

УДК 538.56

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	: : 164
2. Стационарные бегущие волны	166
1. Уравнения стационарных волн. Периодические волны	166
2. Волны в средах без диссипации	167
3. Диссипативная среда. Ударные волны	169
4. Активные среды	170
5. Волны, близкие к стационарным. Самовоздействие и взаимодействие	171
3. Модулированные волны	173
1. Волны, близкие к синусоидальным. Первое приближение	173
Усиление бегущих волн. Частотная автомодуляция в прозрачной среде.	
Среды с инерционной нелинейностью	176
2. Волны, близкие к синусоидальным. Второе приближение	176
Медленная модуляция. Быстрая модуляция. Неустойчивость монохроматической волны. Стационарные волны огибающих. Ударные волны огибающих.	
3. Несинусоидальные волны	180
4. Взаимодействие волн	182
1. Процессы в системах с квадратичной нелинейностью	182
Генерирование гармоник и субгармоник. Трехволновые взаимодействия. Трехволновые взаимодействия в активных системах. Многоволновые взаимодействия. Взаимодействия в средах с резонансными свойствами.	
2. Процессы в системах с кубической нелинейностью	188
Генерация третьей гармоники. Несинхронные многоволновые взаимодействия	
3. Взаимодействие модулированных волн	190
4. Взаимодействие несинусоидальных волн	192
5. Волновые процессы в ограниченных системах	193
1. Автоколебания в резонаторах	194
Резонатор с отражением на границах. Кольцевые системы. Кусочно-однородные системы	
2. Вынужденные колебания	197
Внешнее воздействие на автогенератор. Нелинейный резонанс в распределенной системе. Удвоение частоты в резонаторе	
3. Параметрическая генерация и усиление	200
4. Многочастотные процессы в резонаторе	201
6. Приложение	202
1. Асимптотический метод для распределенных систем	202
2. Вариационный принцип в усредненной форме	206

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории нелинейных волновых процессов в течение долгого времени было связано почти исключительно с проблемами, поставляемыми механикой сплошных сред [1-6]. Методы теоретического исследования, разработанные применительно в вопросам газо- и гидродинамики, наряду с должной эффективностью обладали и известной общностью, удовлетворяющей (хотя, конечно, и не в полной мере) потребности этого специфического круга проблем. Однако за последнее десятилетие благодаря быстрому прогрессу новых направлений в физике плазмы, радиофизике и оптике положение в теории нелинейных волн существенно изменилось. Расширение круга изучаемых явлений привело к возникновению потребности в универсальном математическом описании нелинейных волновых процессов в распределенных динамических системах различной физической природы. Заметим, что чрезвычайно похожая ситуация существовала и в теории нелинейных колебаний систем с сосредоточенными параметрами, где были разработаны весьма общие качественные и асимптотические методы, приложимые к большому кругу задач [7-10].

Для методов теории колебаний характерна классификация рассматриваемых эффектов по таким общим свойствам соответствующих уравнений, которые не зависят от конкретной физической природы процесса. Используемая при этом терминология также связана с единым математическим описанием тех или иных процессов (это, по существу, относится и к таким фундаментальным понятиям, как волны, нелинейность, дисперсия и т. д.). В данном обзоре используется именно такой подход при рассмотрении волновых процессов* в распределенных нелинейных системах.

Математический аппарат для соответствующих задач составляют нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными либо, в более общем случае, нелинейные интегродифференциальные уравнения. Сравнительно недавно были развиты некоторые приближенные методы исследования таких уравнений, основанные, главным образом, на сочетании методов волновой теории (геометрическая оптика, квазиоптика) с методами усреднения, известными в теории колебаний. Однако найти решение трехмерных нестационарных задач, в которых искомые величины зависят от всех пространственных координат и времени, удастся в немногих, хотя и важных, частных случаях. Скольнибудь полностью анализу поддаются только одномерные задачи, в которых все величины считаются зависящими от времени t и одной пространственной координаты x . Следует, впрочем, отметить, что такие задачи в значительной мере отражают специфику волновых процессов вообще. Кроме того, соответствующие решения пригодны не только для «истинно одномерных» систем (например, для передачи, описываемых телеграфными уравнениями), но и позволяют описать многие важные особенности двумерных** и трехмерных волн (если, например, задана структура волны по двум поперечным координатам y и z). Поэтому

* Понятие волны или волнового процесса имеет по крайней мере столь же широкий характер, как и понятие колебания, и вряд ли поддается четкому определению. Несколько более конкретно определение бегущей волны как процесса, связанного с переносом некоторых величин вдоль определенной пространственно-временной траектории.

** Отметим еще, что в некоторых случаях существует математическая аналогия между уравнениями одномерных нестационарных волн, с одной стороны, и уравнениями стационарных процессов, в которых искомые величины зависят от двух пространственных переменных, с другой. Такая пространственно-временная аналогия используется, в частности, для усредненных уравнений, описывающих изменение огибающих квазигармонических волн [19, 21, 112, 113].

в настоящем обзоре мы ограничиваемся рассмотрением одномерных волн.

Рассмотрим некоторые общие характеристики одномерных волн в нелинейной среде. Будем для определенности считать, что совокупность величин, характеризующих процесс (поле), описывается системой квазилинейных уравнений вида

$$a_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{a_k} b_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x} + c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где a, b, c зависят от всех u_k , а также от x и t . Если явная зависимость от x и t в (1.1) отсутствует (автономная, пространственно-однородная система) и все c_k равны нулю, то система (1.1) инвариантна относительно замены вида $x' = \alpha x$, $t' = \alpha t$ ($\alpha = \text{const}$), т. е. в ней нет каких-либо независимых временных или пространственных масштабов, кроме задаваемых граничными и начальными условиями, что характерно для недиспергирующей среды. В безграничных недиспергирующих средах нелинейность приводит к накапливающейся деформации профиля бегущей волны, а стационарные процессы невозможны, за исключением постоянного поля и разрывов между постоянными значениями u_k , движущихся с определенной скоростью.

В общем случае, когда $c_k \neq 0$, в (1.1) можно выделить характерные временные (t_0) и пространственные (x_0) масштабы, и особенности решения зависят от соотношения между x_0, t_0 , с одной стороны, и масштабами, характеризующими скорость изменения поля, с другой*. Такая зависимость означает наличие временной и пространственной дисперсии среды. Следует отметить, что x_0 и t_0 (таких масштабов, вообще говоря, может быть несколько) могут характеризовать процессы различного рода—либо поглощение и выделение энергии (положительная и отрицательная диссипация), либо—некоторые колебательные процессы в среде (реактивная дисперсия).

Естественно, что поведение волн определяется, помимо дисперсии, также видом нелинейности в исходных уравнениях. В простейших случаях возможно разделить параметры, ответственные за дисперсию и нелинейность, причем те и другие могут быть связаны либо с диссипативными, либо с реактивными эффектами (в указанном выше смысле). Для многих сред, однако, такое разделение провести нельзя (например, в случае резонансной нелинейности [1]).

Получить точные аналитические решения исходных уравнений, описывающих даже одномерные нестационарные процессы, удается только в некоторых простейших случаях. Сюда относятся, например, простые (римановы) волны [1, 2], а также автомодельные решения, полученные разделением переменных после соответствующего преобразования подобия [2, 14, 15]. Каких-либо общих качественных методов, сравнимых с методом фазового пространства в обычной теории колебаний, для распределенных систем не существует.

Сравнительно общий подход к анализу нелинейных распределенных систем связан с рассмотрением периодических или квазипериодических волновых процессов. Методы исследования таких процессов в известной степени аналогичны методам малого параметра в теории сосредоточенных систем [7, 9]. При этом за основу берутся периодические стационарные (т. е. распространяющиеся без деформации) бегущие волны. Особая роль стационарных решений в теории нелинейных волн связана, во-первых, с тем, что они удовлетворяют уравнениям в обыкновенных

* Аналогичная ситуация возникает для неавтономных и пространственно-неоднородных систем, когда коэффициенты (1.1) явно зависят от x и t .

производных и допускают поэтому относительно простое и полное исследование, и, во-вторых, с тем, что в ряде случаев волны, близкие к стационарным, возникают в результате нестационарных процессов, отвечающих более или менее широкому классу начальных и граничных условий. Существенно, что в чрезвычайно большом числе физических приложений волновые процессы могут быть описаны решениями, локально близкими либо к стационарной волне (самовоздействие), либо к суперпозиции нескольких стационарных волн (взаимодействие). В обоих случаях параметры таких квазистационарных волн могут существенно изменяться в пространстве и времени, но лишь на интервалах, много больших соответствующих периодов исходных осциллирующих решений*.

Следует отметить, что количество работ, посвященных исследованию нелинейных волн, в настоящее время уже очень велико. По ряду физических проблем, в которых рассматриваются квазистационарные (в особенности квазигармонические) решения, появились уже самостоятельные обзоры и монографии. Это относится к проблемам нелинейной оптики [17–22], физики плазмы [12, 23, 31], радиофизики [16, 150] и ряду других [15, 24, 25]. Задачей данного обзора, как уже отмечалось, является лишь попытка общего (с точки зрения методики) рассмотрения и классификации наиболее характерных эффектов, возникающих при распространении волн в нелинейных диспергирующих средах.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

1. Уравнения стационарных волн. Периодические волны

Стационарные (сохраняющие форму при распространении) бегущие волны описываются частными решениями исходных уравнений (1.1), зависящими от одной переменной $\eta = t - x/V$, где V — некоторая постоянная скорость. Если система (1.1) автономна (коэффициенты ее не зависят явно от x и t), то, полагая все u_k функциями η , получим

$$\left(a_k - \frac{b_{kk}}{V}\right) \frac{du_k}{d\eta} - \frac{1}{V} \sum_{l \neq k} b_{kl} \frac{du_l}{d\eta} + c_k = 0 \quad (2.1)$$

(здесь a, b и c зависят от всех u_k).

Следовательно, задача отыскания стационарных волн сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и для анализа таких волн могут быть использованы методы теории колебаний систем с сосредоточенными параметрами, с тем, однако, существенным отличием, что в (2.1) входит дополнительный произвольный параметр V .

Общее решение системы (2.1) имеет вид

$$u_k = u_k(\eta, V, u_s^0), \quad (2.2)$$

где u_s^0 — константы, число которых равно порядку системы (2.1). При заданном V каждое решение дается траекторией в n -мерном фазовом пространстве; некоторое представление о ходе траекторий можно получить в результате анализа поведения решений в окрестностях положений равновесия, определяемых уравнениями $c_k = 0$.

Наиболее существенны для дальнейшего периодические стационарные волны, описываемые решениями вида $f(\omega\eta) = f(\omega t - kx)$, где

* Для слабодиспергирующих сред сходную роль могут играть простые волны — на их основе строятся, в частности, решения, описывающие процесс образования и распространения слабых ударных волн (см., например, [1, 16]).

f —ограниченная периодическая функция, $\omega = 2\pi/\Theta$, $k = \omega/V = 2\pi/\lambda$, а Θ и λ —временной и пространственный периоды. Оставляя в стороне вопрос о существовании таких решений*, отметим, что у консервативной системы периодические траектории заполняют, вообще говоря, некоторое подпространство в фазовом пространстве. Задача о нахождении определенной траектории в этом подпространстве может быть поставлена как краевая: решение ищется, например, по заданному временному периоду Θ (т. е. частоте ω) и n значениям $u_k(0) = u_k(\Theta)$ на концах интервала Θ ; вместо u_k могут быть заданы n других констант, характеризующих искомое решение—например, амплитуды A_k , определяемые как полусуммы максимального и минимального отклонений от среднего значения u_k в интервале $0 \leq \eta \leq \Theta$. Волновое число k (или скорость $V = \omega/k$) будет собственным значением такой краевой задачи. Отсюда следует, что для каждой периодической стационарной волны определена связь между k и ω —дисперсионное соотношение

$$k = k(\omega, A_s). \quad (2.3)$$

Заметим, что заданному набору A_s и ω могут соответствовать несколько собственных значений k ; в частном случае линейной прозрачной среды дисперсионное соотношение $k = k(\omega, 0)$ имеет $m \leq n$ независимых ветвей, описывающих синусоидальные (незатухающие) нормальные волны.

В фазовом пространстве стационарных решений неконсервативной системы либо вообще нет периодических траекторий (в частности, это относится ко всем диссипативным системам), либо возможны (для активных систем)** отдельные периодические траектории—предельные циклы, отвечающие автоколебательным процессам. Эти траектории определяются (не всегда однозначно) одним произвольным параметром V или ω . Если система близка к консервативной (в обычном для теории колебаний смысле), то предельный цикл локально близок к одной из траекторий консервативной системы, а малая активная нелинейность «выбирает» соответствующую траекторию (для нее, в частности, все A_s в (2.3) определены как функции ω).

Для более детального рассмотрения целесообразно ограничиться случаями, когда (2.1) сводится к уравнению второго порядка

$$P(u, V) \frac{d^2 u}{d\eta^2} + Q(u, V) \frac{du}{d\eta} + R(u, V) = 0 \quad (2.4)$$

и наглядное описание процесса можно провести на фазовой плоскости**. На этом примере удобно проследить влияние параметров нелинейности, дисперсии и диссипации на особенности волновых процессов в нелинейной среде.

2. Волны в средах без диссипации

Если $Q \equiv 0$, то (2.4) описывает колебания консервативной системы, отвечающие стационарным волнам без диссипации. Как известно, в этом случае на фазовой плоскости уравнения (2.4) возможны лишь

* Укажем лишь, что их существование не требует, вообще говоря, гиперболичности исходной системы (1.1).

** Под активными подразумеваются системы, в которых диссипация энергии может быть как положительной, так и отрицательной.

*** Мы не рассматриваем специального случая, когда второй член в (2.4) пропорционален $\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2$.

два типа особых точек—центры и седла, и все ограниченные решения, кроме отвечающих сепаратрисам седел, периодичны*.

В качестве примера рассмотрим случай слабой нелинейности, когда функцию R/P можно представить полиномом по u : $(R/P) = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3$. На рис. 1 показаны некоторые типы решений на фазовой плоскости для сред с квадратичной ($\alpha_3 = 0, \alpha_2 \neq 0$) и кубической ($\alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0$) нелинейностью, а на рис. 2—временной ход этих решений. В каждой области, ограниченной сепаратрисами, данное периодическое решение может быть задано, например, амплитудой $A = (u_{\max} - u_{\min})/2$, и дисперсионное уравнение (2.3) имеет вид $k = k(\omega, A)$ [15, 71]. Если нулевая точка является центром (рис. 1а, б), то это означает, что среда прозрачна по отношению к малым синусоидальным возмущениям, распространяющимся со скоростью V . Форма волн большей амплитуды отлична от синусоидальной. Это отличие может быть охарактеризовано, например, отношением безразмерных парамет-

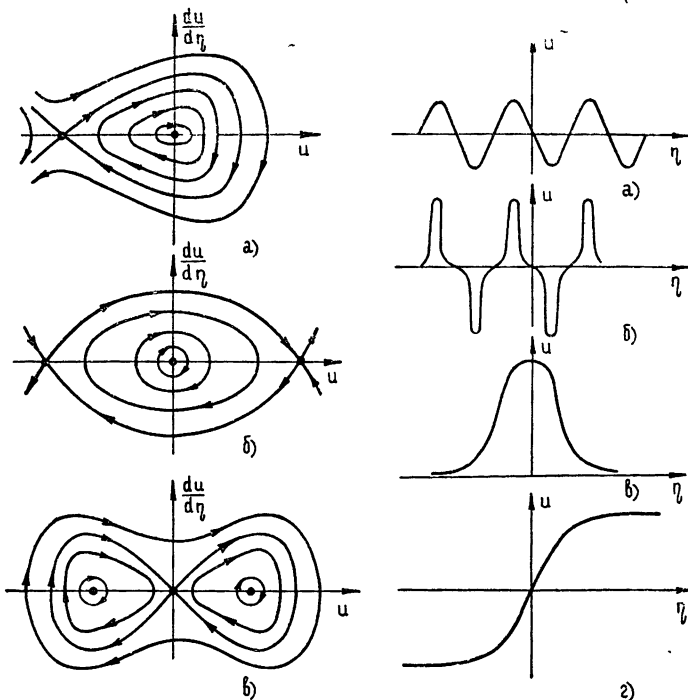


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 1. Фазовые портреты, соответствующие уравнениям стационарных волн: а) $\alpha_3 = 0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, б) $\alpha_2 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 < 0$, в) $\alpha_2 = 0, \alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0$.

Рис. 2. Некоторые типы стационарных бегущих волн.

ров дисперсии $\kappa = \omega \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} / \frac{\partial k}{\partial \omega}$ и нелинейности $q = \frac{A}{k} \frac{\partial k}{\partial A}$. Если $\gamma = |q/\kappa| \ll 1$

(траектории вблизи центра на фазовой плоскости), то волна близка к синусоидальной, с ростом же γ решение на фазовой плоскости приближается к сепаратрисам. Последним отвечают либо уединенный импульс (солитон) — если сепаратриса замкнута (рис. 2в), либо пере-

* Особым является случай $P \equiv 0$ (недиспергирующая среда), когда нетривиальные стационарные решения (2.4) имеют вид разрывов между двумя постоянными значениями u . При учете потерь эти разрывы переходят в стационарные ударные волны (см. ниже).

пад между двумя различными по знаку значениями—если сепаратриса соединяет два седла (рис. 2г). Такие решения могут рассматриваться как предел периодических при $\theta \rightarrow \infty$.

Следует отметить, что в рассмотренных простейших случаях квадратичной и кубической нелинейностей уравнение (2.4) может быть решено аналитически. Так, при квадратичной нелинейности решение выражается эллиптическими функциями Якоби («кноидальные волны») [3, 26]. Однако качественное исследование на фазовой плоскости имеет более общий смысл, так как его результаты во многих случаях справедливы и при сильной нелинейности, когда аналитическое решение невозможно.

Периодические и уединенные стационарные волны изучались впервые для движений на поверхности жидкости [3–6, 26–29], затем применительно к движениям плазмы [30, 31, 33], а также для электромагнитных волн в феррите [32] и ряда других процессов [34, 35]. Аналогичные решения получаются для огибающих модулированной волны в нелинейной среде (см. разд. 3). Основные типы стационарных решений во всех рассмотренных случаях соответствуют рис. 1 и 2. Это не исключает, конечно, важных особенностей, связанных с более сложным видом нелинейности. Например, в ряде задач функция P в (2.4) обращается в нуль при некотором $u = u_{кр}$; ясно, что ход траекторий в полуплоскостях $u < u_{кр}$ и $u > u_{кр}$ может быть качественно различным. Если, в частности, амплитуда солитона достигает $u_{кр}$, то на его вершине $\frac{du}{d\eta} \rightarrow \infty$ («острие») и солитон с $u_{max} > u_{кр}$ невозможен. Этот эффект известен для поверхностных волн на воде [27], а также для продольных волн в плазме [15, 31]; в обоих случаях при $u_{max} > u_{кр}$ возникает многопотоковое движение.

3. Диссипативная среда. Ударные волны

Присутствие диссипации делает процесс необратимым, и периодических решений нет. Типичная фазовая плоскость, соответствующая уравнению (2.4) для этого случая при квадратичной нелинейности среды, показана на рис. 3а. Единственное ограниченное (на всем беско-

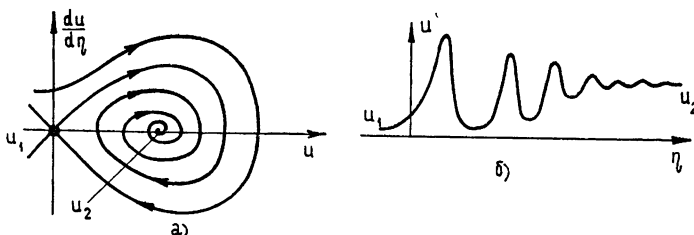


Рис. 3. Стационарная ударная волна в диспергирующей среде:
а) фазовая плоскость, б) временной ход решения.

нечном интервале по η) решение изображается сепаратрисой, соединяющей точки равновесия—седло и фокус. Это решение—ударная волна—представляет собой переход от одного постоянного значения (u_1) до другого (u_2), содержащий в общем случае осцилляции (рис. 3б). Если Q мало, то первые осцилляции близки по форме к уединенной волне (рис. 2в), а последующие (при $\eta \rightarrow \infty$) квазисинусоидальны. При достаточно большом Q фокус на рис. 3а превращается в узел, и осцилляции исчезают. Асимптотические значения u_1 и u_2 связаны соотношением $R(u, V) = 0$, включающим скорость волны V . Характерная длительность

ударного перехода определяется величиной параметров диссипации (вязкости) и дисперсии среды. В предельном случае, когда P и Q равны нулю, ударная волна превращается в движущийся скачок поля, а упомянутая связь между u_1 , u_2 и V дает граничное условие на этом скачке.

Теория ударных волн является большим и давно разрабатываемым разделом динамики сжимаемого газа [1, 2, 14, 37–39], где, однако, реактивная дисперсия обычно может не учитываться, и структура ударного фронта имеет монотонный характер. «Дисперсионные» особенности ударных волн (в частности, различные структуры осцилляторного типа) приобрели существенное значение гораздо позже в связи с исследованием нелинейных процессов в физике плазмы и электродинамике. Здесь имеется уже обширная, в том числе обзорная литература [16, 30, 31, 40–43]. Специфичными для плазмы являются «бесстолкновительные» ударные волны, структура которых соответствует рис. 3, но осцилляции затухают на расстояниях, меньших длины свободного пробега частиц, т.е. задолго до установления теплового равновесия в плазме [31]. Что касается электромагнитных ударных волн, то их описание, соответствующее принятому здесь подходу, дано в обзоре [16].

4. Активные среды

Для активных распределенных систем (в этом случае $Q(u)$ меняет знак) наибольший интерес представляют автоколебания в виде периодических стационарных волн, соответствующих предельным циклам на фазовой плоскости уравнения (2.4)* [44–46, 49, 50]. Форма цикла, как и в консервативной системе, зависит от соотношения параметров дисперсии и нелинейности и при сильной дисперсии и малой нелинейности близка к синусоидальной (рис. 4 а, б) [44, 45]. В противоположном случае резуль-

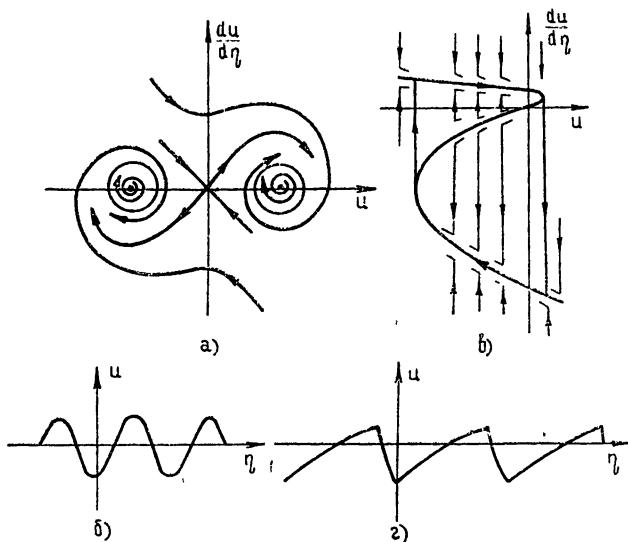


Рис. 4. Стационарные волны в активных средах: а, б)—при сильной дисперсии, в, г)—при слабой дисперсии. (б, г—форма периодических волн).

* В активных системах возможны также стационарные волны в виде перепадов между постоянными значениями поля [54, 55], в том числе (при наличии реактивной нелинейности) ударные волны [16, 45].

тат зависит еще от соотношения параметров реактивной и активной нелинейности. Если последняя мала, то, как уже отмечалось, предельный цикл остается близким к одной из траекторий консервативной системы. Если же реактивная нелинейность несущественна, то форма цикла зависит, кроме дисперсии, от «параметра неконсервативности» (который можно определить, например, через декремент малых отклонений от предельного цикла, предполагаемого устойчивым). В частности, при исчезновении дисперсии получаются разрывные периодические колебания, невозможные в чисто консервативной системе (рис. 4 в, г) [45, 46].

Рассмотренные волны могут существовать в неограниченной однородной среде, что, разумеется, является идеализацией для реальных систем. Периодические автоколебания в виде бегущих волн могут быть реализованы в ограниченных—кольцевых—системах, используемых в радиотехнике [46, 47] и квантовой электронике [51–53]. Следует подчеркнуть, однако, что стационарные бегущие волны с $V = \text{const}$, асимптотически переходящие в предельный цикл (рис. 4 а, в), обычно не отвечают реальным переходным процессам; в частности, устойчивость периодического цикла в рамках уравнения (2.4) не гарантирует его устойчивости по отношению к возмущениям, распространяющимся с произвольной скоростью.

5. Волны, близкие к стационарным. Самовоздействие и взаимодействие

Периодические стационарные волны—весьма специфический процесс, возможный лишь в строго консервативной или, как особый случай, в активной системе. Однако, как уже отмечалось, существуют гораздо более широкие классы волновых процессов, локально близких к стационарным волнам, параметры которых изменяются достаточно медленно. Это изменение, как и в сосредоточенных системах, может быть связано с некоторыми факторами, нарушающими энергетический баланс (например, с малой диссипацией в системе, близкой к консервативной). В распределенной системе квазистационарные процессы возникают также при неточном соответствии граничных (начальных) условий стационарному решению. Характерный пример—распространение квазисинусоидальных (модулированных) возмущений в среде с малой нелинейностью и сильной дисперсией ($\gamma \ll 1$), где синусоидальная волна любой частоты близка к стационарной. Нелинейность здесь проявляется в зависимости скорости распространения волны [15, 25, 75], а также закона ее затухания или нарастания [12] от амплитуды. При этом возможно, что изменение параметров среды в пространстве и времени, усиление в активной среде и т. д. приведет к тому, что возмущение, синусоидальное в начальный момент, испытывает существенное искажение формы, оставаясь локально близким к стационарному [9].

Волна, близкая к стационарной, может возникнуть также на некотором этапе существенно нестационарного процесса. Пусть, например, на границе полубесконечной среды задано синусоидальное возмущение с достаточно большим периодом Θ_0 , для которого можно пренебречь дисперсией и потерями, но существенна реактивная нелинейность. Такое возмущение распространяется как простая или квазипростая волна [1, 16] вплоть до точки $x = x^*$, в которой крутизна профиля простой волны обращается в бесконечность. Вблизи точки x^* поле меняется столь быстро, что необходимо учитывать параметры дисперсии и диссипации, и дальнейший процесс зависит от их соотношения. Если реактивной дисперсией по-прежнему можно пренебречь, то в точке x^* возникает и далее развивается «разрыв» — ударная волна. Дли-

тельность ударного фронта τ мала по сравнению с Θ_0 , а структура близка в каждый момент к структуре стационарной волны соответствующей амплитуды. На больших расстояниях волна приобретает пилообразную форму и затухает (рис. 5 а).

При малых потерях и значительной реактивной дисперсии ударный фронт содержит слабозатухающие осцилляции и его общая длительность растет. Если $\tau \gtrsim \Theta_0$, то говорить о стационарной ударной волне не имеет смысла, и на протяжении всего интервала Θ_0 волна заполняется осцилляциями [57], период и амплитуда которых зави-

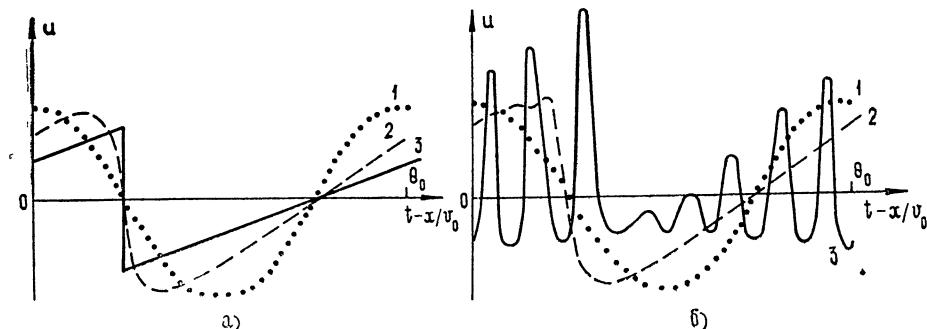


Рис. 5. Нелинейные искажения волны, синусоидальной при $x=0$: а) образование ударной волны в слабодиспергирующей среде [2]; б) образование солитонов в среде с реактивной дисперсией (по [57]): 1) $x=0$, 2) $x=x^*$, 3) $x>x^*$; v_0 —скорость волны в отсутствие нелинейности и дисперсии.

сят от амплитуды исходного возмущения (рис. 5 б). При достаточно малой амплитуде возникающие колебания близки к гармоническим. Сильная же волна распадается на ряд коротких импульсов, близких к стационарным солитонам в среде без потерь. Параметры солитонов могут быть найдены с помощью законов сохранения для интегральных характеристик (энергии, импульса и т.д.) волны [58]. Заметим, что при большом числе солитонов на периоде Θ_0 этот процесс становится квазистационарным в том смысле, что амплитуды соседних импульсов отличаются мало, а расстояние между ними изменяется медленно.

Из сказанного следует, что на основе стационарных решений могут быть рассмотрены волновые процессы весьма различного характера. При этом задача сводится к определению частоты, амплитуды, скорости и других параметров волны, существенно изменяющихся лишь за много периодов. По аналогии с колебаниями сосредоточенных систем волны (в том числе не близкие к синусоидальным) с медленно меняющимися характеристиками (огibaющими) обычно называют модулированными, а процесс изменения огibaющих таких волн в пространстве и времени—самовоздействием; такие процессы рассматриваются в разд. 3.

Другим классом волновых процессов, которые могут рассматриваться на основе стационарных решений, являются их взаимодействия: поле в среде близко к суперпозиции нескольких стационарных волн, и изменение параметров каждой из волн зависит как от них самих, так и от параметров всех остальных волн. Такое рассмотрение справедливо, прежде всего, для сред с малой нелинейностью (независимо от величины параметра γ); эти процессы обсуждаются в разд. 4.

Следует заметить, что между самовоздействием и взаимодействием не всегда можно провести четкое разделение. Так, процесс накапливающихся нелинейных искажений синусоидальной волны можно рассматривать либо как квазистационарную волну с переменным пара-

метром формы, либо как процесс взаимодействия между основной синусоидальной волной и ее высшими гармониками, нарастающими по амплитуде. Однако в большинстве случаев преимущества одного из подходов перед другим с точки зрения математической простоты и наглядности результата оказываются достаточно ясными. В особенности это относится к волнам, близким к синусоидальным, рассмотрение которых занимает пока наибольшее место в теории волн в диспергирующих средах.

3. МОДУЛИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ

1. Волны, близкие к синусоидальным. Первое приближение

Приведенные выше соображения относительно самовоздействия применимы к волнам произвольной формы, но большинство конкретных решений относится к средам с малой (порядка $\mu \ll 1$) нелинейностью и сильной дисперсией, когда стационарные волны близки к синусоидальным. Квазистационарные (модулированные) волны описываются в этом случае решениями вида

$$u_k = \Psi_k A e^{i(\omega t - kx + \varphi)} + \text{к. с.}, \quad (3.1)$$

где Ψ_k , ω , k — постоянные, A и φ — медленно меняющиеся действительные функции x и t . Уравнения для этих функций получаются с помощью метода малого параметра, обобщающего асимптотический метод обычной теории колебаний на распределенные системы (см. Приложение 1). Если в качестве искомого переменных взять амплитудный множитель A

и относительную девиацию частоты $\delta = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ($\gamma \ll 1$), то в результате получим (ср. (6.15))

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} = \mu g_1(A) + \mu^2 \left[\left(\kappa \delta \frac{\partial A}{\partial t} + \kappa \frac{A}{2} \frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + g_2 \left(A, \frac{\partial A}{\partial t}, \delta \right) \right]; \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + v \frac{\partial \delta}{\partial x} = \mu \frac{\partial q_1(A)}{\partial t} + \mu^2 \left[\kappa \delta \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\kappa}{2\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} q_2 \left(A, \frac{\partial A}{\partial t}, \delta \right) \right]. \quad (3.2b)$$

Здесь $v(\omega)$ — групповая скорость, $\kappa = \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}$ — дисперсионный параметр,

$g_{1,2}$, $q_{1,2}$ — некоторые нелинейные функции, из которых g_1 — нечетная, а q_1 — четная относительно A .

Специфика распределенных систем проявляется уже в том, что в системе «укороченных» уравнений (3.2) нельзя исключить высшие производные медленных величин, и порядок этой системы повышается при переходе к следующим приближениям по μ . Естественно поэтому, что существуют «быстрые» (в масштабе изменения огибающих) процессы, для которых определяющую роль играет учет второго приближения. Вместе с тем, хотя система (3.2) относится к параболическому типу, член с высшей производной имеет порядок μ^2 , и изменение огибающих во многих случаях носит волновой характер (волны огибающих)

Рассмотрим сначала эффекты, описываемые уравнениями первого приближения, когда членами с μ^2 в (3.2a) можно пренебречь. При этом уравнение (3.2a) для A отделяется и эффекты, связанные с изменением амплитуды и частоты, можно рассматривать отдельно.

Усиление бегущих волн. В первом приближении амплитудные изменения зависят только от параметра активной нелинейности g_1 . Простейшим здесь является случай кубической нелинейности, когда

можно положить $\mu g_1 = hA - sA^3$. При этом общий интеграл (3.2 а) имеет вид

$$m(x, t) = hm_0(\eta) \{ sm_0(\eta) + [h - sm_0(\eta)] e^{-2hx} \}^{-1}, \quad (3.3)$$

где $\eta = t - x/v$, $m = A^2$, $m_0(t) = m(0, t)$ — закон модуляции поля при $x = 0$. Наибольший интерес представляет случай активной среды ($h > 0, s > 0$). Если входной сигнал достаточно мал, то первоначально интенсивность поля экспоненциально растет, а затем стремится к постоянному значению $m_{ст} = h/s$, которое можно рассматривать как амплитуду предельного цикла (см. разд. 2). Благодаря этому процессу исходная модуляция сглаживается. Импульс произвольной формы превращается в прямоугольный с амплитудой $A_{ст}$ и длительностью, равной исходной длительности импульса (рис. 6)*. Периодически модулированная волна с $A \neq 0$, $\delta = 0$ переходит в монохроматическую, а волна, в которой A проходит через нуль, что эквивалентно скачку фазы на π («перемодуляция»), приобретает постоянную амплитуду во всех точках вне окрестности тех точек, где $A = 0$.

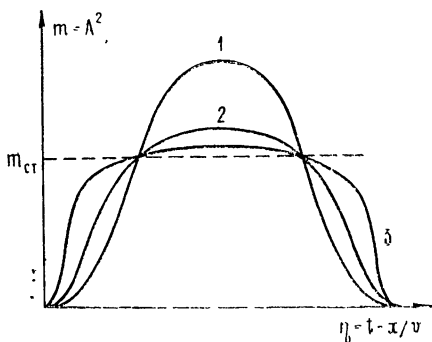


Рис. 6. Деформация амплитудной огибающей волнового пакета в активной среде (по (3.3)): 1) $x = 0$, 2) $x = x_1 > 0$, 3) $x = x_2 > x_1$.

Частным случаем (3.3) являются стационарные волны огибающих, в которых $A = A(t - x/v)$, где $v \neq v$; в них A монотонно растет от $A = 0$ при $t \rightarrow -\infty$ до $A = A_{ст}$ при $t \rightarrow \infty$. При $v = 0$ отсюда, конечно, получаются постоянные во времени решения, когда $m_0 = \text{const}$, $m = m(x)$.

Если среда имеет более сложную нелинейную характеристику (например, $g_1(A)$ — полином 5-й степени), то возможен жесткий режим усиления, когда слабые сигналы затухают, но волны с достаточно большим начальным значением A переходят к предельному циклу с $A = A_{ст}$.

Такие процессы характерны для нелинейного режима некоторых усилителей бегущей волны в радиотехнике [59] и квантовой электронике. Они рассматривались также применительно к электромагнитным волнам в плазме с нелинейным затуханием [12, 60], правда, здесь большей частью изучалось квазистатическое поведение огибающих, когда либо $m_0 = \text{const}$ (немодулированный входной сигнал), либо период модуляции T столь велик, что для всех рассматриваемых расстояний $x \ll vT$, и можно положить $m_0(\eta) = m_0(t)$.

Частотная автомодуляция в прозрачной среде. Если среда обладает реактивной нелинейностью ($q_1 \neq 0$), то амплитудная модуляция порождает частотную. Пусть диссипативные (активные) процессы отсутствуют. Тогда в (3.2 а) $g_1 = 0$, решение системы (3.2) в первом приближении имеет вид [61]

$$m = m_0(\eta), \quad \delta = \mu \frac{x}{v} \frac{\partial q_1(m)}{\partial t} + \delta_0(\eta), \quad (3.4)$$

* Полагаем, что нарастающими малыми флуктуациями поля вне импульса на данном x можно пренебречь

где $\delta_0(t) = \delta(0, t)$. В этом приближении волна амплитуды не искажается, а частотная девиация нарастает с расстоянием, причем временной ход частотной огибающей зависит от закона модуляции амплитуды. Подобные процессы исследовались в нелинейной оптике, где они приводят к многократному расширению спектра волны без заметного искажения ее амплитудной огибающей [62–65], а также для волн на поверхности воды [66].

Отметим, что, начиная с некоторого расстояния, δ вырастает настолько, что данное приближение нарушается, т. е. в этом случае для достаточно больших расстояний всегда необходимо учитывать правые части уравнений (3.2).

Среды с инерционной нелинейностью. Изменение феноменологических параметров таких сред зависит как от средней интенсивности поля, так и от скорости ее модуляции. При этом усредненные уравнения (3.2) сохраняют смысл, однако уже в первом приближении нужно учитывать, что g_1 и q_1 не являются функциями, а представляют собой некоторые операторы, содержащие собственный временной параметр—время релаксации нелинейности.

Характерный пример релаксации активных параметров, изучаемый в квантовой радиофизике [11], относится к резонансной среде, когда частота волны близка к частоте перехода между двумя энергетическими уровнями молекул среды. Для такой среды в простейшем рассмотрении можно считать, что $q_1 = 0$, а $\mu g_1 = A(BN - \nu)$, причем ν отвечает обычной диссипации в среде, а N —избыточная населенность верхнего уровня, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = -BNA^2, \quad (3.5)$$

где N_0 , B и T_1 —постоянные (T_1 —время релаксации населенности). Если характерный период модуляции (длительность импульса) велик по сравнению с T_1 , то инерционность незначительна и из (3.5) получим $N = N_0(1 + BT_1 m)^{-1}$, после чего (3.2 а) без труда интегрируется в первом приближении. Если m мало ($BT_1 m \ll 1$), то соответствующее решение совпадает с (3.3). При очень больших m нелинейность незначительна ($N \rightarrow 0$). В случае $N_0 < 0$ (неинвертированная населенность) в среде происходит поглощение энергии волны, но это поглощение падает с ростом ее интенсивности. Такие «просветляющиеся» нелинейные фильтры используются в генераторах оптического диапазона для получения гигантских импульсов [22, 137].

Другой крайний случай (обычный для генераторов на твердом теле — короткие импульсы ($T \ll T_1$)). При этом в (3.5) можно отбросить член с T_1^{-1} и интеграл (3.2 а) при $\nu = 0$ имеет вид [68]

$$m = m_0(\eta) \left\{ 1 - [1 - \exp(-BN_1 x/\nu)] \exp \left[-B \int_0^\eta m_0(\eta') d\eta' \right] \right\}^{-1}, \quad (3.6)$$

где N_1 —значение N перед импульсом. Из (3.6) видно, что слабый и короткий импульс усиливается экспоненциально, но для импульса с большой энергией это относится только к области его фронта (вблизи $\eta = 0$). Те части импульса, для которых $B \int_0^\eta m_0 d\eta \gg 1$, распространяются без искажений и усиления. В результате максимум поля в импульсе перемещается в его переднюю часть, и эффективная (фазовая) скорость максимума превышает скорость распространения энергии [22]. Если $\nu \neq 0$, то одни участки импульса усиливаются, другие же затухают,

и существует, в частности, решение в виде импульса стационарной формы [22, 69]. Подробное обсуждение вопросов, связанных с распространением импульсов в резонансных средах, содержится в обзоре [22].

Инерционность реактивной нелинейности не влияет на амплитуду, но изменяет поведение частотной огибающей. Например, в случае, когда нелинейность связана с эффектом Керра в жидкостях [13, 70] (этот случай интенсивно изучается в нелинейной оптике), q_1 удовлетворяет уравнению

$$\tau \frac{\partial q_1}{\partial t} + q_1 = \beta m \quad (\beta = \text{const}). \quad (3.7)$$

При $\tau \rightarrow 0$ для частоты справедливо решение (3.4). Если же $\tau \gg T$ (короткий импульс), то из (3.2б) получим $\delta = \mu\beta m_0(\eta)x/v + \delta_0(\eta)$ [65], т. е. сдвиг частоты происходит в одну сторону.

2. Волны, близкие к синусоидальным. Второе приближение

Необходимость в учете членов порядка μ^2 в системе (3.2) возникает в тех случаях, когда функции g_1 и q_1 сами являются малыми порядка μ по сравнению с каждым из членов в левых частях (см. Приложение 1). Тогда все искажения огибающих определяются величинами порядка μ^2 , причем эти искажения существенно проявляются на интервалах, много больших характерного периода модуляции [61]. Такие волны огибающих всегда распространяются со скоростью, близкой к v (но, разумеется, отличной от фазовой скорости несущей периодической волны). Учет второго приближения на некотором этапе необходим, в частности, для сред с реактивной нелинейностью, так как, согласно (3.4), в первом приближении δ неограниченно растет вдоль x . Такие среды преимущественно и рассматриваются ниже.

Медленная модуляция. Следует отметить, что разные члены в правых частях (3.2) могут, в свою очередь, иметь различный порядок малости. Так, g_2 и q_2 содержат члены порядка $\frac{\partial g_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial q_1}{\partial t}$ и при малых g_1 и q_1 могут быть отброшены (кроме особого случая $x=0$, см. ниже). Далее, если характерный период модуляции T и максимальная девиация частоты Δ таковы, что $\Delta T \ll 1$ (медленная модуляция), то можно отбросить и член $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right)$ в (3.2б). Рассмотрим оставшуюся «укороченную» квазилинейную систему второго порядка для прозрачных сред с кубичной нелинейностью ($\mu q_1 = -\beta m$). Свойства ее решения качественно зависят от знака параметра $\rho = -x\beta$: при $\rho > 0$ «укороченная» система относится к гиперболическому, а при $\rho < 0$ — к эллиптическому типу [73]. В первом случае существуют два частных решения в виде простых (римановых) волн, соответствующих двум типам действительных характеристик [61, 72]:

$$m = F_{\pm}(t - x/v_{\pm}(m)),$$

$$x(\delta - \delta_0) = \pm 2 \sqrt{\rho m}, \quad v_{\pm} = v(1 + x\delta_0 \pm 3 \sqrt{\rho m}), \quad (3.8)$$

где $\delta_0 = \text{const}$, $F_{\pm}$ — произвольные функции. Волна F_+ (быстрая) деформируется так, что в ней сокращаются участки с $\frac{\partial m}{\partial t} > 0$, а в волне F_- (медленной) — участки с $\frac{\partial m}{\partial t} < 0$ (рис. 7 а). Величины $I_{\pm} = x\delta \mp 2 \sqrt{\rho m}$,

сохраняющиеся в простых волнах, являются инвариантами Римана для данной задачи. Нахождение всех других решений может быть сведено к линейной задаче с помощью преобразования Лежандра. Такой подход был использован для решения как гиперболических, так и эллиптических задач [71, 73]. В частности, для эллиптического случая получено решение, отвечающее импульсному начальному условию вида $A(0, t) =$

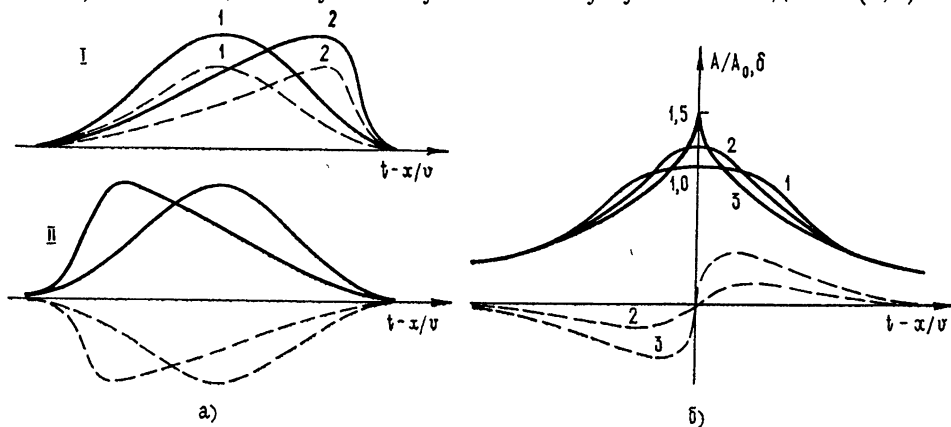


Рис. 7. Волны огибающих при медленной модуляции (— — A , - - - δ): а) простые волны огибающих в среде с $\rho > 0$, $x < 0$ (I — медленная, II — быстрая волна); 1) $x = 0$, 2) $x > 0$; б) искажение симметричного волнового пакета в среде с $\rho < 0$ при $\delta(0, t) = 0$ (по [71]); 1) $x = 0$, 2) $x \simeq 0,7 x_{kp}$, 3) $x = x_{kp}$.

$= A_0(1 + t^2/t_0^2)^{-1}$, $\delta(0, t) = 0$. Результат показывает, что на начальном этапе δ растет по (3.4), затем амплитуда возрастает до величины $A_{kp} \simeq 1,4 A_0$, после чего в центре группы возникает особенность: $\frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow \infty$ (рис. 7 б).

Отметим еще особые случаи, когда «укороченные» уравнения разделяются и могут быть проинтегрированы в общем виде: а) для линейной среды ($q_1 = 0$, $\mu g_1 = -hA$) решением является простая волна частоты, распространяющаяся со скоростью $v_s = v(1 + \chi\delta)$, амплитуда же растет на участках «сжатия» частотной огибающей [72, 74]; б) для слабодиспергирующей среды ($\chi \rightarrow 0$)* без потерь амплитудные искажения возникают лишь при учете члена $g_2 \sim A^2 \frac{\partial A}{\partial t}$ в (3.2 а), отбрасываемо-

го во всех остальных обсуждавшихся выше случаях. При этом амплитуда является простой волной, частота же может быть определена в первом приближении по μ [75].

Быстрая модуляция. Неустойчивость монохроматической волны. Во всех случаях, рассмотренных в предыдущем пункте, «укороченные» уравнения применимы лишь на ограниченных интервалах, после чего в решениях возникает особенность, и модуляцию уже нельзя считать медленной. Далее необходимо учитывать «параболический» член в правой части (3.2 б), описывающий дисперсионное распыление волн (членами g_2 и q_2 по-прежнему пренебрегаем).

Рассмотрим сначала поведение малых возмущений A' , δ' в монохроматической волне с постоянными A и δ [61, 77] (поскольку ω произ-

* Разумеется, здесь дисперсия считается отсутствующей лишь в малой окрестности несущей частоты, но существенной для ее высших гармоник, иначе последним нельзя пренебречь.

вольно, без ограничения общности можно положить $\delta = 0$). Линеаризуя (3.2) и полагая $A', \delta' \sim e^{i(\omega t - Kx)}$, получим [61]

$$vK \simeq \Omega [1 \pm (\kappa \Omega / 2\omega)^2 + \rho m]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Здесь также видна роль параметра $\rho = -\kappa\beta$, определяющего тип «укороченных» уравнений. При $\rho > 0$ всегда имеются две действительные скорости $\Omega/K = v_{\pm}$. Если же $\rho < 0$, то в интервале частот $\Omega < \Omega_{кр} = 2\omega \sqrt{\beta m/\kappa}$ действительным Ω отвечают комплексные $K = K' \pm iK''$. Это означает, что монохроматическая волна неустойчива по отношению к модулирующим возмущениям (само модуляция). Максимальное значение инкремента K'' равно $\frac{1}{2}\omega\beta m v^{-1}$ и достигается на частоте $\Omega_{opt} = \Omega_{кр}/\sqrt{2}$.

В линейном приближении нетрудно рассмотреть также поведение начального возмущения импульсного типа; при больших t в этом случае снова возникают нарастающие осцилляции огибающих с частотой порядка Ω_{opt} [79].

Отметим, что в среде с релаксирующей нелинейностью, описываемой уравнением (3.7), монохроматическая волна неустойчива и при $\rho > 0$ [80] (аналогичная ситуация возможна в диссипативной среде [153]). В активной среде монохроматическая волна отвечает рассмотренному выше предельному циклу (ср. разд. 2). Добавление реактивной нелинейности может сделать такую волну неустойчивой, даже если в первом приближении все отклонения от постоянной амплитуды волны затухают [72].

Для волн с глубокой модуляцией аналитическим путем удастся исследовать лишь немногие классы решений параболической системы (3.2). Один из таких классов — автомодельные волны, в которых зависимость A и δ от η не меняется вдоль x , но меняются масштабы этой зависимости (преобразование подобия). В частности, автомодельное решение описывает сжатие и последующее распывание импульса с конечной энергией, в котором δ линейно зависит от η [21]; в линейном случае это решение переходит в гауссов импульс.

Для нахождения решений параболической системы типа (3.2) довольно широко применяются численные методы. С их помощью было, в частности, выяснено поведение огибающих волны в нелинейной стадии «само модуляции» (рис. 8), а также прослежено распространение импульса гауссовой формы: происходит сначала самосжатие, затем распывание импульса [21, 82]. Заметим, что при $g_{1,2} = q_2 = 0$ всякое симметричное по t возмущение ($A(t) = A(-t)$, $\delta(t) = -\delta(-t)$) остается симметричным при всех x .

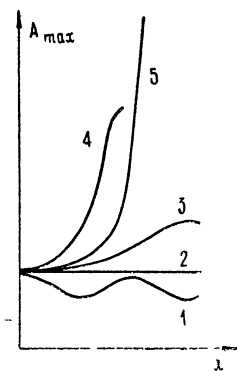


Рис. 8. Изменение максимальной (за период модуляции) амплитуды волны с $A(x, 0) = A_0 [1 + 0,1 \cos(\Omega t)]$, $\delta(x, 0) = 0$ (по [21]):

- 1) $\Omega > \Omega_{кр}$, 2) $\Omega = \Omega_{кр}$, 3) $\Omega_{opt} < \Omega < \Omega_{кр}$, 4) $\Omega = \Omega_{opt}$,
5) $\Omega < \Omega_{opt}$.

Стационарные волны огибающих. Уравнения (3.2), подобно исходным уравнениям для мгновенных значений поля, имеют решения в виде

стационарных волн, в которых A и δ зависят от одной переменной $\xi = t - x/v$. В прозрачной среде ($g_1 = 0$, $\mu q_1 = -\beta A^2$) для таких решений из (3.2) следует [61, 80]

$$\frac{x^2}{2\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = A \left[M_1 + \rho A^2 - \delta \left(\frac{\omega}{v} - 1 \right) - \frac{x}{2} \delta^2 \right], \quad \delta = 2 \left(\frac{\omega}{v} - 1 - \frac{M_2}{A^2} \right), \quad (3.10)$$

где $M_{1,2}$ — константы интегрирования. Для решений, не имеющих особенностей при $A = 0$, следует, очевидно, положить $M_2 = 0$ и, без ограничения общности, $\omega = v$, $\delta = 0$. Тогда поведение A на фазовой плоскости полностью соответствует стационарным волнам, изображенным выше на рис. 16, в. В частности, при $\rho < 0$ имеются решения в виде волнового пакета с конечной энергией (рис. 9).

Следует отметить, что стационарные волны огибающих с $\delta = 0$, строго говоря, неустойчивы, за исключением бесконечной волны, которая изображается сепаратрисой, соединяющей седла на рис. 16 [83]. Однако волны квазистационарного типа реальные и могут возникать в результате деформации нестационарных модулированных волн [15].

Если в (3.10) $M_2 \neq 0$, то при $\rho > 0$ возможен случай, когда на фазовой плоскости имеются две пары ($A = \pm A_1$, $\pm A_2$) ненулевых точек равновесия (рис. 10); с этим случаем связана возможность существования ударных волн огибающих (см. ниже).

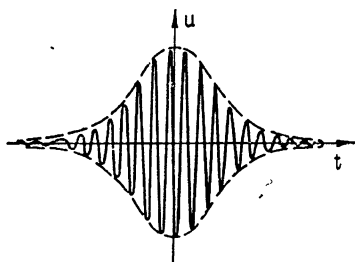


Рис. 9.

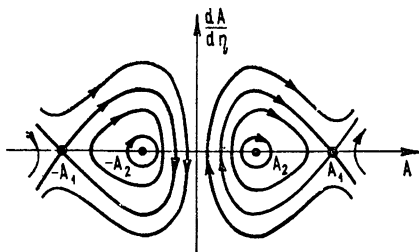


Рис. 10.

Рис. 9. Стационарный волновой пакет.

Рис. 10. Фазовая плоскость уравнения (3.10) для стационарной волны огибающих с переменной частотой [80].

В активной среде, как указывалось, стационарные волны огибающих существуют уже в первом приближении. Отметим случай среды со смешанной нелинейностью: если параметр неконсервативности среды мал по сравнению с параметром реактивной нелинейности, то стационарные волны приближенно описываются уравнением (3.10), но амплитуда ее не произвольна, а определяется активными параметрами [84]. В этом и других случаях очевидна аналогия между свойствами стационарных волн в средах с сильной нелинейностью (слабой дисперсией), обсуждавшихся в разд. 2, и свойствами стационарных волн огибающих в слабонелинейной среде. Одно из характерных отличий состоит в том, что для последних нелинейные члены содержат лишь нечетные степени амплитуды.

Ударные волны огибающих. Из предыдущего ясно, что в ряде случаев огибающие квазигармонической волны в слабонелинейной среде ведут себя так же, как мгновенные значения поля в среде с сильной нелинейностью или слабой дисперсией. Эту аналогию можно распро-

* Если учесть в (3.2) члены с q_2 , то δ в такой волне меняется с амплитудой порядка q_2/ω [61].

странить и на ударные волны. Действительно, деформация простой волны (3.8) приводит, как известно, к неоднозначности решения. Естественно предположить, что далее возможно установление узкого, по сравнению с исходным масштабом модуляции, перехода (в данном приближении скачка), который следует рассматривать как ударную волну огибающих. Если такой скачок существует, то из (3.2) для него следуют граничные условия [80]

$$x\delta_2 = \left(\frac{w}{v} - 1 \right) \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right), \quad w = v \{ 1 \pm [2\rho m_2^2 / (m_1 + m_2)]^{1/2} \}, \quad (3.11)$$

где w — скорость скачка, а индексы 1 и 2 относятся к величинам до и после скачка; здесь принято $\delta_1 = 0$, что не ограничивает общности. Ударные волны, как и простые, возможны только при $\rho > 0$. Согласно (3.11), имеются два типа скачков — медленные и быстрые. Как и следовало ожидать, условия их устойчивости* выполнены только для тех скачков, которые могут возникнуть в результате эволюции простых волн (быстрых с $m_2 > m_1$ и медленных с $m_2 < m_1$). На всех устойчивых скачках величина $x\delta$, а с ней и групповая скорость в линейном приближении $v_g = v(1 + x\delta)$, всегда растет (аналогично плотности или давлению в газодинамике).

Реальное существование стационарной переходной области ударного типа требует наличия необратимых процессов. При этом роль «вязкости» для волн огибающих играет релаксация нелинейности, описываемая, например, уравнением (3.7). Уравнения (3.2) с учетом (3.7) имеют стационарные решения, которые при $\xi \rightarrow \mp \infty$ переходят в значения $m_{1,2}$ и $\delta_{1,2}$, удовлетворяющие условиям (3.11). Отметим, что в случае $\tau > 0$ получаются лишь медленные стационарные волны с $m_2 < m_1$. При этом, если τ достаточно велико, то m убывает монотонно (рис. 11 а), если же τ мало, то $m(\xi)$ содержит осцилляции (рис. 11 б). При $\tau \rightarrow 0$ решение становится периодическим и соответствует замкнутой траектории на фазовой плоскости, изображенной на рис. 10.

Отметим, что многие из эффектов, обсуждавшихся выше (самоомодуляция, простые и ударные волны огибающих), наблюдались экспериментально для радиоволн в нелинейных линиях [85, 86], а эффект самоомодуляции — также и для волн на воде [77].

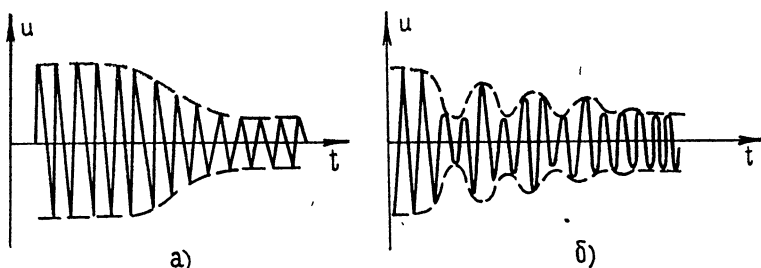


Рис. 11. Ударные волны огибающих в среде с инерционной нелинейностью: а) при больших τ , б) при малых τ .

3. Несинусоидальные волны

При большой нелинейности или слабой дисперсии стационарные волны в среде не близки к синусоидальным. Однако и здесь можно рас-

* Имеются в виду условия «гидродинамического» типа, справедливые в разрывном приближении; даже при выполнении этих условий на расстояниях, много больших ширины ударной волны, в данном случае может сказываться резонансная неустойчивость, связанная с релаксацией нелинейности [80].

смагивать модулированные волны, локально близкие к стационарным. Для сред без диссипации такие процессы могут быть описаны с помощью усредненного вариационного принципа [87–89]. Уравнения для огибающих волны имеют в этом случае вид (см. Приложение 2)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0, \quad k = k(\omega, A_s),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \bar{L}}{\partial k} = 0, \quad (3.12)$$

где L — усредненный лагранжиан системы, ω , k , A_s — медленно меняющиеся функции. Для квазимонохроматических волн (3.12) переходит в «укороченную» систему (3.2). В общем случае, как и выше, система (3.12) может быть либо эллиптического, либо гиперболического типа; в последнем случае можно выделить две характеристические скорости и соответствующие решения в виде простых волн. Следует отметить, что поведение решений существенно зависит от параметра несинусоидальности волны γ . В частности, если «несущая» стационарная волна близка к сепаратрисе, например, представляет собою последовательность «квазисолитонов», то две упомянутые характеристические скорости вырождаются в одну, близкую к скорости уединенного импульса соответствующей амплитуды, и решением (3.2) являются простые волны амплитуды [15, 58] (ср. упомянутый выше случай квазигармонических волн при $\kappa \rightarrow 0$).

Заметим, что из (3.12) следуют некоторые граничные условия для скачков типа ударных волн огибающих [88, 89], однако какие-либо конкретные необратимые механизмы, необходимые для их существования, в случае сильной нелинейности не рассматривались.

Такой же подход может быть использован для учета эффектов «дисперсионного расплывания» [90]. Однако эти эффекты существенно сказываются лишь в том случае, если масштаб модуляции T таков, что $\omega T \sim \sqrt{\gamma}$. Поэтому при $\gamma \sim 1$, когда форма волны существенно отличается от синусоидальной, нелинейная деформация огибающих происходит в соответствии с уравнениями (3.12) вплоть до возникновения столь резких изменений поля, что $\omega T \sim 1$, и весь «модуляционный» подход становится неприменимым; в рамках же этого подхода компенсация нелинейных искажений огибающих может быть достигнута только для квазигармонических волн с $\gamma \ll 1$.

Уравнения (3.12) справедливы и в том случае, когда в $\bar{L}$ имеется явная (но достаточно плавная) зависимость от x и t . При этом параметры волны изменяются даже в отсутствие модуляции на входе, при-

чем для пакета волн длины Λ величина $\int_0^{\Lambda} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} dx$ является адиабатиче-

ским инвариантом [85, 87]. Изменение амплитуды волны в неоднородной (или в нестационарной) среде ведет к изменению ее формы — например, от квазисинусоидальной до последовательности солитонов. Такой процесс был рассмотрен применительно к волнам на поверхности жидкости с переменной глубиной [27, 91].

В некоторых случаях уравнения для огибающих несинусоидальной волны могут быть получены и непосредственно из исходных уравнений, без использования лагранжева формализма [88, 92, 93]. Таким путем удастся, в частности, рассмотреть задачи, относящиеся к средам с диссипацией или активными параметрами.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Поскольку в нелинейной системе принцип суперпозиции не выполняется, наложение в среде двух (или большего числа) стационарных или квазистационарных волн приводит к изменению каждой из них, т. е. происходит взаимодействие волн. В системе с сильной нелинейностью взаимодействие, сильно искажающее форму волны, происходит на интервале, сравнимом с характерным масштабом волны; так взаимодействуют, например, простые и ударные волны [1, 2, 16], солитоны [57, 94]. В системе со слабой нелинейностью взаимодействие волн приводит к их существенному искажению только в том случае, если взаимные возмущения могут накапливаться на достаточно большом интервале (резонансные взаимодействия); в противном случае (нерезонансные взаимодействия) изменение волн незначительно.

В таких системах, где можно выделить класс стационарных волн, близких к синусоидальным, условие резонансности их взаимодействия, как нетрудно видеть, сводится к условию эффективного возбуждения одной из волн другими. Если обозначить комбинационные частоту и волновое число волны, возникающей в результате смешения s взаимодействующих волн, через $\omega_{\text{нел}}$, $k_{\text{нел}}$ ($\omega_{\text{нел}} = \sum_{j=1}^s n_j \omega_j$, $k_{\text{нел}} =$

$$= \sum_{j=1}^s n_j k_j, \quad n \text{ — целое число}), \text{ то условие резонанса имеет вид}^* \\ \omega_{\text{нел}} \simeq \omega_j, \quad k_{\text{нел}} \simeq k_j. \quad (4.1)$$

Количество волн, участвующих в таком резонансном процессе, определяется как начальными и граничными условиями, так и видом нелинейности и дисперсии в системе.

Условия типа (4.1) часто называют условиями синхронизма, имея в виду, что фазовая скорость комбинационной волны $\omega_{\text{нел}}/k_{\text{нел}}$ близка к фазовой скорости $v_j = \omega_j/k_j$ одной из собственных волн среды^{**}. При этом фазовые скорости v_j взаимодействующих волн в общем случае произвольны и фазовые соотношения существенно сказываются на характере процесса (синхронные взаимодействия). Существуют, однако, случаи, когда условия резонанса (4.1) выполняются при произвольных соотношениях между частотами и фазовыми скоростями взаимодействующих волн; здесь фазовые соотношения несущественны (несинхронные взаимодействия) — например, при взаимодействии встречных волн в среде с кубической нелинейностью. Подобные несинхронные взаимодействия возможны, очевидно, в среде с произвольным законом дисперсии.

1. Процессы в системах с квадратичной нелинейностью

В среде с квадратичной нелинейностью при распространении двух волн ω_1 , k_1 и ω_2 , k_2 возникает третья волна с $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$ и $k_3 = k_1 \pm k_2$.

* В отличие от сосредоточенных систем здесь необходим резонанс, как частот, так и волновых чисел. Заметим, что при выполнении (4.1) комбинационная волна $\omega_{\text{нел}}$, $k_{\text{нел}}$ близка к собственной волне среды, т. е. удовлетворяет дисперсионному уравнению $D(\omega_{\text{нел}}, k_{\text{нел}}) = 0$ (см Приложение).

** Условия синхронизма (4.1) можно трактовать как условия сохранения энергии и импульса квазичастиц — фотонов, фононов, плазмонов и др. При неоднородном взаимодействии волн (или квазичастиц в пространстве) второе из этих условий представляет собой векторное соотношение. В данном обзоре неоднородные задачи не рассматриваются, заметим, однако, что большинство из приведенных ниже результатов легко обобщается на практически важный случай неоднородного взаимодействия плоских волн, комплексные амплитуды которых зависят лишь от одной из пространственных координат.

Если при этом выполнены условия (4.1), то эта комбинационная волна может нарастать. При отсутствии дисперсии возникшая волна вместе с одной из исходных может возбудить волну $\omega_4 = \omega_3 \pm \omega_{1,2}$, $k_4 = k_3 \pm k_{1,2}$, которая в комбинации с одной из первичных может возбудить следующую. Такой процесс может привести, в частности, к возникновению ударных волн [2, 16, 24]. В тех случаях, когда условия синхронизма при многократных взаимодействиях не выполнены, самым общим в системе с квадратичной нелинейностью является трехчастотный процесс вида

$$\omega_1 \pm \omega_2 \leftrightarrow \omega_3, \quad k_1 + k_2 \leftrightarrow k_3 \quad (4.2)$$

(стрелки означают, что возможны процессы преобразования частоты как вверх, так и вниз). Примерами такого взаимодействия служат процессы параметрического усиления и преобразования частоты [102, 154], генерирование второй гармоники и деление частоты вдвое (при этом $\omega_1 = \omega_2$) [17, 18, 95], многие процессы вынужденного рассеяния [20, 23, 96] и т. д.

В общем случае пространственно-однородной автономной системы с квадратичной нелинейностью трехволновые процессы, для которых выполнены условия (4.2), описываются уравнениями для комплексных амплитуд взаимодействующих волн — $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$ (см. Приложение)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v(\omega_{1,2}) \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} &= \sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^* e^{-i\Delta k x} + \nu_{1,2} a_{1,2}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v(\omega_3) \frac{\partial a_3}{\partial x} &= \sigma_3 a_1 a_2 e^{i\Delta k x} + \nu_3 a_3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где σ_j в общем случае комплексно*. В консервативной системе (прозрачной среде) все $\nu_j = 0$, а коэффициенты нелинейного взаимодействия $\sigma_j \sim \omega_j^2 v(\omega_j)/k_j$. Для амплитуд немодулированных волн можно написать условия, аналогичные известным соотношениям Мэнли—Роу [11, 17]:

$$\frac{v(\omega_1) A_1^2}{\sigma_1} + \frac{v(\omega_3) A_3^2}{\sigma_3} = \text{const}, \quad \frac{v(\omega_2) A_2^2}{\sigma_2} + \frac{v(\omega_3) A_3^2}{\sigma_3} = \text{const}, \quad (4.4)$$

из которых, в частности, следует условие сохранения потока мощности в системе.

В вырожденном случае $\omega_{1,2} = \omega$, $\omega_3 = 2\omega$ система (4.3) описывает взаимодействие основной волны и ее второй гармоники. В зависимости от начальных или граничных условий это будет либо процесс генерации гармоники, либо — параметрическое преобразование частоты вниз (генерация субгармоники). Для рассмотрения стационарных двухволновых процессов удобно перейти к новым переменным [95] $X = A_{2\omega} \sin \Phi$, $Y = A_{2\omega} \cos \Phi$, $Z = A_\omega^2$ ($\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta k x$). Тогда из (4.3) при $\nu_j = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$,

используя следующее из (4.4) соотношение $\sigma_2 v(\omega) A_\omega^2 + \sigma_1 v(2\omega) A_{2\omega}^2 = \text{const}$, можно получить для X, Y систему двух уравнений, которую удобно исследовать на фазовой плоскости. Вид фазовых портретов этой системы при различных значениях расстройки Δk представлен на рис. 12.

Генерирование гармоники и субгармоники. При отсутствии расстройки ($\Delta k = 0$) вся энергия волны частоты ω , заданной на границе полубесконечной системы ($A_{2\omega}(0) \simeq 0$, $A_\omega(0) = A_{10}$, $\Phi(0) = \pi/2$), при $x \rightarrow \infty$ полностью перекачивается в энергию второй гармоники. На фазовой пло-

* В зависимости от постановки задачи (задача с начальными или граничными условиями) в (4.3) может входить расстройка Δr либо $\Delta \omega$.

скости (рис. 12 а) этому процессу соответствует движение изображающей точки по сепаратрисе в состояние равновесия из точки $X = Y = 0$.

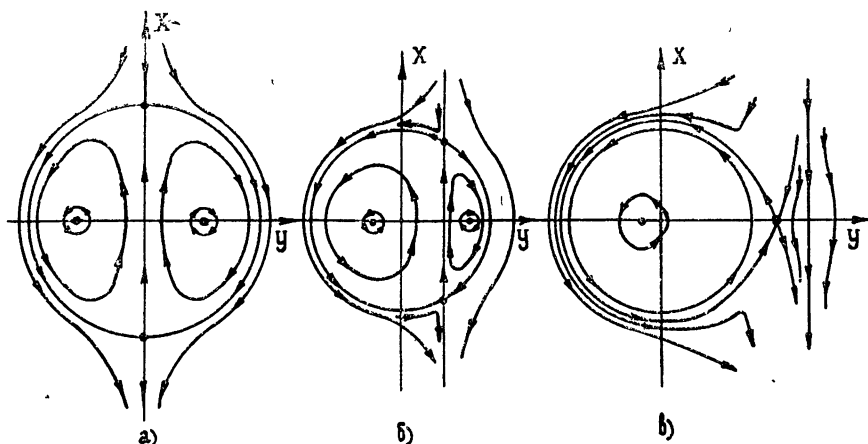


Рис. 12 Вид фазовых портретов системы (4.3) для двухволнового взаимодействия при $v=0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ($X = A_{20} \sin \Phi$, $Y = A_{20} \cos \Phi$) и различных значениях расстройк: а) $\Delta k = 0$, б) $|\Delta k| < 2(\sigma_1/v_1)A_1(0)$, в) $|\Delta k| > 2(\sigma_1/v_1)A_1(0)$ [17].

Зависимость амплитуд взаимодействующих волн ω и 2ω от координаты при произвольном соотношении амплитуд на границе дается выражениями ($\Phi = \pm \pi/2$, $\Delta k = 0$) [97]

$$A_{2\omega}(x) = A_0 \operatorname{th} \left[\frac{\sigma}{v} A_0(x_0 \pm x) \right], \quad A_{\omega}(x) = A_0 \operatorname{sech} \left[\frac{\sigma}{v} A_0(x_0 \pm x) \right], \quad (4.5)$$

$$x_0 = \frac{v}{\sigma A_0} \operatorname{Arth} \frac{A_{20}}{A_0}, \quad A_0 = (A_{10}^2 + A_{20}^2)^{1/2} \quad (\sigma_1 \simeq \sigma_2 \simeq \sigma, \quad v_1 = v_2 = v).$$

Как видно из (4.5), генерирование гармоники возможно и при $A_{20} = 0$ (полная перекачка).

При наличии расстройки полная перекачка энергии основной волны в энергию гармоники невозможна ни при каких граничных условиях, а эффективность энергообмена уменьшается с ростом Δk (так, при $\Delta k \gg 2\sigma A_0/v$ амплитуда волны 2ω настолько мала, что процесс распространения второй гармоники можно рассматривать в приближении заданного поля $A_{\omega} = A_{10} = \text{const}$). Если на границе нелинейной среды амплитуды обеих волн не равны нулю, то даже при полном синхронизме в процессе взаимодействия энергия будет периодически переходить из одной волны в другую (см. рис. 13 а). Глубина таких пространственных биений зависит от отношения A_{10}/A_{20} (см. (4.5)).

При наличии в системе малого поглощения аналитическое рассмотрение двухволнового взаимодействия удастся провести при условии, что затухание волн v_1 и v_2 одинаково ($v_1 = v_2 = -v$). В частности, для генерации второй гармоники при граничных условиях $A_1(0) = A_{10}$, $A_2(0) = 0$, $\Phi(0) = \pi/2$ нетрудно получить [17, 18]

$$A_{2\omega}^2(x) = \left\{ A_0 e^{-vt} \operatorname{th} \left[\frac{\sigma}{v} A_0 \frac{1}{v} (1 - e^{-vt}) \right] \right\}^2. \quad (4.6)$$

Пользуясь этим выражением, можно оценить максимальный КПД перекачки энергии основной волны в энергию гармоники и длину l_{opt} ,

на которой амплитуда второй гармоники в среде с потерями достигает максимума:

$$\left[\frac{A_{2\omega}(l_{\text{opt}})}{A_0} \right]^2 = \left(1 - \frac{1,5\nu\nu}{\sigma A_0} \right)^2, \quad l_{\text{opt}} \simeq -\frac{1}{\nu} \ln \left(1 - \frac{1,5\nu\nu}{\sigma A_0} \right).$$

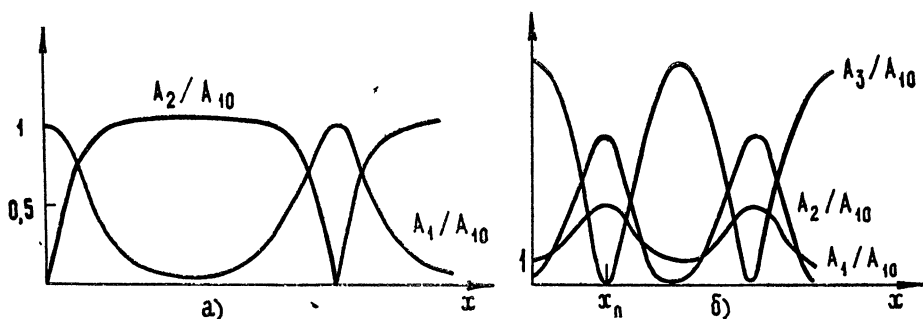


Рис. 13. а) Пространственные биения между основной волной и второй гармоникой в случае полного синхронизма. б) Зависимость относительной мощности взаимодействующих волн от x при невырожденном параметрическом преобразовании ($A_3(0) \gg A_1(0)$, $A_2(0) = 0$).

Трехволновые взаимодействия. Практически интересным и в то же время наиболее простым является случай, когда амплитуду одной из взаимодействующих волн можно считать заданной. При отсутствии затухания и точном согласовании фазовых скоростей амплитуда волны большей частоты ω_3 при граничных условиях $A_1(0) \gg A_2(0)$, $A_3(0) = 0$ записывается в виде

$$A_3(x) = \left(\frac{\omega_3}{\omega_2} \right)^{1/2} A_2(0) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4.7)$$

где длина нелинейного взаимодействия $l \sim 1/A_1(0)$ [20]. Обычно процесс такого типа называют преобразованием частоты вверх.

Зависимость относительной мощности взаимодействующих волн от x при другом процессе — невырожденном параметрическом преобразовании, когда $A_3(0) \gg A_1(0)$, $A_2(0) = 0$, — в стационарном случае приведена на рис. 13 б*. Расстояние x_0 , на котором достигается максимальное значение мощности, переданной волне сигнальной частоты ω_1 , пропорционально $A_3(0) \ln [16\omega_1 A_3^2(0)/\omega_3 A_1^2(0)]$ [18].

При достаточно сильном затухании в зависимости интенсивностей взаимодействующих волн от координаты будет лишь один максимум, т.е. как и в случае генерации второй гармоники существует оптимальная длина преобразования.

До сих пор обсуждались лишь стационарные процессы. Совершенно аналогично могут быть рассмотрены процессы взаимодействия во времени волн, однородных в пространстве. При групповом синхронизме ($v_j = V$) соответствующие результаты могут быть получены непосредственно из приведенных выше соотношений заменой x на Vt .

Трехволновые взаимодействия в активных системах. В тех случаях, когда в активной системе можно ограничиться учетом только квадратичной нелинейности, неустойчивость обычно существует лишь в достаточно узком частотном интервале. Ограничение нарастающих колебаний при этом может происходить следующим образом. Энергия нарастающей волны (в (4.3) ей соответствует $\nu_i > 0$) в результате

* В этом случае нельзя ограничиться приближением заданного поля, поскольку в таком приближении амплитуды A_1 и A_2 экспоненциально нарастают.

нелинейного взаимодействия перекачивается в находящиеся с ней в синхронизме волны других, обычно более высоких частот, которые в линейном приближении затухают. Подобный процесс приводит к ограничению амплитуды автоколебаний, т. е. динамической стабилизации неустойчивости [98, 99]. Этот механизм стабилизации и генерирования гармоник может реализоваться в оптике [100, 101] плазме [98] и других системах.

Многоволновые взаимодействия. Такие взаимодействия возможны в системах со слабой либо специальной дисперсией, когда условия синхронизма выполнены сразу для нескольких троек волн.

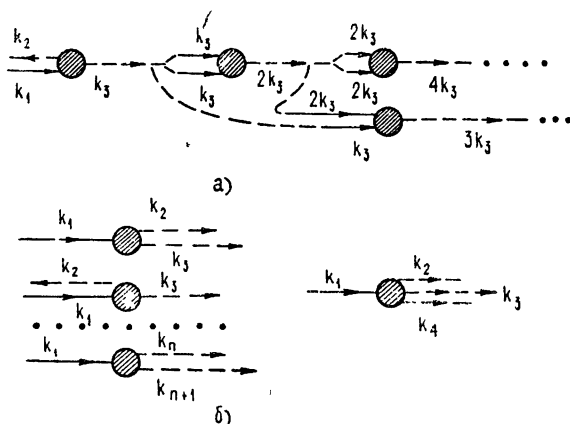


Рис. 14. Диаграммы многоволновых процессов:

а) последовательный и смешанный процессы, б) параллельный процесс.

Многоволновые процессы можно разделить на последовательные, параллельные и смешанные (рис. 14). При последовательном взаимодействии процесс носит цепной характер и каждая волна участвует лишь в двух элементарных процессах $k_1 \rightarrow k_3 - k_2$, $k_3 + k_3 \rightarrow 2k_3$. Примером может служить генерирование второй гармоники звука при вынужденном рассеянии Мандельштама—Бриллюэна [103]. Для параллельного взаимодействия характерно участие одной волны сразу в нескольких нелинейных процессах $k_1 \rightarrow k_2 + k_3$, $k_1 \rightarrow k_5 - k_4, \dots, k_1 \rightarrow k_n + k_{n+1}$ (рис. 14 б). Примером смешанного процесса является уже упоминавшийся процесс формирования ударных волн $k_3 + k_3 \rightarrow 2k_3$, $k_3 + 2k_3 \rightarrow 3k_3$, $2k_3 + 2k_3 \rightarrow 4k_3, \dots$ (рис. 14 а).

Необходимость рассмотрения многоволновых взаимодействий, в особенности параллельных (рис. 14 б), часто возникает при исследовании неустойчивостей волн конечной амплитуды, распространяющихся в нелинейной среде. При выполнении условий пространственно-временного резонанса (4.2) между исходной интенсивной волной и парой или несколькими парами флуктуационных волн (см. рис. 14 б) последние отбирают энергию у интенсивной волны, что и может привести к ее неустойчивости по отношению к одновременному возбуждению слабых флуктуационных волн. Поскольку, как отмечалось, условия (4.2) эквивалентны условиям распада квазичастиц, неустойчивость подобного типа часто называют распадной [104]*. Наиболее подробно такие процессы исследовались в теории плазмы [23].

* Заметим, что помимо обычной распадной неустойчивости вида (4.2) возможна неустойчивость по отношению к более медленным возмущениям, например, когда выполнены законы сохранения $2\omega = \omega_1 + \omega_2$, $2k = k_1 + k_2$. Такую неустойчивость можно интерпретировать как когерентное рассеяние пар квантов, находящихся в одном состоянии [105].

Отметим, что во многих случаях рассматриваемые волновые взаимодействия могут описываться лишь с помощью интенсивностей волн, а фазовые соотношения исключаются. Такой подход тесно связан с представлением о вероятностях индуцированных процессов излучения или поглощения волн волнами (аналогичных соответствующим процессам для квазичастиц). Параметрами, которые определяют границы применимости этого подхода, служат $\tau'_{\text{фаз}}$ — время жизни фаз каждой из волн, и $\tau_{\text{нел}} \sim 1/\sigma A$ — характерное время их нелинейного взаимодействия. При $\tau_{\text{фаз}} \ll \tau_{\text{нел}}$ с помощью усреднения по фазам от уравнений (4.3) можно перейти к уравнениям для интенсивностей. При обратном соотношении параметров $\tau_{\text{фаз}} \gg \tau_{\text{нел}}$ нелинейный процесс описывается динамическими уравнениями (4.3) [23].

Взаимодействия в средах с резонансными свойствами. Среди трехволновых взаимодействий в системах с квадратичной нелинейностью следует выделить особо частный случай, когда одна из взаимодействующих волн (обозначим ее индексом m) имеет близкую к нулю групповую скорость и при этом сильно затухает [$1^8, 20$]. Непосредственно из

условия $\frac{d\omega_m}{dk} \simeq 0$ следует, что в системе имеется некоторая частота ω_0 ,

которой соответствует сильное поглощение. Условия синхронизма (4.2) в этом случае превращаются лишь в условие резонанса частот

$$\omega_1 - \omega_0 = \omega_2, \quad (4.8)$$

поскольку ввиду независимости ω_m от k_m условие $k(\omega_1) - k(\omega_2) = k_m$ выполняется при произвольных дисперсионных свойствах системы.

В стационарном случае уравнения для амплитуд связанных волн, удовлетворяющих (4.8) ($a = Ae^{i\varphi}$), записываются в виде (см. (4.3))

$$v_m \frac{\partial a_m^*}{\partial x} = -v_m a_m^* - i\sigma_m a_1^* a_2, \quad (4.9)$$

$$v_1 \frac{\partial a_1^*}{\partial x} = -v_1 a_1^* - i\sigma_1 a_2^* a_m^*, \quad v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = -v_2 a_2 + i\sigma_2 a_1 a_m^*.$$

Так как $v_m \simeq 0$, а v_m велико, быстро устанавливается равновесный режим: $a_m^*(x) = -(i\sigma_m/v_m) a_1^* a_2$. Учитывая это, из (4.9) получим

$$v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = -A_1 \left(v_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_m}{v_m} A_2^2 \right), \quad v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = -A_2 \left(v_2 - \frac{\sigma_2 \sigma_m}{v_m} A_1^2 \right), \quad (4.10)$$

откуда следует, что при $\sigma_2 \sigma_m A_1^2 > v_2 v_m$ волна с ω_2 , которую обычно называют волной сигнала, растет за счет энергии, запасенной в волне с ω_1 (волне накачки). Приближенное решение (4.10) имеет вид [106] ($v_1 = v_2 = v$, $\sigma_{1,2} \sigma_m / v_m = g$)

$$\frac{A_2^2(x)}{A_1^2(0)} = \frac{(1 + \beta) e^{-\gamma x}}{\beta + \exp[-\gamma(1 + \beta)(1 - e^{-\gamma x})]}, \quad (4.11)$$

где

$$\beta = A_2^2(0)/A_1^2(0), \quad \gamma = g A_1^2(0)/v.$$

Отметим тот факт, что после исключения из рассмотрения одной из волн трехволновое взаимодействие в среде с квадратичной нелинейностью по существу не отличается от несинхронного двухволнового процесса в системе с нелинейностью кубического типа (ср. (4.15)). Соответствующее (4.8) условие резонанса записывается при этом в виде $\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0$.

Примером процессов указанного типа служит вынужденное комбинационное рассеяние в оптике^[20, 107]. В (4.8) волна (1) соответствует падающей лазерной волне, а волна (2) — стоковой компоненте рассеянного света. Заметим, что при ВКР наблюдается также слабая антистоксова компонента рассеянного света на частоте $\omega_1 + \omega_1 - \omega_2 = \omega_1 + \omega_0$. Наличие этой компоненты легко объяснить, рассмотрев последовательный процесс $\omega_1 - \omega_0 \rightarrow \omega_2$, $\omega_1 + \omega_1 \rightarrow 2\omega_1$, $2\omega_1 - \omega_2 \rightarrow \omega_1 + \omega_0 = \omega_{ac}$ [20].

2. Процессы в системах с кубической нелинейностью

В системах с кубической нелинейностью общим случаем одноактного процесса синхронного взаимодействия является взаимодействие четырех волн, условия резонансности (4.1) при этом записываются в виде

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \rightleftharpoons \omega_4, \quad k_1 + k_2 + k_3 \rightleftharpoons k_4. \quad (4.12)$$

Помимо процессов, аналогичных трехволновым взаимодействиям в квадратичной среде (возникающих при условии, что одно из полей статическое: $\omega_i=0$, $k_i=0$), в таких системах возможно генерирование третьей гармоники, деление частоты втрое и ряд других процессов [17, 18; 163—165]. Несинхронные взаимодействия, возможные в кубической среде, соответствуют случаю $\omega_1 \simeq \omega_4$, $\omega_2 \simeq -\omega_3$, $k_1 \simeq k_4$, $k_2 \simeq -k_3$ (см. (4.12)).

Из соотношений (4.12) следует, что в системе с кубической нелинейностью возможны также процессы самовоздействия; им соответствует случай $-\omega_1 \simeq \omega_2, 3, 4$ (см. разд. 3).

Уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн в системе с кубической нелинейностью записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial a_i}{\partial x} = & \left\{ h_i - a_i \left(a_i a_i^* + \sum_{j \neq i}^n \rho_{ij} a_j a_j^* \right) \right\} a_i + \\ & + \left[\sum_i^n \sum_l^n \sum_r^n \alpha_{ijkr} a_j a_l a_r \exp(i \Delta k_{jkr} x) \right] \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.13)$$

(a_i в общем случае комплексны). В квадратных скобках суммирование проводится по всем волнам, удовлетворяющим условию синхронизма $d_j + d_l + d_r = d_i$ (d — вектор с компонентами ω , k ; n — число взаимодействующих волн)*. Для несинхронных взаимодействий все слагаемые в квадратных скобках обращаются в нуль. Коэффициенты в (4.13) определяются из (6.13) (см. Приложение).

Генерация третьей гармоники. Рассмотрим этот процесс в системе без диссипации (условия синхронизма (4.12) предполагаются выполненными). Полагая, что эффективность преобразования невелика, по-

* В (4.13) следует учитывать, что волнам с частотами и волновыми числами $-\omega_j$, $-k_j$ соответствуют амплитуды a_j^* .

основной волны будем считать заданным. Тогда из (4.13) следует в стационарном случае ($|a_3|^2 \ll |a_1|^2$) [20]

$$a_3 = a_3^3 \{ \exp [i(k_3 - 3k_1)x] - 1 / (k_3 - 3k_1) \}; \quad (4.14)$$

из решения видно, что интенсивность $|a_3|^2$ пропорциональна $(\Delta k = k_3 - 3k_1) \sin^2 [2\Delta k x / (\Delta k)^2]$. Сначала амплитуда растет от значения $a_3 = 0$ на границе $x = 0$ нелинейной среды квадратично с расстоянием. Когда волна $k(3\omega)$ и комбинационная волна $3k(\omega)$ выходят из синхронизма, интенсивность снова уменьшается, т.е. вдоль x устанавливается колебательный режим.

Несинхронные многоволновые взаимодействия. В консервативных системах несинхронные взаимодействия проявляются лишь в изменении фаз взаимодействующих волн*. В частности, если волны не модулированы, то это приводит к появлению постоянной добавки к частоте или волновому числу.

В неконсервативных системах, как отмечалось, основной интерес представляет амплитудное взаимодействие волн**. Рассмотрим подробнее взаимодействие двух волн в активных системах ($h_i > 0, a_i > 0$) с сильной дисперсией. Для этого случая уравнения (4.13) удобно привести к виду [108, 109]

$$\frac{\partial m_{1,2}}{\partial t} + v_{1,2} \frac{\partial m_{1,2}}{\partial x} = 2 h_{1,2} [1 - (m_{1,2} + \rho_{1,2,1} m_{2,1})] m_{1,2}, \quad (4.15)$$

где $m_{1,2} = a_{1,2} |a_{1,2}|^2 / h_{1,2}$. Коэффициенты ρ_{ij} определяют величину связи между взаимодействующими волнами и зависят от вида диссипации и активности в системе, дисперсионных свойств нелинейности и частот этих волн. Характер установившихся решений (4.15) определяется величиной и соотношением коэффициентов связи. На рис. 15 представлено

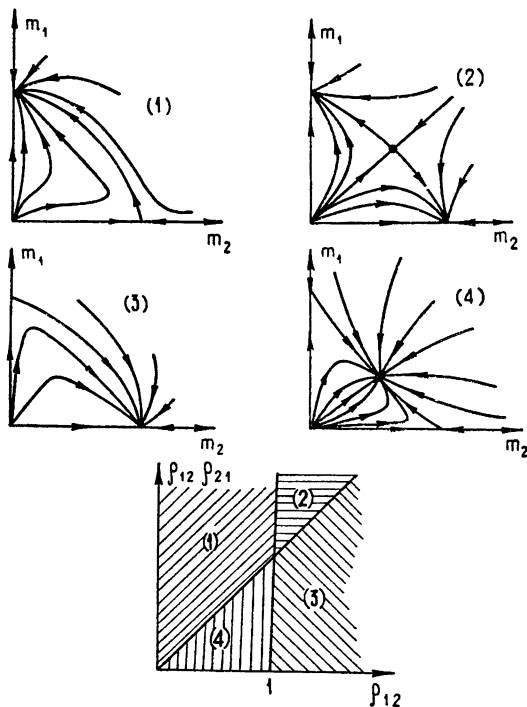


Рис. 15. Фазовые портреты системы (4.15) ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) при различных значениях коэффициентов связи ρ_{ij} .

качественное разбиение на траектории плоскости m_1, m_2 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)

* В (4.12) этому случаю соответствуют коэффициенты $h = 0, \sigma = 0, \text{Re } \alpha = 0$.

** Активные системы с релаксацией нелинейности здесь не рассматриваются.

для попутных волн в зависимости от значения параметров ρ_{ij} [109]. Если $\rho_{12}\rho_{21} > 1$ — сильная связь, то в полубезграничной системе в зависимости от условий на границе ($m_{1,2}(0) \neq 0$) при $x \rightarrow \infty$ возможно установление либо двухволнового режима с постоянными амплитудами $m_{1,2} = (\rho_{12}, \rho_{21} - 1)/(\rho_{12}\rho_{21} - 1)$, либо стационарного одноволнового режима $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ или $m_2 = 1$, $m_1 = 0$. Если же $\rho_{12}, \rho_{21} < 1$, а $\rho_{21}, \rho_{12} < 1$, то любой двухволновой режим в активной системе конвективно неустойчив, т.е. при $x \rightarrow \infty$ переходит в стационарную волну $m_{1,2} = 1$, $m_{2,1} = 0$.

В тех случаях, когда связь между взаимодействующими волнами оказывается слабой ($\rho_{12}, \rho_{21} < 1$), то независимо от соотношения амплитуд взаимодействующих волн на границе системы ($m_{1,2} \neq 0$) при $x \rightarrow \infty$ устанавливается пространственно-однородный двухволновой режим с параметрами $m_{1,2} = (1 - \rho_{12}, \rho_{21})/(1 - \rho_{12}\rho_{21})$.

Проведенное рассмотрение при замене $x \rightarrow t$ справедливо и для взаимодействия во времени пространственно-однородных бегущих волн (направление распространения при этом не существенно). Так, при взаимодействии встречных волн одинаковой частоты, если $\rho_{12}, \rho_{21} > 1$, в системе устанавливается режим бегущей волны, стоячая волна оказывается неустойчивой (см. рис. 15 (2)). При слабой связи $\rho_{12}, \rho_{21} < 1$ — наоборот, неустойчив режим бегущих волн и независимо от начальных условий в безграничной системе устанавливается стоячая волна*.

Рассмотренные выше процессы реализуются при взаимодействии электромагнитных волн в активных средах [51, 52] и линиях передачи [93, 108], потоковой плазме [110] и т. д. В частности, в генераторе с газовой активной средой, где величина связи между волнами, т.е. значение ρ_{ij} , зависит не только от соотношения частот взаимодействующих волн, но и от закона распределения по скоростям активных молекул [111], $0 < \rho_{ij} \leq 2$. При отсутствии расстройки между частотами встречных волн и центром линии активных молекул $\rho_{12} = \rho_{21} = 2$, что соответствует неустойчивости режима стоячих волн. С ростом расстройки величины ρ_{ij} убывают и неустойчивым оказывается режим бегущих волн.

3. Взаимодействие модулированных волн

При взаимодействии модулированных волн наряду с условиями фазового синхронизма существенную роль играют условия так называемого группового синхронизма, определяющие близость групповых скоростей взаимодействующих волн.

Так, например, при генерировании второй гармоники коротким импульсом (АМ сигналом длительностью τ) поведение профилей амплитуд основной волны и гармоники определяется соотношением $l_{\text{нел}} = v/c A$ — длины нелинейного взаимодействия и «квазистатической» длины $l_k = \tau/\delta$, $\delta = (1/v_2) - (1/v_1)$, на которой происходит разбегание импульсов основной волны и гармоники за счет эффекта группового запаздывания [112, 157, 158]. Если $l_k > l_{\text{нел}}$ (квазистационарный случай), то амплитуды взаимодействующих волн изменяются практически так же, как для немодулированных волн. При $l_k < l_{\text{нел}}$ наличие модуляции уже существенно. В приближении заданного поля $A_1 \gg A_2$, как следует из (4.3), на расстоянии $x < l_k$ амплитуда импульса гармоники пропорциональна $A_{10}^2 = A_1^2(0, t)$ и растет с ростом x : $A_2 = (c_2/v_2) x A_{10}^2(t - x/v_2)$. При $x > l_k$ импульс гармоники расширяется и его длительность увеличивается пропорционально расстоянию.

В тех случаях, когда существенна обратная реакция гармоники на основную волну, расширение импульса гармоники сопровождается

* Подробно о взаимодействии встречных волн см. разд. 5.

сужением импульса основной волны. Заметим, что в этом случае спектр импульса гармоники может быть существенно уже спектра импульса основной волны [112, 157].

Подобный же результат получается и при вырожденном параметрическом взаимодействии. Согласно (4.3), в заданном поле накачки имеем

$$m_1(t, x) = m_{10} \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \exp \left[2 \frac{\sigma_2}{v_2} \int_0^x A_{20} \left(t - \frac{x}{v_1} - \delta x' \right) dx' \right]. \quad (4.16)$$

Если накачка импульсная, то при $x \gg l_{\text{нел}} = v_1 / \alpha_1 A_{2\text{max}}$ сигнал также становится импульсным, независимо от формы на входе, причем длительность импульса сигнала может даже стать меньше длительности импульса волны накачки [159].

Специфические эффекты возникают при невырожденном трехволновом взаимодействии модулированных волн в случае, когда импульсы усиливаемых волн распространяются в разные стороны по отношению к импульсу накачки. При этом, если скорость разбегания импульсов не слишком велика, то во всей области, занятой импульсом накачки, инкремент параметрически связанных волн будет положителен (считаем, что в начальный момент импульсы перекрывались). Это приводит к тому, что они не могут покинуть область, занимаемую импульсом накачки, поскольку поле параметрически связанных волн внутри этой области непрерывно усиливается—эффект «пленения» связанных волн импульсом накачки [113, 114].

При несинхронном взаимодействии модулированных волн в системе, где имеется кубичная реактивная нелинейность, возникает так называемая «кросс-модуляция» несинхронных волн—взаимное изменение их спектров [112, 115]. В частности, для консервативной системы, интегрируя (4.3), нетрудно найти изменение фаз, а следовательно и девиацию частоты каждой из волн, задавая их амплитуды и частоты либо в момент $t = t_0$, либо на границе нелинейной среды. При взаимодействии двух волн, распространяющихся в одном направлении в полуограниченной системе с кубичной нелинейностью, получим [115]

$$\delta \omega_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \text{Im } \alpha_i \left\{ \frac{x}{v_i} \frac{\partial m_{i0}(\eta_i)}{\partial t} + \frac{\rho_{ij} v_j}{v_j - v_i} [m_{j0}(\eta_j) - m_{j0}(\eta_i)] \right\} + \delta \omega_i(0, t) \quad (4.17)$$

$$(m_{i0} = m_i(0, t), \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad \eta_i = t - x/v_i).$$

В неконсервативных системах удается исследовать лишь отдельные виды взаимодействия модулированных волн [108, 116]. В частности, при двухволновом взаимодействии возможны стационарные волны сгибающих, в которых $m_1 = H(m_2)$, распространяющиеся со скоростью [108] $V = (v_1 + v_2 R) / (1 + |R|)$. При $R = -v_1/v_2$ эти решения стационарны во времени, а при $R = -1$ —пространственно однородны. На рис. 16 приведены три различных типа стационарных волн амплитуд встречных волн в активной системе с кубичной нелинейностью; на этом же рисунке приведены соответствующие зависимости плотности энергии $W = m_1 + m_2$ от координаты. В некоторых случаях процессы взаимодействия могут быть рассмотрены с помощью усреднения по стационарным волнам сгибающих—периодическим функциям, описывающим стационарные волны в прозрачной среде [84].

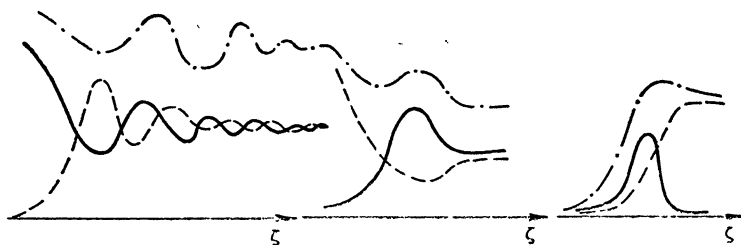


Рис. 16 Некоторые типы стационарных волн огибающих m_1 , m_2 в активной системе с кубической нелинейностью ($W = m_1 + m_2$):

— · — · — W , — — — m_1 , — — — — m_2 .

4. Взаимодействие несинусоидальных волн

Сравнительно прост случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн невелика и относительно нее исходные уравнения могут быть линеаризованы. При этом поведение слабой волны в поле сильной (так же как и метод анализа) определяется нелинейными и дисперсионными свойствами системы и формой слабой и сильной волн (последнюю в данном случае можно считать волной параметра). Многие результаты здесь могут быть получены с помощью метода возмущений, как, например, при анализе взаимодействия слабой волны с простой или ударной [1, 2, 16].

Общая задача о взаимодействии несинусоидальных волн решается лишь в отдельных случаях. Так, графоаналитическим методом может быть решена задача о взаимодействии ударных волн [1, 16, 118]. Для определенных классов задач, используя известные асимптотические свойства некоторых решений, возможно представить картину процесса, получившегося в результате взаимодействия волн, близких к стационарным. В частности, для систем, описывающихся уравнением Кортевега—де Вриза [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (4.18)$$

независимо от характера начального нелинейного процесса, если он ограничен в пространстве, при $t \rightarrow \infty$ решение $u(x, t)$ представляет собой набор невзаимодействующих друг с другом солитонов, параметры которых определяются интегралами исходного уравнения [94, 117] (т. е. для решений типа солитонов выполняется асимптотический принцип суперпозиции). Используя это свойство солитоноподобных решений, возможно построить нестационарные решения, локально близкие к суперпозиции нескольких солитонов. Параметры этого решения могут быть вычислены с помощью соответствующей теории возмущений [119].

Подход, связанный с рассмотрением решений, локально близких к суперпозиции точных стационарных волн, оказывается наиболее плодотворным для анализа слабонелинейных систем (при этом стационарные волны могут быть существенно несинусоидальны и даже близки к разрывным за счет слабой дисперсии). Если эти волны периодические (например, периодическая последовательность солитонов), то процесс их взаимодействия может быть исследован с помощью усреднения по стационарным волнам—решениям исходной нелинейной задачи. Такой подход возможен как при исследовании автоколебаний в активных системах [93], так и в нелинейных системах без диссипации или с малыми потерями.

5. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

В ограниченных системах, в отличие от безграничных, если нелинейность не мала, сравнительно просто удастся определить только статические решения $u_i = u_i(x)$ [120, 123], которые, очевидно, не играют той роли, что стационарные волны (такие решения являются частным случаем стационарных волн при $V = 0$). Исключение составляют системы бегущей волны, например, согласованные на концах, или кольцевые системы, в которых также могут существовать решения, близкие к стационарным волнам.

В общем случае для некольцевых систем (резонаторов) существенно нестационарные процессы удастся исследовать только при малой нелинейности. Решение, удовлетворяющее краевым условиям, при этом представляется как результат взаимодействия волн, близких к стационарным. Для таких решений из строгих краевых условий вида

$$F_j \{u_i(0, t), u_i(L, t)\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (5.1)$$

где F_j — в общем случае нелинейный дифференциальный оператор по t , а L — длина резонатора, можно получить приближенные условия, связывающие амплитуды и фазы стационарных волн, в частности, встречных, на границах системы (эти условия также могут быть нелинейны). Решения, локально близкие к суперпозиции стационарных волн, рассматривались в предыдущем разделе. Однако в данном случае между волнами, помимо связи за счет нелинейности среды, возникает дополнительная связь через граничные условия. Задача рассмотрения нестационарных решений в слабонелинейных системах еще более упрощается при наличии сильной дисперсии, когда стационарные волны близки к синусоидальным.

В ограниченной волновой системе с малыми потерями собственные частоты образуют дискретный спектр. Если дисперсия велика, то спектр частот неэквидистантен и в системе отсутствуют внутренние резонансы*. Это во многих случаях позволяет ограничиться рассмотрением процессов, представляющих собой результат взаимодействия нормальных колебаний — точных решений линейной краевой задачи, соответствующих лишь одной или нескольким собственным частотам резонатора [121–124]. При рассмотрении процессов в достаточно длинных (по сравнению с длиной волны) системах такой подход приводит к анализу весьма большого числа нелинейных уравнений в обыкновенных производных, что зачастую не проще решения исходной нелинейной задачи. Для таких систем наиболее адекватным является метод усреднения по двум переменным (см. Приложение 1). Этот метод позволяет для нестационарных решений, быстроосциллирующих во времени и пространстве, вместо большого числа уравнений в обыкновенных производных получить одно или несколько уравнений в частных производных (их число равно числу взаимодействующих волн, которое определяется видом нелинейности и дисперсии в системе и граничными условиями). Решение последней задачи часто оказывается более простым. Вид этих уравнений в частных производных, очевидно, не зависит от граничных условий, поэтому при анализе краевых задач мы воспользуемся уже исследовавшимися в предыдущем разделе уравнениями (см. (4.3), (4.13)), дополнив их соответствующими гра-

* При отсутствии дисперсии спектр собственных частот будет эквидистантный и любая из комбинационных частот $\omega = \sum_j n_j \omega_j$ ($n=1, 2, \dots$) также есть собственная частота, т. е. система обладает бесконечным числом внутренних резонансов. Независимо от формы начального колебания, даже при слабой нелинейности, при $t \rightarrow \infty$ спектр колебаний в такой системе, вообще говоря, бесконечно расширяется.

ничными условиями для амплитуд и фаз взаимодействующих волн. Эти условия для слабонелинейных систем в большинстве случаев нетрудно получить с помощью усреднения строгих соотношений типа (5.1).

Заметим здесь, что наибольшее число работ по исследованию волновых процессов в резонаторах связано с системами оптического диапазона и, хотя они обладают существенной спецификой (в частности, в оптике граничные условия в рассматриваемом приближении обычно линейны), ниже им уделяется основное внимание.

1. Автоколебания в резонаторах

Резонатор с отражением на границах. Рассмотрим квазигармонические процессы в ограниченной активной системе с кубической нелинейностью. Они описываются уравнениями (4.15) для встречных волн (см. также (4.13)), при этом $\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = -k_2$, $v_1 = -v_2$, и граничными условиями, которые в данном приближении можно считать линейными,

$$m_1(0, t) = r_0^2 m_2(0, t), \quad m_2(L, t) = r_L^2 m_1(L, t), \quad (5.1a)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2|_{x=0, L} = 2kx|_{x=0, L} + \Delta_0, L + 2n\pi \quad (n=1, 2, \dots).$$

Здесь $m_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ — квадраты амплитуд и фазы встречных волн одинаковой частоты, а $|r_{0, L}| \exp(i\Delta_{0, L})$ — коэффициенты отражения на границах резонатора.

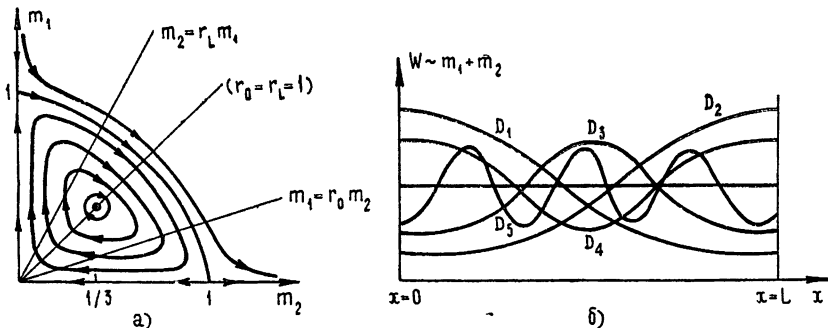


Рис. 17. а) Вид фазовой плоскости системы (4.15) для стационарных решений в резонаторе, заполненном активной средой; уравнения интегральных кривых на этой плоскости $m_1 m_2 |1 - m_1 - m_2| = D$ ($D = \text{const}$).

б) Распределение энергии в пространстве для некоторых стационарных режимов в ограниченной автоколебательной системе.

Для стационарных процессов вид фазового портрета системы (4.15) (при $\rho_{12} = \rho_{21} = 2$, $v_1 = -v_2$) представлен на рис. 17 а. Как следует из рисунка, даже в резонаторе с идеальным отражением на границах ($r_0^2 = r_L^2 = 1$), если его длина достаточно велика, помимо режима стоячих волн (ему соответствует состояние равновесия $m_1 = m_2 = 1/3$) могут существовать пространственно-неоднородные стационарные режимы. При идеальном отражении на концах им соответствуют на плоскости $m_1 = m_2$ траектории, которые начинаются и оканчиваются на прямой $m_1 = m_2$. Поскольку для таких процессов характерно существование областей, где преобладает амплитуда одной из встречных волн, в достаточно длинном резонаторе поток энергии, переносимой волнами, в разных точках может иметь разные знаки. Некоторые возможные распределения энергии $W \sim m_1 + m_2$ в пространстве для стационарных режимов в ограниченной автоколебательной системе вида (4.15) приведены на рис. 17 б. Подобные режимы могут существовать в лазерах [125—128], автоколебательных системах радиодиапазона [108]; они, в част-

ности, наблюдались экспериментально в нелинейных активных линиях передачи [129].

Заметим, что поскольку в общем случае определенной частоте ω , в линейном приближении может соответствовать не две, а большее число различных типов волн (им соответствуют разные ветви дисперсионного уравнения), гармонический процесс в резонаторе будет описываться системой уравнений не второго, а более высокого порядка. Пространственная структура встречных волн при этом может оказаться гораздо более сложной, чем рассмотренная выше. В качестве примера укажем на эффект вращения плоскости поляризации при взаимодействии встречных электромагнитных волн в среде с поляризуемостью $\chi = \chi(|E|^2)$ [130].

Нестационарные процессы при взаимодействии встречных волн в резонаторе удастся исследовать лишь в отдельных случаях, в частности, когда в области, занимаемой нелинейной средой, структуру поля взаимодействующих волн можно считать заданной. Подобная ситуация, кроме кольцевых систем (где волны можно считать пространственно-однородными) [51–53, 108], реализуется в системах, где размеры нелинейной среды существенно меньше расстояний, на которых заметно меняются амплитуды и фазы встречных волн* [138, 162].

Остановимся на некоторых линеаризованных задачах, которые позволяют рассмотреть устойчивость стационарных режимов в резонаторах**. В автоколебательных системах для анализа устойчивости стационарных режимов по отношению к произвольным квазигармоническим возмущениям обычно приходится пользоваться прямыми методами, т. е. исследовать, например, решения усредненных уравнений вида (4.15) (или системы (4.13)). Линеаризуя (4.15) вблизи пространственно-однородного стационарного режима $m_1 = m_2$ (стоячая волна) и используя граничные условия (5.1), получим характеристическое уравнение [109]

$$p^2 + \frac{2}{3} p h + K^2 v^2 - h^2/3 = 0, \quad (5.2)$$

здесь p — параметр преобразования Лапласа, а $K = 2\pi/\Lambda$, где Λ — длина волны огибающей. Как видно из этого уравнения, автоколебания в виде стоячей волны неустойчивы по отношению к достаточно длинноволновым амплитудным возмущениям***.

$$\frac{\Lambda}{2} > \frac{\pi \sqrt{3} v}{h} = L_{кр}. \quad (5.3)$$

Величина $L_{кр}$ совпадает с минимальной длиной резонатора, при которой в системе возможно существование стационарного режима в виде периодически модулированных в пространстве встречных волн [108, 126].

Устойчивость неоднородных в пространстве стационарных режимов в автоколебательных системах удастся рассмотреть лишь в отдельных случаях: либо при слабой неоднородности [131], либо при отсутствии одной из встречных волн. Так для кольцевого генератора с невзаимным элементом и поглощением на зеркалах можно показать, что стационарный режим в виде бегущей волны устойчив по отношению к весьма широкому классу возмущений [132, 133].

* Заметим, что при этом не требуется малости размеров активной среды по сравнению с λ .

** При исследовании консервативных систем задача об устойчивости стационарных решений во многих случаях сводится к оценке собственных значений самосопряженных операторов, которая, в свою очередь, может быть решена с помощью тех или иных вариационных методов [83].

*** В кольцевой автоколебательной системе, описываемой (4.15), режим стоячих волн неустойчив уже по отношению к пространственно-однородным возмущениям и переходит в режим бегущей волны [52, 108].

Кольцевые системы. Любой из рассмотренных выше нелинейных волновых процессов, существующих в безграничной системе, может реализоваться (если он устойчив) и в кольцевом резонаторе, когда выполнены условия пространственной периодичности $u_i(x, t) = u_i(x + L, t)$. Эти условия накладывают ограничения на длину взаимодействующих волн, а в диспергирующих системах — и на скорость их распространения V . Значения V , удовлетворяющие этим условиям, являются собственными значениями соответствующей краевой задачи (см. разд. 1). Для стационарных волн в автоколебательных системах значения V — дискретны.

Рассмотрим подробнее квазигармонические процессы в активных системах. В первом приближении, когда дисперсией групповой скорости можно пренебречь (см. разд. 3), модулированная волна в кольцевом резонаторе, однородно заполненном слабонелинейной активной средой (см. (4.15)), описывается выражением*

$$m(x, t) = m_0(\eta) \{m_0(\eta) + [1 - m_0(\eta)]e^{-at}\}^{-1} \quad (\eta = x - vt), \quad (5.4)$$

где $m_0(x)$ — начальное распределение поля в системе. Из (5.4) следует, что, как и в безграничной среде, модулированная при $t = 0$ волна переходит при $t \rightarrow \infty$ либо в немодулированную, либо становится разрывной и выражение (5.4) уже неприменимо. В области быстрого изменения огибающих (амплитуды или фазы) необходимо учитывать дисперсионные эффекты и процесс описывается уравнениями (6.15). Из их решения следует, что в кольцевой активной системе возможны автоколебания в виде периодически модулированных бегущих волн, форма модуляции которых зависит от соотношения между дисперсией и нелинейностью уже в уравнениях для огибающих [84].

Кусочно-однородные системы. Исследование волновых процессов в резонаторах, лишь частично заполненных нелинейной средой (подобные задачи часто возникают в нелинейной оптике [96, 116], теории ОКГ [136, 137] и т. д.), в общем случае является существенно более сложной задачей, чем рассмотрение однородных систем. При взаимодействии встречных волн сравнительно полную информацию о нестационарных процессах удастся получить только в случае, когда структуру их поля можно считать фиксированной. В частности, для пространственно-однородных решений ограниченность активной среды приводит к дополнительной связи между амплитудами встречных волн. Некоторые возникающие при этом эффекты аналогичны тем, которые имеются в активных системах с периодической пространственной структурой. Среди них отметим возможность периодической во времени перекачки энергии из одной волны в другую [51, 139], устойчивость режима одновременной генерации двух и более волн, имеющих близкие частоты [139, 160], и ряд других.

При отсутствии одной из встречных волн в кольцевом резонаторе с кусочно-однородным заполнением оказывается возможным провести анализ нестационарных процессов в более общем случае. Это связано с тем, что для бегущей волны от исходной системы усредненных уравнений в частных производных можно перейти к одному нелинейному разностному, а для систем с релаксацией нелинейности, обычно, — к дифференциально-разностному уравнению [137, 138].

Например, для системы с релаксацией нелинейности из уравнений (3.2), (3.5) можно для бегущей волны получить связь между интенсивностью поля на входе и выходе нелинейной активной среды. Воспользовавшись затем этой связью и определив коэффициент передачи линей-

* Это выражение отличается от (3.3) только тем, что вместо граничных условий заданы начальные ((5.4) записано для безразмерного m , см. (4.15)).

ных элементов резонатора, получим, учитывая условия пространственной периодичности, дифференциально-разностное нелинейное уравнение относительно поля на границе активной среды $x = l$ [138]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right) \left\{ \Psi[m_1(t)] - \Psi\left[rm_1\left(t - \frac{L}{v}\right)\right] \right\} + m_1(t) - rm_1\left(t - \frac{L}{v}\right) = \frac{N_0 l}{T_1 v},$$

$$\Psi(m) = \int \frac{dm}{f(m)}, \quad (5.5)$$

где $m_1 = m(t, l)$, $f(m)N$ — правая часть (3.5), l — длина активной среды, r — коэффициент, характеризующий затухание в линейных элементах резонатора*. Режиму стационарной генерации соответствует состояние равновесия (5.5) $m_1(t) = m_1(t - L/v) = \text{const}$, устойчивость которого определяется из линеаризованной задачи. В общем случае определить форму нелинейного переходного процесса, описываемого уравнением (5.5), затруднительно. Если, однако, начальные условия $m = m(0, x)$ заданы в такой области m , где удастся найти приближенное решение (5.5) (например, при достаточно малых m), то функцию $m(0, x)$ можно однозначно связать с решением в любой другой области m , также допускающей приближенное решение (5.5)** (в частности, при достаточно больших m , когда нелинейность достигла насыщения). Таким образом, во многих случаях удастся выразить решение при достаточно больших полях через начальные условия. Например, для оптического генератора ($f = Bm$, $N > 0$, $r < 1$, $\Psi[m] = \ln m$) из анализа (5.5) непосредственно следует устойчивость стационарного режима бегущей волны $m^0 = (BNl + v \ln r)/[v(1 - r)BT_1]$.

Используя указанный подход, можно показать, что в резонаторе с активным веществом и просветляющимся фильтром возможен нелинейный режим усиления, при котором практически не искажается начальная форма усиливаемых импульсов [138]; такой подход позволяет также рассмотреть режим синхронизации мод в генераторе [135], исследовать систему с модулированной добротностью и ряд других нелинейных ку-сочно-однородных кольцевых систем.

2. Вынужденные колебания

Воздействие внешней силы на распределенную систему может осуществляться двояким образом — либо через заданное во всех точках резонатора внешнее поле (распределенное возбуждение; при этом исходные уравнения (1.1) становятся неоднородными), либо волной, падающей на границу резонатора извне (сосредоточенное возбуждение; при этом неоднородны краевые условия). Соответствующие задачи исследовались как для автоколебательных, так и для пассивных нелинейных систем; для последних вынужденные колебания представляют основной интерес, поскольку собственные затухают. Отметим сравнительно простой класс задач, в которых структуру возбуждаемого в резонаторе поля можно считать заданной. Для решения таких задач во многих случаях естественен модовый подход (он, в частности, обычно используется в задачах о захватывании автогенератора).

Внешнее воздействие на автогенератор. При воздействии на кольцевую автоколебательную систему монохроматического пространственно-однородного внешнего поля с частотой, близкой к одной из соб-

* Потери в нелинейной среде здесь пренебрегаем

** Этот факт связан с тем, что решение (5.5) зависит лишь от одной произвольной периодической функции.

ственных частот нелинейного резонатора, помимо эффектов, аналогичных захватыванию частоты в сосредоточенных системах [8, 10] и перестройки частоты автогенератора с одной моды на другую, возможны специфические эффекты, связанные с захватыванием пространственной структуры поля (например, в резонаторе, в зависимости от характера внешнего поля, возможно установление режима стоячих волн или бегущей волны, распространяющейся в ту или другую сторону) [109].

При сосредоточенном воздействии на автогенератор, если длина резонатора достаточно велика, структуру поля уже нельзя считать фиксированной, и сравнительно просто здесь исследуются лишь стационарные процессы. Характер распределения поля вдоль резонатора в этом случае находится по существу так же, как и в автономной системе (см. рис. 16), только граничные условия на плоскости m_1, m_2 будут представлены уже не прямой, а некоторой неоднозначной кривой (в простейшем случае — эллипсом или параболой) [109].

Нелинейный резонанс в распределенной системе. Рассмотрим, например, резонатор, заполненный непоглощающей средой с кубической нелинейностью. В стационарном режиме, согласно (4.13), амплитуды встречных волн $A_{\pm}$ постоянны вдоль резонатора, а волновые числа равны

$$k_{\pm} = k_0 + \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial x} = k_0 [1 + \alpha (m_{\pm} + 2m_{\mp})]. \quad (5.6)$$

Для резонатора длины L с идеально отражающими стенками граничные условия записываются в виде $kL = n\pi$, $A^+ = \pm A^-$ и собственные частоты равны $\omega_n = (n\pi/L) v_{\phi} (1 - 3\alpha m)^*$. Если система обладает дисперсией, то v_{ϕ} и α зависят от ω , и это выражение определяет частоты лишь неявно. Однако при $n \gg 1$ большое число собственных частот может лежать в относительно узком спектральном интервале $\Delta\omega \ll \omega$, внутри которого дисперсией можно пренебречь; тогда v_{ϕ} и α постоянны и спектр собственных частот на этом интервале эквидистантен.

Рассмотрим вынужденные колебания в резонаторе с коэффициентами отражения на границах, близкими к 1. Если на границу такого резонатора падает волна амплитуды $A_{\text{пад}}$, то амплитуда поля внутри резонатора дается выражением

$$\left(\frac{A}{A_{\text{пад}}} \right)^2 = \left[s^2 + \left(3n\pi \alpha A^2 + \frac{\Delta L}{v_{\phi}} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (5.7)$$

где $s = (1 - |r|)/2 \ll 1$, Δ — расстройка частоты падающей волны относительно n -го линейного резонанса ($\omega = n\pi v_{\phi}/L + \Delta$). При фиксированном n (5.7) совпадает с резонансной кривой нелинейного осциллятора [9, 10, 123] (рис. 18). Максимальные амплитуды $A_{\text{max}} = A_{\text{пад}}/s$ одинаковы для всех n , однако сдвиг максимума от линейного резонанса растет с ростом n : $\Delta(A_{\text{max}}) = -(n\pi v_{\phi}/n) (3\alpha A_{\text{пад}}^2/s^2)$. При $n \gg 1$ помимо имевшейся неоднозначности, связанной с гистерезисным характером резонансной кривой, в распределенной системе возникает еще неоднозначность, связанная с перекрытием кривых, отвечающих различным n , и число возможных равновесных значений амплитуды для данного ω увеличивается (см. рис. 18).

Заметим, что, как и для сосредоточенной системы, неоднозначные резонансные кривые содержат неустойчивые ветви — в данном случае это означает неустойчивость по отношению к возмущениям той же пространственной структуры, что и исходное стационарное колебание. Од-

* Уже в этом случае структура поля (точнее, число длин волн в резонаторе) зависит от его амплитуды и не может считаться заданной, хотя однородность A и k в пространстве и здесь существенно упрощает задачу.

нако в распределенной системе устойчивые в этом смысле стационарные режимы могут быть неустойчивы по отношению к другим возмущениям, например, связанным с эффектом самомодуляции. В системе, где стационарный режим близок к стоячей волне, возмущения огибающих имеют дискретный спектр ($m \ll n$). Данному K_m , согласно (39), соответствует комплексная частота $\Omega_m = \nu K_m [1 \pm ((\nu K_m / 2\omega_n)^2 + \rho A^2)^{1/2}]$. Из этого выражения видно, что неустойчивость стоячей волны возникает при $\rho < 0$ и лишь в достаточно длинном резонаторе, когда $L > L_{кр} = \pi \nu / 2\omega_n \sqrt{\rho A^2}$ [72]. Эффекты, связанные с такой неустойчивостью, наблюдались экспериментально в нелинейных линиях передачи [65].

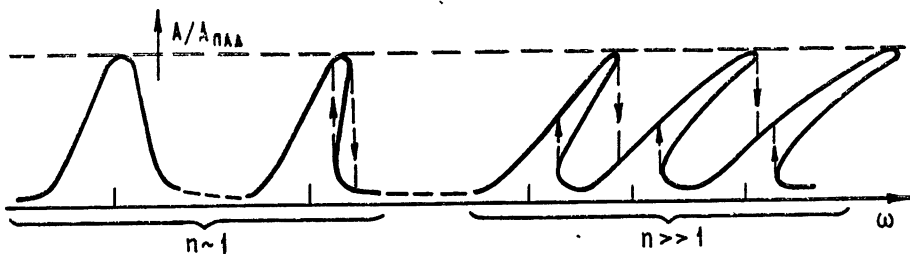


Рис. 18. Зависимость амплитуды колебаний в нелинейном резонаторе от частоты падающей волны.

Удвоение частоты в резонаторе. Если в среде, заполняющей резонатор, выполнены условия синхронизма для волн нескольких частот, одна из которых равна частоте падающей волны, то многократное перетраживание волн в резонаторе в известной степени эквивалентно увеличению длины синхронного взаимодействия. Подобные задачи, как правило, имеют простое решение только в приближении заданного поля, когда возникающие волны невелики. В общем же случае, даже для бегущих волн, аналитическому рассмотрению поддаются лишь отдельные задачи. Одно из таких решений — (4.5) относится к взаимодействию волн с частотами ω и 2ω при точном синхронизме и $\Phi = \pm \pi/2$. Им можно воспользоваться для анализа процесса в резонаторе.

Пусть в резонаторе длины L имеется резонанс на частоте 2ω , т. е. $r_{0,L}(2\omega) \leq 1$, а $r_{0,L}(\omega) \simeq 0$ (такой случай реализуется в нелинейной оптике [17]). Если падающей является волна $A(\omega) = A_{10}$, то для амплитуд полей в коротком резонаторе ($\sigma A_{10}L/v \ll 1$) получаются следующие выражения [17]:

$$A_1^+(x) \simeq A_{10}, \quad A_1^-(x) = 0, \quad A_2^+(x) \simeq A_2^-(x) = -\frac{\sigma A_{10}^2 L}{v(1 - r_{0rL})} \quad (0 < x < L) \quad (5.8a)$$

($A_{1,2}^+$ и $A_{1,2}^-$ — амплитуды встречных волн на частотах ω и 2ω). Для длинного резонатора ($\sigma v^{-1} A_{10} L \gg 1$)

$$\begin{aligned} A_1^+(L) &\simeq \frac{2A_{10}}{1 - r_{0rL}} \exp(-\sigma A_{10}L/v), \quad A_2^+(0) \simeq A_2^-(0) = \\ &= A_{10} [2(1 - r_{0rL})]^{-1/2} \quad (r_{0,L} = r_{0,L}(2\omega)). \end{aligned} \quad (5.8б)$$

В первом случае $A_2^\pm \ll A_1^+$ и колебания на частоте 2ω могут быть найдены в приближении заданного поля. Во втором $A_{20} \gg A_{10}$, и энергия накачки почти полностью переходит к волне A_2^+ уже за один пробег в резонаторе. При обычном резонансе ($kL = n\pi$) изменение $A_2^\pm$ вдоль резонатора невелико (рис. 19 а), однако при $kL = (n + 1/2)\pi$ реализуется

режим с изменением знака A_2^+ внутри резонатора (рис. 19 б) (для бегущих волн такой режим рассматривался в [97]).

Если коэффициенты отражения $r_{0,L}$ близки к 1 на обеих частотах, то эффективность преобразования в коротком резонаторе может существенно возрасти за счет увеличения амплитуды A_1 . Это справедливо, однако, лишь при $r_{0,L} = 1$, если же $r_{0,L} = -1$, т. е. фаза поля на границах меняется на π , то встречные волны частоты ω возбуждают гармонику в противофазе, и наличие резонанса на ω лишь ослабляет эффект.

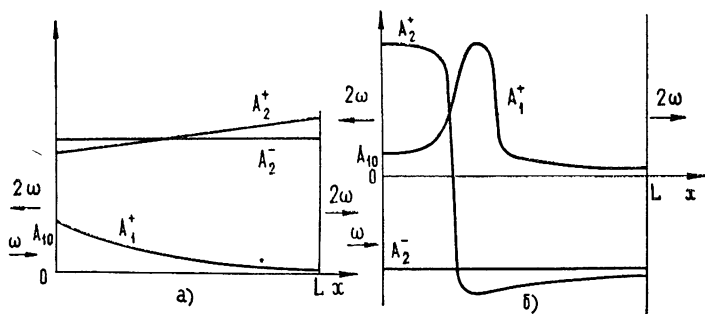


Рис. 19. Распределение поля на частотах ω и 2ω при удвоении частоты в резонаторе с $\sigma A_{10}L/v \gg 1$:

а) $kL = n\pi$, б) $kL = (n+1/2)\pi$ ($A_1 = A(\omega)$, $A_2^\pm = A^\pm(2\omega)$).

Заметим, что рассмотренные режимы не исчерпывают всех возможных стационарных состояний—в достаточно длинном резонаторе возможны еще стационарные процессы, в которых $\Phi = \varphi_1 - 2\varphi_2$ зависит от координаты, хотя в них переход энергии во вторую гармонику менее эффективен.

3. Параметрическая генерация и усиление

Рассмотрим другой тип синхронных взаимодействий в резонаторе, когда вынужденные монохроматические колебания оказываются неустойчивыми по отношению к возмущениям на других, в том числе более низких частотах. При реактивной нелинейности эта неустойчивость связана с параметрическим возбуждением волн. Простейший пример—генерация субгармоники, когда на резонатор падает волна с амплитудой A_{20} и частотой 2ω (волна накачки). При точном синхронизме волн ω и 2ω этот процесс (как и удвоение частоты) может быть рассмотрен на основе решения (45). Если границы резонатора прозрачны для падающей волны ($r(2\omega) = 0$), но $r_{0,L}(\omega) \simeq 1$, то в коротком резонаторе ($\sigma A_1 L/v \ll 1$) неустойчивость волны 2ω по отношению к возмущениям на частоте ω возникает при $\sigma L A_{20}/v > (1 - r_0 r_L)$. В этом случае возможно установление двухчастотного процесса, и для амплитуды волн на частотах ω и 2ω имеем [140]

$$(A_1^+)^2 \simeq (A_1^-)^2 = \frac{v}{\sigma L} \left(A_{20} - v \frac{1 - r_0 r_L}{\sigma L} \right), \quad A_2^+ \simeq A_{20} - [A_{20} - A_2^+(L)] \frac{x}{L},$$

$$A_2^+(L) = (1 - r_L r_0) v / \sigma L, \quad A_2^- = [A_{20} - A_2^+(L)] (1 - x/L). \quad (5.9)$$

Характерно, что, несмотря на отсутствие отражений на частоте 2ω , за счет удвоения частоты волны A_1^- появляется волна A_2^- . При $r_0 r_L \rightarrow 1$ $A_2^+(L) = 0$, а $A_2^+(x) = A_2^-(x)$. Наличие резонанса на частоте накачки увеличивает эффект при $r_{0,L} \rightarrow 1$ и ослабляет при $r_{0,L} \rightarrow -1$.

Анализ нелинейных переходных процессов в параметрическом генераторе, связанный с решением уравнений (4.3) последовательно после каждого прохода резонатора, довольно сложен и чаще всего доступен лишь вычислительной машине^[97]. При квадратичной нелинейности процесс установления приводит к стационарному режиму вида (5.9). Заметим, что ограничение амплитуды субгармоники, как и в параметронах с сосредоточенными параметрами, может происходить различным образом. В частности, при наличии в системе кубичной нелинейности работает механизм, аналогичный расстройному^[141]—с ростом амплитуды изменяется скорость субгармоники и она выходит из синхронизма с основной волной^[17, 143].

Если условия самовозбуждения на частоте ω не выполнены, но, помимо накачки на границу системы падает слабая волна (сигнал) на частоте ω , то сигнал усиливается. Наиболее простой случай—усиление бегущих волн, когда отражениями на обеих частотах можно пренебречь, и процесс описывается выражениями (4.5) при соответствующих граничных условиях.

Аналогичное, хотя и более сложное рассмотрение может быть проведено для невырожденных усилителей и генераторов, когда взаимодействующие волны связаны соотношениями (4.2). Невырожденные параметрические усилители бегущей волны рассматривались в связи с разнообразными радиофизическими проблемами^[102, 142], а распределенные параметрические генераторы в последние годы подробно исследуются в нелинейной оптике. Их особенности описаны, например, в обзоре^[114].

4. Многочастотные процессы в резонаторе

Для систем с эквидистантным спектром наиболее характерным процессом является взаимодействие большого числа волн. Если при этом фазы волн связаны между собой (синхронизация фаз), то изменение поля носит импульсный характер. В случае, когда частоты всех волн лежат в узком интервале ($\Delta\omega \ll \omega$), то поле образует волновой пакет (такие задачи рассматривались выше)*. Если же спектр широк, т. е. эквидистантны частоты с номерами от $n \sim 1$ до $n \gg 1$, то при синхронизированных фазах в резонаторе устанавливается существенно несинусоидальный процесс (такая ситуация, очевидно, характерна для систем со слабой дисперсией). Подобный процесс в системе с реактивной нелинейностью приводит к тому, что падающая волна с частотой $\omega \simeq \omega_n$ возбуждает в резонаторе импульсное поле, форма которого может быть близка к стационарным солитонам, рассмотренным в разд. 2 (рис. 20)^[144, 161]. Такие процессы (параметрическая генерация

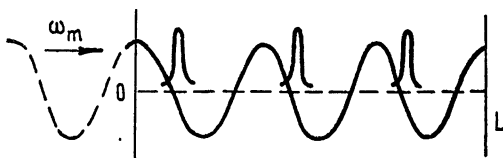


Рис. 20. Стационарная форма импульсов, возбуждаемых синусоидальной волной в резонаторе с эквидистантным спектром.

Если в спектре резонатора можно выделить узкие группы эквидистантных частот, связанные резонансными условиями (например, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$), то возникает задача о взаимодействии волновых пакетов в резонаторе^[155]

импульсов*) исследовались экспериментально для радиоволн в нелинейных линиях [144].

Следует отметить, что при достаточно сильной зависимости собственных частот нелинейного резонатора от амплитуд поля (ср. (5.7)), синхронизация фаз взаимодействующих волн может нарушаться, если изменение частоты данного колебания из-за нелинейности превышает расстояние между соседними собственными частотами резонатора. При этом возможны также случаи, когда малые изменения фазы одной из волн ведут к сильному изменению фаз других. В результате в реальном процессе будут возбуждаться колебания со случайными фазами и для их описания необходимо использовать статистические методы [145].

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Асимптотический метод для распределенных систем

Приведем здесь метод получения приближенных уравнений в частных производных, описывающих взаимодействие квазигармонических волн в слабонелинейных системах с дисперсией [146, 147]. Различные варианты таких уравнений используются при решении многих конкретных задач [17, 61, 82, 148, 149], однако их вывод обычно связывается с определенными особенностями рассматриваемых физических систем. Данный подход (имеющий много общего с методом усреднения по двум переменным [103, 108]) аналогичен известному асимптотическому методу Боголюбова для сосредоточенных систем [9] и является достаточно общим.

Обычно уравнения типа (1.1), описывающие поля в слабонелинейной среде, можно представить в виде

$$a_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) u_l = \mu f_k^{(1)}(u, u'_x, u'_t, \tau, \chi, x, t) + \mu^2 f_k^{(2)} + \dots$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = \mu t, \quad \chi = \mu x, \quad \mu \ll 1),$$

где функции $f_k^{(i)}$ — полиномы по u, u'_x, u'_t и быстроосциллирующие периодические функции по явно входящим x и t .

При $\mu = 0$ система (6.1) имеет решения в виде бегущих волн

$$u_k \sim \Psi_k^m \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к. с.},$$

где Ψ_k определяются из системы

$$\sum_{l=1}^n (a_k \omega \delta_{kl} - a_{kl} k_m - i b_{kl}) \Psi_l^m = 0,$$

а связь между комплексными частотой ω и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны) определяется дисперсионным уравнением

$$\text{Det} \| a_k \omega \delta_{kl} - a_{kl} k_m - i b_{kl} \| \equiv D(\omega, k) = 0.$$

При $\mu \neq 0$ многоволновое решение — результат взаимодействия квазигармонических волн (волновых пакетов со спектральной шириной

* Название «параметрическая генерация» здесь несколько условно и относится к взаимодействию солитона с накачкой. При «модовом» подходе здесь одновременно реализуются и параметрическое возбуждение и вынужденный процесс генерации гармоник.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{\Delta k}{k} \sim \mu \Big) — ищется в виде$$

$$u_k = \sum_{s=1}^q \left\{ \sum_{m=1}^r \Psi_k^m(\omega_s) A_s^m(\tau, \chi) \exp \{ i [\omega_s t - k_m(\omega_s) x + \varphi_s^m(\tau, \chi)] \} + \text{к. с.} \right\} + \\ + \mu \omega_k^{(1)}(A, \varphi, \tau, \chi, x, t) + \mu^2 \omega_k^{(2)}(A, \varphi, \tau, \chi, x, t) + \dots + \\ + \mu^2 \omega_k^{(n)}(A, \varphi, \tau, \chi, x, t) + \dots,$$
(6.5)

где ω и k удовлетворяют (6.4), а $\omega_k^{(n)}(\dots)$ — периодические функции явно входящих переменных x, t . Заметим, что граничные условия (как и начальные) для взаимодействующих волн пока не ставятся. В этом смысле решение (6.5) полностью равноправно относительно временной и пространственной переменных. В решении (6.5) должны быть учтены все возникающие из-за нелинейности волны, которые находятся в синхронизме с нормальными волнами линейной системы.

Уравнения для новых неизвестных функций A_s^m и φ_s^m будем искать в виде

$$\frac{\partial A_s^m}{\partial t} = \mu F_1^{sm}(A, \varphi, \tau, \chi) + \mu^2 F_2^{sm}(A, \varphi, \tau, \chi) + \dots, \\ \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial t} = \mu \Phi_1^{sm}(A, \varphi, \tau, \chi) + \mu^2 \Phi_2^{sm}(A, \varphi, \tau, \chi) + \dots$$
(6.6)

Здесь F и Φ — неизвестные дифференциальные операторы в частных производных. Искомое решение (6.5) можно определить с любой наперед заданной степенью точности, если найти неизвестные функции $\omega_k^{(n)}$ и раскрыть вид операторов F_n, Φ_n . Уравнения для $\omega_k^{(n)}$ найдем из (6.1), подставив туда (6.5) и (6.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ :

$$a_k \frac{\partial \omega_k^{(1)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) \omega_l^{(1)} = h_k^{(1)}(\tau, \chi, x, t), \\ h_k^{(1)} = - \sum_{s=1}^q \exp(i\omega_s t) \left\{ \sum_{m=1}^r \exp[-i(k_m x - \varphi_s^m)] \left[\left(a_k \Psi_k^m F_1^{sm} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{l=1}^n a_{kl} \Psi_l^m \frac{\partial A_s^m}{\partial \chi} \right) + i A_s^m \left(a_k \Psi_k^m \Phi_1^{sm} + \sum_{l=1}^n a_{kl} \Psi_l^m \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial t} \right) \right] + \text{к. с.} \right\} + \\ + f_k^{(1)}(u^0, \chi, \tau, x, t), \\ \dots \dots \dots \\ a_k \frac{\partial \omega_k^{(n)}}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x} + b_{kl} \right) \omega_l^{(n)} = h_k^{(n)}(\tau, \chi, x, t),$$

$$\begin{aligned}
h_k^{(n)} = & -a_k \frac{\partial w_k^{(n-1)}}{\partial \tau} - \sum_{l=1}^n a_{kl} \frac{\partial w_l^{(n-1)}}{\partial \chi} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{n!} f_{k u_l}^{(1)n} w_l^{(n)} + \dots + \\
& + \sum_{l=1}^n f_{k u_l}^{(n-1)'} w_l^{(1)} - a_k \sum_{s=1}^q \exp(i\omega_s t) \sum_{m=1}^r \exp[-i(k_m x - \varphi_s^m)] \Psi_k^m(F_n^{sm} + \\
& + iA_s^m \Phi_n^{sm}) + f_k^{(n)}(u^0, \chi, \tau, x, t), \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь u^0 определяется из (6.5) при $w^{(1)} \equiv 0$. Далее воспользуемся периодичностью правых частей этих уравнений по x и t и представим их в виде ряда

$$\begin{aligned}
h_k(\tau, \chi, x, t) = & \sum_{s=1}^q \left[\sum_{m=1}^r H_k^{sm}(\tau, \chi, \omega, k) \exp(-ik_m x) \right] \exp(i\omega_s t) + \\
& + \sum_{d=1}^{d_0} \left[\sum_{l=1}^{l_0} H_k^{dl}(\tau, \chi, \omega, k) \exp(-ik_l x) \right] \exp(i\omega_d t) + \text{к. с.}
\end{aligned} \quad (6.8)$$

В первую группу здесь выделены слагаемые, соответствующие собственным волнам системы, для которых

$$D(\omega_s, k_m) = 0, \quad (6.9)$$

во вторую—возникающие из-за нелинейности волны, которые находятся вне синхронизма с первыми; для них—

$$D(\omega_d, k_l) \neq 0. \quad (6.10)$$

Функции H_k^{ab} определяются как коэффициенты Фурье $\left(ab \nearrow \frac{sm}{dl}\right)$

$$H_k^{ab} = \frac{1}{T\Lambda} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_x^{x+\Lambda} h_k(\tau, \chi, x, t) \exp[-i(\omega_a t - k_b x)] dx dt. \quad (6.11)$$

Периодические функции $w(x, t)$ также представляются в виде (6.8)

$$\begin{aligned}
w_k = & \sum_{s=1}^q \left[\sum_{m=1}^r W_k^{sm}(\tau, \chi, \omega, k) \exp(-ik_m x) \right] \exp(i\omega_s t) + \\
& + \sum_{d=1}^{d_0} \left[\sum_{l=1}^{l_0} W_k^{dl}(\tau, \chi, \omega, k) \exp(-ik_l x) \right] \exp(i\omega_d t) + \text{к. с.}
\end{aligned} \quad (6.12)$$

После подстановки (6.8), (6.12) в (6.7) получим, приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения $W_k^{(n)}$. Амплитуды

$W_k^{(1)dl}$, согласно (6.10), ограничены и равны $W_k^{(1)dl} = \sum_{j=1}^n D_{jk} H_j^{(1)dl} / D(\omega_d, k_l) (D_{jk} — \text{минор } D)$. Ограниченные же решения для $W_k^{(1)sm}$, ввиду (6.9), могут существовать, как известно, лишь при выполнении условий ортогональности $\sum_{l=1}^n \zeta_l^m(\omega_s) H_l^{(1)sm} = 0$ ($s = 1, 2, \dots, q$; $m = 1, 2, \dots, r$), где $\zeta_l^m —$

собственные функции сопряженной с (6.3) системы. Непосредственно из этих условий, учитывая (6.7), (6.8), найдем после алгебраических преобразований искомые функционалы F_1 и Φ_1 , позволяющие построить уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} F_1^{sm} &= -v_m \frac{\partial A_s^m}{\partial \chi} + \operatorname{Re} f_{sm}^{(1)}, \quad \Phi_1^{sm} = -v_m \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial \chi} + \frac{1}{A_s^m} \operatorname{Im} f_{sm}^{(1)}, \\ f_{sm}^{(1)} &= (\gamma_m/D_p') \sum_{l=1}^n \zeta_l^m f_l^{(1)sm}, \quad \gamma_m = \text{const}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где

$$f_l^{(1)sm} = \frac{1}{T \Lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\Lambda} f_l^{(1)}(\tau, \chi, u^0, u_x^{0'}, u_t^{0'}, x, t) \exp[-i(\omega_s t - \mathbf{k}_m x + \varphi_s^m)] dx dt,$$

$$a \quad v_m = -\frac{D'_x}{D'_p} = \frac{d\omega}{dk} - \text{групповая скорость } (p=i\omega, x=-ik). \text{ Таким образом,}$$

уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_s^m}{\partial t} + v_m(\omega_s) \frac{\partial A_s^m}{\partial x} &= \mu \operatorname{Re} f_{sm}^{(1)}, \\ \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial t} + v_m(\omega_s) \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial x} &= \frac{\mu}{A_s^m} \operatorname{Im} f_{sm}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Эти уравнения получены в случае, когда при $\mu=0$ ω_s и $\mathbf{k}_m$ — действительны. Если же ω_s или $(\mathbf{k}_m(\omega_s))$ комплексно — $\omega_s = \omega'_s + i\nu_s$ ($\nu_s \ll \omega_s$), то, вводя новую переменную $A_s = A_{\text{ст}} \exp(-\nu_s t)$, получим для нее уравнение, совпадающее с (6.14), в правой части которого появится слагаемое $\nu_s A_s^m$.

Для построения уравнений второго приближения относительно A_s^m и φ_s^m необходимо определить функции $W_k^{(1)sm}$. Воспользовавшись (6.7), (6.13), найдем

$$\begin{aligned} W_k^{(1)sm} &= \exp(i\varphi_s^m) [\Psi'_{k_x} - v_m(\omega_s) \Psi'_{k_p}] \left(\frac{\partial A_s^m}{\partial \chi} + iA_s^m \frac{\partial \varphi_s^m}{\partial \chi} \right) + \frac{1}{D'_p} \times \\ &\times \sum_{l=1}^n \left[D'_{lk_p} f_l^{(1)sm} - \frac{\partial}{\partial p} (a_l D_{lk} \Psi_l) f_{sm}^{(1)} \right]. \end{aligned}$$

Из условия ограниченности $W_k^{(2)}$ определяются F_2^{sm} и Φ_2^{sm} , что позволяет найти уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s^m}{\partial t} + v_m(\omega_s) \frac{\partial a_s^m}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \bigg|_{\omega_s, \mathbf{k}_m} \frac{\partial^2 a_s^m}{\partial x^2} &= \mu f_{sm}^{(1)} + \mu^2 f_{sm}^{(2)} + \\ + \frac{\mu^2}{D'_p} \left[\left(\frac{D''_{pp}}{2} + \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f_{sm}^{(1)} + v_m \frac{\partial}{\partial \chi} f_{sm}^{(1)} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial \chi} f_{sm}^{(1)} \right]_{\omega_s, \mathbf{k}_m} &+ (6.15) \\ + \mu^2 \{ [f_u^{(1)'} w^{(1)}]_{sm} + [f_{u_x}^{(1)'} (u_x^{0'} + w_x^{(1)'})]_{sm} + [f_{u_t}^{(1)'} (u_t^{0'} + w_t^{(1)'})]_{sm} \} \end{aligned}$$

$$\left(\rho = \gamma_m \sum_{l=1}^n \zeta_l \left[a_l (2 \Psi'_{l_p} v_m - \Psi'_{l_x}) - \sum_{q=1}^n a_{lq} \Psi'_{q_p} \right] \right).$$

Здесь $a = A e^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда волны,

$$\begin{aligned} [f_{u_x}^{(1)'} (u_x^{0'} + w_x^{(1)'})]_{sm} &= \frac{\gamma_m}{T \Lambda D_p} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\Lambda} \sum_{k=1}^n \zeta_k^m \sum_{l=1}^n f_k^{(1)'} \times \\ &\times \left(\frac{\partial w_l^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_l^0}{\partial \chi} \right) \exp [-i(\omega_s t - k_m x + \varphi_s^m)] dx dx, \end{aligned}$$

$[f_u^{(1)'} w^{(1)}]_{sm}$ и $[f_t^{(1)'} (u_t^{0'} + w_t^{(1)'})]_{sm}$ определяются аналогично.

В (6.15) помимо $v_m = \frac{d\omega}{dk}$ входит еще один параметр, характеризующий дисперсию в системе $-\frac{d^2\omega}{dk^2} = \bar{\kappa}$. Если в данной спектральной

области $\bar{\kappa} = 0$, то уравнения второго приближения, как и первого, оказываются гиперболическими и отличаются от (6.14) слагаемыми вида

$f(a) \frac{\partial a}{\partial \chi}$, $f(a) \frac{\partial a}{\partial \tau}$. Другой весьма важный для приложений случай, когда

$\bar{\kappa} \neq 0$, а $f_k^{(1)} = 0$, $f_k^{(2)} \neq 0$. Он соответствует рассмотрению широких, по

сравнению с нелинейностью волновых пакетов $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{\Delta k}{k} \sim \mu$, а нелинейность $\sim \mu^2$). При этом (6.15) отличаются по виду от уравнений первого

приближения лишь наличием параболического члена. Заметим, что если в левой части искомых уравнений (6.6) писать производные по координате, а не по времени, то (6.15) запишется в другой эквивалентной форме, где вместо $\bar{\kappa} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ стоит $\frac{d^2 k}{d\omega^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$.

Уравнения более высоких приближений строятся аналогично (6.15).

2. Вариационный принцип в усредненной форме

В средах с сильной нелинейностью (или слабой дисперсией) форма стационарных волн далека от синусоидальной. Одним из важных классов решений в этом случае являются модулированные волны, локально близкие к периодическим стационарным. Для них трудно развить столь же общую методику приближенного анализа, как для квазигармонических волн, однако отдельные методы, позволяющие исследовать деформацию огибающих квазистационарных волн, уже существуют [87-90, 92, 93]. Опишем здесь один из них, пригодный в настоящей форме для анализа консервативных систем и обладающий, по-видимому, наибольшей физической наглядностью. Этот метод [87-89] основан на описании волны с помощью плотности лагранжевой функции $L(u, u'_x, u'_\tau, \chi, \tau)$, где $\chi = \mu x$, $\tau = \mu t$ — явная зависимость от χ, τ , появляющаяся для слабонеоднородных или слабонестационарных сред. Уравнения движения получаются, как обычно, варьированием действия $S = \int \int L dx dt$. Для квазипериодической волны интегрирование в S можно проводить на достаточно большом по сравнению с периодом волны интервале. При этом

результат мало изменяется, если заменить L на среднее за период значение $\bar{L}$, что существенно упрощает задачу.

Как отмечалось в разд 2, стационарная периодическая волна имеет вид $u_i = f_i(\Theta, C_i)$, где C_i — константы, а $\Theta = \omega t - kx$ — фаза волны*. Квазистационарные решения можно искать в том же виде, но все C_i , а также локальную частоту $\omega = \Theta_t$ и волновое число $k = -\Theta_x$ следует считать функциями медленных переменных χ, τ . Локальные период и длина волны определяются изменением Θ на постоянную величину, которую без ограничения общности можно положить равной 2π .

В первом приближении в L можно не учитывать производных медленных величин, т. е. $L = L(f_i, \omega'_{i\theta}, -kf'_{i\theta}, \chi, \tau)$, и, усредняя по Θ , получим $\bar{L} = \bar{L}_i(C_i, \omega, k, \chi, \tau)$. Рассматривая теперь C_i и Θ как новые переменные и варьируя действие по этим переменным, получим

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial C_i} = 0; \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial \bar{L}}{\partial k} = 0. \quad (6.17)$$

Эта система становится полной, если к ней добавить уравнение, связывающее ω и k :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \chi} + \frac{\partial k}{\partial \tau} = 0. \quad (6.18)$$

Таким образом, получаем систему второго порядка, дополненную алгебраическими соотношениями (6.16) (которые эквивалентны нелинейному дисперсионному уравнению $k = k(\omega, C_i, \chi, \tau)$). Эта система и является исходной для решения соответствующих задач.

Заметим, что на основе данного подхода можно развить метод последовательных приближений, уточняющий полученные уравнения. Для этого в $\bar{L}$ нужно учесть производные от C_i , что приведет к добавлению в (6.16) членов со вторыми производными C_i по χ и τ . Тогда, если нелинейность мала, (6.16) сводится к параболическому уравнению справедливому, в частности, при слабой дисперсии [90]. Кроме того, добавляются уравнения для поправок к u , связанных с осциллирующей частью L .

Аналогичным образом можно описывать и процесс с несколькими периодами (несколькими Θ_s) и, в частности, получить уравнения, описывающие взаимодействие квазистационарных волн [89].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
3. D. J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long solitary waves, Phil. Mag. 39, 422 (1895).
4. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Л. Н. Сренгенский, Теория волновых движений, жидкости, ОНТИ, М.—Л., 1936.
6. А. И. Некрасов, Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, изд. АН СССР, М., 1951.

В [87] рассматривается несколько более общий вид функции u .

7. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1959.
8. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, 4, изд. АН СССР, М., 1947.
9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, М., 1958.
10. Т. Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, изд. Мир, М., 1968.
11. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
13. Y. R. Shen, Electrostriction, optical Kerr-effect and selffocusing of laser beams Phys. Lett., 20, № 4, 378 (1966).
14. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Теория ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. Наука, М., 1966.
15. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах (лекции), Новосибирск, 1968.
16. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Ударные электромагнитные волны, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1376 (1967).
17. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. Наука, М., 1964.
18. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
19. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде, УФН, 93, № 1, 19 (1967).
20. N. Bloembergen, The stimulated Raman effect, Amer. J. Phys., 35, 989 (1967) (перевод см. УФН, 97, № 2, 307 (1969)).
21. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Самовоздействие электромагнитных волн в кубических изотропных средах, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
22. П. К. Крюков, В. С. Летохов, Распространение импульсов света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде, УФН, 99, № 2, 171 (1969).
23. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1966.
24. Л. К. Зарембо, В. Н. Красильников, Введение в нелинейную акустику, изд. Наука, М., 1966.
25. A discussion on nonlinear theory of wave propagation in dispersive systems (organized by M. J. Lighthill), Proc. Roy. Soc., A 249, № 1456 (1967).
26. Теория поверхностных волн (сб. переводов), ИЛ, М., 1959.
27. W. H. Munk, The solitary wave theory and its applications to surface problems, N. Y. Acad. Sci. Ann., 51, № 3, 376 (1949) (перевод в сб. Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоа, ИЛ, М., 1951).
28. J. B. Keller, The solitary wave and periodic waves in shallow water, Comm. Pure Appl. Math., 1, 328 (1948).
29. G. D. Crapper, An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude, J. Fluid Mech., 2, 232 (1957).
30. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Нелинейные колебания разреженной плазмы (1), Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
31. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, Вопросы теории плазмы, Атомиздат, вып. 4, 20 (1964).
32. Ю. Ф. Филиппов, К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 2, 292 (1965).
33. С. М. Файнштейн, Нелинейные волны в системе поток — плазма, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1110 (1967).
34. Т. З. Сохов, Л. Н. Гутман, О мезометеорологических уединенных волнах, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 3, 271 (1968).
35. В. Ц. Гурович, В. И. Карпман, К динамике электровзрывных волн в жидкости и плазме, ЖЭТФ, 56, № 6, 1952 (1969).
36. A. Jeffrey, T. Taniuti, Propagation of nonlinear waves, Academic Press, N. Y., 1964.
37. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, ГИФМЛ, М., 1962.
38. Э. Андерсон, Ударные волны в магнитной гидродинамике, Атомиздат, М., 1968.
39. Р. В. Половин, Нелинейные магнитогидродинамические волны, Дифференциальные уравнения, 1, № 4, 499 (1965).
40. Р. З. Сагдеев, О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, ЖТФ, 31, 1955 (1961).
41. С. М. Файнштейн, О стационарных волнах в плазме с электрическим полем, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1300 (1968).

42. A. M. Belyantsev, Yu. K. Bogaturov, A. V. Gaponov, E. Ya. Daume, L. A. Ostrovskii, L. I. Solovieva, G. I. Freidman, *Electromagnetic waves in transmission lines with nonlinear parameters*, URSI, Proc. of XIV General Assembly, XIII-6, 1963, p. 251.
43. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1963.
44. М. И. Рабинович, Об автоколебаниях в кольцевой линии с распределенными нелинейными параметрами, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 8, № 4, 795 (1965).
45. A. V. Gaponov, L. A. Ostrovskii, M. I. Rabinovich, *Electromagnetic waves in nonlinear transmission lines with active parameters*, *Electromagnetic wave theory*, ed. J. Biorn, Pergamon Press, 1967, p. 587.
46. М. И. Рабинович, О влиянии дисперсии на характер автоколебаний в нелинейной активной линии, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 9, № 1, 173 (1966).
47. М. И. Рабинович, Автоколебания в линии передачи с туннельными диодами, *Радиотехника и электроника*, 11, № 8, 1467 (1966).
48. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Исследование автоколебаний в активной кольцевой линии, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 10, № 1, 128 (1967).
49. С. М. Файнштейн, Об установившихся колебаниях в системе поток — плазма, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 11, № 6, 834 (1968).
50. С. М. Файнштейн, О стационарных ионно-звуковых волнах в системе поток — плазма, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 12, № 4, 547 (1969).
51. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Об устойчивости режима встречных волн в кольцевом газовом лазере, *ЖЭТФ*, 52, № 6, 1616 (1967).
52. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Конкуренция двух типов колебаний в оптическом квантовом генераторе бегущей волны, *Оптика и спектроскопия*, 21, № 3, 386 (1965).
53. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Режимы излучения газового лазера с кольцевым резонатором, *ДАН СССР*, 180, № 1, 56 (1968).
54. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, О волновых процессах в линиях с шунтирующим волновым сопротивлением, *Радиотехника и электроника*, 8, № 12, 2005 (1963).
55. Ю. И. Воронцов, Скорость распространения стационарных сигналов в линиях с нелинейным сопротивлением, *Радиотехника и электроника*, 9, № 9, 1709 (1964).
56. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. I, II, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 6, № 5, 973, 985 (1963).
57. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, 15, № 6, 240 (1965).
58. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах, *ЖЭТФ*, 51, № 5 (11), 1556 (1966).
59. Ю. К. Богатырев, К нелинейной теории распределенного усилителя на туннельных диодах, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика* (в печати).
60. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле, *УФН*, 70, № 2, 201 (1960).
61. Л. А. Островский, Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 51, № 4 (10), 1189 (1966).
62. F. de Martini, C. H. Townes, T. K. Gustafson, P. L. Kelley, Self-steepening of light pulses, *Phys. Rev.*, 164, № 2, 312 (1967).
63. Л. А. Островский, О частотном спектре самофокусирующихся световых импульсов, Письма в *ЖЭТФ*, 6, № 8, 807 (1967).
64. F. Shimizu, Frequency broadening in liquids by a short light pulse, *Phys. Rev. Lett.*, 19, № 19, 1097 (1967).
65. Л. А. Островский, Частотная модуляция и расширение спектра оптических импульсов в нелинейных средах, Тр. I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, изд. Наука, Новосибирск, 1969.
66. J. E. Feir, Some results from wave pulse experiments, *Proc. Roy. Soc.*, A 299, 54 (1967).
67. В. М. Овчинников, В. Е. Харчиев, Волны просветления в двухуровневых системах, *ЖЭТФ*, 49, № 1 (7), 315 (1965).
68. В. И. Таланов, Распространение коротких электромагнитных импульсов в активной среде, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 7, № 3, 491 (1964).
69. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, О нелинейных свойствах лазера как усилителя, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 8, № 5, 899 (1965).
70. Я. И. Френкель, *Собрание избранных трудов*, 3, изд. АН СССР, М., 1939.
71. M. J. Lighthill, Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems, *J. Inst. Math. Appl.*, 1, 269 (1965).
72. Л. А. Островский, Нестационарные волновые процессы в нелинейных диспергирующих средах, сб. *Нелинейная оптика*, изд. Наука, Новосибирск, 1956.

73. M. J. Lighthill, Some special cases treated by the Whitham theory, *Proc. Roy. Soc., A* **299**, 28 (1967).
74. Л. А. Островский, О распространении частотно-модулированных сигналов в диспергирующих системах, *Радиотехника и электроника*, **10**, № 7, 1176 (1965).
75. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в нелинейных средах с дисперсией, *ЖТФ*, **33**, № 8, 905 (1963).
76. L. A. Ostrovskii, Propagation of modulated waves in nonlinear dispersive media, *Electromagnetic wave theory*, ed. J. Brown, Pergamon Press, 1967, p. 581.
77. T. Benjamin, Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, *Proc. Roy. Soc., A* **299**, 59 (1967).
78. T. Taniuti, H. Washimi, Self-trapping and instability of hydromagnetic wave along magnetic field in cold plasma, *Phys. Rev. Lett.*, **21**, 209 (1968).
79. В. И. Карпман, О самомодуляции нелинейных плоских волн в диспергирующих средах, *Письма в ЖЭТФ*, **6**, № 8, 829 (1967).
80. Л. А. Островский, Ударные волны огибающих, *ЖЭТФ*, **54**, № 4, 1235 (1968).
81. T. K. Gustafson, J. P. Taran, H. A. Haus, J. R. Lefshitz, P. L. Kelley, Self-modulation, self-steepening and spectral development of light in small-scale trapped Filaments, *Phys. Rev.*, **177**, № 3, 305 (1969).
82. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 4, 539 (1967).
83. В. В. Захаров, О неустойчивости самофокусировки света, *ЖЭТФ*, **53**, 1755 (1967).
84. М. И. Рабинович, О взаимодействии волновых пакетов в активной среде, Аннотации докладов, представленных на IV Всесоюзной конференции по нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1968.
85. Л. И. Загрядская, Л. А. Островский, Наблюдение самовоздействия модулированных волн в нелинейной линии, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **11**, № 6, 948 (1968).
86. L. A. Ostrovskii, The theory of „waves of envelopes“ in nonlinear dispersive media, *URSI Symposium on Electromagnetic waves (selected papers)*, *Alta Frequenza*, **38**, N. Speciale, 4—4, 207, 1967.
87. G. B. Whitham, A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, **22**, part 2, 273 (1955).
88. G. B. Whitham, Non-linear dispersion of water waves, *J. Fluid Mech.*, **27**, part 2, 399 (1967).
89. G. B. Whitham, Variational methods and applications to water waves, *Proc. Roy. Soc., A* **299**, 6 (1967).
90. Е. Н. Пелиновский, Применение принципа Гамильтона в усредненной форме к анализу нелинейных волн, *Дипломная работа*, Госуниверситет, Горький, 1969.
91. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Трансформация волн на поверхности жидкости переменной глубины, *Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана* (в печати).
92. J. C. Luke, A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc., A* **292**, 403 (1966).
93. М. И. Рабинович, О методе усреднения по стационарным волнам, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 2, 214 (1967).
94. P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**, 467 (1968) (перевод см. в сб. *Математика*, **13**: 5, 128 (1965)).
95. Р. В. Хохлов, О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях, *Радиотехника и электроника*, **6**, № 7, 1116 (1961).
96. В. И. Беспалов, В. М. Кубарев, Г. А. Пасманик, Вынужденное рэлееское рассеяние света, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика* (в печати).
97. С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, В. И. Моденов, В. В. Фадеев, К теории параметрической генерации в резонаторе, заполненном нелинейной средой, *Радиотехника и электроника*, **10**, № 12, 2157 (1965).
98. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, О генерировании продольных волн на комбинационных частотах в системе поток — плазма, *ЖЭТФ*, **57**, № 4 (10), 1308 (1969).
99. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, Об автоколебательных процессах в системе поток — плазма; *Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям*, 1969, изд. Наукова думка, Киев (в печати).
100. Б. П. Кирсанов, Нелинейные взаимодействия электромагнитных волн в активной среде и возможность их использования для создания новых типов квантовых генераторов; *Тр. ФИАН*, **43**, 187 (1968).

101. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, К вопросу о резонансном параметрическом взаимодействии сильных полей оптических частот, *ЖЭТФ*, 51, № 11, 1499 (1966).
102. У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963.
103. М. И. Рабинович, О методе усреднения в нелинейной оптике, Тр. I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, изд. Наука, Новосибирск, 1969.
104. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы, *ЖТФ*, 32, 1291 (1962); *ДАН СССР*, 147, 71 (1962).
105. В. Е. Захаров, Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией, *ЖЭТФ*, 51, № 4(10), 1107 (1966).
106. R. H. Enns, I. P. Batra, Saturation and depletion in stimulated light scattering, *Phys. Lett.*, 28A, № 8, 591 (1969).
107. В. Т. Платоненко, Р. В. Хохлов, О механизме работы комбинационного лазера, *ЖЭТФ*, 46, № 2, 555 (1964).
108. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, О применении метода усреднения к исследованию распределенных систем с малой нелинейностью, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 9, № 5, 987 (1966).
109. М. И. Рабинович, Автоколебания распределенных активных систем, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1967.
110. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, Об автоколебаниях в двухпотоковой плазме с кулоновским столкновением частиц; О возбуждении электромагнитных волн в системе поток—плазма с кулоновским трением, *ЖТФ* (в печати).
111. W. E. Lamb, Theory of optical masers, *Phys. Rev.*, 134, 1429 (1964).
112. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике, *ЖЭТФ*, 55, № 4(10), 1430 (1968).
113. М. М. Сушик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, О «пленении» параметрически связанных волн импульсами и пучками излучения накачки, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 12, № 2, 293 (1969).
114. М. М. Сушик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Параметрическое усиление и генерация света, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика* (в печати).
115. Л. А. Островский, О взаимодействии волновых пакетов в нелинейной среде, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 12, № 2, 268 (1969).
116. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Нестационарные процессы при стоковом преобразовании, *Радиотехника и электроника*, 11, № 12, 2226 (1966).
117. C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura, A method for solving of the Korteweg de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095 (1967).
118. Л. А. Островский, Взаимодействие ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 8, № 2, 285 (1965).
119. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, Кинетика нелинейных волн в среде с дисперсией, *ЖЭТФ*, 57, № 4 (10), 1240 (1969).
120. Я. Г. Пановко, И. И. Губанова, Устойчивость и колебания упругих систем, изд. Наука, М., 1964.
121. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, изд. Наука, М., 1964.
122. Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, изд. АН УССР, Киев, 1968.
123. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.
124. Б. И. Мосеенков, Исследование одночастотных колебаний в механических системах, описываемых одномерными краевыми задачами с нелинейными краевыми условиями, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, 1969, изд. Наукова думка, Киев (в печати).
125. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Об усредненных уравнениях лазера и их стационарных решениях, *ЖЭТФ*, 46, № 3, 963 (1964).
126. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Об установившихся колебаниях лазера с распределенными потерями, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 8, № 1, 91 (1965).
127. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, Плоское решение волнового уравнения для слоя с отрицательным коэффициентом поглощения при учете насыщения, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 7, № 4, 682 (1964).
128. Г. С. Коваленко, К теории стационарных колебаний в лазере с учетом эффектов диффузии, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 10, № 2, 197 (1967).
129. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Автоколебания в отрезке нелинейной активной линии, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 10, № 12, 1750 (1967).
130. Е. И. Якубович, Об общих свойствах усредненных поляризуемостей в нелинейной квазиоптике, *ЖЭТФ*, 56, № 2, 676 (1969).

131. Т. И. Кузнецова, О взаимодействии электромагнитных полей с активными средами, Тр. ФИАН, 43, 116 (1968).
132. H. Risken, K. Nummedal, Self-Pulsing in Lasers, J. Appl. Phys., 39, № 10, 4662 (1968).
133. Н. Д. Миловский, Об устойчивости регенеративного ОКУ бегущей волны, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
134. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, Обратное вынужденное манделштам-бриллюэновское и обратное вынужденное энтропийное рассеяние импульсов света, ЖЭТФ (в печати).
135. В. И. Беспалов, Э. Я. Дауме, Предельные параметры сверхкоротких импульсов излучения ОКГ при резонансной модуляции потерь, ЖЭТФ, 55, № 4 (10), 1321 (1968).
136. Т. И. Кузнецова, Сужение световых импульсов в системе с просветляющимся фильтром, Аннотации докладов, представленных на IV Всесоюзной конференции по нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1968.
137. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны с просветляющимся фильтром, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 2, 208 (1969).
138. Г. Л. Гуревич, К теории генераторов бегущей волны оптического диапазона, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
139. В. М. Пасхин, О влиянии неоднородностей на характер нелинейных взаимодействий в одномерной автоколебательной системе, Дипломная работа, Госуниверситет, Горький, 1969.
140. A. E. Siegman, Nonlinear optical effects at an optical power limited, Appl. Optics, 1, № 6, 739 (1962).
141. А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, Параметрические генераторы и делители частоты, изд. Сов. радио, М., 1966.
142. P. K. Tien, H. Suhl, A traveling wave ferromagnetic amplifier, Proc. IRE, 46, № 4 (1958).
143. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, О триггерных свойствах нелинейных волноводных систем, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 4, 742 (1962).
144. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов, Импульсная параметрическая генерация в распределенных системах, Письма в ЖЭТФ, 9, № 5, 274 (1969).
145. Б. В. Чириков, Исследования по нелинейному резонансу и стохастичности, Диссертация, ИЯФ, Новосибирск, 1969, Атомная энергия, 6, 630 (1959).
146. М. И. Рабинович, Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем, ДАН СССР (в печати).
147. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Об асимптотических методах в нелинейной теории колебаний распределенных систем, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, 1969, изд. Наукова думка, Киев, (в печати).
148. T. Taniuti, N. Yajima, A perturbation method for a nonlinear Wave modulation I, J. Math. Phys., 10, № 8, 1369 (1969).
149. В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах, ЖЭТФ, 55, № 2, 530 (1968).
150. G. I. Freidman, A. V. Gaponov, L. A. Ostrovskii, M. I. Rabino-vich, Proc. Roy. Soc., A 312, 395 (1969).
151. Г. М. Заславский, Кинетическое уравнение для газа солитонов, Письма в ЖЭТФ, 9, № 12, 689 (1969).
152. Н. Н. Филоненко, Об эволюции нелинейной периодической волны при наличии резонансных возмущений, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
153. В. С. Захаров, «Диссипативная» неустойчивость световой волны в нелинейных диэлектриках, Письма в ЖЭТФ, 7, № 8, 290 (1968).
154. E. S. Cassedy, The parametric coupling of modes of propagation in nonlinear media, Electromagnetic wave theory, ed. J. Brown, 1967, part 2, p. 543.
155. В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, О самосинхронизации мод в параметрических генераторах света, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1788 (1969).
156. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Спектральные и оптические характеристики гигантских импульсов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 513 (1966).

157. J. Comly, E. Garmire, Second harmonic generation from short pulses, Appl. Phys., 12, № 7 (1968).
158. S. L. Shapiro, Second harmonic generation in LiNbO_3 by picosecond pulses, Appl. Phys. Lett., 13, № 1, 19 (1968).
159. W. H. Glen, Parametric amplification of ultrashort laser pulses, Appl. Phys. Lett., 11, № 11, 333 (1967).
160. С. Г. Зейгер, Влияние продольных размеров активной среды на генерацию аксиальных мод оптических квантовых генераторов, ЖТФ, 38, 68 (1968).
161. W. Chester, J. A. Bones, Resonant interactions of water waves I, II, Proc. Roy. Soc., A 306, № 1484, 5, 23 (1968).
162. Я. И. Ханин, Влияние неоднородности поля резонатора на переходные процессы в квантовом генераторе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 2, 202, (1969).
163. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, К вопросу об умножении частоты на полупроводниках в СВЧ диапазоне, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 4, 611 (1968).
164. А. М. Белянцев, В. Н. Генкин, О линейном приемнике субмиллиметрового диапазона, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 763 (1969).
165. А. М. Белянцев, В. Н. Генкин, В. А. Козлов, В. И. Пискарев, О вкладе непараболичности зоны в нелинейную восприимчивость. In Sb. ~~Письма в~~ ЖЭТФ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 декабря 1969 г.

От редакции. Статья А. В. Гапонова, Л. А. Островского, М. И. Рабиновича «Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией» является первой из серии обзорных статей на актуальные вопросы радиофизики, которые будут опубликованы в нашем журнале в 1970 г.
