

УДК 621.378.001

О ВОЗБУЖДЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ УСИЛИВАЕМЫХ ВОЛН ПРИ ИХ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЗАХВАТЕ ВОЛНОВЫМИ ПАКЕТАМИ ИЗЛУЧЕНИЯ НАКАЧКИ

М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман

Найдены поля в области взаимодействия волн при выполнении условий пространственного захвата параметрически усиливаемых волн излучением накачки. Для этого применено преобразование Лапласа, что позволяет доказать справедливость разложения полей, определяемых в приближении геометрической оптики, по собственным функциям задачи в этом же приближении и найти амплитуды мод.

В работе авторов [1] показано, что при выполнении условий пространственного захвата волн излучением накачки (условий «пленения» этих волн) кроме затухающих мод появляются экспоненциально нарастающие моды. Зависимость амплитуд мод от продольной координаты при возбуждении полей излучением, падающим на область взаимодействия, или сторонними источниками в этой области легко найти, учитывая условия биортогональности [2] собственных функций прямой и сопряженной задачи. Поскольку, однако, полнота системы собственных функций несамосопряженных задач в общем случае не рассмотрена (см., например, обзор [3]), остается открытым вопрос о существовании полей, нарастание или затухание которых медленнее экспоненциального. Это делает невозможным получение существенной для ряда задач оценки величины расстояния, на котором можно учитывать только поле нарастающих мод. Поэтому для определения поля в области взаимодействия в настоящей работе применено преобразование Лапласа. Это позволяет доказать справедливость разложения полей, определяемых в приближении геометрической оптики [1], по собственным функциям задачи в этом же приближении и найти амплитуды мод.

Для определенности рассмотрим распространение двух гармонических полей*

$$E_{1,2} = e_{1,2} \{ \mathcal{E}'_{1,2}(r_{\perp}; z) \exp [\pm i x_0 x_1 - i (\bar{\omega}_{1,2}^0 \pm \Omega) t - k_{1,2}^0 z] + \text{к. с.} \},$$

взаимодействующих в одноосном (с оптической осью в плоскости $x_1 z$) квадратично-нелинейном кристалле с пучком поля накачки**

* Ниже будем считать, что частоты $\omega_{1,2}^0$ удовлетворяют условию одномерного синхронизма, а величины Ω и $x_0(\Omega)$ определяются из условия двумерного синхронизма. Например, $x_0 = x_0^{(\pm)} = -\bar{k}\beta_z/2 \pm (\bar{k}^2\beta_z^2/4 + \Delta s_{1,2} \Omega \bar{k})^{1/2}$ при $\beta_z = 0$. Здесь β_z — углы двулучеплобления; $(\bar{k})^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$; $\Delta s_{1,2} = (v_1^{-1} - v_2^{-1})$ — разность обратных величин групповых скоростей усиливаемых волн.

** Решение задачи о взаимодействии волн с импульсами излучения накачки получается из решений приведенных ниже уравнений простой заменой переменных (см., например, [1]). Уравнениями такого же вида может быть описано взаимодействие волн со сгустками излучения накачки (импульсами, сжатými в узкие пучки), если разности между скоростями усиливаемых волн и групповой скоростью накачки направлены под углом π друг к другу.

$$E_3 = \{e_3 \mathcal{E}_3(x_1 - \beta_3 z; y_1) \exp[-i(\omega_3 t - k_3 z)] + \text{к. с.}\},$$

который имеет ширину $2a(y_1)$ в плоскости $x_1 z$ ($\mathcal{E}_3(x_1; y_1) \neq 0$ при $|x_1| < a(y)$; $\mathcal{E}_3(x_1; y) = 0$ при $|x_1| > a(y_1)$). Пучок излучения накачки будем считать настолько широким, а амплитуды $\mathcal{E}'_{1,2}(r_{1\perp}; z)$ настолько плавными функциями поперечных координат, что дифракционным расплыванием можно пренебречь. В этом приближении поля волн вне области взаимодействия определяются по законам геометрической оптики значениями их амплитуд на входной границе кристалла ($z = 0$) и на границах пучка накачки, с которых они приходят в данную точку. В области взаимодействия уравнения содержат производные только по координатам x_1 и z , т. е. задача сводится к двумерной, в которой, однако, все исходные функции зависят от координаты y_1 как от параметра.

Для дальнейшего удобно выбрать координаты так, чтобы амплитуда накачки зависела только от переменной x ($x = x_1 - \beta_3 z; y = y_1$). Тогда уравнения для изображений $\mathcal{E}_{1,2}(x; p)$ нормированных амплитуд $\mathcal{E}_1 = \sqrt{\omega_1/\omega_3} \mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}_2 = \sqrt{\omega_2/\omega_3} (\mathcal{E}'_2)^*$ примут вид*

$$\pm \Delta\beta_{1,2} \frac{d}{dx} \mathcal{E}_{1,2}(x; p) + (p + \alpha_{1,2}) \mathcal{E}_{1,2}(x; p) \mp i \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0(x) \\ \gamma_0^*(x) \end{array} \right\} \mathcal{E}_{2,1}(x; p) = \\ = \mathcal{E}_{1,2}(x) + f_{1,2}(x; p). \quad (1)$$

Решения уравнения (1) удобно представить в виде суммы изображений полей $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}(x; z)$, возбужденных через боковые стороны пучка накачки, на которые волны приходят непосредственно с входной плоскости кристалла (решение однородных уравнений (1) с неоднородными граничными условиями $\mathcal{E}_2^{(1)}(a; p) = \bar{\mathcal{E}}_2(p)$, $\mathcal{E}_1^{(1)}(-a; p) = \bar{\mathcal{E}}_1(p)$), и изображений полей $\mathcal{E}_{1,2}^{(0)}(x; z)$, возбужденных на входе в кристалл сторонними источниками непосредственно в пучке накачки (решение неоднородных уравнений (1) с однородными граничными условиями $\mathcal{E}_1^{(0)}(-a; p) = 0$; $\mathcal{E}_2^{(0)}(a; p) = 0$). При этом разложение полей $\mathcal{E}_{1,2}^{(0)}(x; z)$ по собственным функциям (модам) получается естественным образом, если решение уравнений (1) записать через функцию Грина $\Gamma_{ik}(\xi; x; p)$ этих уравнений с граничными условиями

$$\mathcal{E}_1(-a; p) = 0; \mathcal{E}_2(+a; p) = 0. \quad (2)$$

Функцию Грина $\Gamma_{ik}(\xi; x; p)$ и амплитуды $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}(x; p)$ легко найти [2], если известна фундаментальная система решений уравнений (1) $u_{ik}(x)$. В дальнейшем нам понадобятся функции $u_{ik}(x)$ для пучка с однородным распределением интенсивности и плоским фазовым фронтом, имеющие вид

$$\mathcal{E}_1^{(+)}(x; p) = u_{11}(x) = -\frac{\Delta\beta_2}{\Delta\beta_1} h_{(-)} \exp(-ix_{(+)}x),$$

$$\mathcal{E}_2^{(+)}(x; p) = u_{12}(x) = \exp(-ix_{(+)}x),$$

* Здесь $\Delta\beta_{1,2}$ — абсолютные величины углов между групповой скоростью излучения накачки и групповыми скоростями усиливаемых волн, $\alpha_{1,2}$ — коэффициенты затухания волн, $\gamma_0(x)$ — коэффициент их взаимодействия, пропорциональный амплитуде накачки; $\mathcal{E}_{1,2}(x)$ — значения амплитуд на входе в кристалл; $f(x, p)$ — изображение сторонних источников полей. Уравнения (1) справедливы и при экспоненциальном росте амплитуд во времени $\mathcal{E}_{1,2}(r_{\perp}, z, t) = \mathcal{E}_{1,2}(r_{\perp}, z) \exp(\bar{p}t)$. При этом нужно только сделать замену $p \rightarrow (p + s_p \bar{p})$; $\alpha_{1,2} \rightarrow (\alpha_{1,2} - \Delta s_{1,2}; 3 \bar{p})$, где $\Delta s_{1,2}; 3 = v_{1,2}^{-1} - v_3^{-1}$; $s_i = v_i^{-1}$, v_i — величины групповых скоростей волн.

$$\mathcal{E}_1^{(-)}(x; p) = u_{21}(x) = \exp(-ix_{(-)}x), \quad (3)$$

$$\mathcal{E}_2^{(-)}(x; p) = u_{22}(x) = h_{(-)} \exp(-ix_{(-)}x).$$

Здесь и ниже используются обозначения:

$$x_{(\pm)}(p) = ix(p) \pm \Lambda(p), \quad h_{(\pm)}(p) = -\frac{\Delta\beta_1}{\gamma_0} [i\Delta(p) \pm \Lambda(p)],$$

$$\Lambda(p) = \sqrt{\tilde{\gamma}_0^2 - \Delta^2(p)},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(p) \\ \Delta(p) \end{array} \right\} = \frac{\Delta\beta_1(p + \alpha_2) \mp \Delta\beta_2(p + \alpha_1)}{2\Delta\beta_1\Delta\beta_2} = \frac{\Delta\beta_1 \mp \Delta\beta_2}{2\Delta\beta_1\Delta\beta_2} \left(p + \left\{ \frac{\alpha}{\alpha} \right\} \right), \quad (4)$$

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 / \sqrt{\Delta\beta_1\Delta\beta_2}.$$

Определив амплитуды $\mathcal{E}_{1,2}^{(1)}(x; p)$ и $\mathcal{E}_{1,2}^{(0)}(x; p)$, для оригиналов получим выражения

$$\mathcal{E}_i^{(1)}(x; z) = \int_0^z dz_1 [\overline{\mathcal{E}}_1(z_1) G_{1i}(x; \Delta z) + \overline{\mathcal{E}}_2(z_1) G_{2i}(x; \Delta z)], \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_i^{(0)}(x; z) = \int_0^z dz_1 \int_{-a}^{+a} d\xi f_k(\xi; z_1) \Gamma_{ki}(\xi; x; \Delta z) + \int_{-a}^{+a} d\xi \mathcal{E}_k(\xi) \Gamma_{ki}(\xi; x; z),$$

где

$$\Delta z = z - z_1; \quad G_{ki}(x; \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} dp e^{p\Delta z} \frac{U_{ki}(a; x)}{U_1(a; -a)}; \quad (6)$$

$$\Gamma_{ki}(\xi; x; \Delta z) = \frac{(-1)^{k-1} \Delta\beta_k^{-1}}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} dp e^{p\Delta z} \left[\frac{V_k(\xi; -a) U_i(\xi; a)}{U_1(a; -a)} - \eta(\xi - x) V_k(\xi; x) \right];$$

функции U_{ki} , U_i , V_i зависят от p и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} U_{11}(a; x) &= U_1(a; x) = u_{21}(x) u_{12}(a) - u_{11}(x) u_{22}(a), \\ U_{12}(a; x) &= U_2(a; x) = u_{12}(a) u_{22}(x) - u_{22}(a) u_{12}(x), \\ U_{21}(-a; x) &= u_{21}(-a) u_{11}(x) - u_{11}(-a) u_{21}(x), \\ U_{22}(-a; x) &= u_{21}(-a) u_{12}(x) - u_{11}(-a) u_{22}(x), \\ V_1(\xi; x) &= v_{11}(\xi) u_{11}(x) + v_{21}(\xi) u_{21}(x), \\ V_2(\xi; x) &= v_{12}(\xi) u_{11}(x) + v_{22}(\xi) u_{21}(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $v_{ik}(\xi) = A_{ik}(\xi) / \det \| u_{ik}(\xi) \|$ — фундаментальная система решений уравнений, сопряженных уравнениям (1), $A_{ik}(\xi)$ — алгебраическое дополнение элемента $u_{ik}(\xi)$ матрицы $\| u_{ik} \|$.

Из системы (1) видно, что поведение функций u_{ik} при $p \rightarrow \infty$ не зависит от распределения поля накачки, т. е. совпадает с поведением

функций u_{ik} , определенных соотношениями (3), (4). Учитывая это, из (6), (7) можно найти, что изображения функций $G_{ik}(x; \Delta z)$, $\Gamma_{ik}(\xi; x; \Delta z)$ экспоненциально стремятся к нулю при $\text{Re } p \rightarrow \pm \infty$. Как легко показать, из (3), (4), (6), (7) для однородного пучка накачки с плоским фазовым фронтом изображения функций G_{ik} , Γ_{ik} при конечном p не имеют особенностей, кроме полюсов, что, по-видимому, выполняется и в общем случае*. Поэтому функции G_{ik} , Γ_{ik} можно записать в виде суммы вычетов относительно полюсов их изображений. Эти полюса совпадают с нулями $U_1(a; -a)$, т. е. определяются уравнениями для собственных значений p_n краевой задачи с краевыми условиями (2). Таким образом, из (5)—(7) следует, что $\mathcal{E}_{1,2}(x; z)$ представляются в виде ряда по собственным функциям $U_i^{(n)}(x)$ ($i = 1, 2$) этой задачи:

$$\mathcal{E}_i(x; z) = \sum_n A_n(z) U_i^{(n)}(x). \quad (8)$$

При этом амплитуды мод

$$\begin{aligned} A_n(z) = & N_n^{-1} \int_0^z dz_1 \exp(p_n \Delta z) [V_1^{(n)}(-a) \bar{\mathcal{E}}_1(z_1) - V_2^{(n)}(a) \bar{\mathcal{E}}_2(z_1)] + \\ & + N_n^{-1} \left[\int_0^z dz_1 \exp(p_n \Delta z) \int_{-a}^{+a} d\xi \frac{V_i^{(n)}(\xi) f_i(\xi; z_1)}{\Delta \beta_i (-1)^{i-1}} + \right. \\ & \left. + \exp(p_n z) \int_{-a}^{+a} d\xi \frac{V_i^{(n)}(\xi) \mathcal{E}_i(\xi)}{\Delta \beta_i (-1)^{i-1}} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь $V_i^{(n)}(x)$ — собственные функции сопряженной задачи, а нормирующий множитель N_n^{-1} определяется выражением**

$$N_n = V_1^{(n)}(-a) \frac{d}{dp} U_1(a; -a) \Big|_{p_n} = \int_{-a}^{+a} d\xi \frac{V_i^{(n)}(\xi) U_i^{(n)}(\xi)}{\Delta \beta_i} (-1)^{i-1}. \quad (10)$$

Соотношения (8)—(10) решают, таким образом, поставленную задачу.

В заключение приведем представляющие интерес при решении конкретных задач выражения для нормирующих множителей, p_n и функций $U_i^{(n)}$, $V_i^{(n)}$ в случае однородного пучка накачки. Из (3), (7) следует, что при этом собственные значения p_n определяются из уравнения (см. также [1])

$$\cos 2\Lambda a = - \frac{\Delta}{\Lambda} \sin 2\Lambda a. \quad (11)$$

Собственные функции $U_i^{(n)}$, $V_i^{(n)}$ можно записать в виде

* На это указывает то обстоятельство, что при произвольном, но плавном изменении амплитуды и фазы накачки свойства функций u_{ik} (а следовательно, и G_{ik} , Γ_{ik}) когда они легко находятся методом ВКБ, не отличаются от свойств, вытекающих из (3), (4).

** Поскольку граничные условия сопряженной краевой задачи [2] $V_1(a) = 0$, $V_2(-a) = 0$, то нетрудно показать, что $V_1^{(n)}(x) = U_1^{(n)}(-x)$; $V_2^{(n)}(x) = (\Delta \beta_2 / \Delta \beta_1) U_2^{(n)}(-x)$. Последнее равенство в соотношении (10) получено из условия биортогональности $V_i^{(n)}$ и $U_i^{(n)}$ [2].

$$\left| \frac{U_1^{(n)}(x)}{U_2^{(n)}(x)} \right| = \left| \frac{V_1^{(n)}(-x)}{\frac{\Delta\beta_1}{\Delta\beta_2} V_2^{(n)}(-x)} \right| = \left| -i \sqrt{\frac{1}{\frac{\Delta\beta_1}{\Delta\beta_2} b_n}} \right| \times \exp [x(p_n)x] \sin \Lambda(p_n)(a \pm x). \quad (12)$$

При этом

$$N_n^{-1} = \frac{\gamma_0 \sqrt{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2}}{\Delta\beta (1 + 2a\Delta(p_n))} b_n. \quad (13)$$

Здесь $\Delta\beta = (\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2)/2$, $b_n = \frac{\Lambda_n \tilde{\gamma}_0^{-1}}{\sin 2\Lambda_n a} = (-1)^n$ (последнее равенство

верно при используемой ниже нумерации корней).

Наибольший интерес представляют выражения для амплитуд, соответствующих действительным корням p_n ($n = 0; \pm 1; \dots; \pm N$), поскольку только среди них при $2a\tilde{\gamma}_0 > \eta_N^0 = \pi(1/2 + |N|)$ появляются p_n ($n \geq 0$), соответствующие нарастающим решениям (рис. 1). Анали-

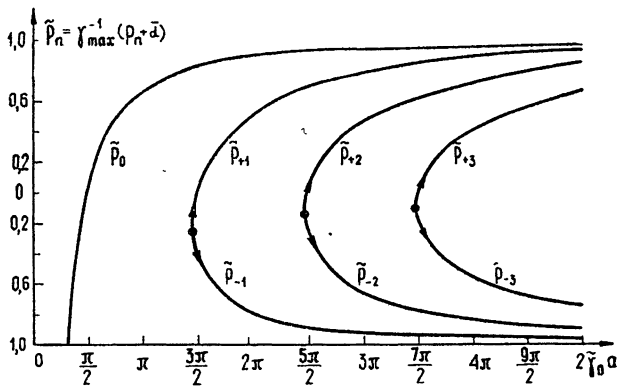


Рис. 1 Зависимость инкремента мод от приведенного диаметра пучка накачки, полученная численным решением уравнения (11) для $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$.

тическое выражение для p_n удобно записать, введя либо критический размер пучка накачки $a_n = (1/2)\eta_n \tilde{\gamma}_0^{-1}$, где $\eta_n = 2\Lambda(p_n)a$ (рис. 2), либо (для аксиально-симметричных пучков) критическую мощность накачки $P_n = \eta_n^2 \tilde{\gamma}_0^{-2} \Delta\beta_1 \Delta\beta_2$ [1]:

$$\tilde{p}_n = p_n + \bar{\alpha} = \text{sgn} [\eta_n - \eta_n^0] \left[\frac{\gamma_{\max} \sqrt{1 - a_n^2/a^2}}{\frac{\Delta\beta}{a} \frac{2\Delta\beta_1 \Delta\beta_2}{(\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2)^2} \eta_n \sqrt{\frac{P}{P_n} \left(1 - \frac{P}{P_n}\right)}} \right]. \quad (14)$$

Здесь $\gamma_{\max} = \gamma_0 \sqrt{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2 / \Delta\beta}$. Нормирующий множитель N_n^{-1} представим в виде

$$N_n^{-1} = \frac{(-1)^n a^{-1} \Delta\beta_1 \Delta\beta_2 \Delta\beta^{-1}}{(\tilde{\gamma}_0 a)^{-1} + 2(1 - a_n^2/a^2)^{1/2} \text{sgn } p_n} \quad (15)$$

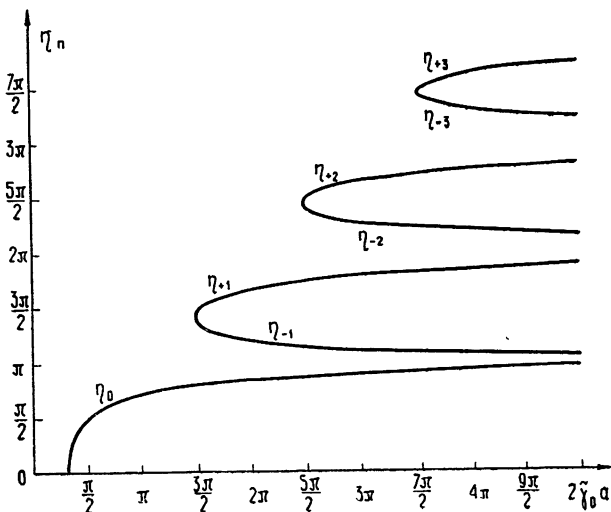


Рис. 2. Зависимость η_n для $n=0; \pm 1; \pm 2, \pm 3$ от приведенного диаметра пучка накачки $2\gamma_0 a$.

При возбуждении волн через боковую поверхность пучка накачки интересна величина $N_n^{-1} V_1^{(n)}(-a)$. Ее можно также выразить через отношение a_n/a :

$$N_n^{-1} V_1^{(n)}(-a) = \frac{\eta_n a^{-1} \exp[\chi(p_n) a]}{2 [1 + \eta_n(a/a_n)(1 - a_n^2/a^2)^{1/2} \operatorname{sgn} p_n]} \frac{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2}{\Delta\beta}. \quad (16)$$

Не останавливаясь на подробном анализе полученных выражений, отметим лишь, что для нарастающих мод интенсивность возбуждения объемными источниками и полями на входе в кристалл, определяемая величиной N_n^{-1} , слабо зависит от превышения над порогом усиления моды (т. е. от отношения a_n/a). В то же время зависимость от a_n/a интенсивности возбуждения моды через боковую поверхность существенна. Это, очевидно, связано с заметной зависимостью функций $V_{1,2}(x)$ на границах пучка от превышения над порогом усиления ($V_1(-a) \sim (a_n/a) \exp(+\chi a)$; $V_2(a) \sim (a_n/a) \exp(-\chi a)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Сушик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 293 (1969).
2. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1965.
3. Л. Дольф, Математика, ИЛ, 7:1, 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 марта 1969 г.

EXCITATION OF PARAMETRICALLY AMPLIFIED WAVES AT THEIR SPATIAL TRAPPING BY PUMPING WAVE PACKETS

M. M. Sushchik, V. M. Fortus, G. I. Freidman

The fields in the region of wave interaction are found when the conditions of spatial trapping of parametrically amplified waves by radiation of pumping are fulfilled. The Laplace transformation is used for this purpose that enable us to prove the validity of the field expansion in the geometrical optics approximation, over eigen-functions of the problem in the same approximation and to find the mode amplitudes.