ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1970

УДК 519

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ДВОЙНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Ю. Н. Барабаненков

Рассматривается задача о средней двойной функции Грина точечного источника в неограниченной рассеивающей среде. В основу кладутся уравнения Дайсона и Бете—Солпитера. Уравнение Бете—Солпитера подвергается двойному преобразованию Фурье: по разности координат точек наблюдения и по координатам их центра тяжести. Для соответствующего фурье-образа средней двойной функции Грина получается интегральное уравнение. Его ядро пропорционально свободному члену, который при определенных условиях имеет острый максимум на так называемой энергетической поверхности. Замена свободного члена на дельта-функцию Дирака сводит уравнение Бете—Солпитера к уравнению переноса излучения. Подробно анализируются условия применимости этого уравнения. Они распадаются на две группы, из которых первая накладывает ограничения на среду и вторая — на волновое поле.

1. В настоящее время существует довольно много работ, посвященных выводу уравнения переноса и анализу условий его применимости. При наиболее общих предположениях относительно свойств рассеивающей среды это уравнение получено в нашей совместной с Финкельбергом работе [1], где за исходные были приняты уравнения Дайсона и Бете — Солпитера для средней и средней двойной функций Грина. Уравнение Дайсона решалось в пренебрежении пространственной дисперсией волн методом теории возмущений в знаменателе фурье-образа средней функции Грина. Уравнение Бете — Солпитера преобразовывалось в приближении Фраунгофера.

В той же работе было установлено, что пренебрежение пространственной дисперсией волн в средней функции Грина эквивалентно преобразованию уравнения Дайсона в приближении Фраунгофера. Отсюда следует, что для уравнения Дайсона приближению Фраунгофера соответствует теория возмущений в знаменателе фурье-образа средней функции Грина. Представляет интерес развить такого рода теорию возмущений в знаменателе для уравнения Бете—Солпитера, что позволит глубже проанализировать условия применимости уравнения переноса. Поставленная задача решается в данной работе.

2. В основе уравнения переноса лежит оптическая теорема, сформулированная на так называемой энергетической поверхности [1]. Общее доказательство оптической теоремы приведено в работе [2]. Там показано, что оптическая теорема на энергетической поверхности получается в первом приближении при разложении массового оператора, оператора интенсивности и средней функции Грина в ряды по малому параметру. Существует, однако, еще другая возможность получения оптической теоремы на энергетической поверхности. Объясним, в чем эта возможность заключается.

Для неограниченной однородной в среднем среды оптическая теорема имеет вид

$$\operatorname{Im} \widetilde{M}(p') = \int \operatorname{Im} \langle \widetilde{G}(p) \rangle \widetilde{K}_0(p, p'; p, p')\, d^3p. \tag{1}$$

Здесь $\widetilde{M}(p)$ и $\langle \widetilde{G}(p) \rangle$ — фурье-образы массового оператора и средней функции Грина. Фурье-образ оператора интенсивности равен

$$K(p, p'; q, q') = (2\pi)^3 \delta^3 (p - p' - q + q') \widetilde{K}_0(p, p'; q, q').$$

Фурье-образ средней функции Грина выражается через фурье-образ массового оператора соотношением

$$\langle \widetilde{G}(p) \rangle = -(2\pi)^{-3} \frac{1}{p^2 - k_0^2 + \widetilde{M}(p)}. \tag{2}$$

Волновое число «свободного» пространства k_0, следуя Финкельбергу [3], мы выбираем таким, чтобы вещественная часть фурье-образа массового оператора на энергетической поверхности $p = k_0$ обращалась в нуль: $\operatorname{Re} \widetilde{M}(k_0) = 0$. Мнимая часть $\operatorname{Im} \widetilde{M}(k_0) = -k_0/d$, где d—длина экстинкции.

В пренебрежении пространственной дисперсией, в знаменателе фурье-образа средней функции Грина фурье-образ массового оператора $\widetilde{M}(p)$ заменяется его значением на энергетической поверхности $\widetilde{M}(k_0)$, после чего

$$\operatorname{Im} \langle \widetilde{G}(p) \rangle \simeq -(2\pi)^{-3} \frac{k_0/d}{(p^2 - k_0^2)^2 + (k_0/d)^2}. \tag{3}$$

Функция (3) в зависимости от модуля волнового вектора p имеет «острый» максимум при $p = k_0$. Эффективная «ширина» максимума равна коэффициенту экстинкции $1/d$.

Для изотропной в среднем среды фурье-образ оператора интенсивности $\widetilde{K}_0(p, p'; p, p')$ является функцией от модулей волновых векторов p, p' и косинуса угла между ними μ (косинус угла рассеяния на отдельной эффективной неоднородности). Нас интересует, насколько быстро изменяется фурье-образ оператора интенсивности в зависимости от модуля p в окрестности энергетической поверхности $p = p' = k_0$. Это изменение характеризуется логарифмической производной

$$L_K = \left| \frac{d}{dp} \ln \widetilde{K}_0(p, p'; p, p') \right|_{p = p' = k_0}. \tag{4}$$

Величина L_K имеет размерность длины, и мы назовем ее радиусом нелокальности оператора интенсивности.

Вернемся к оптической теореме (1). Если радиус нелокальности L_K мал по сравнению с длиной экстинкции d:

$$L_K/d \ll 1, \tag{5}$$

то в правой части соотношения (1) при интегрировании по модулю волнового вектора p фурье-образ оператора интенсивности $\widetilde{K}_0$ можно вынести за знак интеграла в точке $p = k_0$ как медленно меняющуюся функцию. В результате соотношение (1) при дополнительном условии

$$1/k_0 d \ll 1 \tag{6}$$

переходит в оптическую теорему на энергетической поверхности. Неравенство (5), следовательно, является необходимым условием применимости уравнения переноса.

Конкретизируем условие (5) в лестничном приближении для оператора интенсивности с корреляционной функцией эффективного потенциала в виде гауссоиды $B(r) = k_0^4 \sigma^2 \exp(-r^2/l^2)$ или экспоненты $B(r) = k_0^4 \sigma^2 \exp(-r/l)$. Радиус нелокальности L_K для этих корреляционных функций соответственно равен

$$L_K = \frac{1}{2}(1-\mu) k_0 l^2, \quad L_K = \frac{4(1-\mu) k_0 l^2}{1+2(1-\mu) k_0^2 l^2}. \tag{7}$$

Если неоднородности мелкомасштабные ($k_0 l \ll 1$), то $L_K \sim (1-\mu) k_0 l^2$, рассеяние на эффективной неоднородности приблизительно изотропно и при $\mu=0$ из (5) получаем* $d \gg k_0 l^2$. Это неравенство является более слабым, чем (6). В противоположном случае крупномасштабных неоднородностей ($k_0 l \gg 1$) рассеяние на эффективной неоднородности носит резко анизотропный характер и происходит преимущественно в направлении «вперед», в узком интервале углов, определяемом соотношением $(1-\mu) k_0^2 l^2 \lesssim 1$. Отсюда и из (7) следует, что в случае крупномасштабных неоднородностей радиус нелокальности $L_K \sim 1/k_0$ и условие (5) сводится к условию (6), которое, согласно [4], необходимо для пренебрежения пространственной дисперсией в средней функции Грина.

3. Переходим к нашей основной задаче о точечном источнике в неограниченной однородной и изотропной в среднем рассеивающей среде. Будем считать, что источник расположен в начале координат. Через $f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})$ обозначим спектральную плотность создаваемого им поля. Она определяется преобразованием Фурье от средней двойной функции Грина $\langle G(\boldsymbol{r}_1) \overline{G}(\boldsymbol{r}_2) \rangle$ по разности координат $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ точек наблюдения:

$$f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}) \left\langle G\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\right) \overline{G}\left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\right) \right\rangle d^3\boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Аргумент $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$ представляет собой координаты «центра тяжести» точек наблюдения. Аналогично (8) определяется спектральная плотность $f_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})$, соответствующая средней функции Грина $\langle G(r) \rangle$. Именно,

$$f_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}) \left\langle G\left(\boldsymbol{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\right) \right\rangle \left\langle \overline{G}\left(\boldsymbol{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\right) \right\rangle d^3\boldsymbol{r}. \tag{9}$$

Разница состоит лишь в том, что в (9) преобразованию Фурье подвергается билинейная комбинация средних функций Грина.

В работе [5] посредством преобразования уравнения Бете—Солпитера получено уравнение для спектральной плотности случайного поля $f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})$, названное обобщенным уравнением переноса. Применительно к рассматриваемой задаче о точечном источнике в неограниченной среде это уравнение имеет вид

$$f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) = f_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}) + \iint f_0(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}', \boldsymbol{p}) \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') f(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{p}') d^3\boldsymbol{R}' d^3\boldsymbol{p}'. \tag{10}$$

В лестничном приближении уравнение (10) является точным, В общем случае оно применимо, если спектральная плотность $f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})$ является плавно меняющейся функцией координат $\boldsymbol{R}$ в масштабе

* Неравенство $d \gg k_0 l^2$ сформулировано как условие применимости уравнения переноса. В. М. Комиссаровым на основании наглядных соображений о зонах дифракции Френеля.

радиуса нелокальности оператора интенсивности по разностным аргументам*. [6]. Практически это сводится к тому, чтобы расстояние центра тяжести точек наблюдения R от источника было велико по сравнению с названным радиусом нелокальности.

Уравнение (10) удобно подвергнуть преобразованию Фурье по координатам $\boldsymbol{R}$. Полагаем

$$\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(-i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}) f(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})\, d^3\boldsymbol{R}; \tag{11}$$

$$\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(-i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}) f_0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p})\, d^3\boldsymbol{R} = \left\langle \widetilde{G}\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\right)\right\rangle \left\langle \overline{\widetilde{G}}\left(\boldsymbol{p} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\right)\right\rangle. \tag{12}$$

Тогда после преобразования Фурье уравнение (10) принимает вид

$$\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) + (2\pi)^3 \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) \int \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}')\, d^3\boldsymbol{p}'. \tag{13}$$

Наша дальнейшая задача заключается в исследовании поведения функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ в зависимости от модуля волнового вектора p.

4. Согласно (2) и (12), функция $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ равна дроби, числитель которой есть постоянная величина, а знаменатель равен произведению знаменателей фурье-образов средних функций Грина от аргументов $\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{Q}/2$.

Рассмотрим знаменатель фурье-образа средней функции Грина $\left\langle \widetilde{G}\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\right)\right\rangle$. Он выражается через фурье-образ массового оператора $\widetilde{M}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{Q}/2)$. Подвергнем $\widetilde{M}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{Q}/2)$ двойному разложению в ряд Тейлора.

Во-первых, предполагая волновой вектор $\boldsymbol{Q}$ достаточно малым (расстояние центра тяжести точек наблюдения R от источника достаточно велико), произведем разложение по $\boldsymbol{Q}$, удерживая члены второго порядка малости:

$$\widetilde{M}\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\right) = \widetilde{M} + \widetilde{M}'(\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}) + \frac{1}{4}\widetilde{M}' Q^2 + \frac{1}{2}\widetilde{M}''(\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q})^2 + \ldots \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{M} \equiv \widetilde{M}(p)$, штрих означает производную от $\widetilde{M}(p)$ по квадрату волнового вектора p^2.

Во-вторых, разложим выступающие в правой части формулы (14) фурье-образ массового оператора и его производные в ряды по разности $p^2 - k_0^2$. В результате получаем

$$\widetilde{M}\left(\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}\right) = -ik_0/d + \widetilde{M}_0'(p^2 - k_0^2) + \widetilde{M}_0'(\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}) + \frac{1}{4}\widetilde{M}_0' Q^2 + \frac{1}{2}\widetilde{M}_0''(\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q})^2 + \ldots, \tag{15}$$

где нижний индекс нуль означает, что соответствующая производная вычисляется на энергетической поверхности $p = k_0$.

Подставим разложение (15) и аналогичное разложение для $\overline{\widetilde{M}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{Q}/2)$ в (12). Это приводит к следующему выражению для функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$:

---

* Заметим, что, вообще говоря, радиус нелокальности по разностным аргументам [6] не совпадает с радиусом нелокальности, определенным согласно (4).

$$\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = \frac{(2\pi)^{-6}}{(ap^2+bp+c)\,(\bar{a}p^2-\bar{b}p+\bar{c})}. \tag{16}$$

Коэффициенты знаменателя a, b, c равны:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \widetilde{M}_0' + \frac{1}{2}\widetilde{M}_0''Q_p^2, \\ b &= (1 + \widetilde{M}_0')\,Q_p, \\ c &= -\left(k_0^2 + i\frac{k_0}{d}\right) - \widetilde{M}_0'k_0^2 + \frac{1}{4}(1 + \widetilde{M}_0')Q^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Через Q_p обозначена проекция вектора $\boldsymbol{Q}$ на вектор $\boldsymbol{p}$.

Согласно (16), знаменатель функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ равен произведению двух квадратных трехчленов. Если корни первого трехчлена равны p_1 и p_2, то корни второго равны $(-\bar{p}_1)$ и $(-\bar{p}_2)$. Мы вычислим p_1 и p_2 приближенно, считая, что выполняются следующие условия:

$$|\widetilde{M}_0'| \ll 1, \quad Q/k_0 \ll 1, \quad |\widetilde{M}_0''|\,Q^2 \ll 1. \tag{18}$$

Разбивая корни на вещественную и мнимую части $p_{1,2} = p_{1,2}' + ip_{1,2}''$, получаем

$$\begin{aligned} p_1' &= k_0 + \frac{1}{2}Q_p - \frac{1}{4k_0}(Q^2 - Q_p^2) - p_д', \\ p_2' &= -k_0 + \frac{1}{2}Q_p + \frac{1}{4k_0}(Q^2 - Q_p^2) + p_д'; \end{aligned} \tag{19}$$

$$p_1'' = -p_2'' = -p'', \quad p'' = \frac{1}{2d} - p_д''. \tag{20}$$

В формулах (19) и (20) выделена дисперсионная поправка к корням, обозначенная через $p_д = p_д' + ip_д''$. Она равна*

$$p_д = \frac{i}{2d}\widetilde{M}_0' + \frac{1}{4}k_0\widetilde{M}_0''Q_p^2. \tag{21}$$

Согласно (19) и (20), корни p_1 и p_2 имеют такой же вид, как и в (П.2) Приложения. В силу неравенств (6) и (18), поправки к вещественным частям корней $\Delta p_{1,2}'$, а также их мнимые части $p_{1,2}''$ малы по сравнению с волновым числом свободного пространства k_0. Поэтому мы можем воспользоваться для функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ представлением (П.3). Выносся в (16) a и $\bar{a}$ за скобки и полагая $|a|^2 \simeq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_0(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}) \simeq (2\pi)^{-6}\,h\,\{ [\Pi(p - p_1') - \Pi(p + p_2')] - i\pi\,[D(p - p_1') + \\ + D(p + p_2')]\} + \overline{(p_1' \longleftrightarrow p_2')}. \end{aligned} \tag{22}$$

Коэффициент h оказывается равным

$$h = \frac{1}{4k_0^2(Q_p - i/d + 2ip_д'')}. \tag{23}$$

---

* Напомним, что $\widetilde{M}_0'$ и $\widetilde{M}_0''$ у нас обозначают производные от фурье-образа массового оператора, а не его вещественную и мнимую части.

5. Исследовав поведение функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$, обратимся к уравнению (13).

Представим его решение в виде итерационного ряда:

$$\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) + (2\pi)^3 \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) \int \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}') d^3p' +$$
$$+ (2\pi)^6 \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) \iint \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}''; \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'') \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}'') \times \tag{24}$$
$$\times \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}'; \boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}') \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}') d^3p'' d^3p' + \ldots$$

В каждом члене этого ряда, начиная со второго, функция $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ интегрируется по текущим волновым векторам $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'', \ldots$ в произведении с одним или двумя фурье-образами оператора интенсивности, подобно тому, как в оптической теореме (1) интегрируется мнимая часть фурье-образа средней функции Грина. Кроме того, функция $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ представляет собой первый член ряда и выступает в качестве множителя слева во всех остальных членах.

Допустим, что поправки к вещественным частям $\Delta p'_{1,2}$ корней $p_{1,2}$ (см. Приложение), а также их мнимые части $p''_{1,2}$ малы по сравнению с обратным радиусом нелокальности оператора интенсивности $1/L_K : |\Delta p'_{1,2}| L_K \ll 1, p'' L_K \ll 1$. С учетом (5) и (18) это сводится к неравенствам

$$QL_K \ll 1, \quad k_0 |\widetilde{M}''_0| Q^2 L_K \ll 1. \tag{25}$$

Тогда при интегрировании в (24) по модулям текущих волновых векторов $p', p'', \ldots$ в представлении (22) для функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ можно оставить лишь член, пропорциональный выражению

$$D(p - p'_1) + D(p + p'_2),$$

заменив в нем D-функции на соответствующие δ-функции Дирака. Опуская, кроме того, в формуле (23) для коэффициента h член с $p''_д$, что приводит к дополнительным условиям

$$|\mathrm{Re}\, \widetilde{M}'_0|/d \ll Q, \quad k_0 |\mathrm{Im}\, \widetilde{M}''_0| Q \ll 1,$$
$$k_0 |\mathrm{Im}\, \widetilde{M}''_0| Q^2 \ll 1/d, \tag{26}$$

получаем для функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ следующее приближенное представление:

$$\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) \simeq (2\pi)^{-3} (4\pi)^{-2} \frac{\delta(p - k_0)}{k_0^2} \frac{1}{1/d + iQ_p}. \tag{27}$$

Имея в виду определение (8) спектральной плотности поля точечного источника, умножим итерационный ряд (24) на экспоненту $\exp(i\boldsymbol{pr})$ и проинтегрируем по модулю волнового вектора p. Если при этом наряду с неравенствами (25) и (26) выполняются еще неравенства

$$r/d \ll 1, \quad Qr \ll 1, \quad k_0 |\widetilde{M}''_0| Q^2 r \ll 1, \tag{28}$$

то для функции $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ опять можно воспользоваться приближенным представлением (27).

Вернемся к уравнению (13) для функции $\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$. Подставим в него функцию $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})$ в виде (27). Это позволяет и в самом решении уравнения выделить в качестве множителя дельта-функцию Дирака, сосредоточенную на энергетической поверхности. Положим

$$\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = \frac{\delta(p - k_0)}{k_0^2} \varphi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{s}_p), \tag{29}$$

где $\boldsymbol{s}_p$ — единичный вектор вдоль волнового вектора $\boldsymbol{p}$. Нетрудно убедиться, что новая неизвестная функция $\varphi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{s})$ совпадает с преобразованием Фурье по координатам $\boldsymbol{R}$ от лучевой интенсивности излучения $I(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{s})$, удовлетворяющей уравнению переноса. Таким образом, мы свели уравнение (13) к уравнению переноса излучения, подвергнутому преобразованию Фурье по координатам центра тяжести точек наблюдения.

6. При выводе уравнения переноса нам пришлось использовать несколько ограничений. Их следует рассматривать как условия применимости этого уравнения. Все условия распадаются на две группы: 1) накладывающие ограничения на свойства среды и 2) — на свойства волнового поля. Мы конкретизируем условия применимости уравнения переноса в приближении Бурре для массового оператора и лестничном приближении для оператора интенсивности с экспоненциальной корреляционной функцией эффективного потенциала. В этих приближениях производные $\widetilde{M}_0'$ и $\widetilde{M}_0''$ от фурье-образа массового оператора равны

$$\widetilde{M}_0' \simeq l/d; \tag{30}$$

$$\widetilde{M}_0'' \simeq \begin{cases} -2l^3/d & (k_0 l \ll 1) \\ -i\,l^2/k_0 d & (k_0 l \gg 1) \end{cases}. \tag{31}$$

Радиус нелокальности оператора интенсивности L_K представлен вторым равенством (7).

К первой группе условий применимости, накладывающих ограничения на свойства среды, относятся неравенства (5), (6) и первое неравенство (18). В п. 2 мы убедились, что ограничение (5) на радиус нелокальности оператора интенсивности практически не дает чего-либо нового по сравнению с (6). Первое неравенство (18) на основании (30) принимает вид

$$l/d \ll 1. \tag{32}$$

Это означает, что длина экстинкции d должна быть велика по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций эффективного потенциала l. Заметим, что первое неравенство (18) наряду с (6) является необходимым условием пренебрежения пространственной дисперсией в средней функции Грина [4].

Таким образом, первая группа условий применимости уравнения переноса практически сводится к условиям пренебрежения пространственной дисперсией в средней функции Грина.

Вторая группа условий применимости накладывает ограничения на модуль волнового вектора Q, обратная величина которого порядка расстояния центра тяжести точек наблюдения R от источника $(1/Q \sim R)$, и на расстояние между точками наблюдения r.

Модуль волнового вектора Q должен быть не слишком большим и не слишком малым.

Ограничения на Q сверху накладываются: вторым и третьим неравенствами (18), неравенствами (25), вторым и третьим неравенствами (26). Анализ показывает, что они могут быть сведены к двум следующим условиям:

$$Q \ll k_0, \qquad lQ \ll 1. \tag{33}$$

Первое означает, что Q мало по сравнению с волновым числом свободного пространства k_0 или что обратная величина $1/Q$ велика по сравнению с длиной волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$. Согласно второму условию (33), обратная величина $1/Q$ велика по сравнению с радиусом корреляции l.

Ограничение на Q снизу накладывается первым неравенством (26). Конкретно оно имеет вид

$$1/Qd \ll d/l. \tag{34}$$

Здесь важно отметить, что правая часть этого неравенства в силу (32) велика по сравнению с единицей.

Расстояние между точками наблюдения r должно быть не слишком велико. Это следует из неравенств (28), которые сводятся к условиям

$$r/d \ll 1, \quad Qr \ll 1. \tag{35}$$

Первое означает, что расстояние r мало по сравнению с длиной экстинкции d. Согласно второму, расстояние между точками наблюдения r мало по сравнению с расстоянием центра тяжести точек наблюдения $R \sim 1/Q$ от источника.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим дробно-рациональную функцию $H(p)$ от модуля волнового вектора p, имеющую вид

$$H(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)(p + \bar{p}_1)(p + \bar{p}_2)}. \tag{П.1}$$

Относительно вещественных и мнимых частей $p'_{1,2}$ и $p''_{1,2}$ корней знаменателя p_1 и p_2 предположим, что они равны

$$\begin{aligned} p'_1 &= k_0 + \Delta p'_1, \quad p'_2 = -k_0 + \Delta p'_2, \\ p''_1 &= -p''_2 = -p'' \quad (p'' > 0), \end{aligned} \tag{П.2}$$

где поправки к вещественным частям $\Delta p'_{1,2}$ и мнимые части $p''_{1,2}$ малы по сравнению с k_0: $|\Delta p'_{1,2}| \ll k_0$, $p'' \ll k_0$. При этих условиях путем разложения функции $H(p)$ на простые дроби приходим к следующему ее представлению:

$$\begin{aligned} H(p) \simeq h\,\{ [\Pi(p - p'_1) - \Pi(p + p'_2)] - i\pi [D(p - p'_1) + D(p + p'_2)]\} + \\ + \overline{(p'_1 \longleftrightarrow p'_2)}. \end{aligned} \tag{П.3}$$

Здесь через $\Pi(p)$ и $D(p)$ обозначены функции

$$\Pi(p) = \frac{p}{p^2 + p''^2}, \quad D(p) = \frac{1}{\pi}\,\frac{p''}{p^2 + p''^2}. \tag{П.4}$$

Коэффициент h равен

$$h = \frac{1}{4k_0^2(p_1 + \bar{p}_2)}. \tag{П.5}$$

Символически обозначенное в (П.3) второе слагаемое получается из первого путем перехода к комплексно-сопряженному значению и замены p'_1 на p'_2 и p'_2 на p'_1.

Если величина p'' стремится к нулю, то, как известно (см., например, [7]), функция $\Pi(p)$ переходит в главное значение $P(1/p)$, а $D(p)$ — в дельта-функцию Дирака $\delta(p)$,

ЛИТЕРАТУРА

1 Ю. Н. Барабаненков, В М. Финкельберг, ЖЭТФ, **53**, вып. 3 (9), 978 (1967).
2. Ю. Н. Барабаненков, В. М Финкельберг, Изв высш уч зав. — Радиофизика, **11**, № 5, 719 (1968)
3. В. М. Финкельберг, Диссертация, Институт теоретической и экспериментальной физики, М., 1967.
4. В. М Финкельберг, ЖЭТФ, **53**, вып. 1, 401 (1967).
5. Ю. Н Барабаненков, ЖЭТФ, **56**, вып. 4, 1262 (1969).
6. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, **54**, вып. 6, 1775 (1968).
7 Д. А. Киржниц, Полевые методы теории многих частиц, Госатомиздат, М., 1963, стр. 330.

Поступила в редакцию
25 февраля 1969 г.

THE PERTURBATION THEORY IN THE DENOMINATOR FOR THE MEAN DOUBLE GREEN'S FUNCTION

Yu. N. Barabanenkov

The mean double Green's function of a point source in an infinite scattering medium is considered. Dyson and Bethe—Salpeter's equations assume as a basis. Bethe—Salpeter's equation undergoes double Fourier transformation over the coordinate difference of observation points and over the coordinates of their gravity center. There is obtained the integral equation for the corresponding Fourier image of the mean double Green's function. Its nucleus is proportional to the free term which, under definite conditions, has a sharp maximum on so-called energy surface. Replacement of a free term by the Dirac delta-function reduces the Bethe—Salpeter's equation to the radiative transfer equation The applicability conditions of this equation are analysed in detail. They are devided into two groups, the first of which impose restrictions on the medium and the second one on the wave field.