ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 621.372.09

ЗАТУХАНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ НА КРИТИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЕ

В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс

Вычислено обусловленное некогерентным рассеянием затухание нормальных волн в волноводе со статистически неровными стенками в случае, когда на ширине волновода укладывается целое число полуволн. Вычисление проведено путем решения дисперсионного уравнения, получающегося из нелинейного уравнения Дайсона для «средней функции Грина, записанного в приближении «простой вершины». Показано, что в рассматриваемом случае среднее (когерентное) поле эффективно затухает на существенно более коротких расстояниях, чем при некритических частотах.

Для определения поперечных собственных чисел q_n плоского волновода, образованного шероховатыми плоскостями $z = \zeta_1(x, y)$ и $z=a+ \zeta_2(x, y)$, в работе [1] было получено дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg} q_n a = \frac{2i\widetilde{M}(\varkappa_n)}{1+\widetilde{M}^2(\varkappa_n)}. \tag{1}$$

Здесь $\zeta_1(x, y)$ и $\zeta_2(x, y)$ — случайные статистически независимые и однородные функции двумерного вектора $\boldsymbol{r} = \{ x, y \}$, описывающие малые отклонения от невозмущенных поверхностей $z = 0$, $z = a$, $\varkappa_n$ — вектор в направлении распространения n-й моды ($q_n = \sqrt{k^2 - \varkappa_n^2}$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения), $\widetilde{M}(\varkappa_n)$ — фурье-преобразование массового оператора, представляющегося в виде суммы некоторого бесконечного ряда. В [1] это уравнение решалось в приближении Бурре [2], т. е. массовый оператор задавался в виде

$$M(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = \sigma^2 G_0''(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\, W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

где $\sigma^2 = \langle \zeta_{1,2}^2 \rangle$ — среднеквадратичная высота, $\sigma^2 W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=\langle \zeta_i(\boldsymbol{r})\, \zeta_i(\boldsymbol{r}_1)\rangle$ — корреляционная функция неровностей, G_0 — функция Грина невозмущенного волновода, штрих означает дифференцирование по нормали гладкого волновода, а $\langle \ldots \rangle$ — усреднение по ансамблю реализаций ζ_1 и ζ_2.

Известно, что в случае так называемой критической частоты, когда на ширине волновода укладывается целое число полуволн ($ka/\pi = n$), G_0 обращается в бесконечность и формулой (2) пользоваться нельзя. Поэтому, как указано в [1], полученные там результаты справедливы для частот, далеких от критической.

Ясно, однако, что использование G_0 не связано с физикой задачи, а является спецификой примененного приближения. Если вместо (2) воспользоваться для определения M уравнением Дайсона с простой вершиной [3], то ограничения на «некритичность», связанные с применением G_0, будут сняты. Это нелинейное уравнение имеет вид

$$M(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = \sigma^2 \langle G''(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \rangle\, W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1), \tag{3}$$

где $\langle G \rangle$ — искомая усредненная функция Грина шероховатого волновода, которая в свою очередь выражается через массовый оператор

$$\langle G(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_0)\rangle = \int \frac{d^2\varkappa}{q} \exp\left[i\varkappa(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\right] \times$$
$$\times\{[1-\widetilde{M}^2(\varkappa)]\cos[q(z_0-a+z)]-[1+\widetilde{M}^2(\varkappa)]\cos[q(z-z_0-a)]+$$
$$+2i\widetilde{M}(\varkappa)\sin[q(z-z_0-a)]\}\{i[1+\widetilde{M}^2(\varkappa)]\sin(qa)+ \tag{4}$$
$$+2\widetilde{M}(\varkappa)\cos(qa)\}^{-1},$$

$q=\sqrt{k^2-\varkappa^2}$, $\boldsymbol{R}_0=\{\boldsymbol{r}_0, z_0\}$ — радиус-вектор источника, $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{r}, z\}$.

Подставляя (4) в (3) и затем в (1), получим дисперсионное уравнение для определения q_n. Это уравнение имеет весьма сложный вид, однако в интересующем нас случае малых неровностей ($k\sigma \ll 1$) оно существенно упрощается. Действительно, $\widetilde{M}$ можно представить в виде $\widetilde{M}=(k\sigma)^2\widetilde{M}_1+(k\sigma)^4\widetilde{M}_2+\ldots$, где $\widetilde{M}_1$ отличается от фурье-преобразования массового оператора, вычисленного в приближении Бурре, лишь тем, что q_n не есть собственные числа невозмущенного волновода, а являются искомыми величинами. Ограничиваясь первым членом указанного разложения, для случая «одномерных» неровностей ($W(\boldsymbol{r}) \equiv W(x)$) получаем

$$\delta q_n = q_n - q_n^0 = -\frac{4q_n^0\sigma^2\pi^2}{a^4 k}\Bigg[i\sum_{m=1}^{\frac{ka}{\pi}}\frac{m^2}{\sqrt{1-q_m^2/k^2}}\int_0^\infty \exp\left(ikx\sqrt{1-q_m^2/k^2}\right)\times$$
$$\times\cos(\varkappa_n x)\,W(x)\,dx - \lim_{\eta\to 0}\frac{\partial}{\partial\eta}\sum_{m=ka/\pi+1}^{\infty}\frac{m\sin(m\eta)}{\sqrt{q_m^2/k^2-1}}\times \tag{5}$$
$$\times\int_0^\infty \exp\left(-kx\sqrt{q_m^2/k^2-1}\right)\cos(\varkappa_n x)\,W(x)\,dx\Bigg],$$

$$q_m = q_m^0 + \delta q_m = m\pi/a + \delta q_m.$$

Мнимая часть q_n, обусловливающая затухание, содержится только в первой сумме, каждый член которой описывает затухание n-й нормальной волны за счет некогерентного преобразования в волну с номером m, причем доля энергии, рассеянной в m-м направлении, определяется «весовым» множителем $m^2/\sqrt{1-q_m^2/k^2}$. Видно, что в рассматриваемом случае это рассеяние имеет ярко выраженный резонансный характер—в знаменателе члена с номером $m=R=ka/\pi$ стоит малая величина $\sqrt{-2\delta q_R/k}=\delta\varkappa_R/k$, обращающаяся в нуль при стремлении к нулю малого параметра $k\sigma$, т. е. затухание всех мод происходит в основном за счет преобразования в собственную волну (назовем ее резонансной), для которой $\varkappa_R^0=0$. Поэтому в правой части (5) достаточно ограничиться лишь резонансным ($m=R$) членом—отброшенная сумма содержит более высокие степени $k\sigma$, мы же ограничиваемся простейшим приближением по этому параметру. Полученное из (5) после указанных упрощений уравнение имеет вид

$$\delta q_n = -\frac{2iq_n^0(k\sigma)^2 l}{a^2}\frac{1}{\delta\varkappa_R}. \tag{6}$$

Ввиду малости δq_n связь между добавками к продольному и поперечному волновым числам следующая:

$$\delta\varkappa_n = -\frac{q_n^0}{\varkappa_n^0}\,\delta q_n \qquad (n \neq R),$$
$$(\delta\varkappa_R)^2 = -2k\delta q_R. \tag{7}$$

Решая получающееся из (6) при $n = R$ с учетом (7) уравнение, получаем

$$\delta\varkappa_R = \frac{(k\sigma)^{2/3}(ka)^{1/3}(kl)^{1/3}}{a}\sqrt[3]{2}\,e^{i\pi/6}. \tag{8}$$

Для нерезонансных волн добавка к продольному волновому числу имеет вид

$$\delta\varkappa_n = \frac{(k\sigma)^{4/3}(kl)^{2/3}(q_n^0)^2}{\sqrt[3]{2}\,\varkappa_n^0\,(ka)^{4/3}}\,e^{i\pi/3} \qquad \left(1 \leqslant n < \frac{ka}{\pi}\right). \tag{9}$$

Таким образом, при наличии неровностей стенок резонансная мода имеет комплексное продольное волновое число, т. е. распространяется вдоль волновода с декрементом затухания $\gamma = \operatorname{Im}\varkappa_R \sim (k\sigma)^{2/3}$. Остальные собственные волны $(n < ka/\pi)$ также приобретают конечное затухание, обусловленное некогерентным рассеянием во флуктуационную часть, однако ослабляются в меньшей степени, чем резонансная $(\operatorname{Im}\varkappa_n \sim (k\sigma)^{4/3})$. Это связано с тем, что волновой вектор последней почти перпендикулярен к стенкам волновода и рассеяние на них происходит многократно уже на расстоянии порядка одной длины волны.

Из формулы (9) видно, что на критической частоте из-за сильного преобразования в резонансную моду все собственные волны затухают сильнее, чем при $k \neq n\pi/a$ (в этом случае, как показано в [1], $\operatorname{Im}\varkappa_n \sim (k\sigma)^2$).

Полученные результаты позволяют также сформулировать критерий применимости формул для затухания, полученных в [1], по параметру некритичности ε, который мы введем следующим образом: $\varepsilon = ka/\pi - [ka/\pi]$ ($[P]$—целая часть P). Нетрудно убедиться, что приближение Бурре справедливо при

$$\frac{\pi\varepsilon}{a\delta q_R} \gg 1. \tag{10}$$

На рис. 1 изображена зависимость величины $\alpha\,|\operatorname{Im} q_n|/q_n^0$ $(\alpha = \pi^2/2\,(kl)(k\sigma)^2)$ от параметра ak/π. Видно, что при $ak/\pi = n$ приближение Бурре (пунктирная линия) дает бесконечно большие значения для затухания. Решение нелинейного уравнения (3) приводит к замыванию резонанса на интервале $\Delta(ak/\pi) \sim \delta q_R a$. Для сравнения приведена также кривая (1), построенная по формуле, полученной путем учета последовательных отражений от стенок с коэффициентом отражения от полупространства [1].

Интересно отметить, что если неровности стенок волновода изотропны, преимущественного рассеяния в резонансную моду не происходит. Действительно, затухание в этом случае может быть получено, если каждый член первой суммы в (5), описывающий рассеяние в направлении θ_m в одномерном случае $(\sin\theta_m = \varkappa_m/k = \sqrt{1 - q_m^2/k^2})$, умножить на элемент телесного угла в этом направлении $d\Omega_m = \sin\theta_m\,d\theta_m\,d\varphi$ и проинтегрировать по φ. При этом $\sin\theta_m$ в знаменателе, дающий особенности при $q_m = k$, сокращается, и конечный результат для $\delta\varkappa_m$ получается уже в приближении Бурре. Учет более высоких приближений в массовом операторе приводит лишь к замыванию ступенчатой зависимости затухания от частоты [4].

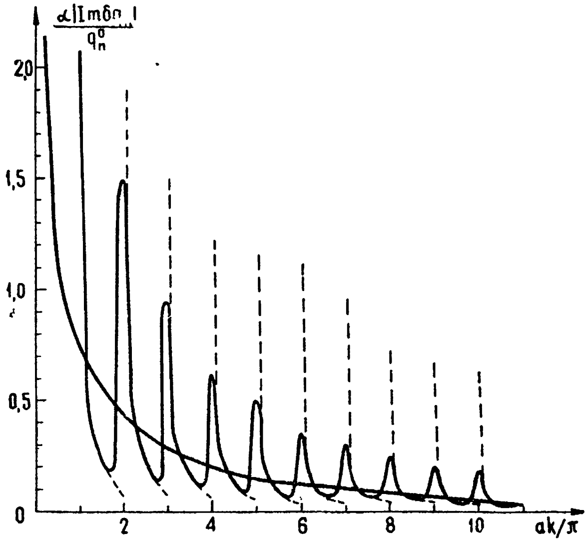

Рис. 1.

В заключение заметим, что в реальных волноводах кроме рассмотренного выше затухания, вызванного некогерентным рассеянием на неоднородностях, существует и обычное для гладких волноводов затухание, связанное либо с диссипативными потерями (например, омическими, в электромагнитном случае), либо с «высвечиванием» поля излучения в окружающую волновод среду, как это имеет место, например, при нарушении условия абсолютной мягкости (или жесткости) границ для акустических волноводов. При этом граничные условия для поля U (U — звуковое давление в акустике, либо тангенциальная компонента электрического поля) имеет вид $U = \frac{i}{k\eta}\frac{\partial U}{\partial n}$, где $\eta \gg 1$ — адмитанс поверхности стенок волновода. В акустике $\eta = \rho_0 c_0/\rho c$ (c и c_0—скорости звука, ρ и ρ_0 — плотности сред вне и внутри волновода соответственно).

В электромагнитных волноводах $\eta = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2}$, где ε — комплексная диэлектрическая проницаемость стенок волновода, а ε_0 — заполнения.

Поправки к продольным волновым числам идеального волновода ($\eta \rightleftarrows \infty$) для нерезонансных мод имеют вид

$$\delta\varkappa_n^0 = \frac{2i\,(q_n^0)^2}{\varkappa_n^0\,ak\eta}, \tag{11}$$

а в случае резонанса

$$\delta\varkappa_R^0 = 2\sqrt{\frac{ik}{a\eta}}. \tag{12}$$

Отсюда для отношения удельного затухания $\gamma_n = \mathrm{Im}\,\delta\varkappa_n$, связанного с шероховатостями стенок, к затуханию $\gamma^0 = \mathrm{Im}\,\delta\varkappa^0$ в гладком волноводе имеем

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_n^0} = \frac{\sqrt{3}\,|\eta|}{4\sqrt[3]{2}\sin[(\pi/2)-\varphi]}\,\frac{(k\sigma)^{4/3}(kl)^{2/3}}{(ka)^{1/3}}; \tag{13}$$

$$\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0} = \frac{\sqrt[3]{2}\,|\eta|^{1/2}}{4\sin[(\pi/4)-\varphi]}\,\frac{(k\sigma)^{2/3}(kl)^{1/3}}{(ka)^{1/6}}, \tag{14}$$

где $\eta = |\eta|\, e^{i\varphi}$. Отсюда следует

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_n^0} = 0{,}72\left(\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0}\right)^2, \quad \frac{\gamma_R}{\gamma_R^0} = 0{,}82\,\frac{(k\sigma)^{2/3}(kl)^{1/3}}{(ka)^{1/6}}\left(\frac{4\pi\sigma_0}{\omega}\right)^{1/4}, \tag{15}$$

где σ_0 — удельная проводимость стенок, ω — круговая частота излучения. Например, для медного волновода ($\sigma_0 = 5{,}6\cdot 10^{17}$ CGSE) при $\lambda = 3$ *см*, $kl \simeq 1$ и $ak = N\pi$ получаем

$$\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0} = 15\,N^{-1/6}, \quad \frac{\gamma_n}{\gamma_n^0} = 162\,N^{-1/3} \quad (k\sigma = 0{,}1),$$

$$\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0} = 3{,}3N^{-1/6}, \quad \frac{\gamma_n}{\gamma_n^0} = 7{,}8\,N^{-1/3} \quad (k\sigma = 0{,}01).$$

Таким образом, даже довольно слабые шероховатости стенок (в последнем примере $\sigma = 5\cdot 10^{-3}$ *см*) могут привести к существенному изменению затухания по сравнению с гладким волноводом.

Приведем, наконец, оценки для акустического волновода с границей типа вода—воздух (это может относиться, например, к подводному звуковому каналу). Из формул (13), (14) при $\varphi=0$, $\eta \simeq 4\cdot 10^3$, $kl \simeq 1$, $ak = N\pi$, $k\sigma \simeq 0{,}1$ имеем

$$\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0} \simeq 3{,}4\,N^{-1/6}, \quad \frac{\gamma_n}{\gamma_n^0} = \sqrt{3}\left(\frac{\gamma_R}{\gamma_R^0}\right)^2 \simeq 20\,N^{-1/3}.$$

Из этих оценок следует, что, как и в предыдущем примере, естественные шероховатости границы раздела могут приводить к существенному изменению удельного затухания волноводных мод.

Авторы благодарят Ф. Г. Басса и И. А. Урусовского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1521 (1969).
2. R. Buorett, Nuovo Cimento, 26, № 1, 1 (1962).
3. В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс. Изв. высш. уч зав. – Радиофизика, 13, № 1, 98 (1970).
4. А. В. Чаплик, М. В. Энтин, ЖЭТФ, 55, № 3, 990 (1968).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 ноября 1968 г.

ATTENUATION OF THE MEAN FIELD IN A WAVEGUIDE AT THE CRITICAL FREQUENCY

V. D. Freylikher, I M. Fuks

The attenuation of normal waves, caused by the incoherent scattering, in a waveguide with statistically-rough walls is calculated in the case when the width of ihe waveguide is equal to an integer of half-waves. The calculation is carried out by solving the dispersion equation obtained from the nonlinear Dyson equation for the mean Green function written in the simple tops approximation. It is shown that in the considered caseat the mean (coherent) field damps effectively at considerably shorter distances than at the noncritical frequences.