ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 519.217

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДИФФУЗИОННЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

С. Д. Свет

Исследуется задача нелинейной фильтрации диффузионного марковского процесса из аддитивной смеси с шумом. Показано, что применение функционала вероятности марковского процесса позволяет получить оптимальную (в смысле максимума апостериорной вероятности) оценку сигнала в виде стохастического дифференциального уравнения. На одном примере рассмотрена оценка качества фильтрации.

Сведение реального случайного процесса к процессу без последействия и применение аппарата марковских процессов позволяет эффективно решать многие задачи статистической радиотехники и, в частности, задачи нелинейной фильтрации случайных сигналов. В последних обычно предполагается смесь сигнала и шума аддитивной, а процессы описываются соответствующими стохастическими дифференциальными уравнениями.

Ниже рассматривается задача нелинейной фильтрации и диффузионного марковского процесса из аддитивной смеси с шумом. При этом сигнал и шум задаются стохастическими уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt}+f(x,\ t)=g(x,\ t)\,\xi(t), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$—любые заданные дифференцируемые по x и t ограниченные функции, а $\xi(t)$—белый, нормальный шум с $\overline{\xi(t)}=0$, $\overline{\xi^2(t)}=1$.

Одномерный процесс $x(t)$ может задаваться не только (1), но и уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial p(x,\ t)}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{2}\,b(x,\ t)\,p\right]+\frac{\partial}{\partial x}\,[a(x,\ t)\,p]=0. \tag{2}$$

Связь между указанными представлениями устанавливается следующими формулами:

$$\begin{gathered} g(x,\ t)=\sqrt{b(x,\ t)},\quad f(x,\ t)=a(x,\ t)-\frac{1}{4}\,\frac{\partial b}{\partial x}, \\ b(x,\ t)=g^2(x,\ t),\quad a(x,\ t)=f(x,\ t)+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

В рассматриваемом методе выделения сигнала используется понятие функционала вероятности $W[x(t)]$, [1], пропорционального вероятности

$$P[x(t)\in S_\varepsilon(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant T]$$

попадания траектории $x(t)$ в канал

$$S_\varepsilon(t)=\left[\left(\hat{x}_t^1\,\tilde{x}_t^1+\Delta x_1\right)+\dots+\left(\hat{x}_t^{n+k}+\Delta x^{n+k}\right)\right].$$

В случае одномерного процесса функционал вероятности определяется следующим выражением:

$$W[x(t)] = g(x_0, t)\, p_0(x_0) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{\dot{x}^2}{g^2} - \frac{2f}{g^2}\dot{x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + g(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right] dt\right\} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right), \tag{4}$$

где $p_0(x_0)$—плотность вероятности начального значения x_0. Используя (3), можно записать, что

$$W[x(t)] = \sigma(x_0)\, p_0(x_0) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{\dot{x}^2}{b} - \frac{2m}{\sigma^2}\dot{x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + m^2 + \sigma\frac{\partial m}{\partial x}\right] dt\right\}, \tag{5}$$
$$m(x, t) = \sigma^{-1}\left[a - \frac{1}{4}\frac{\partial b}{\partial x}\right], \quad \sigma^2 = b.$$

1. ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ИЗ БЕЛОГО, НОРМАЛЬНОГО ШУМА

Пусть на интервале $[0, T]$ наблюдается аддитивная смесь $y(t) = x(t) + n(t)$, где $x(t)$—марковский сигнал, задаваемый уравнением (1), а $n(t)$—белый нормальный шум со спектральной плотностью N. Требуется выделить процесс $x(t)$. Если в качестве критерия оптимальности использовать критерий максимума апостериорной вероятности и наблюдения представляют собой непрерывную реализацию смеси $y(t)$, то решение задачи сводится к отысканию экстремума функционала

$$W[x(t), y(t)] = W[x(t)]\; W[x(t)/y(t)], \tag{6}$$

выражение для которого было получено в [2]:

$$W[x(t), y(t)] = g_0(x_0)\, p_0(x_0) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{\dot{x}^2}{g^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + g(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{2f}{g^2}\dot{x} + \frac{f^2}{g^2}\right] dt\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2N}\int_0^T [y(t) - x(t)]^2\, dt\right\}. \tag{7}$$

Логарифмируя (7), имеем

$$F(x, y) = \ln W = \ln g_0(x_0)\, p_0(x_0) + \left[-\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\dot{x}^2}{g^2} - \frac{2f}{g^2}\dot{x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{f^2}{g^2} + g\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{g(x)}\right) dt\right] + \left[-\frac{1}{2N}\int_0^T (y(t) - x(t))^2\, dt\right]. \tag{8}$$

Используя вариационное уравнение Эйлера [3]

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}=0, \tag{9}$$

находим, что оптимальная оценка сигнала $\hat{x}=m(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{2\ddot{m}}{g}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial m}\frac{1}{g^2}\dot{m}^2-\frac{1}{N}m-\frac{\partial}{\partial m}\frac{f^2}{g^2}-\frac{\partial}{\partial m}\left(g\frac{\partial}{\partial m}\frac{f}{g}\right)+\frac{y}{N}=0 \tag{10}$$

с начальными условиями $m(0)=m_0$, $\dot{m}(0)=\dot{m}_0$. При выводе этого уравнения функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$ предполагались не зависящими от времени. В общем случае можно также получить и нестационарное уравнение фильтрации.

2. ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКОГО СИГНАЛА ИЗ СМЕСИ С МАРКОВСКИМ ШУМОМ

Представляет интерес задача фильтрации марковского сигнала из смеси с коррелированной марковской помехой. Эту же задачу можно рассматривать как задачу разделения двух марковских сигналов в том случае, когда оба процесса являются полезными сообщениями.

Пусть $x_1(t)$—марковский процесс (сигнал)—подлежит выделению из аддитивной смеси с другим марковским процессом (шумом)—$x_2(t)$. Примем, что сигнал и шум описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}+f_1(x_1)&=\xi_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt}+f_2(x_2)&=\xi_2(t).\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь для простоты полагается, что $g_{1,2}(x,t)=1$. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\ln W[x,y]=\ln p_{01}(x_{01})+\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\dot{x}_1^2-2f_1\dot{x}_1+f_1^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right]dt\right\}+\ln p_{02}(x_{02})+\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\left[(y-\dot{x}_1)^2-2f_2(y-x_1)(y-\dot{x}_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+f_2^2+\frac{\partial f_2(y-x_1)}{\partial(y-x_1)}\right]dt\right\}$$

или

$$\begin{aligned}F(x_1,y)=-\int_0^T&\left[\dot{x}_1^2-f_1\dot{x}_1+\frac{1}{2}f_1^2+\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\dot{y}^2}{2}-\right.\\ &-\dot{x}_1 y+f_2(y-x_1)\,x_1-f_2(y-x_1)\,\dot{y}+f_2^2(y-x_1)+\\ &\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial f_2(y-x_1)}{\partial(y-x_1)}\right]dt+\ln p_{01}(x_{01})+\ln p_{02}(x_{02}).\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь, решая аналогичную вариационную задачу, находим уравнение для оптимальной оценки сигнала $\hat{x}_1(t)=m_1(t)$:

$$\ddot{m}_1+\frac{2\partial f_2}{\partial m_1}\ddot{y}-\frac{\partial f_1^2}{\partial m_1}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial m_1^2}-\frac{\partial f_2}{\partial m_1}-\frac{\partial}{\partial m_1}\,\frac{\partial f_2}{\partial(y-m_1)}=0, \qquad (13)$$

$$m(0)=m_0,\quad \dot{m}(0)=\dot{m}_0.$$

Заменив соответствующие индексы в (13), можно получить уравнение для оценки процесса $x_2(t)$.

Необходимо отметить, что уравнения фильтрации (10), (13) находятся без учета физической осуществимости, т. е. для оценки сигнала необходимо знать как все прошлые, так и все будущие значения реализации $y(t)$. В частном случае, когда процессы $x_{1,2}(t)$ являются марковскими нормальными процессами, аналогичные уравнения получаются в теории линейной фильтрации Винера—Колмогорова без учета физической реализуемости фильтра.

3. ОБОБЩЕНИЕ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ИЗ БЕЛОГО ШУМА

Понятие функционала вероятности обобщается на случай многомерного марковского процесса [1]. Если многомерному марковскому процессу $X(t)=\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ соответствует многомерное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial p(X,\ t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\,[b_{\alpha\beta}p]+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,[a_\alpha p]=0 \qquad (14)$$

и функции $a(x,t)$, $b_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\gamma\beta}$ таковы, что существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\gamma},\quad \frac{\partial^2 b_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma \partial x_\delta},\quad \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t},\quad 0<\delta<\sigma^2<k,$$

то функционал вероятности многомерного марковского процесса $X(t)$ определится следующим выражением:

$$W[X(t)]=\sigma(x_0)\,p_0(x_0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\dot{x}_\alpha(b^{-1})_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2m_\alpha(\sigma^{-1})_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta+m_\alpha m_\alpha+\sigma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial m_\alpha}{\partial x_\beta}\right]dt\right\},$$

где

$$m_\alpha=(\sigma^{-1})_{\alpha\beta}\left(a_\beta-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}}{\partial x_\delta}\,\sigma_{\gamma\delta}\right), \qquad (15)$$

$$\sigma(x,\ t)=\det\|\sigma_{\alpha\beta}\|=\det{}^{1/2}\|b_{\alpha\beta}\|.$$

В формулах (14)—(16) суммирование ведется по дважды встречающимся индексам.

Условный функционал вероятности $W[X/y]$ равен [2]

$$W[X/y]=\sigma(x_0)\,p_0(x_0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^T\left[\dot{x}_\alpha(b^{-1})_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\beta+\right.\right.$$

$$+ x_\alpha (b^{-1})_{\alpha\beta} y_\beta - 2m_\alpha (\sigma^{-1})_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta - m_\alpha (\sigma^{-1})_{\alpha\beta} y_\beta + \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{2} m_\alpha m_\alpha + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial m_\alpha}{\partial x_\beta} \Big] dt \Big\} .$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть случайный процесс определяется дифференциальным уравнением второго порядка.

$$\frac{d^2x}{dt} + \beta \frac{dx}{dt} + \gamma x(t) = \xi(t), \tag{17}$$

и наблюдается аддитивная смесь $y(t) = x(t) + n(t)$ на $[0, T]$, где $n(t)$—белый нормальный шум с $S(\omega) = N$. Требуется выделить процесс $x(t)$.

Процесс $x(t)$ в данном случае не является марковским процессом, но вместе со своей производной $\dot{x}(t)$ образует двумерный марковский процесс $z(t) = \{x(t), \dot{x}(t)\}$. Разбивая (17) на два уравнения

$$\dot{x}_1 + \beta x_1 + \gamma \int x_1 dt = \xi(t), \qquad \dot{x} = x_1, \tag{18}$$

найдем коэффициенты уравнения Колмогорова

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = -\beta x_1 - \gamma x, \quad b_{11} = b_{12} = 0, \quad b_{22} = 1.$$

Тогда

$$\ln W[z, y] = -\frac{1}{2} \int_0^T [\ddot{x}^2 + \beta \dddot{x} + \gamma x \ddot{x} + \beta^2 \dot{x}^2 + 2\beta\gamma x \dot{x} +$$

$$+ \gamma^2 x^2 - \gamma x - \beta] \, dt - \frac{1}{2N} \int_0^T (y - x)^2 \, dt. \tag{19}$$

Теперь, используя (19) и (9), находим уравнение фильтрации процесса $\hat{x}(t) = m(t)$:

$$\ddot{m}(\beta^2 - \gamma) - 2\beta\gamma\dot{m} + \frac{1}{N} m - \frac{1}{N} y + \gamma = 0. \tag{20}$$

4. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим оценку качества фильтрации в том случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависят от x, т. е. одномерные процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются марковскими нормальными процессами. Если качество фильтрации оценивать по минимуму среднеквадратической ошибки ε_1^2, то, как известно из теории линейной фильтрации [4],

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{F_1(\omega) F_2(\omega)}{F_1(\omega) + F_2(\omega)} d\omega, \tag{21}$$

где $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ — энергетические спектры процессов. В том случае, когда процесс $x_2(t)$ есть белый шум со спектральной плотностью N,

$$\varepsilon_1^2 = \frac{N}{2\pi} \int_0^\infty \frac{F_1(\omega)}{F_1(\omega) + N} d\omega. \tag{22}$$

Рассмотрим сравнение качества фильтрации данного метода с методом интерполяции, разработанным в [5], на одном примере. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = \xi(t), \qquad y(t) = x(t) + n(t).$$

Метод интерполяции [5] дает среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon^2_{\text{инт}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2|\tau - t|}\right)^{-1}, \tag{23}$$

где t — текущий момент интерполяции сигнала, τ — текущее время фильтрации сигнала и $\tau > t$. Устремляя в выражении (23) $\tau - t \to \infty$, получаем среднеквадратическую ошибку данного метода $\varepsilon_1^2 = 0{,}66$, что практически можно получить при достаточно больших $\tau - t$. Отсюда видно, что при больших временах интерполяции оба метода практически эквивалентны.

1 пример. Фильтрация марковского процесса из белого шума.

а) Пусть $x(t)$ задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + \alpha x = \xi(t),$$

которое может описывать реальный случайный процесс на выходе интегратора при воздействии на него широкополосного шума с временем корреляции, меньшем, чем постоянная времени интегратора. Тогда, используя (10), получим

$$\ddot{m} - m\left(\frac{1}{N} + \alpha^2\right) + \frac{y}{N} = 0.$$

б) Процесс $x(t)$ описывается уравнением [6]

$$\dot{x} = -\mu x(a^2 + x^2) - \xi(t).$$

Решением этого уравнения является процесс, одномерная плотность вероятности которого имеет вид двугорбой кривой:

$$p(x) = C \exp\left[\mu(2a^2x^2 - x^4)\right],$$

т. е. процесс $x(t)$ носит импульсный характер. Уравнение фильтрации получается существенно нелинейным:

$$\ddot{m} - \dot{m}(a^2\mu + 3\mu m^2) + m\left(a^4\mu^2 + 3\mu + \frac{1}{2N}\right) +$$

$$+ 4a^2\mu^2m^3 + 6\mu^2m^5 - \frac{1}{2N}\,y = 0.$$

2 пример. Разделение двух нормальных марковских процессов.

Пусть

$$\dot{x}_1(t) + \alpha_1 x_1(t) = \xi_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) + \alpha_2 x_2(t) = \xi_2(t).$$

Тогда уравнение фильтрации, например, для сигнала $x_1(t)$ запишется в виде

$$4\ddot{m}_1(t) - (\alpha_1 + \alpha_2)\, m_1(t) + \ddot{y} - \alpha_2 y(t) = 0.$$

Полученные уравнения фильтрации являются уравнениями второго порядка. Решения таких уравнений (вследствие физической нереализуемости) обладают свойством неустойчивости, что является неудобным обстоятельством при попытке схемного моделирования таких уравнений. Однако в случае уравнений линейной фильтрации путем введения задержки и аппроксимации импульсной характеристики оптимального фильтра, сдвинутой на реальную ось времени, можно получить реализуемое аналоговое фильтрующее устройство. Практически такая схема будет эквивалентна фильтру, разработанному в [5].

В том случае, когда реализация смеси известна целиком на некотором интервале времени, то можно производить машинную обработку, задавая соответствующие граничные условия.

Рассмотренный метод фильтрации позволяет найти точное решение задачи фильтрации для всего класса диффузионных марковских процессов, что нельзя сделать в некоторых случаях в методе фильтрации, основанном на теории условных марковских процессов, где приходится применять приближенные методы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Тр. IV Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистики, изд. Полит. и научн. литерат. Лит. ССР, Вильнюс, 1962.
2. Р. Л. Стратонович, Оптимальные системы автоматического управления, изд. Наука, М., 1967, стр. 102.
3. Л. Э. Эльсгольц, Вариационное исчисление, Гостехиздат, М., 1958.
4. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 2, изд. Сов. радио, М., 1968.
5. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Теория вероятностей и ее применение, 13, вып. 4, 602 (1968).
6. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, изд. МГУ, 1966.

Московский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 7 апреля 1969 г.

A METHOD OF FILTRATION OF DIFFUSION MARKOV'S PROCESSES

S. D. Svet

The nonlinear filtration of diffusion Markov's process of additive mixture with noise is investigated. It is shown that the use of the probability functional of Markov's process permits the optimal (in the sense of the a posteriori probability maximum) estimation of the signal to be obtained in the form of stochastic differential equation. By the way of example, the estimation of the filtration quality is considered.