ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1970

УДК 533.951.2

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Л. С. Богданкевич, И. И. Желязков, А. А. Рухадзе

Исследована задача взаимодействия ограниченного релятивистского электронного пучка малой плотности с плазмой, находящейся в сильном продольном магнитном поле. Определена критическая плотность плазмы, выше которой в системе возможно развитие электростатических неустойчивостей. В достаточно длинных системах критическая плотность плазмы при малых плотностях пучка растет с ростом его плотности, достигая некоторого значения, определяемого направленной скоростью электронов и геометрическими размерами системы. В системах, ограниченных в продольном направлении, критическая плотность плазмы может зависеть также от длины системы и напряженности магнитного поля. При этом критическая плотность больше, чем в случае длинной системы. Из анализа устойчивости следует, что максимальный ток электронного пучка, который можно пропустить через волновод, растет в релятивистской области с ростом энергии электронов как $\mathcal{E}^3$. Это открывает возможность пропускания больших токов через плотную плазму.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теории взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой посвящено огромное число работ (см. [1-4] и цитированную в них литературу). В подавляющем большинстве работ исследуется взаимодействие пространственно неограниченных пучков с плазмой, определяются условия возбуждения различных мод колебаний и находятся максимальные инкременты развития неустойчивостей. Однако для объяснения экспериментов часто важно знание критических параметров плазмы и пучка, при которых возникает неустойчивость в ограниченных системах. Именно с такой постановкой задачи мы встречаемся, когда электронный пучок радиуса r_0 взаимодействует с плазмой, созданной самим пучком при ионизации нейтрального газа [5, 6]. В этих экспериментах неустойчивость возникает при достижении некоторого критического значения плотности плазмы, зависящего от параметров пучка, величины продольного магнитного поля и геометрических размеров системы. В работе [6] уже была предпринята попытка теоретического объяснения наблюдаемых явлений. Однако эту попытку следует считать неудачной, так как использованное в этой работе приближение геометрической оптики не позволяет количественно правильно найти критические параметры плазмы и пучка, при которых в ограниченной системе возникают неустойчивые колебания.

В настоящей работе исследуется задача взаимодействия ограниченного релятивистского электронного пучка с плазмой, находящейся в волноводе, продольные размеры которого L больше радиуса R. Для удержания пучка система помещается в сильное продольное магнитное поле, удовлетворяющее условию

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \gg \frac{N_1 mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{1.1}$$

Здесь N_1 — плотность электронов в пучке, а $\beta = u/c$, где u — скорость электронов. Предполагается также, что B_0 больше собственного магнитного поля тока пучка (это накладывает ограничение на радиус пучка) и поэтому последним при исследовании взаимодействия пучка с плазмой можно пренебречь.

Условие (1.1) позволяет ограничиться рассмотрением лишь электростатических колебаний в системе с сильно замагниченными электронами. Уравнение для потенциала поля колебаний в этих условиях записывается в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(1+\frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]-\frac{l^2}{r^2}\left(1+\frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right)\Phi-\left[1-\frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2}}{(\omega-k_z u)^2}\right]k_z^2\Phi-\frac{l}{r}\Phi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\omega_{L2}^2}{\omega\Omega}+\frac{\omega_{L1}^2}{\Omega(\omega-k_z u)}\right]=0. \tag{1.2}$$

Здесь ω_{L1} и ω_{L2} — ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы соответственно, Ω — их ларморовская частота (все величины даются в лабораторной системе координат), ω — частота колебаний, а k_z и l — продольное и азимутальное волновые числа.

Граничные условия на поверхности системы плазма—пучок (радиус плазмы мы считаем совпадающим с радиусом пучка) получаются путем интегрирования уравнения (1.2) по узкому слою и имеют вид

$$\{\Phi\}_{r=r_0}=0,$$
$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}\left(1+\frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right)-\frac{l}{r}\Phi\left[\frac{\omega_{L2}^2}{\omega\Omega}+\frac{\omega_{L1}^2}{\Omega(\omega-k_z u)}\right]\right\}_{r=r_0}=0. \tag{1.3}$$

На поверхности же волновода имеем

$$\Phi\big|_{r=R}=0. \tag{1.4}$$

Решая уравнение (1.2) с граничными условиями (1.3) и (1.4) в предположении однородности пучка и плазмы при $r<r_0$, получаем следующее соотношение:

$$\left(1+\frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right)\frac{1}{J_l(i\alpha k_z r_0)}\frac{d}{dr_0}J_l(i\alpha k_z r_0)=\frac{l}{r_0}\left[\frac{\omega_{L2}^2}{\omega\Omega}+\frac{\omega_{L1}^2}{\Omega(\omega-k_z u)}\right]-f_l, \tag{1.5}$$

где

$$\alpha^2=\left[1-\frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2}}{(\omega-k_z u)^2}\right]\left(1+\frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right)^{-1},$$

$$f_l=\frac{I_l(k_z R)\dfrac{d}{dr_0}K_l(k_z r_0)-K_l(k_z R)\dfrac{d}{dr_0}I_l(k_z r_0)}{I_l(k_z r_0)K_l(k_z R)-I_l(k_z R)K_l(k_z r_0)},$$

J_l, I_l, K_l — функции Бесселя.

2. ПРЕДЕЛ ДЛИННОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим волновод, неограниченный в продольном направлении. В этом случае соотношение (1.5) представляет собой дисперсионное уравнение колебаний, корни которого $\omega(k_z, l)$ характеризуют устойчивость системы. Поставленная выше задача состоит в определении параметров плазмы и пучка, при которых в системе возникает неустойчивость, т. е. среди корней уравнения (1.5) появляется решение с $\operatorname{Im}\omega(k_z, l) > 0$.

В условиях, когда плазма полностью заполняет волновод, $r_0 = R$, функция $f_l \to \infty$ и уравнение (1.5) принимает вид

$$\frac{\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2}}{(\omega - k_z u)^2} + \frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\mu_{ln}^2}{k_z^2 r_0^2}\left(1 + \frac{\omega_{L2}^2}{\Omega^2}\right), \tag{2.1}$$

где μ_{ln} — корни функции Бесселя $J_l(\mu_{ln}) = 0$ (кроме $\mu_{ln} = 0$). Учитывая малость плотности пучка $N_1(1-\beta^2)^{3/2} \ll N_2$, из уравнения (2.1) находим выражение для плотности плазмы, при которой в системе происходит возбуждение моды колебаний с заданными k_z, l и n*:

$$N_2 \geqslant 3\cdot 10^{-10}\left(k_z^2 + \frac{\mu_{ln}^2}{r_0^2}\right)u^2\left(1 - \frac{\mu_{ln}^2 u^2}{r_0^2\Omega^2}\right)^{-1}. \tag{2.2}$$

Существенно, что при этом возможно возбуждение лишь мод с $\mu_{ln} < r_0\Omega/u$, частота которых $\omega \simeq k_z u$. Минимальное значение N_2, соответствующее возникновению неустойчивости в системе, в дальнейшем называется критической плотностью плазмы и дается формулой

$$N_{2\,\text{кр}} \geqslant 1{,}7\cdot 10^{-9}\frac{u^2}{r_0^2}\left[1 - \frac{(2{,}4)^2 u^2}{r_0^2\Omega^2}\right]^{-1}. \tag{2.3}$$

Как видно из этого выражения, критическая плотность плазмы в рассматриваемом случае не зависит от плотности пучка; она определяется направленной скоростью электронов и радиусом пучка. Зависимость критической плотности от магнитного поля по условиям применимости формулы (2.3) $\omega \lessgtr \omega_{L2} < \Omega$ должна быть не очень сильной, хотя из-за ее резонансного характера в реальных экспериментах она может заметно проявиться. При достижении критической плотности (2.3) в плазме происходит возбуждение колебаний, соответствующих основной радиальной моде $l = 0$, $n = 1$ и $k_z r_0 \ll 2{,}4$. Инкремент нарастания колебаний при этом порядка $\gamma \lesssim (N_1/2N_2)^{1/3}(1-\beta^2)^{1/2} k_z u$. Учитывая это, а также принимая во внимание, что неустойчивость в рассматриваемом случае является сносовой (возмущения сносятся со скоростью u), находим условие применимости формул (2.1)—(2.3) для длинных систем:

$$\frac{L}{r_0} \gg \left(\frac{2N_2}{N_1}\right)^{1/3}\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \gtrsim 1{,}5\cdot 10^{-3}\left(\frac{u^2}{N_1 r_0^2}\right)^{1/3}\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}. \tag{2.4}$$

Это условие в реальных экспериментах (см., например, [5, 6]) выполняется с большим запасом.

Формула (2.3) остается справедливой также и в том случае, когда плазма неполностью заполняет волновод, но зазор между плазмой и металлическим кожухом волновода удовлетворяет условию $2{,}4\ln(R/r_0) \ll 1$. В обратном пределе, когда $R \gg r_0$, точнее $\ln(R/r_0) \gg 2$, зазор оказывает существенное влияние на характер взаимодействия пучка с плазмой. Критическая плотность плазмы в этом случае определяется возбуждением длинноволновых по радиусу колебаний, для которых $\alpha k_z r_0 \ll 1$, и уравнение (1.5) принимает вид

---

* Для простоты ниже мы всюду пренебрегаем малыми членами порядка $(1-\beta^2)^{1/2}(N_1/N_2)^{1/3}$.

$$1-\left[\frac{\omega_{L2}^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2}}{(\omega-k_z u)^2}\right]\frac{k_z^2 r_0^2}{k_z^2 r_0^2+2l(l+1)}-$$
$$-\frac{2l(l+1)}{k_z^2 r_0^2+2l(l+1)}\left[\frac{\omega_{L2}^2}{\omega\Omega}+\frac{\omega_{L1}^2}{\Omega(\omega-k_z u)}-\frac{r_0}{l}f_l\right]=0, \tag{2.5}$$

причем в пределе $R \gg r_0$

$$f_l=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0\ln(R/r_0)} & (l=0)\\ l/r_0 & (l\neq 0)\end{cases}.$$

В случае пучка малой плотности, $N_1(1-\beta^2)^{3/2} \ll N_2$, уравнение (2.5) приводит к следующему выражению для плотности плазмы, при которой в системе происходит возбуждение моды колебаний с заданными l и k_z:

$$N_2 \geqslant 3\cdot 10^{-10}\frac{u^2}{r_0^2}\,\frac{2l(l+1)(1+r_0 f_l/l)+\eta^2\omega_{L1}^2 r_0^2(1-\beta^2)^{-3/2}/u^2}{1+2\eta}, \tag{2.6}$$

где

$$\eta \equiv \frac{ul(l+1)}{|k_z|\,\Omega r_0^2}.$$

В частности, для моды с $l=0$ из (2.6) имеем

$$N_2(l=0) \geqslant 3\cdot 10^{-10}\frac{u^2}{r_0^2}\,\frac{2}{\ln(R/r_0)}. \tag{2.7}$$

Для мод с $l \neq 0$ легко найти выражение для критической плотности плазмы, минимализируя (2.6) по l и k_z. В результате получим

$$N_{2\,\text{кр}} \geqslant 5\cdot 10^{-5}\frac{u}{r_0}\sqrt{N_1}\,\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/4}}. \tag{2.8}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что $\omega_{L1}^2 r_0^2 \ll 4u^2(1-\beta^2)^{3/2}$, так как только при этом условии критическая плотность, определенная формулой (2.8), может быть меньше, чем (2.7). Более точно записывается это требование в виде

$$(1-\beta^2)^{3/4}\frac{u}{r_0} > 10^5\sqrt{N_1}\,\ln\frac{R}{r_0}. \tag{2.9}$$

При выполнении указанного неравенства критическая плотность плазмы соответствует возбуждению колебаний моды с $l=1$, $k_z = \omega_{L1}/\sqrt{2}\,r_0\Omega(1-\beta^2)^{3/4}$ и, согласно (2.8), растет с ростом плотности пучка. В противном случае критическая плотность плазмы определяется формулой (2.7) и зависит лишь от скорости электронов и геометрических размеров системы (так же, как и при полном заполнении волновода плазмой*). В экспериментах [5, 6], по-видимому, имело место именно такое положение.

---

* В формулах (2.7) и (2.8) отсутствует резонансная зависимость плотности плазмы от магнитного поля, характерная для полностью заполненного волновода. Такая зависимость может сохраниться и при наличии зазора, если только $\ln(R/r_0) \lesssim 2$. В этом случае, однако, дисперсионное уравнение (1.5) следует анализировать численно.

Наконец, заметим, что формулы (2.7) и (2.8) остаются справедливыми также и для конечного, но достаточно длинного волновода. Если учесть, что частота возбуждаемых колебаний $\omega \simeq k_z u$, а инкремент $\gamma \lesssim (N_1/2N_2)^{1/3}$ $(1-\beta^2)^{1/2}$ $k_z u$, то для справедливости формулы (2.8) получаем требование

$$\frac{L}{r_0} \gg \frac{\sqrt{2}\ \Omega}{\omega_{L1}}\left(\frac{2N_2}{N_1}\right)^{1/3}(1-\beta^2)^{1/4} \simeq 1{,}5\cdot 10^{-6}\left(\frac{u}{r_0}\right)^{1/3}\frac{\Omega}{N_1^{2/3}}. \quad (2.10)$$

Формула (2.7), в свою очередь, является справедливой при выполнении условия (2.4).

3. ВОЛНОВОД КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Проведенное выше рассмотрение, строго говоря, пригодно лишь для неограниченно длинного волновода. Только в этом случае соотношение (1.5) представляет собой дисперсионное уравнение колебаний. В случае ограниченного волновода это соотношение является характеристическим уравнением для определения возможных волновых чисел k_{zn} колебаний системы. Для получения дисперсионного уравнения в этом случае решение $\Phi = \sum_n C_n \exp(ik_{zn} z)$ нужно представить в граничные условия (на торцах волновода), число которых должно соответствовать числу корней k_{zn} характеристического уравнения. Выше отмечалось, что для волновода, полностью заполненного плазмой, а также для возбуждения колебаний с $l = 0$ в неполностью заполненном волноводе, влиянием граничных условий на торцах можно пренебречь, если выполнено неравенство (2.4). В реальных экспериментах это неравенство, как правило, выполняется с большим запасом. Поэтому ниже мы ограничимся исследованием мод с $l \neq 0$ в незаполненном волноводе, когда характеристическое уравнение имеет вид (2.5).

Указанное уравнение определяет четыре корня и поэтому, вообще говоря, необходимо удовлетворить четырем граничным условиям при $z = 0, L$. Если, однако, учесть, что наиболее существенное влияние граничные условия оказывают на длинноволновые колебания с длиной волны, сравнимой с продольным размером системы, а поэтому можно перейти к пределу $k_z^2 r_0^2 \ll 1$, и заметить, что критическая плотность плазмы может быть меньше определенной формулой (2.7) только при условии $\eta = ul(l+1)/|k_z|\Omega r_0^2 \gg 1$, из (2.5) получаем квадратное уравнение, корни которого равны

$$k_{z1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 4q},$$

$$p = \frac{2\omega u\left(2 - \omega_{L2}^2/\omega\Omega\right) - u\omega_{L1}^2/\Omega}{\left(2 - \omega_{L2}^2/\omega\Omega\right)u^2 - \omega_{L1}^2 r_0^2(1-\beta^2)^{3/2}/2l(l+1)}, \quad (3.1)$$

$$q = \frac{\left(2 - \omega_{L2}^2/\omega\Omega\right)\omega^2 - \omega\omega_{L1}^2/\Omega}{\left(2 - \omega_{L2}^2/\omega\Omega\right)u^2 - \omega_{L1}^2 r_0^2(1-\beta^2)^{3/2}/2l(l+1)}.$$

Это обстоятельство позволяет для решения задачи ограничиться двумя очевидными граничными условиями

$$\Phi\big|_{z=0,\,L} = 0 \quad (3.2)$$

на металлических торцах волновода—катоде и коллекторе.

Граничные условия (3.2) приводят к дисперсионному уравнению для определения спектра колебаний $k_{z1}-k_{z2}=2k_s=2\pi s/L$, где $s=1,2,\ldots$, или, что то же самое,

$$\omega^3 + 3p_1\omega + 2q_1 = 0, \tag{3.3}$$

где

$$3p_1 = -\frac{4k_s^2 u^4 l(l+1)}{\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2} r_0^2}, \quad 2q_1 = \frac{2k_s^2 u^4 l(l+1)\,\omega_{L2}^2}{\Omega\omega_{L1}^2(1-\beta^2)^{3/2} r_0^2}.$$

Из условия появления комплексных (неустойчивых) корней уравнения (3.3) находим плотность плазмы, при которой в системе возможно возбуждение моды колебаний с заданными s и l:

$$N_2 \geqslant 10^{-14}\frac{|k_s|\,u^2\Omega\sqrt{l(l+1)}}{(1-\beta^2)^{3/4}\,r_0\sqrt{N_1}}. \tag{3.4}$$

Отсюда для критической плотности плазмы, соответствующей возбуждению моды с $l=1$ и $s=1$, имеем

$$N_{2\,\text{кр}} \geqslant 10^{-14}\frac{\sqrt{2}\,\pi}{L}\,\frac{u^2\Omega}{r_0\sqrt{N_1}\,(1-\beta^2)^{3/4}}. \tag{3.5}$$

Заметим, что с ростом продольного размера системы критическая плотность в (3.5) уменьшается до тех пор, пока выражение (3.5) не сравнится с (2.8). Дальнейшее увеличение длины волновода уже не влияет на критическую плотность плазмы; волновод становится неограниченным, и в силу вступают результаты предыдущего параграфа. С другой стороны, выражение (3.5) справедливо только в условиях, когда оно меньше (2.7), так как в противном случае в системе будет происходить возбуждение моды с $l=0$. Таким образом, зависимость критической плотности от магнитного поля, которая содержится в формуле (3.5), должна проявиться в довольно узкой области, лежащей между значениями (2.7) и (2.8).

4. КРИТИЧЕСКИЕ ТОКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ПЛАЗМЕ

Проведенный выше анализ взаимодействия релятивистского электронного пучка малой плотности с плазмой позволяет оценить критические токи в пучках, которые можно пропустить через плазму, заполняющую волновод. Наибольший интерес, очевидно, представляет транспортировка пучка на большие расстояния. Поэтому мы обсудим этот вопрос на примере неограниченно длинного волновода.

В случае, когда весь волновод заполнен плазмой, критическая плотность, выше которой в системе плазма—пучок возникает неустойчивость, определяется формулой (2.3). При этом она не зависит от плотности пучка. Однако если учесть, что формула (2.3) справедлива при условии $N_2 \gg N_1(1-\beta^2)^{3/2}$, можно оценить верхний предел критического тока электронного пучка, который можно пропустить через волновод, заполненный более плотной, чем пучок, плазмой:

$$J_{\text{кр}} < \frac{(2{,}4)^2\,mu^3}{4e(1-\beta^2)^{3/2}} \simeq 10^{-27}\,\frac{u^3}{(1-\beta^2)^{3/2}}\ (a). \tag{4.1}$$

Отсюда видно, что в релятивистской области энергий электронов критический ток пучка растет с энергией как $\mathscr{E}^3$ и может стать очень большим. Так при энергии пучка $\mathscr{E}\sim 5$ *мэв* из (4.1) для верхнего предела критического тока имеем оценку $J_{\text{кр}} < 3\cdot 10^7$ *a*.

Аналогичное положение имеет место и в том случае, когда плазма неполностью заменяет волновод. Критический ток электронного пучка, который можно пропустить через такой волновод, согласно формулам (2.7) и (2.8), ограничен сверху значением

$$J_{кр} < \frac{mu^3}{4e(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{2}{\ln(R/r_0)} \simeq 3\cdot 10^{-28} \frac{u^3}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{1}{\ln(R/r_0)} \ (a). \quad (4.2)$$

При $R/r_0 \simeq 10$ этот предел примерно на порядок меньше определенного формулой (4.1), но имеет ту же энергетическую зависимость от параметров пучка. Следует заметить, что при неполном заполнении волновода предел (4.2) может достигаться лишь при условии $J_{кр} \gtrsim (2mu^3/e)\times \times(1-\beta^2)^{3/2}$, которое может выполняться только в релятивистской области энергии электронов, когда $(\mathcal{E}/mc^2)^6 > 4\ln(R/r_0)$. При $R/r_0 \sim 10$ это неравенство выполняется для энергий электронов $\mathcal{E} \gtrsim 1$ *мэв*.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, 11, 313 (1961).
3. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания плазмы, Атомиздат, М., 1964.
4. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, 1965.
5. A. K. Berezin, Ya. B. Faynberg, L. I. Bolotin, G. P. Berezina, I. A. Bez''yazychnyy, Yu. M. Lyapkalo, V. V. Livshits, Plasma physics and controlled nuclear fusion research, 1, IAEA, Vienna, 1966, p. 515.
6. М. Д. Райзер, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, ЖЭТФ, 53, 1891 (1967).
7. J. R. Pierce, J. Appl. Phys., 15, 721 (1944).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
28 марта 1969 г.

TO THE THEORY OF INTERACTION BETWEEN A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM AND PLASMA

L. S. Bogdankevich, I. I. Zhelyazkov, A. A. Rukhadze

The interaction between the limited relativistic electron beam of a small density and plasma being in a strong longitudinal magnetic field is investigated. The critical plasma density, above which the electrostatic instabilities may be developed, is determined. In long enough systems, the critical density of plasma is increased with the growth of its density reaching some value determined by the directed velocity of electrons and the geometrical dimensions of the system. In the systems limited in a longitudinal direction, the critical density of plasma may be dependent also on the system length and magnetic field intensity. In this case the critical density is larger than for a long system. It follows from the analysis of the stability that the maximum current of the electron beam, which may be passed through the waveguide, increases in the relativistic region with the growth of the electron energy as $\mathcal{E}^3$. Due to this possibility, arge currents may penetrate through a dense plasma.