

УДК 538.56 : 519.25

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ВОЗМУЩЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс

Разработана методика, позволяющая для решения уравнения Гельмгольца при наличии возмущения в граничном условии применять хорошо известный в квантовой теории поля метод функций Грина. В качестве иллюстрации рассмотрено рассеяние волнового поля на статистически неровной поверхности.

При исследовании широкого круга физических явлений возникает задача о нахождении усредненной функции Грина уравнения Гельмгольца

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0 \quad (1)$$

со смешанными граничными условиями на некоторой поверхности S

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (\mathbf{r} \in S) \quad (2)$$

в случае, когда $\zeta(\mathbf{r})$ является случайной функцией координат. Такое граничное условие появляется, в частности, при некоторых приближениях в задаче рассеяния волн на статистически неровных и неоднородных поверхностях.

Покажем это на примере скалярного волнового поля, удовлетворяющего нулевым граничным условиям Дирихле (абсолютно мягкая поверхность).

Пусть имеется статистически шероховатая поверхность Σ с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_\Sigma = \mathbf{r} + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S), \quad (3)$$

где S — детерминированная (неслучайная) поверхность, $\zeta(\mathbf{r})$ — случайная функция, характеризующая отклонение Σ от S , отсчитываемое по нормали \mathbf{n} к S . Относительно $\zeta(\mathbf{r})$ будем предполагать следующее:

$$\langle \zeta(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad \langle \zeta^2(\mathbf{r}) \rangle = \sigma^2, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_2) \rangle = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение по ансамблю реализаций $\zeta(\mathbf{r})$.

Функция Грина $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ уравнения (1) (поле точечного источника) в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему граничному условию на неровной поверхности Σ :

$$G(\mathbf{R}_\Sigma, \mathbf{R}_0) = 0 \quad (5)$$

(временная зависимость поля описывается множителем $e^{-i\omega t}$, $k = \omega/c$).

Разлагая (5) в ряд по $\zeta(\mathbf{r})$ и ограничиваясь линейным по $\zeta(\mathbf{r})$ членом, получаем эффективное граничное условие на невозмущенной поверхности S :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) + \zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = 0. \quad (6)$$

Дальнейшее изложение относится в равной мере как к случаю, когда $\zeta(\mathbf{r})$ описывает отклонение поверхности Σ от S и (6) справедливо лишь приближенно, так и к случаю, когда граничное условие (6) является точным (например, импедансная поверхность).

С помощью теоремы Грина уравнение для функции Грина уравнения (1) с учетом (6) сводится к следующему интегральному соотношению:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) dS. \quad (7)$$

Здесь $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ — функция Грина уравнения (1) с граничным условием $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) = 0$ на невозмущенной поверхности S , которая предполагается известной; интегрирование производится по поверхности S .

Применяя к (7) метод итераций, для $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ получаем следующий ряд:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) dS + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iint \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_1) \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \zeta(\mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n} G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) dS_1 dS_2. \quad (8)$$

Каждый член этого ряда, являющийся n -кратным интегралом по поверхности и содержащий n функций $\zeta(\mathbf{r}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), представляет, очевидно, поле, пришедшее в точку наблюдения \mathbf{R}_0 в результате n -кратного рассеяния на неоднородностях.

Если функция $\zeta(\mathbf{r})$ такая, что ее нечетные моменты равны нулю, а четные выражаются через вторые (это имеет место для наиболее часто встречающихся гауссовых поверхностей), то ряду для $\langle G \rangle$, получающемуся после усреднения (8) по ансамблю реализаций $\zeta(\mathbf{r})$, можно, по аналогии с [1], сопоставить диаграммы Фейнмана по следующим правилам.

Искомая усредненная функция Грина $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ изображается жирной линией; $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ соответствует тонкая сплошная линия с \mathbf{R} и \mathbf{R}_0 на концах; корреляционная функция $W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ изображается пунктирной линией, концам которой соответствуют точки \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_k ; каждая точка в месте пересечения пунктирной и сплошной линий (вершина графика) изображает умноженный на $1/4\pi$ оператор $\left\langle \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{\partial}{\partial n_k} \right\rangle$,

причем, $\left\langle \frac{\partial}{\partial n_i} \right\rangle$ действует на функции, стоящие слева, а $\left\langle \frac{\partial}{\partial n_k} \right\rangle$ — на функции, стоящие справа. Наконец, по координатам всех внутренних вершин графика производится интегрирование по невозмущенной поверхности S .

Перечисленные правила устанавливают взаимно однозначное соответствие между членами усредненного ряда (1) и их графическим изображением, что позволяет записывать формулы графически:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (9)$$

Можно показать [1], что ряд (9) является рядом итераций уравнения Дайсона:

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \int G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \hat{Q}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) \rangle d^2 r_1 d^2 r_2, \quad (10)$$

где через \hat{Q} обозначен так называемый массовый оператор, заданный в виде следующего бесконечного ряда:

$$\hat{Q} = \text{loop} = \text{arc} + \text{two arcs} + \text{three arcs} + \dots \quad (11)$$

Этот ряд отличается от (9) тем, что в него входят только сильно связанные диаграммы, т. е. такие, которые нельзя разбить на две несвязанные части разрывом одной линии G_0 .

Из (10), полагая $\mathbf{R} = \mathbf{r} \in S$, можно получить нелокальное граничное условие на невозмущенной поверхности для средней функции Грина:

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_0) \rangle = \int M(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_0) \rangle}{\partial n} dS_1, \quad (10a)$$

$$\hat{Q} = \left\langle \frac{\partial}{\partial n} M \frac{\partial}{\partial n} \right\rangle.$$

Важно отметить, что решение интегрального уравнения (10), полученное после оставления в ряде для \hat{Q} конечного числа первых членов (например, одного), является результатом суммирования бесконечной подпоследовательности ряда (9), такой, что ее сумма точно учитывает число всех многократных переотражений, а приближение, сделанное в массовом операторе \hat{Q} , приводит лишь к неточности учета акта однократного рассеяния.

Такой метод вычисления средней функции Грина применяется в квантовой теории поля и в теории рассеяния волн в неоднородных средах. Ряд результатов этой теории удастся переформулировать для случая рассеяния на статистически неровной поверхности. Проиллюстрируем это на простейшем примере, когда невозмущенная поверхность S есть плоскость $z = 0$. (До сих пор мы нигде не конкретизировали вида поверхности S . Единственное предположение заключалось в том, что функция Грина уравнения (1) для нее предполагалась известной.)

В этом случае, если $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависит лишь от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (статистическая однородность), то, так как $G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, \hat{Q} также зависит только от разности радиус-векторов точек на плоскости. С учетом этого обстоятельства, если формально считать вид $\hat{Q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ известным, уравнение (10) можно решить методом фурье-преобразований:

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|} - \frac{\exp(ik|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|} =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int d^2 \mathbf{x} \frac{\exp(i\mathbf{x}\mathbf{r})}{\sqrt{k^2 - x^2}} \left\{ \exp(i\sqrt{k^2 - x^2}|z - z_0|) - \right.$$

$$\left. - \exp[i\sqrt{k^2 - x^2}(z + z_0)] \right\}, \quad (12)$$

$$\mathbf{R} = \{x, y, z\}, \quad \mathbf{R}_1 = \{x, y, -z\}, \quad \mathbf{x} = \{x_x, x_y\},$$

$\{x, y\}$ — декартовы координаты в плоскости $z = 0$. Разложение $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ в интеграл Фурье представим в виде

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = \frac{i}{2\pi} \int d^2\mathbf{x} \frac{\exp(i\mathbf{x}\mathbf{r})}{\sqrt{k^2 - x^2}} \{ \exp(i\sqrt{k^2 - x^2} |z - z_0|) - V(\mathbf{x}) \exp[i\sqrt{k^2 - x^2} (z + z_0)] \}. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что $V(\mathbf{x})$ имеет смысл коэффициента отражения для плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = \{\mathbf{x}, \sqrt{k^2 - x^2}\}$. Именно эта величина и представляет интерес в физических приложениях.

Воспользовавшись формулами (12) и (13), получаем из уравнения (10)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1 - ix_z \int M(\rho) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2\rho}{1 + ix_z \int M(\rho) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2\rho}, \quad x_z = \sqrt{k^2 - x^2}. \quad (14)$$

Таким образом, мы имеем решение поставленной задачи (переход от $V(\mathbf{x})$ к $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ не представляет труда) в виде функционала от массового оператора \hat{Q} . Заменяя его первым членом ряда (11) (так называемое приближение Бурре [4]), получаем

$$V_1(\mathbf{x}) = \frac{1 - (x_z/4\pi^2) \int \sqrt{k^2 - p^2} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) d^2p}{1 + (x_z/4\pi^2) \int \sqrt{k^2 - p^2} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) d^2p}, \quad (15)$$

$$\tilde{W}(\mathbf{q}) = \int W(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^2r.$$

Это решение было получено Бассом [5]. Для оценки пределов его применимости рассмотрим вклад следующих, пропорциональных σ^4 , членов массового оператора в интегралы, входящие в формулу (14). Для этого перейдем предварительно к фурье-преобразованиям по формулам (12), (13). Тогда

$$\int M(\rho) \exp(i\mathbf{x}\rho) d\rho = -\frac{i}{4\pi^2} \int \tilde{W}(\mathbf{q} - \mathbf{x}) \sqrt{k^2 - q^2} d^2q + \left(\frac{-i}{4\pi^2}\right)^3 \iint \sqrt{k^2 - q_1^2} \sqrt{k^2 - q_2^2} \sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2} \times \tilde{W}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \tilde{W}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{x}) d^2q_1 d^2q_2 + \left(\frac{-i}{4\pi^2}\right)^3 \iint \sqrt{k^2 - q_1^2} (k^2 - q_2^2) \times \tilde{W}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \tilde{W}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{x}) d^2q_1 d^2q_2 + \dots \quad (16)$$

Рассмотрим интеграл, стоящий во втором члене правой части (16), причем будем вычислять его, предполагая для простоты, что неоднородности поверхности являются одномерными, т. е. зависящими только от одной пространственной координаты (например, от x). Тогда

$$I_1 = \frac{\sigma^4}{l^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(kl)^2 - (t_1 + t_2 + x_x l)^2} \sqrt{(kl)^2 - (t_1 + x_x l)^2} \times \sqrt{(kl)^2 - (t_2 + x_x l)^2} \tilde{w}(t_1) \tilde{w}(t_2) dt_1 dt_2. \quad (17)$$

Здесь l — корреляционный радиус, являющийся средним характерным размером неровностей, t_1, t_2 — безразмерные переменные интегрирования, $\tilde{w}(t)$ — безразмерная функция, существенно отличная от нуля в интервале $|t| \sim 1$ и $\tilde{w}(0) = 1$.

В случае мелкомасштабных неоднородностей ($kl \ll 1$) величинами kl и $x_x l$ в подкоренных выражениях можно пренебречь, так как они дают заметный вклад в интеграл лишь при $t_i \leq kl$, т. е. в малом по сравнению с существенным отрезком интегрирования интервале вблизи нуля (в этом интервале подынтегральные функции монотонны). Получающийся в результате интеграл оказывается порядка единицы и, следовательно, $I_1 \sim \sigma^4/l^{3*}$. Сравнивая эту величину с соответствующим асимптотическим значением интеграла, входящего в формулу (15) [5], получаем, что в данном предельном случае ($kl \ll 1$) последняя справедлива при

$$\frac{\sigma^2}{l^2} \ll 1. \quad (18)$$

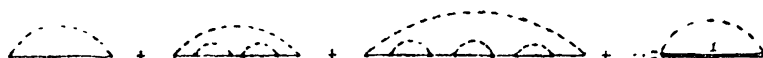
Если неоднородности являются крупномасштабными ($kl \gg 1$) и $x_x/k \ll 1$ (крутое падение), вычисляя I_1 методом Лапласа, получаем, что (15) справедливо при

$$(k\sigma \cos \theta)^2 \ll 1, \quad (19)$$

где θ — угол падения плоской волны. Если $x_x \sim k$ (скользящие волны), методом Лапласа пользоваться нельзя, так как в точках максимумов $\tilde{w}(t)$ подкоренные выражения в (17) обращаются в нуль. В этом случае I_1 легко оценить, сделав замену переменных $t_i = x_x l + p_i$ и отбросив несущественные члены p_i^2 . Неравенство, ограничивающее пределы применимости формулы (15), имеет вид

$$\frac{k\sigma^2}{l} \ll 1. \quad (20)$$

Ясно, что улучшение решения уравнения (10) путем удержания одного или нескольких следующих членов в массовом операторе является малоэффективным. Интересно выделить в \hat{Q} какую-либо бесконечную суммируемую подпоследовательность диаграмм. Одна из возможностей выделения такой подпоследовательности становится очевидной, если заметить, что имеет место следующее равенство:



$$, \quad (21)$$

где $\frac{1}{\dots}$ — решение уравнения (10) в приближении Бурре.

Решая уравнение (10) с массовым оператором в виде (21) методом фурье-преобразования, для коэффициента отражения в этом приближении получаем

$$V_2(x) = \frac{1 - (x_z/4\pi^2) \gamma(x)}{1 + (x_z/4\pi^2) \gamma(x)}; \quad (22)$$

* Второй член в (16), пропорциональный σ^4 , имеет, как легко убедиться, тот же порядок, что и l_1 .

$$\gamma(\mathbf{x}) = \int \frac{\sqrt{k^2 - p^2} \tilde{W}(\mathbf{x} - \mathbf{p})}{1 + (p_z/4\pi^2) \int \sqrt{k^2 - q^2} \tilde{W}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) d^2q} d^2p. \quad (22a)$$

Асимптотики этого выражения в различных предельных случаях вычисляются так же, как это делалось при получении формул (18)–(20).

Для мелкомасштабных неровностей ($kl \ll 1$) имеем

$$\gamma(\mathbf{x}) = \frac{2\sigma^2}{l} \int_0^\infty \frac{x \tilde{w}(x) dx}{1 + (\sigma/l)^2 x(x^2 + 1)}. \quad (23)$$

В другом предельном случае ($kl \gg 1$) при скользящем падении

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{1 + k\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{8e^{i\pi/4} k}{\sqrt{2\pi kl}} \int_0^\infty x^{-1/2} \frac{dW}{dx} dx. \quad (24)$$

При выполнении неравенств (18)–(20) формулы (23), (24), как и следовало ожидать, совпадают с соответствующими асимптотическими значениями (15).

Рассмотрим еще одну возможность приближенного решения уравнения (10), позволяющую просуммировать в массовом операторе гораздо более обширную совокупность диаграмм, чем в (15) и (22).

При использовании диаграммной техники часто рассматривают нелинейное уравнение Дайсона, получающееся из (10) в так называемом приближении простейшего вершинного оператора [2]. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \langle G_3(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle &= G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iint \frac{\partial}{\partial n_1} G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1) \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2} \langle G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \rangle \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial n_2} \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{R}_0) \rangle W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^2r_1 d^2r_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя формулы (12) и (13), из (25) после несложных преобразований получаем интегральное уравнение для коэффициента отражения:

$$\frac{1 - V(\mathbf{x})}{1 + V(\mathbf{x})} = -\frac{x_z}{2\pi} \int d^2pp_z [1 + V(\mathbf{p})] \tilde{W}(\mathbf{p} - \mathbf{x}). \quad (26)$$

В случае крупномасштабных неровностей, когда $\tilde{W}(\mathbf{p} - \mathbf{x})$ — «острая» функция, выражение $[1 + V(\mathbf{p})]$ можно вынести за знак интегрирования в точке $\mathbf{p} = \mathbf{x}$. Это приводит к алгебраическому уравнению для $V(\mathbf{x})$, решение которого есть

$$V_3(\mathbf{x}) = -1 + \frac{1}{2\beta} [1 - \sqrt{1 - 8\beta}], \quad (27)$$

где

$$\beta = \frac{x_z}{2\pi} \int d^2pp_z \tilde{W}(\mathbf{p} - \mathbf{x}).$$

При скользящем падении β имеет вид

$$\beta = \frac{8e^{i\pi/4} k^2 \cos \theta}{\sqrt{2\pi kl}} \int_0^\infty x^{-1/2} \frac{dW}{dx} dx.$$

Искать решение приближенного уравнения (26) для больших углов падения и $kl \gg 1$ не имеет смысла, так как в этом случае существенно упрощается исходный ряд (9). Действительно, вычисляя входящие в (10) интегралы методом Лапласа, получаем

$$\langle G(R, R_0) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)!! (k\sigma)^{2n} \beta_{2n}(R, R_0), \quad (28)$$

где β_{2n} — коэффициенты, не зависящие от σ .

Этот ряд — асимптотический и является, строго говоря, расходящимся. Его можно, однако, просуммировать с помощью следующей формальной процедуры [3].

Учитывая, что $(2n-1)!! = (2^n/\sqrt{\pi}) \Gamma(n+1/2)$, и воспользовавшись интегральным представлением Γ -функции, запишем (28) в виде

$$\langle G(R, R_0) \rangle = \int_0^{\infty} \sqrt{\pi x} e^{-x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}(R, R_0) (2xk^2\sigma^2)^{2n} \right] dx. \quad (29)$$

При этом мы изменили порядок суммирования и интегрирования и тем самым устранили расходимость.

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае ($kl \gg 1$, $x_x/k \ll 1$) решение (15) уравнения (10) с простейшим массовым оператором является как раз результатом суммирования ряда $\beta_{2n}(k\sigma)^{2n}$, т. е. сумма, входящая в (29), есть просто $\langle G_1(R, R_0) \rangle$ (средняя функция Грина в приближении Бурре). Следовательно, для коэффициента отражения можно написать

$$V(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(-q^2/2\sigma^2) V_1(x, q^2),$$

где $V_1(x, q)$ есть (15) с σ^2 , замененным на q^2 . Окончательно получаем

$$V(x) = -1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{x_2\sigma} \exp\left(\frac{1}{2x_2^2\sigma^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2} x_2\sigma}\right) \right], \quad (30)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Асимптотика $\Phi(x)$ при больших x дает для случая $x_2\sigma \ll 1$

$$V(x) = 1 - 2x_2^2\sigma^2 + O(x_2^4\sigma^4) + \dots \quad (31)$$

Первые два члена этого ряда совпадают с выражением для коэффициента отражения от шероховатой плоскости, полученным в работе [5] при $kl \gg 1$ и крутом падении. Содержащиеся в (31) поправки, пропорциональные $(k\sigma \cos \theta)^4$, в случае статически неровной поверхности удерживать не имеет смысла. Это является превышением точности, ибо при получении граничного условия (6) были отброшены члены именно такого порядка. Если же граничное условие (6) является точным, формула (30) справедлива, очевидно, при всех значениях параметра $(x_2\sigma)^2$ (рис. 1).

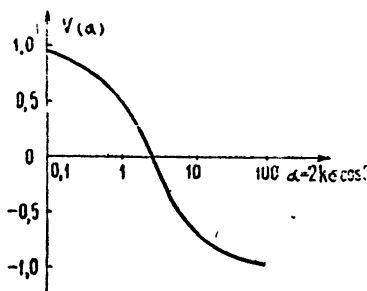


Рис. 1.

Продолжая аналогию с квантовой теорией поля, можно также воспользоваться ее результатами при исследовании корреляционной функции рассеянного поля, которая, как нетрудно показать, удовлетворяет уравнению типа Бете—Солпитера.

Кроме того, применение разложения по корреляционным группам [6] позволяет, очевидно, применить данный метод к случаю, когда $\langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_2) \dots \zeta(\mathbf{r}_n) \rangle$ не выражается через вторые моменты.

Авторы благодарят Ф. Г. Басса за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, М, 1963.
3. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, № 4, 1399 (1964).
4. R. Vietorett, Nuovo Gimento, 26, № 1, 1 (1962).
5. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 476 (1961).
6. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, № 1 (7), 401 (1967).

Институт радиофизики и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
31 мая 1968 г.

GREEN FUNCTION METHOD FOR HELMHOLTZ EQUATION WITH PERTURBED BOUNDARY CONDITIONS

V. D. Freylikher, I. M. Fuks

The method is developed permitting the Green function method well known in the quantum field theory to be used for solving Helmholtz equation in the presence of perturbation in the boundary condition. As illustrations, the scattering of the wave field on a randomly rough surface is considered.