

УДК 538 56

О ФОКУСИРОВКЕ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

А. И. Кон

Рассматривается задача о влиянии неоднородностей показателя преломления за линзой на параметры сфокусированной волны. Полученные формулы для случайных координат «центра тяжести» изображения в фокальной плоскости линзы используются для расчета среднего квадрата флуктуаций «центра тяжести» дифракционной картины. Выведены формулы для средней интенсивности света как на оси линзы, так и в случайно перемещающейся точке «центра тяжести» изображения. Рассчитан профиль средней интенсивности в подвижной системе координат, связанной с центром тяжести дифракционной картины. Приводятся результаты соответствующих численных расчетов.

Нас будет интересовать задача о влиянии однородных и изотропных флуктуаций коэффициента преломления за линзой на распространение плоской волны, прошедшей через линзу. Эта задача в некотором смысле аналогична рассмотренным в работах [1-5], где исследовалась картина в фокальной плоскости линзы при падении на нее искаженной атмосферной турбулентностью волны с заданной структурной функцией флуктуаций фазы, когда пространство между линзой и фокальной плоскостью свободно от турбулентных пульсаций коэффициента преломления.

В работе [1] авторы находили положение максимума интенсивности волны, максимизируя интенсивность как функцию координат в фокальной плоскости, а затем вычисляли среднюю картину в подвижной системе координат, связанной с найденным случайным положением максимума интенсивности. Однако упрощения, сделанные авторами для проведения расчета, предполагают выполнение условия $\rho \ll F/kR$, где ρ — расстояние точки наблюдения в фокальной плоскости от оси линзы, F — фокусное расстояние, R — размер линзы, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, что значительно снижает практическое применение выведенных формул, так как означает малость смещения ρ по сравнению с шириной дифракционной картины. В работах [2-5] это ограничение отсутствует. В [2, 3] рассчитывается средняя интенсивность в фокальной плоскости при падении на линзу искаженной турбулентностью волны, а в [4, 5] для этого случая получены формулы, определяющие координаты точки «центра тяжести» изображения и среднюю интенсивность в этой случайно блуждающей точке. Метод расчета, примененный здесь, аналогичен использованному в [2-5].

1. Найдем сначала поле в фокальной плоскости длиннофокусной линзы (т.е. когда размер линзы $\alpha_0 \ll F$ — фокусного расстояния). Функция пропускания линзы определяется следующей формулой:

$$f(\rho) = \begin{cases} \exp(ik\rho^2/2F) & (\rho \leq \alpha_0) \\ 0 & (\rho > \alpha_0) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь множитель $\exp(ik\rho^2/2F)$ появляется в связи с тем, что длиннофокусная линза вносит в волну в плоскости, перпендикулярной направ-

лению распространения, фазовый сдвиг $\Delta S = k\rho^2/2F$ (ρ — расстояние от оси линзы). Для простоты расчетов заменим эту функцию на

$$f_1(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right), \quad (1a)$$

что не изменяет сущности дела, но значительно упрощает окончательные формулы. Роль размера линзы в этом случае, естественно, играет R , и условие $\alpha_0 \ll F$ заменяется на $R \ll F$.

Используя указанную функцию пропускания, можно записать поле на поверхности линзы в следующем виде:

$$u(x, \rho)|_{x=0} \equiv u_0(\rho) = A_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right). \quad (2)$$

Поле в точке r фокальной плоскости линзы определяется формулой

$$u(r) = \int u_0(\rho') G(r, r') d^2\rho', \quad (3)$$

где $G(r, r')$ — функция Грина для неоднородного полупространства. Для функции $G(r, r')$ в [6] получено выражение

$$G(r, r') = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\exp[ik|r-r'| + iS_1(r, r')]}{|r-r'|} \right\}, \quad (4)$$

где $S_1(r, r')$ — флуктуационный набег фазы на луче, соединяющем точки $r' = (0, \rho')$ и $r = (F, \rho)$.

Выполняя дифференцирование в (4) и используя условие $R \ll F$, получим для функции Грина

$$G(r, r') = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikF}}{F} \exp\left[\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2F} + iS_1(r, r')\right]. \quad (4a)$$

Подставляя (4а) в (3) и используя (2), можно найти значение поля u в точке r :

$$u(r) = \frac{k \exp(ikF + ik\rho^2/2F) A_0}{2\pi i F} \int \int \exp\left[\frac{ik\rho\rho'}{F} - \frac{\rho'^2}{2R^2} + iS_1(r, r')\right] d^2\rho'. \quad (5)$$

Отсюда получаем интересующее нас распределение интенсивности в фокальной плоскости:

$$I(r) = u(r) u^*(r) = \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left(-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2}\right) \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik\rho(\rho' - \rho'')}{F} + i[S_1(r, r') - S_1(r, r'')]\right\} \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2}. \quad (6)$$

2. Используем найденное выражение (6) для оценки средних характеристик «дрожания» дифракционной картины как единого целого в фокальной плоскости. Определим координаты «центра тяжести» изображения (y_c, z_c) следующим образом:

$$y_c = \frac{\int y I(\rho) d^2\rho}{\int I(\rho) d^2\rho}, \quad z_c = \frac{\int z I(\rho) d^2\rho}{\int I(\rho) d^2\rho} \quad (7)$$

(интегрирование в (7) ведется по всей фокальной плоскости). Вычислим сначала интеграл в знаменателе (7)

$$A \equiv \int I(\rho) d^2\rho. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (8) и меняя порядок интегрирования по ρ' и ρ'' , получаем

$$A = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left(-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2}\right) \times \\ \times \int d^2\rho \exp\left\{\frac{ik}{F} \rho(\rho' - \rho'') + i[S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]\right\}.$$

Здесь в интеграле по ρ множитель $\exp\{i[S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]\}$ является гораздо более медленно меняющейся функцией, чем $\exp[ik\rho(\rho' - \rho'')/F]$, в чем нетрудно убедиться, производя оценку масштабов заметных изменений этих функций по средним величинам. В самом деле, $\exp\{i[S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]\}$ заметно меняется на расстояниях $\rho \sim F$, а $\exp[ik\rho(\rho' - \rho'')/F]$ — на расстояниях $\rho \sim F/kR$; отношение этих масштабов имеет порядок $kR \gg 1$.

Следовательно, $\exp\{i[S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - S_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]\}$ можно вынести из-под знака интеграла в точке $\mathbf{r} = (F, 0)$ и записать

$$A = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left\{-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2} + i[S_1(F, 0; \rho') - S_1(F, 0; \rho'')]\right\} \times \\ \times \int d^2\rho \exp\left[\frac{ik}{F} \rho(\rho' - \rho'')\right]. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\int d^2\rho \exp\left[\frac{ik}{F} \rho(\rho' - \rho'')\right] = 4\pi^2 \delta\left[\frac{k(\rho' - \rho'')}{F}\right],$$

где $\delta(\mathbf{a})$ — двумерная дельта-функция Дирака, и используя известные соотношения в теории обобщенных функций, получим

$$A = \pi R^2 A_0^2, \quad (10)$$

что, как и следовало ожидать, тождественно совпадает со значением A в начальной плоскости.

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным при выводе (10), получаем для случайной координаты «центра тяжести» изображения

$$y_c = -\frac{iF}{k\pi R^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left\{-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2} + i[S_1(F, 0; \rho') - S_1(F, 0; \rho'')]\right\} \times \\ \times \delta(z' - z'') \delta'(y' - y''). \quad (11)$$

Используя соотношение

$$\int f(x) \delta^{(k)}(x - u) = (-1)^k f^{(k)}(u),$$

имеем

$$y_c = -\frac{F}{k\pi R^2} \int \exp\left(-\frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{\partial S_1(F, 0; \rho)}{\partial y} d^2\rho \quad (12)$$

и аналогично

$$z_c = -\frac{F}{k\pi R^2} \int \exp\left(-\frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{\partial S_1(F, 0; \rho)}{\partial z} d^2\rho. \quad (12a)$$

Найдем теперь средний квадрат флуктуаций y_c и z_c :

$$\langle y_c^2 \rangle \equiv \sigma_c^2 = \frac{F^2}{k^2\pi^2 R^4} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left(-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{R^2}\right) \times \\ \times \left\langle \frac{\partial S_1(F, 0; \rho')}{\partial y'} \frac{\partial S_1(F, 0; \rho'')}{\partial y''} \right\rangle. \quad (13)$$

Преобразуем выражение под знаком интеграла, учтя изотропность флуктуаций фазы в плоскости интегрирования:

$$\left\langle \frac{\partial S_1(F, 0; \rho')}{\partial y'} \frac{\partial S_1(F, 0; \rho'')}{\partial y''} \right\rangle = \frac{1}{2} D_S''(\rho) \frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{D_S'(\rho)}{\rho} \left(1 - \frac{\eta^2}{\rho^2}\right),$$

где $D_S = \langle [S_1(F, 0; \rho') - S_1(F, 0; \rho'')]^2 \rangle$ — структурная функция флуктуаций фазы, $\rho = (\eta, \zeta) = \rho' - \rho''$.

Вводя в интеграле (13) новые переменные интегрирования $\rho = \rho' - \rho''$ и $2R = \rho' + \rho''$ и вычисляя интегралы по R , приходим к следующему выражению для σ_c^2 :

$$\sigma_c^2 = \frac{F}{4\pi k^2 R^2} \int \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2}\right) \left[D_S''(\rho) \frac{\eta^2}{\rho^2} + D_S'(\rho) \frac{\zeta^2}{\rho^3} \right] d^2\rho. \quad (14)$$

Перейдем в (14) к полярным координатам $\eta = \rho \cos\varphi$, $\zeta = \rho \sin\varphi$ и проинтегрируем по угловой переменной φ :

$$\sigma_c^2 = \frac{F^2}{4k^2 R^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2}\right) \left[D_S''(\rho) + \frac{D_S'(\rho)}{\rho} \right] \rho d\rho. \quad (15)$$

Для окончательного вычисления σ_c^2 нам понадобится конкретный вид структурной функции флуктуаций фазы сходящихся лучей. В работе [7] получена связь этой функции со структурной функцией флуктуаций фазы в плоской волне $D_S''(\rho)$ (в функции $D_S(\rho)$ под ρ понимается первоначальный разнос лучей)

$$D_S(\rho) = \int_0^1 D_S''(\rho x) dx, \quad (16)$$

что для $D_S''(\rho) = C\rho^{5/3}$ дает численный коэффициент $3/8$. Однако это соотношение выполняется, вообще говоря, только в области применимости геометрической оптики. Используя результаты работы [8], можно получить следующее выражение для структурной функции фазы на сходящихся трассах, верное с учетом дифракционных эффектов:

$$D(\rho) = \pi^2 k^2 L \int_0^1 dt \int_0^\infty \left[1 + \cos\left(\frac{x^2 L}{k} t\right) \right] [1 - J_0(x\rho t)] \Phi_\varepsilon(x) x dx. \quad (17)$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(x)$ — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической про-

нищаемости, который мы везде будем принимать соответствующим «закону 2/3» Колмогорова—Обухова: $\Phi_\varepsilon(x) = C_0 C_\varepsilon^2 x^{-11/3}$ ($C_0 = 0,033$).

Подставляя (17) в (15), после несложных преобразований получаем

$$\sigma_c^2 = \frac{C_0 \pi^2 C_\varepsilon^2 F^3}{4R^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2}\right) \rho d\rho \int_0^1 t^2 dt \int_0^\infty \left[1 + \cos\left(\frac{x^2 L}{k} t\right)\right] \times \\ \times J_0(x\rho t) x^{-2/3} dx. \quad (18)$$

Меняя порядок интегрирования и вычисляя возникающие интегралы, находим

$$\sigma_c^2 = \frac{3C_0 \pi^2 \Gamma(1/6)}{32 \cdot 2^{5/6}} C_\varepsilon^2 F^3 R^{-1/3} \left[1 + \frac{16}{17} \operatorname{Re} \frac{F(1, 1/6; 23/6; 1/(1+ig))}{(1+ig)^{1/6}}\right], \quad (19)$$

где параметр $g \equiv 2F/kR^2$ характеризует размер линзы по сравнению с зоной Френеля, а $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция.

Не представляет труда получить асимптотики (19) при больших и малых значениях параметра. При $g \ll 1$ квадратная скобка равна 2, а при больших g — единице. Эти асимптотические представления лишь численными коэффициентами отличаются от соответствующих выражений, полученных в [4], и от формул, дающих средний квадрат флуктуаций угла поворота фронта волны, в среднем параллельного базе R интерферометра.

3. Произведем теперь расчет среднего значения интенсивности в фокальной плоскости в двух случаях: на оси линзы и в системе координат, движущейся вместе с «центром тяжести».

Для нахождения средней интенсивности на оси линзы достаточно усреднить выражение (6). Учитывая, что фаза распределена по нормальному закону, приходим к выражению для средней интенсивности в точке $r = (F, \rho)$ фокальной плоскости:

$$\langle I(r) \rangle = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int d^2 \rho' \int d^2 \rho'' \exp\left[-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2} + \frac{ik\rho(\rho' - \rho'')}{F} - \frac{1}{2} D_S(r; \rho', \rho'')\right]. \quad (20)$$

Так как $D_S(r; \rho', \rho'') = D_S(r; |\rho' - \rho''|)$, то в (20) можно выполнить интегрирование по всем переменным, кроме $\rho_1 = |\rho' - \rho''|$, и свести это выражение к однократному интегралу

$$\langle I(r) \rangle = \frac{k^2 R^2 A_0^2}{2F^2} \int_0^\infty \rho_1 \exp\left[-\frac{\rho_1^2}{4R^2} - \frac{1}{2} D_S(r; \rho_1)\right] J_0\left(\frac{k\rho}{F} \rho_1\right) d\rho_1, \quad (21)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Для нахождения интересующего нас значения средней интенсивности на оси линзы достаточно в (21) положить $\rho = 0$. Результаты численного расчета в этом случае для структурной функции флуктуаций фазы, определяемой формулой (16), представлены на рис. 1 (кривая 2). Здесь по оси абсцисс отложена величина среднего квадрата флуктуаций разности фаз на базе $2R$ в плоской волне при прохождении дистанции F , пропорциональная интенсивности флуктуаций диэлектри-

ческой проницаемости и расстоянию F , а по оси ординат — $\langle I \rangle$, деленное на интенсивность I_0 , которая была бы в отсутствие флуктуаций.

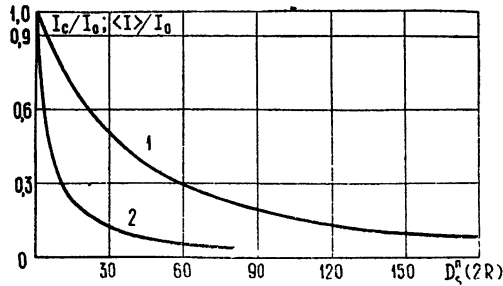


Рис. 1. Зависимости средней интенсивности в «центре тяжести» (кривая 1) и на оси линзы (кривая 2) дифракционной картины от среднего квадрата флуктуаций фазы на диаметре линзы.

Для расчета средней интенсивности в системе координат, движущейся вместе с центром тяжести, следует рассмотреть определяемую формулой (6) интенсивность в точке $r_c(F, y_c, z_c)$, после чего произвести усреднение. Компоненты вектора r_c с учетом (12) и (12 а) можно записать следующим образом:

$$r_c = \left[F, -\frac{F}{\pi k R^2} \int \exp\left(-\frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{\partial S_1(F, 0; \rho)}{\partial y} d^2\rho, -\frac{F}{\pi k R^2} \times \right. \\ \left. \times \int \exp\left(-\frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{\partial S_1(F, 0; \rho)}{\partial z} d^2\rho \right]. \quad (22)$$

Для интенсивности в «центре тяжести» изображения имеем

$$I(r_c) = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left[-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2} + \frac{ik\rho_c(\rho' - \rho'')}{F} + \right. \\ \left. + i\Delta S(F, \rho_c; \rho', \rho'') \right], \quad (23)$$

где $\Delta S(F, \rho_c; \rho', \rho'') = S_1(r_c, \rho') - S_1(r_c, \rho'')$ — разность флуктуационных набегов фаз лучей, проходящих в центр тяжести изображения из точек с координатами $(0, \rho')$ и $(0, \rho'')$.

При усреднении (23) возникают трудности, так как среди аргументов случайной функции ΔS есть случайные величины. В связи с этим воспользуемся следующим преобразованием:

$$\exp\left[\frac{ik}{F} \rho_c(\rho' - \rho'') + i\Delta S(F, \rho_c; \rho', \rho'')\right] = \\ = \int \delta(\rho - \rho_c) \exp\left[\frac{ik}{F} \rho(\rho' - \rho'') + i\Delta S(F, \rho; \rho', \rho'')\right]. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и используя интегральное представление дельта-функции, получаем

$$I(r_c) = \frac{k^2 A_0^2}{16\pi^4 F^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \exp\left(-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int d^2\rho \exp\left[\frac{ik\rho(\rho' - \rho'')}{F}\right] \exp[i\Delta S(F, \rho; \rho', \rho'')] \times \\ & \times \int d^2\kappa \exp[i\kappa(\rho - \rho_c)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Для вычисления $\langle I(r_c) \rangle$ воспользуемся тем, что ΔS и ρ_c распределены по нормальному закону:

$$\begin{aligned} \langle I(r_c) \rangle &= \frac{k^2 A_0^2}{16\pi^4 F^2} \int d^2\rho' \int d^2\rho'' \int d^2\kappa \times \\ & \times \int d^2\rho \exp\left[-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2} + \frac{ik\rho(\rho' - \rho'')}{F} + i\kappa\rho - \frac{1}{2}\langle \mu^2 \rangle\right], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\mu = \Delta S(F, \rho; \rho', \rho'') - \kappa\rho_c$, а по κ и ρ сменен порядок интегрирования. Вычислим теперь величину $\langle \mu^2 \rangle$. Используя легко проверяемое соотношение $\langle y_c z_c \rangle = 0$, получаем

$$\langle \mu^2 \rangle = \langle [\Delta S(F, \rho; \rho', \rho'')]^2 \rangle + \kappa^2 \sigma_c^2 - 2 \langle \Delta S \kappa \rho_c \rangle. \quad (27)$$

Последний член в (27) можно вычислить, используя равенство

$$\langle S_1(F, \rho; \rho_0) \rho_{ic} \rangle = -\frac{F}{2\pi k R^2} \frac{\partial}{\partial \rho_{i0}} \int d^2\rho' \exp\left(-\frac{\rho'^2}{R^2}\right) D_s(F, \rho; |\rho' - \rho_0|),$$

записанное с учетом изотропности структурной функции фазы сходящихся лучей и формул (12) и (12а). Для $\langle \mu^2 \rangle$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle \mu^2 \rangle &= D_s(F, \rho; \rho', \rho'') + \kappa^2 \sigma_c^2 + \\ & + \frac{F}{\pi k R^2} \kappa [n_1 L'(F, \rho; \rho') - n_2 L'(F, \rho; \rho'')], \end{aligned}$$

где

$$n_1 = \rho' / |\rho'|, \quad n_2 = \rho'' / |\rho''|,$$

$$L(F, \rho; \rho_0) = \int \exp(-\rho'^2/R^2) D_s(F, \rho; |\rho' - \rho_0|) d^2\rho'.$$

Учитывая теперь, что $\langle \mu^2 \rangle$ — медленно меняющаяся функция аргумента ρ (она заметно меняется на масштабах $\rho \sim F$), получаем, что

$$\begin{aligned} & \int \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mu^2 \rangle\right) \exp\left\{i\left[\frac{k}{F}(\rho' - \rho'') + \kappa\right]\rho\right\} d^2\rho = \\ & = 4\pi^2 \delta_{1/F}\left[\frac{k}{F}(\rho' - \rho'') + \kappa\right] \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mu^2 \rangle\right)_{\rho=0}, \end{aligned}$$

если $\delta_{1/F}(\kappa)$ — дельта-функция, «размазанная» по области порядка $1/F$ (она переходит в дельта-функцию при $F \rightarrow \infty$, когда $\exp[(-1/2)\langle \mu^2 \rangle(\rho)] = \text{const}$).

При интегрировании по κ отличие $\delta_{1/F}$ от обычной дельта-функции несущественно, если только

$$\sigma_c^2 \ll F^2,$$

что мы будем в дальнейшем предполагать выполненным*. В результате для средней интенсивности в точке «центра тяжести» получаем выражение

$$I_c \equiv \langle I(\mathbf{r}_c) \rangle = \frac{k^2 A_0^2}{4\pi^2 F^2} \int d^2 \rho' \int d^2 \rho'' \exp\left(-\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2R^2}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2} D_S(F, 0; \rho' - \rho'') - \frac{k^2}{2F^2} \sigma_c^2 (\rho' - \rho'')^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho' - \rho''}{2\pi R^2} [n_1 L'(F, 0; \rho') - n_2 L'(F, 0; \rho'')] \right\}. \quad (28)$$

Подставляя в (28), как это делалось в разд. 2, конкретный вид структурной функции флуктуаций фазы, получающийся из колмогоровской модели турбулентности, можно после несложных, но довольно громоздких вычислений получить следующую формулу для средней интенсивности в движущемся «центре тяжести» дифракционной картины в фокальной плоскости линзы:

$$I_c = \frac{k^2 R^4 A_0^2}{2\pi F^2} \int_0^\infty x dx \int_0^\infty y dy \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2} - \nu(x, y, \varphi; (D_S^n(R)))\right], \quad (29)$$

где

$$\nu(x, y, \varphi; D_S^n(R)) = D_S^n(R) \left\{ \frac{3}{16} (x^2 - 2xy \cos \varphi + y^2)^{5/6} + \right. \\ \left. + \frac{4\gamma}{3} (x^2 - 2xy \cos \varphi + y^2) - \frac{3\alpha}{16\pi} \left[(x^2 - xy \cos \varphi) {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -x^2\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (y^2 - xy \cos \varphi) {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -y^2\right) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\gamma = \frac{25 \Gamma(5/6)}{96 \cdot 2^{1/6}}, \quad \alpha = \frac{50 \pi \Gamma(5/6)}{36},$$

${}_1F_1(\alpha, \gamma; \mathbf{z})$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Численный расчет величины I_c , нормированной на I_0 , был произведен на ЭВМ и результаты его представлены на рис. 1 (кривая 1). Таким образом, средняя интенсивность в «следающей» системе координат, как видно из рис. 1, оказывается значительно большей, чем на оси линзы при тех же значениях $D_S^n(2R)$.

Совершенно аналогично можно получить не только значение средней интенсивности в «центре тяжести» изображения, но и ее распределение в системе координат, движущейся вместе с «центром тяжести». Для этого в формулу (6) следует подставить $\rho = \rho_c + \rho_0$, где ρ_c — случайный вектор положения «центра тяжести», а ρ_0 — постоянный вектор в фокальной плоскости. Для средней интенсивности в системе координат, совершающей случайные движения вместе с «центром тяжести» изображения, таким образом, имеем формулу

* Это условие возникает из требования, чтобы $\exp(-x^2 \sigma_c^2/2)$ мало менялось в области $x \lesssim 1/F$. При выполнении этого условия можно $\delta_{1/F}(\mathbf{x})$ заменить на $\delta(\mathbf{x})$.

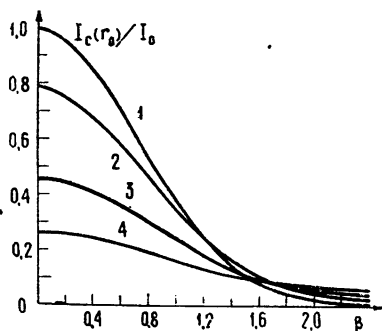
$$\frac{\langle I(\rho_c + \rho_0) \rangle}{I_0} \equiv \frac{I_c(|\rho_0|)}{I_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty x dx \int_0^\infty y dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \times \quad (31)$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp[-\nu(x, y, \varphi; D_S^n(R))] J_0[\beta(x^2 - 2xy \cos \varphi + y^2)^{1/2}],$$

где $\beta = kR |\rho_0| / F$.

На рис. 2 представлены результаты расчета функции $I_c(|\rho_0|) / I_0$ на ЭВМ при различных фиксированных значениях параметра $D_S^n(2R)$.

Рис. 2. Профили средней интенсивности в системе координат, движущейся вместе с «центром тяжести» дифракционной картины (кривая 1—в отсутствие флуктуаций, кривая 2—для $D_S^n(2R)=10$, кривая 3— $D_S^n(2R)=35$, кривая 4— $D_S^n(2R)=70$).



Из сравнения средних значений интенсивности на оси линзы и в «центре тяжести» дифракционной картины можно дать грубую оценку флуктуаций интенсивности на оптической оси. Среднее распределение интенсивности в неподвижной системе координат можно представить как результат усреднения распределения интенсивности в подвижной системе по флуктуациям координат «центра тяжести». Отсюда ясно, что порядок величины флуктуаций интенсивности на оптической оси равен $I_c - \langle I \rangle$ и, следовательно, эта величина растет вместе с $D_S^n(2R)$. Этот вывод противоречит результатам работы [9], где дисперсия флуктуаций интенсивности в фокусе убывает с ростом дистанции и, соответственно, с ростом $D_S^n(2R)$. По нашему мнению это расхождение объясняется тем, что расчеты в [9] основаны непосредственно на методе плавных возмущений, применимость которого в фокусе вызывает большие сомнения, так как вблизи фокуса небольшие фазовые сдвиги могут приводить к большим изменениям интенсивности (например, за счет сдвига дифракционной картины), в то же время метод плавных возмущений не может приводить к сильным флуктуациям интенсивности при слабых флуктуациях показателя преломления.

Автор выражает искреннюю признательность В. И. Татарскому за постоянную помощь в работе, а также В. С. Трушко за выполнение расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Heidbreder, R. L. Mitchell, J. Optical Society America, 56, № 12, 863 (1966).
2. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 488 (1963).
3. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 9, № 1, 33 (1964).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

5. Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, З. И. Фейзулин, Сб. трудов семинара по статистической радиофизике (в печати).
6. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
7. Ф. Г. Басс, А. В. Мень, Акуст. ж., 9, вып. 3, 283 (1963).
8. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 306 (1964).
9. D. L. Fried, J. B. Seidman, J. Optical Society America, 57, № 2, 312 (1967).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
13 ноября 1968 г.

LIGHT FOCUSING IN A TURBULENT MEDIUM

A. I. Kon

The influence of the refractive index inhomogeneities behind the lens on the parameters of a focused wave is considered. The formulas obtained for the random coordinates of the „gravity center“ of the image in a focal plane of the lens are used for calculating the mean square of fluctuations of the „gravity center“ of the diffraction pattern. The formulas are derived for the mean light intensity both on the lens axis and in a randomly moving point of the gravity center of the image. The profile of the mean intensity in a movable coordinate system coupled with the gravity center of the diffraction pattern has been calculated. The results of the corresponding numerical calculations are given.
