

УДК 535.3

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ

Ю. А. Ильинский, Ю. А. Янайт

Рассматривается сохранение пространственной модуляции амплитуды света по амплитуде или интенсивности при параметрическом преобразовании. Показано, что при реальных длинах кристаллов число разрешимых элементов может достигать  $4 \cdot 10^4$ .

Методы нелинейной оптики позволяют осуществить параметрическое взаимодействие двух световых волн с частотами  $\omega_1$  (накачка) и  $\omega_2$  (сигнал) и получить излучение света на суммарной частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Выбрав надлежащим образом частоту накачки  $\omega_1$ , можно произвести преобразование инфракрасного излучения  $\omega_2$  в видимую область спектра  $\omega_3$ .

В данной работе рассматривается принципиальная возможность переноса изображения, т. е. пространственной модуляции света по амплитуде или интенсивности при подобном преобразовании.

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай генерации излучения на разностной частоте  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ , однако он менее интересен, поскольку такое преобразование сопровождается значительным уровнем шумов из-за параметрической люминесценции [1].

### 1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ—ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ФИЛЬТР

Схематическая модель преобразователя показана на рис. 1. В плоскости  $z_1$ , параллельной плоскости среза нелинейного кристалла НК,

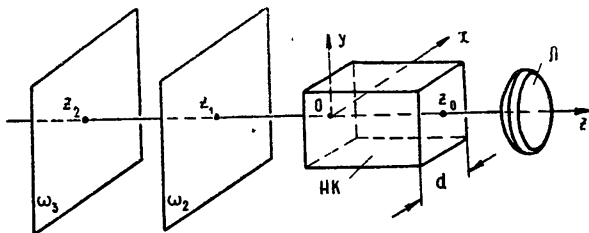


Рис. 1. Схематическая модель преобразователя.

задано распределение комплексных амплитуд сигнального излучения  $\omega_2$ . Вдоль кристалла, в направлении, близком к оси  $z$ , распространяется мощная плоская волна накачки  $\omega_1$ .

Далее будет показано, что для получения высокой разрешающей способности преобразованного изображения должны допускаться по возможности большие угловые расстройки сигнальной волны от направления точного синхронизма. Это достигается, когда вектор сигнального излучения при выполнении условия синхронизма составляет малый угол с направлением накачки.

Допустимые угловые расстройки от направления точного синхро-

низма при реальных длинах кристаллов достаточно малы (около  $1^\circ$ ). Кроме того, параметрическому преобразованию подвергаются волны лишь с вполне определенной поляризацией. Исходя из этого, достаточно рассматривать только одну компоненту поля сигнального излучения. Если предположить, что оптическая ось одноосного кристалла лежит в плоскости  $xz$ , то при выполнении условия синхронизма для необыкновенной волны такой компонентой поля будет  $E_{2x}$ , а для обыкновенной —  $E_{2y}$ . Эти существенные компоненты будем сокращенно обозначать через  $E_2$ .

Представляя комплексную амплитуду  $E_2(x, y, z_1)$  в виде интеграла Фурье, что отвечает разложению по плоским волнам, получаем

$$E_2(k_{2x}, k_{2y}, z_1) = \frac{1}{2\pi} \int E_2(x, y, z_1) \exp [i(k_{2x}x + k_{2y}y)] dx dy. \quad (1)$$

Далее, если накачка представляет плоскую волну и ее волновой вектор имеет вдоль осей  $x$  и  $y$  соответствующие компоненты  $k_{1x}$  и  $k_{1y}$ , то результатом преобразования сигнальной волны, у которой волновой вектор имеет компоненты  $k_{2x}$  и  $k_{2y}$ , будет плоская волна, для которой

$$k_{3x} = k_{1x} + k_{2x}, \quad k_{3y} = k_{1y} + k_{2y}.$$

Излучение волны на суммарной частоте  $\omega_3$ , выходящее из кристалла, можно формально отнести к некоторой плоскости  $z_2$ , на которую сфокусирован объектив  $L$  наблюдателя. При этом можно ввести коэффициент преобразования

$$K = \frac{E_3(k_{3x}, k_{3y}, z_2)}{E_2(k_{2x}, k_{2y}, z_1)}. \quad (2)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем следующее выражение для распределения комплексных амплитуд  $E_3(x, y, z_2)$  в плоскости  $z_2$ :

$$E_3(x, y, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp[-i(k_{1x}x + k_{1y}y)] \int E_2(k_{2x}, k_{2y}, z_1) \times \\ \times K \exp[-i(k_{2x}x + k_{2y}y)] dk_{2x} dk_{2y} \quad (3)$$

или после подстановки (1)

$$E_3(x, y, z_2) = \exp[-i(k_{1x}x + k_{1y}y)] \times \\ \times \int E_2(x', y', z_1) \Gamma(x - x', y - y', z_1, z_2) dx' dy', \quad (4)$$

где

$$\Gamma(x, y, z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int K(k_{2x}, k_{2y}) \times \\ \times \exp[-i(k_{2x}x + k_{2y}y)] dk_{2x} dk_{2y}. \quad (5)$$

Таким образом, свертка распределения комплексной амплитуды на частоте  $\omega_2$  с функцией  $\Gamma$  дает распределение комплексной амплитуды в плоскости  $z_2$  на суммарной частоте  $\omega_3$ , т. е.  $\Gamma$  является функцией разброса при когерентном освещении.

Предположим теперь, что сигнальное излучение в плоскости  $z_1$  представляет собой свет, рассеянный от диффузно отражающей поверхности. Вычислим статистически усредненную интенсивность света на суммарной частоте в плоскости  $z_2$  или, точнее, плотность мощности

$$I_3(x, y, z_2) = \frac{c}{8\pi} \overline{E_3 E_3^*} = \frac{c}{8\pi} \int \overline{E_2(x', y', z_1) E_2^*(x'', y'', z_1)} \times \\ \times \Gamma(x - x', y - y', z_1, z_2) \Gamma^*(x - x'', y - y'', z_1, z_2) dx' dy' dx'' dy''. \quad (6)$$

Но  $E_2 E_2^*$  отлично от нуля лишь когда  $x' - x''$  и  $y' - y''$  сравнимы с длиной волны света  $\lambda_2$ . На таких малых расстояниях функция  $\Gamma$  изменяется незначительно, поэтому

$$I_3 = \lambda_2^2 \int |\Gamma(x - x', y - y', z_1, z_2)|^2 D(x', y', z_1) dx' dy'. \quad (7)$$

Здесь  $D$  имеет смысл яркости излучения в точке с координатами  $x, y$ , и  $z_1$  в направлении оси  $z$ .

Если функция  $D$  постоянна на поверхности  $z_1$ , то

$$I_3 = \lambda_2^2 D \int |\Gamma|^2 dx' dy' = D \frac{\lambda_2^2}{(2\pi)^2} \int |K|^2 dk_{2x} dk_{2y} \simeq \\ \simeq D \int |K|^2 d\Omega = D |K_0|^2 \Delta\Omega, \quad (8)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла,  $K_0$  — коэффициент преобразования в направлении точного синхронизма,  $\Delta\Omega$  — эффективный телесный угол допустимых расстройек для сигнальной волны.

Если же  $D$  зависит от координат  $x$  и  $y$ , то  $|\Gamma|^2$  играет роль функции разброса для интенсивности, и разрешающую способность можно оценить по ширине этой функции. Разрешающая способность приближенно равна  $\lambda_2/\Delta\varphi_2$ , где  $\lambda_2$  и  $\Delta\varphi_2$  — соответственно длина волны и допустимые угловые расстройки для сигнальной волны.

## 2. ФУНКЦИЯ РАЗБРОСА ПРИ МАЛОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим случай малого коэффициента преобразования  $K$ , пренебрегая потерями в кристалле.

Пусть  $\vartheta$  — угол между осью  $z$  и оптической осью нелинейного кристалла, а  $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$  — волновой вектор необыкновенной волны. Тогда  $z$ -компонента этого вектора в кристалле с точностью до членов второго порядка малости относительно  $k_x$  и  $k_y$  будет равна

$$k_z = k - \operatorname{tg} \gamma k_x - \frac{1 + \mu}{2k} k_x^2 - \frac{1 + \nu}{2k} k_y^2, \quad (9)$$

где  $k$  — модуль волнового вектора, направленного по оси  $z$ ,  $\gamma$  — угол анизотропии кристалла для этого направления, а  $\mu$  и  $\nu$  определяются формулами

$$1 + \mu = \frac{1 + \varepsilon \cos^2 \vartheta}{1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta} - \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad 1 + \nu = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta}, \quad (10)$$

в которых

$$1 + \varepsilon = \frac{n_0^2}{n_e^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon \cos \vartheta \sin \vartheta}{1 + \varepsilon \sin^2 \vartheta}.$$

При малом  $\varepsilon$ , т. е. когда обыкновенный  $n_0$  и необыкновенный  $n_e$  показатели преломления мало отличаются один от другого, поправки  $\mu$  и  $\nu$  также оказываются малыми. Будем считать, что волновой вектор

накачки направлен по оси  $z$ . Тогда  $k_{2x} = k_{3x} = k_x$ ,  $k_{2y} = k_{3y} = k_y$ , и расстройку  $\Delta = k_{1z} + k_{2z} - k_{3z}$  на основе (9) и (10) можно записать в виде

$$\Delta = -\alpha(k_x + x)^2 - \beta k_y^2 + \Delta_0, \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{1 + \mu_2}{2k_2} - \frac{1 + \mu_3}{2k_3}, \quad \beta = \frac{1 + \nu_2}{2k_2} - \frac{1 + \nu_3}{2k_3},$$

$$x = \frac{1}{2\alpha} (\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_3), \quad \Delta_0 = k_1 + k_2 - k_3 + \alpha x^2,$$

а величины  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  и  $k$  с индексами 1, 2, 3 относятся соответственно к волнам накачки, сигнала и суммарной частоты. При рассмотрении обыкновенной волны следует положить  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\operatorname{tg} \gamma_2 = 0$ . При дальнейшем анализе будем предполагать  $\Delta_0 = 0$ , что выполнимо при соответствующем срезе кристалла.

Укороченные уравнения в пренебрежении реакций на накачку имеют вид [2]

$$\frac{dE_2}{dz} = -iC_2 e^{i\Delta z} E_3 E_1^*,$$

$$\frac{dE_3}{dz} = -iC_3 e^{-i\Delta z} E_1 E_2, \quad (12)$$

где

$$C_i = \frac{\beta \omega_i^2}{(k_i s_i) (s_i m)},$$

$E_i$  — комплексные амплитуды, соответствующие частотам  $\omega_i$ ,  $s_i$  — единичные векторы вдоль лучевых векторов волн,  $m$  — единичный вектор вдоль оси  $z$ ,  $\beta$  — коэффициент, зависящий от нелинейных свойств кристалла. Ввиду малости угловых расстройк коэффициенты  $\beta$  и  $C_i$  могут считаться постоянными, не зависящими от  $k_x$  и  $k_y$ .

В результате решения уравнений (12) и пересчета полей в плоскости  $z_1$  и  $z_2$  получаем следующее выражение для  $K(k_x, k_y)$ :

$$K(k_x, k_y) = -\frac{2i}{\Delta} r_2 r_3 C_3 E_1 \sin\left(\frac{\Delta}{2} z_0\right) \exp\left[-iz_0\left(\frac{\Delta}{2} + k_{3z}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_3}(z_2 - z_0)\right] \exp\left(-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_2} z_1\right). \quad (13)$$

Здесь  $z_0$  — длина кристалла (рис. 1),  $r_2$  и  $r_3$  — коэффициенты прохождения для волны сигнала через поверхность  $z = 0$  и для волны с суммарной частотой через поверхность  $z = z_0$ . (эти коэффициенты можно считать не зависящими от  $k_x$  и  $k_y$ ),  $k'_2$  и  $k'_3$  — модули волновых векторов соответствующих длин волн вне кристалла.

При малой анизотропии кристалла ( $\mu_i \ll 1$ ,  $\nu_i \ll 1$ ) последнее выражение можно записать в виде

$$K(k_x, k_y) = -\frac{2i}{\Delta} r_2 r_3 C_3 E_1 \sin\left(\frac{\Delta}{2} z_0\right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{2} z_0 (\operatorname{tg} \gamma_2 + \operatorname{tg} \gamma_3) k_x\right]. \quad (14)$$

В формулах (13) и (14) отброшены несущественные фазовые множители, не зависящие от  $k_x$  и  $k_y$ , а в (14) фазовый множитель, зависящий от  $k_x^2$  и  $k_y^2$ , положен равным единице. Это достигается при

$$z_2 = \frac{k_3'}{k_2'} z_1 + \left(1 - \frac{k_3'}{2k_2'} - \frac{k_3'}{2k_3'}\right) z_0. \quad (15)$$

Такой выбор положения плоскости изображения с суммарной частотой обеспечивает, как можно показать, наименьшую ширину функции разброса, что соответствует наибольшей разрешающей способности изображения.

Применяя к выражению (14) преобразование Фурье, получаем

$$\Gamma(x, y) = -\frac{i}{\pi} r_2 r_3 C_3 E_1 e^{ix} k_s \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si} \frac{k_s [(x - x_0)^2 + y^2]}{z_0} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3}, \quad x_0 = \frac{z_0}{2} (\text{tg } \gamma_2 + \text{tg } \gamma_3).$$

Из графика функции  $(\pi/2) - \text{Si } \xi^2$  (рис. 2) видно, что первый корень

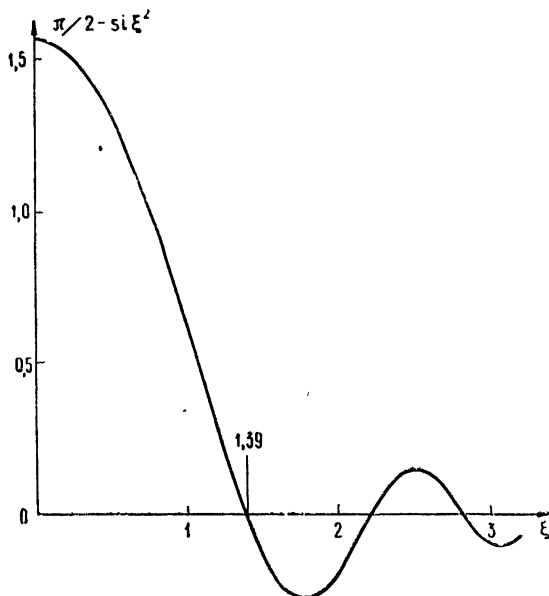


Рис. 2. График функции  $(\pi/2) - \text{Si } \xi^2$ .

этой функции имеет значение  $\xi \approx 1,4$ . Следовательно, согласно критерию Рэлея, получаем следующее выражение для разрешающей способности:

$$\Delta x = \Delta y \approx 1,4 \sqrt{z_0/k_s}. \quad (17)$$

При  $z_0 \approx 1$  см находим  $\Delta x \approx (3 \div 5) \cdot 10^{-3}$  см.

Анизотропия кристалла приводит к «сносу» изображения на расстояние  $x_0$ . Максимальное число разрешимых элементов равно  $(d/\Delta x)^2$ , где  $d$  — поперечный размер кристалла.

Все предыдущее рассмотрение относилось к случаю, когда расстояния  $|z_1|$  и  $|z_2|$  не превышали нескольких  $z_0$ . Можно также рассмотреть и случай удаленного объекта, когда  $z_1$  велико. При этом  $z_2 \approx$

$\simeq z_1 \omega_3 / \omega_2$ , и разрешение определяется дифракцией на поперечном сечении кристалла, а полное поле зрения — допустимыми угловыми расстройками от синхронизма. Число разрешимых элементов оказывается таким же, как и в первом случае. Действительно, в случае малых  $z_1$  и  $z_2$  разрешение  $\Delta x \simeq \lambda_2 / \Delta \varphi_2$ , а полное число элементов —  $(d \Delta \varphi_2 / \lambda_2)^2$ . При больших  $z_1$  угловое разрешение равно примерно  $\lambda_2 / d$  и при поле зрения  $\Delta \varphi_2$  число элементов также равно  $(d \Delta \varphi_2 / \lambda_2)^2$ . Мощность на частоте  $\omega_3$  в обоих случаях одинакова и при постоянной энергетической яркости  $D$  равна

$$N = \frac{D}{2z_0} |K_0|^2 d^2 \lambda_2^2 k_s.$$

Если  $|K_0| \ll 1$ , то при уменьшении эффективного поперечного сечения кристалла, например, при уменьшении поперечного сечения накачки телескопическим устройством, коэффициент преобразования  $|K_0|^2$  будет пропорционален отношению  $z_0^2 / d^2$ . Полная же мощность на суммарной частоте пропорциональна

$$\frac{d^2}{z_0} \frac{z_0^2}{d^2} = z_0,$$

т. е. растет с увеличением длины кристалла. Таким образом, сжатие накачки при заданной ее мощности не дает энергетического выигрыша, если только оптические системы, стоящие перед нелинейным кристаллом, обеспечивают полную яркость  $D$  в пределах телесного угла допустимых угловых расстроек  $\Delta \varphi_2$  на всем поперечном сечении кристалла.

В работе Мидвинтера [3] экспериментально продемонстрирована возможность преобразования изображения при генерации суммарной частоты. При этом использовалась схема эксперимента, соответствующая случаю удаленного объекта. Как показано в настоящей работе, эта схема не дает преимуществ ни в энергетическом отношении, ни в разрешающей способности. Но эта схема предъявляет более высокие требования как к допустимой расходимости накачки, так и к однородности кристалла. Именно расходимость накачки при ее превышении над дифракционной определяет угловое разрешение [3].

В случае же малых  $z_1$  и  $z_2$  расходимость накачки может достигать значений  $\Delta \varphi_2$  без существенного уменьшения разрешения.

Заметим, что в плоскости  $z_1$  может находиться не сам излучающий объект, а его изображение, построенное обычной оптической системой.

До сих пор рассматривалось преобразование только монохроматического света. Немонохроматичность накачки и сигнала не будет сказываться, если

$$\left| \left( \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_2} \right) \Delta \omega_2 z_0 \right| \ll 2\pi, \quad \left| \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} \right) \Delta \omega_1 z_0 \right| \ll 2\pi, \quad (20)$$

где  $v_i = \frac{d\omega_i}{dk_i}$  — проекции групповых скоростей на ось  $z$ , а  $\Delta \omega_i$  — ширины спектров соответствующих длин волн. Использование немонахроматического света в схеме с удаленным объектом [3] при некоторых условиях позволяет увеличить поле зрения при угловом разрешении, определяемом расходимостью накачки, а в пределе — дифракцией на поперечном сечении кристалла.

Энергетическая эффективность преобразования изображения определяется величиной  $|K_0|^2$ , которая зависит от мощности накачки, а также от длины и нелинейных свойств кристалла. Для используемых в на-

стоящее время в нелинейной оптике кристаллов требуется плотность мощности накачки порядка  $10^6 \div 10^7 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$ , чтобы коэффициент преобразования по мощности достигал нескольких процентов. Такие плотности мощности легко достигаются при импульсной работе лазеров.

Таким образом, при длине и поперечных размерах кристаллов порядка 1 см можно осуществить преобразование изображения на суммарной частоте при числе разрешимых элементов, достигающем  $[(2 \div 3) \cdot 10^2]^2$ . При определенных условиях расходимость накачки сказывается слабо и разрешение определяется допустимыми угловыми расстройками от направления точного синхронизма. Последние зависят от длины кристалла.

Авторы выражают благодарность Р. В. Хохлову за участие в обсуждении настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Клышко, Д. П. Криндач, ЖЭТФ, 54, № 3, 697 (1968).
2. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
3. J. E. Midwinter, Appl. Phys. Lett., 12, № 3, 68 (1968).

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
31 января 1969 г.

#### IMAGE TRANSFORMATION IN GENERATION OF SUM FREQUENCY

*Yu. A. Il'inskii, Yu. A. Yanayt*

The conservation of the spatial light modulation according to the amplitude or intensity at parametric transformation is considered. It is shown that at the real lengths of crystals, the number of solvable elements may reach  $4 \cdot 10^4$ .

---