

УДК 621.373.072.9

К ВОПРОСУ О ТЕХНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ СИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРОВ С ДРОБНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ЧАСТОТ

И. М. Клибанова

Рассмотрен вопрос о форме спектров синхронных колебаний двух связанных генераторов, обладающих большими и медленными флуктуациями параметров. Показано, что вблизи несущих частот форма спектров синхронных колебаний существенным образом определяется характером корреляции между флуктуациями параметров в схемах и величиной взаимной связи между генераторами, а далекие крылья спектров совпадают с крыльями спектров свободных генераторов.

За последние годы широкое распространение получили автоколебательные многомодовые системы. Одним из вопросов, который возникает при изучении этих систем, является вопрос о взаимодействии отдельных мод колебаний, а также о влиянии этого взаимодействия на форму спектра каждого колебания при условии, что в автоколебательной системе имеют место различного рода флуктуации.

В этой части уже имеются некоторые результаты. Так, в работах [1, 2] на примере двух, а в работе [3] на примере трех связанных томсоновских генераторов рассмотрено влияние естественных флуктуаций на статистические характеристики и формы спектров колебаний генераторов, работающих в двухчастотном синхронном и асинхронном режимах*. Влияние технических флуктуаций (флуктуаций параметров) на статистические характеристики колебаний в синхронном двухчастотном режиме было рассмотрено в работе [4].

Результаты, полученные в [2-4], справедливы для случая сильной синхронизации, когда флуктуации частот синхронных колебаний, обусловленные внешним шумовым воздействием, настолько малы, что генераторы не выходят из полосы синхронизации. В этом случае возможна линеаризация флуктуационных уравнений системы, благодаря чему решение их существенно упрощается.

Несомненно более сложной задачей является отыскание статистических характеристик и форм спектров синхронных колебаний при наличии в схеме больших флуктуаций, способных привести (иногда) к нарушению синхронного режима. Регулярных методов, позволяющих решить эту задачу при любом шумовом воздействии, не существует. В настоящей работе предлагается решение, полученное для частного случая очень медленных флуктуаций и нулевой начальной расстройки. Задача решается для модели двух связанных томсоновских генераторов, работающих в двухчастотном синхронном режиме.

* Автоколебательный двухчастотный (или многочастотный) режим называем синхронным, если отношение частот автоколебаний равно отношению взаимно-простых целых чисел, и асинхронным — в противном случае.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как было получено в [1], флуктуационные уравнения для фаз Ψ_x и Ψ_y синхронных колебаний $X(t) = A_0 \cos[\omega_x t + \Psi_x(t)]$ и $Y(t) = B_0 \cos[\omega_y t + \Psi_y(t)]$ при нулевой начальной расстройке принимают вид

$$\dot{\Psi}_x = \Delta_x \sin \Psi - \frac{\omega_x}{2} \varepsilon_x, \quad (1)$$

$$\dot{\Psi}_y = -\Delta_y \sin \Psi - \frac{\omega_y}{2} \varepsilon_y.$$

Здесь $\Psi = s\Psi_y - r\Psi_x$ — обобщенная разность фаз, $\Delta_x \approx |\omega_x - n_x|_{\max}$ и $\Delta_y \approx |\omega_y - n_y|_{\max}$ — максимально допустимые значения расстроек нормальных частот n_x, n_y связанных генераторов относительно частот синхронных колебаний ω_x, ω_y , причем отношение $\omega_y/\omega_x = r/s$, где r, s — взаимно-простые целые числа, $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — флуктуации параметров в схемах генераторов, A_0, B_0 — амплитуды синхронных колебаний генераторов.

Для того, чтобы найти решение для Ψ_x и Ψ_y (или для частотных флуктуаций синхронных колебаний $\Psi_x = \nu_x, \Psi_y = \nu_y$), введем новую фазу ϑ :

$$\vartheta = \frac{1}{K+1} \left(\frac{\Psi_x}{s} + K \frac{\Psi_y}{r} \right), \quad (2)$$

где $K = r\Delta_x/s\Delta_y$ — коэффициент взаимной связи генераторов.

Флуктуации фаз синхронных колебаний легко выражаются через флуктуации обобщенной фазы Ψ и фазу ϑ :

$$\Psi_x = s\vartheta - \frac{K}{K+1} \frac{\Psi}{r}, \quad (3)$$

$$\Psi_y = r\vartheta + \frac{1}{K+1} \frac{\Psi}{s}.$$

Из уравнений (1) с учетом (2), (3) получаем для $\dot{\Psi}$ и $\dot{\vartheta}$ следующие уравнения:

$$\dot{\Psi} = -\Delta_0 \sin \Psi - \xi_1(t); \quad (4)$$

$$\dot{\vartheta} = -\xi_2(t). \quad (5)$$

Здесь $\Delta_0 \approx |sn_y - rn_x|_{\max}$ — обобщенная полоса синхронизации, $\xi_1(t) = \omega_0(\varepsilon_y - \varepsilon_x)/2$, $\xi_2(t) = \omega_0(\varepsilon_x + K\varepsilon_y)/2sr(K+1)$, а $\omega_0 = s\omega_y = r\omega_x$.

Таким образом, задача отыскания решения для флуктуаций фаз (частот) синхронных колебаний свелась к решению системы уравнений (4), (5). Очевидно, что основное затруднение при отыскании решения связано с решением уравнения для обобщенной фазы Ψ (или $\dot{\Psi}$).

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ. ФОРМА СПЕКТРОВ СИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для случая очень медленных флуктуаций ε_x и ε_y можно записать точное решение для обобщенной фазы. Это точное решение оказывается весьма громоздким (см., например, [5]). Поэтому мы ограничимся рассмотрением более простого приближенного решения, полученного в [5] для уравнения, аналогичного уравнению (4). Это решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Psi &= 0 & (|\xi_1| < \Delta_0), \\ \Psi &= -\xi_1 \sqrt{1 - \Delta_0^2/\xi_1^2} & (|\xi_1| > \Delta_0).\end{aligned}\quad (6)$$

Напомним, что приближенное решение (6) тем лучше описывает поведение Ψ , чем больше отличается значение случайного флуктуационного воздействия ξ_1 от полосы синхронизации Δ_0 . Соответствующие оценки были приведены в [5].

Из соотношений (3), учитывая (5), (6), нетрудно получить выражения для флуктуаций частот синхронных колебаний ν_x и ν_y :

$$\begin{aligned}\nu_x &= - \left\{ s \xi_2 + \frac{K}{K+1} \frac{\Delta_0}{r} \sqrt{\xi_1^2/\Delta_0^2 - 1} [1(-\xi_1/\Delta_0 - 1) - 1(\xi_1/\Delta_0 - 1)] \right\}, \\ \nu_y &= - \left\{ r \xi_2 - \frac{1}{K+1} \frac{\Delta_0}{s} \sqrt{\xi_1^2/\Delta_0^2 - 1} [1(-\xi_1/\Delta_0 - 1) - 1(\xi_1/\Delta_0 - 1)] \right\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Видно, что в рассматриваемом приближении флуктуации частот ν_x и ν_y будут также квазистатическими. А в этом случае форма спектральной линии $W_x(\Omega)$, $W_y(\Omega)$ совпадает с вероятностным распределением флуктуаций частоты (см., например, [5]), соответственно с $A_0^2 W_{\nu_x}(\Omega)/2$ и $B_0^2 W_{\nu_y}(\Omega)/2$. Здесь $\Omega = \omega - \omega_x$ (или $\Omega = \omega - \omega_y$) — текущая частота, отсчитываемая от синхронной частоты ω_x или ω_y .

Итак, решение вопроса о форме спектральных линий синхронных колебаний сводится к отысканию вероятностного распределения флуктуаций частот ν_x и ν_y .

Наиболее интересным является здесь вопрос о том, как меняется форма и ширина спектральной линии при взаимной синхронизации по сравнению с режимом свободных колебаний генераторов. Совершенно очевидно, что при коррелированных флуктуациях параметров деформация спектров будет существенным образом определяться характером связи. Так, например, если $\varepsilon_x \equiv \varepsilon_y$, то значения ν_x и ν_y , а следовательно, и форма спектров $W_x(\Omega)$, $W_y(\Omega)$ будут такими же, как в свободных генераторах. Если же свободные генераторы обладают противофазными флуктуациями параметров и $\varepsilon_x \equiv -\varepsilon_y$, то ширина спектров синхронных колебаний будет меньше, чем в свободных генераторах, а при значении $K = 1$ вообще будет иметь место (в полосе синхронизации) полная компенсация флуктуаций частоты одного генератора шумами другого ($\xi_2 \equiv 0$). Следовательно, в этом случае в спектре синхронных колебаний X, Y так же, как и в спектре генератора, синхронизованного внешним монохроматическим напряжением, будут дискретные составляющие на частотах ω_x , ω_y . Более интересным и менее очевидным, как нам представляется, является вопрос об изменении характера спектров в случае некоррелированных флуктуаций ε_x и ε_y .

3. ФОРМА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ СИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ПАРАМЕТРОВ. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

В общем случае, когда $\varepsilon_x \neq 0$ и $\varepsilon_y \neq 0$, выражения для спектров синхронных колебаний $W_x(\Omega)$, $W_y(\Omega)$ получаются чрезвычайно громоздкими. Поэтому для простоты рассмотрим случай, когда флуктуации в одном из генераторов отсутствуют. Решение этой задачи по существу дает ответ на вопрос о форме спектральных линий при взаимной синхронизации таких генераторов, у которых флуктуации частот являются величинами разных порядков.

Пусть для определенности $\epsilon_x \equiv 0$. Тогда выражения для ν_x и ν_y упрощаются и могут быть представлены как функции ξ_1 :

$$\nu_x = -\frac{K}{r(K+1)} \left[1 - \sqrt{1 - \Delta_0^2/\xi_1^2} \cdot 1(|\xi_1|/\Delta_0 - 1) \right] \xi_1; \quad (8)$$

$$\nu_y = -\frac{1}{s(K+1)} \left[K + \sqrt{1 - \Delta_0^2/\xi_1^2} \cdot 1(|\xi_1|/\Delta_0 - 1) \right] \xi_1. \quad (9)$$

На рис. 1, 2 приведены графики зависимости $\nu_x(\xi_1)$ и $\nu_y(\xi_1)$. Видно, что максимальные флуктуации частоты в «стабильном» генераторе возникают при значениях случайного параметра $\xi_1 = \pm \Delta_0$, выводящих

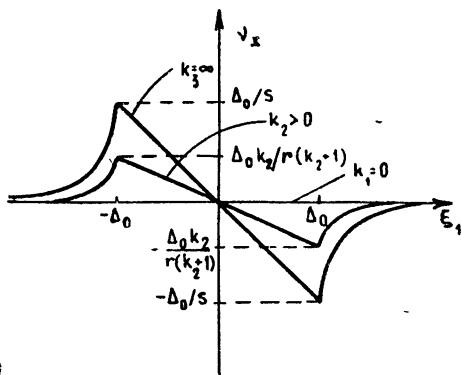


Рис. 1.

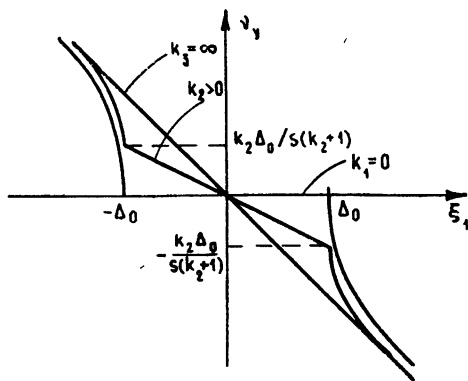


Рис. 2.

систему связанных генераторов на границу полосы синхронизации. При меньших значениях ξ_1 генераторы не выходят из синхронизма и частотные флуктуации ν_x пропорциональны случайному воздействию ξ_1 . Коэффициент пропорциональности определяется величиной взаимной связи и лежит в пределах от нуля ($K=0$) до $1/r$ ($K=\infty$). Если же $|\xi_1| > \Delta_0$, то шумы выводят систему из полосы захвата и имеет место частичное «увлечение» частоты «стабильного» генератора шумами другого. При $\xi_1 \gg \Delta_0$ флуктуации частоты $\nu_x \rightarrow 0$.

Что касается флуктуаций частоты во втором генераторе, то внутри полосы синхронизма значение ν_y также пропорционально значению ξ_1 , однако коэффициент пропорциональности из-за стабилизирующего воздействия первого генератора меньше, чем в свободном генераторе (т. е. меньше, чем $1/s$), и также сильно зависит от взаимной связи, меняясь от нуля ($K=0$) до $1/s$ ($K=\infty$) — до значения коэффициента пропорциональности в свободном генераторе. При больших флуктуациях параметра, когда $\xi_1 \gg \Delta_0$, значение ν_y оказывается таким же, как и в свободном генераторе.

Уже из этого качественного рассмотрения следует, что сильная деформация спектров свободных колебаний при синхронизации будет лишь на частотах, отстоящих от синхронных частот ω_x и ω_y соответственно не более, чем на $\pm K \Delta_0 / r(K+1)$ и $\pm K \Delta_0 / s(K+1)$.

Считая, что ξ_1 имеет нормальное распределение, и учитывая соотношения (8), (9), можно получить следующие выражения для спектральных линий синхронных колебаний:

$$W_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} \frac{r(K+1)}{K \sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ \exp \left[-\frac{r^2(K+1)^2}{2K^2\sigma^2} \Omega^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{K^2 \Delta_0^2}{r^2(K+1)^2} \frac{1}{\Omega^2} - 1 \right] \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\frac{K^2 \Delta_0^2}{r^2(K+1)^2} \frac{1}{\Omega^2} + 1 \right]^2 \frac{r^2(K+1)^2}{2\sigma^2 K^2} \Omega^2 \left\{ 1 \left[\Omega + \frac{K \Delta_0}{r(K+1)} \right] - 1 \left[\Omega - \frac{K \Delta_0}{r(K+1)} \right] \right\} \right\}; \quad (10)$$

$$W_y(\Omega) = \frac{B_0^2}{2} \frac{s}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left\{ \frac{K+1}{K} \exp \left[-\frac{(K+1)^2 s^2 \Omega^2}{2K^2 \sigma^2} \right] - \left[1 \left(\Omega + \frac{K \Delta_0}{s(K+1)} \right) - 1 \left(\Omega - \frac{K \Delta_0}{s(K+1)} \right) \right] + \frac{1}{K-1} \left[K - \left(1 - \frac{\Delta_0^2 (K-1)}{s^2 \Omega^2 (K+1)} \right)^{-1/2} \right] \right\} \times \exp \left[-\frac{s^2 \Omega^2}{2\sigma^2 (K-1)^2} \left(K - \left(1 - \frac{\Delta_0^2 (K-1)}{s^2 \Omega^2 (K+1)} \right)^{1/2} \right)^2 \right] \left| 1 \left(\left| \Omega \right| - \frac{K \Delta_0}{s(K+1)} \right) \right\}. \quad (11)$$

На графиках рис. 3 и 4 в соответствии с (10), (11) изображены спектры синхронных колебаний при различных значениях коэффициента взаимной связи. Видно, что при $K=0$ в спектре синхронизованного генератора имеется дискретная линия, мощность которой равна

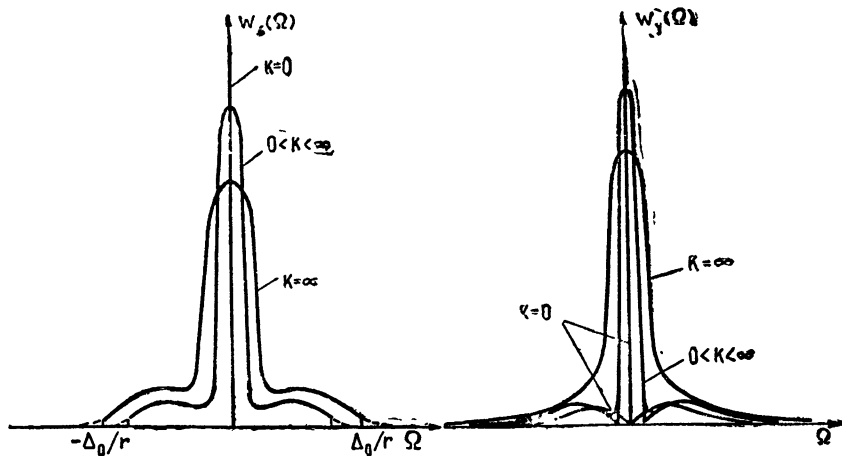


Рис. 3.

Рис. 4.

$(B_0^2/2) \Phi(\Delta_0/\sqrt{2}\sigma)$ ($\Phi(\Delta_0/\sqrt{2}\sigma) = \int_0^{\Delta_0/\sqrt{2}\sigma} \exp(-y^2) dy$) и тем больше, чем

больше полоса синхронизации и меньше собственный шум. При любых других значениях коэффициента взаимной связи дискретная линия в спектрах синхронных колебаний «размывается» шумами «плохого» генератора и этот эффект тем больше, чем сильнее влияние «шумящего» генератора на синхронизацию. Когда его влияние становится преобладающим ($K=\infty$), «уширение» спектров будет максимальным. Оно целиком определяется полосой синхронизации и для захваченного генератора будет равно Δ_0/r . Следует также отметить, что при этом форма спектра колебания захваченного генератора отлична от

формы спектра синхронизирующего колебания. Напомним, что при малых флуктуациях параметров они совпадали.

В заключение следует отметить следующее. Полученные результаты, строго говоря, справедливы для статических флуктуаций параметра. Учет конечности времени корреляции, по-видимому, может привести к исчезновению дискретной линии в спектре синхронизованного генератора при дробно-кратном делении, аналогично тому, как это было получено для случая естественных флуктуаций [6]. Кроме того, в малой окрестности частот $\Omega = \pm \Delta_0 K/s(K+1)$ ($\Omega = \pm \Delta_0 K/r(K+1)$) форма спектров $W_y(\Omega)$ ($W_x(\Omega)$) отличается от истинной из-за того, что в этой области приближение (8), (9) имеет большую погрешность, и для точного описания формы спектра колебания следует учитывать неквазистатичность флуктуаций частоты $\nu_y(\nu_x)$. На графиках рис. 3, 4 качественно изображена поправка к форме спектров колебаний из-за неквазистатичности ν_x и ν_y (пунктир).

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 732 (1969).
2. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1022 (1969).
3. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 9, 1363 (1969).
4. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника, 14, № 7, 1238 (1969).
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968, гл. 4, 9.
6. А. Н. Малахов, Л. Шепелевич, Радиотехника и электроника (в печати).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
4 апреля 1969 г.

TO A TECHNICAL FORM OF SPECTRAL LINES OF SYNCHRONOUS OSCILLATIONS OF GENERATORS WITH A FRACTION RATIO OF FREQUENCIES

I. M. Klibanova

A form of the spectra of synchronous oscillations of two coupled generators having large and slow parameter fluctuations is considered. It is shown that near the carrying frequencies the form of the spectra of synchronous oscillations is considerably defined by the character of correlation between the parameter fluctuations in schemes and by the value of mutual coupling between generators. The far wings of the spectra coincide with those of free generators.