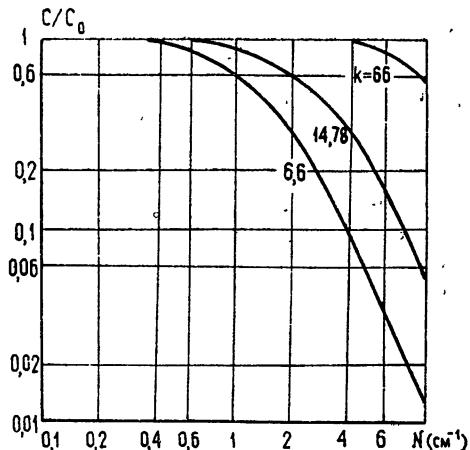


Рис. 2. Зависимость отношения коэффициентов  $C/C_0$  от  $k$  и  $N$ .

$$\frac{C}{C_0} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} \frac{1}{C_0} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(k/4N)}.$$

График зависимости  $F(k, N) = C/C_0$ , представленный на рис. 2, отражает факт снижения контраста термоизображения с ростом пространственной частоты, что влечет ухудшение разрешающей способности.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

*Измерения на постоянном токе.* Для исследования разрешающей способности теплового способа записи информации на пленочных индцирующих структурах был проведен следующий эксперимент.

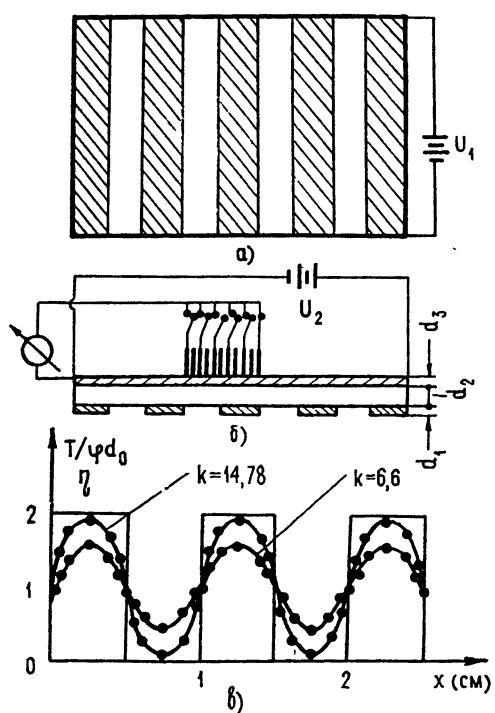


Рис. 3. Схема регистрации температурного распределения на пленочной структуре.

Температурное изображение миры формировалось выделяемой тепловой энергией на сопротивлениях полос, соединенных параллельно, путем подключения стабильного источника постоянного напряжения  $U_1$ . В этом случае пространственное распределение тепловой энергии списывается членом  $f(x)$  неоднородного уравнения (4). Прикладывая постоянное напряжение  $U_2$  к никромовой пленке, изменяли значение коэффициента  $C_0$  в пределах 1—0,2. В ходе эксперимента исследовалось распределение температуры вдоль пленочных структур (рис. 3в) системой точечных полупроводниковых термозондов [1]. Сигнал ЭДС пропорционален температуре пленки в точке расположения термозонда ( $0,2 \times 0,5 \times 5 \text{ mm}$ ); схема измерения позволяла регистрировать перепад температур в  $0,01^\circ\text{C}$ . Максимальный перепад температуры пленки относительно температуры окружающей среды не превышал  $5^\circ\text{C}$ . После проверки на идентичность электрических характеристик зонды крепи-

тепловое изображение миры формировалось на пленочной структуре (рис. 3 а, б), представляющей собой слюдяную подложку ( $30 \times 50 \text{ mm}$ ) с напыленным термическим испарением в вакууме никромовым слоем, изменение толщины которого позволяло варьировать приведенный параметр структур  $k$  в достаточно широких пределах. Толщина подложки  $d_2$  (телефизионная слюда типа мусковит) и никромовой пленки  $d_3$  измерялись с точностью до 5—10% и для различных образцов составляли: для слюды  $10\text{--}50 \mu\text{m}$ , для никрома  $1\text{--}5 \mu\text{m}$ . На противоположную сторону подложки через трафареты напылялась система параллельных никромовых полос; ширина полос и промежутки между ними были строго одинаковыми. Разброс значений сопротивления на квадрат поверхности никромовой пленки на краях и в центре структуры составлял 1—3%, что обеспечивалось технологией напыления.

лись на структуре припоеем InGa с интервалом в 1 мм в количестве 10—11 образцов на участке  $2L = 1 \text{ см}$ .

Экспериментальные данные по измерению  $W = T_{\max}/T_{\min}$  в зависимости от параметров  $k$  и  $C_0$  при постоянной частоте повторения полос  $N_0 = 1 \text{ см}^{-1}$  представлены в табл. 1. Предельная разрешающая способность

Таблица 1

$k, C_0$	$k=6,6 \text{ см}^{-1}$			$k=10,43 \text{ см}^{-1}$			$k=14,78 \text{ см}^{-1}$		
	$C_0=1$	$C_0=0,2$	$C_0=0,1$	$C_0=1$	$C_0=0,2$	$C_0=0,1$	$C_0=1$	$C_0=0,2$	$C_0=0,1$
$W, N_{\max}$									
$W = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}$	4,41	1,29	1,13	12,7	1,41	1,19	39	1,47	1,21
$N_{\max}$ (линий $\cdot \text{см}^{-1}$ )	5,16	2,15	1,30	8,15	3,38	2,06	11,5	4,80	2,92

нность для исследованных образцов  $N_{\max}$  рассчитывалась согласно выражению

$$N_{\max} = N_0 \left[ \operatorname{Arch} \frac{W + 1}{W + 1 - \frac{W - 1}{C_0}} \right] \left[ \operatorname{Arch} \frac{W' + 1}{W' + 1 - \frac{W' - 1}{C_0}} \right]^{-1},$$

где  $N_0$  — частота повторения полос на структуре,  $W$  — измеренное отношение температур,  $W' = K_{\min} + 1$  — предельное отношение температур, определенное исходя из минимума регистрируемого термоконтраста, принятого равным  $K_{\min} = 0,1$ .

*Измерения на СВЧ.* На экспериментальной установке моделировалось поле излучения плоской волны ( $\lambda = 4 \text{ мм}$ ). В поле СВЧ помещалась пленочная структура с никромовыми полосами и закрепленными термозондами. Для связки со стороны генераторной части нормаль к пленке и направление распространения волны составляли некоторый малый угол. Действие излучения СВЧ приводило к выделению тепловой энергии в никромовых полосах и формированию теплового рельефа. Ориентация полос и проволочных выводов относительно электрической компоненты осуществлялась таким образом, чтобы тепловой эффект был максимальным, а влияние проводников — минимальным. Пленочная структура размещалась в камере, внутренняя поверхность которой являлась неотражающей и поглощала прошедшую и отраженную структурой энергию СВЧ.

Экспериментальные измерения  $W = T_{\max}/T_{\min}$  на СВЧ дали результаты, совпадающие в пределах точности измерения температуры с исследованиями, выполненными на постоянном токе для тех же образцов структур. Для металлогипопроводниковой структуры [2, 3], состоящей из слюдяной подложки толщиной  $d_2 = 10 \text{ мк}$ , полупроводникового слоя  $d_3 = 1-2 \text{ мк}$  и поглощающего металлического слоя  $d_1 = 50-500 \text{ \AA}$ , значение приведенного теплофизического параметра  $k$  лежит в пределах  $15-10 \text{ см}^{-1}$ . Таким образом, температурную разрешающую способность таких структур можно оценить 12—8 линиями на 1 см. Получение лучшей разрешающей способности связано с технологическими трудностями изготовления более тонких индицирующих структур.

1. Приведен анализ температурной разрешающей способности теплового способа записи информации на пленочных структурах.

2. Показано, что число разрешимых линий на металлокомплиментарных структурах, применяемых для исследования и визуализации пространственного распределения потока вектора Умова—Пойнгинга, определяется приведенным теплофизическим параметром  $k = \sqrt{\eta/\lambda d_0}$  и может быть доведено до 10—12 линий на 1 см.

3. Экспериментальные исследования температурного рельефа, сформированного на структурах энергией поля СВЧ и постоянного тока, подтверждают теоретические выводы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Котосонов, Б. И. Власов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 311 (1968).
2. А. П. Бажулин, Е. А. Виноградов, Н. А. Ирисов, С. А. Фридман, Письма в ЖЭТФ, 8, № 5, 261 (1968).
3. W. Harding, C. Hillsum, D. Northrop, Nature, 181, 691 (1958).
4. I. J. Bridges, E. G. Burkhardt, IEEE J. Quant. Electr., QE-3, № 4, 168 (1967).

Воронежский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
25 апреля 1969 г.

#### ON A SPATIAL RESOLUTION OF THE THERMAL METHOD OF RECORDING AND VISUALIZING AN ELECTROMAGNETIC FIELD ON FILM STRUCTURES

*B. I. Vlasov, N. V. Kotosonov, Yu. M. P'yanykh*

The authors present a general solution (two-dimensional and one-dimensional cases) of the problem of forming the temperature relief on film structures representing the spatial-periodic energetic action. The temperature resolution of the thermal method of recording the information as depended on the thermo-physical parameters of the film structures, used for investigating and visualizing the spatial flux distribution of Umov—Poynting's vector is theoretically and experimentally determined.

УДК 621.382

## ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ И ФАЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВ В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

*Д. И. Биленко, А. Е. Луньков, В. Н. Язиков*

Рассмотрено применение открытого резонатора, состоящего из плоского и сферического отражателей для измерения коэффициента отражения полупроводников. Получено выражение, связывающее добротность резонатора с модулем коэффициента отражения образца, заполняющего отверстие в центре плоского зеркала. Найдена зависимость фазы коэффициента отражения полупроводникового образца от сдвига резонансной частоты. Предложен простой и точный способ измерения модуля коэффициента отражения полупроводника по изменению добротности открытого резонатора. Рассмотрен волноводный фазовый дискриминатор, предназначенный для измерения фазы коэффициента отражения полупроводников. Получены выражения для погрешностей измерений.

В диапазоне 2 м.м разработана экспериментальная установка для бесконтактного неразрушающего способа измерения параметров полупроводниковых материалов по измерению модуля и фазы коэффициента отражения. При измерении низколегированных образцов GaAs практически достигнута точность порядка  $\pm 1\%$  по модулю  $\pm 1^\circ$  по фазе коэффициента отражения.

Исследование свойств полупроводниковых материалов в миллиметровом диапазоне длин волн представляет в настоящее время значительный интерес как для выяснения ряда вопросов физики полупроводников, так и для создания бесконтактных неразрушающих методов измерения параметров полупроводниковых материалов [1—4]. Особый интерес представляет измерение модуля  $\Gamma$  и фазы  $\varphi$  коэффициента отражения, так как эти величины тесно связаны с основными электрофизическими параметрами исследуемых материалов (концентрация, подвижность, эффективная масса носителей заряда) и позволяют измерять параметры многослойных полупроводниковых структур. Однако перенесение методов измерения  $\Gamma$  и  $\varphi$ , применяемых в сантиметровом диапазоне, в миллиметровый диапазон не дает необходимой точности измерений.

В работе излагаются результаты разработки методов измерения  $\Gamma$  и  $\varphi$  в коротковолновой части диапазона миллиметровых волн, которые обеспечивают точность измерения  $\Gamma$  не ниже  $\pm 1\%$ , фазы  $\varphi$  — не ниже  $\pm 1^\circ$ . Достижение такой точности измерений стало возможным благодаря применению открытого резонатора для измерения  $\Gamma$  и модифицированной схемы фазового дискриминатора для измерения  $\varphi$ . Разработанная методика применена к исследованию низколегированных образцов арсенида галлия в двухмиллиметровом диапазоне длин волн.

### 1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВ С ПОМОЩЬЮ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА

Резонансные методы широко используются при исследовании свойств веществ на СВЧ в силу присущей им высокой чувствительности и точности измерений. Реализация этих методов в миллиметровом

и субмиллиметровом диапазонах стала возможной благодаря применению открытых резонаторов [5, 6], позволивших успешно преодолеть характерные трудности, связанные с использованием в этих диапазонах традиционных объемных резонаторов. В частности, исследовалась возможность применения открытых резонаторов для измерения полупроводников [7, 8]. Однако полученные данные не дают возможности судить о достигнутой точности измерений.

При разработке метрики полупроводниковых материалов с помощью открытого резонатора, кроме оценки точности измерений, перед нами стояла задача расширения применимости метода на возможно больший диапазон изменения свойств образцов, исследования возможности измерения двух параметров, а также уменьшения исследуемой области материала. Для этих целей был выбран резонатор полуконфокального типа, состоящий из сферического и плоского отражателей.

Рассмотрим предварительно случай, когда плоский отражатель при измерении полностью заменяется плоским образцом с коэффициентом отражения  $G e^{i\varphi}$ . Для этого случая на основании [9, 10] можно получить выражения, связывающие  $\Gamma$  и  $\varphi$  с добротностью резонатора  $Q$  и уходом резонансной частоты  $\Delta f$ , в виде

$$Q = \frac{\Gamma_1 \Gamma}{1 - \Gamma_1 \Gamma} kL; \quad (1)$$

$$\varphi = \frac{2\pi L}{C} \Delta f, \quad (2)$$

где  $\Gamma_1$  — коэффициент отражения сферического отражателя, учитывающий все виды потерь,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число основного типа колебания,  $L$  — расстояние между отражателями.

Расчеты, проведенные по формуле (1), показали, что разрешающая способность, определяемая как  $\frac{dQ}{d\Gamma}$ , резко снижается при  $\Gamma \leq 0.8$ . Поэтому для расширения диапазона измеряемых полупроводников в сторону малых проводимостей было применено диафрагмирование образца тонким металлическим экраном с отверстием в центре радиуса  $r$ . При этом в выражении (1) необходимо вместо  $\Gamma$  использовать коэффициент отражения от диафрагмированного образца

$$\Gamma_d = \left[ 1 - \alpha_d - \frac{\sigma}{S} t \gamma (1 - \Gamma^2) \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Здесь  $\alpha_d$  — тепловые потери диафрагмы,  $\sigma/S$  — отношение площади отверстия к площади « пятна » на плоском отражателе,  $t$ ,  $\gamma$  — коэффициенты, учитывающие соответственно резонансные свойства отверстия и гауссово распределение поля на диафрагме [9, 10]. Коэффициент  $t$  определяется по формуле [11]

$$t = \frac{64}{27\pi^3} (kr)^4 \left[ 1 + \frac{21}{25} (kr)^2 + \frac{7312}{18375} (kr)^4 + \dots \right],$$

а  $\gamma$  для основного типа колебаний

$$\gamma = \left[ \frac{i}{w_0} \int_0^{w_0} \exp \left( -\frac{r^2}{w_0^2} \right) dr \right]^{-1},$$

где  $w_0$  — радиус « пятна », занятого полем на плоском отражателе [10], равен

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \left[ L \rho \left( 1 - \frac{L}{\rho} \right) \right]^{1/2}$$

( $\rho$  — радиус кривизны сферического отражателя).

Добротность резонатора с диафрагмированным образцом определяется теперь по формуле

$$Q = \frac{\Gamma_1 \left[ 1 - \alpha_d - \frac{\sigma}{S} t \gamma (1 - \Gamma^2) \right]^{1/2} e^{-2\beta l}}{1 - \Gamma_1 \left[ 1 - \alpha_d - \frac{\sigma}{S} t \gamma (1 - \Gamma^2) \right]^{1/2} e^{-2\beta l}} kL. \quad (4)$$

Здесь  $l$  и  $\beta$  — соответственно толщина и постоянная затухания в диэлектрической шайбе, на которую наносится диафрагма.

Характерные зависимости добротности  $Q$  от  $R = \Gamma^2$  и радиуса отверстия  $r$  приведены на рис. 1. Из рис. 1, в частности, видно, что разре-

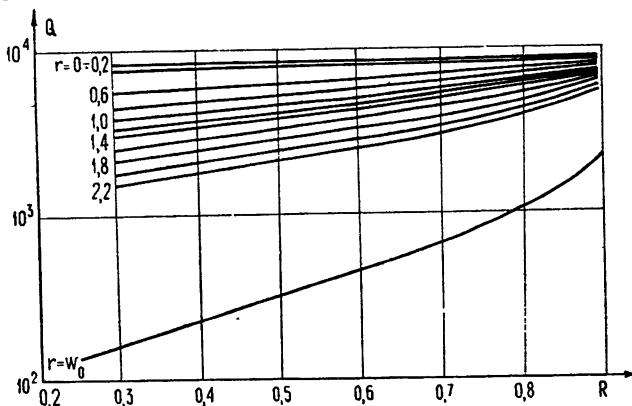


Рис. 1. Зависимость добротности  $Q$  от величины коэффициента отражения образца по мощности  $R$  и радиуса отверстия в диафрагме  $r$  для резонатора с добротностью  $Q_0 = 10^4$ .

шающая способность  $\frac{dQ}{dR}$  максимальна, когда образец полностью закрывает пятно на плоском отражателе  $r = w_0$ . Однако увеличение отверстия, кроме требований к локальности измерений, ограничено некоторым минимальным значением добротности, при котором метод начинает терять чувствительность.

Экспериментальная методика заключается в определении изменения добротности  $\Delta Q$  при замене металлического эталона полупроводниковым образцом.  $\Delta Q$  может быть определено по изменению коэффициента прохождения  $T$ , для чего как возбуждающее, так и индикаторное отверстия связи должны быть расположены на сферическом отражателе.

Известно [12], что в момент резонанса

$$T = \delta Q^2,$$

где  $\delta$  — коэффициент, определяемый конструкцией резонатора. Если отношение коэффициентов прохождения резонатора с эталоном и образцом измерять калиброванным аттенюатором, то разность ослаблений

$$\Delta N = 20 \lg \frac{Q_0}{Q}. \quad (5)$$

Для реализации этой методики после выбора  $r$  и приближенной оценки порядка добротности  $Q_0$  строится семейство кривых  $\Delta N(R)$ , соответствующих близким значениям  $Q_0$  (рис. 2). Выбор кривой, соответствую-

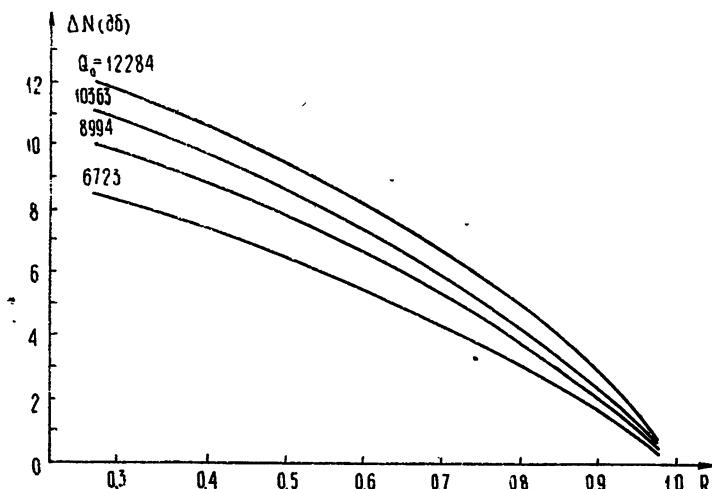


Рис. 2. Зависимости ослабления  $\Delta N$  от величины коэффициента отражения образца  $R$ .

щей условиям эксперимента, можно осуществить с помощью образцов с известными значениями  $R$ . Приведенные на рис. 2 градуировочные кривые показывают, что при точности отсчета ослабления  $\Delta N$ , равной  $\pm 0,1 \text{ дБ}$ , точность измерения  $R$  составляет  $\pm 1\%$  для  $R = 0,3$  и  $\pm 0,5\%$  для  $R = 0,9$ .

## 2. ИЗМЕРЕНИЕ ФАЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Совместный анализ выражений (1) и (2) показал, что для реальных значений  $\Gamma$  и  $\varphi$  полупроводниковых материалов открытый резонатор практически не может быть применен для измерения  $\varphi$  в силу того, что уход резонансной частоты будет в пределах ширины соответствую-

щей резонансной кривой. Поэтому для измерения фазы коэффициента отражения была применена модифицированная схема фазового дискриминатора, обычно применяемого для измерения разности фаз двух сигналов [13]. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 3. Если в плечо  $H$  тройника I поступает волна с амплитудой  $E$ , то волны, отраженные образцом и короткозамыкающим поршнем, включенными в боковые плечи тройника II, будут соответственно равны

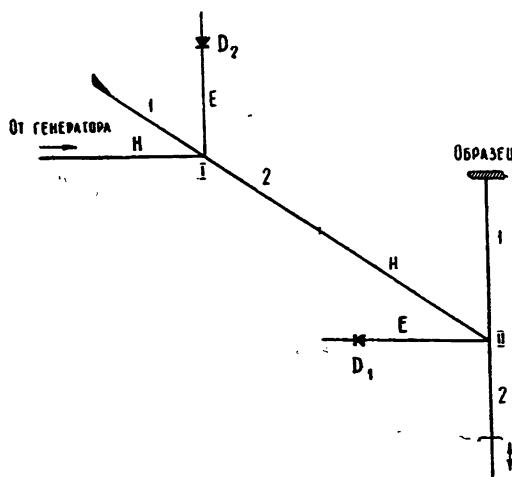


Рис. 3. Схема фазового дискриминатора, предназначенного для измерения фазы коэффициента отражения  $\varphi$ .

$$E_x = \frac{E}{2} \Gamma \exp \left[ j \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_b} 2l_1 + \varphi \right) \right] \quad (6)$$

и

$$E_0 = \frac{E}{2} \Gamma_0 \exp \left[ j \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_b} 2l_2 + \varphi_0 \right) \right], \quad (7)$$

где  $\lambda_b$  — длина волны в волноводе,  $l_1, l_2$  — длины боковых плеч тройника,  $\Gamma_0, \varphi_0$  — модуль и фаза коэффициента отражения короткозамыкающего поршня.

Если использовать детекторы с разной полярностью, то при подаче снимаемых с них сигналов на униполярный прибор будет регистрироваться абсолютная величина разностного сигнала  $|u_1 - u_2|$ . Можно показать, что при условии обеспечения равенства максимальных сигналов на каждом из детекторов положение баланса схемы

$$|u_1 - u_2| = 0$$

будет достигаться независимо от величины модуля  $\Gamma$ . Следует отметить, что в области баланса схемы зависимость сигнала  $|u_1 - u_2|$  от разности фаз волн, отраженных эталоном и образцом, имеет максимальную крутизну, что обеспечивает оптимальные условия для достижения высокой чувствительности к изменению  $\varphi$ .

Измерения  $\varphi$  можно проводить по следующей методике. Предварительно вместо образца используется эталон с известным значением  $\Gamma$  и  $\varphi$  (обычно для него  $\Gamma = 1, \varphi = \pi$ ) и достигается положение баланса путем перестройки короткозамыкающего поршня. Затем добиваются баланса схемы с образцом, для чего поршень смещают на расстояние  $\Delta l$ . Очевидно, что при этом разность фаз коэффициентов отражения эталона и образца есть

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_b} 2\Delta l. \quad (8)$$

Для оценки погрешностей измерения фазы в данной схеме воспользуемся методикой, использованной в работе [13]. Основными источниками погрешностей являются асимметрия тройника и отражения от детекторных секций. Наличие асимметрии у тройника II приводит к проникновению сигнала из плеча 1 в плечо 2 и наоборот. Будем характеризовать асимметрию величиной  $D$ , показывающей, во сколько раз ослабляется сигнал при переходе из одного бокового плеча в другое. Тогда в точке соединения плеч, кроме волны, отраженной образцом,  $E_x$  будет существовать волна

$$E_{D_1} = E_0 D \Gamma \exp \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_b} 2l_1 \right), \quad (9)$$

а дополнительно к волне, отраженной эталоном,  $E_0$  появится волна

$$E_{D_2} = E_x D \Gamma_0 \exp \left( -j \frac{2\pi}{\lambda_b} 2l_2 \right). \quad (10)$$

Подставив в (9) выражение (7), а в (10) — (6), получим

$$E_{D_1} = E_{D_2}.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что асимметрия тройника не вносит погрешности в измерение разности фаз между сигналами, отраженными эталоном и образцом.

Рассмотрим погрешности, обусловленные отражениями от детекторных секций. Пусть детекторы  $D_1$  и  $D_2$  имеют коэффициенты отражения

$$\Gamma_1 = \Gamma_1 \exp [j(\pi - \theta_1)],$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_2 \exp [j(\pi - \theta_2)],$$

а вносимая ими погрешность есть  $\Delta\Psi$ . Нетрудно получить в рассматриваемом случае

$$\Delta\Psi = \arcsin \frac{(\Gamma^2 + \Gamma_0^2)(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2 - 2\Gamma_2 \cos \theta_2 - 2\Gamma_1 \cos \theta_1)}{2\Gamma\Gamma_0(2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_1^2 - 2\Gamma_1 \cos \theta_1 - 2\Gamma_2 \cos \theta_2)}. \quad (11)$$

Следует отметить, что применение описанной выше процедуры измерений позволяет существенно уменьшить ошибку в определении фазы коэффициента отражения образца. Так, если схема предварительно сбалансирована с эталоном, имеющим модуль коэффициента отражения  $\Gamma_{\text{эт}}$ , то, согласно (11), положение баланса будет иметь место при угле, отличающемся от  $\pi/2$  на величину

$$\Delta\Psi_1 = \arcsin \frac{(\Gamma_{\text{эт}}^2 + \Gamma_0^2)(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2 - 2\Gamma_2 \cos \theta_2 - 2\Gamma_1 \cos \theta_1)}{2\Gamma_{\text{эт}}\Gamma_0(2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_1^2 - 2\Gamma_1 \cos \theta_1 - 2\Gamma_2 \cos \theta_2)}. \quad (12)$$

Величина  $\Delta\Psi_1$  не зависит от характеристик измеряемого образца. Поэтому, очевидно, при замене эталона образцом ошибка в определении фазы последнего будет меньше вычисленной по формуле (11) на величину  $\Delta\Psi_1$ , т. е.

$$\Delta\Psi' = \Delta\Psi - \Delta\Psi_1.$$

Так как подбор в схеме близких значений  $\theta_1$  и  $\theta_2$  сложен, основной путь уменьшения ошибки заключается в тщательном согласовании детекторных секций и включении их через развязывающие аттенюаторы.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

С целью измерения  $\Gamma$  и  $\varphi$  полупроводников была разработана комбинированная СВЧ схема (рис. 4), использующая открытый резонатор для измерения модуля и фазовый дискриминатор для измерения фазы коэффициента отражения. При измерении  $\Gamma$  кристаллический генератор модулируется пилообразным напряжением, амплитуда которого подбирается так, чтобы на экране осциллографа наблюдалась одна зона генерации. Путем перемещения плоского отражателя резонатор с эталоном настраивается в резонанс на основной моде. Первоначально по одному или нескольким образцам с известным  $R$  определяется градуировочная кривая  $A N(R)$ . После определения градуировочной кривой измерения сводятся к определению величины  $\Delta N$  при замене эталона исследуемым образцом.

При измерении фазы коэффициента отражения используется левое плечо схемы. Процедура измерений фазы заключается в достижении баланса схемы по минимальному показанию индикаторного прибора У2-6 путем перемещения короткозамыкающего поршня 8. Первое положение баланса достигается с эталоном (металлическая пластинка), затем эталон заменяется исследуемым образцом и вновь находится положение баланса схемы. Разность отсчетов микрометрической головки поршня  $\Delta l$  характеризует отличие фазы коэффициента отражения образца  $\Delta\varphi$  от поршня  $\pi$ , определяемое по формуле (8).

При измерении фазы клистрон модулируется напряжением типа «мейндр», причем для снижения частотных нестабильностей фокус

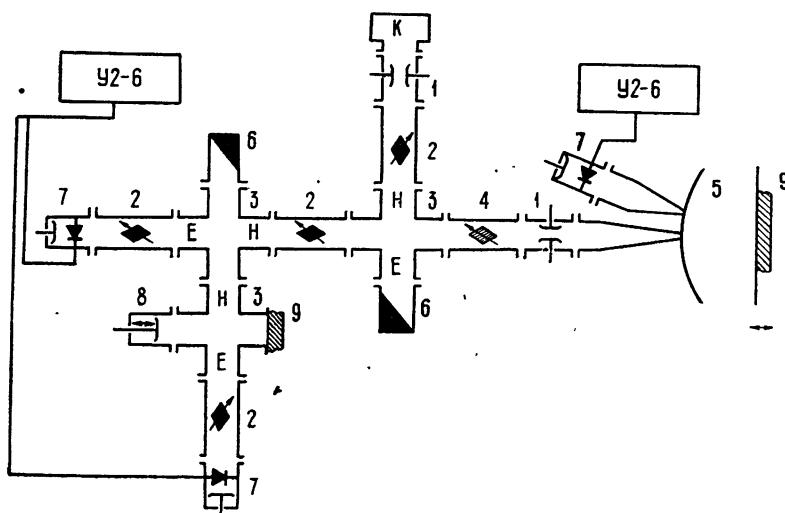


Рис. 4. Блок-схема экспериментальной установки:

К-клистронный генератор, 1—согласователь, 2—развязывающий аттенюатор, 3—двойной тройник, 4—поляризационный аттенюатор, 5—измерительный резонатор, 6—согласованная нагрузка, 7—детектор, 8—эталон реактансов, 9—образец.

и отражатель питаются от батареи. Выполнение всех процедур, направленных на уменьшение погрешности, позволяет производить измерение фазы с точностью  $\pm 1^\circ$ .

Результаты измерений образцов арсенида галлия с концентрациями носителей заряда  $10^{15}$ — $10^{18} \text{ см}^{-3}$  приведены в табл. 1. Расчеты  $R$  и  $\varphi$  выполнены на ЭВМ на основе полуклассических выражений для комплексной диэлектрической проницаемости в безразмерных переменных  $y = \omega/\omega_p$  и  $r = (\omega_p\tau)^{-1}$ , где  $\omega_p^2 = Ne^2/m^*\epsilon_0\epsilon_L$  — квадрат плазменной частоты,  $N$  — концентрация,  $e$  — заряд,  $m^*$  — эффективная масса,  $\tau$  — усредненное по энергиям время релаксации носителей заряда,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_L$  — диэлектрическая проницаемость свободного пространства и кристаллической решетки соответственно.

Полученные данные свидетельствуют о воспроизводимости измерений и совпадении экспериментальных и расчетных значений  $R$  и  $\varphi$  с погрешностью порядка  $\pm 1\%$  для  $R$  и  $\pm 1^\circ$  для  $\varphi$ .

В результате проведенных исследований разработана методика и экспериментальная установка для бесконтактных неразрушающих измерений свойств полупроводниковых материалов в коротковолновой части миллиметрового диапазона. Достоинства предлагаемой методики заключаются, на наш взгляд, в следующем.

1. Возможность независимого измерения двух параметров материала.
2. Весьма высокая для миллиметрового диапазона точность измерений  $R$  и  $\varphi$ .
3. Некритичность к размерам и форме исследуемого образца.
4. Возможность измерений при воздействии на образец дополнительных факторов (температурных, радиационных и т. д.).

Проведенные измерения подтвердили перспективность описанной методики для метрики низколегированных полупроводниковых материалов.

Таблица 1

$N$ образцов	303	302	304	305	135	319	321	323
$N (cm^{-3})$	$3,7 \cdot 10^{18}$	$8,34 \cdot 10^{17}$	$5,35 \cdot 10^{17}$	$3,5 \cdot 10^{17}$	$1,48 \cdot 10^{17}$	$1,5 \cdot 10^{16}$	$7,4 \cdot 10^{15}$	$9,1 \cdot 10^{14}$
$R_{\text{расч}}$	0,98	0,972	0,96	0,95	0,92	0,775	0,686	0,37
$\varphi_{\text{расч}}$	179,5°	179°	178,5°	178,2°	177,3°	172,5°	170,1°	168,9°
$R_{\text{эксп}}$	1	0,99	0,98	0,964	0,94	0,895	0,765	0,38
	2	0,977	0,93	0,956	0,946	0,92	0,77	0,355
	3	0,99	0,97	0,966	0,944	0,926	0,762	0,4
	1	178,5°	178,5°	179,7°	178,2°	178,5°	173,8°	170,5°
	2	177,5°	177,6°	180°	178,9°	177,6°	172,5°	168,1°
	3	180°	180°	180°	177,2°	176,6°	174,05°	168,1°

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Биленко, Е. М. Орнатская, Б. С. Суровов, сб. Тр. симпозиума по электронным процессам на поверхности и в монокристаллических слоях полупроводников, Новосибирск, 1967, стр. 172.
2. Ю. К. Григулис, Э. Э. Аболтынь, сб. Полупроводники и их применение в электротехнике, изд. АН Латв. ССР, Рига, 1964.
3. А. Б. Давыдов, Ю. Г. Арапов, ПТЭ, № 6, 113 (1967).
4. Д. И. Биленко, Л. И. Кац, Л. В. Малинин, ФТП, 2, № 1, 44 (1968).
5. W. Culshaw, Proc. IRE, Pt. B. Suppl., 109, № 23, 820 (1962).
6. Дж. Дедженфорд, П. Калмен, ТИИЭР, 54, № 4, 83 (1960).
7. А. И. Выставкин, В. Н. Губанков, Ю. Н. Казанцев, Н. Б. Павлов, ПТЭ, № 1, 138 (1968).
8. Д. И. Биленко, А. Е. Луньков, Е. М. Орнатская, В. Н. Язиков, Тезисы докладов XXIV Всесоюзной научной сессии НТО им. А. С. Попова, Радиоизмерения, М., 1968, стр. 46.
9. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
10. Сб. Лазеры, под ред. М. Е. Жаботинского, Т. А. Шмаонова, ИЛ, М., 1963.
11. Х. Хенл, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
12. Ю. Н. Казанцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 10, № 4, 518 (1967).
13. И. Б. Лайхтман, Радиотехника и электроника, 3, № 4, 416 (1958).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
29 октября 1968 г.

## MEASUREMENT OF THE MODULUS AND THE PHASE OF THE REFLECTION COEFFICIENT OF SEMICONDUCTORS IN MILLIMETER RANGE

*D. I. Bilenko, A. E. Lun'kov, V. N. Yazikov*

The use of the open resonator consisted of plane and spherical reflectors for measuring the reflection coefficient of semiconductors has been considered. An expression has been derived which relates the quality of resonator with the modulus or the reflection coefficient of a sample filling the opening in the center of a plane mirror. The co-dependence of the phase of the reflection coefficient of the semiconductor sample versus the resonance frequency shift is found. A simple and exact method of measuring the modulus of the reflection coefficient of semiconductor according to the change of the open resonator quality is proposed. A waveguide phase discriminator assigned for measuring the phase of the reflection coefficient of semiconductors is considered. The expressions for the measurement errors are derived.

In 2 mm range, an experimental apparatus is designed for a contactless non-desintegration method of measuring the parameters of the semiconductor material according to measurements of the modulus and phase of the reflection coefficient. For low-impurity samples of CaAs the measurement accuracy of the modulus of about  $\pm 1\%$  and of the phase of the reflection coefficient of about  $\pm 1\%$  is practically achieved.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371

### О ШИРИНЕ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ПРИ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Т. П. Литвинова

Вопросам изучения статистических свойств волн, распространяющейся в турбулентной атмосфере при сильных флюктуациях параметров волны, уделяется много внимания при экспериментальных и теоретических исследованиях. В настоящее время получены лишь некоторые теоретические результаты [1], описывающие в приближении геометрической оптики поведение дисперсии логарифма амплитуды плоской волны и подтверждающие экспериментально обнаруженный [2] факт насыщения дисперсии при сильных флюктуациях амплитуды. В [1, 2] обращается также внимание на увеличение масштаба корреляции флюктуаций уровня в условиях сильных возмущений.

В данном сообщении с использованием результатов [1], в том же приближении проводится теоретический анализ поведения частотных спектров флюктуаций логарифма амплитуды. При этом спектральная плотность определяется с помощью известного преобразования, связывающего ее с функцией автокорреляции на основании теоремы Винера–Хинчина. Считаются выполнеными условия справедливости гипотезы замороженности Тейлора. Учитывается связь двумерной пространственной спектральной плотности величины  $\chi = \ln A/A_0$  ( $A$  — амплитуда волны в месте приема,  $A_0$  — начальная амплитуда волны) с трехмерной пространственной спектральной плотностью флюктуаций диэлектрической проницаемости среды, полученная в [1] для режима сильных флюктуаций  $\ln A$ . В этом случае частотный спектр будет описываться соотношением

$$W_\chi(f) = \frac{4}{Qv_\perp} \int_0^\infty \left( x^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\pi^2 L^8}{12} Q \left( x^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right) \right] \right\} \times \\ \times \Phi_\epsilon \left[ \left( x^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right)^{1/2} \right] dx, \quad (1)$$

где  $Q = \int_0^\infty x^3 \Phi_\epsilon(x) dx$ ,  $\Phi_\epsilon(x)$  — пространственный спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости,  $v_\perp$  — поперечная к направлению распространения составляющая скорости ветра.

Рассмотрим гауссову —  $\Phi_\epsilon(x) = (\epsilon^2 / l_0^3 / 8\pi\sqrt{\pi}) \exp(-x^2/l_0^2/4)$  — и колмогоровскую —  $\Phi_\epsilon(x) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2)$  — модели среды. Проведя интегрирование (1), получим следующие выражения для частотных спектров величины  $\chi$ :

$$W_\chi^{\text{гаусс}}(\Omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}f_0} \left\{ 1 + \frac{\Omega^2}{2} - \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{2} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2} \right)^{-3/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -\frac{\Omega^2 \sigma^2}{2} \right) \right\} \exp \left( -\frac{\Omega^2}{4} \right); \quad (2)$$

$$W_\chi^{\text{колм}}(\Omega_1) = \frac{3,06}{2\pi f_0^2} \left\{ \Omega_1^{-2/3} \left[ {}_1F_1 \left( \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \Omega_1^2 \right) - \exp(-6\Omega_1^2 \sigma_1^2) {}_1F_1 \left( \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \Omega_1^2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \times (1+6\sigma_1^2) \right] + 0,95 \left[ \exp(-6\Omega_1^2 \sigma_1^2) (1+6\sigma_1^2)^{1/3} {}_1F_1 \left( \frac{5}{6}; \frac{4}{3}; \Omega_1^2 (1+6\sigma_1^2) \right) - \right. \\ \left. - {}_1F_1 \left( \frac{5}{6}; \frac{4}{3}; \Omega_1^2 \right) \right] \right\} \exp(-\Omega_1^2). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$f_0 = \frac{v_\perp}{2\pi l_0}, \quad \Omega = \frac{f}{f_0}, \quad f_0^1 = \frac{v_\perp z_m}{2\pi}, \quad \Omega_1 = \frac{f}{f_0^1}, \quad \sigma^2 = \frac{8}{12} \sqrt{\pi} \epsilon_1^2 \frac{L^3}{l_0^8}, \quad z_m = \frac{5,9}{l_0},$$

$l_0$  — внутренний масштаб турбулентности,  $\sigma_1^2 = 0,0126 C_e^2 L^3 z_m^{7/3}$ ,  $\sigma^2$  и  $\sigma_1^2$  являются дисперсиями флюктуаций логарифма амплитуды для гауссовой и колмогоровской моделей соответственно, вычисленными в приближении геометрической оптики и малых возмущений  $\ln A$ .

Построенные по формулам (2) и (3) спектральные плотности изображены на рис. 1. Кривые 1 и 2 соответствуют формулам, полученным в геометрооптическом

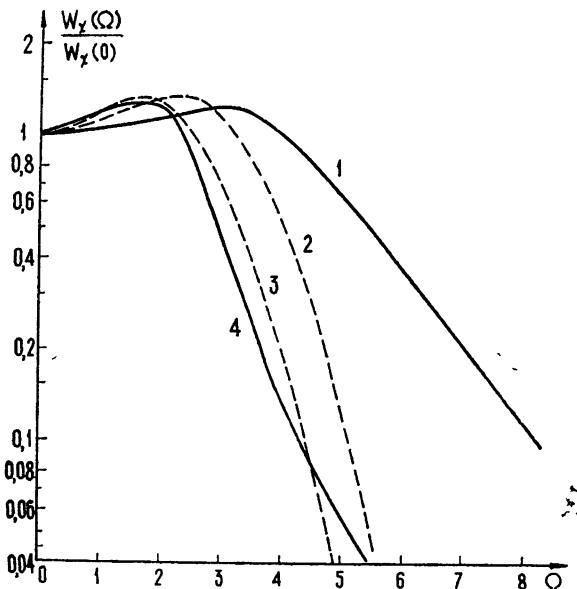


Рис. 1. Спектральная плотность флюктуаций логарифма амплитуды:

1,2—слабые флюктуации ( $\sigma^2, \sigma_1^2 < 0,2$ ); 3,4 — сильные флюктуации ( $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 5$ ) (— колмогоровская модель; --- — гауссова модель).

приближении для слабых возмущений. Видно, что для обеих моделей среды с ростом параметров  $\sigma^2$  и  $\sigma_1^2$  частотные спектры сужаются. Зависимость эффективной ширины спектральных кривых  $\Delta f_{\text{эфф}} = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df / W_x(0)$  от величин  $\sigma^2$  и  $\sigma_1^2$  можно определить с помощью следующих соотношений:

$$\Delta f_{\text{эфф}}^{\text{гаусс}} = 2 \sqrt{\pi} f_0 \frac{1 - (1 + \sigma^2/2)^{-2}}{1 - (1 + \sigma^2/2)^{-3/2}}, \quad (4)$$

$$\Delta f_{\text{эфф}}^{\text{колм}} \approx \frac{2\pi}{2,9} f_0^1 \frac{1 - (1 + 6\sigma_1^2)^{-1/6}}{(1 + 6\sigma_1^2)^{1/3} - 1}. \quad (5)$$

Кривые, построенные по формулам (4) и (5), представлены на рис. 2, из которого следует, что, начиная с некоторого значения  $\sigma^2$ , спад кривых замедляется. Для гауссовой модели среды предельное значение ширины спектра при больших  $\sigma^2$  оказывается равным  $2\sqrt{\pi} f_0$ ; для колмогоровской среды асимптотическая зависимость ширины спектра имеет вид  $a f_0^1 / (\sigma_1^2)^{1/3}$ , где  $a$  — величина порядка 1,18.

Таким образом, полученный результат свидетельствует о том, что в условиях сильных флуктуаций амплитуды имеет место своего рода «насыщение» ширины частотного спектра как функции  $\sigma^2$  — факт, не отмечавшийся ранее в литературе.

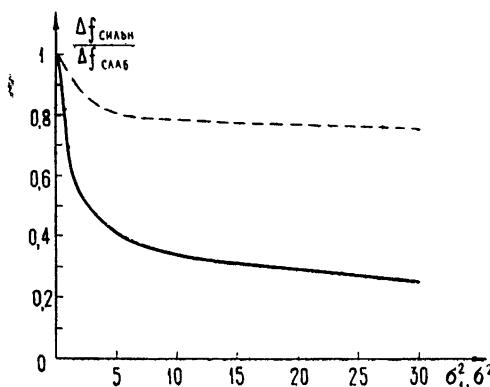


Рис. 2. Эффективная ширина частотных спектров при сильных флуктуациях логарифма амплитуды (— — колмогоровская модель; --- — гауссова модель).

Очевидно, что аналогичное явление «насыщения» будет иметь место, если рассмотреть поведение масштаба пространственной корреляции  $\chi$  в зависимости от  $\sigma^2$ . Действительно, рассмотрим, например, гауссову модель среды, для которой, как известно [8], функция пространственной корреляции  $B_\chi(\rho)$ , описываемая в приближении слабых возмущений соотношением  $B_\chi(\rho) = \sigma^2 \exp(-\rho^2/l_0^2) [1 - 2\rho^2/l_0^2 + 1/2(\rho^4/l_0^4)]$  обращается в нуль при  $\rho_{\text{корр}} \approx 0,77 l_0$ . В геометрооптическом приближении для сильных флуктуаций амплитуды можно получить следующее выражение для  $B_\chi(\rho)$ :

$$B_\chi(\rho) = \left(1 - \frac{\rho^2}{l_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{l_0^2}\right) + \frac{[\rho^2/l_0^2(1 + \sigma^2/2)] - 1}{(1 + \sigma^2/2)^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{l_0^2(1 + \sigma^2/2)}\right]. \quad (6)$$

Анализируя это выражение, можно установить, что с ростом  $\sigma^2$  масштаб корреляции  $\rho_{\text{корр}}$  увеличивается, стремясь при больших  $\sigma^2$  к значению  $l_0$ . Таким образом, статистические характеристики флуктуаций логарифма амплитуды (дисперсия, масштаб корреляции, ширина частотного спектра), рассматриваемые как функции дисперсии  $\sigma^2$ , вычисленной в приближении слабых возмущений на трассах, где выполняются условия применимости геометрооптического приближения, с ростом  $\sigma^2$  имеют тенденцию к насыщению.

Поскольку данный результат получен в рамках приближенной теории, при сопоставлении с экспериментальными данными его следует использовать, строго говоря, лишь для качественной интерпретации поведения частотных спектров и других характеристик флуктуаций уровня сигнала. На трассах, где существенны дифракционные эффекты, очевидно, потребуются дополнительные количественные оценки.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 620 (1967).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ЭКРАНОВ

Б. А. Панченко

В работах [1–3] исследовалась радиопрозрачность перфорированных экранов с узкими отверстиями, образующими прямоугольную структуру, при падении плоской волны с вектором  $E_0$ , ориентированным перпендикулярно отверстиям. Представляют интерес сведения о зависимости коэффициента прохождения от поляризации падающего поля и вида структуры. Приводятся некоторые результаты исследования коэффициента прохождения через перфорированный экран в зависимости от ориентации прямоугольных и крестообразных отверстий и поляризации поля при нормальном падении волны на экран.

## 1. Решетка из наклонных щелей

На плоский проводящий экран с периодически расположенными узкими отверстиями нормально падает электромагнитная волна с вектором  $E_0 = E_0 e_0$  (рис. 1a). Коэффициент прохождения через экран с отверстиями определяется выражением [3, 4]

$$T = \operatorname{Re} \left\{ \frac{AB \int_s^n \mathbf{n} \times E_\tau(r) \Gamma(r, r') \mathbf{n} \times E_\tau(r') ds ds'}{\sqrt{\epsilon/\mu} \left[ \int_s^n (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{e}_0) (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau) ds \right]^2} \right\}^{-1}, \quad (1)$$

где  $E_\tau(r)$  — функция распределения поля в отверстии,  $\Gamma(r, r')$  — тензорная функция Грина задачи [3],  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к экрану,  $\mathbf{n}_0$  — направление распространения падающей волны.

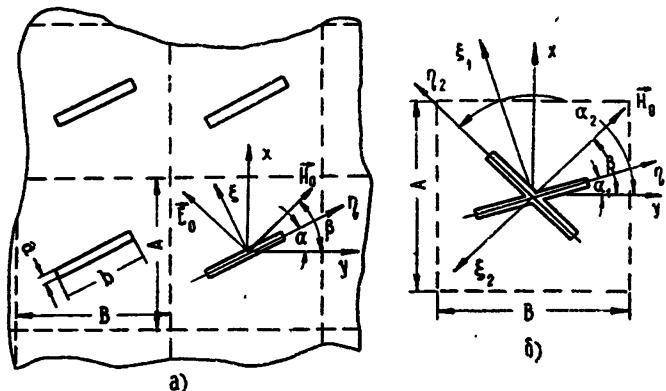


Рис. 1.

Для узких отверстий на частотах вблизи первого резонанса структуры функция распределения поля в отверстии берется в виде

$$E_\tau = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - \xi^2 \right]^{-1/2} \cos \frac{\pi}{b} \eta a_\xi, \quad (2)$$

$a_\xi$  — единичный вектор. После подстановки (2) в (1) и интегрирования получим

$$T = \cos^2(\alpha - \beta) \operatorname{Re} \left\{ j \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \left[ 1 - \left( \frac{k_\eta}{k} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{k_x}{k} \right)^2 + \left( \frac{k_y}{k} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} J_0^2 \left( \frac{k_\xi a}{2} \right) C^2 \left( \frac{k_\eta b}{2} \right) \right\}^{-1}, \quad (3)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $k_x = 2\pi m/A$ ,  $k_y = 2\pi n/B$ ,  $C(x) = \frac{\cos x}{1 - (2x/\pi)^2}$ ,  $k_\xi = k_x \cos \alpha - k_y \sin \alpha$ ,  $k_\eta = k_x \sin \alpha + k_y \cos \alpha$ ,  $J_0(x)$  — функция Бесселя.

Из выражения (3) видно, что коэффициент прохождения через решетку из наклонных щелей пропорционален квадрату косинуса угла поляризации падающей волны

От угла наклона щелей  $\alpha$  аналитическая зависимость  $T$  сложнее, однако, как показали расчеты, для структур с квадратными ячейками  $T \equiv \cos^2 \alpha$ . На рис. 2 приведены результаты численных расчетов коэффициента прохождения по напряжению  $T_u = \sqrt{T}$ .

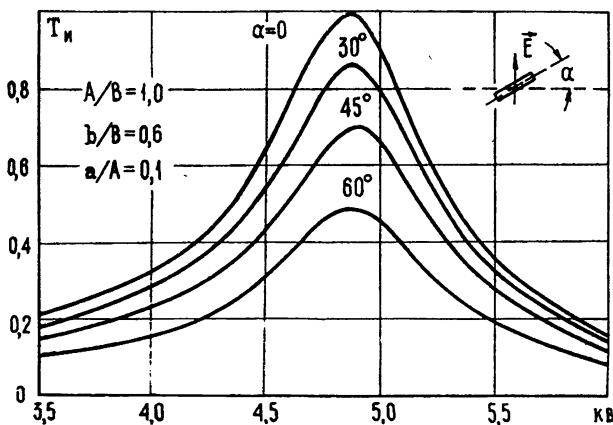


Рис. 2.

## 2. Решетка из крестообразных щелей

Прямоугольная структура состоит из крестообразных щелей, параметры которых приведены на рис. 1б. Приближенно будем полагать, что распределения полей на линейных участках щелей независимы и пропорциональны тангенциальным составляющим напряженности магнитного поля падающей волны. Тогда пробная функция имеет вид

$$E_\tau = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - \xi_1^2 \right]^{-1/2} \cos \frac{\pi}{b} \eta_1 \cos(\alpha_1 - \beta) a_{\zeta_1} + \\ + \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - \xi_2^2 \right]^{-1/2} \cos \frac{\pi}{b} \eta_2 \cos(\alpha_2 - \beta) a_{\zeta_2}.$$

После подстановки  $E_\tau$  в (1) и интегрирования получим

$$T = [\cos^2(\alpha_1 - \beta) + \cos^2(\alpha_2 - \beta)]^2 \operatorname{Re} \left\langle j \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{k_x}{k} \right)^2 + \left( \frac{k_y}{k} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \times \right. \\ \times \left\{ \cos^2(\alpha_1 - \beta) \left[ 1 - \left( \frac{k \eta_1}{k} \right)^2 \right] J_0^2 \left( k_{\zeta_1} \frac{a}{2} \right) C^2 \left( k_{\eta_1} \frac{b}{2} \right) + \right. \\ + \cos^2(\alpha_2 - \beta) \left[ 1 - \left( \frac{k \eta_2}{k} \right)^2 \right] J_0^2 \left( k_{\zeta_2} \frac{a}{2} \right) C^2 \left( k_{\eta_2} \frac{b}{2} \right) + \\ + 2 \left[ \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{k \eta_1 k \eta_2}{k} \right] \cos(\alpha_1 - \beta) \cos(\alpha_2 - \beta) \times \\ \left. \left. \times J_0 \left( k_{\zeta_1} \frac{a}{2} \right) J_0 \left( k_{\zeta_2} \frac{a}{2} \right) C \left( k_{\eta_1} \frac{b}{2} \right) C \left( k_{\eta_2} \frac{b}{2} \right) \right\} \right\rangle^{-1}. \quad (4)$$

Основной практический интерес представляют структуры с взаимно перпендикулярными щелями —  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ = \alpha$ . Анализ выражения (4) в этом случае показывает, что для структур с квадратными ячейками при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 45^\circ$  коэффициент  $T$  не зависит от поляризации падающего поля. На рис. 3 приведены результаты численного расчета  $T_u$  в зависимости от поляризации поля для четырех типов структур — с линейными, наклонными и крестообразными щелями.

На основании полученных выше формул как дополнительный результат к поляризационным характеристикам можно получить данные, позволяющие сравнить решетки с прямоугольной и треугольной структурами. На рис. 4 сравниваются частотные

характеристики коэффициента прохождения для структур с одинаковыми размерами отверстий. Из сравнения видно, что дополнительно к механическим преимуществам

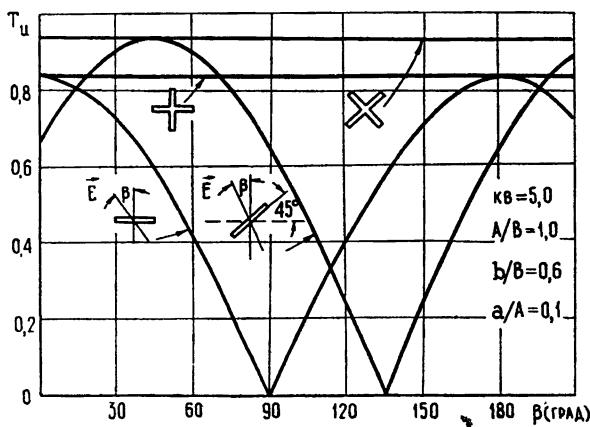


Рис. 3.

треугольная структура имеет и лучшие электрические характеристики — резонанс наступает при сравнительно меньших частотах, чем в прямоугольной решетке.

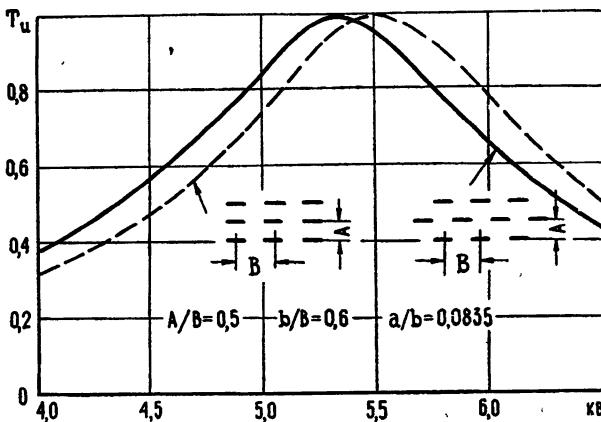


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Kieburts, A. Ishimaru, IRE Trans., AP-9, № 6, 606 (1961).
2. H. Oh, C. Lunden, Microwave J., 11, № 3, 105 (1968).
3. Б. А. Панченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1884 (1968).
4. C. Huang, R. Kodis, H. Levine, J. Appl. Phys., 26, № 2, 151 (1955).

Уральский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

УДК 621.372.09

## АНОМАЛЬНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ СО СЛОЕМ ДИЭЛЕКТРИКА

Б. А. Панченко, И. П. Соловьевна

### 1. Формальное решение задачи

Рассматривается падение плоской электромагнитной волны на проводящий экран с решеткой прямоугольных отверстий и слоем диэлектрика (рис. 1а). На основании

теоремы Флеке задача для бесконечной решетки сводится к дифракции на периоде структуры (рис. 1б), при этом функция Грина задачи автоматически учитывает влия-

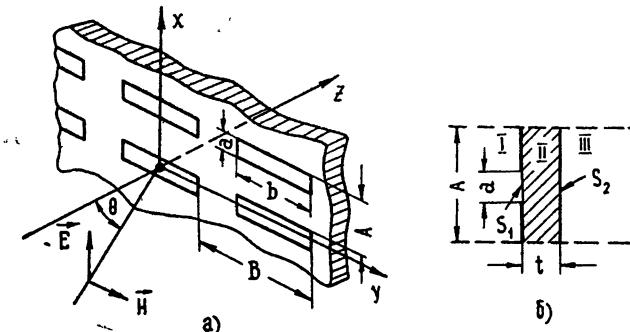


Рис. 1.

ние соседних отверстий. Исходными для решения являются уравнения непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на отверстиях связи  $s_1$  и  $s_2$  при заданных составляющих напряженности электрического поля в отверстиях. Для узких отверстий исходные векторные уравнения сводятся к скалярным.

В соответствии с методом Галеркина неизвестное поле  $E_1$  в отверстии  $s_1$  разлагается в ряд по системе пробных функций —  $E_1(x, y) = \sum_{k=1}^N e_k \varphi_k(x, y)$ . Задача таким образом сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $e_k$

$$[Y_{kp}] [e_k] = 2 Y_{00}^I [n_{00,p}] \quad (0 \leq p \leq N),$$

где  $[Y_{kp}]$  — квадратная матрица частичных проводимостей,  $[e_k]$ ,  $[n_{00,p}]$  — матрицы-столбцы амплитудных коэффициентов и коэффициентов трансформации,

$$Y_{kp} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} n_{mn,k} Y_{mn}^{\text{экв}} n_{mn,p}^* \quad n_{mn,k} = \int_{s_1} \psi_{mn}(x, y) \varphi_k(x, y) dS,$$

$$Y_{mn}^{\text{экв}} = Y_{mn}^I - j Y_{mn}^{\text{II}} \operatorname{ctg} \beta_{mn}^{\text{II}} t + \frac{Y_{mn}^{\text{II}} \operatorname{cosec} \beta_{mn}^{\text{II}} t}{Y_{mn}^I - j Y_{mn}^{\text{II}} \operatorname{ctg} \beta_{mn}^{\text{II}} t}.$$

$$Y_{mn}^{I, \text{II}} = \frac{1}{\omega \mu} \frac{(k^{I, \text{II}})^2 - k_y^2}{\beta_{mn}^{I, \text{II}}}, \quad \beta_{mn}^{I, \text{II}} = [(k^{I, \text{II}})^2 - k_x^2 - k_y^2]^{1/2},$$

$$\psi_{mn}(x, y) = (AB)^{-1/2} \exp(jk_x x + jk_y y),$$

$$k_x = \frac{2\pi m}{A} - k \sin \theta \cos \varphi, \quad k_y = \frac{2\pi n}{B} - k \sin \theta \sin \varphi, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Основной интерес представляют выходные характеристики решетки — коэффициент прохождения и отражения. Коэффициент прохождения определен как отношение мощности прошедших парциальных волн к мощности падающей волны и выражается через обратную матрицу проводимостей

$$T_{mn} = \frac{(2 Y_{mn}^{\text{II}} \operatorname{cosec} \beta_{mn}^{\text{II}} t)^2}{(Y_{mn}^I)^2 + (Y_{mn}^{\text{II}} \operatorname{ctg} \beta_{mn}^{\text{II}} t)^2} |[n_{mn,k}]_t [\tilde{Y}_{kp}]^{-1} [n_{00,p}^*]|^2 \frac{Y_{mn}^I}{Y_{00}^I},$$

где  $\tilde{Y}_{kp} = Y_{kp}/Y_{00}^I$ ,  $[n]_t$  — транспонированная матрица.

## 2. Численные результаты

Вычисление парциальных коэффициентов прохождения производилось на ЭВМ с использованием стандартной программы для решения систем линейных алгебраич-

ских уравнений повышенного порядка с комплексной матрицей [1]. Функция распределения поля в отверстии  $s_1$  бралась в следующем виде.

$$\varphi_r(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right]^{-1/2} \cos \frac{\pi r}{b} y, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Приводятся результаты расчетов для случая нормального падения волны. С целью отработки методики расчета и выяснения сходимости решения с увеличением числа пробных функций были произведены расчеты для экрана без диэлектрика (рис. 2). Для

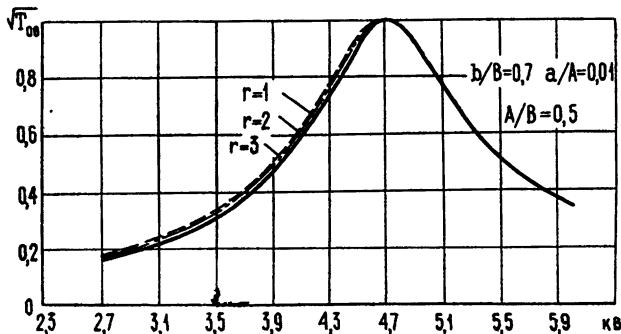


Рис. 2.

выбранных параметров задачи при учете 3—4 пробных функций частотные кривые графически совпадали.

Так же, как и с экраном без диэлектрика [2], прохождение электромагнитных волн через перфорированный экран с диэлектрическим слоем носит резонансный характер. При этом различаются два типа резонансов — регулярные (основной и резонансы высших порядков, которые появляются на высоких частотах при сравнительно толстых слоях диэлектрика) (рис. 3, 4) и нерегулярные (аномальные) (рис. 5, 6). Су-

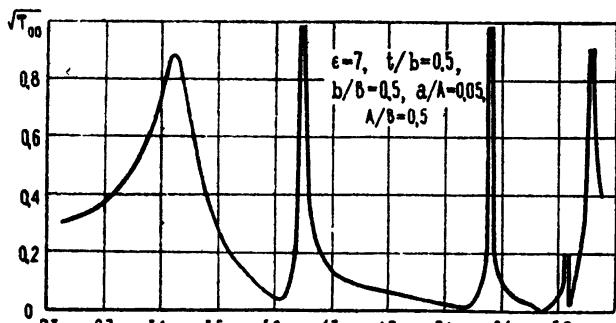


Рис. 3.

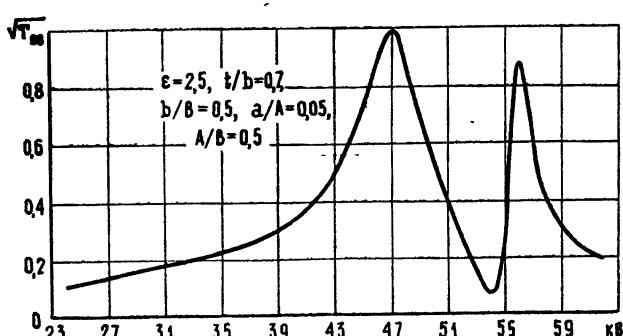


Рис. 4.

ществование аномальных резонансов можно объяснить появлением распространяющихся высших гармоник «волноводных» волн в слое диэлектрика. При малых толщинах

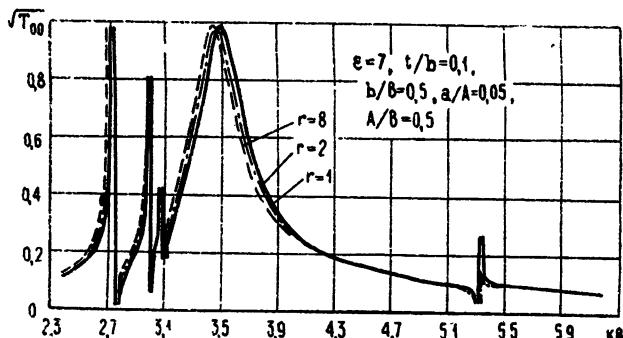


Рис. 5.

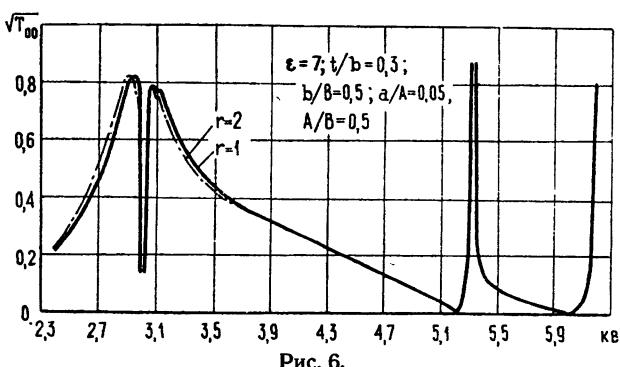


Рис. 6.

слоя наличие в нем нескольких распространяющихся волн и интенсивный обмен энергией нераспространяющихся волн, возникающих на границах областей, приводят к резкой частотной зависимости коэффициента прохождения.

Появление аномальных отражений можно объяснить также возникновением комплексных поверхностных волн над структурой с диэлектриком (leaky waves [3]). Частотное положение нерегулярных резонансов и их ширины могут быть определены при этом приближенно из решения трансцендентного уравнения относительно собственных чисел поверхностных волн. Однако для двумерных решеток такой подход приводит к значительным ошибкам. Поэтому определение характеристик дополнительных резонансов целесообразно проводить на основе численного решения задачи по частотным графикам коэффициента прохождения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. П. Андреева, Стандартная программа, вып. 23, изд. МГУ, 1966.
- Б. А. Панченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1884 (1968).
- С. Н. Knittel, A. Hessel, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 56, № 11, 1822 (1968).

Уральский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
12 мая 1969 г.

УДК 621.372.821

#### ВОЗБУЖДЕНИЕ ДИПОЛЕМ ОТКРЫТОГО ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

Т. А. Коновалова

Волновод образован двумя идеально проводящими ленточными решетками, расположенными параллельно друг другу в плоскостях  $z = 0$  и  $z = -a$ . Ленты ориентированы вдоль оси  $ox$ , период решетки  $l$ , ширина щелей  $d$ . Электрический диполь помещен в точку  $(0, 0, -a/2)$  параллельно оси  $ox$ .

Считая все пространство однородным, представим поля внутри и вне волновода через единственную отличную от нуля  $x$ -составляющую вектора Герца  $\Pi_x$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{1x} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(ip_n z + i\lambda_n y + iax) da d\lambda \quad (z>0), \\ \Pi_{2x} &= A \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ip_0 |z + a/2| + i\lambda y + iax)}{p_0} da d\lambda + \\ + \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \{\exp(-ip_n z) + \exp[ip_n(z+a)]\} \exp(i\lambda y + iax) da d\lambda \quad (-a < z < 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A = -Ih/8\pi^2k$ ,  $I$  — ток диполя,  $h$  — длина диполя,  $k$  — волновое число,  $\lambda_n = \lambda + 2\pi n/l$ ,  $p_n = \sqrt{k^2 - a^2 - \lambda_n^2}$ , причем мнимая часть корня считается положительной, временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается.

Неизвестные коэффициенты в (1) находятся с помощью метода, развитого в работах [1, 2], позволяющего получить относительно искомых величин  $a_n$  и  $b_n$  бесконечную систему линейных неоднородных уравнений.

В длинноволновом случае ( $k/l > 1/2$ ) решение системы может быть получено в явном виде, что позволяет записать поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{1x} &= \sum_v B_v \exp\left[i\sqrt{k^2 - g_v^2}(z + a/2)\right] H_0^{(1)}(\rho g_v) + \\ &\div \frac{1}{\pi} A \int_k^{k+i\infty} (-iq_1) \left\{ \frac{\exp[i\sqrt{k^2 - g^2}(z + a/2)]}{-iq_1\sqrt{k^2 - g^2} + 1 + \exp(i\sqrt{k^2 - g^2}a)} - \frac{\exp[-i\sqrt{k^2 - g^2}(z + a/2)]}{iq_1\sqrt{k^2 - g^2} + 1 + \exp(-i\sqrt{k^2 - g^2}a)} \right\} \times \\ &\quad \times H_0^{(1)}(\rho g) g dg, \\ \Pi_{x2} &= \sum_v C_v \left\{ \exp\left[-i\sqrt{k^2 - g_v^2}(z + a/2)\right] + \exp\left[i\sqrt{k^2 - g_v^2}(z + a/2)\right] \right\} H_0^{(1)}(\rho g_v) + \\ &+ \pi A \int_k^{k-i\infty} \frac{q_1^2 \sqrt{k^2 - g^2} \{ \exp[i\sqrt{k^2 - g^2}(z + a/2)] + \exp[-i\sqrt{k^2 - g^2}(z + a/2)] \} H_0^{(1)}(\rho g) g dg}{[-iq_1\sqrt{k^2 - g^2} + 1 + \exp(i\sqrt{k^2 - g^2}a)] [iq_1\sqrt{k^2 - g^2} + 1 + \exp(-i\sqrt{k^2 - g^2}a)]}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$q_1 = -\frac{l}{2\pi} \ln \frac{1+u}{2} > 0, \quad u = \cos \frac{\pi d}{l},$$

$$x = \rho \cos \eta, \quad y = \rho \sin \eta, \quad \alpha = g \cos \beta, \quad \lambda = g \sin \beta.$$

Слагаемое первого типа образует дискретный набор волн с фиксированными значениями постоянной распространения  $g_v$ , совпадающими с корнями уравнения

$$-iq_1 \sqrt{k^2 - g_v^2} + 1 + \exp(i\sqrt{k^2 - g_v^2}a) = 0. \quad (3)$$

Это «квазисобственные» волны данного волновода [3]. Слагаемое второго типа является непрерывной суперпозицией волн, постоянные распространения которых лежат на разрезе в комплексной плоскости  $g$ , уходящем из  $k$  вертикально вверх, а из  $-k$  вертикально вниз.

Анализ корней уравнения (3) показывает, что «квазисобственные» волны есть волны «быстрые» ( $v_\Phi > c$ ), затухающие вдоль оси волновода. При удалении от поверхности волновода ( $|z| \rightarrow \infty$ ) они растут, но для них существует конус направлений с вершиной в точке расположения диполя, внутри которого они представляют собой суперпозицию плоских волн, экспоненциально затухающих при удалении от его вершины. Уравнение такого конуса для волны с номером  $v$  имеет вид

$$\operatorname{Im} g_v - \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - g_v^2} (z + a/2) = 0. \quad (4)$$

Направление его образующих совпадает с направлением распространения «квазисобственных» волн, внутри которого они убывают алгебраически.

Волны непрерывного спектра распространяются вдоль координаты  $\rho$  с затухающей амплитудой со скоростью, при  $k\rho \gg 1$  равной скорости света в среде (рассматривается только нулевая гармоника).

Исследуя поведение обоих слагаемых в (2) при  $\rho \rightarrow \infty$ , мы можем выделить область, внутри которой преобладают «квазисобственные» волны. Для узких щелей ( $kq_1 \ll 1$ ) эта область определяется неравенством  $k(z + a/2)^2 \ll \rho$ ,

где

$$1 \ll k\rho \ll \frac{ka^3}{q_1^2} \ln \rho/q_1.$$

Несмотря на то, что при  $|z| \rightarrow \infty$  оба слагаемых в (2) растут, суммарное поле убывает. Действительно, используя метод перевала, запишем поле в дальней зоне вне волновода в виде

$$\Pi_{1x} \simeq 2\pi A (-iq_1) \frac{\exp[i(kr - \pi/2)]}{r} \frac{k \sin \psi}{-iq_1 k \sin \psi + 1 + \exp(ik \sin \psi a)}, \quad (5)$$

где  $\psi$  — угол между направлением на точку наблюдения и координатой  $\rho$ . Т. е. вдали от источника поле представляет собой сферическую волну, убывающую по экспоненте при  $\text{Im } k > 0$  и как  $1/r$  при  $\text{Im } k = 0$ .

Зависимость мощности излучения  $W(r\psi)$  от угла  $\psi$  является резонансной. Максимумы наблюдаются в направлениях распространения «квазисобственных» волн. При узких щелях

$$\psi_{\max} \simeq \arcsin \frac{2\nu + 1}{a} \frac{\pi}{k} \quad (\nu = 0, 1, \dots). \quad (6)$$

В заключение автор выражает благодарность В. П. Шестопалову за предложенную тему и интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
2. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб, сб. Радиотехника, ХГУ, вып. 1, 3, 1965.
3. В. Г. Сологуб, Диссертация, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1967.

Харьковский авиационный  
институт

Поступила в редакцию  
8 апреля 1969 г.