

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|------|
| Неймарк Ю. И. Локализованные квазиптимальные управления большой системой | 1601 |
| Нустрев В. С. О периодических решениях стохастических систем, близких к системе Ляпунова | 1606 |
| Раупов И. Ш., Сабиров Т. К вопросу о бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений с двумя параметрами | 1614 |
| Гордион М. И., Плотников В. И., Стерлин А. М. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с запаздыванием в задачах с ограничениями | 1621 |
| Леонов Н. Н. Экстремальная система с преимущественным направлением поиска | 1630 |
| Леонов Н. Н. К теории преимущественного поиска | 1636 |
| Шильман С. В. Об одном аналитическом методе в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. II. (Исследование устойчивости решений) | 1640 |
| Хаскельберг Л. Г. Динамика системы регулирования с изодромом с учетом сухого трения в золотнике | 1648 |
| Смирнов Л. В. Устойчивость равновесного режима циркуляции несжимаемой жидкости в многопетлевой замкнутой системе со свободными уровнями | 1658 |
| Белюстина Л. Н., Пономаренко В. П., Шалфеев В. Д. О динамике системы следования за задержкой бинарного псевдошумового сигнала | 1669 |
| Белых В. Н., Белых Т. Г. Исследование динамики астатической системы ФАП в режиме непрерывного поиска по частоте | 1677 |
| Сапфиров С. Г. Об импульсных системах фазовой автоподстройки частоты | 1684 |
| Сапфиров С. Г. Непрерывная система ФАПЧ, как релейная система автоматического регулирования | 1692 |
| Фалдин Н. В., Макаров Н. Н. Оптимальное по времени управление линейными объектами третьего порядка в задачах с ограничениями | 1700 |
| Шубравый И. И. Оптимальная структура самонастраивающейся следящей системы | 1708 |
| Яблонский А. Н. Вероятность перехода в задаче случайного поиска и интегрирование по траекториям | 1718 |
| Григоренко В. П., Рапопорт А. Н. К теории поиска коллективом независимых автоматов | 1726 |
| Гребенщиков В. Н. Комбинированный метод синтеза конечных автоматов | 1736 |
| Алексеев В. Е. Новый метод построения самоортогональных корректирующих кодов | 1741 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Фомин Ю. Т. Погрешность квантования при моделировании функций $\sin x$ и $\cos x$ на ЦИМ | 1751 |

УДК 62—505

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ БОЛЬШОЙ СИСТЕМОЙ

Ю. И. Неймарк

Вводится понятие квазиоптимального локализованного управления и устанавливаются условия при которых в большой системе возможна его реализация

В настоящей работе указываются условия, при которых в большой системе возможна реализация квазиоптимального локализованного управления. При этом под большой системой имеется в виду динамическая управляемая система с достаточно большими числами фазовых и управляющих переменных. В дискретном (во времени) описании связи между предыдущим $x(s)$ и последующим $x(s+1)$ состояниями такой системы определяется некоторым соотношением вида

$$x(s+1) = F(x(s), u(s), \xi(s), s), \quad (1)$$

где $u(s)$ — управляющие воздействия и $\xi(s)$ — неконтролируемые внешние воздействия. В общем случае стратегия управления большой системой задается некоторым соотношением, определяющим $u(s)$ через $x(s)$ и $\xi(s)$, вида

$$u(s) = f(x(s), \xi(s), s). \quad (2)$$

Управление вида (2) назовем локализованным, если оно может быть представлено в виде

$$u_i(s) = f_i(x_i(s), \xi_i(s), s) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где u_1, u_2, \dots, u_n — некоторые независимые группы управляющих переменных, входящих в u , а x_1, x_2, \dots, x_n и $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — некоторые группы переменных, входящих в описание состояния x и неконтролируемого внешнего воздействия ξ . При этом имеется в виду, что числа переменных, входящих в u_i , x_i и ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не так велики, как в исходных описаниях u , x и ξ .

Задача управления большой системой состоит в осуществлении стратегии вида (2), которая оптимизирует некоторую принятую оценку ее работы или оптимальным образом решает поставленную перед ней задачу. Будем говорить, что задача оптимального управления большой системой допускает локализацию, если оптимальное управление всей большой системой достигается путем оптимальных управлений некоторыми ее подсистемами. Под этим понимается, что оптимальное управление большой системой представимо в виде локализованного управления (3), причем каждая из стратегий управления

$$u_i(s) = f_i(x_i(s), \xi_i(s), s) \quad (4)$$

является оптимальной в смысле некоторого критерия для подсистемы, описываемой некоторыми следующими из (1) соотношениями вида

$$\tilde{x}_i(s+1) = F_i(\tilde{x}_i(s), u_i(s), \eta_i(s), s), \quad (5)$$

в которых $\tilde{x}_i(s)$ — некоторая часть переменных $x_i(s)$, а $\eta_i(s)$ составлено из переменных $x(s)$, не вошедших в $\tilde{x}_i(s)$, управляющих переменных $u(s)$, за исключением переменных $u_i(s)$, и переменных $\xi(s)$. При этом все переменные, составляющие $\eta_i(s)$, по отношению к подсистеме рассматриваются как неконтролируемые воздействия.

Целью управления большой системой может быть максимизация ожидаемого или фактического дохода или, что то же, минимизация ожидаемых или фактических потерь. Эта оптимизация может относиться либо к некоторому фиксированному числу шагов либо к каждым следующим нескольким шагам или, наконец, к ожидаемым или фактическим средним величинам на протяжении бесконечного (конечного) процесса. Задачи достижения и наилучшего удержания некоторого предписанного состояния большой системы приводятся к описанным выше случаям. Не стремясь к излишней общности, примем, что доход большой системы за один цикл выражается некоторой величиной вида

$$r(x(s), u(s), \xi(s), s) \quad (6)$$

и что доход за несколько циклов равен сумме доходов за каждый из них.

Согласно сказанному задача управления состоит либо в определении стратегии, максимизирующей конечную сумму

$$R(s_0, s_1) = \frac{1}{s_1 - s_0} \sum_{s=s_0}^{s=s_1} r(x(s), u(s), \xi(s), s), \quad (7)$$

либо бесконечную сумму, соответствующую переходу в выражении (7) при $s_1 \rightarrow \infty$.

Перейдем к основному вопросу о возможности локализованного близкого к оптимальному (квазиоптимальному) управления большой системой.

Прежде всего заметим, что если рассматриваемая большая система распадается на несколько независимых подсистем, то локализация оптимального управления возможна и состоит в оптимальном управлении каждой из подсистем. При этом под разбиением большой системы на независимые подсистемы понимается возможность такого разбиения переменных, входящих в описание состояния x большой системы и управления u , на соответственно $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ и u_1, u_2, \dots, u_n , при котором уравнения, связывающие последующие состояния большой системы с предыдущим, можно записать в виде

$$\tilde{x}_i(s+1) = F_i(\tilde{x}_i(s), u_i(s), \xi(s), s) \quad (8)$$

и доход — соответственно в виде

$$R(s_0, s_1) = R_1(s_0, s_1) + \dots + R_n(s_0, s_1), \quad (9)$$

где

$$R_i(s_0, s_1) = R_i(\tilde{x}_i(s_0), u_i(s_0), \xi(s_0), \dots \\ \dots \tilde{x}_i(s_1), u_i(s_1), \xi(s_1)).$$

Существенно, что локализованное квазиоптимальное управление возможно и при более слабых требованиях. Для формулировки этих требований необходимо предварительно рассмотреть вопрос о зависимости

оптимальной стратегии управления от используемой для его формирования информации. Точнее, речь будет идти о том дополнительном доходе, который можно получить за счет большей информации о неконтролируемых внешних воздействиях.

Пусть x и u — состояние и соответственно управляющее воздействие системы, подверженной внешнему воздействию ξ , эволюция которой во времени описывается уравнением (1). Пусть для этой системы ставится задача отыскания стратегии управления

$$u(s) = f(x(s), \xi(s), \xi(s+1), \dots, \xi(s+k)), \quad (10)$$

оптимизирующей доход $R(s_0, s_1)$. При $k=0$ для формирования оптимальной стратегии управления в момент s предполагается известным состояние $x(s)$ системы в этот же момент времени и внешнее воздействие $\xi(s)$ только в этот же момент времени. При $k=1$ дополнительно известно в момент s значение внешнего воздействия $\xi(s+1)$ в следующий ($s+1$) момент, при $k=2$ в следующие два момента и т. д. Непосредственно ясно, что доход R при оптимальной стратегии управления не может убывать* с возрастанием k , так что

$$R_{k=0} \leq R_{k=1} \leq \dots \leq R_{k=\infty}. \quad (11)$$

При $k=0$ стратегия оптимального управления строится без учета каких-либо сведений о последующих значениях внешнего воздействия ξ , напротив, при $k=\infty$ никакие сведения не могут прибавить ничего нового. Отсюда следует, что доход от оптимальной стратегии, описывающейся на любой информации о последующих значениях внешнего воздействия, всегда заключен между $R_{k=0}$ и $R_{k=\infty}$. Несущественность различия между доходом $R_{k=0}$ и $R_{k=\infty}$ означает несущественность для построения оптимальной стратегии управления любой информации о последующих значениях внешнего воздействия.

Припишем $k=-1$ стратегию управления вида

$$u(s) = f(x(s), s),$$

построенную без учета внешнего воздействия ξ . Ясно, что

$$R_{k=-1} \leq R_{k=0}. \quad (12)$$

Близость $R_{k=-1}$ и $R_{k=0}$ означает малость прироста дохода, который можно получить, учитывая внешнее воздействие в момент их действия. Близость $R_{k=-1}$ и $R_{k=\infty}$ означает, что вообще учет внешних воздействий не может сколько-нибудь существенно увеличить величину получаемого дохода.

Условия существования локализованной квазиоптимальной стратегии управления формулируются, как условия существования разбиения большой системы на подсистемы, которое удовлетворяет требованиям независимости управлений, независимости доходов и малой значимости для выработки оптимальной стратегии в каждой из подсистем информации о последующих состояниях всех остальных подсистем. Это означает, что должно существовать разбиение переменных состояния x и управления u на непересекающиеся группы переменных $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ и соответственно u_1, u_2, \dots, u_n . Запишем уравнения (1) в этих переменных в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(s+1) &= F_i(\tilde{x}_i(s), u_i(s), x(s) \setminus \tilde{x}_i(s), \\ &\quad u(s) \setminus u_i(s), \xi(s), s), \end{aligned} \quad (13)$$

* Это следует из того, что расширение класса допустимых стратегий не может уменьшить максимально возможный доход.

где $x(s) \setminus \tilde{x}_i(s)$ и $u(s) \setminus u_i(s)$ обозначает соответственно все переменные x без \tilde{x}_i и все переменные $u(s)$ за исключением u_i , т. е. $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n$ и, соответственно, $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$. Требование независимости управлений подсистем состоят в том, что правые части уравнений (13) фактически не зависят от переменных $u(s) \setminus u_i(s)$, так что эти уравнения могут быть переписаны в виде

$$\dot{x}_i(s+1) = f_i(\tilde{x}_i(s), u_i(s), x(s) \setminus \tilde{x}_i(s), \xi(s), s). \quad (14)$$

Следующее требование независимости доходов отдельных подсистем означает, что доход всей большой системы за время от s_0 -го такта до s_1 -го равен сумме доходов отдельных подсистем, причем доход каждой из подсистем определяется только значениями ее переменных состояния \tilde{x}_i и управления u_i и, возможно, еще внешнего воздействия ξ . Все это означает, что имеет место формула (9).

При сделанных предположениях общая стратегия управления для каждой из подсистем имеет вид

$$\dot{u}_i(s+1) = f_i(\tilde{x}_i(s), x(s) \setminus \tilde{x}_i(s), \xi(s), s). \quad (15)$$

Согласно последнему требованию информация о последующих значениях $x(s) \setminus \tilde{x}_i(s)$ не является существенной и поэтому при построении оптимальной стратегии переменные $x(s) \setminus \tilde{x}_i(s)$ можно рассматривать вместе с $\xi(s)$ как неконтролируемые внешние воздействия. Но тогда оптимизация дохода R всей большой системы сводится к оптимизации доходов R_i каждой из подсистем, для каждой из которых \tilde{x}_i являются фазовыми переменными состояния, u_i — управляемыми переменными, $x \setminus \tilde{x}_i$ и ξ — неконтролируемыми внешними воздействиями, среди которых, возможно, только переменные \tilde{x}_i и соответственно ξ_i существенны. Этот вывод совершенно очевиден в случае, если для оптимизации дохода подсистемы несущественной является информация о значениях переменных $x \setminus \tilde{x}_i$. Он справедлив и в несколько более общем случае, так как, как нетрудно видеть, в противном случае информация о последующих значениях переменных $x \setminus \tilde{x}_i$ не могла бы быть несущественной.

Таким образом, при сделанных предположениях оптимальная, или точнее, квазиоптимальная стратегия управления всей большой системой может быть получена как совокупность оптимальных стратегий управления подсистемами, т. е. в большой системе возможна локализованная квазиоптимальная стратегия управления. Потеря в доходе этой локализованной квазиоптимальной стратегии по сравнению с оптимальной стратегией управления большой системой не превосходит суммы потерь доходов во всех подсистемах, которые могли бы произойти от неучета последующих значений, принятых нами за неконтролируемые внешние воздействия значений переменных $x \setminus \tilde{x}_i$.

LOCALIZED QUASI—OPTIMAL CONTROLS FOR A
LARGE SYSTEM

Yu. I. Neimark

The concept of a quasi-optimal localized control is introduced and the conditions for the control in a large system to be feasible are determined.

УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМЕ ЛЯПУНОВА

B. C. Нустров

Доказывается теорема существования резонансных периодических решений стохастических систем, близких к системе Ляпунова. Случайные функции входят в правую часть уравнения под знаком малого параметра. Полученный результат, иллюстрируемый практическим примером, является обобщением известной теоремы И. Г. Малкина для детерминированных систем.

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + X(x) + \mu F(t, x, \mu),$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 & \dots & 0 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где X — аналитическая нелинейная вектор-функция x в достаточно малой окрестности точки $x = 0$, F — случайная 2π -периодическая вектор-функция с компонентами вида

$$F_i(t, x_1, \dots, x_n, \mu) = \sum_m B_m^{(i)} \cos mt + C_m^{(i)} \sin mt,$$

$$B_m^{(i)} = \sum_{q_1+ \dots + q_{n+1} \geq 0} \alpha_{q_1 \dots q_{n+1}}^{(m, i)} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} \mu^{q_{n+1}}, \quad (2)$$

$$C_m^{(i)} = \sum_{r_1+ \dots + r_{n+1} \geq 0} \beta_{r_1 \dots r_{n+1}}^{(m, i)} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \mu^{r_{n+1}}$$

$$(m = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, n),$$

μ — малый параметр, $|\mu| < \mu_0$, k — целое число. Коэффициенты α , β в (2) являются независимыми случайными величинами с заданными законами распределения; функции элементарных событий $\alpha = \alpha(u)$, $\beta = \beta(u)$ определены на вероятностном пространстве $\{U, \sigma, P\}$ ($P(U) = 1$) и σ измеримы. Случайная вектор-функция будет, очевидно, также σ -измеримой при достаточно малых значениях x , μ , $t \in [0, 2\pi]$.

Предполагается, что система (1) при $\mu = 0$ является системой Ляпунова [1, 2], следовательно, допускает параметрическое периодическое решение с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k} (1 + h_{2g} c^{2g} + h_{2g+1} c^{2g+1} + \dots), \quad (3)$$

разложение которого по степеням $c = x_1(0)$ начинается с членов четного порядка.

1. Определение 1 ([3], стр. 85). Некоторое свойство имеет место с вероятностью единица, если P — мера множества тех точек $u \in U$, в которых это свойство не выполняется, — равна нулю.

Следуя Малкину, ([2], стр. 462), введем

Определение 2. Для системы (1), (2) с вероятностью единица имеет место главный резонанс, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(u) = \alpha_0^{(k, 1)}(u) + \beta_0^{(k, 2)}(u) \neq 0, \quad u \in U\} &= 1, \\ P\{\gamma_2(u) = \beta_0^{(k, 1)}(u) - \alpha_0^{(k, 2)}(u) \neq 0, \quad u \in U\} &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Для стохастической системы (1), (2) имеет место следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы Малкина ([2], стр. 462) для детерминированных систем.

Теорема. Если случайные функции $\alpha(u)$, $\beta(u)$ ($u \in U$) в функциях F_1 , (2) принимают конечные значения с вероятностью единица, то при главном резонансе системы (1), (2) имеют с вероятностью единица единственное* периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в три-

вильное. Это решение разлагается в ряд по степеням $\mu^{\frac{1}{2g+1}}$, где $2g$ — младшая степень величины c в разложении периода (3).

Для доказательства теоремы используется метод вспомогательных систем [4].

Указанный метод был успешно применен при изучении резонансных решений квазилинейных стохастических систем [5] и систем с запаздыванием, близких к системе Ляпунова [6].

Наряду с системами (1), (2) рассматривается вспомогательная система

$$\frac{dy}{dt} = Ay + X(y) + \mu F(t, y, \mu) + W_1 \Omega_1 + W_2 \Omega_2,$$

$$W_j = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (X + \mu F, \Omega_j) dt \quad (j = 1, 2),$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \cos kt & & & \\ \sin kt & & & \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} \sin kt & & & \\ -\cos kt & & & \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}. \quad (5)$$

* Здесь и далее единственность понимается с точностью до стохастической эквивалентности.

Так как случайные величины α, β в функциях F_i (2) конечны с вероятностью единица, то найдутся такие постоянные H, K_1, K_2 , что при* $\|y\| < H, |\mu| < \mu_0$ выполняются условия**

$$\|X(y)\| < K_1 \|y\|^2, \quad P\{\|F(t, y, \mu, u)\| \leq K_2, u \in U\} = 1. \quad (6)$$

Обозначим через χ индикатор множества $\|F(u)\| \leq K_2$ ($u \in U$), т. е.

$$\chi = \begin{cases} 1, & \|F\| \leq K_2 \\ 0, & \|F\| > K_2 \end{cases}.$$

Очевидно, что

$$P\{\chi = 1\} = 1, \quad (7)$$

если $\|y\| < H, |\mu| < \mu_0$.

Вместо системы (5) рассматривается система

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + X(z) + \chi\mu F(t, z, \mu, u) + W_1\Omega_1 + W_2\Omega_2, \\ W_j &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (X + \chi\mu F, \Omega_j) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Периодическое решение системы (8) отыскивается методом последовательных приближений. Нулевое приближение

$$\begin{aligned} z_1^{(0)} &= a \cos kt - b \sin kt, \quad z_2^{(0)} = a \sin kt + b \cos kt, \\ z_s^{(0)} &= 0 \quad (s = 3, \dots, n), \quad W_1^{(0)} = W_2^{(0)} = 0, \end{aligned}$$

где a, b — достаточно малые по модулю произвольные постоянные.

Приближение номера l находим из системы

$$\begin{aligned} \frac{dz^{(l)}}{dt} &= Az^{(l)} + X^{(l-1)} + \chi\mu F^{(l-1)} + W_1^{(l)}\Omega_1 + W_2^{(l)}\Omega_2, \\ W_j^{(l)} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (X^{(l-1)} + \chi\mu F^{(l-1)}, \Omega_j) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $X^{(l-1)} = X(z^{(l-1)}), F^{(l-1)} = F(t, z^{(l-1)}, \mu, u)$.

Разрешая уравнения (9), найдем единственное периодическое решение

$$z^{(l)} = z^{(0)} + L(t, X^{(l-1)} + \chi\mu F^{(l-1)} + W_1^{(l)}\Omega_1 + W_2^{(l)}\Omega_2),$$

где L — случайный линейный оператор, удовлетворяющий условию (см. [2])

$$\|L(t, f)\| < BC, \quad \|f\| < C, \quad (10)$$

с независимой от выбора вектор-функции f постоянной B .

Возьмем $H_1 < H$, тогда при $\|z\| < H_1$ из (6) имеем $\|X(z)\| < K_1 H_1^2$.

* Используется обозначение $\|f\| = \max_i |f_i|$, $f = (f_1, \dots, f_n)$.

** На стр. 5—9 (до оценки (11)) используются, с небольшими изменениями, оценки, выполненные в [7].

Постоянны \$a, b\$ выберем такими, что \$\|z^{(0)}\| < H_1/2\$.
Оценим

$$\begin{aligned} |W_i^{(l)}| &< H_1^2 K_1 + \kappa |\mu| K_2, \\ \|z^{(l)}\| &< \frac{1}{2} H_1 + 3B(H_1^2 K_1 + \kappa |\mu| K_2). \end{aligned}$$

При \$|\mu| < \frac{H_1}{12BK_2}\$, \$H_1 < \frac{1}{12BK_1}\$ имеем \$\|z^{(l)}\| < H_1\$, т. е. все приближения случайного решения системы (8) находятся в области \$\|z\| < H\$.

Оценим степень сближения членов последовательностей \$\{z^{(l)}\}\$, \$\{W_j^{(l)}\}\$ (\$j = 1, 2\$). Если учесть, что вектор-функции \$X, \kappa F\$ удовлетворяют условиям Липшица в области \$\|z\| < H_1\$ с постоянными \$H_1 K_3, \kappa K_4\$ соответственно, то можно записать

$$\begin{aligned} \|W_j^{(l)} - W_j^{(l-1)}\| &< (H_1 K_3 + \kappa |\mu| K_4) \|z^{(l-1)} - z^{(l-2)}\| < b_m, \\ \|z^{(l)} - z^{(l-1)}\| &< 3B(H_1 K_3 + \kappa |\mu| K_4) \|z^{(l-1)} - z^{(l-2)}\| < a_m, \end{aligned}$$

где \$a_m, b_m\$ — положительные постоянные, ограниченные сверху некоторым положительным числом, не зависящим от номера \$l\$; при этом

$$\frac{a_{l+1}}{a_l} = \frac{b_{l+1}}{b_l} = 3B(H_1 K_3 + \kappa |\mu| K_4).$$

Выбрав \$H_1, |\mu|\$ достаточно малыми, например,

$$|\mu| < (6BK_4)^{-1}, \quad H_1 < (6BK_3)^{-1},$$

получим, что эти отношения будут меньше единицы.

Тогда последовательности \$\{z^{(l)}\}, \{W_j^{(l)}\}\$ (\$j = 1, 2\$) равномерно сходятся к некоторой случайной \$2\pi\$-периодической вектор-функции \$z(t, a, b, \mu, u)\$ и случайным функциям \$W_j(a, b, \mu, u)\$ (\$u \in U\$), которые будут аналитичны по \$a, b, \mu\$ в окрестности точки \$a = b = \mu = 0\$.

Объединяя оценки для \$|\mu|\$ и \$H_1\$, запишем

$$|\mu| < \min \{(144B^2 K_1 K_2)^{-1}, (6BK_4)^{-1}, \mu_0\} = \mu_\lambda,$$

$$H_1 < \min \{(12BK_1)^{-1}, (6BK_3)^{-1}, H\}.$$

Следовательно, для системы (8) можно указать такое \$\mu_\lambda\$, что для всех \$|\mu| < \mu_\lambda\$ эта система имеет единственное периодическое решение.

Покажем, что решение системы (8) стохастически эквивалентно решению системы (5). У вектор-функций \$X, F\$ в (5) и в (8) соответственно аргументу будем писать внизу символ \$y\$ или \$z\$.

Оценим с учетом (10)

$$\begin{aligned} \sup_{[0, 2\pi]} |z^{(l)} - y^{(l)}| &= \sup_{[0, 2\pi]} |L(t, X_z^{(l-1)} + \kappa \mu F_z^{(l-1)} + W_{1z}^{(l)} \Omega_1 + \\ &\quad + W_{2z}^{(l)} \Omega_2) - L(t, X_y^{(l-1)} + \mu F_y^{(l-1)} + W_{1y}^{(l)} \Omega_1 + W_{2y}^{(l)} \Omega_2)| \leqslant \\ &\leqslant ||L(t, X_z^{(l-1)} - X_y^{(l-1)} + \kappa \mu F_z^{(l-1)} - \mu F_y^{(l-1)} + (W_{1z}^{(l)} - W_{1y}^{(l)}) \Omega_1 + \\ &\quad + (W_{2z}^{(l)} - W_{2y}^{(l)}) \Omega_2)|| < B (||X_z^{(l-1)} - X_y^{(l-1)}|| + |\mu| |\kappa F_z^{(l-1)} - \\ &\quad - F_y^{(l-1)}|) + ||W_{1z}^{(l)} - W_{1y}^{(l)}|| + ||W_{2z}^{(l)} - W_{2y}^{(l)}||, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$W_{jz}^{(l)} - W_{jy}^{(l)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (X_z^{(l-1)} - X_y^{(l-1)} + \mu(xF_z^{(l-1)} - F_y^{(l-1)}), \Omega_j) dt. \quad (12)$$

Представим разность $xF_z^{(l-1)} - F_y^{(l-1)}$ в виде

$$xF_z^{(l-1)} - F_y^{(l-1)} = (x-1)F_y^{(l-1)} + x(F_z^{(l-1)} - F_y^{(l-1)}). \quad (13)$$

Пусть $l=1$. Выбрав нулевое приближение решения одинаковым для переменных y, z , получим из (11) (где $l=1$) с учетом (7), (12), (13)

$$P\{\sup |z^{(1)} - y^{(1)}| > 0, u \in U\} = 0.$$

Используя последнее равенство, находим последовательно из (11) для $l=2, 3, \dots$

$$P\{\sup |z^{(l)} - y^{(l)}| > 0, u \in U\} = 0,$$

т. е. l -ные приближения решений систем (8) и (5) стохастически эквивалентны.

Так как последовательности $\{z^{(l)}\}, \{W_{jz}^{(l)}\}$ равномерно сходятся к случайным функциям $z(t, a, b, \mu, u), W_{jz}(a, b, \mu, u)$, то последовательности $\{y^{(l)}\}, \{W_{jy}^{(l)}\}$ сходятся равномерно с вероятностью единицы к случайным функциям $y(t, a, b, \mu, u), W_{jy}(a, b, \mu, u)$ с такими же свойствами, что и z, W_{jz} .

Согласно теореме 2 ([3], стр. 87) случайные функции z и y, W_{jz} и W_{jy} будут стохастически эквивалентны на вероятностном пространстве $\{U, \sigma, P\}$.

Для существования случайного периодического решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$W_j(a, b, \mu, u) = 0 \quad (j=1, 2). \quad (14)$$

В вычисленных левых частях уравнений (14) записываются явно члены, не зависящие от μ , которые затем преобразуются (с использованием (3)) аналогично [2].

Условия (14) представляются в виде

$$\begin{aligned} -kh_{2g}(a^2 + b^2)^g b + \dots - \frac{x\mu}{2\pi} [\pi\gamma_1(u) + \Phi_1(a, b, \mu, u)] &= 0, \\ -kh_{2g}(a^2 + b^2)^g a + \dots - \frac{x\mu}{2\pi} [\pi\gamma_2(u) + \Phi_2(a, b, \mu, u)] &= 0, \end{aligned} \quad (14')$$

где Φ_1, Φ_2 — аналитические функции относительно a, b, μ , обращающиеся в нули при $a=b=\mu=0$, с коэффициентами — случайными функциями, определяющимися случайными параметрами $\alpha(u), \beta(u)$ в (2).

В условиях главного резонанса система (14') допускает с вероятностью единица случайное единственное вещественное решение вида

$$a = a_1v + a_2v^2 + \dots, \quad b = b_1v + b_2v^2 + \dots, \quad v = \mu^{\frac{1}{2g+1}}, \quad (15)$$

где случайные коэффициенты a_1, b_1 имеют значения [2]

$$a_1(u) = \gamma_2(u) \varphi(u), \quad b_1(u) = \gamma_1(u) \varphi(u), \quad \varphi(u) \neq 0 \quad (u \in U),$$

а соответствующий им функциональный определитель равен [2]

$$\Delta(u) = \psi(a_1^2(u) + b_1^2(u)),$$

$\psi(u) = 0$ только при $a_1^2 + b_1^2 = 0$.

Очевидно, что при главном резонансе справедливо равенство

$$P\{a_1^2(u) + b_1^2(u) = 0, \quad u \in U\} = 0,$$

и, следовательно,

$$P\{\Delta(u) = 0, \quad u \in U\} = 0. \quad (16)$$

Условие (16) обеспечивает определение, по известным формулам теории вероятностей [8], функций распределения случайных коэффициентов в (15) $a_i = \Delta^{-1}(\dots)$, $b_i = \Delta^{-1}(\dots)$, ($i = 1, 2, \dots$), если заданы функции распределения параметров α, β в (2).

Из изложенного следует, что система (1), (2) допускает с вероятностью единица случайный 2π -периодический режим

$$x(t, v, u) = \sum_{\omega=0, 1, \dots} L_\omega(v, u) \cos \omega t + N_\omega(v, u) \sin \omega t \quad (17)$$

в виде ряда

$$x(t, v, u) = x^{(1)}(t, u) v + x^{(2)}(t, u) v^2 + \dots, \quad u \in U, \quad (18)$$

с коэффициентами—случайными 2π -периодическими вектор-функциями. Теорема полностью доказана.

2. Практически случайный периодический режим вычисляется в виде ряда (18). При этом устанавливается зависимость векторов L_ω, N_ω в (17) от случайных параметров α, β в (2) в виде рядов по степеням v : $L_\omega = L_\omega(\alpha, \beta, v)$, $N_\omega = N_\omega(\alpha, \beta, v)$.

Пусть заданы плотности вероятностей параметров α, β в (2) (число которых равно v) и $p_{\alpha, \beta}(f_\alpha, f_\beta)$ — плотность вероятностей случайного v -мерного вектора (α, β) . Здесь для простоты записи у аргументов f_α, f_β опущены индексы, совпадающие с индексами величин α, β в (2) и пробегающие те же значения, что и последние.

Тогда плотности вероятностей случайных коэффициентов L_ω, N_ω в (17) определяются по известным формулам [9] в виде v -кратных интегралов

$$p_{L_\omega}(l_\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha, \beta}(f_\alpha, f_\beta) \delta\{l_\omega - L_\omega(f_\alpha, f_\beta)\} df_\alpha df_\beta, \quad (19)$$

$$p_{N_\omega}(n_\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha, \beta}(f_\alpha, f_\beta) \delta\{n_\omega - N_\omega(f_\alpha, f_\beta)\} df_\alpha df_\beta.$$

При этом $p_{L_\omega}, p_{N_\omega}$ следует искать в виде ряда по степеням v с неопределенными коэффициентами.

3. В качестве примера рассматриваются случайные субгармонические колебания в контуре с варактором, находящимся под воздействием входной ЭДС $e = E \cos \omega t$. Контур образован последовательным соединением линейных R и L и запертого «резкого» ($p_{\alpha, \beta} = n$)-перехода. Субгармонические детерминированные режимы по целым степеням малого параметра были изучены в работе [10].

Уравнение, описывающее колебания, можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + k_0^2 x - dx^2 = \mu \left(\alpha_2 \frac{dx}{d\tau} + \alpha_3 \cos 2\tau \right). \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\omega_0}{\omega_1}, & \omega_0^2 &= \frac{V\varphi}{lL}, & \omega_1 &= \frac{\omega}{2}, \\ d &= \frac{Q_0}{4l^2\omega_1^2 L}, & \mu\alpha_2 &= -\frac{R}{\omega_1 L}, & \mu\alpha_3 &= \frac{E}{Q_0\omega_1^2 L}, \\ x &= \frac{Q}{Q_0}, & \tau &= \omega_1 t, \end{aligned}$$

— $\mu\alpha_2$ и l — постоянные перехода, $\varphi = U_c$ — напряжение на переходе, μ — малый параметр.

Порождающая система для (20) является системой Ляпунова и допускает параметрическое решение с периодом [2]

$$T = \frac{2\pi}{k_0} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{d^2}{k_0^4} c^2 - \frac{5}{18} \frac{d^3}{k_0^6} c^3 + \dots \right).$$

Для исследования случайных главнорезонансных колебаний будем считать, что в уравнении (20) $k_0^2 = k^2 = \mu\alpha_1$, где k — целое число, а именно, $k = 2$; α_3 — случайная величина, распределенная по нормальному закону

$$p(f) = \frac{1}{V2\pi D} \exp \left\{ -\frac{(f-M)^2}{2D} \right\},$$

где D и M — ее дисперсия и математическое ожидание. Последнее предположение означает, что амплитуда входной ЭДС E считается случайной величиной.

Пусть выполнено условие главного резонанса

$$P\{\alpha_3(u) \neq 0, u \in U\} = 1.$$

Согласно доказанной теореме уравнение (20) имеет единственное случайное периодическое решение в виде ряда (18) по степеням $v = \mu^{1/3}$. Вычислим это решение

$$x = L_0(v) + L_2(v) \cos 2\tau + N_2(v) \sin 2\tau + L_4(v) \cos 4\tau + N_4(v) \sin 4\tau + \dots,$$

$$L_0 = \frac{1}{8} da_1^2 v^2 + (\dots) v^3 + \dots, \quad N_2 = \frac{48}{5} \frac{\alpha_2}{d^2 a_1} v^3 + (\dots) v^3 + \dots,$$

$$L_2 = a_1 v - \frac{8}{5} \frac{\alpha_1}{d^2 a_1} v^2 + (\dots) v^3 + \dots,$$

$$N_4 = 0v^2 + (\dots) v^3 + \dots, \quad L_4 = -\frac{1}{24} da_1^2 v^2 + (\dots) v^3 + \dots,$$

$$a_1 = -2 \left(\frac{3\alpha_3}{5d^2} \right)^{1/3}.$$

Определим плотности вероятностей коэффициентов

$$v^{-2} L_0, \quad v^{-1} L_2, \quad v^{-2} N_2, \quad v^{-2} L_4, \quad v^{-3} N_4,$$

Для чего подставим значения этих коэффициентов из (21) в правые части формул (19). Получим

$$\begin{aligned}
 p(l_0) &= 5 \sqrt{\frac{dl_0}{\pi D}} \exp \left\{ - \left[\frac{10\sqrt{2d}}{3} (l_0)^{3/2} - M \right]^2 (2D)^{-1} \right\} + (\dots) v + \dots, \\
 p(l_2) &= - \frac{5d^2}{8\sqrt{2\pi D}} l_2^2 \exp \left\{ - \left(\frac{5d^2}{24} l_2^3 + M \right)^2 (2D)^{-1} \right\} - \\
 &- \frac{64\alpha_1^3}{25d^4\sqrt{2\pi D}} l_2^{-4} \exp \left\{ - \left(\frac{64\alpha_1^3}{75d^4} l_2^{-3} - M \right)^2 (2D)^{-1} \right\} v + (\dots) v^2 + \dots, \\
 p(n_2) &= \frac{13824\alpha_2^3}{25d^4\sqrt{2\pi D}} n_2^{-4} \exp \left\{ - \left(\frac{4606d_2^3}{25d^4} n_2^{-3} + M \right)^2 (2D)^{-1} \right\} + (\dots) v + \dots, \\
 p(l_4) &= - 15 \sqrt{\frac{3dl_4}{\pi D}} \exp \left\{ - [10\sqrt{6d} (l_4)^{3/2} + M]^2 (2d)^{-1} \right\} + (\dots) v + \dots, \\
 p(n_4) &= (\dots) + (\dots) v + \dots.
 \end{aligned}$$

Работа была выполнена под руководством С. Н. Шиманова, которому автор выражает свою благодарность. Автор благодарит А. Ф. Клейменова за консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, М., 1956.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, изд. Наука, М., 1965.
4. С. Н. Шиманов, ПММ, 19, № 2, 225 (1955).
5. В. И. Гришаков, С. Н. Шиманов, Изв. высш. уч. зав — Математика, № 12, 20 (1967).
6. А. Ф. Клейменов, Дифференциальные уравнения, 4, № 8, 1433 (1968).
7. А. Ф. Клейменов, Диссертация, УрГУ, 1969.
8. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, М., 1954.
9. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.
10. И. Х. Ризкин, Радиотехника и электроника, 11, № 2, 360 (1966).

Уральский государственный университет

Поступила в редакцию
4 сентября 1969 г.

ON PERIODIC SOLUTIONS FOR STOCHASTIC SYSTEMS SIMILAR TO THE LIAPUNOV ONE

V. S. Nustrov

An existence theorem is proved for resonance periodic solutions of stochastic systems similar to the Liapunov one. Stochastic functions appear in the right-hand side of equation under the sign of a small parameter. The obtained result illustrated with an example is a generalization of the known Malkin theorem for determinate systems.

УДК 517.9

К ВОПРОСУ О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

И. Ш. Раупов, Т. Сабиров

Изучаются точки бифуркации задачи о периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от двух вещественных параметров. В частности, приводятся различные достаточные условия изолированности и неизолированности данной точки бифуркации.

1. Пусть R^n — вещественное n -мерное пространство. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu) x + F(t, x, \varepsilon, \mu), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, а ε, μ — вещественные параметры. Предположим, что матрица $A(t, \varepsilon, \mu)$ и вектор-функция $F(t, x, \varepsilon, \mu)$ непрерывны по совокупности аргументов и ω — периодичны по t в области

$$|\varepsilon| + |\mu| < r, \quad \|x\| < \rho. \quad (2)$$

Предположим далее, что

$$F(t, 0, \varepsilon, \mu) \equiv 0. \quad (3)$$

Тогда при всех рассматриваемых ε, μ система (1) имеет нулевое ω -периодическое решение. Как известно (см. [1, 2]), точка (ε_0, μ_0) области (2) называется точкой бифуркации задачи об ω -периодических решениях системы (1), если для любого $\delta > 0$ существует такая точка (ε, μ) , что $|\varepsilon - \varepsilon_0| + |\mu - \mu_0| < \delta$, и при котором система (1) имеет, по крайней мере, одно ненулевое ω -периодическое решение $x(t, \varepsilon, \mu)$, удовлетворяющее неравенству

$$\max_t \|x(t, \varepsilon, \mu)\| < \delta. \quad (4)$$

Рассмотрим точки бифуркации системы (1), лежащие в малой окрестности точки $(\varepsilon_0, \mu_0) = (0, 0)$. Ясно, что если точка $(0, 0)$ не является точкой бифуркации системы (1), то все точки (ε, μ) , лежащие в некоторой окрестности $(0, 0)$ также не будут точками бифуркации системы (1). Поэтому представляет интерес случай, когда точка $(0, 0)$ есть точка бифуркации системы (1). Из наших рассмотрений, в частности, вытекают различные достаточные условия неизолированности точки бифуркации $(0, 0)$ системы (1).

Рассматриваемый здесь вопрос не исследован в общем случае даже для системы дифференциальных уравнений, содержащих один параметр. Вопросу исследования точек бифуркации задачи об ω -периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы [2–5].

2. Наряду с системой (1) рассмотрим также и линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu) x. \quad (5)$$

Пусть $U(\omega, \varepsilon, \mu)$ — матрица монодромии системы (5). Так как $(0, 0)$ является точкой бифуркации системы (1), то (см. [2]) число 1 есть собственное значение матрицы $U(\omega, 0, 0)$, т. е. функция

$$F(\varepsilon, \mu) = \det[I - U(\omega, \varepsilon, \mu)] \quad (6)$$

удовлетворяет условию $F(0, 0) = 0$.

Определение 1. Вещественную функцию $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\mu(0) = 0$), определяемую неявным уравнением

$$F(\varepsilon, \mu) = 0, \quad (7)$$

назовем простой функцией, если при малых $h > 0$ выполнено неравенство

$$F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) + h) F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) - h) < 0, \quad (8)$$

и изолированной функцией, если при малых $h > 0$ выполнено неравенство

$$F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) + h) F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) - h) \neq 0. \quad (9)$$

Аналогично вводится понятие правоизолированной (левоизолированной) функции $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\mu_0(0) = 0$), если при малых $h > 0$ выполнено неравенство

$$F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) + h) \neq 0 \quad (F(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon) - h) \neq 0). \quad (10)$$

Замечание 1. Отметим, что в определении простой (соответственно-изолированной, правоизолированной и левоизолированной) функции не указано множество тех ε , при которых должно выполняться неравенство (8) (соответственно, (9) и (10)). Если неравенство (8) (соответственно, (9) и (10)) выполнено при значениях ε , лежащих на некотором множестве $E \in (-r, r)$, то будем говорить о E -простой функции (соответственно, E -изолированной функции и т. д.).

3. Везде в дальнейшем будем предполагать, что при всех (ε, μ) , лежащих в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, задача Коши для системы (1) имеет при малых значениях x единственное решение и что функция $F(t, x, \varepsilon, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t, \varepsilon, \mu} \|F(t, x, \varepsilon, \mu)\| = o(\|x\|), \quad (11)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$.

Пусть далее E — некоторый отрезок на оси ε , целиком лежащий в окрестности точки $\varepsilon = 0$, а $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$) — некоторая вещественная непрерывная функция, определяемая уравнением (7). Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu_0(\varepsilon)) x + F(t, x, \varepsilon, \mu_0(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \in E). \quad (12)$$

В дальнейшем будем предполагать, что при всех $\varepsilon \in E$ система (12) не имеет малых ненулевых ω -периодических решений. Индекс нулевого ω -периодического решения системы (12) обозначим через γ (см. [2, 6]). Легко видеть, что γ не зависит от ε при всех $\varepsilon \in E$.

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть E — некоторый отрезок оси ε , а $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$) — вещественная непрерывная неявная функция, определяемая уравнением (7). Пусть выполнено одно из двух условий: 1) $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ является E -простой функцией; 2) $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ является E -правоизолированной или E -левоизолированной функцией, а $|\gamma| \neq 1$.

Тогда все точки $(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon))$ ($\varepsilon \in E$) являются точками бифуркации задачи об ω -периодических решениях системы (1).

Приведем доказательство теоремы. С этой целью через $U(t, \varepsilon, \mu)$ ($U(0, \varepsilon, \mu) = 1$) обозначим матрицант линейной системы (5) и рассмотрим конечно-мерное векторное поле

$$\Phi(\varepsilon, \mu) x_0 = (I - U(\omega, \varepsilon, \mu)) x_0 + \\ + \int_0^\omega U(\omega, \varepsilon, \mu) U^{-1}(s, \varepsilon, \mu) F(s, x(s, x_0, \varepsilon, \mu), \varepsilon, \mu) ds, \quad (13)$$

где $x(t, x_0, \varepsilon, \mu)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0, x_0, \varepsilon, \mu) = o$. Из тождества (3) вытекает, что поле (13) при всех рассматриваемых значениях ε, μ обращается в нуль в точке $x_0 = 0$. Нас будут интересовать малые ненулевые решения уравнения $\Phi(\varepsilon, \mu) x = 0$ так как они и только они определяют малые ω -периодические решения системы (1).

Наряду с полем (13) рассмотрим векторное поле

$$\Phi(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon)) x_0 \quad (\varepsilon \in E). \quad (14)$$

В условиях теоремы для каждой точки $(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon))$ ($\varepsilon \in E$) существует такая окрестность $V(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon))$, что если точка (ε_1, μ_1) этой окрестности не лежит на кривой $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$), то индекс нуля O поля $\Phi(\varepsilon_1, \mu_1)$ не совпадает с вращением этого же поля на границе некоторого шара; это вращение равно γ . Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 1, если $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$) является либо E -простой, либо E -изолированной и $|\gamma| \neq 1$, то для любой точки $(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon))$ ($\varepsilon \in E$) и любого числа $\delta > 0$ существует такая окрестность $V(\varepsilon, \mu_0(\varepsilon))$, что при каждом $(\varepsilon_1, \mu_1) \in V$ и $\mu_1 \neq \mu_0(\varepsilon_1)$ система (1) имеет, по крайней мере, одно ненулевое ω -периодическое решение $x(t, \varepsilon_1, \mu_1)$, удовлетворяющее неравенству $\|x(t, \varepsilon_1, \mu_1)\| < \delta$. Аналогичное уточнение можно делать и в случае, когда функция $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$) право- или левоизолированная.

Замечание 2. В условиях теоремы 1, если $\varepsilon = o \notin E$, то точка бифуркации $(0, 0)$ системы (1) является неизолированной точкой бифуркации.

4. При применении теоремы 1 возникают следующие основные задачи: 1) необходимо суметь вычислить матрицу монодромии $U(\omega, \varepsilon, \mu)$; 2) необходимо найти вещественные корни $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ уравнения (7), удовлетворяющие условиям теоремы; 3) необходимо увидеть изолированность нулевого ω -периодического решения системы (12) и вычислить ее индекс.

Задаче 1), начиная с классических исследований Пуанкаре и Ляпунова, посвящено большое количество работ (см., например, [7, 8]). Сравнительно мало работ посвящено задаче 3). Здесь следует отметить работы [2, 6], где исследуются случаи, когда изолированность нулевого решения определяется линеаризованной системой. Некоторые теоремы относительно случая, когда линеаризованная система не определяет изолированность нулевого решения, можно получить методами, развитыми в работах [9, 10]. Случай же, когда главная часть системы яв-

ляется однородной, была рассмотрена одним из авторов настоящей работы. Используя теорему 1 и результаты работы [1], получим следующую теорему.

Теорема 2. Пусть функция $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in E$) удовлетворяет условию 1) теоремы 1, а система (12) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = P_m(t, x, \varepsilon) + \varphi(t, x, \varepsilon) \quad (\varepsilon \in E), \quad (15)$$

где $P_m(t, x, \varepsilon)$ — однородный по x многочлен степени $m > 1$, а $\varphi(t, x, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$\max_{t, \varepsilon} \| \varphi(t, x, \varepsilon) \| = o(\|x\|^m) \quad (16)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$. Пусть, наконец, точка $x = 0$ является изолированным нулем конечно-мерного поля

$$\Psi_\varepsilon x = - \int_0^\omega P_m(s, x, \varepsilon) ds \quad (\varepsilon \in E).$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Наиболее трудной является задача 2). Исследованию этой задачи в простейших ситуациях посвящен следующий пункт настоящей работы. Здесь же остановимся на некоторых примерах, показывающих, как по матрице $A(t, \varepsilon, \mu)$ можно судить о существовании по крайней мере одного корня уравнения (7), удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Пример 1. Пусть матрица

$$A(t, \varepsilon, \mu) = \varepsilon B + \mu C, \quad (17)$$

где B, C — постоянные квадратные матрицы порядка n . Оказывается, что если

$$\det B \cdot \det C < 0, \quad (18)$$

то существует некоторая окрестность $V(0, 0)$ точки $\varepsilon = \mu = 0$, что уравнение (7) имеет по крайней мере один $(0, \rho_1)$ -простой корень $\mu = \mu_1(\varepsilon)$ ($\mu_1(0) = 0$) и один $(-\rho_1, 0)$ -простой корень $\mu = \mu_2(\varepsilon)$ ($\mu_2(0) = 0$), где число $\rho_1 > 0$ такое, что $(-\rho_1, \rho_1) \times \{0\} \subset V$.

Доказательство этого утверждения вытекает из того факта, что при малых ε, μ уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\det(\varepsilon B + \mu C) = 0, \quad (19)$$

левая часть которого является однородным многочленом степени n по ε, μ . Из условия (18) следует, что уравнение (19) при $\varepsilon = 1$ имеет по крайней мере один вещественный корень μ_0 .

Замечание 3. Если $A(t, \varepsilon, \mu)$ имеет вид (17), где $\det C \neq 0$, и если n — нечетное, то указанное в примере 1 утверждение справедливо также и без условия (18).

Пример 2. Теперь рассмотрим случай, когда

$$A(t, \varepsilon, \mu) = \varepsilon B(t) + \mu C(t), \quad (20)$$

где $B(t), C(t)$ — ω -периодические матрицы. Оказывается, что аналогичные в примере 1 (и в замечание 2) утверждения верны и в этом случае, если матрицы B, C примера 1 заменить соответственно матрицами \tilde{B}, \tilde{C} , где

$$\tilde{B} = \int_0^\omega B(s) ds, \quad \tilde{C} = \int_0^\omega C(s) ds. \quad (21)$$

Из указанных примеров непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 3. Пусть точка $(\varepsilon, \mu) = (0, 0)$ является точкой бифуркации системы (1), матрица $A(t, \varepsilon, \mu)$ представима в виде (20), $\det \tilde{C} \neq 0$, уравнение $\det(\tilde{B} + \mu \tilde{C}) = 0$ имеет вещественный корень μ_0 и, наконец, нулевое ω -периодическое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon [B(t) + \mu_0 C(t)] x + F(t, x, \varepsilon, \mu_0 \varepsilon) \quad (\varepsilon \in (0, \rho_1))$$

изолировано.

Тогда точка $(0, 0)$ —неизолированная точка бифуркации системы (1).

5. Как указано выше (см. теорему 1), для исследования точек бифуркации системы (1), лежащих вблизи точки бифуркации $(0, 0)$ (в частности, для исследования изолированности точки $(0, 0)$), важную роль играют неявные функции $\mu = \mu_0(\varepsilon)$, определяемые уравнением (7). Однако функция $F(\varepsilon, \mu)$, лежащая в левой части равенства (7), в общем случае практически не может быть в явной форме выражена, так как ее нахождение связано как с нахождением матрицы монодромии $U(\omega, \varepsilon, \mu)$, так и с вычислением определителей [8].

Приведем другой способ, позволяющий в ряде случаев выписывать эффективные условия существования корней $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\mu_0(0) = 0$) уравнения (7). Будем указывать формулы для первых коэффициентов этих корней и основываясь на этих формулах, укажем условия E -простоты или E -изолированности каждого такого корня.

Так как $(0, 0)$ точка бифуркации системы (1), то число 1 является собственным значением матрицы монодромии $U(\omega, 0, 0)$. Для простоты будем рассматривать случай, когда число 1 является простым собственным значением. Пусть l_0 —собственный вектор матрицы $U(\omega, 0, 0)$, а g_0 —собственный вектор сопряженной матрицы $U^*(\omega, 0, 0)$, соответствующие собственному значению 1, т. е.

$$U(\omega, 0, 0) l_0 = l_0, \quad U^*(\omega, 0, 0) g_0 = g_0. \quad (22)$$

Будем считать, что $(l_0, g_0) = 1$. При малых ε, μ через $\lambda_1(\varepsilon, \mu), \lambda_2(\varepsilon, \mu), \dots, \lambda_{n-1}(\varepsilon, \mu)$ обозначим все собственные значения матрицы $(I - U(\omega, \varepsilon, \mu))$, которые близки к ненулевым собственным значениям матрицы $(I - U(\omega, 0, 0))$. Далее положим

$$Px = (x, g_0) l_0, \quad \Gamma = (I - U(\omega, 0, 0) + P)^{-1} \quad (23)$$

и

$$\alpha(\varepsilon, \mu) = ([I - \Gamma(U(\omega, 0, 0) - U(\omega, \varepsilon, \mu))]^{-1} l_0, g_0) - 1, \quad (24)$$

где (x, y) означает скалярное произведение векторов $x, y \in R^n$.

Лемма 1. Справедлива формула

$$F(\varepsilon, \mu) = - \frac{\alpha(\varepsilon, \mu)}{1 + O(|\varepsilon| + |\mu|)} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\varepsilon, \mu). \quad (25)$$

Доказательство этой формулы вытекает из соответствующих формул теории возмущения линейных операторов (см., например, [12, 13]).

Из (25) следует, что при малых ε корни $\mu = \mu_0(\varepsilon)$ ($\mu_0(0) = 0$) уравнения (7) являются корнями уравнения

$$\alpha(\varepsilon, \mu) = 0 \quad (26)$$

и наоборот.

Предположим, что в системе (1) матрица $A(t, \varepsilon, \mu)$ имеет вид

$$A(t, \varepsilon, \mu) = A_0(t) + \varepsilon A_{10}(t) + \mu^k A_{0k}(t) + \varepsilon B(t, \varepsilon, \mu) + O(\mu^k), \quad (27)$$

где матрица $B(t, \varepsilon, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$B(t, 0, 0) = 0. \quad (28)$$

Тогда матрицу монодромии можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\omega, \varepsilon, \mu) = & U_0(\omega, 0, 0) + \varepsilon U_{10}(\omega) + \mu^k U_{0k}(\omega) + \\ & + \varepsilon \tilde{U}(\varepsilon, \mu) + O(\mu^k), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{U}(0, 0) = 0$. Здесь $U(t, 0, 0) (U(0, 0, 0) = 1)$ —матрицант линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t) x, \quad (30)$$

а матрицы U_{10}, U_{0k} имеют вид

$$\begin{aligned} U_{10}(\omega) = & \int_0^\omega U_0(\omega, 0, 0) U_0^{-1}(s, 0, 0) A_{10}(s) U_0(s, 0, 0) ds, \\ U_{0k}(\omega) = & \int_0^\omega U_0(\omega, 0, 0) U_0^{-1}(s, 0, 0) A_{0k}(s) U_0(s, 0, 0) ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (24) и (29) вытекает, что уравнение (26) можно записать в виде

$$b_k \mu^k + a_0 \varepsilon + \varepsilon b(\varepsilon, \mu) + o(\mu^k) = 0, \quad (32)$$

где $b(0, 0) = 0$, а числа a_0, b_k определяются формулами

$$\begin{aligned} a_0 = & \int_0^\omega (A_{10}(s) l_0(s), g_0(s)) ds, \\ b_k = & \int_0^\omega (A_{0k}(s) l_0(s), g_0(s)) ds. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $l_0(s)$ —решение системы (30), а $g_0(s)$ —решение сопряженной к (30) системы, удовлетворяющие условиям $l_0(0) = l_0, g_0(0) = g_0$.

Непосредственный анализ уравнения (32) показывает, что в малой окрестности точки $(0, 0)$ оно определяет при каждом ε единственную непрерывную неявную функцию $\mu = \mu_1(\varepsilon)$ ($\mu_1(0) = 0$), если k —нечетно. Если же k —четно, то при каждом ε , удовлетворяющем неравенству $\varepsilon \frac{a_0}{b_k} < 0$, уравнение (32) определяет две непрерывные неявные функции $\mu = \mu_2(\varepsilon), \mu = \mu_3(\varepsilon)$ ($\mu_2(0) = \mu_3(0) = 0$).

Теперь приведем основную теорему этого пункта.

Теорема 4. Пусть в системе (1) при малых ε, μ матрица $A(t, \varepsilon, \mu)$ представима в виде (27) и (28), точка $(0, 0)$ является точкой бифуркации системы (1), число 1 есть мультиплликатор системы (30) простой кратности и выполнено условие

$$a_0 b_k \neq 0. \quad (34)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) при k нечетном, если при малых ненулевых ε нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu_1(\varepsilon)) x + F(t, x, \varepsilon, \mu_1(\varepsilon)) \quad (35)$$

изолировано, то все точки кривой $\mu = \mu_1(\varepsilon)$ и только они являются точками бифуркации системы (1);

2) при k четном, если при малых ненулевых ε нулевое решение хотя бы одной из систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu_i(\varepsilon)) x + F(t, x, \varepsilon, \mu_i(\varepsilon)) \quad (i = 2, 3) \quad (36)$$

изолировано, то точки соответствующей кривой $\mu = \mu_i(\varepsilon)$ являются точками бифуркации системы (1); точки (ε, μ) , не лежащие на кривых $\mu = \mu_i(\varepsilon)$ ($i = 2, 3$), не являются точками бифуркации системы (1).

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждая неявная функция $\mu = \mu(\varepsilon)$ ($\mu(0) = 0$), определяемая уравнением (23), является простой функцией в своей области определения (см. определение 1). Это последнее утверждение непосредственно следует из формул (25) и (34), так как при условии (34) все малые решения уравнения (32) являются простыми. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- М. А Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
- М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1966.
- Ю И Неймарк, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, 1, №№ 1, 2, 5, 6 (1958)
- Т. Сабиров, Кандидатская диссертация, Воронеж, 1966
- Т. Сабиров, ДАН СССР, 181, № 4, 805 (1968).
- Cronin I. Fixed points and topological degree, Amer. Math. Soc., 1964.
- И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
- Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир, М., 1966.
- М. А Красносельский и др., Векторные поля на плоскости, Физматгиз, 1963.
- П. П. Забреко и М. А. Красносельский, Сибирский матем. ж., 5, № 3, 509 (1963)
- И. Ш. Раупов, Об индексе периодического решения систем дифференциальных уравнений с однородной главной частью (в печати).
- Kato T. Perturbation theory for linear operators. Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
- Т. Сабиров, Докл. Ак Тадж. ССР, 9, № 3, (1966).

Воронежский государственный педагогический
институт

Поступила в редакцию
3 апреля 1970 г.

TO THE PERIODIC SOLUTIONS BIFURCATION PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO PARAMETERS

I. Sh. Raupov, T. Sabirov

Bifurcation points are studied in the problem of periodic solutions for systems of ordinary differential equations depending on two real parameters. In particular, various sufficient conditions for a given bifurcation point to be isolated or not isolated are presented.

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ
ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЗАДАЧАХ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

М. И. Гордион, В. И. Плотников, А. М. Стерлин

Рассматривается задача оптимального управления системой с переменным запаздыванием. Доказывается принцип минимума для минимаксных задач при наличии ограничений на фазовые координаты

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется задача оптимального управления системой, описываемой при помощи векторного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием, при наличии ограничений на фазовые координаты на некотором фиксированном компакте, принадлежащем интервалу времени управления системой, и ограничений изопериметрического типа. Методика вывода основных утверждений статьи та же, что и в [1] и отличается от известных методов [2, 3–5]. Статья содержит ряд новых результатов, в частности доказательство принципа максимума для минимаксной задачи при наиболее общих ограничениях. Доказательство этих результатов стало возможным благодаря введению одним из авторов [1] новой методики исследования оптимальных задач (см. [6]).

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемая управляемая система описывается векторным дифференциальным уравнением с переменным запаздыванием

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \omega(t)), u(t), t), \quad (1)$$

где $\omega(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $1 - \omega'(t) > 0$, $\omega(t) > 0$ и $u(t)$ — некоторая измеримая функция со значениями из ограниченного множества $U \subset R^r$. Под решением уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на $[0, T]$ функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду при $t > 0$, равную некоторому $x_0 \in R^n$ в момент $t = 0$ и $\varphi(t)$ при $t \in [-\omega(0), 0]$. Здесь $\varphi(t)$ — непрерывная на $[-\omega(0), 0]$ функция. Отметим, что решение уравнения (1), вообще говоря, разрывно в точке $t = -0$. Считая, что $f(x, y, u, t)$ — непрерывная по (x, y, u) , измеримая по t и непрерывно дифференцируемая по (x, y) функция, а также предполагая выполненные некоторые условия суммируемости для f (типа Каратеодори, см. [7]), мы, тем самым, гарантируем однозначную разрешимость (1) при любых $(x_0, \varphi(t))$ и $u(t) \in U$ — в некотором интервале, зависящем, вообще говоря, от выбранного начального состояния и управляющей функции.

Предположим далее, что на движение системы (1) наложены следующие ограничения

$$J_1 = l_1 = f_1(g_0(x(t_0)), \dots, g_k(x(t_k))) = 0,$$

$$J_2 = l_2 = f_2(g_0(x(t_0)), \dots, g_k(x(t_k))) \leq 0,$$

где $t_0 = 0$, $t_k = T$ и все $t_j \in [0, T]$, f_1 и f_2 — непрерывно дифференцируемые функции $k+1$ переменных, а $g_j(x)$ — непрерывно дифференцируемы по x ;

$$\text{II} \quad J_3 = l_2 = \int_0^T h_1(x(t), u(t), t) dt = 0,$$

$$J_4 = l_4 = \int_0^T h_2(x(t), u(t), t) dt \leq 0,$$

где h_1 и h_2 непрерывны по (x, u) , непрерывно дифференцируемы по x и измеримые по t функции:

$$\text{III} \quad J_5 = l_5(t) = g_\Phi(x(t), t) \leq 0$$

при $t \in F \subset [0, T]$, где F — компакт, g_Φ непрерывна по (x, t) и непрерывно дифференцируема по x . Пусть требуется минимизировать функционал J . $J = \max_{t \in F} l_6(t)$, где $F_1 \subset [0, T]$ — компакт, а $l_6(t)$ состоит из комбинации функционалов первого, второго и третьего типов.

$$J = l_6(t) = f_m(g_0(x(t_0)), \dots, g_k(x(t_k))) +$$

$$+ \int_0^T h_m(x(t), u(t), t) dt + g_m(x(t), t).$$

2. ВАРИАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ И УПРАВЛЕНИЙ

Пусть допустимая тройка $(\varphi_0(t), x_0, u(t))$ реализует минимум функционала J . Тогда $(\varphi_\varepsilon(t), x_{0\varepsilon}, u_{0\varepsilon}(t))$ обозначает варьированное начальное состояние и управление системы. Функциональная структура вариаций следующая:

$$\varphi_\varepsilon(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varepsilon \varphi(\tau),$$

где $\varphi(\tau)$ — любая непрерывная на $[-\omega(0), 0]$ функция;

$$x_{0\varepsilon} = x_0 + \varepsilon \zeta_0;$$

$$u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t, \{\alpha_j^k\}, \{\tau_j\}, \{w_j^k\}) = \begin{cases} w_j^l, & t \in (\tau_j - \varepsilon \sum_{r=1}^l \alpha_j^r, \tau_j - \varepsilon \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_j^r) = \Pi_j^l \subset (0, T] \\ u(t), & t \in \overline{\bigcup_{l,j} \Pi_j^l} \end{cases}$$

(см. [1] и [2]). Здесь $\{\alpha_j^k\}$ — конечный набор неотрицательных чисел, $\{w_j^k\}$ — соответствующий $\{\alpha_j^k\}$ набор точек, принадлежащих U , τ_j — набор точек Лебега оптимального управления, не принадлежащих некоторому множеству, определяемому следующим образом. Пусть F_Φ — множество, на котором $l_5(t) = 0$; тогда $(0, T) \setminus F_\Phi$ представимо в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся интервалов. Если F_m обозначает множество, на котором $g_m(x(t), t) = \max_{t \in F_1}$ $g_m(x(t), t)$ то $(0, T) \setminus F_m$ имеет ту же структуру. Объединение концов всех упомянутых интервалов не должно пересекаться с множеством $\{\tau_j\}$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

Для вывода необходимых условий нужно представить в удобном виде (ср. [1]) первые вариации всех функционалов задачи. Сделаем это

для функционалов каждого из трех типов. Для этого запишем приращения соответствующих функционалов при вариации начального состояния и управления

$$\text{I } \Delta l_1 = \sum_{i=0}^k \frac{\partial f_i}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} (\zeta_{1i}(t_i)) \Delta x(t_i),$$

$$\text{II } \Delta l_2 = \int_0^T \frac{\partial h_1}{\partial x} (\zeta_2(t), u_\varepsilon(t), t) \Delta x(t) dt + \int_0^T \Delta_u h_1(x(t), t) dt,$$

$$\text{III } \Delta l_3(t) = g_\Phi(\zeta_3(t), t) \Delta x(t),$$

где $\Delta x(t)$ есть решение следующего уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) - \frac{\partial f}{\partial x} (\zeta, \zeta_\omega, u_\varepsilon, t) \Delta x(t) - \frac{\partial f}{\partial y} (\zeta, \zeta_\omega, u_\varepsilon, t) = \\ = \Delta_u f(x(t), x(t - \omega(t)), t) \end{aligned}$$

с начальным значением $\Delta x(0) = \varepsilon \zeta_0$ и начальной функцией $\varepsilon \varphi(\tau)$. Здесь все ζ лежат между оптимальным и варьированным значением траектории в соответствующие моменты времени, а

$$\Delta_u f(x, y, t) \stackrel{df}{=} f(x, y, u_\varepsilon, t) - f(x, y, u, t).$$

Зависимость $\Delta x(t)$ от начальных условий и правых частей можно записать в явной форме, используя решение сопряженной системы (см. [8]). Пусть $\alpha(t)$ есть наименьшее из чисел $t - \omega(t)$ и 0. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = \varepsilon Y_\varepsilon(t, 0) \zeta_0 + \varepsilon \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t)} Y_\varepsilon(t, s) \frac{\partial f}{\partial y} (\zeta(s), \zeta_\omega(\tau), u(s), s) \times \\ \times \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \int_0^t Y_\varepsilon(t, \tau) \Delta_u f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $h(\tau)$ — функция, обратная $t - \omega(t)$, а $Y_\varepsilon(t, \tau)$ есть решение матричного уравнения:

$$\dot{Y}_\varepsilon(t, \tau) = -Y_\varepsilon(t, \tau) \frac{\partial f}{\partial x} (\zeta(\tau), \zeta_\omega(\tau - \omega(\tau)), u_\varepsilon(\tau), \tau) \quad (3)$$

при $\tau \in [\beta(t), t]$, где $\beta(t)$ — наибольшее из чисел $t - \omega(t)$ и 0.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\varepsilon(t, \tau) = -Y_\varepsilon(t, \tau) \left[\frac{\partial f}{\partial x} (\zeta(\tau), \zeta_\omega(\tau - \omega(\tau)), u_\varepsilon(\tau), \tau) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial y} (\zeta(s), \zeta_\omega(\tau), u_\varepsilon(\tau), s) \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \right] \end{aligned}$$

при $\tau \in [0, \beta(t)]$ и $\beta(t) > 0$ с конечными условиями $Y_\varepsilon(t, \tau)|_{\tau=t} = E$. Ясно, что в случае $\beta(t) = 0$ для определения $Y_\varepsilon(t, \tau)$ достаточно задать уравнение на $[\beta(t), t]$. Заметим, что $Y_\varepsilon(t, \tau)$ — функция непрерывная по (t, τ) . Вычислим сначала первую вариацию функционала типа III.

$$\Delta l_5(t) = \frac{\partial g_\Phi}{\partial x} (\zeta_5(t), t) \left[Y_\varepsilon(t, 0) \zeta_0 + \varepsilon \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t)} Y(t, s) \times \right.$$

$$\times \frac{\partial f}{\partial y} (\zeta(s), \zeta_\omega(\tau), u_\varepsilon(s), s) \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \varphi(\tau) d\tau +$$

$$\left. + \int_0^t Y_\varepsilon(t, \tau) \Delta_u f(\tau) d\tau \right].$$

Переходя в отношении $\frac{\Delta l_5(t)}{\varepsilon}$ к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\delta l_5(t) = \frac{\partial g_\Phi}{\partial x} (x(t), t) \left[Y(t, 0) \zeta_0 + \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t)} Y(t, s) \frac{\partial f}{\partial y} \times \right.$$

$$\times (x(s), \varphi_0(\tau), u(s), s) \varphi(\tau) \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} d\tau +$$

$$\left. + \sum_{\tau_j < t} \sum_{k=1}^{k_j} \alpha_j^k Y(t, \tau_j) \Delta_u f(w_j^k, \tau_j) \right],$$

где $Y(t, \tau)$ — решение уравнения, которое получается из (3) заменой $\zeta_i(t)$ на $x(t)$ и $u_\varepsilon(t)$ на $u(t)$, а

$$\Delta_u f(w_j^k, \tau_j) = f(x(\tau_j), y(\tau_j), w_j^k, \tau_j) - f(x(\tau_j), y(\tau_j), u(\tau_j), \tau_j).$$

Это вытекает из теоремы Каратеодори о непрерывной, в интегральном смысле, зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от правых частей и теоремы Лебега о дифференцировании (см. [7, 9]).

Таким образом, получаем

$$\Delta l_5(t) = \varepsilon \delta l_5(t) + o(\varepsilon, t, \alpha_j^k),$$

где $\frac{o(\varepsilon, t, \alpha_j^k)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Отметим, что если α_j^k изменяется в некотором компакте, то $\frac{o(\varepsilon, t, \alpha_j^k)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ равномерно по (t, α_j^k) . Первые вариации функционалов третьего типа есть кусочно-непрерывные функции с разрывами в точках τ_j . Теперь легко записать первые вариации функционалов первого типа. Например:

$$\delta l_1 = \frac{\partial f_1}{\partial g_0} \frac{\partial g_0}{\partial x} \zeta_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} (\tau(t_i)) \times$$

$$\times \left[Y(t_i, 0) \zeta_0 + \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t)} Y(t_i, s) \frac{\partial f}{\partial y} (x(s), \varphi_0(\tau), u(s), s) \times \right.$$

$$\times \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \sum_{\tau_j < t_i} \sum_{k=1}^{k_j} \alpha_j^k Y(t_i, \tau_j) \Delta_u \times \\ \times \Delta_u f(w_i^k, \tau_j) \Big].$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ в отношении $\frac{\Delta l_2}{\varepsilon}$, получим вид первой вариации для функционалов второго типа

$$\delta l_2 = \int_0^T \frac{\partial h_1}{\partial x} (x(t), u(t), t) \left[Y(t, 0) \zeta_0 + \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t)} Y(t, s) \times \right. \\ \times \frac{\partial f}{\partial y} (x(s), \varphi_0(\tau), u(s), s) \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \\ + \sum_{\tau_j < t} \sum_{k=1}^{k_j} \alpha_j^k Y(t, \tau_j) \Delta_u f(w_i^k, \tau_j) \Big] dt \times \\ \times \sum_{k=1}^{k_j} \sum_{\tau_j \in [0, T]} \alpha_j^k \Delta_u h_1(w_i^k, \tau_j).$$

4. ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим теперь пространство $L = R^4 \times L_\infty[F_\Phi] \times L_\infty[F_m]$ (множества F_Φ и F_m определены в разделе 2). Из вида первых вариаций вытекает, что множество векторов вариаций $\{\delta l_i\}$ образует выпуклый конус K в пространстве L . Введем в рассмотрение выпуклый конус $M^{(-)}$, имеющий внутренние точки в топологии подпространства $\{l_i = 0, i = 1, 2\}$

$$M^{(-)} = \{l \in L: l_i < 0, i = 3, \dots, 6; l_i = 0, i = 1, 2\}.$$

Допустим сначала, что $M^{(-)}$ и K не пересекаются. В этом случае конусы $M^{(-)}$ и K разделяются нетривиальным линейным функционалом в L (см. [10]). В противном случае, спроектируем K на плоскость (l_1, l_2) . Если проекция конуса K на (l_1, l_2) не покрывает всей плоскости, то в R^2 существует опорный функционал к проекции конуса. Этот же функционал, рассматриваемый в пространстве L , является разделяющим для K и $M^{(-)}$. Докажем, что случай, в котором проекция конуса K на (l_1, l_2) покрывает все пространство (l_1, l_2) и конус K имеет общие точки с конусом $M^{(-)}$, невозможен.

Допустим противное. Рассмотрим в $R^2 = (l_1, l_2)$ окружность единичного радиуса с центром в начале координат: пусть Λ_k ($k = 1, 2, 3$) — вершины вписанного в него правильного треугольника. Тогда каждой вершине треугольника можно поставить в соответствие набор $(\{\tau_j\}, \{\alpha_j^i\}^k, \{w_j^i\}, \zeta_0^k, \varphi^k)$, такой, что проекция δl^k совпадает с Λ_k и существует $\delta > 0$, такое, что справедливы оценки $\delta l_i^k \leq -\delta$ ($i = 3, \dots, 6$; $k = 1, 2, 3$). Пусть $\delta l(\lambda) \equiv \sum_{k=1}^3 \lambda_k \delta l^k$, где $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$. Видно, что $\delta l(\lambda)$

при любом λ есть вариация, отвечающая тому же набору $(\{\tau_j\}, \{w_j^i\})$

и некоторому $(\alpha_j^i(\lambda), \zeta_0(\lambda), \varphi(\lambda))$, а проекция $\delta l(\lambda)$ на плоскость (l_1, l_2) есть точка $\sum_{k=1}^3 \lambda_k \Lambda_k$ треугольника, натянутого на вершины Λ_k . Ясно, что

$\delta l_i(\lambda) < -\delta$ ($i = 3, \dots, 6$). Покажем, что можно выбрать такое ε_0 , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняются все ограничения типа неравенства и $\max_{t \in F_1} l_6(t, \varepsilon, \lambda) < \max_{t \in F_1} l_6(t, 0)$, равномерно по λ , принадлежащим сим-

плексу $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^3 \lambda_k \Lambda_k \leq 1$. Всюду в дальнейшем $l_i(\varepsilon, \lambda)$ есть значение

функционала l_i на траектории, соответствующей вариации, определяемой набором $(\{\tau_i\}, \{w_i^t\}, \{\alpha_i^t(\lambda)\}, \zeta_0(\lambda), \varphi(\lambda))$, и данному ε , а $l_i(0)$ — значение функционала l_i на оптимальной траектории. Так как $l_i(\varepsilon, \lambda) - l_i(0) =$

$$= \varepsilon \delta l_i(\lambda) + o(\varepsilon, \lambda) \quad (i = 3, 4) \text{ и } \frac{o(\varepsilon, \lambda)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ равномерно по } \lambda,$$

существует ε_1 такое, что $l_i(\varepsilon, \lambda) < l_i(0)$ при $\varepsilon < \varepsilon_1$ ($i = 3, 4$). Ранее было

доказано, что $l_5(\varepsilon, \lambda, t) - l_5(0, t) = \varepsilon \delta l_5(\lambda, t) + o(\varepsilon, \lambda, t)$. Покажем, что

для любой точки $t \in F_\Phi$ можно найти окрестность U_t , для которой

$$\delta l_5(t, \lambda) < -\frac{\delta}{2}. \text{ Если } t \text{ не совпадает с точкой } \tau_j, \text{ то это вытекает из}$$

равностепенной непрерывности $\delta l_5(t, \lambda)$ в точке t . Если же $t = \tau_j$, то в

силу определения точек τ_j (см. раздел 2), существуют последовательности $t_k^+ > \tau_j$, $t_k^+ \rightarrow \tau_j$ и $t_k^- < \tau_j$, $t_k^- \rightarrow \tau_j$, где t_k^\pm точки непрерывности

$\delta l_5(t)$ и $\delta l_5(t_k^\pm, \lambda) < -\delta$. Следовательно, существуют окрестности U_{τ_j} ,

содержащие точки τ_j , такие, что $\delta l_5(t, \lambda) < -\frac{\delta}{2}$ при $t \in U_{\tau_j}$. Семейство

$\{U_t\}$ образует покрытие компакта F_Φ . Следовательно, существуют

U_{t_1}, \dots, U_{t_N} , такие, что $F_\Phi \subset \bigcup U_{t_j} = G^\delta$. Таким образом, существует

ε_3 , такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_3$ и $t \in G^\delta$ справедливо неравенство

$l_5(\varepsilon, \lambda, t) < l_5(0, t) \leq 0$. Для $t \in F \setminus G^\delta$ значение $l_5(0, t)$ отрицательно и, в

силу непрерывности по t на замкнутом множестве, $l_5(0, t) < -\delta_1 < 0$. Поэтому при ε достаточно малых $l_5(\varepsilon, \lambda, t) < 0$. Следовательно, ограничения на фазовые координаты, задаваемые функционалом l_5 , выполнены.

Точно так же можно показать, что существует ε_3 , такое, что при

$$\varepsilon < \varepsilon_3 \text{ max}_{t \in F_1} l_6(t, \varepsilon, \lambda) < \max_{t \in F_1} l_6(t, 0).$$

Запишем семейство отображений симплекса $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1$ в R^2 .

$$\bar{l}_i = \frac{\Delta l_i(\varepsilon, \lambda)}{\varepsilon} = \frac{l_i(\varepsilon, \lambda) - l_i(0)}{\varepsilon} \quad (i = 1, 2).$$

Этим отображением на симплексе задано семейство векторных полей $\bar{l}(\varepsilon, \lambda)$. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ компоненты $l(\varepsilon, \lambda)$ стремятся к первым вариациям функционалов и, следовательно, непрерывны по λ при $\varepsilon \geq 0$, меньшем достаточно малого ε , то при $\varepsilon < \varepsilon_3$ семейство $\bar{l}(\varepsilon, \lambda)$ является гомотопным по ε семейством вполне непрерывных векторных полей на симплексе. При $\varepsilon = 0$ соответствующее векторное поле имеет единственный нулевой вектор, находящийся внутри симплекса. Следовательно, индекс вращения векторного поля на границе симплекса равен ± 1 . Поскольку индекс вращения есть инвариант гомотопного семейства векторных полей, то при $\varepsilon < \varepsilon_3$ индекс вращения соответствующего векторного поля на границе симплекса равен ± 1 , и, следовательно, внутри

пирамиды найдется такая точка $\lambda(\varepsilon)$, что $\bar{l}(\varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = 0$. Тем самым для этих ε выполнены условия типа равенства. Если же $\varepsilon < \min(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$, то вариация с набором $(\{\tau_j\}, \{w_j^1\}, \alpha_j^l(\lambda(\varepsilon)), \zeta_0(\lambda(\varepsilon)), \varphi(\lambda(\varepsilon)))$ удовлетворяет ограничениям задачи и обеспечивает значение функционала J меньше минимального, что противоречит определению оптимального управления и оптимального начального состояния. Следовательно, конус K не может в этом случае пересекаться с $M^{(-)}$. Таким образом, существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, причем λ_2 и λ_4 неотрицательны, и неотрицательные аддитивные меры μ_1 и μ_2 , сосредоточенные на множествах F_Φ и F_m соответственно, определяющие нетривиальный линейный функционал на L , такие, что

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i \delta J_i + \sum_{i=1}^2 \int_0^T \delta l_{4+i}(t) d\mu_i(t) \geq 0 \quad (4)$$

при любых вариациях управления и начального состояния. Интеграл в (4) понимается как интеграл Радона.

Пусть $\int_0^t d\mu_1(s) \stackrel{df}{=} \bar{\mu}_1(t)$. $\bar{\mu}_1(t)$ — возрастающая функция ограниченной вариации с точками роста, сосредоточенными на F_Φ . Пусть $\{\Theta_j\}$ — (не более чем счетный) набор точек разрыва $\mu_1(t)$. Так как $\delta l_5(t)$ — кусочно-непрерывная функция с разрывами в точках $\{\tau_j\}$ и зависимость между $\{\Theta_j\}$ и $\{\tau_j\}$ отсутствует, то, исключая из точек, в которых можно варьировать управление, множество $\{\Theta_j\}$ получим

$$\int_0^T \delta l_5(t) d\mu_1(t) = \int_0^T \delta l_5(t) d\bar{\mu}_1(t), \quad (5)$$

где интеграл в правой части (5) понимается в смысле Римана—Стильтьеса. Таким же образом определяется и $\mu_2(t)$.

5. ВЫВОД НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ И УСЛОВИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Так как условие (4) справедливо для любых вариаций, то, варьируя только значение x_0 , в силу произвольности ζ_0 , получим условия трансверсальности

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1, 2, m} \lambda_j \left[\sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x(t_i)) Y(t_i, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial g_0} \frac{\partial g_0}{\partial x}(x_0) \right] + \\ & + \sum_{j=1, 2, m} \lambda_{j+2} \int_0^T \frac{\partial h_i}{\partial x}(x(s), u(s),) Y(s, 0) ds + \quad (6) \\ & + \int_0^T \frac{\partial g_\Phi}{\partial x}(x(s), s) Y(s, 0) d\bar{\mu}_1(s) + \int_0^T \frac{\partial g_m}{\partial x}(x(s), s) Y(s, 0) \times \\ & \times d\bar{\mu}_2(s) = 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_m = \lambda_{m+2} = \int_0^T d\bar{\mu}_2(s)$.

Варьируя только начальную функцию, получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1, 2, m} \lambda_j \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} (x(t_i)) \int_{-\omega(0)}^{\alpha(t_i)} Y(t_i, s) \times \\
& \quad \frac{\partial f}{\partial y} (x(s), \varphi_0(\tau), u(s), s) \frac{ds}{d\tau} \Big|_{s=h(\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \\
& + \sum_{j=1, 2, m} \lambda_{j+2} \int_0^T \frac{\partial h_j}{\partial x} (x(\tau), u(\tau), \tau) \left(\int_{-\omega(0)}^{\alpha(\tau)} Y(\tau, h(s)) \times \right. \\
& \quad \times \left. \frac{\partial f}{\partial y} (x(h(s)), \varphi_0(s), u(h(s)), h(s)) \frac{dh(s)}{ds} \varphi(s) ds \right) d\tau + \\
& + \int_0^T \frac{\partial g_\Phi}{\partial x} (x(\tau), \tau) \left(\int_{-\omega(0)}^{\alpha(\tau)} Y(\tau, h(s)) \frac{\partial f}{\partial y} (x(h(s)), \varphi_0(s), u(h(s)), h(s)) \times \right. \\
& \quad \times \varphi(s) \frac{dh(s)}{ds} ds \Big) d\bar{\mu}_1(\tau) + \int_0^T \frac{\partial g_m}{\partial x} (x(\tau), \tau) \times \\
& \quad \times \int_{-\omega(0)}^{\alpha(\tau)} Y(\tau, h(s)) \frac{\partial f}{\partial y} (x(h(s)), \varphi_0(s), u(h(s)), h(s)) \varphi(s) \times \\
& \quad \times \left. \frac{dh(s)}{ds} ds \right) d\bar{\mu}_2(\tau) \geq 0.
\end{aligned}$$

Обозначим через χ_A характеристическую функцию множества A , в силу произвольности $\varphi(\tau)$ получим

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{j=1, 2, m} \lambda_j \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} (x(t_i)) Y(t_i, h(\tau)) \chi_{[-\omega(0), \alpha(t_i)]}(\tau) \right. \\
& + \sum_{j=1, 2, m} \lambda_{j+2} \int_0^T \frac{\partial h_j}{\partial x} (x(t), u(t), t) Y(t, h(\tau)) \chi_{[-\omega(0), \alpha(t)]}(\tau) dt + \\
& + \int_0^T \frac{\partial g_\Phi}{\partial x} (x(t), t) Y(t, h(\tau)) \chi_{[-\omega(0), \alpha(t)]}(\tau) d\bar{\mu}_2(t) + \\
& \left. + \int_0^T \frac{\partial g_m}{\partial x} (x(t), u(t), t) Y(t, h(\tau)) \chi_{[-\omega(0), \alpha(t)]}(\tau) d\bar{\mu}_2(t) \right\} \times \\
& \quad \times \frac{\partial f}{\partial y} (x(h(\tau)), \varphi_0(\tau), u(h(\tau)), h(\tau)) \frac{dh(\tau)}{d\tau} = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

почти при всех τ , принадлежащих $(-\omega(0), 0)$. Теперь оставляя оптимальным начальное состояние системы, проварыируем управление в одной точке τ . Пусть набор $(\{\omega'_j\}, \{\sigma'_j\})$ состоит из $(\omega, 1)$. Обозначая через $H(w, \tau)$ выражение

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=5, 2, m} \lambda_j \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x} (x(t_i)) Y(t_i, \tau) f(x(\tau), y(\tau), w, \tau) \times \\
 & \quad \times \chi_{[0, t_i]}(\tau) + \sum_{j=1, 2, m} \lambda_{j+2} \left[\int_0^T \frac{\partial h_j}{\partial x} (x(s), u(s), s) \times \right. \\
 & \quad \times Y(s, \tau) f(x(\tau), y(\tau), w, \tau) \chi_{[\tau, T]}(s) ds + h_j(x(\tau), w, \tau) \Big] + \\
 & + \int_0^T \frac{\partial g_\Phi}{\partial x} (x(s), s) Y(s, \tau) f(x(\tau), y(\tau), w, \tau) \chi_{[\tau, T]}(s) d\mu_1(s) + \\
 & + \int_0^T \frac{\partial g_m}{\partial x} (x(s), s) Y(s, \tau) f(x(\tau), y(\tau), w, \tau) \chi_{[\tau, T]}(s) d\mu_2(s),
 \end{aligned}$$

получим, что $H(w, \tau)$, как функция от w , достигает своего минимума при $w = u(\tau)$

$$\min_{w \in U} H(w, \tau) = H(u(\tau), \tau) \quad (8)$$

почти при всех $\tau \in [0, T]$.

Соотношения (6)–(8) являются необходимыми условиями оптимальности управляющей функции и состояния системы. Заметим, что функции, определяющие ограничения, взяты скалярными только для простоты изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гордион, В. И. Плотников, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, № 11, 1622 (1968).
2. Л. С. Понtryагин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, изд. Наука, М., 1969.
3. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милутин, Ж. выч. мат. и матем. физики, 5, № 3, 395 (1965).
4. R. V. Gamkrelidze, Siam J. control, 3 (1965).
5. В. Е. Болтянский, Математические методы оптимального управления, изд. Наука, М., 1966.
6. В. И. Плотников, Единая методика доказательства необходимых и достаточных критериев оптимальности для управляемых систем с сосредоточенными и распределенными периметрами, Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики, Тезисы докладов, Новосибирск, 1969.
7. Э. А. Коддингтон и Н. Левенсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. ИЛ, М., 1958.
8. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-разностные уравнения, изд. Мир, М., 1967.
9. С. Сакс, Теория интеграла, изд. ИЛ, М., 1949.
10. Даффорд, Шварц, Линейные операторы, Общая теория, изд. ИЛ, М., 1962.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 апреля 1970 г.

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR CONTROLLED SYSTEMS WITH DELAY IN PROBLEMS WITH LIMITATIONS

M. I. Gordion, V. I. Plotnikov, A. M. Sterlin

A problem of optimal control of a system with variable delay is considered. Minimum principle is proved for minimax problems when phase coordinates limitations are imposed.

УДК 62 — 506

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ПРЕИМУЩЕСТВЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ПОИСКА

Н. Н. Леонов

Предлагается новый способ автоматической оптимизации инерционных устойчивых объектов, при котором поиск происходит преимущественно в определенной части области определения поиска.

1. Существует определенный класс экстремальных систем, к которым кроме обычных требований оптимизации критериев качества работы может быть добавлено требование преимущественности направления поиска. Если областью определения поиска назовем область допустимых изменений входных переменных объекта управления, то требование преимущественности поиска выделяет определенную часть области определения поиска, в которой предпочтительнее вести поиск, чем в остальной части этой области. В качестве примера можно указать ставшую уже классической задачу оптимизации показателей работы двигателя внутреннего сгорания [1]. Если в рамках поставленной в [1] задачи потребовать минимизации расхода горючего, то это новое требование в некотором смысле эквивалентно требованию вести поиск преимущественно в той части области определения поиска, для которой расход горючего меньше расхода, соответствующего экстремальному значению показателя качества в статике.

В настоящей работе рассматривается одноканальная экстремальная система преимущественного поиска. Конкретные примеры одноканальных систем, требующих осуществления преимущественного поиска, приведены в [2, 3]. К изучению преимущественного поиска на одноканальных системах может быть также сведена задача преимущественного поиска на определенном классе многоканальных систем.

Для одноканальных систем требование преимущественности поиска может быть сформулировано в виде требования приближения входа и инерционного объекта управления в процессе поиска экстремального значения выхода объекта к значению u_* , соответствующему экстремуму выхода в статике, преимущественно слева или преимущественно справа. В [3] указана схема поиска, позволяющая приближаться к u_* , либо справа, либо слева, в зависимости от начальных условий движения.

В настоящей работе рассматривается способ поиска экстремального значения выхода устойчивого объекта управления, позволяющий приближаться к u_* преимущественно с одной стороны, независимо от начального состояния системы.

2. Рассмотрим простейшую экстремальную систему с устойчивым объектом управления, который можно представить в виде последовательно соединенных нелинейного безынерционного звена, с квадратичной зависимостью выхода от входа, и линейного инерционного звена первого порядка (рис. 1). На этой системе проиллюстрируем способ поиска, позволяющий приближаться к u_* преимущественно справа. Воз-

действие помех на динамику системы в настоящей работе не учитывается. За счет выбора переменных можно сделать $u_s = 0$ для упрощения исследований. Уравнения движения указанной системы могут быть записаны в форме, минимизирующей число параметров, так:

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = \eta, \quad \eta = \Phi[\varphi]. \quad (1)$$

Первое равенство описывает динамику объекта управления, второе — движение исполнительного элемента, а третье — закон функционирования оптимизатора, формирующего управление процесами в системе.

Рассмотрим такое управление объектом, при котором выход оптимизатора η принимает лишь два значения — либо +1, либо -1. В этом случае фазовое пространство системы (1) — плоское (в координатах $u\varphi$), двулистное, образование двумя плоскостями Φ_{+1} , Φ_{-1} , такими, что на этих плоскостях величина η равна соответственно +1 и -1.

Фазовые траектории листа $\Phi_{-\eta}$ описываются равенством

$$\varphi = Ce^{-\frac{u}{\eta}} - u^2 + 2\eta u - 2\eta^2. \quad (2)$$

При конструировании управления с преимущественным поиском в качестве исходной модели была использована экстремальная система автоколебательного типа, изучавшаяся в [4]. В этой системе не ставилось требования преемственного поиска. Алгоритм управления в ней заключается в том, что движение в плоскостях Φ_{+1} , Φ_{-1} разрешалось лишь в областях выполнения неравенства $\varphi > -\Delta$, а в областях $\varphi < -\Delta$ ставилось требование перехода фазовой точки с листа Φ_{η} на лист $\Phi_{-\eta}$.

Преимущественный поиск осуществляется следующим алгоритмом, представляющим собой видоизменение приведенного выше алгоритма. Разрешим движение по листу Φ_{+1} в области $\varphi < \Delta - u^2$, в которой $\dot{\varphi} > -\Delta$, а по листу Φ_{-1} — в области $-\Delta_1 - u^2 < \varphi < \Delta - u^2$, в которой $-\Delta < \dot{\varphi} < \Delta_1$.

Для этого управления система (1) может быть записана так:

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad u(t) = \eta(t - \theta),$$

$$\eta = \begin{cases} \dot{u}, & \text{если } -\Delta < \dot{\varphi} < \Delta_1 \\ +1, & \text{если } \Delta_1 < \dot{\varphi} \\ -\dot{u}, & \text{если } \dot{\varphi} < -\Delta \end{cases}. \quad (3)$$

Величина θ в дальнейшем будет принята равной нулю, а введение ее в запись (3) необходимо для непротиворечивости равенств (3) и для возможности доопределения движений системы в области $\dot{\varphi} < -\Delta$.

Фазовые траектории системы (3) при $\theta = 0$ изображены на рис. 2. Изучение движения системы (3), и в частности его стационарных компонент, может быть сведено к изучению соответствующих отображений прямой в прямую.

3. Фазовая точка системы (3) из любого начального состояния проходит за конечное время на линию $\varphi = \Delta - u^2$, которую в дальней-

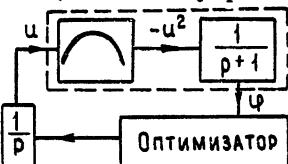


Рис. 1.

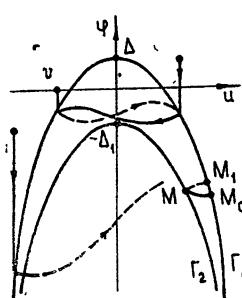


Рис. 2.

шем будем обозначать через Γ_1 . Поэтому для изучения движения системы (3) достаточно рассмотреть эволюцию множества точек линии Γ_1 в результате их движения по фазовым траекториям. Эта эволюция описывается отображением T , отображающим точки Γ_1 в точки Γ_1 . Построим это отображение.

Фазовая точка по траекториям листа Φ_{-1} может попасть с Γ_1 либо вновь на Γ_1 , либо на линию $\varphi = -\Delta_1 - u^2$, которую обозначим через Γ_2 , а затем по траекториям листа Φ_{+1} вновь возвращается на Γ_1 .

Движению точек с Γ_1 на Γ_2 соответствует отображение T_1 , $M = T_1 M_0$, а движению с Γ_2 на Γ_1 — отображение T_2 , $M_1 = T_2 M$ (рис. 2). Для точек линии Γ_1 , попадающих по траекториям листа Φ_{-1} на Γ_2 , отображение T представляет собой произведение отображений $T_2 T_1$. Если абсциссы точек M_0, M, M_1 обозначим соответственно через u_0, u, u_1 , то отображения T_1, T_2 описываются равенствами

$$(2 + \Delta + 2u_0) e^{-u_0} = (2 - \Delta_1 + 2u) e^{-u}, \quad (4)$$

$$(2 - \Delta_1 - 2u) e^u = (2 + \Delta - 2u_1) e^{u_1}. \quad (5)$$

Область определения отображения T_1 — (u_0^*, ∞) , где u_0^* — абсцисса точки линии Γ_1 , через которую проходит траектория листа Φ_{-1} , касающаяся линии Γ_2 . Определяется u_0^* из условия этого контакта $u(u_0^*) = 0,5 \Delta_1$.

Точки линии Γ_1 , для которых $u_0 \in (-0,5 \Delta; u_0^*)$, по траекториям листа Φ_{-1} приходят на ту часть Γ_1 , для которой $u_0 < -0,5 \Delta$ (точка линии Γ_1 , для которой $u_0 = -0,5 \Delta$, является точкой контакта траектории листа Φ_{-1} с линией Γ_1). Этому движению отвечает отображение, которое обозначим T_3 . Затем по траекториям листа Φ_{+1} точки вновь приходят на Γ_1 в область $u_0 > 0,5 \Delta$. Поэтому отображение T на интервале $(-0,5 \Delta, u_0^*)$ представляет собою вторую степень отображения T_3 и записывается следующим образом в параметрической форме [2]

$$(\Delta + 2 + 2u_0) e^{-u_0} = (\Delta + 2 - 2v) e^v, \quad (6)$$

$$(\Delta + 2 - 2u_0) e^{u_0} = (\Delta + 2 + 2v) e^{-v}. \quad (7)$$

В качестве параметра v здесь используется абсцисса промежуточной точки на левой ветви линии Γ_1 (рис. 2).

4. Изучение отображения T начнем с исследования отображений T_3^2 и $T_2 T_1$.

Отображение T_3 изучалось в [4]. При этом было установлено, что отображение T_3 на интервале $(-0,5 \Delta, \infty)$ имеет единственную устойчивую неподвижную точку u^* , определяемую равенством

$$2u^* = (2 + \Delta) \operatorname{th} u^*. \quad (8)$$

В нашем случае отображение T_3 определено на интервале $(-0,5 \Delta, u_0^*)$. Поэтому T_3 имеет устойчивую неподвижную точку u^* , определяемую равенством (8), в том случае, если $u^* < u_0^*$. Величина u_0^* определяется равенством $u(u_0^*) = 0,5 \Delta_1$, которое записывается так:

$$(2 + \Delta + 2u_0^*) \exp(-u_0^*) = 2 \exp(-0,5 \Delta_1). \quad (9)$$

Из (8), (9) получаем, что условие $u^* < u_0^*$ выполняется в той области пространства параметров Δ, Δ_1 , для которой

$$\Delta < 2t \operatorname{cth} t - 2 \quad \text{при} \quad \Delta_1 = -2 \ln \frac{t}{\operatorname{sh} t}, \quad (10)$$

где t — некоторый параметр.

Найдем теперь условия существования простых неподвижных точек отображения T_2T_1 , их количество и устойчивость.

Простые неподвижные точки отображения T_2T_1 соответствуют точкам пересечения кривых $u(u_0)$, $u(u_1)$, уравнения которых — (4), (5). Эти кривые имеют общие точки, если $u_0 = u_1$. Пусть $u_0 = u_1 = y$. Из (4), (5) следует, что

$$y = \frac{(2 + \Delta) \operatorname{ch} z - 2 + \Delta_1}{2 \operatorname{sh} z}, \quad (11)$$

где $z(z = y - u)$ является корнем уравнения

$$z \operatorname{sh} z = (2 + \delta)(\operatorname{ch} z - 1), \quad (12)$$

а $\delta = 0,5(\Delta - \Delta_1)$.

Корни уравнения (12) являются нулями функции $f(z) = z \operatorname{sh} z - (2 + \delta)(\operatorname{ch} z - 1)$. При $\delta \leq 0$ она имеет на положительной полуоси единственный нулевой корень $z = 0$, которому соответствует бесконечно удаленная неподвижная точка $y = \infty$ отображения T_2T_1 . При $\delta > 0$ появляется еще один положительный корень $z^* > 0$ (рис. 3). Следовательно, отображение T_2T_1 имеет простую неподвижную точку $u_0 = y$ при $\delta > 0$, т. е. при $\Delta > \Delta_1$. Эта неподвижная точка принадлежит области определения отображения T_2T_1 , если $y > u_0^*$.

В плоскости $\Delta\Delta_1$ условие $y > u_0^*$ выполняется в области, определяемой соотношениями

$$\Delta < \Delta_1 - 4 + 2z \operatorname{ct} h \frac{z}{2}, \quad \Delta_1 = 2 \frac{\operatorname{sh} z - z}{1 - e^{-z}}. \quad (13)$$

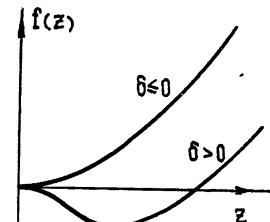


Рис. 3.

Исследуем устойчивость неподвижной точки $u_0 = y$ отображения T_2T_1 . Из (4), (5) получаем, что $\frac{du}{du_0} = 1 + 2 \frac{1 - \exp(u - u_0)}{2u - \Delta_1} > 1$, $\frac{du}{du_1} = 1 + 2 \frac{\exp(u_1 - u) - 1}{2u + \Delta_1} > 1$. Неподвижная точка $u_0 = y$ устойчива, если $\frac{du_1}{du_0} < 1$, и неустойчива в противном случае. При $u_0 = y$ выяснение знака неравенства в соотношении $\frac{du_1}{du_0} \geq 1$ сводится к определению знака выражения $g = 2u(\operatorname{ch} z - 1) - \Delta_1 \operatorname{sh} z$. Из (4), (5) получаем, что $2y(\operatorname{ch} z - 1) = (2 + \Delta) \operatorname{sh} z - 2z$. Следовательно, знак g будет известен, если известен знак $g_1 = 2y(\operatorname{ch} z - 1) - (2 + \Delta) \operatorname{sh} z + 2z - g = 2[z \operatorname{ch} z - (1 + \delta) \operatorname{sh} z]$.

Из условия существования неподвижной точки $u_0 = y$ следует, что $z > (1 + \delta) \operatorname{th} z$. Поэтому $g_1 > 0$, $g < 0$, $\left. \frac{du_1}{du_0} \right|_{u_0=y} > 1$. Последнее говорит о неустойчивости неподвижной точки $u_0 = y$ отображения T_2T_1 .

5. Теперь можно перейти к изучению отображения T в целом. Первый квадрант плоскости параметров $\Delta\Delta_1$ линией $\Delta = \Delta_1$ и граничными линиями областей (10), (13) разбивается на четыре области (рис. 4), для каждой из которых отображение T , а следовательно, и фазовое пространство системы (4) имеет свою структуру. Границы линии l_1 , l_2 областей (10), (13) строились по точкам, часть из которых приведены в табл. 1, 2.

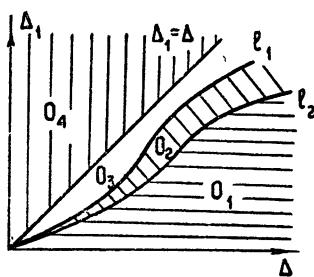


Рис. 4.

Таблица 1

| t | 0 | 0,1 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| Δ | 0 | 0,006 | 0,164 | 0,626 | 2,148 | 4,03 | 6 | 8 |
| Δ_1 | 0 | 0,004 | 0,103 | 0,323 | 1,192 | 3,808 | 5,23 | 6,78 |

Рис. 4.

Таблица 2

| z | 0 | 0,1 | 0,5 | 1 | 1,2 | 1,5 | 2 |
|------------|---|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| Δ | 0 | 0,009 | 0,190 | 0,882 | 1,355 | 2,34 | 5,02 |
| Δ_1 | 0 | 0,004 | 0,107 | 0,554 | 0,886 | 1,62 | 3,763 |

В области O_1 отображение T неподвижных точек не имеет, а его диаграмма для этого случая представлена на рис. 5 а. Все итерацион-

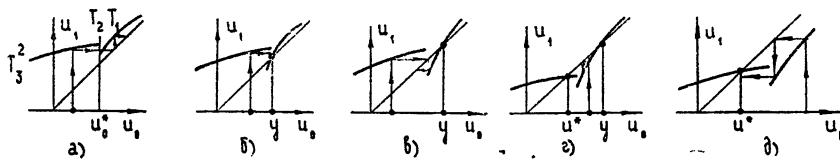


Рис. 5

ные последовательности, порождаемые отображением T , — расходящиеся. Это говорит о том, что для $(\Delta, \Delta_1) \in O_1$ система (3) абсолютно неустойчива.

В области O_2 отображение T имеет простую неустойчивую неподвижную точку y , являющуюся неподвижной точкой отображения T_2T_1 . В этом случае возможны два варианта структуры отображения T и фазового пространства. Можно показать [5-7], что в первом из них (рис. 5 б) исследуемая система также неустойчива почти для всех начальных состояний. Во втором (рис. 5 в) у отображения T появляется ограниченная область устойчивых движений. Остальная часть области определения отображения T остается областью неустойчивых движений. В фазовом пространстве системы (3) при этом появляется соответствующая ограниченная область устойчивых движений.

В области O_3 отображение T имеет кроме неустойчивой неподвижной точки $u_0 = y$ еще устойчивую неподвижную точку $u_0 = u^*$, являющуюся простой неподвижной точкой отображения T_3 (рис. 5 г). В этом случае вся область определения отображения T делится неподвижной точкой $u_0 = y$ на ограниченную область притяжения простой устойчивой неподвижной точки $u_0 = u^*$ и область неустойчивых движений. При $(\Delta, \Delta_1) \in O_3$ в фазовом пространстве существует соответствующий устойчивый предельный цикл с ограниченной областью притяжения.

В области O_4 отображение T имеет единственную устойчивую в большом простую неподвижную точку $u_0 = u^*$ (рис. 5 д). Система (3) при $(\Delta, \Delta_1) \in O_4$ имеет указанный выше предельный цикл, областью притяжения которого является все фазовое пространство.

6. Проведенные исследования показали, что предложенный алгоритм обеспечивает устойчивый поиск с преимущественным приближением к экстремуму справа, если $\Delta < \Delta_1$, при любых начальных состояниях системы. Установившееся движение при этом происходит обычным образом, преимущественность поиска на нем не отражается; оно изучалось в [4].

В случае $\Delta > \Delta_1$ существуют области начальных состояний системы, для которых поиск неустойчив.

Алгоритм, обеспечивающий поиск с преимущественным приближением к экстремуму выхода объекта слева, может быть записан следующим образом:

$$\eta = \begin{cases} \dot{u}, & \text{если } -\Delta < \dot{\varphi} < \Delta_1 \\ -1, & \text{если } \Delta_1 < \dot{\varphi} \\ -\dot{u}, & \text{если } \dot{\varphi} < -\Delta \end{cases}. \quad (14)$$

Иными словами, движение с возрастанием входа объекта разрешается при выполнении условия $-\Delta < \dot{\varphi} < \Delta_1$, а с уменьшением входа объекта — при выполнении условия $\dot{\varphi} > -\Delta$. При этом устойчивый поиск для любых начальных состояний обеспечивается также при условии $\Delta < \Delta_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. С Дрейпер, И. Т Ли, в сб Автоматическая оптимизация управляемых систем, изд. ИЛ, М., 1960.
2. Б. Уайт, в сб. Автоматическая оптимизация управляемых систем, изд. ИЛ, М., 1960.
3. В. В Казакевич, Р. В Корнилов, Н Г Христофоров, в сб. Теория и применение дискретных автоматических систем, изд-во АН СССР, М., 1960.
- 4 Г. А Новинская, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 4, № 3, 566 (1961).
5. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 496 (1960).
6. Н. Н. Леонов, ДАН СССР, 143, № 5, 1038 (1968).
7. Н. Н. Леонов, О разрывном точечном отображении прямой в прямую, Кандидатская диссертация, Горький, 1962.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете Поступила в редакцию 13 апреля 1970 г.

ON EXTREMAL SYSTEMS WITH PREFERENCE SEARCH

N. N. Leonov

The article presents an investigation of character of motions in preference search extremal systems for stable plants with inertial input.

УДК 62—506

К ТЕОРИИ ПРЕИМУЩЕСТВЕННОГО ПОИСКА

Н. Н. Леонов

Исследуется одноканальная инерционная экстремальная система преимущественного поиска. Преимущественность поиска достигается за счет введения управления, выделяющего в фазовом пространстве системы область, в которой изменение входа объекта управления разрешается лишь в одном направлении.

1. Настоящая работа продолжает исследования [1] по экстремальному управлению инерционными устойчивыми объектами, обеспечивающему преимущественный поиск экстремального значения выхода объекта управления в том смысле, что в процессе поиска входная координата объекта приближается к значению, соответствующему экстремуму его выхода, преимущественно с одной стороны — справа или слева. В [1] предложен алгоритм преимущественного поиска, обеспечивающий глобально устойчивый поиск экстремума выхода объекта, обладающего инерционностью первого порядка на выходе.

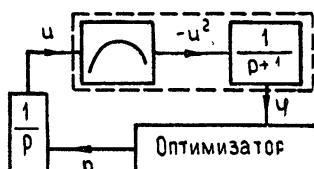


Рис. 1.

В настоящей работе исследуется преимущественное управление экстремальным объектом, предполагающее использование устройства типа коммутатора [2]. Рассматриваемая система содержит тот же объект, что и в [1], возмущения отсутствуют (рис. 1).

2. Движение указанного выше объекта и исполнительного элемента описывается равенствами

$$\dot{\varphi} + \dot{\varphi} = -u^2, \quad u(t) = \eta(t - \theta), \quad (1)$$

а управление, призванное обеспечивать поиск с правым преимуществом, равенством

$$\eta(t) = \begin{cases} -1 & (\text{при } \dot{\varphi} < -\Delta) \\ +1 & (\text{при } \dot{u} > 0, \dot{\varphi} > -\Delta) \\ -1 & (\text{при } t \in (t_k, t_k + \tau), \dot{\varphi} > -\Delta, \dot{u} < 0) \end{cases}, \quad (2)$$

где t_k — начальный момент движения или момент изменения знака \dot{u} с +1 на -1.

Система имеет два безразмерных параметра τ , Δ . Дальнейшее ее изучение проводится при $\theta = 0$.

Фазовое пространство системы (1), (2) — плоское, в переменных $u\varphi$, двулистное, образованное листами Φ_{+1} , Φ_{-1} , на которых $\eta = +1$, $\eta = -1$ соответственно.

Фазовые траектории листа Φ_η (т. е. Φ_{+1} , Φ_{-1}) описываются равенством.

$$\varphi = Ce^{-\frac{u}{\eta}} - u^2 + 2\eta u - 2\eta^2. \quad (3)$$

Линия $\varphi = \Delta - u^2$, на которой $\varphi = -\Delta$ и которую обозначим через Γ_1 , делит фазовое пространство на две части. Над этой линией $\varphi < -\Delta$ и фазовые траектории здесь—прямые линии, параллельные оси φ . Движение по ним происходит в режиме скольжения—режиме непрестанных переключений выхода оптимизатора η с $+1$ на -1 и обратно [3] (рис. 2).

Из любого начального состояния листа Φ_{+1} , расположенного под Γ_1 , фазовая точка приходит по траекториям листа Φ_{+1} на Γ_1 , и переходит затем на лист Φ_{-1} . При движении по листу Φ_{-1} , в области ниже Γ_1 , фазовая точка либо приходит на Γ_1 , если время ее движения менее τ , либо через время τ переходит на лист Φ_{+1} и по этому листу приходит на Γ_1 .

Таким образом, изучение движений системы (1), (2) сводится к исследованию эволюции точек линии Γ_1 , происходящей в результате движения этих точек по траекториям системы. Эволюция точек линии Γ_1 описывается отображением T точек этой линии в точки этой же линии, т. е. отображением прямой в себя, построению которого посвящен следующий раздел.

3. Отображение T должно отражать изменение точек линии Γ_1 в результате их движения сначала по листу Φ_{-1} , а затем по листу Φ_{+1} . Указанная последовательность движений фазовых точек налагает ограничения на область определения отображения T . Это ограничение может быть раскрыто из наличия контакта фазовых траекторий системы с линией Γ_1 . Абсцисса точки контакта траектории листа Φ_{-1} с Γ_1 равна $0,5 \Delta$. В связи с этим область определения отображения T может быть ограничена интервалом $(0,5 \Delta; \infty)$.

Движение фазовой точки с начальным состоянием из интервала $(0,5 \Delta; \infty)$ может происходить двумя путями. Во-первых, по листу Φ_{-1} она с Γ_1 может попасть вновь на Γ_1 и затем по листу Φ_{+1} вернуться на Γ_1 : это движение отражается отображением T_1 . В другом случае фазовая точка по листу Φ_{-1} с Γ_1 может попасть на линию Γ_2 , для которой $u = u_0 - \tau$ (рис. 2), а затем по листу Φ_{+1} вернуться на Γ_1 ; это движение отражается отображением T_2 .

Из (3) получаем, что уравнение линии Γ_2 имеет следующий вид

$$\varphi = -u^2 - 2(1 - e^{-\tau})u - 2 + (\Delta + 2 + 2\tau)e^{-\tau}. \quad (4)$$

Линия Γ_2 пересекается с Γ_1 в точке с абсциссой

$$x = -1 - 0,5\Delta + \tau(e^{-\tau} - 1)^{-1}. \quad (5)$$

Этой точке соответствует начальная точка с абсциссой

$$u'_0 = -1 - 0,5\Delta + \tau(1 - e^{-\tau})^{-1}.$$

Точка $u_0 = u'_0$ делит область определения отображения T на область определения отображения T_1 и область определения отображения T_2 .

$$T_{u_0} = \begin{cases} T_1 u_0 & \text{для } u_0 \in (0,5\Delta; u'_0) \\ T_2 u_0 & \text{для } u_0 \in (u'_0; \infty) \end{cases}. \quad (6)$$

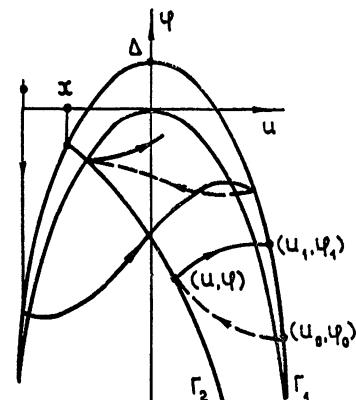


Рис. 2.

Отображение $T_1(u_1 = T_1 u_0)$ описывается следующими равенствами [1]

$$\begin{aligned} (\Delta + 2 + 2v) e^{-v} &= (\Delta + 2 + 2u_0) e^{-u_0}, \\ (\Delta + 2 - 2v) e^v &= (\Delta + 2 - 2u_1) e^{u_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

а отображение $T_2(u_1 = T_2 u_0)$ описывается равенством

$$(\Delta + 2 - 2u_1) e^{u_1} = [e^{-\tau} (\Delta + 2 + 2u_0) - 4u_0 + 4\tau] \exp(u_0 - \tau). \quad (8)$$

4. Отображение T_1 может иметь единственную простую устойчивую неподвижную точку u_1^* ($u_1^* = T_1 u_1^*$) [3]

$$u_1^* = (1 + 0,5\Delta) \operatorname{th} u_1^*. \quad (9)$$

Эта неподвижная точка принадлежит области определения отображения T_1 , если $u_1^* < u_0'$.

Отображение T_2 имеет единственную простую неподвижную точку u_2^* ($u_2^* = T_2 u_2^*$)

$$u_2^* = (1 + 0,5\Delta) \operatorname{cth} \frac{\tau}{2} - 2\tau e^{-\tau} (1 - e^{-\tau})^{-2}, \quad (10)$$

если $u_2^* > u_0'$.

Так как $0 < \frac{du_1}{du_0} \Big|_{u_0=u_2^*} = 1 - 2 \frac{(1-e^{-\tau})^2}{2u_2^* - \Delta} < 1$, то она устойчива.

Отображение T в точке $u_0 = u_0'$ непрерывно, т. е. $T_1(u_0' - 0) = T_2(u_0' + 0)$. Следовательно, в пространстве параметров $\tau\Delta$ области существования неподвижных точек u_1^* , u_2^* разделяются линией l , для которой $u_1^* = u_2^* = u_0' = 0,5\tau$. Уравнение этой линии

$$\Delta = \tau \operatorname{cth} \frac{\tau}{2} - 2. \quad (11)$$

Область O_1 первого квадранта плоскости $\tau\Delta$ (рис. 3), для которой $\Delta < \tau \operatorname{cth} \frac{\tau}{2} - 2$, является областью существования единственной глобально устойчивой простой неподвижной точки u_1^* отображения T . В системе (1), (2) этой неподвижной точке соответствует симметричный относительно оси φ предельный цикл (рис. 4 а).

Область O_2 является областью существования единственной глобально устойчивой простой неподвижной точки u_2^* отображения T . В исследуемой системе этой неподвижной точке соответствует несимметричный относительно оси φ , смещенный относительно нее вправо, предельный цикл (рис. 4 б).

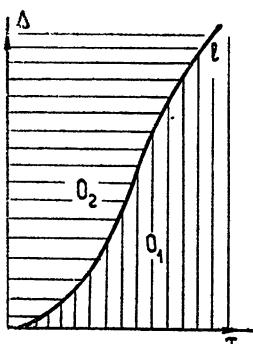


Рис. 3.

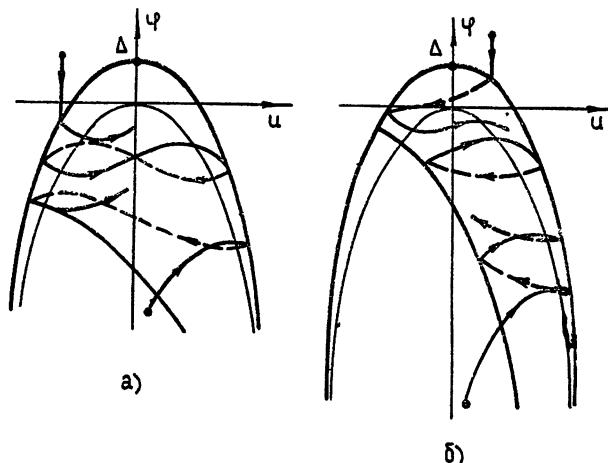


Рис. 4.

5. Таким образом, управление (2) обеспечивает глобально устойчивый преимущественный поиск экстремального значения выхода объекта управления с инерционностью первого порядка на выходе. В отличие от системы, рассмотренной в [1], данная система имеет либо симметричный, либо несимметричный простой предельный цикл в качестве установившегося движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Леонов, Экстремальная система с преимущественным направлением поиска, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 11, (1970).
2. В. В. Казакевич, Р. В. Корнилов, Н. Г. Христофоров, в сб. Теория и применение дискретных автоматических систем, изд. АН СССР, М., 1960
3. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 566 (1961).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 апреля 1970 г.

TO THE PREFERENCE SEARCH THEORY

N. N. Leonov

A single-channel inertial extremal system with preference search is investigated. Preference is attained through introduction of control singling out a region in the system's phase space in which a controlled plant input is allowed to change in only one direction.

УДК 517.949 22

ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАЦИОНАРНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ АРГУМЕНТА. II.

(Исследование устойчивости решений)

C. B. Шильман

Находится аналитическое представление характеристического многочлена системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями. Решается задача о возмущении как простых, так и кратных мультиликаторов при линейных возмущениях системы.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением [16]. Ниже рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + \sum_{k=0}^l B_k(t, \mu) x(t - h_k), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t) = 0 \quad \text{при } t \in [-h_l, 0).$$

Здесь x — вектор-столбец, A — квадратная постоянная матрица, $B_k(t, \mu)$ ($k = 0, 1, \dots, l$), T -периодические, квадратные, ограниченные матрицы, регулярные по μ , $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_l = \text{const}$.

В работе получено следующее.

1. Находится аналитическое представление характеристического многочлена системы (1).

2. На его основе решается задача определения мультиликаторов системы, близкой к стационарной, $B_k(t, \mu) = \mu B_{k,0}(t) + O(\mu^2)$.

Эта последняя задача рассматривалась в целом ряде работ [9, 10, 17, 18]. Данное исследование отличается достаточно общим видом изучаемой системы (1), методом, позволяющим свести задачу к изучению ветвлений алгебраической функции, и результатами, охватывающими случаи не только простых, но и кратных показателей возмущенной системы.

Приведем кратко некоторые, необходимые для дальнейшего, результаты первой части работы. В [16] было показано, что производящая вектор-функция $X^*(s, \varepsilon, \mu)$ решения системы (1) определяется линейным интегральным уравнением вида

$$X^*(s, \varepsilon, \mu) - \int_0^T G(s, \varepsilon, \lambda, \mu) X^*(s, \lambda, \mu) d\lambda = K^*(s, \varepsilon) x_0. \quad (2)$$

Здесь

$$G(s, \varepsilon, \lambda, \mu) = \sum_{k=0}^l \bar{K}^*(s, \varepsilon - \lambda - \tau_k) s^{m_k} B_k(\varepsilon + \tau_k, \mu)$$

$$\bar{K}(s, \varepsilon - \lambda - \tau_k) = \begin{cases} K^*(s, \varepsilon - \lambda - \tau_k) & \text{при } \lambda < T - \tau_k, \\ sK^*(s, T + \varepsilon - \lambda - \tau_k) & \text{при } \lambda > T - \tau_k, \end{cases}$$

$$K^*(s, \varepsilon - \lambda) = \begin{cases} [E - se^{AT}]^{-1} e^{A(\varepsilon - \lambda)} & \text{при } \varepsilon > \lambda, \\ s[E - se^{AT}]^{-1} e^{A(T + \varepsilon - \lambda)} & \text{при } \varepsilon < \lambda, \end{cases}$$

$h_k = m_k T + \tau_k$; где m_k — целая часть h_k/T , $\tau_k \in [0, T]$. Решение уравнения (2) можно представить в виде

$$X^*(s, \varepsilon, \mu) = \Gamma(s, \varepsilon, 0, \mu) x_0.$$

Было показано, что $\Gamma(s, \varepsilon, 0, \mu)$ есть мероморфная матрица относительно комплексного переменного s . Причем устойчивость нулевого решения (1) определяется харктером полюсов $\Gamma(s, \varepsilon, 0, \mu)$. Если все полюса s_1 этой матрицы удовлетворяют условию $|s_1| > 1$, то нулевое решение асимптотически устойчиво, если хотя бы один из полюсов по модулю меньше единицы, то имеет место неустойчивость. Иными словами $\rho_1 = s^{-1}$ являются мультиликаторами системы (1). В тех случаях, когда имеются полюса $\Gamma(s, \varepsilon, 0, \mu)$, удовлетворяющие равенству $|s_1| = 1$, то на устойчивость существенное влияние оказывают малые, в частности линейные возмущения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ (1)

Будем искать решение интегрального уравнения (2). Для этого воспользуемся тем, что

$$K^*(s, \varepsilon - \lambda) = s[E - se^{AT}]^{-1} e^{A(T + \varepsilon - \lambda)} + K(\varepsilon - \lambda), \quad (3)$$

где

$$K(t) = \begin{cases} e^{At} & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

Соотношение (3) позволяет представить ядро интегрального уравнения (2) в виде суммы двух ядер

$$G(s, \varepsilon, \lambda, \mu) = G_0(s, \varepsilon, \lambda, \mu) + G_b(s, \varepsilon, \lambda, \mu),$$

где

$$G_0(s, \varepsilon, \lambda, \mu) = \sum_{k=0}^l \begin{cases} s^{m_k} K(\varepsilon - \lambda - \tau_k) B_k(\lambda + \tau_k, \mu) & (0 \leq \lambda < T - \tau_k), \\ s^{m_k + 1} K(T + \varepsilon - \lambda - \tau_k) B_k(\lambda + \tau_k, \mu) & (T - \tau_k \leq \lambda < T), \end{cases}$$

$$G_b(s, \varepsilon, \lambda, \mu) = [E - se^{AT}]^{-1} e^{A\varepsilon} M(s, \lambda, \mu),$$

$$M(s, \lambda, \mu) = \sum_{k=0}^l M_k(s, \lambda, \mu) s^{m_k + 1},$$

$$M_k(s, \lambda, \mu) = \begin{cases} \exp[A(T - \lambda - \tau_k)] B_k(\lambda + \tau_k, \mu) & (\lambda < T - \tau_k), \\ s \exp[A(2T - \lambda - \tau_k)] B_k(\lambda + \tau_k, \mu) & (\lambda > T - \tau_k). \end{cases}$$

Тем самым исходный интегральный оператор разбивается на два: на интегральный оператор Фредгольма, регулярный относительно s , и вырожденный оператор с рациональным ядром относительно s .

Обозначим резольвенту Фредгольма первого интегрального оператора через $\Gamma_1(s, \varepsilon, \lambda, \mu)$. С ее помощью уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$X^*(s, \varepsilon, \mu) = \int_0^T \left[G_b(s, \varepsilon, \lambda, \mu) + \int_0^T \Gamma_1(s, \varepsilon, \gamma, \mu) G_b(s, \gamma, \lambda, \mu) d\gamma \right] \times \\ \times X^*(s, \lambda, \mu) d\lambda = \left[K^*(s, \varepsilon) + \int_0^T \Gamma_1(s, \varepsilon, \gamma, \mu) K^*(s, \gamma) d\gamma \right] x_0. \quad (4)$$

Заметим, что при $|s| < r$, где r определяется нормой интегральных операторов с ядрами $K(T + \varepsilon - \lambda - \tau_k) B_k(\lambda + \tau_k, \mu)$, матрица $\Gamma_1(s, \varepsilon, \lambda, \mu)$ будет голоморфной по s , и для этих s $\Gamma_1(s, \varepsilon, \lambda, \mu)$ может быть найдена методом последовательных приближений [12].

Интегральное уравнение (4) является вырожденным, его решения можно представить в виде

$$X^*(s, \varepsilon, \mu) \equiv N(s, \varepsilon, \mu) [E - se^{AT}]^{-1} [C(s, \mu) + x_0], \quad (5)$$

где

$$N(s, \varepsilon, \mu) = e^{A\varepsilon} + \int_0^T \Gamma_1(s, \varepsilon, \gamma, \mu) e^{A\gamma} d\gamma,$$

$$C(s, \mu) = \int_0^T M(s, \lambda, \mu) X^*(s, \lambda, \mu) d\lambda.$$

Вектор-функция $C(s, \mu)$ определяется уравнением

$$C(s, \mu) = \int_0^T M(s, \lambda, \mu) N(s, \lambda, \mu) d\lambda [E - se^{AT}]^{-1} [C(s, \mu) + x_0].$$

Отсюда

$$C(s, \mu) = \left[E - se^{AT} - \int_0^T M(s, \lambda, \mu) N(s, \lambda, \mu) d\lambda \right]^{-1} \times \\ \times [E - se^{AT}] \int_0^T M(s, \lambda, \mu) N(s, \lambda, \mu) d\lambda [E - se^{AT}]^{-1} x_0. \quad (6)$$

Подставив $C(s, \mu)$ в виде (6) в (5), получим

$$X^*(s, \varepsilon, \mu) = N(s, \varepsilon, \mu) [E - se^{AT}]^{-1} \left[E - se^{AT} - \int_0^T M(s, \lambda, \mu) N(s, \lambda, \mu) d\lambda \right]^{-1} [E - se^{AT}] x_0. \quad (7)$$

Из равенства (7) видно, что полюса $\Gamma(s, \varepsilon, 0, \mu)$ определяются уравнением

$$\det d(s, \mu) = 0,$$

где

$$d(s, \mu) = E - se^{AT} - \int_0^T M(s, \lambda, \mu) N(s, \lambda, \mu) d\lambda.$$

Введем новую комплексную переменную $\rho = s^{-1}$. Тогда получим характеристическое уравнение, определяющее мультиплекторы системы (1)

$$\det D(\rho, \mu) = 0, \quad (9)$$

$$D(\rho, \mu) = E\rho - e^{AT} - \sum_{k=0}^l \rho^{-m_k} \int_0^{T-\tau_k} \exp [A(T-\lambda-\tau_k)] B_k(\lambda + \tau_k, \mu) \times \\ \times N(\rho^{-1}, \lambda, \mu) d\lambda - \sum_{k=0}^l -\rho^{(m_k+1)} \int_{T-\tau_k}^T \exp [A(2T-\lambda-\tau_k)] B_k(\lambda + \tau_k, \mu) \times \\ \times N(\rho^{-1}, \lambda, \mu) d\lambda.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, БЛИЗКОЙ К СТАЦИОНАРНОЙ

Примем, что $B_k(t, \mu) = \mu [B_{k,0}(t) + O(\mu)]$. Пусть матрица A имеет v собственных значений, представимых в виде

$$\lambda_k = \lambda_0 + \frac{2\pi j}{T} n_k,$$

n_k — целые числа, $k = 1, \dots, v$. При $\mu = 0$ система (1) превращается в

$$\dot{x} = Ax, \quad (10)$$

а $D(\rho, 0) = E\rho - e^{AT}$. Это означает, что при $\mu = 0$ v мультипликаторов системы обращаются в $\rho_0 = \exp(\lambda_0 T)$.

Докажем две теоремы.

Теорема 1. Если размерность соответствующего собственного подпространства матрицы A равна v , то:

1) при достаточно малом μ v мультипликаторов системы (1), обращающихся в ρ_0 , могут быть представлены в виде рядов

$$\rho_k(\mu) = \rho_0 + \rho_{1,k} \mu + \rho_{2,k} \mu^{\gamma_2} + \dots \quad (\gamma_2 > 1),$$

где $\rho_{i,k}$ ($k = 1, \dots, v$) определяются уравнением

$$\det [E, \rho_1 - C] = 0,$$

элементы матрицы C находятся по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^l \rho_0^{-(m_k-1)} \int_0^T \psi_i(\lambda) B_{k,0}(\lambda) \varphi_j(\lambda - \tau_k) d\lambda,$$

где $\varphi_j(t) = p_j \exp(\lambda_j t)$ — вектор-столбец фундаментальной матрицы $\Phi(t) = Pe^{At}$ системы (10), $\psi_i = g_i \exp(-\lambda_i t)$ — вектор-строка матрицы обратной ($i, j = 1, \dots, v$) — жорданова форма A ;

2) если все значения $\rho_{1,k}$ различны, то $\rho_k(\mu)$ разлагаются в степенные ряды по μ .

Теорема 2. Если указанной группе собственных значений A соответствуют d жордановых клеток размерами $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_d$ и

$$\int_0^T \psi_m(\lambda) \sum_{k=0}^l \rho_0^{-(m_k-1)} B_{k,0}(\lambda) \varphi_m(\lambda - \tau_k) d\lambda \neq 0 \\ (m = 1, \dots, d),$$

где $\psi_m(t) = q_m e^{-\lambda_m t}$, $\varphi_m(t) = P_m \exp(\lambda_m t)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — различные, то

1) при достаточно малом μ соответствующие мультиликаторы системы (1) образуют d круговых систем ветвей вида

$$\rho_m(\mu) = \rho_0 + \rho_{1,m} \mu^{1/l_m} + \rho_{2,m} \mu^{l_m} + \dots$$

$$\left(\gamma_2 > \frac{1}{l_m}, \quad m = 1, \dots, d \right),$$

2) если значения $\rho_{1,m}$, соответствующие клеткам одинакового размера, различны или клетки с одинаковым размером отсутствуют, то $\rho_m(\mu)$ разлагаются в степенные ряды по μ^{1/l_m} .

Пусть с помощью неособой квадратной матрицы P матрица A может быть приведена к жордановой форме J , т. е. $A = PJP^{-1}$. Используя преобразование P , матрицу $D(\rho, \mu)$ можно представить в виде

$$D(\rho, \mu) = P \bar{D}(\rho, \mu) P^{-1},$$

где

$$\bar{D}(\rho, \mu) = E\rho - e^{JT} - \sum_{k=0}^l \rho^{-m_k} \int_0^{T-\tau_k} \exp [J(T - \lambda - \tau_k)] P^{-1} \times \quad (11)$$

$$\times B_k(\lambda + \tau_k, \mu) N_1(\rho, \lambda, \mu) - \sum_{k=0}^l \rho^{-(m_k+1)} \int_{T-\tau_k}^T \exp [J(2T - \lambda - \tau_k)] \times$$

$$\times P^{-1} B_k(\lambda + \tau_k, \mu) N_1(\rho, \lambda, \mu) d\lambda,$$

$$N_1(\rho, \lambda, \mu) = Pe^{J\lambda} + \int_0^T \Gamma_1(\rho^{-1}, \lambda, \gamma, \mu) Pe^{J\gamma} d\gamma.$$

Если в первом интеграле, входящем в $D(\rho, \mu)$, заменить $\lambda + \tau_k$ на λ , а во втором $\lambda + \tau_k - T$ на λ , то получим иное выражение для $\bar{D}(\rho, \mu)$

$$\begin{aligned} \bar{D}(\rho, \mu) = E\rho - e^{JT} - \sum_{k=0}^l \int_{\tau_k}^T \rho^{-m_k} e^{J(T-\lambda)} P^{-1} B_k(\lambda, \mu) \times \\ \times N_1(\rho, \lambda - \tau_k, \mu) d\lambda - \sum_{k=0}^l \int_0^{\tau_k} \rho^{-(m_k+1)} e^{J(T-\lambda)} P^{-1} \times \\ \times B_k(\lambda, \mu) N_1(\rho, \lambda - \tau_k + T, \mu) d\lambda. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что входящая в выражение $\bar{D}(\rho, \mu)$ матрица $\Phi(\lambda) = Pe^{J\lambda}$ является фундаментальной для системы (10). Столбцы P являются собственными векторами матрицы A . Другая матрица $\Psi_{(\lambda)}^{(T)} = e^{-J\lambda} P^{-1}$ является транспонированной с фундаментальной матрицей $\Psi(\lambda)$ системы, сопряженной с (10).

Поскольку $\det D(\rho, \mu) = \det \bar{D}(\rho, \mu)$, то в дальнейшем будем рассматривать только $\bar{D}(\rho, \mu)$. Используя известную формулу представления определителя матрицы [19], представим $\det \bar{D}(\rho, \mu)$ в виде

$$\bar{D}(\rho, \mu) = (\rho - \rho_0)^n + S_{n-1}(\rho, \mu)(\rho - \rho_0)^{n-1} + \dots + S_0(\rho, \mu), \quad (13)$$

где $S_k(\rho, \mu)$ есть сумма всех главных миноров порядка $(n-k)$ определителя матрицы $D_0(\rho, \mu) = \bar{D}(\rho, \mu) - E(\rho - \rho_0)$.

Матрица A имеет группу сравнимых по модулю $\frac{2\pi j}{T}$ собственных значений, т. е. представимых в виде $\lambda_k = \lambda_0 + \frac{2\pi j}{T} n_k$, ($k = 1, 2, \dots, v$), n_k — целые числа. Будем считать, что им соответствуют первые клетки матрицы J .

Ясно, что $\rho = \rho_0 = \exp(\lambda_0 T)$ будет v — кратным корнем $\det D(\rho, 0) = [E\rho - e^{JT}]$. Задача заключается в том, чтобы найти приближенные значения мультипликаторов системы (1), обращающихся при $\mu \rightarrow 0$ в ρ_0 .

Будем различать два случая:

а) собственным числам λ_k соответствуют v первых диагональных элементов J (этот случай имеет место, в частности, тогда, когда все λ_k разные);

б) часть матрицы J , соответствующая λ_k ($k = 1, \dots, v$) содержит жордановы клетки размерности большей единицы.

Поставленная задача по существу сводится к определению ветвей аналитической функции в окрестности ее особой точки ($\mu = 0, \rho = \rho_0$). Действительно, при достаточно малых μ и $|\rho - \rho_0|$ мы можем считать $D(\rho, \mu)$, а следовательно и $\det \bar{D}(\rho, \mu)$, аналитическими по обоим аргументам и использовать общую теорию ветвления [20]. Согласно указанной теории будем искать ρ в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \mu^{\gamma_1} + \rho_2 \mu^{\gamma_2} + \dots \quad (\gamma_1 < \gamma_2 < \dots),$$

Доказательство теоремы 1. В этом случае первая клетка размерности v матриц $\bar{D}(\rho, 0)$ и $D_0(\rho, 0)$ имеет диагональный вид, причем первые v строк $D_0(\rho, \mu)$ нулевые. Найдем с помощью уравнения (13) и диаграммы Ньютона степень γ_1 . Анализ функций $S_k(\rho, \mu)$ показывает следующее. При $\mu = 0$ $S_k(\rho, 0) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, v-1$ и $S_k(\rho, 0) \neq 0$ для $k = v, v+1, \dots, n$. При $\mu \neq 0$ и $k = 0, 1, \dots, v$ $S_k(\rho, \mu) = \mu^{v-k} [L_k(\rho_0) + L_{k,1}(\mu, \rho - \rho_0)]$, причем $L_v(\rho_0) = S_v(\rho_0, 0) \neq 0$, $L_{k,1}(0, 0) \equiv 0$.

Отсюда следует, что $\gamma_1 = 1$. Найдем значения величины ρ_1 . Она является корнем определяющего уравнения

$$\chi(\rho) = \sum_{k=0}^v L_k(\rho_0) \rho_1^k = 0.$$

Если $\chi(\rho)$ поделить на $L_v(\rho_0) \neq 0$, то новый полином может быть найден как определитель матрицы v -го порядка

$$E_v \rho_1 - C_v(\rho_0).$$

Матрица $C_v(\rho_0)$ состоит из элементов $c_{i,j}$, стоящих на пересечении первых v строк и столбцов матрицы $\left(\frac{\partial D_0(\rho, \mu)}{\partial \mu} \right)_{\substack{\mu=0 \\ \rho=\rho_0}}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^l \rho_0^{-(m_k-1)} \int_0^T \psi_i(\lambda + \tau_k) B_{0,k}(\lambda + \tau_k) \varphi_j(\lambda) d\lambda.$$

Если использовать выражение (12), то получим

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^l \rho_0^{-(m_k-1)} \int_0^T \psi_i(\lambda) B_{0,k}(\lambda) \varphi_j(\lambda - \tau_k) d\lambda.$$

Вектор-функция $\psi_i(\lambda)$ есть i -ая строка матрицы $e^{-J\lambda} P^{-1}$, а $\varphi_j(\lambda)$ есть j -ый столбец $P e^{J\lambda}$.

Если все корни $\chi(\rho)$ различны, то существует ν различных ветвей ρ , располагающихся в ряд по μ [19]. В случае, когда $\chi(\rho)$ имеет кратные корни, γ_2 для некоторых ветвей может быть дробным числом.

Доказательство теоремы 2. Пусть собственным числам соответствуют d первых клеток матрицы J , имеющих последовательно размеры $l_1 \leq \dots \leq l_d$. Тогда матрицы $\bar{D}(\rho, 0)$ и $D_0(\rho, 0)$ имеют также клеточно-диагональный вид, причем каждая клетка $D_0(\rho, 0)$ из первых d имеет первый в клетке нулевой столбец и нулевую последнюю строку. В силу этого матрица $D_0(\rho, \mu)$ будет иметь d столбцов и d строк порядка малости μ . Поделим указанные d строк на μ и обозначим новую матрицу через $C_0(\rho, \mu)$. При условиях теоремы 2 $\det C_0(\rho_0, 0) \neq 0$. Оценим теперь коэффициенты $S_k(\rho, \mu)$ выражения (13).

Коэффициенты $S_k(\rho, \mu)$ для $k = 0, 1, \dots, \nu$ можно представить в виде

$$S_k(\rho, \mu) = \mu^{\alpha_k} [L_k(\rho_0) + L_{k,1}(\mu, \rho - \rho_0)],$$

где $L_{k,1}(0, 0) \equiv 0$, $L_k(\rho_0)$ равна сумме тех главных миноров $(n - k)$ порядка определителя матрицы $C_0(\rho_0, 0)$, которые содержат α_k бывших нулевых строк $D_0(\rho, 0)$, отсюда нетрудно убедиться в том, что

$$S_k(\rho, \mu) = \mu^{d-m+1} [L_k(\rho_0) + L_{k,1}(\mu, \rho - \rho_0)] \text{ при } k = k_{m-1} = \sum_{s=1}^{m-1} l_s,$$

$$S_k(\rho, \mu) = \mu^{d-m+\beta_k} [L_k(\rho_0) + L_{k,1}(\mu, \rho - \rho_0)] \text{ при } k_{m-1} < k < k_m, \beta_k \geq 1.$$

Причем $L_k(\rho_0) \neq 0$ при $k = k_m = \sum_{s=1}^m l_s$, поскольку $\det C_0(\rho_0, 0) \neq 0$.

С помощью диаграммы Ньютона получаем, что $\rho(\mu)$ имеет d круговых систем ветвей с $\gamma_1 = 1/l_m$ ($m = 1, \dots, d$). Если $D(\rho, 0)$ имеет σ одинаковых клеток размером l_m , то для $\rho_{1,m}$ определяющее уравнение имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\sigma} L_{k_{m-1} + l_m \cdot s}(\rho_0) \rho_{1,m}^{s l_m} = 0.$$

Если все корни этого уравнения различны, то соответствующие ветви представляются в виде [19]

$$\rho_m(\mu) = \rho_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \rho_{s,m} \mu^{s l_m}$$

В частности, при $l_1 < l_2 < \dots < l_d$ все d круговых систем имеют такой вид. Если же среди корней (14) имеются кратные, то общий знаменатель $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ может превосходить l_m . Автор считает необходимым обратить внимание на этот последний факт, поскольку он не был отмечен им в работе [14]. Наконец, укажем, что случай б) в известных нам работах не исследовался.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 16 С. В. Шильман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, 8, (1970)
17. К. Г. Валеев, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. II, Киев, 1963
18. В. Н. Фомин, В. А. Якубович, Методы вычислений, вып. 3, изд. ЛГУ, 1966, стр. 76.

- 19 В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, ч. 1, Гостехиздат, М—Л, 1957
20 М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвлений решений нелинейных уравнений, изд. Наука, М., 1969.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 апреля 1970 г

ON ONE ANALYTICAL METHOD IN THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS AND STATIONARY DELAYS OF ARGUMENT. II. (Solutions stability analysis).

S. V. Shilman

An explicit representation of a characteristic equation for a set of linear differential equations with periodic coefficients and stationary delays is found. A problem in perturbations of both simple and multiple multipliers under a linear perturbation of the set is solved.

УДК 62 — 50

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ИЗОДРОМОМ С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ В ЗОЛОТНИКЕ

Л. Г. Хаскельберг

Методом точечных преобразований рассматривается система регулирования с изодромом при учете сухого трения в золотнике. Показывается, что система устойчива при всех значениях параметров.

Рассматривается система двухпозиционного регулирования с изодромом при учете сухого трения в золотнике. Пренебрегаем самовыравниванием объекта регулирования и инерционностью чувствительного элемента.

Уравнения динамики системы таковы:

$$T_a \varphi' = \mu \quad \text{— уравнение объекта,} \quad (1)$$

$$\delta\eta + \varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \quad (\sigma' < 0),$$

$$\delta\eta + \varphi = -\frac{1}{2} \varepsilon \quad (\sigma' > 0), \quad (2)$$

$$|\delta\eta + \varphi| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (\sigma' = 0)$$

— уравнение чувствительного элемента,

$$\mu = \begin{cases} m & (\sigma > 0) \\ -m & (\sigma < 0) \end{cases} \quad (3)$$

— уравнение регулирующего органа,

$$T_u \xi' + \xi = T_u \mu' \quad (4)$$

— уравнение изодрома,

$$\sigma = \eta - \xi \quad (5)$$

— уравнение золотника. Здесь T_a — постоянная времени объекта, σ — коэффициент неравномерности чувствительного элемента, ε — коэффициент нечувствительности, вызываемой трением в золотнике, m — максимальное отклонение координаты регулирующего органа, T_u — время изодрома, φ — относительное изменение регулируемой величины, η — относительное смещение измерителя, μ — относительное смещение регулирующего органа, ξ — относительное изменение координаты изодрома, σ — относительное смещение золотника.

Введем переменные $x = \frac{\sigma}{\varepsilon} \eta$; $y = \frac{1}{\varepsilon} \varphi$. Тогда систему (1) — (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x' &= -Ax + B\sigma, \\ y' &= C \operatorname{sgn} \sigma, \\ \sigma' &= 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

для $|x + y| < \frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned} x' &= -C \operatorname{sgn} \sigma, \\ \sigma' &= -D \operatorname{sgn} \sigma + Ex - A\sigma \end{aligned} \quad (6b)$$

для $x + y = \pm \frac{1}{2}$. В (6a), (6b)

$$A = \frac{1}{T_u}; \quad B = \frac{\delta}{\varepsilon T_u}; \quad C = \frac{m}{\varepsilon T_a}; \quad D = \frac{m}{\sigma T_a}, \quad E = \frac{\varepsilon}{\sigma T_u}.$$

Имеют место зависимости

$$AD = CE; \quad BE = A^2. \quad (7)$$

В фазовом пространстве P_1 с координатами x, y, σ изображающая точка может находиться либо в пространстве между плоскостями $x + y = -\frac{1}{2}$ и $x + y = \frac{1}{2}$, либо на этих плоскостях. Изображающая точка может находиться на части H плоскости $x + y = -\frac{1}{2}$, расположенной ниже (считая по координате σ) полуправых L :

$$\sigma = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (\sigma > 0),$$

и L_1 :

$$\sigma = \frac{A}{B}x + \frac{C}{B} \quad (\sigma < 0)$$

и интервала L_2

$$-\frac{C}{B} < x < \frac{C}{B} \quad (\sigma = 0).$$

Этот результат получается рассмотрением производной от выражения $x + y$, вычисленной вдоль интегральных линий системы (6a) (H — множество точек плоскости $x + y = -\frac{1}{2}$, где эта производная отрицательна). Аналогично найдем, что изображающая точка может находиться на части H' плоскости $x + y = \frac{1}{2}$, расположенной выше (считая по координате σ) полуправых L'

$$\sigma = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (\sigma > 0),$$

и L'_1 :

$$\sigma = \frac{A}{B}x + \frac{C}{B} \quad (\sigma < 0)$$

и интервала L_2 :

$$-\frac{C}{B} < x < \frac{C}{B} \quad (\sigma = 0).$$

Прямая $\sigma = \frac{A}{B}x$ является интегральной кривой системы (6б) на полуплоскостях H и H' . Интегральными кривыми системы (6б) все точки области $\sigma > \frac{A}{B}x$, на полуплоскости H (соответственно точки области $\sigma > \frac{A}{B}x$) на полуплоскости H' отображаются на интервал $(-\frac{C}{A}, O)$, прямой $\sigma = 0$ на H^+ (соответственно на интервал $(O, \frac{C}{A})$ прямой $\sigma = 0$ на H'). Обозначим это отображение S (соответственно s'). Остальные точки полуплоскостей H и H' интегральными кривыми системы (6б) отображаются на точки интервала $(0, \infty)$ прямой $\sigma = 0$ на H (соответственно на точки интервала $(-\infty, 0)$ прямой $\sigma = 0$ на H').

Система (1)–(5) (и (6а), (6б)) не определена при $\sigma = 0$. Поэтому не определено и поведение изображающей точки, попавшей на плоскость $\sigma = 0$. Доопределим систему (1)–(5) так, чтобы разбиение на траектории фазового пространства доопределенной системы было предельным при $\sigma_1 \rightarrow 0$ для разбиения фазового пространства системы, получающейся из (1)–(5) заменой (3) на уравнение

$$\mu = \begin{cases} m & (\text{для } \sigma > \sigma_1) \\ m \frac{\sigma}{\sigma_1} & (\text{для } |\sigma| < \sigma_1), \\ -m & (\text{для } \sigma < -\sigma_1) \end{cases} \quad (3')$$

σ_1 — некоторое положительное число (стр. 577 [1]).

Уравнения движения доопределенной системы при $\sigma = 0$ находятся из (1)–(5), ((3) заменяется на (3') при $\sigma = 0$ и $\sigma' = 0$). Получим

$$x' = -Ax;$$

$$y' = \frac{C}{m} \mu \quad \left(\text{для } |x + y| < \frac{1}{2} \right); \quad (8a)$$

$$\mu' = 0;$$

$$x' = \frac{C}{m} \mu;$$

$$\mu' = -\frac{D}{m} \mu + Ex \quad \left(\text{для } x + y = \pm \frac{1}{2} \right). \quad (8b)$$

Обозначим трехмерное фазовое пространство x, y, μ (сечение четырехмерного фазового пространства x, y, μ, σ плоскостью $\sigma = 0$) через P_2 .

В пространстве P_2 изображающая точка может находиться либо на полуплоскостях h :

$$x + y = -\frac{1}{2}; \quad \mu < \frac{Am}{C} x$$

или h' :

$$x + y = \frac{1}{2}; \quad \mu > \frac{Am}{C} x,$$

либо в пространстве между этими полуплоскостями. Изображающая точка, находящаяся на h' , переходит в область $|x + y| < \frac{1}{2}$ с полупрямой l

$$\mu = \frac{Am}{C} x \quad (x > 0);$$

находящаяся на h' изображающая точка переходит в область $|x + y| < \frac{1}{2}$ с полупрямой l'

$$\mu = \frac{Am}{C} x \quad (x < 0).$$

Системы (6 а), (6 б), (8 а)⁴, (8 б) не меняют вида при замене x, y, μ, σ на $-x, -y, -\mu, -\sigma$. Поэтому можно отождествить симметричные относительно начала координат точки фазовых пространств P_1 и P_2 .

Рассмотрим последовательно движение изображающей точки, в начальный момент находившейся на полуплоскости H .

Если точка в начальный момент находилась в той части H , для которой $\sigma > 0$, то через некоторое время она попадет на L , откуда перейдет в область $|x + y| < \frac{1}{2}$.

Если в начальный момент изображающая точка находилась в части H , для которой $\sigma < 0$, то через некоторое время она попадает на прямую $\sigma = 0, x + y = -\frac{1}{2}$. В этом случае дальнейшее движение

точки рассматривается в фазовом пространстве P_2 и описывается системой (8 б). Если при движении в пространстве P_2 (на полуплоскости h в этом пространстве) изображающая точка достигает плоскости $\mu = m$, то дальнейшее ее движение снова рассматривается в пространстве P_1 (на полуплоскости H пространства). Изображающая точка, двигаясь по H , достигает L и переходит в область $|x + y| < \frac{1}{2}$. Точки полупрямой L интегральными кривыми системы (6 а)

переводятся в точки некоторой кривой γ на H' . Уравнение γ найдем, решив систему (6 а) при условиях

$$x + y = -\frac{1}{2}; \quad \sigma = \frac{A}{B} x - \frac{C}{B} \quad (\text{при } t = 0);$$

$$x + y = \frac{1}{2}. \quad (\text{при } t = \tau_1).$$

Здесь τ_1 — время пробега изображающей точки от полупрямой L до плоскости $x + y = \frac{1}{2}$.

Уравнение γ имеет вид

$$\sigma = \frac{A}{B} x - \frac{C}{B} \exp(-A\tau_1), \quad (9a)$$

τ_1 определяется из уравнения

$$\frac{C}{Am} (1 - \exp(-A\tau_1)) = \frac{C}{m} \tau_1 - 1. \quad (9b)$$

Кривая γ есть прямая линия, целиком находящаяся в области $\sigma < \frac{A}{B} x$ полуплоскости H' . Преобразованием S' все точки γ отображаются на точки интервала $\left(0, \frac{C}{A}\right)$ прямой $\sigma = 0$ на H' . Обозначим

этот интервал через I' . Любая точка полуплоскости H при своем движении (если она не остается в пространстве P_2) попадает на интервал I' . Нетрудно видеть, что любая точка фазового пространства при своем движении попадает на I' , (если эта точка не остается в пространстве P_2).

Дальнейшее движение точки рассматривается в пространстве P_2 . Интервал I' — это интервал $\left(0, \frac{C}{A}\right)$ прямой $\mu = m$ на полуплоскости h' в пространстве P_2 .

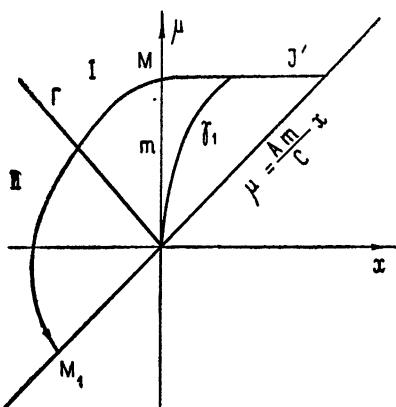


Рис. 1.

Покажем, что изображающая точка, начавшая свое движение на I' , достигает полупрямой l'' в точке с координатой $\mu > -m$.

Для доказательства достаточно показать, что левый конец интервала I' — точка M с координатами $x = 0$, $\mu = m$ интегральными кривыми системы (8б) переводится в точку M_1 полупрямой l' с координатой μ_1 , $\mu_1 > -m$ (рис. 1).

Для доказательства решим систему (8б) при условиях

$$x = 0, \quad \mu = m \quad (\text{при } t = 0),$$

$$\mu = \frac{Am}{C} x \quad (\text{при } t = \theta).$$

Здесь θ — время пробега изображающей точки по h' от M до M_1 .

Пусть k_1, k_2 — корни характеристического уравнения системы (8б), которое имеет вид

$$k^2 + \frac{D}{m} k + \frac{CE}{m} = 0. \quad (10)$$

Если $k_1 \neq k_2$, то получаем

$$\mu_1 = \frac{m}{k_1 - k_2} [k_1 \exp(k_1 \theta) - k_2 \exp(k_2 \theta)], \quad (11a)$$

$$\exp(k_1\theta) \left(1 + \frac{k_1}{A}\right) = \exp(k_2\theta) \left(1 + \frac{k_2}{A}\right). \quad (116)$$

Из (11 а) и (11 б) находим

$$\mu_1 = \frac{m}{1 + \frac{k_2}{A}} \exp(k_1\theta), \quad (12a)$$

$$\mu_1 = \frac{m}{1 + \frac{k_1}{A}} \exp(k_2\theta). \quad (12b)$$

Отсюда

$$\mu_1^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_1}{A}\right)\left(1 + \frac{k_2}{A}\right)} \exp[(k_1 + k_2)\theta] = \exp\left(-\frac{D}{m}\theta\right) < 1$$

и $\mu_1 > -m$.

$$\text{Если } k_1 = k_2 = k = -\frac{D}{2m}, \text{ то} \quad (13)$$

$$x = -C\theta \exp(k\theta),$$

$$\mu = m \exp(k\theta)(1 + k\theta).$$

Функция $f(\theta) = \exp(k\theta)(1 + k\theta)$ достигает минимума при $\theta = -\frac{2}{k}$.

$$\text{Имеем } f\left(-\frac{2}{k}\right) = -\exp(-2) > -1 \text{ и из (13) } \mu > -m.$$

Из доказанного следует, что попавшая на I' изображающая точка, переходя в пространство P_2 , больше в пространство P_1 не переходит.

Из симметричности фазовых пространств P_1 и P_2 аналогичный вывод можно сделать в отношении интервала $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ прямой $\sigma = 0$ на H .

Для изучения движений системы достаточно теперь рассматривать движения только в пространстве P_2 . Достаточно изучить движение точки, в начальный момент находившейся на интервале I' прямой $\mu = m$ на полуплоскости h' или на отождествленном с I' интервале I — интервале $\left(0, \frac{C}{A}\right)$ прямой $\mu = m$ на полуплоскости h . Интегральными кривыми системы (8 б) изображающая точка с I переводится на полупрямую l и с l переходит в область $|x + y| < \frac{1}{2}$. Интегральными кривыми системы (8 а) точки l переводятся в точки некоторой кривой γ_1 на h' .

Уравнение γ_1 находим, решая систему (8 а) при условиях

$$x + y = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{Am}{C} x \quad (\text{при } t = 0),$$

$$x + y = \frac{1}{2} \quad (\text{при } t = \tau_2).$$

Здесь τ_2 — время пробега изображающей точки от полу прямой l до полуплоскости h' .

Это уравнение имеет вид

$$\mu = \frac{Am}{C} \exp(A\tau_2) x, \quad (14a)$$

τ_2 определяется из уравнения

$$1 - \exp(-A\tau_2) = A\tau_2 - \frac{Am}{C\mu}. \quad (14b)$$

Уравнение (14 б) имеет единственное решение при всех μ .

Рассмотрим дальнейшее движение изображающей точки, попавшей на h' . Обозначим преобразование, переводящее точки полуплоскости h' на точки полу прямой l' , через T . Найдем уравнение кривой Γ на полуплоскости h' . Кривая Γ — это геометрическое место точек полуплоскости h' , координаты μ которых не изменяются (по абсолютной величине) при преобразовании T .

Уравнение Γ получим, решая систему (8 б) при условиях

$$x = x_0, \quad \mu = \mu_0 \quad (\text{при } t = 0),$$

$$x = \frac{C}{Am} \mu, \quad \mu = -\mu_0 \quad (\text{при } t = \tau_3).$$

τ_3 — время пробега изображающей точки от точки с координатами $x = x_0$, $\mu = \mu_0$ до точки прямой $\mu = \frac{Am}{C} x$. При $k_1 \neq k_2$ (k_1, k_2 — корни уравнения (10)) получим

$$k_1 \left(k_2 x_0 + \frac{C\mu_0}{m} \right) \exp(k_1 \tau_3) - k_2 \left(k_1 x_0 + \frac{C\mu_0}{m} \right) \times \\ \times \exp(k_2 \tau_3) = (k_2 - k_1) \frac{C\mu_0}{m}, \quad (15a)$$

$$\left(k_2 x_0 + \frac{C\mu_0}{m} \right) \exp(k_1 \tau_3) - \left(k_1 x_0 + \frac{C\mu_0}{m} \right) \exp(k_2 \tau_3) = - \frac{C\mu_0}{Am(k_2 - k_1)}. \quad (15b)$$

Из (15 а) и (15 б) получаем, что Γ является прямой с уравнением

$$\mu_0 = nx_0, \quad (16)$$

где

$$n = - \frac{\exp(k_1 \tau_3) - \exp(k_2 \tau_3)}{k_1 \exp(k_1 \tau_3) - k_2 \exp(k_2 \tau_3) - (k_2 - k_1)} \times \\ \times k_1 k_2 \frac{m}{C} = \frac{k_1 \exp(k_2 \tau_3) - k_2 \exp(k_1 \tau_3)}{\exp(k_1 \tau_3) - \exp(k_2 \tau_3) + \frac{k_2 - k_1}{A}} \cdot \frac{m}{C}. \quad (17)$$

После упрощения получаем

$$(k_1 - k_2) \exp[(k_1 + k_2) \tau_3] + k_1 \exp(k_1 \tau_3) - k_2 \exp(k_2 \tau_3) = 0. \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем, что

$$n = - \frac{\exp(k_1\tau_3) - \exp(k_2\tau_3)}{(k_1 - k_2)\{1 + \exp[(k_1 + k_2)\tau_3]\}}. \quad (19)$$

Если k_1, k_2 действительны, то из (19) следует, что $n < 0$ (считаем, что $k_1 > k_2$). Если k_1, k_2 комплексные, $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, то с учетом (18) получим

$$n = - \exp(\alpha\tau_3) \frac{\sin \beta\tau_3}{\beta}. \quad (20)$$

Уравнение (18) при действительных k_1, k_2 имеет единственное решение. Это следует из того, что левая часть (18) при $\tau_3 = 0$ равна $2(k_1 - k_2) > 0$; при достаточно большом τ_3

$$\begin{aligned} f_1(\tau_3) &= (k_1 - k_2) \exp[(k_1 + k_2)\tau_3] + k_1 \exp(k_1\tau_3) - k_2 \exp(k_2\tau_3) = \\ &= \exp(k_2\tau_3) \{(k_1 - k_2) \exp(k_1\tau_3) + k_1 \exp[(k_1 - k_2)\tau_3] - k_2\} < 0, \end{aligned}$$

производная левой части (18)

$$\begin{aligned} f'_1(\tau_3) &= (k_1 + k_2)(k_1 - k_2) \exp[(k_1 + k_2)\tau_3] + k_1^2 \exp(k_1\tau_3) - \\ &- k_2^2 \exp(k_2\tau_3) = k_1 k_2 [\exp(k_2\tau_3) - \exp(k_1\tau_3)] < 0 \end{aligned}$$

(получено с учетом (18)).

Если k_1, k_2 комплексны, то (18) перепишется в виде

$$\exp - \frac{D}{2m}\tau_3 + \cos \beta\tau_3 + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau_3 = 0$$

или

$$\exp - \frac{D}{2m}\tau_3 = -N \sin(\beta\tau_3 + \Delta). \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{D}{2m}; \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{D^2}{m^2} - \frac{4CE}{m} \right)^{1/2}; \\ \Delta &= \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}; \quad N = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Уравнение (21) имеет бесчисленное множество корней. Рассматриваем наименьший по величине корень $\tau_3^{(1)} < \pi/2\beta$. Остальные корни $\tau_3^{(2)}, \tau_3^{(3)}, \dots$ не рассматриваются, так как изображающая точка покидает полуплоскость h' при значениях τ между $\tau_3^{(1)}$ и $\tau_3^{(2)}$.

Как для случая действительных, так и для случая комплексных k_1, k_2 n отрицательно.

В случае действительных k_1, k_2 в области $-m \leq \mu \leq m$ полу плоскости h' имеется спектр $\frac{m}{C} \leq \frac{\mu_0}{x_0} \leq -\frac{m}{C} k_2$, точки внутри которого движутся к положению равновесия на полу плоскости h' — точке O с координатами $x = 0, \mu = 0$. Заметим, что $-\frac{m}{C} k_2 > -\frac{m}{C} k_1 > \frac{Am}{C}$.

Действительно,

$$-\frac{m}{C} k_1 - \frac{Am}{C} = \frac{Am}{C} \left(-\frac{k_1}{A} - 1 \right) = \frac{Am}{C} \left[\frac{D}{2Am} - \right. \\ \left. - \frac{D}{2Am} \left(1 - \frac{4CEm}{D^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right].$$

Так как $AD = CE$, то

$$\frac{4CEm}{D^2} = \frac{4Am}{D}.$$

Функция $\varphi_1(z) = \frac{2}{z} - \frac{2}{z} (1-z)^{1/2} - 1$, где $z = \frac{4Am}{D} < 1$, положительна при всех $0 < z < 1$. Поэтому $-\frac{m}{C} k_1 > \frac{Am}{C}$.

Положение равновесия O в случае действительных k_1, k_2 — устойчивый узел.

В случае комплексных k_1, k_2 положение равновесия O — устойчивый фокус.

Г делит h' на области I и II. Точки области I преобразованием T приближаются к плоскости $\mu = 0$, точки области II удаляются. Кривая γ_1 находится целиком в области I. Изображающая точка после преобразования T приближается к плоскости $\mu = 0$.

Если $k_1 = k_2 = k = -\frac{D}{2m}$, то решение системы (8б) имеет вид

$$x = \exp(kt) \left(x_0 - kx_0 t - \frac{C\mu_0}{m} t \right), \quad (22a)$$

$$\mu_1 = \mu_0 k \exp(kt). \quad (22b)$$

Из (22б) $\frac{\mu}{\mu_0} = kt \exp(kt)$.

Функция $\varphi_2(U) = U \exp(U)$ при $U \leq 0$ имеет максимальное (по абсолютной величине) значение при $U = -1$. Это значение равно $|\varphi_2(-1)| = \exp(-1) < 1$. Поэтому для любых t $|\mu| < \mu_0$. Любая точка h' , в частности точки кривой γ_1 , преобразованием T приближается к плоскости $\mu = 0$.

В случае комплексных k_1, k_2 изображающая точка приближается к отрезку состояний равновесия — отрезку $\sigma = 0, x = 0, \mu = 0, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, последовательно попадая на полуплоскости h и h' . Такая же картина будет и в случае действительных k_1, k_2 при выполнении условия

$$A^{-1} \exp(-A\tau_2^{(0)}) + k_2^{-1} > 0 \quad (23)$$

(при выполнении этого условия кривая γ_1 целиком находится в области $\mu > -\frac{m}{C} k_2 x$ полуплоскости h'), $\tau_2^{(0)}$ определяется из уравнения

$$1 - \exp(-A\tau_2^{(0)}) = A\tau_2^{(0)} - \frac{B}{C}. \quad (24)$$

Если k_1, k_2 действительны и условие (23) не выполняется, то точки на части кривой γ_1 вблизи точки O приближаются к отрезку положений равновесия, переходя последовательно с h на h' и обратно. Остальные точки фазового пространства P_2 попадают в сектор $-\frac{m}{C} k_1 \leq \frac{\mu}{x} \leq \frac{m}{C} k_2$ и движутся в нем к положению равновесия—точке O на h' или симметричной ей точке на h , не покидая $h'(h)$.

Итак, каковы бы ни были начальные условия в рассматриваемой системе регулирования, через определенное время устанавливается скользящий режим (при $\sigma = 0$). Регулирующий орган движется к нейтральному положению—положению $\mu = 0$.

Рассмотрим частный случай $T = \infty$ (система с жесткой обратной связью). В рассматриваемой задаче $T_s = 0, k = 0$. (T_s — время сервомотора, k — самовыравнивание объекта).

При $T_u = \infty$ задача является частным случаем (для $T_s = 0$ и $k = 0$) общей задачи, рассмотренной в [2].

В [2] вводятся параметры $A = \frac{\epsilon T_s}{\delta^2 T_a}$ и $B = \frac{k \epsilon T_s}{\delta T_a}$. При $B = 0$ из формул (2.5) и (2.6) работы [2] получим выражение для функции последования

$$V' = (2AV)^{1/2} - V. \quad (25)$$

При малых A кривая с уравнением (25) на диаграмме Ламерея пересекает прямую $V' = V$ сверху вниз. При $A \rightarrow 0$ точка пересечения стремится к началу координат. Система устойчива.

Результат совпадает с результатом, полученным выше (система устойчива при всех T_u).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959
2. А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1955.

Азербайджанский политехнический
институт

Поступила в редакцию
26 июня 1969 г.

DYNAMICS OF A CONTROL SYSTEM WITH A STABILIZER WITHOUT DROOP WITH REGARD TO THE VALVE'S DRY FRICTION

L. G. Khaskelberg

A control system with a stabilizer without droop is considered using the point-mapping method with regard to valve's dry friction. The system is shown to be stable under all values of parameters.

УДК 532.5 : 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСНОГО РЕЖИМА ЦИРКУЛЯЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В МНОГОПЕТЛЕВОЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ СО СВОБОДНЫМИ УРОВНЯМИ

Л. В. Смирнов

Рассматривается система циркуляции несжимаемой жидкости, состоящая из нескольких параллельных петель с насосами и общего участка, в каждой из петель и на общем участке имеется объем со свободным уровнем. Выводится математическая модель в виде системы уравнений Лагранжа второго рода. Прямым методом Ляпунова исследуется устойчивость равновесного режима циркуляции. Оценивается влияние переменных масс в объемах со свободным уровнем.

Устойчивость равновесного режима перекачки жидкости в системах циркуляции имеет важное значение для их работоспособности. Особенности составления математической модели и исследования устойчивости равновесного режима можно проследить на довольно простом примере системы циркуляции, изображенной на рис. 1. В каждой из петель,

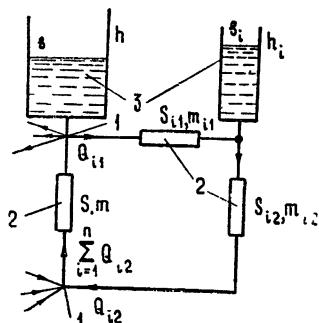


Рис. 1. Схема простейшей системы циркуляции.
 1—точки подсоединения петель к общему участку,
 2—содержащие и не содержащие насосов участки системы циркуляции, которые обладают гидравлическим сопротивлением и полностью заполнены движущейся жидкостью,
 3—объемы со свободным уровнем.

имеющих одинаковую конструкцию, имеется насос (насосы), приводящий в движение жидкость, и объем со свободным уровнем. Стрелки указывают нормальное направление движения жидкости. Подобные системы по своему техническому выполнению и динамическим свойствам имеют много общего с использующимися на практике и хорошо изученными напорными системами с уравнительными резервуарами [1]. Однако, имеется ряд существенных различий, что не дает возможности обобщить уже полученные результаты исследования устойчивости стационарного режима на системы циркуляции. К таким различиям следует отнести, например, наличие нескольких связанных друг с другом петель. Работы, посвященные исследованию устойчивости систем с параллельно включенными насосами (см., например, [2, 3]), также не позволяют дать ответ на вопрос об устойчивости систем рассматриваемого типа.

В настоящей работе получены условия, выполнение которых позволяет обеспечить устойчивость равновесного рабочего режима в системе циркуляции.

1. Введение ряда упрощающих предположений и выбор координат, описывающих поведение системы, позволил получить математическую модель в виде уравнений Лагранжа второго рода [1]. При составлении уравнений движения, описывающих изменения расходов и уровней, рассматривается модель системы циркуляции при следующих основных упрощающих предположениях: 1) поток жидкости в каждом из участков системы является одномерным, 2) плотность жидкости постоянна, стеки трубопроводов абсолютно жесткие и контур не деформируется, 3) обороты рабочих колес насосов поддерживаются постоянными, 4) в динамике справедливы статические гидравлические характеристики участков, 5) давление в точке подсоединения объема со свободным уровнем однозначно определяется мгновенным значением высоты этого уровня, 6) каждый объем со свободным уровнем представляет собой цилиндр.

Первое предположение обычно считается выполняющимся в большинстве гидравлических расчетов и не требует пояснений. Второе предположение также довольно прозрачно и обсуждается в литературе (см., например, [5]). Постоянство оборотов рабочего колеса насоса предполагает наличие идеального регулятора или очень большой постоянной времени в уравнении моментов, которое служит для определения скорости вращения колеса. В последнем случае проводимое ниже исследование посвящено определению устойчивости по «быстрым движениям» [1, 6]. Четвертое предположение также является обычным для достаточно медленных изменений расходов [7]. Пятое предположение характерно для работ по устойчивости систем с гидравлическими резервуарами [1]. (В конце работы (раздел 3) приведена оценка влияния факторов, которые при этом не учитываются.) Последнее, шестое предположение, не является принципиальным и введено для упрощения исследования.

Предполагается, что кинетическая энергия движущейся жидкости определяется средней по сечению скоростью. В этом случае влияние пульсационной составляющей и распределения скорости по сечению трубопровода можно учесть в виде некоторого множителя перед выражением кинетической энергии [1]. Поскольку этот множитель считается постоянным, то его можно учесть соответствующим изменением массы движущейся жидкости и не писать. Полная кинетическая энергия системы (T) равна сумме кинетических энергий отдельных участков контура, и если объединить все участки с одним и тем же расходом в один и заменить его эквивалентной трубой, то можно получить

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{m_{ij} Q_{ij}^2}{2S_{ij}^2} + \frac{m}{2S^2} \left(\sum_{i=1}^n Q_{i2} \right)^2, \quad (1.1)$$

где Q_{ij} — расход жидкости через поперечное сечение участка j i -той петли ($m^3/\text{сек}$); m, S — масса жидкости (кг) и площадь сечения прохода эквивалентной трубы (m^2) в соответствующем участке; i — номер петли, j — номер участка, n — общее число петель. Потенциальная энергия системы, при сделанных предположениях, может меняться только за счет отклонения уровней в объемах от их равновесных значений. При этом происходит вертикальное перемещение центра тяжести системы, и потенциальная энергия жидкости в системе сообщающихся сосудов (Π_1) записывается в виде

$$\Pi_1 = \frac{\gamma}{2} \left[sh^2 + \sum_{i=1}^n s_i h_i^2 \right] + \text{const.} \quad (1.2)$$

Здесь γ — удельный вес жидкости, заполняющей систему циркуляции (H/m^3); s, h — площадь поперечного сечения (m^2) и высота уровня жид-

кости (m) в соответствующем объеме со свободным уровнем. Поведение системы может быть описано имеющими простой физический смысл координатами

$$y_{ij} = \int_0^t Q_{ij} dt + y_{ij}(0). \quad (1.3)$$

Уравнения неразрывности, написанные для точек подключения объемов со свободным уровнем, позволяют выразить значения уровней в объемах

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{s} \int_0^t \sum_{i=1}^n (Q_{i2} - Q_{i1}) dt + h(0) &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_{i2} - y_{i1})}{s}, \\ h_i = \frac{1}{s_i} \int_0^t (Q_{ii} - Q_{i2}) dt + h_i(0) &= \frac{y_{i1} - y_{i2}}{s_i} \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким образом, значения высот уровней и потенциальная энергия, выражаются через разности $y_{ii} - y_{i2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Выражения для непотенциальных сил могут быть найдены через работу этих сил на элементарных приращениях координат (δy_{ij})

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 F_{ij} \delta y_{ij}. \quad (1.5)$$

Множители F_{ij} , стоящие перед приращениями координат, и являются непотенциальными силами. Они могут быть выражены через перепады давления на участках, определяющиеся потерями на трение, работой насосов и разностями высот концов участков. Поскольку циркуляционный контур не деформируется, то «геометрический напор» на динамику не влияет. В связи с этим предполагается, что все трубопроводы, кроме объемов со свободным уровнем, расположены в одной горизонтальной плоскости.

Тогда

$$F_{ij} = -\Delta P_{ij}(Q_{ij}) - \delta_{j2} \Delta P_0 \left(\sum_{i=1}^n Q_{i2} \right). \quad (1.6)$$

ΔP_{ij} и ΔP_0 представляют собой статические гидравлические характеристики участков, δ_{j2} — символ Кронекера. Для участков без насосов — это зависимость потерь на трение от величины расхода протекающей жидкости; для участков с насосами — это суммарная характеристика, определяющаяся характеристикой насоса и зависимостью потерь на этом участке от расхода. (В случае необходимости в статическую гидравлическую характеристику можно включить и разность скоростных напоров на концах участка.) Потери на трение монотонно возрастают с ростом расхода (качественный вид графика зависимости $\Delta P(Q)$ для участка без насоса представлен на рис. 2 а). Характеристика насоса в общем случае немонотонна [8], поэтому и характеристика участка с насосом будет немонотонной (рис. 2 б). Знак минус перед ΔP стоит потому, что при нормальном направлении движения разность входного и выходного давлений на участке без насосов положительна, а работа сил трения отрицательна. Учет разности скоростных напоров не меняет качественного вида этих характеристик.

Уравнения движения могут быть получены подстановкой выражений для T , Π_1 , F_{ij} в уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y_{ij}} - \frac{\partial T}{\partial y_{ij}} = F_{ij} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_{ij}} \quad (1.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2).$$

Полученные при этом уравнения полностью совпадают с теми, которые можно получить, используя уравнения Бернулли [9].

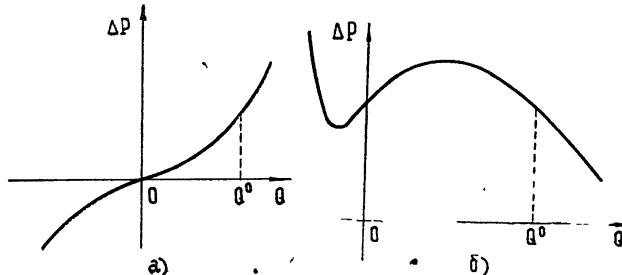


Рис. 2.

Положив в системе (1.7) производные по времени равными нулю и учитывая, что $\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_{ii}} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_{ij}}$ и $Q_{ij}^0 = Q_i^0$, можно получить для определения значений переменных в равновесных режимах систему уравнений

$$F_{ii}^0 + F_{ij}^0 = 0 \quad (i, = 1, 2, \dots, n). \quad (1.8)$$

Решение такой системы может быть проведено графически путем нахождения точек пересечения суммарной характеристики системы петель и характеристики общего участка [2, 3]. Найденные значения расходов Q_{ij} в равновесных режимах позволяют определить и величины уровней, если для этого воспользоваться системой уравнений

$$\left. \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_{ij}} \right|_0 = F_{ij}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.9)$$

$$sh + \sum_{i=1}^n s_i h_i = c$$

(последнее уравнение представляет собой закон сохранения вещества при постоянной плотности, постоянная c определяется количеством жидкости в системе).

Решений системы уравнений (1.8), (1.9) может быть несколько. Пусть исследуемому равновесному режиму соответствуют статические значения переменных h^0 , h_i^0 , $Q_{ij}^0 = Q_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2$). Здесь и ниже индексом 0 отмечены значения величин в рассматриваемом равновесном режиме.

Произведем замену переменных

$$q_{ij} = Q_{ij} - Q_i^0, \quad x_i = h_i - h_i^0,$$

$$\Delta y_{ij} = \int_0^t q_{ij} dt = y_{ij} - Q_i^0 t - y_{ij}(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2). \quad (1.10)$$

Для исследования удобно перейти к другим выражениям для непотенциальных сил и потенциальной энергии, которые отсчитываются от их значений в равновесном режиме.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= F_{ij} - F_{ij}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \\ \Pi &= \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{1}{s} \left[\sum_{i=1}^n s_i x_i \right]^2 + \sum_{i=1}^n s_i x_i^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_{ij}} - \frac{\partial T}{\partial \Delta y_{ij}} &= f_{ij} - \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta y_{ij}} \\ (i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Введем обозначения

$$-f_{ij} = \varphi_{ij}(q_{ij}) + \delta_{j2} \varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(q_{ij}) &= \Delta P_{ij}(Q_i^0 + q_{ij}) - \Delta P_{ij}(Q_i^0) \\ (i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) = \Delta P_0 \left[\sum_{i=1}^n (Q_i^0 + q_{i2}) \right] - \Delta P_0 \left[\sum_{i=1}^n Q_i^0 \right].$$

Нелинейные функции $\varphi_{ij}(q_{ij})$ и $\varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right)$ так же, как и $\Delta P_{ij}(Q_{ij})$ и $\Delta P_0 \left(\sum_{i=1}^n Q_{i2} \right)$, удовлетворяют условиям единственности решения системы (1.12), кроме того

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(q_{ij}) q_{ij} > 0 \quad \left(|q_{ij}| > \frac{a}{n} > 0 \right) \\ (i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) \sum_{i=1}^n q_{i2} > 0 \quad \left(\left| \sum_{i=1}^n q_{i2} \right| > a > 0 \right).$$

Вид зависимостей $\varphi_{ij}(q_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$), $\varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right)$ определяется видом характеристик $\Delta P_{ij}(Q_{ij})$, $\Delta P_0 \left(\sum_{i=1}^n Q_{i2} \right)$ и значениями Q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. рассматриваемым равновесным режимом. Практический интерес представляет исследование равновесного режима Q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$), при котором

$$\left. \frac{d \varphi_{ij}(q_{ij})}{dq_{ij}} \right|_{q_{ij}=0} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \quad (1.15)$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{d \varphi \left(\sum\limits_{i=1}^n q_{i2} \right)}{d \sum\limits_{i=1}^n q_{i2}} \\ \sum\limits_{i=1}^n q_{i2} = 0 \end{array} \right| > 0.$$

Среди равновесных режимов, удовлетворяющих этому условию, имеется такой, который может быть назван основным рабочим режимом. Системы рассматриваемого типа предназначены для работы именно в этом режиме. Предполагается, что он существует. На рис. 3 приведен качественный вид графиков соответствующих нелинейных функций $\varphi(q)$ для такого режима.

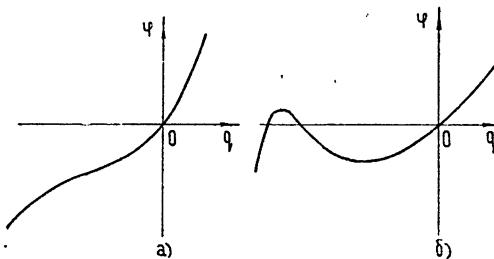


Рис. 3.

венный вид графиков соответствующих нелинейных функций $\varphi(q)$ для такого режима.

2. Идея исследования устойчивости состояния равновесия $q_{ij} = x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2$) системы (1.12) состоит в использовании теоремы об изменении полной механической энергии системы [4]

$$\frac{d}{dt} (T_2 + \Pi - T_0) = \frac{dA}{dt}, \quad (2.1)$$

где $\frac{dA}{dt}$ — мощность непотенциальных сил, T_2 , T_0 — те части выражения кинетической энергии (T), которые содержат соответственно члены с q_{ij} во второй и в нулевой степени. (В нашем случае T_0 — постоянная.) Приняв затем $T_2 + \Pi$ в качестве функции Ляпунова и доказав отрицательность мощности непотенциальных сил, можно сделать вывод об асимптотической устойчивости рассматриваемого равновесного режима.

После вычисления $\frac{dT_2}{dt}$ с использованием уравнений (1.12) и элементарных преобразований можно получить

$$\frac{d}{dt} (T_2 + \Pi) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \varphi_{ij}(q_{ij}) q_{ij} - \varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) \sum_{i=1}^n q_{i2} \quad (2.2)$$

Для того, чтобы в окрестности начала координат иметь $\frac{d}{dt} (T_2 + \Pi) \leq 0$, достаточно выполнения неравенств

$$\varphi_{ij}(q_{ij}) q_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \quad (2.3)$$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) \sum_{i=1}^n q_{i2} \geq 0.$$

Для рассматриваемого равновесного режима, когда имеет место (1.15), эти неравенства выполняются в некоторой окрестности начала координат.

Фазовыми переменными, полностью описывающими поведение рассматриваемой системы, являются x_i, q_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$), в чем можно убедиться, подставив в уравнения (1.12) выражения для T, Π, f_{ij} . Производная $\frac{d}{dt}(T_2 + \Pi)$ зависит только от $2n$ переменных q_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$) и не зависит от x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Убедимся, что в пространстве $q_{ij} \equiv 0, x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$) нет целых полутраекторий системы (1.12), кроме начала координат. Для таких полутраекторий $q_{ij} = q_{ii} = 0$ и уравнения движения в этом подпространстве принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta y_{ij}} = (-1)^{j-1} \gamma \left[\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2 x_i}{s} + s_i x_i \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2).$$

Это система однородных уравнений порядка n с детерминантом, отличным от нуля, поэтому единственной полутраекторией, лежащей в указанном подпространстве, является начало координат. Сама функция $T_2 + \Pi$ зависит от всех $3n$ фазовых координат и положительна всюду, кроме начала координат, где $T_2 + \Pi = 0$. Таким образом, в некоторой односвязной, содержащей начало координат области согласно теореме Ляпунова имеет место асимптотическая устойчивость [10]. Для оценки размеров этой области, т. е. для доказательства устойчивости «в большом», можно воспользоваться достаточными условиями (2.3). Границей области будет поверхность $T_2 + \Pi = \text{const}$, проходящая через «ближайшую» к началу координат точку нарушения хотя бы одного из условий (2.3). Внутри найденного таким образом $3n$ -мерного эллипсоида единственной точкой обращения $\frac{d}{dt}(T_2 + \Pi)$ в нуль будет начало координат.

Характеристики участков с насосами могут быть такими, что условия (2.3) будут выполняться во всем подпространстве q_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$). В этом случае будет иметь место устойчивость в «целом». Это, например, имеет место при монотонно падающих характеристиках используемых насосов, хотя требование таких характеристик в реальных системах является, очевидно, излишним. Более точным, но также достаточным условием является единственность решения каждого из уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(q_{ij}) &= 0 \\ \varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2), \quad (2.5)$$

Из этих уравнений можно исключить такие, которые соответствуют участкам контура, где нет насосов. Это связано с тем, что при сделанных предположениях потери монотонно возрастают с ростом расхода (т. е. $\frac{d\varphi_{ij}}{dq_{ij}} > 0$), а $\varphi_{ij}(0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2$). Для участков без насосов по тем же причинам выполняются соответствующие неравенства из системы (2.3).

Для более сложных случаев, когда имеется несколько объемов со свободным уровнем в каждой из петель, сами петли конструктивно отличаются друг от друга, вывод уравнений и исследование проводятся аналогично, а его качественные результаты сохраняются. Таким образом, устойчивыми оказываются те режимы, для которых выполнены неравенства (1.15), в том числе и так называемый рабочий режим.

3. Давление в точке подключения объема со свободным уровнем определяется не только мгновенным значением высоты уровня, но и первой и второй производными по времени от этой высоты, т. е. величиной скорости и ускорения жидкости, поступающей в объем. Для определения влияния этого фактора следует учесть инерцию жидкости в объеме и потери на трение при изменении уровня. Исследование устойчивости в этом случае может быть проведено так же, как это сделано выше, однако, имеются некоторые особенности, которые следует отметить.

Учет влияния изменения массы жидкости в объемах приводит к необходимости использовать уравнения движения, справедливые для тел переменной массы. Для упрощения рассмотрения предполагается, что жидкость в объеме со свободным уровнем ведет себя подобно телу, масса которого меняется, а само тело имеет только одну степень свободы, соответствующую вертикальному перемещению центра тяжести из-за изменения уровня. Уравнения Лагранжа для тел переменной массы выводятся из уравнений Мещерского [11] и отличаются от использованных выше.

Кинетическая энергия системы с учетом движения жидкости в объемах (T') примет следующий вид

$$T' = T + \sum_{i=1}^n \frac{m_i(h_i)}{2s_i^2} (\dot{Q}_{ii} - Q_{i2})^2 + \frac{m(h)}{2s^2} \left[\sum_{i=1}^n (Q_{i2} - Q_{ii}) \right]^2, \quad (3.1)$$

$$m_i(h_i) = s_i \rho (h_i - \bar{h}), \quad m(h) = s \rho (h - \bar{h}).$$

(Вся масса жидкости предполагается сосредоточенной в цилиндрическом объеме, заполненном до высоты h_i и считается, что уровень жидкости не опускается ниже уровня днища \bar{h}). Т задается формулой (1.1). В выражениях для непотенциальных сил следует дополнительно учесть только потери на трение, сопровождающие изменения уровней

$$\begin{aligned} F'_{ii} &= F_{ii} - \Delta P_i + \Delta P_{n+1}, \\ F'_{i2} &= F_{i2} + \Delta P_i - \Delta P_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

F_{ii} задаются формулами (1.13). (Для простоты предполагается, что все сопротивления сосредоточены на входе в объем.)

После замены переменных и учета постоянных составляющих, как это сделано в разделе 1, для непотенциальных сил (f'_{ij}) получим

$$f'_{ij} = f_{ij} + (-1)^{i+1} \varphi_{n+1} \left[\sum_{i=1}^n (q_{i2} - q_{ii}) \right] + (-1)^j \varphi_i (q_{ii} - q_{i2}). \quad (3.3)$$

Функции φ_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) представляют собой статические гидравлические характеристики участков сопротивления. Качественный вид графиков зависимостей ничем не отличается от приведенного на рис. 3а. Выражение (1.11) для потенциальной энергии (Π) сохраняется. Не выписывая самих уравнений движения, можно сразу воспользоваться тео-

ремой об изменении кинетической энергии [11], которая для рассматриваемого случая записывается в виде

$$\frac{dT'_2}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{dA_j}{dt} + \sum_{j=1}^l \frac{dm_j v_j^2}{2}. \quad (3.4)$$

Первая сумма в правой части представляет собой мощность всех действующих сил, а вторая сумма есть кинетическая энергия отбрасываемой или присоединяемой массы; суммирование идет по всем объемам со свободным уровнем. Вычисление первой суммы дает

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{dA_j}{dt} = & - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \varphi_{ij}(q_{ij}) q_{ij} - \varphi \left(\sum_{i=1}^n q_{i2} \right) \sum_{i=1}^n q_{i2} - \\ & - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta y_{ij}} q_{ij} - \sum_{i=1} \varphi_i(q_{ii} - q_{i2})(q_{ii} - q_{i2}) - \\ & - \varphi_{n+1} \left[\sum_{i=1}^n (q_{i2} - q_{ii}) \right] \sum_{i=1}^n (q_{i2} - q_{ii}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Первые $2n + 1$ члены совпадают с полученными в разделе 2, а следующие $2n$ членов представляют собой $\frac{d\Pi}{dt}$.

Вычисление второй суммы дает

$$\sum_{j=1}^l \frac{dm_j}{dt} \frac{v_j^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho}{2s_i^2} (q_{ii} - q_{i2})^3 + \frac{\rho}{2s^2} \left[\sum_{i=1}^n (q_{i2} - q_{ii}) \right]^3 \quad (3.6)$$

Выражение (3.4) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} (T'_2 + \Pi) = \sum_{j=1}^m \frac{dA_j}{dt} - \frac{d\Pi}{dt} + \sum_{j=1}^l \frac{dm_j}{dt} \frac{v_j^2}{2}. \quad (3.7)$$

Первые $m + 1$ члены правой части представляют собой мощность всех непотенциальных сил.

Необходимо оценить знак правой части выражения (3.7) в окрестности начала координат. $\sum_{j=1}^m \frac{dA_j}{dt} - \frac{d\Pi}{dt} \leq 0$ при выполнении неравенств (2.3), к которым можно добавить еще следующие

$$\begin{aligned} \varphi_i(q_{ii} - q_{i2})(q_{ii} - q_{i1}) &> 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \varphi_{n+1} \left[\sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{j1}) \right] \sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{j1}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку на входе в каждый объем имеется только пассивное сопротивление, то неравенства (3.8) выполняются. Что касается выражения (3.6), то оно не является знакоопределенным. Однако в некоторой окрестности начала координат знак правой части выражения (3.7) определяется первой суммой, так как в силу неравенств (1.15) при удалении от начала координат первые $m + 1$ слагаемых правой части этого

выражения убывают быстрее, чем растет сумма $\sum_{j=1}^l \frac{dm_j v_j^2}{2}$. Это имеет место,

по крайней мере, в малой окрестности начала координат. Кроме того, наличие членов, определяющихся потерями на трение в объемах, частично (а при некоторых условиях и полностью) компенсирует рост членов последней суммы. Таким образом, если принять $T_2 + \Pi$ за функцию Ляпунова, то, как и раньше, будем иметь асимптотическую устойчивость. Область притяжения состояния равновесия может быть оценена с помощью найденной функции Ляпунова для конкретных значений параметров. Устойчивость «в целом» может быть гарантирована, если, кроме условий (2.3), выполняются еще следующие условия

$$\left[\varphi_i(q_{ii} - q_{i2}) - \frac{\rho}{2s_i^2}(q_{ii} - q_{i2})^2 \right] (q_{ii} - q_{i2}) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.9)$$

$$\left\{ \varphi_{n+1} \left[\sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{j1}) \right] - \frac{\rho}{2s^2} \left[\sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{j1}) \right]^2 \right\} \sum_{j=1}^n (q_{j2} - q_{j1}) \geq 0.$$

Если принять квадратичную аппроксимацию гидравлических характеристик $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$, т. е. считать, что во всем диапазоне изменений расхода справедлива формула Вейсбаха [9]

$$\varphi_i(Q_i) = \xi_i \frac{\rho Q_i^2}{2s_i^2} \operatorname{sgn} Q_i,$$

тогда вместо (3.9) можно получить неравенства

$$\xi_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \quad (3.10)$$

т. е. коэффициент сопротивления на входе в объем должен быть не менее единицы. Это условие является достаточным и довольно грубым, так как получено без учета влияния потерь по контуру циркуляции. Можно получить и более точные условия путем более строгого анализа правой части выражения (3.7).

Таким образом, учет влияния инерции жидкости в объемах и потерь на трение при изменении уровней не приводит к неустойчивости, и равновесный режим остается устойчивым, по крайней мере, «в малом», а для устойчивости «в целом» нужно дополнить полученные ранее достаточные условия неравенствами (3.10).

В заключение следует еще раз отметить, что в работе получены условия устойчивости для случая несжимаемой перекачиваемой жидкости и недеформируемых трубопроводов. В рамках принятой идеализации приближенный учет этих факторов возможен путем дополнительного введения в конечном числе точек контура некоторых объемов со свободным уровнем, что позволяет провести исследование предлагаемым в работе методом.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. В. Аронович, Н. А. Карцевелишили, Я. К. Любимцев, Гидравлический удар и уравнительные резервуары, изд. Наука, М., 1968.
- А. А. Дзидзигури, Т. И. Матикашвили, Неустойчивая работа вентиляторов и способы ее предупреждения, изд. Наука, М., 1965.
- Л. В. Смирнов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 8, 1188 (1970).
- Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, изд. Наука, М., 1966.
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1944.
- А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматиз, М., 1959.

7. Л. Л. Калишевский, С В Селиховкин, Теплоэнергетика, № 1, 69 (1967).
8. К. Пфлейдерер, Лопаточные машины для жидкости и газов, Машгиз, М., 1930.
9. Р. Р. Чугаев, Гидравлика, ГЭИ, М.—Л., 1963.
10. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, изд. Наука, М., 1960.
11. А. А. Космодемьянский, Курс теоретической механики, ч. II, изд. Просвещение, М., 1966.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 марта 1970 г.

INCOMPRESSIBLE LIQUID CIRCULATION EQUILIBRIUM STABILITY IN A MULTILOOP CLOSED SYSTEM WITH FREE LEVELS

L. V. Smirnov

The paper considers an incompressible liquid circulation system composed of some parallel loops with pumps and a common section, each loop and the common section having a free-level volume. A mathematic model is developed in the form of set of second kind Lagrangian equations. With the use of the Liapunov direct method the stability of circulation equilibrium is studied. The influence of variable masses in free-level volumes is estimated.

УДК 621.396 078.6

О ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЗАДЕРЖКОЙ БИНАРНОГО ПСЕВДОШУМОВОГО СИГНАЛА

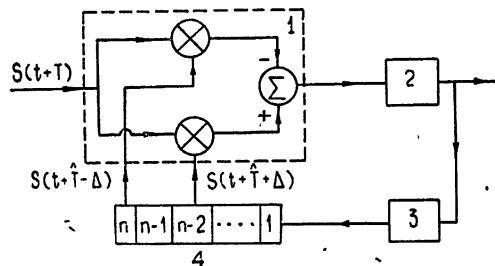
Л. Н. Белюстин, В. П. Пономаренко, В. Д. Шалфеев

Установлена динамика системы слежения за задержкой псевдошумового сигнала с помощью качественного исследования соответствующей кусочно-линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка

1. В современных системах космической радиосвязи в связи с требованиями высокоточного измерения параметров сигналов большое внимание уделяется проблеме использования сложных, в частности, псевдошумовых [1-3] сигналов. Для решения возникающей при этом задачи синхронизации псевдошумовых сигналов применяются системы, основанные на слежении за задержкой принимаемого сигнала [2-7]. Изучению динамики таких систем синхронизации посвящена данная работа.

Блок-схема простейшей системы слежения за задержкой (ССЗ) бинарного псевдошумового сигнала [5, 7], приведена на рис. 1. В ка-

Рис. 1. 1 — дискриминатор, 2 — фильтр, 3 — тактовый генератор, управляемый напряжением, 4 — n -разрядный сдвигающий регистр.



честве опорного псевдошумового сигнала здесь используется сигнал, сформированный на $(n-1)$ -ом отводе сдвигающего регистра (n — число ячеек регистра). На один из входов дискриминатора поступает непосредственно входной, принимаемый сигнал, имеющий некоторую задержку относительно опорного, а на два других входа подаются сигналы с n -го и $(n-2)$ -го отводов сдвигающего регистра, разделенные по времени на 2Δ (Δ — длительность одного элемента псевдошумового сигнала).

Уравнение такой ССЗ получено в [5] и может быть записано в операторном виде

$$p \frac{\Delta}{\Delta} - g_0 K(p) D (T - \hat{T}) = 0, \quad (1)$$

где T и \hat{T} — величины задержек входного и опорного сигналов соответственно, $K(p)$ ($p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициент передачи фильтра, g_0 — па-

метр, пропорциональный усилению в системе, $D(T - \hat{T})$ — дискриминаторная характеристика-зависимость выходного напряжения дискриминатора от разности времен запаздывания входного и опорного сигналов, нормированная так, что ее максимальное значение равно единице.

Характеристика $D(T - \hat{T})$ является периодической функцией $T - \hat{T}$ с периодом $M = \Delta(2^n - 1)$. В силу того, что псевдошумовые сигналы для устранения неоднозначности в определении задержки формируются так, что $M \gg \Delta$ [4, 5], достаточно рассмотреть уравнение (1) на одном периоде характеристики $D(T - \hat{T})$.

Оптимальным устройством для выделения видеосигнала с флюктуирующей скоростью изменения задержки, как показано в [3], является ССЗ с пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи обратной связи $K(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}$ (T_1 и T_2 — постоянные времени). Динамика такой системы ССЗ рассматривается в данной работе.

Вводя безразмерное время $\tau = t \sqrt{g_0/T_2}$, переменные и параметры $x = \frac{T - \hat{T}}{\Delta}$, $y = \frac{T}{\Delta}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{g_0 T_2}}$, $b = g_0 T_1$, $\beta = \frac{1}{g_0} \frac{dy}{dt}$ имеем вместо уравнения (1) систему

$$\frac{dx}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = \beta - D(x) - \lambda(1 + bD'(x))z. \quad (2)$$

Следуя [5], характеристика $D(x)$ принимается кусочно-линейной вида (рис. 2)

$$D(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -2, x \geq 2) \\ -(x+2) & (-2 \leq x \leq -1) \\ x & (-1 \leq x \leq 1) \\ -(x-2) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad (3)$$

и предполагается выполненным реальное условие постоянства скорости изменения задержки входного сигнала $\frac{dy}{dt} = \text{const}$.

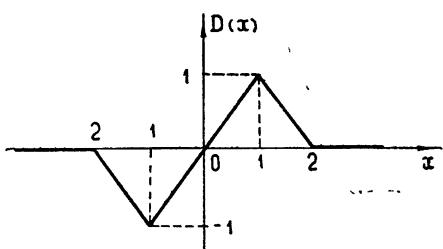


Рис. 2.

Впервые система уравнений (2), (3) исследовалась в [5, 8], где с помощью приближенных методов построены решения для ряда значений параметров. Ниже приводится качественное исследование системы (2) при всех значениях параметров.

При изучении системы (2), (3) достаточно рассмотреть значения параметра $\beta > 0$, так как случай $\beta < 0$ сводится к случаю $\beta > 0$ заменой

$x = -\bar{x}$. Параметры λ и b по физическому смыслу положительны.

При указанных предположениях система (2), (3) является кусочно-линейной на плоскости (x, z)

$$dx/d\tau = z, \quad dz/d\tau = \beta - \lambda z \quad (x < -2, x > 2), \quad (4a)$$

$$dx/d\tau = z, \quad dz/d\tau = \beta + 2 + x - \lambda(1-b)z \quad (-2 < x < -1), \quad (4a)$$

$$dx/d\tau = z, \quad dz/d\tau = \beta - x - \lambda(1+b)z \quad (-1 < x < 1), \quad (4b)$$

$$dx/d\tau = z, \quad dz/d\tau = \beta - 2 + x - \lambda(1-b)z \quad (1 < x < 2). \quad (4c)$$

На линиях склейки $x = -2, x = -1, x = 1, x = 2$ переменные x и z непрерывны, а производная $dz/d\tau$ терпит разрыв первого рода.

2. Исследование системы (4a)–(4c) сводится к изучению разбиения фазовой плоскости (x, z) на траектории, которое, как известно [9], определяется особыми траекториями: состояниями равновесия, предельными циклами и сепаратрисами седел.

Приведем сведения о главных изоклинах системы (4a)–(4c). Изоклиной вертикальных наклонов является ось $z = 0$, изоклиной горизонтальных наклонов—ломаная $z = \frac{\beta - D(x)}{\lambda(1 + bD'(x))}$, где $D(x)$ определена равенствами (3). В областях $x < -2$ и $x > 2$ фазовой плоскости изоклина горизонтальных наклонов есть прямая $z = \frac{\beta}{\lambda}$. Эта прямая является траекторией системы (4a), к которой приближаются все остальные траектории системы (4a).

В случае $\lambda = 0$ система (4a)–(4c) является консервативной с общим интегралом

$$z^2 = 2\beta x - 2 \int D(x) dx + C. \quad (5)$$

Координаты состояний равновесия определяются равенствами $x_1 = \beta$, $z_1 = 0$; $x_2 = 2 - \beta$, $z_2 = 0$. Характер состояний равновесия и расположение интегральных кривых устанавливается с помощью изучения интеграла (5) [9]. Состояние равновесия (x_1, z_1) —центр, (x_2, z_2) —седло. Расположение фазовых траекторий для различных значений β ($\beta \leq 1$, $\beta > 1$) представлено на рис. 3 а, б.

В случае $\lambda \neq 0$ система (4a)–(4c) неконсервативная.

Состояния равновесия. При значениях параметров β , λ , удовлетворяющих неравенствам $0 < \beta < 1$, $\lambda > 0$ склеенная система (4a)–(4c) имеет два состояния равновесия $M_1(\beta, 0)$ —устойчивый узел или фокус (узел при $\lambda(1+b) > 2$, фокус при $\lambda(1+b) < 2$) и $M_2(2-\beta, 0)$ —седло. Сепаратрисы седла M_2 в части фазовой плоскости $1 < x < 2$ являются прямыми, уравнения которых имеют вид

$$z = \left[-\frac{\lambda(1-b)}{2} \pm \left(\frac{\lambda^2(1-b)^2}{4} + 1 \right)^{1/2} \right] (x - 2 + \beta). \quad (6)$$

При $\beta = 0$ имеется устойчивое состояние равновесия $M_0(0, 0)$ в начале координат, а прямая $z = 0$ при $x < -2$ и $x > 2$ является особой линией, все точки которой есть устойчивые состояния равновесия. При $\beta > 1$ состояний равновесия нет.

Предельные циклы. Вопрос о существовании предельных циклов решаем с помощью прямого метода Ляпунова [10]. Переходя в (2) к переменным Льенара с помощью замены $\xi = x - \beta$, $\eta = \dot{x} + \int_0^\xi \lambda[1 + bD'(\xi + \beta)] d\xi$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta - \lambda\{\xi + b[D(\xi + \beta) - \beta]\}, \\ \dot{\eta} &= \beta - D(\xi + \beta). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) имеет устойчивое состояние равновесия $(0, 0)$ и седловое $[2(1 - \beta), 2\lambda(1 - \beta)]$. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{2} - \int_0^\xi [\beta - D(\xi + \beta)] d\xi. \quad (8)$$

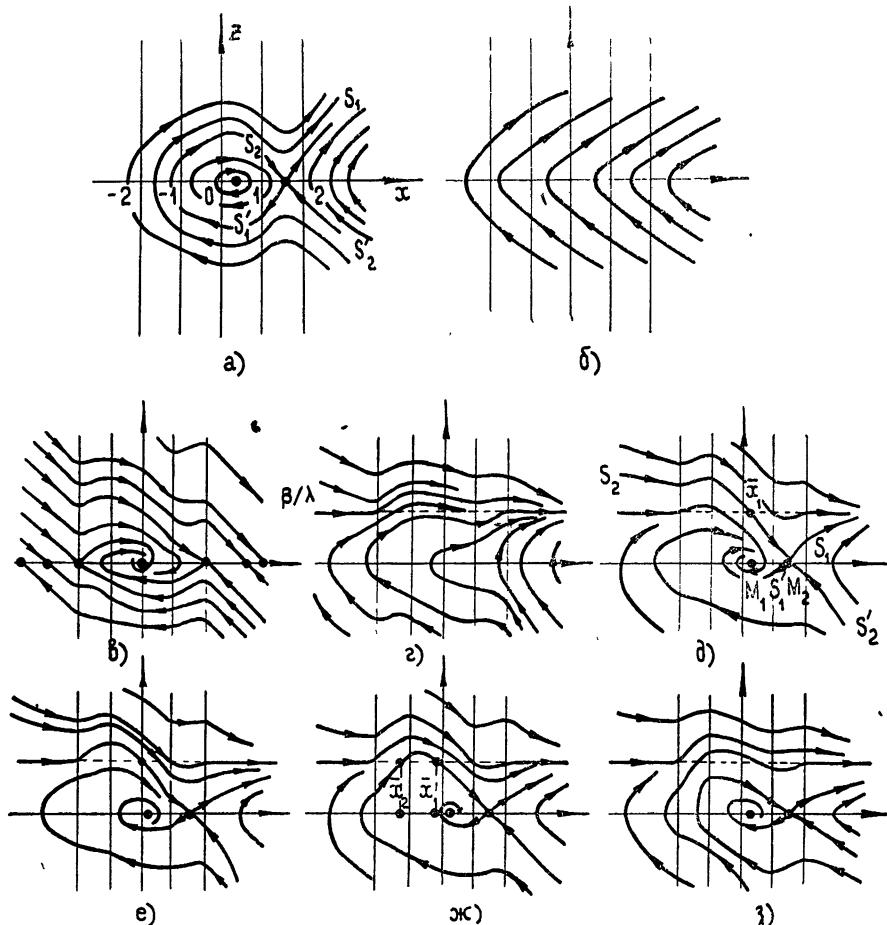


Рис. 3.

Производная $\frac{dV}{d\tau}$ в силу (7) имеет вид

$$\frac{dV}{d\tau} = \lambda [\beta - D(\xi + \beta)] (\xi + b[D(\xi + \beta) - \beta]). \quad (9)$$

При $\beta > 0$ в полосе $-\infty < \xi < 2(1 - \beta)$, а при $\beta = 0$ в полосе $-2 < \xi < 2$ производная $\frac{dV}{d\tau} < 0$. Функция V при $-\infty < \xi < 2(1 - \beta)$ положительная.

В состоянии равновесия $(0, 0)$ функции V и $\frac{dV}{d\tau}$ обращаются в нуль.

Следовательно, [10] система (2) не имеет предельных циклов при $\beta > 0$ в области $-\infty < x < 2 - \beta$, а при $\beta = 0$ — в области $-2 < x < 2$ фазо-

вой плоскости (x, z) . В силу расположения сепаратрис седла $M_2(2 - \beta, 0)$ в области $2 - \beta < x < 2$ (см. (6)) и изоклины горизонтальных наклонов в области $x > 2 - \beta$ предельный цикл не может проходить и в области $x > 2 - \beta$. Таким образом, рассматриваемая система не имеет предельных циклов на всей фазовой плоскости (x, z) ни при каких значениях параметров β, λ, b .

Сепаратрисы седла M_2 . Сепаратрисы седла в области $1 < x < 2$ фазовой плоскости (x, z) определены уравнениями (6). Расположение сепаратрис в остальных областях фазовой плоскости устанавливаем, пользуясь полученными сведениями об устойчивости состояния равновесия M_1 , отсутствии предельных циклов и расположении главных изоклин системы (4 а)–(4 г). Сепаратриса S_1 (рис. 3) с ростом времени τ приближается к линии $z = \frac{\beta}{\lambda}$ в области $x > 2$, оставаясь целиком

в полуплоскости $z > 0$. Сепаратриса S'_1 с ростом τ приближается к устойчивому состоянию равновесия M_1 . Сепаратриса S'_2 , имея отрицательный наклон, целиком расположена в области $x > 2 - \beta, z < 0$. Сепаратриса S_2 с убыванием τ , меняя знак наклона в соответствии с расположением главных изоклин, либо целиком остается в полуплоскости $z > 0$, либо переходит в полуплоскость $z < 0$.

В силу своего расположения могут сливаться только сепаратрисы седла S'_1 и S_2 . Система (2) имеет петлю из сепаратрис седла S'_1 и S_2 в консервативном случае ($\lambda = 0, 0 < \beta < 1, b$ – любые, рис. 3 а). Для всех $\beta, \lambda \neq 0$ и $b \leq 1$ петли быть не может в силу того, что при возрастании параметра λ ($\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$) (β и b фиксированы) на всей фазовой плоскости имеет место поворот векторного поля системы (2) по часовой стрелке

$$R = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{\lambda=\lambda_2} - \left(\frac{dz}{dx} \right)_{\lambda=\lambda_1} = -(\lambda_2 - \lambda_1)(1 + bD'(x)) < 0$$

(кроме областей $-2 < x < -1$ и $1 < x < 2$ при $b = 1$, где $R = 0$). Для $\lambda \neq 0$ и $b > 1$ в силу доказанного выше отсутствия предельных циклов следует отсутствие петли сепаратрисы седла, из которой может появиться предельный цикл.

На рис. 3 в–3 з представлены различные в зависимости от параметра β случаи расположения траекторий на фазовой плоскости: в) для $\beta = 0$; г) для $\beta > 1$; д), е), ж), з) для $0 < \beta < 1$.

Рассмотрим более подробно расположение сепаратрисы S_2 относительно линии $z = \frac{\beta}{\lambda}, x \leq -2^*$.

Если сепаратриса S_2 расположена целиком в области $z > 0$ и имеет одно пересечение с линией $x = -2$ в точке с ординатой $z > \frac{\beta}{\lambda}$ (рис. 3 д),

то внутри полосы $-2 \leq x \leq 2$ на прямой $z = \frac{\beta}{\lambda}$ существует интервал начальных значений, примыкающий к точке $x = -2$, такой, что все траектории, начинающиеся в начальный момент времени на линии начальных значений, $z = \frac{\beta}{\lambda}$ в точках этого интервала, с ростом времени приближаются к устойчивому состоянию равновесия M_1 .

* Определение взаимного расположения сепаратрисы S_2 и линии $z = \frac{\beta}{\lambda}$, $x \leq -2$ важно в настоящей задаче в связи с тем, что в реальных ССЗ наибольший интерес представляют такие начальные условия [5] когда $\left(\frac{dx}{d\tau} \right)_{\text{нач}} = \frac{\beta}{\lambda}$.

Если сепаратриса S_2 имеет два пересечения с линией $x = -2$ (одно против $z > 0$, другое при $z < 0$) (рис. 3 ж) или вообще не имеет пересечений с линией $x = -2$ (рис. 3 з), то внутри полосы $-2 \leq x \leq 2$ на линии $z = \frac{\beta}{\lambda}$ либо вообще не существует интервала начальных значений с указанными выше свойствами, либо если он существует, то ограничен значениями \bar{x}_1 и \bar{x}_2 (\bar{x}_1, \bar{x}_2 — абсциссы точек пересечения сепаратрисы S_2 с линией $z = \frac{\beta}{\lambda}$), и в силу того, что $\bar{x}_2 > -2$, этот интервал не примыкает к точке $x = -2$. Изображающая точка, начав движение с линии $z = \frac{\beta}{\lambda}$ слева от точки $(\bar{x}_2, \frac{\beta}{\lambda})$ никогда не придет с ростом τ в достаточно малую окрестность состояния равновесия M_1 .

Из сказанного следует, что в рассматриваемой задаче важно установить значения параметров, при которых имеет место некоторый граничный случай, когда сепаратриса S_2 в области $-\infty < x < -2$ совпадает с линией $z = \frac{\beta}{\lambda}$ (рис. 3 е). Для определения этих значений параметров осуществлялось приближенное построение сепаратрисы S_1 , с помощью ЭВМ. Для фиксированных значений параметров $\lambda = \lambda^*$ и $b = b^*$ устанавливалось существование значения параметров $\beta = \beta_1$, при котором сепаратриса S_2 расположена так, как показано на рис. 3 д, и $\beta = \beta_2$, при котором сепаратриса S_2 расположена так, как на рис. 3 ж или 3 з. Отсюда, в силу однозначности поворота векторного поля системы (2) с ростом β ($\beta_2 > \beta_1$) в области $z > 0$

$$R = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{\beta=\beta_2} - \left(\frac{dz}{dx} \right)_{\beta=\beta_1} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{z} > 0$$

следует, что при значениях $\lambda = \lambda^*$, $b = b^*$ существует единственное значение β^* ($\beta_1 < \beta^* < \beta_2$), для которого имеет место граничное расположение сепаратрисы S_2 (рис. 3 е). Значения $\beta = \beta^*$ определены приближенно с помощью ЭВМ*. Полученные кривые, соответствующие граничному расположению сепаратрисы S_2 , представлены на рис. 4

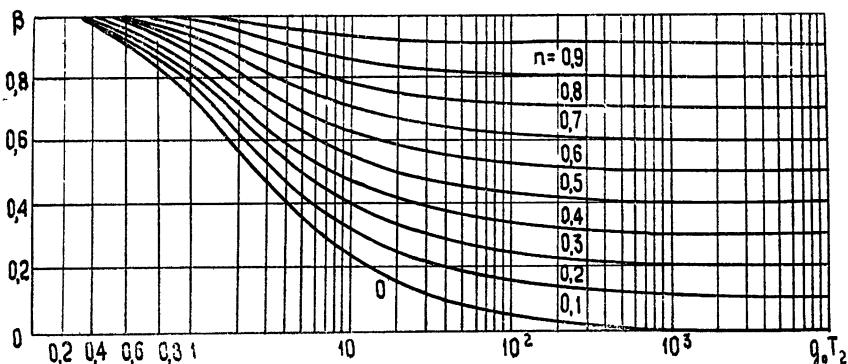


Рис. 4.

* Счет по приближенному построению сепаратрисы спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭЦВМ БЭСМ-3М.

в координатах $\left(\beta; g_0 T_2 = \frac{1}{\lambda^2}\right)$ при фиксированных $n = \frac{T_1}{T_2} = b\lambda^{2*}$.

3. Проведенное исследование уравнений ССЗ позволяет сделать выводы о динамике системы в зависимости от параметров и начальных условий. Режиму синхронизма в системе слежения соответствует на фазовой плоскости устойчивое состояние равновесия; при этом частота тактового генератора, управляемого напряжением, равна тактовой частоте входного сигнала, а разность задержек $T - \hat{T}$ входного и опорного сигналов равна $\beta\Delta$. В силу отсутствия предельных циклов системы (2) в рассматриваемой ССЗ невозможен стационарный режим биений около постоянной разности по задержке и нулевой разности тактовых частот.

Установление режима синхронизма невозможно при значениях параметра $\beta > 1$ ни при каких начальных условиях. При $0 < \beta < 1$ фазовая плоскость разбивается сепаратрисами S_2 и S'_2 седла M_2 на область притяжения к состоянию равновесия M_1 и область притяжения к линии $z = \frac{\beta}{\lambda}, x > 2$. Для начальных условий, принадлежащих первой из областей, имеет место установление режима синхронизма, для начальных условий, принадлежащих второй области, синхронизация невозможна.

На практике перед вхождением в синхронизм в системах слежения предусматривается режим поиска, по окончании которого ССЗ начинает работать со следующими начальными условиями [5, 7]: разность по задержке $x \leq -2$, а производная $\frac{dx}{d\tau}$ равна значению скорости поиска

$\frac{\beta}{\lambda}$: При этих начальных условиях режим синхронизма устанавливается только для точек плоскости параметров $(\beta_0, g_0 T_2)$, принадлежащих области под граничной кривой рис. 4. Для остальных значений параметров при рассматриваемых начальных условиях синхронизация входного и опорного сигналов невозможна. Если реализуются начальные условия, при которых x принимает произвольное значение, а $\frac{dx}{d\tau} = \frac{\beta}{\lambda}$, то всегда существуют такие начальные значения x , для которых синхронизация невозможна. Интервалы значений x , при которых устанавливается синхронизация, определяются пересечениями сепаратрисы S_2 с прямой $z = \frac{\beta}{\lambda}$ на фазовой плоскости (x, z) . Величины этих интервалов уменьшаются при возрастании параметра β .

ЛИТЕРАТУРА

- Г. И. Тузов, Выделение и обработка информации в допплеровских системах, изд. Сов. радио, М., 1967
- Цифровые методы в космической связи, под ред. С Голомба, изд. Связь, М., 1969.
- А. И. Алексеев, А Г. Шереметьев, Г И Тузов, Б И Глазов, Теория и применение псевдослучайных сигналов, изд. Наука, М., 1969.

* Кривые рис. 4 для системы (4) не являются бифуркационными: при переходе через значения параметров, соответствующие этим кривым, качественная структура разбиения фазовой плоскости на траектории рассматриваемой системы не изменяется. Однако, каждая кривая при заданном n разбивает плоскость параметров $(\beta, g_0 T_2)$ на области, для точек которых имеет место различное расположение фазовых траекторий, близких к траекториям с начальными значениями $x = -2, z = \frac{\beta}{\lambda}$.

4. J. J. Spilker, D. T. Magill, Proc. of the IRE, 49, № 9, 1961.
5. J. J. Spilker, IEEE Trans. on Space Electron and Telemetry, SET-9, № 1, 1963.
6. Дж Спрингет, Сб Статистическая теория связи и ее приложение, под ред. А В. Балакришнана, изд. Мир. М., 1967.
7. R. B. Ward, IEEE Trans. on Space Electron and Telemetry, SET-10, № 2, 1964.
8. А. М. Бонч-Бруевич, В. И. Журавлев, Ю. П. Галкин, Тр Московского электротехнического института связи, вып 1, М., 1969
9. А. А. Андронов, А. А. Витт, С Э Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959
10. Е А Барбашин, Введение в теорию устойчивости, изд Наука, М., 1967

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 апреля 1970 г.

ON DYNAMICS OF FOLLOW-UP SYSTEM FOR BINARY PSEUDONOISE SIGNAL DELAY

L. N. Belustina, V. P. Ponomarenko, V. D. Shalfeev

Dynamics of a follow-up system for pseudonoise signal delay is found by a qualitative analysis of a corresponding piecewise linear system of second order differential equations.

УДК 621.396 078.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФАП В РЕЖИМЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПОИСКА ПО ЧАСТОТЕ

B. H. Белых, T. Г. Белых

Исследуется динамика астатической системы ФАП, на управляющий элемент (УЭ) которой подается линейно-меняющееся напряжение поиска. Задача сводится к исследованию нелинейной динамической системы 3-го порядка, периодической по одной переменной, с малым параметром при старшей производной. Проведено качественное исследование системы на устойчивой цилиндрической поверхности медленных движений, на основании которого дана вероятностная характеристика захвата.

Дифференциальное уравнение поисковой системы ФАП в операторной форме ($p \equiv d/dt$) имеет вид [¹⁻³]

$$p\varphi + \Omega K(p) F(\varphi) + S U_n(t) = \Delta \omega_n, \quad (1)$$

где φ — разность фаз сигналов, поступающих на фазовый детектор (ФД), $F(\varphi)$ — нормированная характеристика ФД, $K(p)$ — коэффициент передачи ФНЧ, S — крутизна характеристики УЭ, Ω — максимальная расстройка, создаваемая ФД, $\Delta \omega_n$ — начальная расстройка, $U_n(t)$ — напряжение поиска.

Принимая $U_n(t) = -bt$, $K(p) = (T_0 p + 1)[T_1 p(1 + T_2 p)]^{-1}$, вместо (1) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = \beta - F(\varphi) - \alpha F'(\varphi)y - z \equiv Z(\varphi, y, z), \quad (2)$$

где $\beta = Sbt_1\Omega^{-1}$ — относительная скорость поиска по частоте, $\alpha = T_0\Omega^{1/2}T_1^{-1/2}$ — параметр, характеризующий затухание,

$\mu = T_2\Omega^{1/2}T_1^{-1/2}$. Точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = t\Omega^{1/2}T_1^{-1/2}$.

При $\mu = 0$ и при полигональной аппроксимации $F(\varphi)$ система (2), в связи с исследованием поисковой системы ФАП, изучалась в [1], где получена некоторая оценка вероятности захвата.

При $\mu = 0$, $\beta = 0$ и при синусоидальной аппроксимации $F(\varphi)$ система (2), в связи с исследованием динамики астатической системы ФАП (без поиска), изучена в [4], где установлена асимптотическая устойчивость системы на всем фазовом цилиндре.

В данной работе система (2) исследуется при $\mu \ll 1$ ($T_2 \ll \sqrt{T_1\Omega^{-1}}$), $\alpha > 0$ при любых β , при синусоидальной и полигональной аппроксимациях функции $F(\varphi)$. В силу инвариантности системы (2) относительно замены $\beta = -\tilde{\beta}$, $\varphi = -\tilde{\varphi}$, $y = -\tilde{y}$, $z = -\tilde{z}$ достаточно рассмотреть $\beta \geq 0$.

В рассматриваемом случае исследование системы (2) сводится к изучению в фазовом пространстве быстрых и медленных движений [⁵⁻⁸]. Поверхность медленных движений $Z(\varphi, y, z) = 0$ устойчива по отношению к быстрым движениям, так как $Z_z' = -1 < 0$, а траектории

на поверхности $Z = 0$ определяются системой с цилиндрической фазовой поверхностью

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \beta - F(\varphi) - \alpha F'(\varphi)y. \quad (3)$$

Качественную структуру разбиения фазового цилиндра на траектории определяют [5] особые траектории: состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы первого и второго рода.

1. Рассмотрим случай синусоидальной аппроксимации характеристики ФД. Система (3) при этом имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y \equiv P(\varphi, y), \\ \dot{y} &= \beta - \sin \varphi - \alpha \cos \varphi y \equiv Q(\varphi, y). \end{aligned} \quad (4)$$

а) *Состояния равновесия и предельные циклы первого рода.* При $\beta < 1$ состояния равновесия системы (4): $O_1(\varphi_1 = \arcsin \beta, y_1 = 0)$ — устойчивый фокус (узел) при $\delta = \frac{\alpha^2}{4} \sqrt{1 - \beta^2} - 1 > 0$ ($\delta < 0$), $O_2(\pi - \varphi_1, 0)$ — седло. При $\beta = 1$ O_1 и O_2 сливаются, образуя сложное состояние равновесия типа седло-узел. При $\beta > 1$ состояний равновесия нет. Покажем, что система (4) предельных циклов первого рода не имеет. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} (y + \alpha \sin \varphi - \alpha \beta)^2 - \beta \varphi - \cos \varphi + h_1, \quad (5)$$

определенную в области $V(\varphi, y) \leq h_2$ фазового цилиндра, где

$$h_1 = \beta \arcsin \beta + \sqrt{1 - \beta^2}, \quad h_2 = 2\sqrt{1 - \beta^2} + 2\beta \arcsin \beta - \beta \pi.$$

Производная функция (5) в силу системы (4) равна $\frac{dV}{d\tau} = -\alpha(\beta - \sin \varphi)^2 \leq 0$. Следовательно, в силу известной теоремы (см., например, [9], стр. 25) состояние равновесия O_1 асимптотически устойчиво в области $V(\varphi, y) < h_2$. Откуда, учитывая, что O_2 лежит на кривой $V(\varphi, y) = h_2$, получаем отсутствие предельных циклов первого рода.

При $\beta = 0$ с помощью функции (5) аналогично [4] устанавливается асимптотическая устойчивость состояния равновесия O_1 на всем фазовом цилиндре.

б) *Сепаратрисы седел.* Обозначим через $y_+(\varphi, \beta)$ и $y_-(\varphi, \beta)$ ординаты частей соответственно входящей и выходящей сепаратрис от седла O_2 до первого пересечения с осью $\varphi = 0$ при $y > 0$, а через $\tilde{y}_+(\varphi, \beta)$ и $\tilde{y}_-(\varphi, \beta)$ — при $y < 0$. Для определения взаимного расположения сепаратрис седла O_2 в зависимости от параметра β в областях $y > 0$ и $y < 0$ введем соответственно функции $\Delta(\beta) = u_+(\beta) - y_-(0, \beta)$ и $\tilde{\Delta}(\beta) = \tilde{y}_+(0, \beta) - u_-(\beta)$, где

$$u_+(\beta) = \begin{cases} y_+(0, \beta), & \text{если } y_+(0, \beta) > 0; \\ 0, & \text{если } y_+(0, \beta) \text{ не существует;} \end{cases}$$

$$u_-(\beta) = \begin{cases} \tilde{y}_-(0, \beta), & \text{если } \tilde{y}_-(0, \beta) < 0; \\ 0, & \text{если } \tilde{y}_-(0, \beta) \text{ не существует;} \end{cases}$$

— непрерывные и определенные при всех $\beta \in [0, 1]$.

Учитывая зависимость векторного поля системы (4) от параметра β , устанавливаем, что

$$\begin{aligned} [\Delta(\beta_2) - \Delta(\beta_1)] (\beta_2 - \beta_1) &< 0, \\ [\tilde{\Delta}(\beta_2) - \tilde{\Delta}(\beta_1)] (\beta_2 - \beta_1) &< 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из асимптотической устойчивости в целом системы (4) при $\beta = 0$ следует, что

$$\Delta(0) > 0, \quad \tilde{\Delta}(0) < 0. \quad (7)$$

Из вторых неравенств в (6) и (7) получаем, что при $\beta > 0$ выполняется неравенство $\tilde{\Delta}(\beta) < 0$. Следовательно, при $\beta \geq 0$ в области $y < 0$ входящая сепаратриса седла проходит ниже выходящей.

Для определения взаимного расположения сепаратрис седла O_2 в области $y > 0$ при $\beta > 0$ воспользуемся системой сравнения [10]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y \equiv P_1(\varphi, y), \\ \dot{y} &= \beta - \sin \varphi - \alpha y \equiv Q_1(\varphi, y), \end{aligned} \quad (8)$$

описывающей движение маятника в вязкой среде [5]. Устойчивой петле сепаратрисы второго рода системы (8) на плоскости α, β соответствует кривая $\beta = \beta_0(\alpha)$ [5, 11] (см. рис. 1, кривая 1) численно с достаточной точностью построенная в [12]. При значениях β из области параметров, определяемых неравенствами $1 > \beta > \beta_0(\alpha)$, $\alpha < \alpha_0(\beta_0(\alpha) = 1)$, соответствующая системе (8) функция $\Delta_0(\beta)$ отрицательна $\Delta_0(\beta) < 0$ ($\Delta_0(\beta_0(\alpha)) = 0$). Определяя разность наклонов векторных полей систем (4) и (8) $R = Q P^{-1} - Q_1 P_1^{-1} = \alpha(1 - \cos \varphi) \geq 0$, получаем, что при $\beta > 0$ выполняется неравенство $\Delta_0(\beta) > \Delta(\beta)$. Следовательно, при $1 > \beta \geq \beta_0(\alpha)$, $\alpha < \alpha_0$ имеет место неравенство $\Delta(\beta) < 0$. Кроме того, так как $R \geq 0$, при $\beta = 1$ и $\alpha > 0$ выходящая сепаратриса седло-узла проходит выше входящей. Откуда, учитывая первые неравенства в (6) и (7), получаем, что при любом $\infty > \alpha > 0$ существует единственное значение $\beta^*(\alpha)$, такое, что $\Delta(\beta^*(\alpha)) = 0$, $\beta_0(\alpha) > \beta^*(\alpha) > 0$ при $\alpha < \alpha_0$; $1 > \beta^*(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$, т. е. при $\beta = \beta^*(\alpha)$ в области $y > 0$ сепаратриса системы (4) идет из седла в то же седло, охватывая цилиндр, образуя петлю сепаратрисы второго рода. Из полученных неравенств следует, что $\beta^*(0) = 0$. Таким образом, для любых $\alpha > 0$ доказано существование в плоскости параметров α, β бифуркационной кривой $\beta = \beta^*(\alpha)$, соответствующей петле сепаратрисы седла второго рода. Кривая $\beta = \beta^*(\alpha)$ определена численно (кривая 2 на рис. 1) при помощи построения приближенными методами [13, 14] сепаратрис седла близких грубых систем (4). Седловая величина [5, 15] седла O_2 при $\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 1$ положительна

$$\sigma = P_\varphi'(\varphi_2, 0) + Q_y'(\varphi_2, 0) = \alpha \sqrt{1 - \beta^2} > 0. \quad (9)$$

Следовательно, петля сепаратрисы неустойчива и от нее может родиться единственный неустойчивый предельный цикл второго рода. В силу

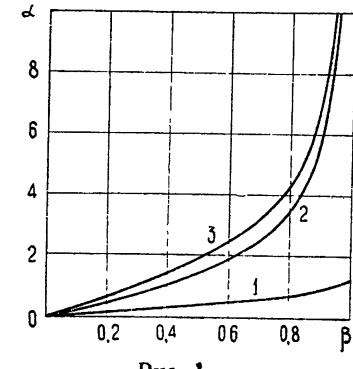


Рис. 1

(7) неустойчивый предельный цикл второго рода рождается с уменьшением β при прохождении бифуркационного значения $\beta = \beta^*(\alpha)$.

в) *Предельные циклы второго рода.* Покажем, что система (4) не может иметь более одного предельного цикла второго рода. Для этого применим критерий Бендиксона — Дюлака на цилиндре [5]. При $y \neq 0$ выберем функцию $B(\varphi, y) = (\beta - \sin \varphi)y^{-1} - \alpha^{-1}$. Тогда величина $D = \frac{\partial}{\partial \varphi}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ для системы (4) существует при $y \neq 0$ и имеет вид

$$D = -(\beta - \sin \varphi)^2 y^{-2} < 0. \quad (10)$$

Так как система (4) не может иметь предельных циклов, пересекающих прямую $y = 0$, неравенство (10) устанавливает единственность предельного цикла второго рода, целиком расположенного в верхней или нижней части цилиндра, если такой существует.

Система (4) при $\beta \geq 0$ в области $y < 0$ не имеет предельных циклов второго рода. Действительно, сравнивая наклоны векторных полей системы (4) в области $y < 0$ при $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ ($\beta_2 > \beta_1$) [10], имеем $QP^{-1}|_{\beta=\beta_2} < QP^{-1}|_{\beta=\beta_1}$. Откуда, учитывая расположение интегральных кривых при $\beta = 0$, устанавливаем отсутствие предельных циклов второго рода в области $y < 0$.

Предполагая, что система (4) при $\beta \geq 1$ в области $y > 0$ имеет предельный цикл второго рода $y = y_0(\varphi)$ и интегрируя систему (4) по $y_0(\varphi)$ $I = y_0(\varphi_0 + 2\pi) - y_0(\varphi_0) = 0$, получаем противоречие, так как при этом

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} y_0^{-1}(\varphi) (\beta - \sin \varphi) d\varphi > 0. \quad (11)$$

Следовательно, при $\beta \geq 1$ система (4) не имеет предельных циклов второго рода.

Рассмотрим случай $\alpha \rightarrow \infty$. При помощи замены $y = \alpha x$, $\bar{t} = y\tau$, $\varepsilon_1 = \alpha^{-2}$ систему (4) представим в виде

$$\dot{\varphi} = 1, \dot{x} = -\cos \varphi + \varepsilon_1 \left(\frac{\beta - \sin \varphi}{x} \right). \quad (12)$$

Согласно [15, 16] значения h_1 , определяющие замкнутые кривые консервативной системы ($\varepsilon_1 = 0$) $x + \sin \varphi = h_1$, от которых у системы (12) при $\varepsilon_1 \neq 0$ рождаются предельные циклы второго рода, определяются из уравнения $\Psi(h) = 2\pi[1 - (h - \beta)(h^2 - 1)^{-1/2}] = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $h_1 = \frac{1+\beta^2}{2\beta}$, который при $0 < \beta < 1$ определяет рождение единственного предельного цикла второго рода, неустойчивого, так как $\Psi'(h_1) > 0$. Следовательно, система (4) при всех $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha^{-2} > 0$, но достаточно малых, имеет единственный неустойчивый предельный цикл второго рода, близкий к кривой $y = \alpha(h_1 - \sin \varphi)$. Отсюда заключаем, что бифуркационная кривая $\beta = \beta^*(\alpha)$ удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \beta^*(\alpha) = 1$.

Используя (9) — (11), устанавливаем, что система (4) при $\beta^*(\alpha) < \beta < 1$ не имеет предельных циклов второго рода, а при $0 < \beta < \beta^*(\alpha)$ имеет единственный неустойчивый предельный цикл второго рода, исчезающий в бесконечности при $\beta = 0$.

Все возможные случаи разбиения фазового цилиндра на траектории системы (4) при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ представлены на рис. 2.

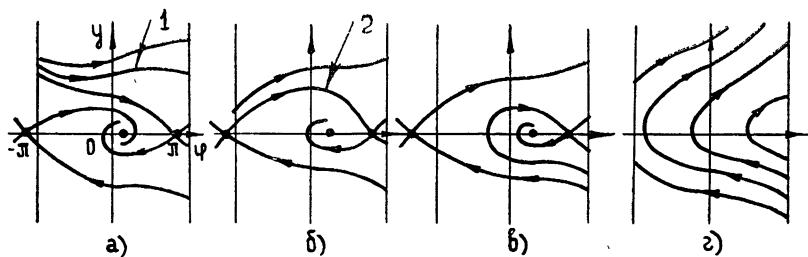


Рис. 2. а) $0 < \beta < \beta^*(\alpha)$; б) $\beta = \beta^*(\alpha)$; в) $\beta^*(\alpha) < \beta < 1$; г) $\beta > 1$
(1—неустойчивый цикл, 2—неустойчивая петля)

2. В случае полигональной аппроксимации характеристики ФД

$$F(\varphi) = \begin{cases} 2/\pi\varphi, & \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], \\ 2 - 2/\pi\varphi, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases} \quad (13)$$

система (3) сводится к частному случаю системы, рассмотренной Губарь (см. [17] при $h_2 = h_1$, $h_1 > 0$, $a > 0$). Из работы [17] следует, что система (3) в данном случае имеет структуру разбиения фазового цилиндра на траектории, топологически эквивалентную рассмотренной структуре системы (4). Кривая, соответствующая неустойчивой петле сепаратрисы второго рода в данном случае определяется равенством*

$$\ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \begin{cases} \alpha c^{-1/2} \operatorname{arctg} [\sigma^{-2} (cd)^{1/2}] & \text{при } c > 0, \\ \alpha (-c)^{-1/2} \operatorname{arctgh} [\alpha^{-2} (-cd)^{1/2}] & \text{при } c < 0, \\ \alpha^{-1} d^{1/2} = \sqrt{2} & \text{при } c = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $c = 2\pi - \alpha^2$, $d = 2\pi + \alpha^2$ и представлена на рис. 1 (кривая 3).

Полученное разбиение на траектории устойчивой поверхности «медленных» движений $Z(\varphi, y, z) = 0$, непрерывной и однозначной по z при $F(\varphi) = \sin \varphi$ и имеющей конечные разрывы при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ в случае (13), при достаточно малых $\mu > 0$ определяет [7, 8] фазовую картину системы (2) в пространстве φ, y, z . Система (2) при этом при всех $\beta^*(\alpha) < \beta < 1$ имеет устойчивое состояние равновесия, а при $0 < \beta < \beta^*(\alpha)$ — устойчивое состояние равновесия и неустойчивый предельный цикл второго рода, расположенные вблизи поверхности $Z(\varphi, y, z) = 0$.

На основании проведенного качественного исследования заключаем, что при $\mu = 0$ и $\mu > 0$, но достаточно малых, не существует таких значений параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$, при которых система (2) асимптотически устойчива. Следовательно, область (полоса) захвата у рассматриваемой поисковой системы ФАП отсутствует и установление синхронизма зависит от случайных начальных условий. Дадим вероятностную характеристику захвата.

Вероятность захвата. Пусть $W(\varphi, y)$ есть функция распределения случайных начальных условий, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} W(\varphi, y) d\varphi dy = 1$. Пусть G_+ — область притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 . Тогда вероятность захвата определяется выражением $p_3 = \int_{G_+} \int_0^{2\pi} W(\varphi, y) d\varphi dy$.

Согласно проведенному качественному исследованию область G_+ при $0 < \beta < \beta^*(\alpha)$ определяется неустойчивым предельным циклом второго

* В работе [1] методом припасовывания получена часть бифуркационной кривой (14) при $c > 0$.

рода, при $\beta^*(\alpha) < \beta < 1$ — входящими сепаратрисами седла, а при $\beta > 1$ отсутствует (см. рис. 2).

Если $W(\varphi, y)$ — постоянна: $W(\varphi, y) = W_0$ при $0 < y < \max y^*(\varphi) = a(\alpha, \beta)$, где $y^*(\varphi)$ — решение, соответствующее неустойчивому предельному циклу второго рода, то при $0 < \beta < \beta^*(\alpha)$ вероятность захвата определяется формулой

$$p_3 = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} W(\varphi, y) d\varphi dy + W_0 S(\alpha, \beta),$$

$$\text{где } S(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} y^*(\varphi) d\varphi.$$

Сечения поверхности $S(\alpha, \beta)$ при некоторых $\alpha = \text{const}$ построены численно для системы (4) и представлены на рис. 3.

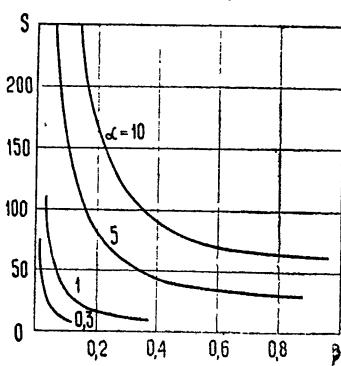


Рис. 3

Кривые $S(\alpha, \beta)|_{\alpha=\text{const}}$, представленные на рис. 3, могут быть с точностью до 1% аппроксимированы функцией $\tilde{S}(\alpha, \beta) = \pi \frac{\alpha}{\beta} (1 + \beta^2)$. Значения $a(\alpha, \beta)$ для тех же значений параметров, полученные численно, с точностью до процента аппроксимируются функцией $\tilde{a}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{2\beta} (1 + \beta^2)$. Функции $\tilde{S}(\alpha, \beta)$ и $\tilde{a}(\alpha, \beta)$ получены из рассмотрения порождающего решения $y = a(h_1 - \sin \varphi)$.

Авторы благодарны Л. Н. Белюстиной за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Никитин, Радиотехника, 8, № 6, 1965.
2. В. В. Шахгильдян, В. А. Власов, Тр. МЭИС, изд. Связь, М., 1969.
3. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
4. Ю. Н. Бакаев, Радиотехника и электроника, 1963, 8, 3.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 102, № 5, 889 (1955).
7. Д. В. Аносов, Мат. сб., 50, № 3, 299 (1960).
8. Ю. И. Неймарк, Тр. II Всес. съезда по теории и прикладн. механике, вып. 2, изд. Наука, М., 1965.
9. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, изд. Наука, М., 1967.
10. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 2, 118 (1958).
11. Т. Трикоми Ann. della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 2, 2 (1933).
12. А. Гигер, Zs. f. angewandte Math. und Phys., 7, 121 (1956).
13. Е. А. Андронов-Леонович, Л. Н. Белюстина, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, 1963.
14. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 639 (1959).
15. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
16. Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 4, № 9 (1934).
17. Н. А. Губарь, ПММ, 25, № 6, 1011 (1961).

DYNAMIC ANALYSIS OF ASTATIC PLL SYSTEM IN MODE
OF CONTINUOUS FREQUENCY SEARCH

V. N. Belykh, T. G. Belykh

Dynamics is studied of an astatic system of PLL the control element of which is fed with linearly varying search voltage. The problem reduces to an analysis of a third order linear dynamic system periodic by one variable and with a small parameter at the highest derivative. A qualitative analysis of the system is carried out on a stable cylindric surface of slow motions and on the basis of this analysis a probabilistic characteristic of entrainment is presented.

УДК 621.396.078.6

ОБ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

С. Г. Санфиров

Рассматривается метод исследования систем импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) на примере схемы импульсно-фазового умножителя частоты. Излагается способ построения переходных процессов и даются формулы для отыскания необходимых параметров.

В работе [5] рассматривается метод исследования непрерывных систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), основанный на представлении их в виде нелинейных систем (с нелинейностью типа «симметричный меандр» и реле), линейная часть которых описывается дифференциальными уравнениями с периодически меняющимися коэффициентами. Метод оказывается удобным в тех случаях, когда динамика системы ФАПЧ определяется выходным напряжением фазового детектора, пропорциональным косинусу разности фаз колебаний подстраниваемого и эталонного генераторов.

В настоящей работе метод, описанный в [3, 5], распространяется на системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ). На примере системы импульсно-фазового умножителя частоты (рис. 1) излагается способ построения переходных процессов и даются общие формулы для отыскания необходимых параметров. При этом выводы в целом справедливы и для схем деления частоты.

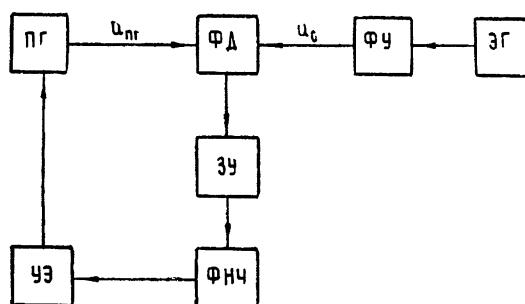


Рис. 1. Схема импульсно-фазового умножителя частоты.

Как видно из рис. 1, эта схема отличается от типовой блок-схемы ФАПЧ ([5], рис. 1) применением формирующих устройств (ФУ), преобразующих синусоидальное напряжение в короткие импульсы, импульсно-фазовых детекторов (ИФД) вместо фазовых детекторов и дополнительных запоминающих устройств (ЗУ), фиксирующих выходное напряжение ИФД в промежутке между двумя импульсами. На выходе ИФД образуются короткие импульсы, амплитуда и полярность которых определяются фазовыми соотношениями входных напряжений. На

выходе ЗУ образуется ступенчатое напряжение, огибающая которого представляет собой косинусоиду.

В качестве демодуляторов в системах ИФАПЧ используются все схемы обычных фазовых детекторов, дополненные запоминающим устройством (ЗУ). Для простоты представим ИФД как соединение обычного фазового детектора [4] и ключа, пропускающего его выходное напряжение только при действии импульса. На рис. 2 изображена электрическая

Рис. 2. Схема замещения импульсно-фазового детектора.

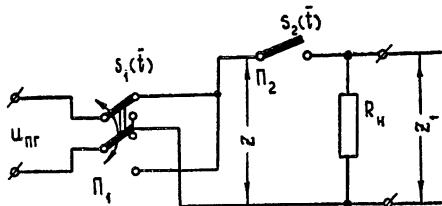


схема замещения ИФД. Здесь $U_{\Pi\Gamma}$ — напряжение, поступающее с выхода ПГ и равное

$$U_{\Pi\Gamma}(t) = U_m \sin x = U_m \sin \left[\bar{\omega}_0 \bar{t} + \frac{\pi}{2} + \varphi(\bar{t}) \right]; \quad (1)$$

$z(\bar{t})$ — сигнал на выходе обычного фазового детектора, равный

$$z(\bar{t}) = s_1(\bar{t}) U_{\Pi\Gamma}(\bar{t}), \quad (2)$$

где $s_1(\bar{t})$ — функция переключения ключа Π_1 , определяющаяся выражением

$$s_1(\bar{t}) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos (2m-1) \bar{\omega}_0 \bar{t} = \begin{cases} +1, & U_0 > 0 \\ -1, & U_0 < 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где

$$U_0(\bar{t}) = U_{m0} \cos \bar{\omega}_0 \bar{t} \quad (4)$$

— опорное напряжение детектора; $z_1(\bar{t})$ — выходной сигнал ИФД, равный

$$z_1(\bar{t}) = s_2(\bar{t}) z(\bar{t}) = s_1(\bar{t}) s_2(\bar{t}) U_{\Pi\Gamma}(\bar{t}), \quad (5)$$

где $s_2(t)$ — функция переключения ключа Π_2 , определяемая выражением

$$s_2(\bar{t}) = \begin{cases} +1, & n \leq \bar{t} \leq n + \gamma \\ 0, & n + \gamma \leq \bar{t} \leq n + 1 \end{cases}, \quad (6)$$

где $\bar{t} = t/T_n = n + \varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$); $\bar{\omega}_0 = \omega_0 T_n$ — относительные величины времени и эталонной частоты, T_n — период последовательности радиоимпульсов, поступающих с выхода формирующего устройства (ФУ) эталонного генератора, γ — относительное время замыкания ключа Π_2 (относительная длительность радиоимпульсов). При этом $\varphi(\bar{t})$ — мгновенная разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов, равная

$$\varphi(\bar{t}) = \bar{\Omega}_n \bar{t} + \varphi_n - \theta_2(\bar{t}), \quad (7)$$

где $\bar{\Omega}_n = \Omega_n T_n$ и φ_n — относительные начальные расстройка по частоте

те и начальная фаза ПГ соответственно; $\theta_2(\bar{t})$ — выходной сигнал УЭ, описываемый уравнением

$$\theta_2(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} \omega_{ys} d\bar{t} = \bar{S}_\omega \int_0^{\bar{t}} U_{\text{вых}}(\bar{t}) d\bar{t}, \quad (8)$$

где $\bar{S}_\omega = S_\omega T_n$ (рад/в) — относительная крутизна характеристики УЭ, $U_{\text{вых}}(\bar{t})$ — выходное напряжение фильтра ФНЧ, поступающее на вход управляющего элемента.

Определим спектр на выходе ИФД. Подставляя выражения (1) и (3) в (2) и преобразуя результат с помощью обычного преобразования Лапласа, находим [5]

$$\begin{aligned} Z(q) = \frac{K_d}{\pi} \frac{U_m}{T_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} & \left\{ C_1[q - j2(m-1)\bar{\omega}_0] + C_1(q - j2m\bar{\omega}_0) + \right. \\ & + S_1[q - j2(m-1)\bar{\omega}_0] \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] - \\ & \left. - S_1(q - j2m\bar{\omega}_0) \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$C_1(q) = L \{ \cos \varphi(\bar{t}) \}; \quad S_1(q) = L \{ \sin \varphi(\bar{t}) \}; \quad (10)$$

$q = pT_n$ — относительный оператор Лапласа ($T_n = 2\pi/\omega_n$).

С другой стороны, как следует из [12], стр. 293)

$$\begin{aligned} Z_1(q) = \int_0^{\gamma} e^{-q\varepsilon} Z^+(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\gamma} e^{-q\varepsilon} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+j2\pi r)\varepsilon} Z(q + j2\pi r) \right] d\varepsilon = \\ = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma \left[\frac{\sin \pi r \gamma}{\pi r \gamma} \right] e^{j\pi r \gamma} Z(q + j2\pi r). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя теперь (9) в (11) и полагая $q = j\bar{\omega}$, найдем искомый спектр на выходе ИФД

$$\begin{aligned} Z_1(j\bar{\omega}) = \frac{K_d U_m}{\pi T_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-N}^N \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \gamma \frac{\sin \pi r \gamma}{\pi r \gamma} e^{j\pi r \gamma} \times \\ \times \left\{ C_1[j(\bar{\omega} - 2m\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] + C_1[j(\bar{\omega} - 2(m-1)\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] - \right. \\ \left. - S_1[j(\bar{\omega} - 2m\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ \left. + S_1[j(\bar{\omega} - 2(m-1)\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $N \rightarrow \infty$.

На рис. 3 а изображен спектр $|Z_1(j\bar{\omega})|$, построенный по выражению (12), и АЧХ $|\Phi(j\bar{\omega})|$ фильтра ФНЧ для случая, когда

$$\bar{\omega}_n = 2\pi \ll \frac{\bar{\omega}_0}{N} \quad \text{и} \quad N \geq 20, \quad (13)$$

$$2\pi N + \bar{\omega}_\varphi + \bar{\omega}_c \leqslant 2\bar{\omega}_0. \quad (14)$$

Здесь ω_c — относительная частота среза ФНЧ (полоса пропускания) $\bar{\omega}_c = \omega_c T_n$; $\bar{\omega}_\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max}$ — относительная максимальная ширина спектра сигнала $\varphi(t)$; выбор нижней границы величины $N = 20$ (13) обусловлен тем, что, начиная с этого значения r в (12), доля высокочастотных составляющих спектра $|Z_1(j\bar{\omega})|$ пренебрежимо мала по сравнению с амплитудным значением составляющих спектра на нулевой частоте.

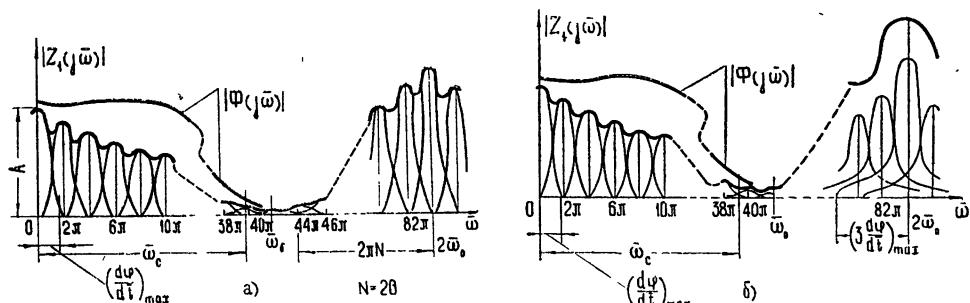


Рис. 3. Спектры $|Z_1(j\omega)|$ сигнала $z_1(t)$ на выходе фазового детектора:
а) в реальном случае;
б) в эквивалентном представлении.

При выполнении условий (14) на выход фильтра ФНЧ не пройдут комбинационные колебания спектра $|Z_1(j\omega)|$, лежащие вблизи двойной эталонной частоты.

Воспользуемся приемом, описанным в [5], и представим ИФД в виде перемножителя и импульсного элемента в виде ключа в предположении, что сигнал с выхода ПГ будет равен

$$U_{\text{ПГ}}(\bar{t}) = U_m \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos(2m-1)[\bar{\omega}_0 \bar{t} + \varphi(\bar{t})], \quad (15)$$

а в качестве функции переключения $s_1(\bar{t})$ (3) будет выбрано опорное напряжение детектора U_0 (4). Подставляя (4) и (15) в (2) и преобразуя результат с помощью обычного преобразования Лапласа, находим [5]:

$$\begin{aligned} Z(q) = & \frac{K_d U_m}{\pi T_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left\{ C_{2m-1} [q - j2(m-1)\bar{\omega}_0] + \right. \\ & + C_{2m-1} [g - j2m\bar{\omega}_0] - S_{2m-1} [q - j2(m-1)\bar{\omega}_0] \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] - \\ & \left. - S_{2m-1} [g - j2m\bar{\omega}_0] \exp \left[j(2m-1)\frac{\pi}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} C_{2m-1}(q) &= L \{ \cos(2m-1)\varphi(\tilde{t}) \}; \\ S_{2m-1}(q) &= L \{ \sin(2m-1)\varphi(\tilde{t}) \}; \\ C_i &= C_{-i}; \quad S_i = S_{-i} \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя затем (16) в (11) и полагая $q = j\bar{\omega}$, найдем спектр выходного сигнала ИФД $z_1(t)$ для рассматриваемой модели ИФД в последнем случае

$$\begin{aligned} Z_1(j\bar{\omega}) = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \frac{K_d U_m \gamma}{\pi T_n} \left[\frac{\sin \pi r \gamma}{\pi r \gamma} \right] \times \\ & \left\{ C_{2m-1} [j(\bar{\omega} - 2m\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] + C_{2m-1} [j(\bar{\omega} - 2(m-1)\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] - \right. \\ & - S_{2m-1} [j(\bar{\omega} - 2m\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] - \\ & \left. - S_{2m-1} [j(\bar{\omega} - 2(m-1)\bar{\omega}_0 + 2\pi r)] \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] \right\} e^{j\tau r \gamma}. \end{aligned} \quad (18)$$

На рис. 3б изображен спектр $|Z_1(j\bar{\omega})|$, построенный по выражению (18), и АЧХ $|\Phi(j\bar{\omega})|$ фильтра ФНЧ для случая, когда выполняется условие (13) и

$$2\pi N + 3\bar{\omega}_c + \bar{\omega}_c \leq 2\bar{\omega}_0. \quad (19)$$

Нетрудно видеть из рис. 3б, что при выполнении условий (19) при данной модели ИФД на выходе ФНЧ, как и в первом случае (см. рис. 3а), не пройдут комбинационные колебания спектра $|Z_1(j\bar{\omega})|$, лежащие вблизи двойной эталонной частоты. Сопоставляя выражения для спектров (12) и (18) (при $m=0,1$), видим, что для обоих моделей ИФД структуры низкочастотных спектров идентичны. Следовательно, в качестве модели ИФД можно принять модель перемножителя с ключом, у которого в качестве сигнала $U_{\text{пр}}(t)$ выбран сигнал, описываемый выражением (15), а в качестве опорного напряжения — выражение (4). Принимая во внимание вышесказанное, представим схему рис. 1 в виде схемы рис. 4. Здесь С — сравнивающий элемент, НЭ — нели-

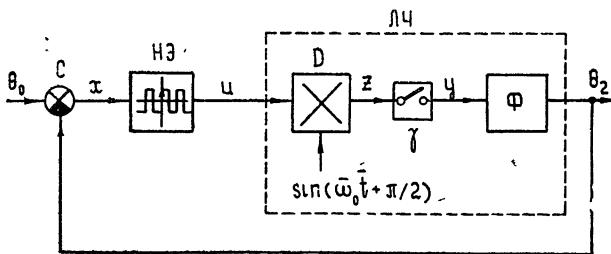


Рис. 4. Меандровая модель системы ИФАПЧ.

нейный элемент с меандровой характеристикой вида рис. 5а [5], ЛЧ — линейная часть, состоящая из линейного перемножителя Д, импульсного элемента в виде ключа, замыкающегося на время γT_n , и низкочастотного тракта Ф с передаточной функцией

$$\Phi(q) = \frac{\pi}{2} \bar{\Omega}_y K_0(q), \quad (20)$$

где $\bar{\Omega}_y = T_n U_m K_d S_\omega$ — относительный коэффициент, соответствующий относительной полосе удержания; $K_0(g)$ — передаточная функция

последовательного соединения ЗУ, ФНЧ и интегратора, выполняющего функцию УЭ.

Запишем уравнения элементов схемы рис. 4.

Уравнение сравнивающего элемента (СЭ)

$$x(\bar{t}) = \theta_0(\bar{t}) - \theta_2(\bar{t}), \quad (21)$$

где

$$\theta_0(\bar{t}) = \bar{\omega}_0 \bar{t} + \bar{\Omega}_n \bar{t} + \bar{\varphi}_n + \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

уравнение нелинейного элемента (НЭ)

$$U = F(x), \quad (23)$$

где $F(x)$ — «меандровая» характеристика НЭ (рис. 5 а, [5]), уравнение линейного перемножителя Δ

$$Z(q) = L\{U(\bar{t}) \cos(\bar{\omega}_0 \bar{t} + \bar{\varphi}_n)\} = \operatorname{Re}_i[U(q - j\bar{\omega}_0) \exp(j\bar{\varphi}_n)], \quad (24)$$

уравнение ключа второго рода совместно с низкочастотным трактом Φ (непрерывной частью) [2]

$$\theta_2^*(q, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \bar{\Omega}_y \left[\int_0^\varepsilon K_0^*(q, \varepsilon - \lambda) Z^*(q, \lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + e^{-q} \int_\varepsilon^\gamma K_0^*(q, 1 + \varepsilon - \lambda) Z(q, \lambda) d\lambda \right], & 0 \leq \varepsilon \leq \gamma \\ \frac{\pi}{2} \bar{\Omega}_y \int_0^\gamma K_0^*(q, \varepsilon - \lambda) Z^*(q, \lambda) d\lambda, & \gamma \leq \varepsilon \leq 1, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$Z^*(q, \varepsilon) = D_1\{Z(q)\} = D\{z(\bar{t})\},$$

$$K_0^*(q, \varepsilon) = D_1\{T_n K_0(q)\},$$

$\varepsilon = \Delta t/T_n$ — относительный параметр времени ($0 \leq \varepsilon \leq 1$).

Отыщем значение переходной характеристики линейной части (ЛЧ).

Для этого предварительно найдем реакцию перемножителя Δ на воздействие типа $\frac{2}{\pi \bar{\Omega}_y} 1(\bar{t} - \bar{t}_k)$. Из (24) для этого случая находим

$$z(\bar{t} - \bar{t}_k) = L^{-1} \left\{ \frac{q \cos \psi_k - \bar{\omega}_0 \sin \psi_k}{q^2 + \bar{\omega}_0^2} \exp(-q\bar{t}_k) \right\}, \quad (26)$$

где

$$\psi_k = \bar{\omega}_0 \bar{t}_k + \bar{\varphi}_n \quad (27)$$

— фаза, значение которой меняется в зависимости от изменения момента времени $\bar{t}_k = t_k/T_n$.

Введем обозначение

$$z(\bar{t}) = L^{-1} \left\{ \frac{q \cos \psi_k - \bar{\omega}_0 \sin \psi_k}{q^2 + \bar{\omega}_0^2} \right\} = \cos(\bar{\omega}_0 \bar{t} + \psi_k). \quad (28)$$

Легко видеть, что для отыскания переходной характеристики ЛЧ до-

статочно найти $h(\bar{t})$ ключа совместно с устройством Φ на воздействие (30) и затем полученный результат сдвинуть во времени на величину \bar{t}_k , т. е.

$$h(\bar{t} - \bar{t}_k) = h[n - n_k, \varepsilon - \varepsilon_k] = \begin{cases} h[n - n_k - 1, 1 + \varepsilon - \varepsilon_k], & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k, \\ h[n - n_k, \varepsilon - \varepsilon_k], & \varepsilon \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad (29)$$

где $\bar{t} = n + \varepsilon$, $\bar{t}_k = n_k + \varepsilon_k$.

Учитывая, что $z(t)$ в (28) можно представить как

$$z[n, \lambda] = \cos[\bar{\omega}_0 n + \omega_0 \lambda + \bar{\psi}_k],$$

или

$$\bar{z}[n, \lambda] = \exp[j(\bar{\omega}_0 \lambda + \bar{\psi}_k)] \exp(j\bar{\omega}_0 n),$$

то после преобразований, аналогичных приведенным в ([2], стр. 348), из (25) получаем

$$\begin{aligned} h[n, \varepsilon] = \operatorname{Re} \Big\{ \exp[j(\bar{\omega}_0 n + \bar{\psi}_k)] \Big[\int_0^{\varepsilon} K_0^*(j\bar{\omega}_0, \varepsilon - \lambda) \exp(j\bar{\omega}_0 \lambda) d\lambda + \\ + \exp(-j\bar{\omega}_0) \int_{\varepsilon}^1 K_0^*(j\bar{\omega}_0, 1 + \varepsilon - \lambda) \exp(j\bar{\omega}_0 \lambda) d\lambda \Big] - \\ - \sum_{v=1}^l C'_{v,0} \frac{\exp(j\bar{\psi}_k) \exp[q_v(n+1+\varepsilon)]}{(j\bar{\omega}_0 - q_v) [\exp(j\bar{\omega}_0) - \exp(q_v)]} [\exp(-(q_v - j\bar{\omega}_0)\varepsilon) - 1] \Big\} \\ \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} h[n, \varepsilon] = \operatorname{Re} \Big\{ \exp[j(\bar{\omega}_0 n + \bar{\psi}_k)] \int_0^1 K_0^*(j\bar{\omega}_0, \varepsilon - \lambda) \exp(j\bar{\omega}_0 \lambda) d\lambda - \\ - \sum_{v=1}^l C'_{v,0} \frac{\exp(j\bar{\psi}_k) \exp[q_v(n+1+\varepsilon-\gamma)]}{(j\bar{\omega}_0 - q_v) [\exp(j\bar{\omega}_0) - \exp(q_v)]} \times \\ \times [\exp(j\bar{\omega}_0 \gamma) - \exp(q_v \gamma)] \Big\}, \quad \text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (326)$$

Здесь принято

$$K_0^*(q, \varepsilon) = \sum_{v=1}^l C'_{v,0} \frac{\exp(j\bar{\omega}_0) \exp(q_v \varepsilon)}{\exp(j\bar{\omega}_0) - \exp(q_v)} \quad (i = 1, 2).$$

Для получения сдвинутой переходной характеристики $h(\bar{t} - \bar{t}_k)$ достаточно в (30) произвести операцию подобно той, которая сделана в выражении (29).

Метод построения переходных процессов в схеме ИФАПЧ (рис. 4) и выражения, необходимые для этого, полностью аналогичны изложенному в [3] и [5] для непрерывных систем ФАПЧ.

ЛИТЕРАТУРА

- Я. З. Цыпкин. Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955
- Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.

3. С. Г. Сапфиров и др., Радиотехника и электроника, 14, № 9, 1597 (1969).
4. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1967.
5. С. Г. Сапфиров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 11, 1692 (1970).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
13 августа 1968 г.,
после доработки
20 января 1970 г.

ON PULSE PHASE-LOCKED SYSTEMS FOR FREQUENCY CONTROL

S. G. Sappirov

A method to investigate pulse-phase-locked systems for frequency control is considered using an example of a pulse-phase frequency multiplier circuit. A way to construct transition processes is described and formulae to find the necessary parameters is presented.

УДК 621.396.078.6

НЕПРЕРЫВНАЯ СИСТЕМА ФАПЧ КАК РЕЛЕЙНАЯ СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

С. Г. Сапфиров

Рассматривается метод исследования непрерывных систем ФАПЧ, основанный на представлении их в виде моделей нелинейных систем с нелинейностью типа «симметричный меандр», а также в виде релейных систем автоматического регулирования. При этом линейные части этих моделей являются системами с периодически меняющимися параметрами. Кратко описывается способ построения переходных процессов на примере типовой системы ФАПЧ с одной петлей.

Последние годы характеризуются неослабевающим интересом к исследованию систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В литературе [1, 2], посвященной системам ФАПЧ, обычно используется путь исследования, основанный на решении известного нелинейного уравнения* и различных его модификаций в зависимости от поставленной задачи. В основу составления этого уравнения положены два факта: линейный характер работы подстраиваемого генератора по отношению к мгновенной частоте и нелинейный характер работы фазового детектора по отношению к разности фаз колебаний подстраиваемого и эталонного генераторов. Известно, что в случае наиболее распространенной косинусоидальной характеристики фазового детектора существуют только приближенные способы решения этого уравнения. Можно предложить метод, в котором преодолевается этот недостаток за счет представления системы ФАПЧ в виде нелинейной системы типа «меандровой» или релейной с линейной частью, которая описывается дифференциальным уравнением с гармонически меняющимися коэффициентами. При этом носителем нелинейности становится подстраиваемый генератор, а фазовый детектор становится линейным звеном с периодически меняющимися параметрами [5, 6].

Метод иллюстрируется описанием способа построения переходных процессов на основе анализа типовой схемы непрерывной системы ФАПЧ с одной петлей (рис. 1).

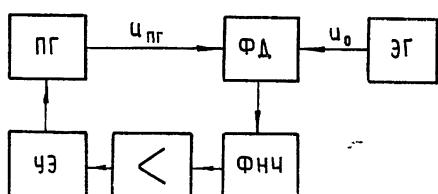


Рис. 1. Типовая схема непрерывной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

ПГ и ЭГ — подстраиваемый и эталонный генераторы, ФД и ФНЧ — фазовый детектор и фильтр низких частот, УЭ — управляющий элемент.

* $p\varphi + \Omega_y \Phi(p) F(\varphi) = \Omega_H$, см., например, [2].

С выхода генератора ЭГ на один вход ФД поступает косинусоидальное напряжение U_o амплитуды U_{om} и аргумента $\omega_0 t + \varphi_n$, где ω_0 — эталонная частота, φ_n — начальная фаза. На другой вход ФД с выхода ПГ поступает тоже косинусоидальное напряжение $U_{ПГ}$, но амплитуды U_m и аргумента $\omega_0 t + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — мгновенная фаза генератора ПГ, равная

$$\varphi(t) = \Omega_n t + \varphi_n - \theta_2(t). \quad (1)$$

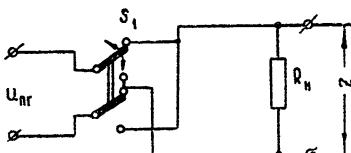
Здесь Ω_n и φ_n — начальная расстройка по частоте и начальная фаза ПГ соответственно. При этом

$$\theta_2(t) = \int_0^t \omega_{ys} dt = S_\omega \int_0^t U_{\text{вых}} dt, \quad (2)$$

где ω_{ys} — мгновенная частота, создаваемая управляющим элементом УЭ, S_ω — крутизна характеристики УЭ (в радиан/сек·вольт). Напряжение $U_{\text{вых}}$ на входе УЭ поступает с фильтра низких частот ФНЧ. Согласно условию, это напряжение с учетом передаточной функции $K(p)$ фильтра низких частот и коэффициента передачи K_d фазового детектора ФД пропорционально косинусу разности фаз генераторов ПГ и ЭГ.

Среди всех типов устройств, применяемых для осуществления демодуляции, в системах регулирования на практике преимущественно используются линейные системы с переменными во времени параметрами. Например, известная схема двухполупериодного балансного фазового детектора, которая на СВЧ реализуется как гибридное коаксиальное или волноводное кольцо. На рис. 2 изображена простейшая схема

Рис. 2. Простейшая схема замещения балансного двухполупериодного фазового детектора.



замещения такого детектора. Его выходной сигнал $z(t)$ можно представить как результат перемножения входного фазомодулированного сигнала $U_{ПГ}$, поступающего с выхода подстраиваемого генератора и равного

$$U_{ПГ} = U_m \sin x = U_m \sin \left[\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi(t) \right], \quad (3)$$

и функции переключения s_1 , имеющей следующий вид

$$s_1(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos(2m-1)\omega_0 t = \begin{cases} +1, & U_0 > 0; \\ -1, & U_0 < 0; \end{cases} \quad (4)$$

где

$$U_0(t) = U_{m0} \cos(\omega_0 t + \varphi_n) \quad (5)$$

— опорное напряжение детектора, поступающее с выхода эталонного генератора. Тогда сигнал на выходе детектора запишется

$$z(t) = K_d U_{ПГ}(t) s_1(t). \quad (6)$$

Подставляя (3) и (4) в (6) и полагая для простоты $\phi_n = 0$, находим

$$z(t) = K_a U_m \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \{ \cos \varphi(t) [\cos 2(m-1)\omega_0 t + \\ + \cos 2m\omega_0 t] + \sin \varphi(t) [\sin 2(m-1)\omega_0 t - \sin 2m\omega_0 t] \}. \quad (7)$$

Преобразуя по Лапласу выражение (7) и полагая $p = j\omega$, найдем спектр $z(t)$ на выходе фазового детектора:

$$Z(j\omega) = \frac{K_a U_m}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left\{ C_1 [j(\omega - 2m\omega_0)] + C_1 (j[\omega - \\ - 2(m-1)\omega_0]) - S_1 [j(\omega - 2m\omega_0)] \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ \left. + S_1 (j[\omega - 2(m-1)\omega_0]) \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (8)$$

где

$$C_1(p) = L \{ \cos \varphi(t) \}; \quad S_1(p) = L \{ \sin \varphi(t) \}. \quad (9)$$

На рис. 3 изображены спектры $|Z(j\omega)|$ и АЧХ $|\Phi(j\omega)|$ фильтра ФНЧ. Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$\omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt} \leq 2\omega_0, \quad (10)$$

где ω_c — частота среза фильтра ФНЧ (полоса пропускания), комбинационные колебания, начиная с двойной эталонной частоты $(\cos [2\omega_0 t + \varphi(t)])$ будут подавлены, а на выход фильтра пройдут низкочастотные составляющие спектра $|Z(j\omega)|$ (8), пропорциональные $\cos \varphi(t)$.

При определенных условиях низкочастотная часть спектра $|Z(j\omega)|$ сигнала $z(t)$ не изменится, если в (6) сигнал $U_{\text{ПГ}}(t)$ (3) представить в виде, аналогичном (4), т. е.

$$U_{\text{ПГ}}(t) = U_m \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos (2m-1)[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (11)$$

а $s_1(t)$ (4) — в виде, аналогичном (3), т. е.

$$s_1(t) = \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \omega_0 t. \quad (12)$$

Действительно, подставляя (11) и (12) в (6), находим

$$z(t) = K_a U_m \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \{ \cos (2m-1)\varphi(t) [\cos 2(m-1)\omega_0 t + \\ + \cos 2m\omega_0 t] - \sin (2m-1)\varphi(t) [\sin 2(m-1)\omega_0 t + \sin 2m\omega_0 t] \}; \quad (13)$$

и затем, преобразуя (13) по Лапласу, получаем при $p = j\omega$ выражение спектра сигнала $z(t)$ для случая рассматриваемой модели фазового детектора в виде

$$\begin{aligned}
 Z(j\omega) = K_u U_m \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left\{ C_{2m-1}(j[\omega - 2(m-1)\omega_0]) + \right. \\
 \left. + C_{2m-1}[j(\omega - 2m\omega_0)] - S_{2m-1}(j[\omega - 2(m-1)\omega_0]) \times \right. \\
 \left. \times \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} - S_{2m-1}[j(\omega - 2m\omega_0)] \exp \left[j(2m-1) \frac{\pi}{2} \right] \right] \right\}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{2m-1}(p) = L\{\cos(2m-1)\varphi(t)\}; \quad S_{2m-1}(p) = L\{\sin(2m-1)\varphi(t)\}; \\
 C_i = C_{-i}; \quad S_i = -S_{-i} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (15)
 \end{aligned}$$

На рис. 3 б изображен спектр $|Z(j\omega)|$, построенный по выражению (14) и АЧХ $|\Phi(j\omega)|$ фильтра ФНЧ. Также нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$\omega_c + 3 \frac{d}{dt} \varphi(t) \ll 2\omega_0, \quad (16)$$

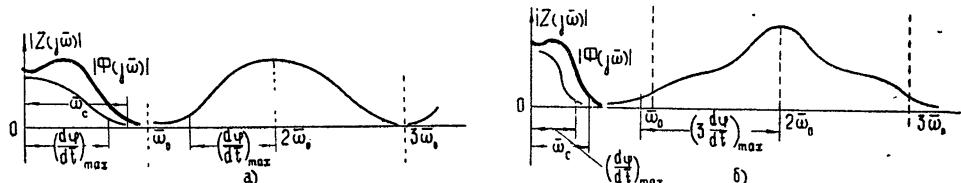


Рис. 3. Спектры сигнала $z(t)$ на выходе фазового детектора:
а) в реальном случае; б) в эквивалентном представлении.

на выход фильтра пройдут низкочастотные составляющие спектра $z(t)$, пропорциональные $\cos \varphi(t)$. Следовательно, при выполнении условия (16) за уравнение подстраиваемого генератора можно принять уравнение (11), а за уравнение фазового детектора — уравнение линейного перемножителя (6) с опорным напряжением в форме (12), где положим $s_1(t) = U_0(t)$ при $\psi_n = 0$.

Неравенства (10) и (16) практически всегда выполняются, так как для подавляющего большинства непрерывных систем ФАПЧ $\omega_c \ll \omega_0$ и $\Omega_n \ll \omega_0$, и поскольку спектр сигнала $\theta_2(t)$ (2) определяется полосой пропускания фильтра ФНЧ, то согласно (1) для систем ФАПЧ будем иметь

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega_n - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \ll \omega_0. \quad (17)$$

Учитывая все вышесказанное, представим схему рис. 1 в виде схемы рис. 4 а. Здесь C_1, C_2 — сравнивающие элементы, НЭ — нелинейный элемент с «меандровой» характеристикикой (рис. 5 а)

$$U = F(x) = \begin{cases} +1, & 2k\pi \leq x(t) \leq (2k+1)\pi \\ -1, & (2k+1)\pi \leq x(t) \leq 2(k+1)\pi \end{cases}, \quad (18)$$

где

$$x(t) = \omega_0 t + \varphi(t) + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (19)$$

ЛЧ — линейная непрерывная часть, состоящая из D — перемножителя и тракта низкой частоты Φ , включающего ФНЧ и интегратор, выполняющий функции УЭ.

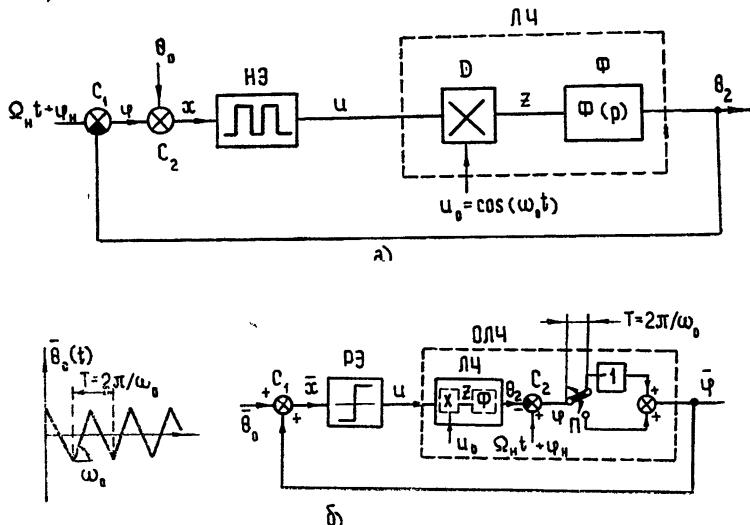


Рис. 4. Модели систем ФАПЧ:

а) меандровая модель системы ФАПЧ; б) модель системы ФАПЧ в виде релейной системы автоматического регулирования.

Запишем уравнения элементов схемы рис. 4 а.
Уравнение сравнивающего элемента C_2

$$x(t) = \theta_0(t) + \varphi(t), \quad (20)$$

где

$$\theta_0(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

Уравнение сравнивающего элемента C_1 определяется выражением (1).

Уравнение линейной части (ЛЧ) в изображении Лапласа при нулевых начальных условиях

$$\theta_2(p) = \Phi(p) Z(p) = \Phi(p) L\{U \cos \omega_0 t\}, \quad (22)$$

где

$$\Phi(p) = \frac{\pi}{2} \Omega_y \frac{K(p)}{p} \quad (23)$$

— передаточная функция низкочастотного тракта; $K(p)$ — передаточная функция ФНЧ; коэффициент $\frac{\pi}{2}$ нормирует выходной сигнал $z(t)$ детектора по низкочастотной составляющей его спектра, пропорциональной $\cos \varphi(t)$;

$$\Omega_y = U_{nm} K_d S_\omega \quad (24)$$

— коэффициент, определяющий максимальную расстройку, т. е. полосу удержания; $\theta_2(p) = L\{\theta_2(t)\}; Z(p) = L\{z(t)\}$, L -символ обычного пре-

образования Лапласа; U — сигнал на выходе нелинейного элемента, определяемый из уравнения нелинейного элемента (18) как:

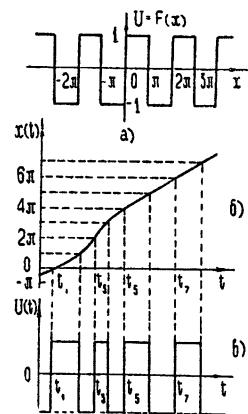
$$U = F[\theta_0 + \varphi(t)] = F\left[\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi(t)\right]. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (22), описывающее ЛЧ, является линейным дифференциальным уравнением с гармонически меняющимися коэффициентами.

При прохождении сигнала $x(t)$ через НЭ с меандровой характеристикой на выходе последнего появляются фазомодулированные прямоугольные импульсы чередующейся полярности (рис. 5б, 5в), изменение которой происходит в моменты времени t_k , называемые моментами переключения полярности импульсного воздействия U (18) или (25). Моменты t_k легко определять геометрически, как абсциссы точек пере-

Рис. 5.

а) Характеристика нелинейного элемента, б) вид функций на входе нелинейного элемента, в) вид функций на выходе нелинейного элемента.



сечения функции $x(t)$ (19), (20) с пороговыми значениями линии $k\pi$ (рис. 5 б), т. е. из решения уравнения

$$x(t_k) = \omega_0 t_k + \frac{\pi}{2} + \Omega_n t_k + \varphi_{ii} - \theta_2(t_k) = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

называемого уравнением надлежащих моментов переключения [3]. Легко видеть, что уравнение надлежащих направлений переключения определяется как:

$$U(t_k) = (-1)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

При этом функция $x(t)$ (19), (20) может пересечь прямую $x = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) лишь один раз. Действительно, продифференцировав $x(t)$ в (19) $\frac{dx}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}$ и учитывая условие (17), получим, что $\frac{dx}{dt} > 0$

для всех t , т. е. $x(t)$ — возрастающая (монотонная) функция.

Некоторым вопросам исследования меандровой модели систем ФАПЧ, представленной рис. 4 а, посвящена работа автора и др. [5].

Может оказаться удобным представить модель системы ФАПЧ в виде релейной системы автоматического регулирования (рис. 4 б). Ее легко получить, преобразуя меандровую характеристику НЭ в схеме рис. 4 а в релейную (рис. 4 б) с одновременным преобразованием входного сигнала $\theta_0(t)$ (21) в треугольный $\bar{\theta}_0(t)$, а выходного $\varphi(t)$ — в сигнал $\varphi(t)$ чередующейся полярности, изменяющейся каждую половину периода колебания эталонного генератора ЭГ. Переход к релейной модели соответствует сведению различных пороговых уровней меандровой нелинейности к одному, нулевому, уровню релейного элемента. Рис. 4 б иллюстрирует эту процедуру. Здесь

$$\bar{\theta}_0(t) = \begin{cases} -[\theta_0 - (2k+1)\pi], & 2k\pi \leq \omega_0 t \leq (2k+1)\pi \\ [\theta_0 - 2(k+1)\pi], & (2k+1)\pi \leq \omega_0 t \leq 2(k+1)\pi; \end{cases} \quad (28)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} -\varphi(t), & 2k\pi \leq \omega_0 t \leq (2k+1)\pi \\ \varphi(t), & (2k+1)\pi \leq \omega_0 t \leq 2(k+1)\pi \end{cases}; \quad (29)$$

$$\bar{x} = \bar{\theta}_0 + \bar{\varphi}. \quad (30)$$

Формирование сигнала $\bar{\varphi}(t)$ осуществляется двуполярным переключателем Π с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, входящим вместе с ЛЧ в общую линейную часть (ОЛЧ), которая является импульсной линейной частью с переменными параметрами. Полученная релейная модель системы ФАПЧ предполагает выполнение условий надлежащих моментов и направлений переключения в виде ([3], стр. 94)

$$\bar{x}(t_k) = 0, \quad (31)$$

$$\bar{x}'(t_k) (-1)^k > 0. \quad (32)$$

Найдем уравнение ОЛЧ. Для этого сначала запишем уравнение двуполярного переключателя Π , выполняющего преобразование (29). Согласно ([4], стр. 293) имеем

$$\bar{\varphi}(p) = - \sum_i \int_i^{T/2} e^{-p(\Delta t)} \varphi^*(p, \Delta t) d(\Delta t) \quad (i = 0, T), \quad (33)$$

где

$$\bar{\varphi}(p) = L\{\bar{\varphi}(t)\}; \quad \varphi^*(p, \Delta t) = D\{\varphi(t)\};$$

L и D — символы соответственно обычного и дискретного преобразования Лапласа: $t = nT + \Delta t$.

Принимая во внимание уравнение ЛЧ (22), передаточную функцию ФНЧ (23); операцию сравнения C_2 (рис. 4 б), а также уравнение (33) и решая их совместно, получим уравнение ОЛЧ в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p) = - \sum_i \int_i^{T/2} e^{-p(\Delta t)} D_1 \left\{ \frac{\Omega_h}{p^2} - \frac{\pi}{2} \Omega_y \frac{K(p)}{p} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re}_j[U(p - j\omega_0)] \right\} d(\Delta t), \end{aligned} \quad (34)$$

где D_1 — символ преобразования, устанавливающего связь между изображениями решетчатой и соответствующей ей непрерывной функциями ([4], стр. 215); $i = 0, T$.

Представление системы ФАПЧ (рис. 1) в виде релейной (рис. 4 б) позволяет применить к исследованию систем ФАПЧ методы теории релейных систем автоматического регулирования. Например, построение переходных процессов можно вести по известным формулам, представленным в ([3], стр. 93), которые для нашего случая имеют вид

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\theta}_{bx} - \frac{\pi}{2} \Omega_y \left[\bar{h}(t) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{h}(t - t_k) \right] \quad (t_n \leq t \leq t_{n+1}), \quad (35)$$

где

$$\bar{\theta}_{bx} = \begin{cases} -\Omega_h t, & 2k\pi \leq \omega_0 t \leq (2k+1)\pi \\ \Omega_h t, & (2k+1)\pi \leq \omega_0 t \leq 2(k+1)\pi \end{cases} \quad (36)$$

и

$$\bar{h}(t) = \begin{cases} -h(t), & 2k\pi \leq \omega_0 t \leq (2k+1)\pi \\ h(t), & (2k+1)\pi \leq \omega_0 t \leq 2(k+1)\pi \end{cases}; \quad (37)$$

$h(t - t_k)$ — временная характеристика ЛЧ, отыскиваемая из уравнения ЛЧ (22) при ступенчатом входном воздействии $U = \frac{2}{\pi\Omega_y} 1(t - t_k)$, т. е.

$$h(t - t_k) = L^{-1}\{\theta_2(p)\} = \frac{\pi}{2} \Omega_y L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p} \operatorname{Re}_j [U(p - j\omega_0)]\right\}, \quad (38)$$

при

$$U(p) = \frac{2}{\pi\Omega_y} \frac{1}{p} \exp(-pt_k) \quad (39)$$

или, после очевидных преобразований, получаем

$$h(t - t_k) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p} \frac{p \cos \omega_0 t_k - \omega_0 \sin \omega_0 t_k}{p^2 + \omega_0^2} \exp(-pt_k)\right\}, \quad (40)$$

t_k — момент переключения релейного элемента.

Выражение (35), определяющее переходный процесс, является суммой отдельных процессов, вызванных действием на ОЛЧ воздействия в виде прямоугольных импульсов. Моменты переключения t_k весьма просто определяются графически одновременно с построением переходного процесса $\varphi(t)$, как это описано в ([3], стр. 96), поэтому изложение этой методики здесь опускается.

Применение методов теории релейных систем к исследованию систем ФАПЧ может дать и другие полезные результаты. Например, определение характеристик систем ФАПЧ, аналогичных характеристикам релейных САР и т. д. Следует, однако, иметь в виду, что релейное представление ограничивает свойства системы ФАПЧ. Как видно из выражения (28) и рис. 4 б, изменение разности фаз $\varphi(t)$ в процессе регулирования ограничено величиной $\pm \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, Госэнергоиздат, М., 1962
- 2 В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1967
- 3 Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955
- 4 Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ФМ, М., 1963.
- 5 С. Г. Сапфиров и др., Радиотехника и электроника, 14, № 9, 1597 (1969)
- 6 С. Г. Сапфиров и др., Тезисы XXV юбилейной Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио и Дню связиста, стр. 37, М., 1969

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
13 августа 1968 г.,
после переработки
20 января 1970 г.

TO THE THEORY OF CONTINUOUS PHASE-LOCKED SYSTEMS FOR FREQUENCY CONTROL

S. G. Sappirov

A method to investigate continuous phase-locked systems for frequency control is considered. The method is based on representing these systems as models of nonlinear systems with the "symmetric meander" type nonlinearity and as relay systems of automatic control. The linear parts of the above systems are with periodically varying parameters. A way to construct transitional processes is briefly outlined using an example of a typical frequency phase-locked system with one loop.

УДК 62—501

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Н. В. Фалдин, Н. Н. Макаров

Решается задача синтеза быстродействующего управления для линейных объектов третьего порядка с действительными неположительными корнями характеристического многочлена при ограничениях на управление и фазовые координаты объекта.

Рассмотрим объект, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x + a_3 u = 0, \quad (1)$$

здесь a_1, a_2, a_3 — некоторые числа, x — регулируемая координата, u — управляющий параметр. Предположим, что управление ограничено условием

$$|u| \leq A. \quad (2)$$

Будем далее предполагать, что характеристический многочлен системы (1) имеет только действительные неположительные корни. Во многих технических задачах ограничения накладываются не только на управляющий параметр, но и на фазовый вектор системы. Поэтому ниже будем учитывать ограничения на фазовые координаты.

1. ОГРАНИЧЕНИЕ ПО УСКОРЕНИЮ

Представим уравнение (1) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u - a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем требовать, чтобы наряду с ограничением (2) выполнялось условие

$$|x_3| \leq D. \quad (4)$$

Ограничение (4) выделяет в фазовом пространстве X системы (3) некоторую допустимую область B . Граница этой области задается уравнениями

$$g_1(x) = x_3 - D = 0, \quad (5a)$$

$$g_2(x) = -x_3 - D = 0. \quad (5b)$$

Рассмотрим задачу синтеза быстродействующего управления, т. е. будем искать такую функцию $v(x_1, x_2, x_3)$, что управление $u = v(x_1, x_2, x_3)$ переводит фазовую точку системы (3) из любого допустимого начального положения в начало координат за минимально возможное время.

Воспользуемся необходимыми условиями оптимальности, сформулированными в [1].

Составим функции

$$p_1(x, u) = \left(\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}, f(x, u) \right) = u - a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3,$$

$$p_2(x, u) = \left(\frac{\partial g_2(x)}{\partial x}, f(x, u) \right) = -u + a_3x_1 + a_2x_2 + a_1x_3.$$

Из условия

$$p_1(x, u) = p_2(x, u) = 0$$

находим, что на границе области B управление задается равенством

$$u = a_3x_1 + a_2x_2 + a_1x_3. \quad (6)$$

Из (6) и (2) вытекает, что движение по границе области B возможно, если фазовая точка принадлежит некоторой полосе, определяемой неравенством

$$|a_3x_1 + a_2x_2 + a_1x_3| \leq A. \quad (7)$$

Вместо полосы (7) ограничимся рассмотрениями в открытой полосе

$$|a_3x_1 + a_2x_2 + a_1x_3| < A. \quad (8)$$

Составим функцию

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 + \psi_1x_2 + \psi_2x_3 + \psi_3(u - a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3). \quad (9)$$

Вспомогательная вектор-функция $\psi(t)$ определяется в открытом ядре области B уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = a_3\psi_3, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + a_2\psi_3, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2 + a_1\psi_3, \quad (10)$$

на границе области B — уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2. \quad (11)$$

Условие

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq 0,$$

выполнение которого необходимо при движении фазовой точки по границе области B , как легко видеть, эквивалентно неравенству

$$\psi_2 \operatorname{sgn} x_2 \geq 0. \quad (12)$$

Из условия максимума функции (9) находим, что в открытом ядре области B оптимальное управление

$$u = A \operatorname{sgn} \psi_3(t). \quad (13)$$

Так как на границе области B управление определяется равенством (6), задача синтеза оптимального управления сводится к нахождению в открытом ядре области B фазового пространства X геометрического места точек, в которых происходит переключение управляющего параметра, т. е. к построению поверхности переключения.

Воспользуемся принципом «попятного движения» А. А. Фельдбаума. Введем обратное время $\tau = t_1 - t$, где t_1 — время, соответствующее окончанию процесса управления. Обозначим через τ_{2i-1} ($i = 1, 2, \dots$) моменты входа (в обратном времени) фазовой точки на границу области B , а через τ_{2i} — моменты схода с границы в открытое ядро области.

В моменты τ_{2i-1} и τ_{2i} должны выполняться условия скачка (см. теорему 24 [1]):

$$\begin{aligned}\psi_0(\tau_{2i-1} - 0) &= \psi_0(\tau_{2i-1} + 0), & \psi_0(\tau_{2i} + 0) &= \psi_0(\tau_{2i} - 0), \\ \psi_1(\tau_{2i-1} - 0) &= \psi_1(\tau_{2i-1} + 0), & \psi_1(\tau_{2i} + 0) &= \psi_1(\tau_{2i} - 0), \\ \psi_2(\tau_{2i-1} - 0) &= \psi_2(\tau_{2i-1} + 0), & \psi_2(\tau_{2i} + 0) &= \psi_2(\tau_{2i} - 0), \\ \psi_3(\tau_{2i-1} - 0) &= \psi_3(\tau_{2i-1} + 0) + \mu_{2i-1}, \\ \psi_3(\tau_{2i} + 0) &= \psi_3(\tau_{2i} - 0) + \mu_{2i},\end{aligned}\quad (14)$$

здесь μ_{2i-1} и μ_{2i} — любые числа. Из условия непрерывности функции $H(\psi, x, u)$ в точках τ_{2i-1} и τ_{2i} , учитывая (8), находим

$$\psi_3(\tau_{2i-1} - 0) = \psi_3(\tau_{2i} + 0) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (12) — (15) и условие .

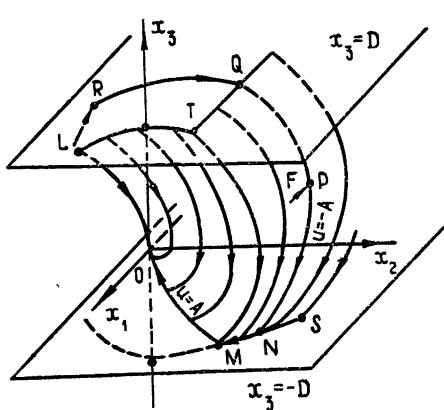


Рис. 1. Стрелки указывают движение в прямом времени.

$$H(\psi(\tau = 0), x(\tau = 0), u(\tau = 0)) = 0 \quad (16)$$

образуют полную систему необходимых условий, которым должны удовлетворять оптимальное управление и оптимальная траектория.

Покажем, что исходящая (в обратном времени) из начала координат траектория $OMNQ$ (рис. 1) оптимальна, а участки этой траектории OM и NQ , лежащие в открытом ядре области B , принадлежат поверхности переключения.

В соответствии с уравнениями (10) вспомогательные функции $\psi_3(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$ определяются в открытом ядре области B уравнениями

$$\begin{aligned}\psi_3(\tau) &= \psi_{10} K(\tau) + \psi_{20} K'(\tau) + \psi_{30} K''(\tau), \\ \psi_1(\tau) &= -\psi_{10} K^{(-1)}(\tau) - a_3 \psi_{20} K(\tau) - a_3 \psi_{30} K'(\tau),\end{aligned}\quad (17)$$

где

$$\psi_{i0} = \psi_i(\tau = 0) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$K(\tau) = L^{-1} \left[\frac{1}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \right],$$

$$K^{(-1)}(\tau) = L^{-1} \left[\frac{-p^2 - a_1 p - a_2}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} \right],$$

L^{-1} — символ обратного преобразования Лапласа. На границе (5 б)

$$\psi_0(\tau) = \psi_0(\tau_1), \quad \psi_1(\tau) = \psi_1(\tau_1),$$

$$\psi_2(\tau) = \psi_1(\tau_1) (\tau - \tau_1) + \psi_2(\tau_1).$$

При $\tau_3 > \tau > \tau_2$ (точка M соответствует τ_1 , точка $N - \tau_2$, точка $Q - \tau_3$)

$$\begin{aligned} \psi_3(\tau) = & \psi_1(\tau_1) K(\tau - \tau_2) + [\psi_1(\tau_1) (\tau_2 - \tau_1) + \\ & + \psi_2(\tau_1)] K'(\tau - \tau_2) + \psi_3(\tau_1 - 0) K''(\tau - \tau_2), \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} \psi_3(\tau^*) = & \psi_{10} K(\tau^*) + \psi_{20} K'(\tau^*) + \\ & + \psi_{30} K''(\tau^*) + [-\psi_{10} K^{(-1)}(\tau_1) - a_3 \psi_{20} K(\tau_1) - \\ & - a_3 \psi_{30} K'(\tau_1)] (\tau_2 - \tau_1) K'(\tau^* - \tau_1), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь τ^* — время «свободного» движения, т. е. время, отсчитываемое только при движении фазовой точки в открытом ядре области B .

Для любого $\tau_3 \geq \tau_* > \tau_2$ ($\tau^* > \tau_* = \tau_1$) можно так выбрать вектор начальных значений $\Phi_0 = (\psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30})$, что в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_*$ участок траектории $OMNQ$ удовлетворяет условиям оптимальности (12)–(16), а в самой точке τ_*

$$\psi_3(\tau_*) = 0,$$

т. е. соответствующая точка $x(\tau_*) = (x_1(\tau_*), x_2(\tau_*), x_3(\tau_*))$ принадлежит поверхности переключения.

Числа ψ_{10} , ψ_{20} , ψ_{30} с точностью до постоянного множителя найдутся из системы линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_3(\tau_1^*) = & \psi_{10} K(\tau_1^*) + \psi_{20} K'(\tau_1^*) + \psi_{30} K''(\tau_1^*) = 0, \\ \psi_3(\tau_*^*) = & \psi_{10} K(\tau_*^*) + \psi_{20} K'(\tau_*^*) + \psi_{30} K''(\tau_*^*) + \\ & + [-\psi_{10} K^{(-1)}(\tau_1) - a_3 \psi_{20} K(\tau_1) - a_3 \psi_{30} K'(\tau_1)] \times \\ & \times (\tau_2 - \tau_1) K'(\tau_*^* - \tau_1^*) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим

$$\psi_3(\tau_1) = \psi_3(\tau_1 - 0), \quad \psi_3(\tau_2) = \psi_3(\tau_2 + 0).$$

Покажем, что выбранный в соответствии с (20) вектор Φ_0 определяет функцию $\psi_3(\tau)$, которая в отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_3$ не имеет других нулей, кроме точек τ_1 , τ_2 , τ_* .

При $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$ $\psi_3(\tau)$ не может обращаться в нуль (за исключением точек τ_2 и τ_*), так как в соответствии с леммой (стр. 138 [1]) функция (18) может иметь не более двух нулей. Предположим, что $\psi_3(\tau)$ имеет нуль в интервале $0 < \tau < \tau_1$. Тогда в соответствии с леммой [1] функция

$$\psi_3^0(\tau) = \psi_{10} K(\tau) + \psi_{20} K'(\tau) + \psi_{30} K''(\tau) \quad (21)$$

не может иметь нулей при $\tau > \tau_1$. В равенстве (21) индекс «нулик» введен, чтобы подчеркнуть различие между $\psi_3(\tau)$ и функцией (21). Это различие имеет место, когда $\tau > \tau_1$. Если функции (21) соответствуют оптимальное управление $u(\tau)$, ($0 \leq \tau \leq \tau_1$), переводящее фазовую точку из начала координат на границу (5 б), то

$$\psi_3^0(\tau) < 0 \quad (22)$$

при $\tau > \tau_1$.

Учитывая, что $\psi_3^0(\tau_1) = \psi_3(\tau_1) = 0$, уравнение (21) можно переписать в виде

$$\psi_3^0(\tau) = \psi_1(\tau_1) K(\tau - \tau_1) + \psi_2(\tau_1) K'(\tau - \tau_1). \quad (23)$$

При $\tau > 0$ $K(\tau) > 0$, а для астатического объекта ($a_3=0$) и $K'(\tau) > 0$. Для статического объекта функция $K'(\tau)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.

Отметим, что

$$K(0) = K'(0) = 0. \quad (24)$$

Для астатических объектов, кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{K'(\tau)}{K(\tau)} = 0. \quad (25)$$

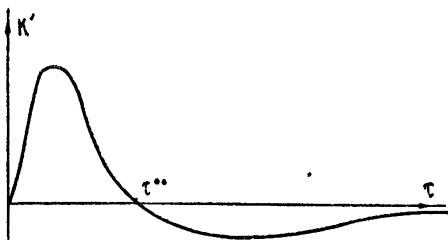


Рис. 2.

Из (24) и (25) вытекает, что при малых значениях разности $\tau - \tau_1$ знак функции (23) определяется вторым слагаемым, а при больших — первым слагаемым. Неравенство (22), поэтому, возможно только при

$$\psi_1(\tau_1) \ll 0, \quad \psi_2(\tau_1) \ll 0. \quad (26)$$

Для статического объекта дополнительно будем предполагать, что время движения по траектории NQ от одной ограничивающей плоскости до другой меньше τ^{**} , где τ^{**} — отличное от нуля решение уравнения

$$K'(\tau) = 0.$$

Из (26) и (22) находим, что функция (19) не может обращаться в нуль в точке τ_* . Последнее противоречит уравнениям (20). Таким образом, функция $\psi_3(\tau)$ имеет нули только в точках τ_1 , τ_2 и τ_* .

Из совокупности решений системы (20) выберем решение, в котором

$$\psi_{30} > 0. \quad (27)$$

Равенство (16) удовлетворим соответствующим подбором числа ψ_{00} :

$$H(\psi(0), x(0), u(0)) = \psi_{00} + \psi_{30} A = 0.$$

Из (15) и (27) следует, что на отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_1$ функция $\psi_3(\tau)$ убывает. Поэтому

$$\left. \frac{d\psi_3}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_1} = \psi_2(\tau_1) \ll 0. \quad (28)$$

Из неравенств (27) и (28) вытекают условия (12) и (13).

Таким образом, траектория NQ принадлежит поверхности переключения, причем проводимые выше рассуждения распространяются на всю совокупность траекторий, сходящихся в обратном времени с линией MS . Как следует из [2], поверхности переключения принадлежит также траектория OM и примыкающая к OM (с управлением $u = -A$) совокупность траекторий (рис. 1).

На рис. 1 представлена лишь часть траекторий, образующих поверхность переключения. Остальные траектории являются антисимметричными изображенными $FPNMO$ и $LRQNMO$ — оптимальные траектории соответственно с одним и двумя заходами на границу.

В заключение отметим, что решая задачу синтеза оптимального управления, мы рассматривали наиболее интересный для приложений случай «жестких» ограничений (4), когда оптимальные траектории

имеют участок, лежащий на границе (5 б). При менее «жестких» ограничениях, когда в силу (7) невозможно движение по границе области B , поверхностью переключения является изображенная на рис. 1 совокупность траекторий, ограниченная линией OMT .

2. ОГРАНИЧЕНИЕ ПО СКОРОСТИ

Будем считать, что на фазовый вектор системы (3) вместо ограничения (4) наложено ограничение

$$|x_2| \leq D. \quad (29)$$

На ограничении (29) не выполняются введенные в [1] условия регулярности, поэтому при синтезе оптимального управления здесь будут использованы достаточные условия оптимальности, сформулированные в [3].

Как следует из (3) и (29), движение фазовой точки по границе области B определяется уравнениями

$$\dot{x}_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = 0, \quad (30)$$

где $c = D \operatorname{sgn} x_2$, а управление $u(t)$ задается равенством

$$u = a_3 x_1 + a_2 c. \quad (31)$$

В силу ограничения (2) движение на границе области возможно только по отрезкам прямых

$$x_2 = D, \quad x_3 = 0, \quad |a_2 D + a_3 x_1| \leq A; \quad (32)$$

$$x_2 = -D, \quad x_3 = 0, \quad |a_3 x_1 - a_2 D| \leq A. \quad (33)$$

Ниже, вместо допустимых отрезков рассмотрим интервалы, которые получаются из (32) и (33) при замене нестрогих неравенств на строгие.

В соответствии с [3] определим функцию H в открытом ядре области B равенством (9), а на границе области B — равенством

$$H(\psi^*, x_1, c) = \psi_0^* + \psi_1^* c, \quad (34)$$

где вспомогательные функции $\psi_0^*(t)$ и $\psi_1^*(t)$ находятся из уравнений

$$\frac{d\psi_0^*}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1^*}{dt} = 0. \quad (35)$$

Из условия максимума функции (34) находим

$$c \operatorname{sgn} \psi_1 \geq 0. \quad (36)$$

Условия скачка в точках τ_{2i-1} и τ_{2i} :

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau_{2i-1}) &= \psi_0^*(\tau_{2i-1}), \quad \psi_0(\tau_{2i}) = \psi_0^*(\tau_{2i}), \\ \psi_1(\tau_{2i-1}) &= \psi_1^*(\tau_{2i-1}), \quad \psi_1(\tau_{2i}) = \psi_1^*(\tau_{2i}), \\ \psi_2(\tau_{2i-1}) &= \rho_{2i-1}, \quad \psi_2(\tau_{2i}) = \rho_{2i}, \\ \psi_3(\tau_{2i-1}) &= 0, \quad \psi_3(\tau_{2i}) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Условия (13), (16), (36) и (37) образуют полную систему достаточных условий оптимальности.

Можно показать, (см. [3]), что в точках τ_{2i-1} и τ_{2i} оптимальное управление

$$u(\tau_{2i-1} - 0) = u(\tau_{2i} + 0) = -A \operatorname{sgn} x_2. \quad (38)$$

Из (38) следует, что при переходе фазовой точки с одной границы области B на другую оптимальное управление $u(\tau)$ должно иметь хотя бы одно переключение. Из (13) и (37) вытекает тогда, что первая из функций (17) должна иметь не менее трех нулей. Последнее невозможно, так как в соответствии с леммой [1] функция может иметь не более двух нулей. Таким образом, оптимальная траектория $x(\tau)$ может иметь только один участок, лежащий на границе области B .

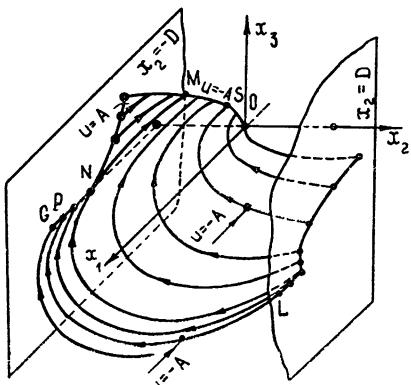


Рис. 3.

Указанный выше вектор Φ_0 точностью до постоянного множителя найдется из системы уравнений

$$\begin{aligned}\psi_3(\tau_0) &= \psi_{10} K(\tau_0) + \psi_{20} K'(\tau_0) + \psi_{30} K''(\tau_0) = 0, \\ \psi_3(\tau_1) &= \psi_{10} K(\tau_1) + \psi_{20} K'(\tau_1) + \psi_{30} K''(\tau_1) = 0, \\ H(\psi(0), x(0), u(0)) &= \psi_{00} - \psi_{30} A = 0,\end{aligned} \quad (40)$$

где τ_0 — момент первого переключения — соответствует точке M .

При $\tau > \tau_2$ функция $\psi_3(\tau)$ определяется равенством

$$\psi_3(\tau) = \psi_{11}(\tau_1) K(\tau - \tau_2) + \rho_2 K'(\tau - \tau_2).$$

Число ρ_2 выберем таким образом, чтобы обеспечить выполнение уравнения (39):

$$\rho_2 = -\psi_{11}(\tau_1) \frac{K(\tau_* - \tau_2)}{K'(\tau_* - \tau_2)}. \quad (41)$$

Из условий

$$\begin{aligned}H(\psi(\tau_1), x(\tau_1), u(\tau_1)) &= \psi_{00} + \psi_{11}(\tau_1) x_2(\tau_1) = 0, \\ \psi_0(\tau) &= \text{const} < 0\end{aligned}$$

и уравнений (35) вытекает выполнение неравенства (36). Выполнение условий (13), (16) следует из уравнений (40) и (41).

Мы доказали, таким образом, что траектория PL (как и, вообще, любая из сходящихся в обратном времени с прямой NG траекторий) принадлежит поверхности переключений. Выше уже отмечалось, что траектории, целиком лежащие в открытом ядре области B , также принадлежат поверхности переключений. Поэтому все изображенные на рис. 3 траектории лежат на поверхности переключений. Для заверше-

Покажем, что изображенная на рис. 3 траектория $OMNPL$ принадлежит поверхности переключения. Для этого достаточно показать, что для любого $\tau_*(\tau_2 < \tau_* < \tau_3)$ можно так выбрать вектор начальных значений Φ_0 и число ρ_2 , что в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_*$ выполняются условия оптимальности (13), (16), (36), (37), а в самой точке τ_*

$$\psi_3(\tau_*) = 0. \quad (39)$$

Для статического объекта будем по-прежнему предполагать, что время движения фазовой точки по траектории PL от одной ограничивающей плоскости до другой меньше τ^{**} .

ния построения поверхности переключения необходимо к траекториям, изображенным на рис. 3, присоединить антисимметричные траектории.

В заключение отметим, если ограничения на фазовый вектор имеют вид

$$|x_3 + b_2 x_2 + b_1 x_1| \leq D$$

или

$$|x_2 + b_1 x_1| \leq D,$$

то в первом случае поверхность переключения строится аналогично разделу 1, а во втором—по аналогии с разделом 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понtryагин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М, 1961.
- 2 А. А. Фельдbaum, Основы теории оптимальных автоматических систем, Физматгиз, М, 1966.
- 3 Н В Фалдин, Изв. высш уч. зав—Радиофизика, 12, № 7, 1067 (1969).

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию
13 апреля 1970 г.

TIME—OPTIMAL CONTROL OF THIRD ORDER LINEAR PLANTS IN PROBLEMS WITH LIMITATIONS

N. V. Faldin, N. N. Makarov

Synthesis problem is solved for quick-response control of third order linear plants with real non-positive roots of characteristic polynomial when phase coordinates of the plant and control are limited.

УДК 62—506 + 62—503.53

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

И. И. Шубравый

Находятся оптимальные частотные характеристики следящей системы по минимуму среднего квадрата ошибки, вызванной сигналом и заданной величине среднеквадратичной ошибки, вызванной шумами. Задача решается с использованием уравнения Эйлера при наложенных интегральных связях. Найденные характеристики реализуются в автоколебательных самонастраивающихся системах.

При построении самонастраивающихся систем управления вначале находятся оптимальные частотные характеристики и структура, к которой должна стремиться реальная система в процессе самонастройки. В этой статье находятся оптимальные частотные характеристики следящей системы по минимуму среднего квадрата ошибки, вызванной сигналом, и заданной величине среднеквадратической ошибки, вызванной шумами. Задача решается с использованием уравнений Эйлера при наложенных интегральных связях, в виде условий физической реализуемости, предложенных Бодэ [1]. Реализация найденных характеристик наиболее просто может быть осуществлена в самонастраивающихся системах.

Рассматривается система, блок-схема которой представлена на рис. 1.

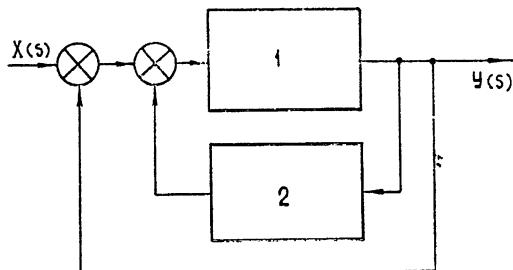


Рис. 1. 1—электронная часть и исполнительное устройство $W_{np}(s)$;
2—такогенератор $W_{oc}(s)$.

Требуется определить оптимальные частотные характеристики замкнутой системы таким образом, чтобы при заданной среднеквадратической ошибке, вызванной помехами (в виде белого шума), обеспечивался минимум интегральной квадратичной ошибки. При этом система должна быть физически реализуемой в смысле соответствующего расположения полюсов передаточной функции.

Среднеквадратическая ошибка от помех $\overline{\varepsilon_n^2}$ выражается формулой [3]

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega. \quad (1)$$

Средний квадрат ошибки ϵ_c^2 , вызванной сигналом,

$$\epsilon_c^2 = \int_0^\infty \epsilon^2(t) dt \quad (2a)$$

в соответствии с теоремой Парсеваля [4] равенство (2 а) можно преобразовать к виду

$$\epsilon_c^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega, \quad (26)$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная передаточная функция замкнутой системы, $G_n(\omega)$ — спектральная плотность помехи, $\epsilon(t) = y'(t) - x(t)$ — сигнал ошибки, $E(j\omega)$ — преобразование Фурье от сигнала ошибки.

Выражая $E(j\omega)$ через передаточную функцию системы

$$E(j\omega) = [1 - \Phi(j\omega)] X(j\omega) \quad (3)$$

и учитывая, что $\Phi(j\omega)$ равно

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (4)$$

Соотношение (1) и (2 б) можно представить в виде

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2 \} G_n(\omega) d\omega, \quad (5)$$

$$\epsilon_c^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [1 - P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2 \} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (6)$$

Условия физической реализуемости запишем в виде, предложенном Бодэ [1]

$$\int_0^\infty (P_1 P - Q_1 Q) d\omega = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^\infty (P_2 P - Q_2 Q) d\omega = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^\infty (P_3 P - Q_3 Q) d\omega = 0 \quad \text{и т. д.}, \quad (9)$$

где $\Phi_1 = P_1 + jQ$; $\Phi_2 = P_2 + jQ_2$; и т. д. — заданные физически реализуемые передаточные функции.

Задача нахождения оптимальной функции $\Phi(j\omega)$ комплексного переменного или двух вещественных функций $P(\omega)$; $Q(\omega)$ может быть сформулирована так: среди всех допустимых кривых $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ найти такие, которые дают минимум интегралу (6) и одновременно удовлетворяют уравнениям связи (7) — (9). Для решения этой задачи составляем выражение $F^* = F_1 + \lambda_1^2 F_2 + \lambda_1 F_3 + \dots$, где $\lambda_1; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ — постоянные вещественные коэффициенты (Лагранжа), определяемые из уравнений связи, $F_1; F_2; F_3$; — подынтегральные выражения для интегралов (5) — (9).

Для того, чтобы кривые $P(\omega)$; $Q(\omega)$ давали минимум интеграла (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Эйлера

$$\frac{\partial F^*}{\partial P} - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\partial F^*}{\partial P'} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial Q} - \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\partial F^*}{\partial Q'} \right) = 0. \quad (11)$$

Выполнив вычисления, получим [2]

$$P_{\text{opt}}(\omega) = \frac{|X(j\omega)|^2 + \lambda'_1 P_1(\omega) + \lambda'_2 P_2(\omega) + \dots}{|X(j\omega)|^2 + \lambda_1 G_n(\omega)}, \quad (12)$$

$$Q_{\text{opt}}(\omega) = - \frac{\lambda'_1 Q_1(\omega) + \lambda'_2 Q_2(\omega) + \dots}{|X(j\omega)|^2 + \lambda_1 G_n(\omega)}, \quad (13)$$

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = P_{\text{opt}}(\omega) + jQ_{\text{opt}}(\omega) = \frac{|X(j\omega)|^2 + \lambda_1 \Phi_1^*(j\omega) + \lambda_2 \Phi_2^*(j\omega) + \dots}{|X(j\omega)|^2 + \lambda_1 G_n(\omega)}, \quad (14)$$

где $\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{2}$; $\lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{2}$, $\Phi_i^*(j\omega) = P_i(\omega) - jQ_i(\omega)$ ($i = 1, 2, 3\dots$) — комплексно-сопряженные с $\Phi_i(j\omega)$ функции.

Выбирая в качестве входной функции $X(t) = \theta_{\text{вх}}(t)$ одну из следующих стандартных функций

- 1) $\theta_{\text{вх}}(t) = \theta_0 1(t)$
- 2) $\theta_{\text{вх}}(t) = \Omega_1 t 1(t)$
- 3) $\theta'_{\text{вх}}(t) = \theta_m \sin(a_0 t) 1(t)$

рассмотрим соответственно три следующих случая.

СЛУЧАЙ 1. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ЕДИНИЧНОМ СКАЧКЕ НА ВХОДЕ

Преобразование Лапласа от $\theta_{\text{вх}}(t) = \theta_0 1(t)$ равно

$$X(s) = \frac{\theta_0}{s}$$

и, следовательно,

$$X(j\omega) = \frac{\theta_0}{j\omega},$$

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{\theta_0^2}{\omega^2}. \quad (15)$$

Помеха имеет равномерный спектр в достаточно широком диапазоне частот, т. е.

$$G_n(\omega) = n_0^2 = \text{const.} \quad (16)$$

Составляем выражения для $P_{\text{opt}}(\omega)$; $Q_{\text{opt}}(\omega)$ и $\Phi_{\text{opt}}(j\omega)$.

$$P_{\text{opt}}(\omega) = \frac{\frac{\Theta_0^2}{\omega^2} + \lambda'_1 P_1(\omega) + \lambda'_2 P_2(\omega) + \dots}{\frac{\Theta_0^2}{\omega^2} + \lambda_1 n_0^2},$$

$$Q_{\text{opt}}(\omega) = - \frac{\lambda'_1 Q_1(\omega) + \lambda'_2 Q_2(\omega) + \dots}{\frac{\Theta_0^2}{\omega^2} + \lambda_1 n_0^2},$$

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\Theta_0^2 + \omega^2 [\lambda'_1 \Phi_1^*(j\omega) + \lambda'_2 \Phi_2^*(j\omega)] + \dots}{\Theta_0^2 + \omega^2 \lambda_1 n_0^2}.$$

Чтобы избежать трудностей, связанных с расходимостью интеграла (6) при $\Theta(j\omega) = \frac{\Theta_0}{j\omega}$, вначале заменим $\frac{\Theta_0}{j\omega}$ через $\frac{\Theta_0}{j\omega + \varepsilon}$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим заданный спектр. Тогда последнее выражение принимает вид

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\Theta_0^2 + \lambda'_1 (\omega^2 + \varepsilon^2) \Phi_1^*(j\omega) + \lambda'_2 (\omega^2 + \varepsilon^2) \Phi_2^*(j\omega) + \dots}{\Theta_0^2 + (\omega^2 + \varepsilon^2) \lambda_1 n_0^2}.$$

Если выбрать

$$\Phi_1(j\omega) = (j\omega + \varepsilon)^{-1}; \quad \Phi_2(j\omega) = 0;$$

то

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{j\omega + \varepsilon}{\omega^2 + \varepsilon^2}$$

и

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\Theta_0^2 + \lambda'_1 (j\omega + \varepsilon)}{\Theta_0^2 + (\omega^2 + \varepsilon^2) \lambda_1 n_0^2}.$$

Раскрывая скобки числителя и знаменателя и располагая слагаемые по убывающим степеням $(j\omega)$, имеем

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\lambda''_1 j\omega + N^2 + \varepsilon \lambda'_1}{\omega^2 + N^2 + \varepsilon^2},$$

где

$$N = \frac{\Theta_0^2}{\lambda_1 n_0^2}; \quad \lambda''_1 = \frac{\lambda'_1}{\lambda_1 n_0^2}.$$

Корни знаменателя равны соответственно

$$(j\omega)_1 = (N^2 + \varepsilon^2)^{1/2},$$

$$(j\omega)_2 = -(N^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ корни знаменателя стремятся соответственно к $(j\omega)_1 = N$, $(j\omega)_2 = -N$. Воспользовавшись условием (7), найдем, что

$$\lambda''_1 = \frac{N^2 + \varepsilon^2}{(N^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} = (N^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$$

и, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda''_1 = \pm N.$$

Тогда

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{-Nj\omega + N^2}{\omega^2 + N^2} = \frac{N}{j\omega + N}.$$

Заменив $j\omega$ на s , получим

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{N}{N+s}. \quad (19)$$

Для нахождения λ_1 , которая входит в выражение для N , воспользуемся (5)

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon_n^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty n_0^2 \frac{N^2}{\omega^2 + N^2} d\omega = \frac{1}{2} N n_0^2, \\ N &= 2 \left(\frac{\bar{\varepsilon_n}}{n_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

Так как $N = \frac{\Theta_0^2}{\lambda_1 n_0^2}$, то

$$\lambda_1 = \frac{\Theta_0^2}{N n_0^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_0}{\bar{\varepsilon_n}} \right)^2. \quad (21)$$

По-видимому, в дальнейшем нет большого смысла в вычислениях непосредственно коэффициента λ_1 , достаточно найти N , куда входит λ_1 . Коэффициент N выступает в роли как характеристической частоты, так и в роли коэффициента усиления v_k разомкнутой системы.

Выражение для оптимальной передаточной функции

$$W_{\text{opt}}(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{N}{s}, \quad (22)$$

разомкнутой системы показывает, что для получения минимальной интегральной квадратичной ошибки при скачкообразном входном сигнале, система должна обладать астатизмом первого порядка, при этом перегулирование отсутствует, установившаяся ошибка по положению равна нулю, а установившаяся ошибка по скорости обратно пропорциональна N .

СЛУЧАЙ 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ЛИНЕЙНО НАРАСТАЮЩЕМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ, Т. Е. ПРИ $x(t) = \Omega_1 t \Gamma(t)$.

Поскольку

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\Omega_1}{s^2}, \\ X(j\omega) &= -\frac{\Omega_1}{\omega^2}, \\ |X(j\omega)| &= \frac{\Omega_1^2}{\omega^4}. \end{aligned}$$

Напишем выражение для оптимальной передаточной функции, воспользовавшись (14), в виде

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\Omega_1^2 + \lambda_1 \omega^4 \Phi_1^*(j\omega) + \lambda_2 \omega^4 \Phi_2^*(j\omega)}{\lambda_1 n_0^2 \omega^4 + \Omega_1^2}. \quad (23)$$

Так как знаменатель передаточной функции имеет четвертую степень при ω , то передаточная функция после нахождения вспомогательных

коэффициентов λ'_1 и λ'_2 будет иметь два полюса (в левой полуплоскости комплексного переменного $s = j\omega$).

Выбираем вспомогательные функции

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}; \quad \Phi_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2},$$

или

$$\Phi_1^*(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega^2}; \quad \Phi_2^*(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\omega^4}.$$

Заменим $j\omega$ на s и в выражении для $\Phi_{\text{opt}}(s)$ расположим s по убывающим степеням

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{\lambda'_1 s^3 + \lambda'_2 s^2 + N^2}{s^4 + N^2}.$$

Найдем корни знаменателя

$$s^4 + N^2 = 0; \quad s_{1,2}^2 = \pm jN;$$

$$s_1 = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}(-1+j); \quad s_3 = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}(1-j);$$

$$s_2 = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}(-1-j); \quad s_4 = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}(1+j).$$

Для краткости обозначим корни $s_{1,2,3,4} = \pm c \pm jd$, где $c = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}$;
 $d = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}$.

Полюса оптимальной передаточной функции $c \pm jd$ лежат в правой полуплоскости комплексного переменного. От них необходимо избавиться, выбрав соответствующим образом коэффициенты λ'_1 ; λ'_2 , использовавшись, например, условиями физической реализуемости. Но эти коэффициенты можно выбрать и другим способом, поделив числитель передаточной функции $\Phi_{\text{opt}}(s)$ на множитель знаменателя $(s - c + jd)(s - c - jd) = s^2 - 2cs + c^2 + d^2$ и потребовав, чтобы остаток от деления равнялся нулю. Тогда получим два уравнения для нахождения двух коэффициентов λ'_1 ; λ'_2

$$\lambda'_1(c^2 + d^2) = 2c(\lambda'_2 + 2c\lambda'_1),$$

$$N^2 = (c^2 + d^2)(2c\lambda'_1 + \lambda'_2).$$

Разрешая эти уравнения, найдем

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= 2c = \sqrt{2N}, \\ \lambda'_2 &= N - 4c^2 = -N. \end{aligned} \tag{24}$$

При найденных значениях λ'_1 ; λ'_2 оптимальная передаточная функция имеет вид

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{\sqrt{2N}s + N}{s^2 + \sqrt{2N}s + N}, \tag{25}$$

$$1 - \Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2N}s + N}$$

и передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{opt}}(s) = N \frac{\sqrt{\frac{2}{N}s + 1}}{s^2}, \quad (26)$$

т. е. для получения минимальной интегральной квадратичной ошибки при линейно нарастающем входном сигнале система должна обладать астатизмом второго порядка.

Коэффициент N , связанный с λ_1 , определяется из условия (5). С помощью таблицы интегралов [8] имеем

$$\overline{\varepsilon_n^2} = \frac{3}{4} n_0^2 \sqrt{2N}$$

и

$$N = \frac{8}{9} \left(\frac{\overline{\varepsilon_n}}{n_0} \right)^4.$$

СЛУЧАЙ 3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ $x(t) = \Theta_m \sin(a_0 t) 1(t)$

Так как

$$X(s) = \frac{\Theta_m a_0}{s^2 + a_0^2},$$

$$X(j\omega) = \frac{\Theta_m a_0}{a^2 - \omega^2}; \quad |X(j\omega)|^2 = \frac{\Theta_m^2 a_0^2}{(a^2 - \omega^2)^2},$$

то оптимальная передаточная функция запишется в виде

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\Theta_m^2 a_0^2 + \lambda'_1 (a^2 - \omega^2) \Phi_1^*(j\omega) + \lambda'_2 (a^2 - \omega^2) \Phi_2^*(j\omega)}{\Theta_m^2 a_0^2 + (a_0^2 - \omega^2)^2 n_0^2}.$$

Заменяя $\frac{\Theta_m^2}{\lambda'_1 n_0^2} = N^2$ и располагая знаменатель по убывающим степеням ω , будем иметь, что

$$\Phi_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{N^2 a_0^2 + \lambda'_1 (a_0^2 - \omega^2) \Phi_1^*(j\omega) + \lambda'_2 (a^2 - \omega^2) \Phi_2^*(j\omega)}{\omega^4 - 2a_0^2 \omega^2 + N^2 a_0^2 + a_0^4}. \quad (28a)$$

Выбирая функции $\Phi_1(j\omega)$, $\Phi_2(j\omega)$, $\Phi_1^*(j\omega)$ и $\Phi_2^*(j\omega)$ соответственно равными следующим выражениям:

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{1}{a^2 + (j\omega)^2}; \quad \Phi_2(j\omega) = \frac{j\omega}{a_0^2 + (j\omega)^2};$$

$$\Phi_1^*(j\omega) = \frac{1}{a^2 + (j\omega)^2}; \quad \Phi_2^*(j\omega) = \frac{-j\omega}{a^2 + (j\omega)^2},$$

выражение (28a) перепишем, заменяя $j\omega$ через s , в виде

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{-\lambda'_2 s^3 + \lambda'_1 s^2 - \lambda'_2 a_0^2 s + N^2 a_0^2 + \lambda'_1 a_0^2}{s^4 + 2a_0^2 s^2 + N^2 a_0^2 + a_0^4}.$$

Корни знаменателя для $\Phi_{\text{opt}}(s)$

$$s_1 = -c + jd, \quad s_2 = -c - jd; \quad s_3 = c + jd; \quad s_4 = c - jd,$$

где

$$c = (a_0 \sqrt{a_0^2 + N^2})^{1/2} \cos \varphi,$$

$$d = (a_0 \sqrt{a_0^2 + N^2})^{1/2} \sin \varphi,$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{N}{a_0}.$$

Выбирая коэффициенты λ'_1 и λ'_2 так, чтобы избавиться от положительных корней, запишем $\Phi_{\text{opt}}(s)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{opt}}(s) &= \frac{N^2 a_0^2}{a_0^2(a_0^2 + 3c^2 - d^2) + (c^2 + d^2)(c^2 + d^2 - a^2)} \times \\ &\times \frac{2cs + c^2 + d^2 - a^2}{s^2 + 2cs + c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

При малом значении a по сравнению с N

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{2cs + c^2 + d^2 - a^2}{s^2 + 2cs + c^2 + d^2}. \quad (286)$$

Определим λ_1 из условия (5), воспользовавшись таблицей интегралов [3].

Опуская вычислительные операции, которые подобны приведенным выше, получим

$$Na = \frac{8}{9} \left(\frac{\varepsilon_n}{n_0} \right)^4. \quad (29)$$

Так как $a \approx 1$, а $N \geq 10$, то в выражении (286) можно пренебречь a_0^2 , заменив $c = \frac{1}{2} \sqrt{2a_0N}$ и $d = \sqrt{2a_0N} \cdot \frac{1}{2}$, получим

$$\Phi_{\text{opt}}(s) = \frac{\sqrt{2a_0N}s + Na_0}{s^2 + \sqrt{2a_0N} + Na_0}. \quad (30)$$

Таким образом, оптимальная передаточная функция для синусоидального входного сигнала почти совпадает с оптимальной передаточной функцией для линейно нарастающего сигнала. И в этом случае минимальная интегральная квадратичная ошибка получается при астатической системе второго порядка, так как передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$k_a W_{\text{opt}}(s) = \frac{Na_0 \left(\sqrt{\frac{2}{Na_0}} s + 1 \right)}{s^2}. \quad (31)$$

Вычислим коэффициент усиления Na_0 и постоянную времени в рассматриваемой системе. При заданных $a_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{7} = 0,89$; $\varepsilon_n = 0,25^\circ$ и $n_0^2 = 0,01$ град²/сек⁻¹

$$k_a = Na_0 = \frac{8}{9} \left(\frac{\epsilon_n}{n_0} \right)^4 = 35 \text{ 1/сек}^2.$$

При выборе оптимальной передаточной функции для линейно нарастающего сигнала и синусоидального сигнала времени переходного процесса приближенно можно оценить по формуле $T_n = 3T$, где T — постоянная времени оптимальной системы,

$$T = \sqrt{\frac{2}{Na_0}} = \sqrt{\frac{2}{35}} = 0,24 \text{ сек и } T_n = 3 \cdot 0,24 = 0,72 \text{ сек.}$$

Перерегулирование системы второго порядка можно оценить по коэффициенту относительного демпфирования

Для передаточной функции (30)

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7 \text{ и } \sigma = 5\%.$$

Чтобы реализовать найденную оптимальную передаточную функцию в заданной следящей системе, можно включить пассивный контур, соответствующий оптимальной передаточной функции, на входе системы (рис. 2).

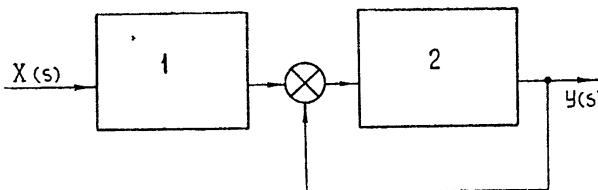


Рис. 2. Следящая система с включенным на входе оптимальным фильтром. Во внешнем контуре обратной связи установлен режим автоколебаний предельного цикла (1—оптимальный фильтр $(2/Na_0)^2 s + 1/(Na_0)^{-2} s^2 + (2,07/Na_0)^2 s + 1$; 2—заданная система $k_0 W(s)$).

При $k_0 = \infty$ (что можно достичнуть, например, в автоколебательной самонастраивающейся следящей системе)

$$\Phi(s) = \Phi_{\text{опт}}(s) = \frac{\sqrt{\frac{2}{Na_0}} s + 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{Na_0}}\right)^2 s^2 + \frac{2 \cdot 0,7}{\sqrt{Na_0}} s + 1}.$$

Проще осуществить оптимальную передаточную функцию разомкнутой системы, включив такой контур в цепь местной обратной связи, передаточная функция которого обратна оптимальной передаточной функции разомкнутой системы. Такая схема представлена на рис. 3. Тогда эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы

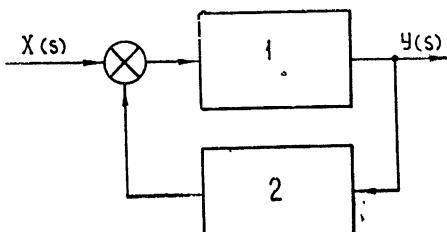


Рис. 3. Следящая система с фильтром в цепи местной обратной связи. Общая передаточная функция фильтра и тахогенератора обратна оптимальной передаточной функции разомкнутой системы. Автоколебания предельного цикла установлены во внутренней цепи обратной связи (1—электронная часть и двигатель кпр $W_{\text{пр}}(s)$; 2—тахогенератор и фильтр $k_{\text{oc}} W_{\text{oc}}(s)$).

$$W_a(s) = \frac{k_{np} W_{np}(s)}{1 + k_{np} W_{0c}(s) W_{np}(s)}.$$

При $k \rightarrow \infty$ (что можно достигнуть в режиме автоколебаний предельного цикла во внутреннем контуре обратной связи) имеет вид

$$W_a(s) = \frac{1}{W_{0c}(s)}.$$

Для осуществления оптимальной передаточной функции выбираем

$$W_{0c}(s) = \frac{1}{W_{opt}(s)} = \frac{s^2}{Na_0 \left(\sqrt{\frac{2}{Na_0}} s + 1 \right)}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. Боде, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, изд. ИЛ, М., 1948.
2. И. И. Шубравый, Научно-технические труды РВИАУ, сб. 2, 1965.
3. Теория следящих систем под ред. Я. З. Цыпкина, изд. ИЛ, М., 1953.
4. Ш. А. Чанг, Синтез оптимальных систем автоматического управления, изд. Машиностроение, М., 1964.

Всесоюзный заочный машиностроительный институт

Поступила в редакцию
11 марта 1970 г.

OPTIMAL STRUCTURE OF A SELE-ADJUSTING SERVO SYSTEM

I. I. Shubravy

Optimal frequency characteristics of a servo system are determined to minimize a mean square of error caused by signal when mean-square error caused by noise is given. The problem is solved using the Euler equations under imposed integral ties in the form of feasibility conditions suggested in [1]. The found characteristics are implemented in autooscillation self-adjusting systems by introducing an optimal filter either to the system input or to the local feedback loop. In the latter case the transfer function of the feedback loop together with the filter is inverse to the optimal transfer function of an open-loop system.

УДК 519.2

ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА В ЗАДАЧЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

A. И. Яблонский

Аналогия случайного поиска с броуновским движением используется для определения переходной вероятности случайного поиска методом функционального интегрирования в бесконечно мерном пространстве. Показано, что определение этой величины сводится к вычислению интеграла Винера, в результате чего получается выражение для переходной вероятности в виде ряда

Дано приближенное выражение для переходной вероятности, а также рассмотрена физическая интерпретация результата на основе фейнмановских интегралов. Рассмотрены дальнейшие возможности развития указанного подхода.

1. ВЫВОД ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ

Рациональная организация процесса случайного поиска [1] (выбор параметров алгоритма поиска) определяется зависимостью характеристик процесса от параметров алгоритма. В частности, одной из важных характеристик эффективности процесса является оценка его скорости сходимости в глобальный экстремум при данных параметрах алгоритма и функции потерь. В общем случае решение этой задачи не получено, решение для частного случая дано в [2].

Основываясь на рассмотренных в [3] физических моделях случайного поиска, можно связать задачу многоэкстремального случайного поиска с движением частицы в потенциальном поле, в частности, с броуновским движением. В связи с этим представляют интерес работы [4, 5], где сделана попытка объединения статистической модели броуновского движения и квантовомеханического метода фейнмановских интегралов по траектории [6] для оценки функции Грина.

Метод интегрирования по траекториям позволяет получить конструктивные результаты по анализу физических процессов, связанных с движением частицы при случайном воздействии среды. В основе метода лежит функциональное интегрирование по мере Винера [7]. Рассмотрим возможности применения этого аппарата для оценки скорости сходимости процесса случайного поиска, характеризуемой плотностью вероятности перехода $p(x, t; x_0)$ из положения x_0 в положение x за время t .

Учитывая, что $p(x, t; x_0)$ подчиняется уравнению Фоккера—Планка [3], получаем согласно [8] решение этого уравнения в виде предельного перехода

$$p(x, t; x_0) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{V(2\pi\sigma^2)^{n-1} \epsilon^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\sum_{i=0}^{n-1} -\frac{(x_{i+1} - x_i + \eta(x_i) \epsilon)^2}{2\sigma^2 \epsilon} + \frac{\eta'(x_i) \epsilon}{2} \right] dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (1.1)$$

Символически это выражение в виде интеграла по траектории записывается следующим образом (с точностью до нормировочного коэффициента, полагаемого для простоты равным единице)

$$p(x, t; x_0) = \int_{x_0}^x \exp \left\{ \int_0^t \left[-\frac{(\dot{x} + \eta(x))^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \eta'(x) \right] d\tau \right\} dx (\tau). \quad (1.2)$$

Показатель экспоненты преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[-\frac{(\dot{x} + \eta(x))^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \eta'(x) \right] d\tau &= - \int_0^t \frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2} d\tau - 2 \int_0^t \frac{\dot{x}\eta(x)}{2\sigma^2} d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \left[\frac{\eta^2(x)}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \eta'(x) \right] d\tau \\ \int_0^t \dot{x}\eta(x(\tau)) d\tau &= \int_0^t \frac{dx}{d\tau} \frac{d\varphi}{dx} d\tau = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} d\varphi = \varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \Delta\varphi(x, x_0). \end{aligned}$$

Обозначим, кроме того, $\int_0^t \left[\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \eta'(x) \right] d\tau = \int_0^t V(x(\tau)) d\tau$. Учитывая, что $\Delta\varphi(x, x_0)$ не зависит от вида траектории, получаем

$$\begin{aligned} p(x, t; x_0) &= \exp \left(-\frac{\Delta\varphi}{\sigma^2} \right) \int_{x_0}^x \exp \left[- \int_0^t V(x) d\tau \right] \times \\ &\quad \times \exp \left(- \int_0^t \frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2} d\tau \right) dx(\tau) = \exp \left(-\frac{\Delta\varphi}{\sigma^2} \right) I(x, x_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Интеграл по траектории $I(x, x_0)$ представляет собой символическую запись интеграла по условной мере Винера $d_W x$ (интеграла Винера [7])

$$I(x, x_0) = \int_{x_0}^x \exp \left(- \int_0^t V(x) d\tau \right) d_W x. \quad (1.4)$$

Разлагая экспоненту в ряд

$$\exp \left(- \int_0^t V(x) d\tau \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\int_0^t V(x) d\tau \right]^k,$$

получаем для (1.4)

$$I(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{x_0}^x \left[\int_0^t V(x) d\tau \right]^k d_W x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} v_k.$$

В [9] производится вычисление v_k , которое сводит интеграл по траектории к обычному многомерному интегралу и, соответственно, к рекуррентному выражению v_k через v_{k-1}

$$v_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right], \quad (1.5)$$

$$v_k = k \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dx_\tau \exp\left[-\frac{(x-x_\tau)^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right] V(x(\tau)) v_{k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}.$$

Получаем окончательно искомую формулу для переходной вероятности, которая может рассматриваться как решение уравнения Фоккера-Планка при априорном распределении в виде δ -функции (с точностью до нормировочного коэффициента)

$$p(x, t; x_0) = \exp\left[-\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\sigma^2}\right] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} v_i(x, t; x_0), \quad (1.6)$$

где v_i определяется выражением (1.5), в котором

$$V(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (1.7)$$

Ограничивааясь первыми двумя членами, получаем приближенное выражение

$$p(x, t; x_0) = \exp\left(-\frac{\Delta\varphi(x, x_0)}{\sigma^2}\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_\tau \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{d\varphi}{dx_\tau} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx_\tau^2} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^t \exp\left(-\frac{(x-x_\tau)^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(x_\tau-x_0)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \left. \right\}. \quad (1.8)$$

В результате приближенного интегрирования формула (1.8) принимает следующий вид

$$p(x, t; x_0) = \exp\left[-\frac{\Delta\varphi(x, x_0)}{\sigma^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \circ \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_\tau \left[\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{d\varphi}{dx_\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx_\tau^2} \right] \times \right.$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{3} \frac{(x-x_\tau)^2}{2\sigma^2 t} \right) \frac{1}{x_\tau - x_0} \left. \right\}.$$

Вообще говоря, вычисление по формуле (1.8) определяется физическими особенностями рассматриваемой задачи, в частности, особенностями рельефа $\varphi(x)$. Например, использование условия, где x и x_0 являются экстремумами (прохождение через потенциальный барьер), вероятно, упрощает выкладки.

Кроме того, интересно отметить, что для трехмерного нормального распределения интеграл по времени берется в квадратурах, поэтому, используя фейнмановские интегралы (см. ниже раздел 2), можно получить приближенное выражение для вероятности перехода в трехмерном случае.

2 ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТА

Используем фейнмановский подход для выяснения физического смысла полученных результатов. Перепишем интеграл Винера (1.4) следующим образом

$$I(x, x_0) = \int_{x_0}^x \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^t \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \sigma^2 V(x) \right) d\tau \right] dx(\tau). \quad (2.1)$$

Рассмотрим подынтегральное выражение

$$\exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^t \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \sigma^2 V(x) \right) d\tau \right]. \quad (2.2)$$

Показатель степени в (2.2) получает физическую интерпретацию без сомножителя $\frac{1}{\sigma^2}$, который аналогичен массе частицы, либо как интеграл от гамильтониана (полной энергии) $H(x) = K + \Pi = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sigma^2 V(x)$ частицы с единичной массой, двигающейся с кинетической энергией $\zeta = \frac{\dot{x}^2}{2}$ в потенциальном поле $\Pi = \sigma^2 V$, либо, по непосредственной интерпретации Фейнмана, как интеграл от лагранжиана $L = K - \Pi = \frac{\dot{x}}{2} - (-\sigma^2 V)$ частицы, двигающейся в потенциальном поле $\Pi = -\sigma^2 V$.

По фейнмановской интерпретации получаем далее

$$\exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \int_0^t L(x) d\tau \right] = \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} S(x, t) \right], \quad (2.3)$$

где $S(x, t)$ — функция действия, рассматривавшаяся в [3] при исследовании физических моделей случайногопоиска. Отличие (2.3) от собственно фейнмановской записи непринципиально и состоит только в сомножителе $\frac{1}{\sigma^2}$, вместо которого Фейнман, искавший квантовомеханическую аналогию гамильтоновой функции действия, пишет $\frac{i}{\hbar}$, где \hbar — постоянная Планка. Дополнительное различие, состоящее в том, что Фейнман искал выражение для амплитуды вероятности, в то время,

как мы получаем выражение для самой плотности вероятности, также носит чисто формальный характер в данном случае.

Подставив (2.3) в (2.1), получаем аналог фейнмановского интеграла по траектории

$$I = \int_{x_0}^x \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} S(x, t) \right] dx(\tau). \quad (2.4)$$

Вычисление этого интеграла, представляющего собой, по сути, другую запись интеграла Винера (1.4), Фейнман проводит аналогично методике, рассмотренной выше, разлагая в ряд и ограничиваясь двумя первыми членами ряда. Этот подход в физике носит название теории возмущений.

Для использования физической интерпретации Фейнмана рассмотрим два первых члена ряда (1.6) (с точностью до нормировочных коэффициентов)

$$\nu_0 = \int_{x_0}^x \exp \left[- \int_0^t \frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2} d\tau \right] dx(\tau), \quad (2.5)$$

$$\nu_1 = \int_{x_0}^x \exp \left[- \int_0^t \frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2} d\tau \right] \int_0^t V(x(\tau)) d\tau dx(\tau). \quad (2.6)$$

Первый член можно физически интерпретировать как интегрирование по свободной траектории, т. е. по траектории частицы, движущейся при отсутствии внешних сил. Интерпретация второго члена несколько сложнее.

Изменяя порядок интегрирования, перепишем (2.6) так:

$$\nu_1(x, x_0) = \int_0^t F(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

где $F(\tau) = \int_{x_0}^x \exp \left(- \int_0^\tau \frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2} d\tau \right) V(x(\tau)) dx(\tau)$. Интеграл по траектории

$F(\tau)$ получает следующую физическую интерпретацию.

Это функционал плотности вероятности, просуммированный по всем траекториям с весом $V(x(\tau))$ для каждой траектории. Для каждого фиксированного момента времени это взвешивание имеет тот физический смысл, что до и после этого момента траектория частицы совпадает со свободной траекторией. А в момент τ для частицы на траектории $x(\tau)$ происходит ее взаимодействие с полем $V(x)$ и рассеяние на потенциале $V(x)$ в точке x_τ .

Исходя из этой интерпретации, предположим, что каждая траектория $x(\tau)$ проходит в момент τ через точку x_τ . Тогда нужно просто проинтегрировать по всем этим точкам, и функционал $F(\tau)$ запишется в виде

$$F(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_0(x, x_\tau) V(x_\tau) \nu_0(x_\tau, x_0) dx_\tau, \quad (2.8)$$

т. е. интеграл по траектории удалось свести к обычному одномерному интегралу.

Подстановка этого выражения в (2.7) дает

$$v_1(x, x_0) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x, x_\tau) V(x_\tau) v_0(x_\tau, x_0) dx_\tau d\tau.$$

Учитывая, что, как легко показать, последовательным интегрированием по мере Винера для свободной траектории

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad (2.9)$$

получаем окончательно

$$\begin{aligned} v_1 = & \int_{-\infty}^{+\infty} dx_\tau V(x_\tau) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(x - x_\tau)^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right] \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{(x_\tau - x_0)^2}{2\sigma^2\tau}\right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассуждая аналогичным образом для сколь угодно большого числа возможных рассеяний частицы на потенциале, получаем члены любого порядка. В связи с этим Фейнман развел наглядный графический метод (диаграммы Фейнмана), получивший в настоящее время большое распространение в физике.

Выражения (2.9) и (2.10) полностью совпадают с соответствующими слагаемыми (1.8), хотя получены без использования предельных переходов, а на основании только физической интерпретации явления, описываемого данным процессом.

Полученное методом функционального интегрирования выражение (1.6) для переходной вероятности может быть использовано для решения задачи об оценке быстроты сходимости процесса случайного поиска (см. раздел 1). Оно позволяет в принципе определить зависимость от времени плотности вероятности попадания в глобальный экстремум при заданных параметрах процесса поиска (дисперсия шума, потенциальный рельеф).

Дальнейшие исследования могут быть продолжены как в направлении достижения большей математической строгости для обоснования полученного результата, так и в направлении практических применений этого результата, позволяющих упростить соответствующие выражения с учетом реальных условий конкретной задачи.

Представляет интерес, например, следующая проблема. Кац в [9] показал, что условный интеграл Винера, определяемый выражением (1.4), является решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - V(x) I, \quad (3.1)$$

где $V(x)$ определяется выражением (1.7) для процесса случайного поиска. (Возможно также и обратное выражение потенциала случайного поиска $\varphi(x)$ через потенциал $V(x)$. В частности, для малых σ^2

$$\Delta\varphi(x, x_0) = \sqrt{2} \sigma \int_{x_0}^x \sqrt{V(x)} dx.$$

А так как выражение (1.6) является решением уравнения Фоккера—Планка и в то же время определяется интегралом Винера I , то на основании этого факта представляет интерес выяснение связи между

уравнением Фоккера—Планка и уравнением (3.1) (аналогичным уравнению Шредингера). Отметим, что в настоящее время уже появляются физические работы, исследующие связь между уравнением Фоккера—Планка и уравнением Шредингера путем квантовомеханического описания броуновского движения и тем самым дающие основания для причинной статистической интерпретации квантовой механики [10, 11].

Иными словами, математическая проблема заключается в выяснении связи между мерой Винера и нелинейным преобразованием меры Винера через дифференциальные уравнения, им соответствующие (уравнение (3.1) и уравнение Фоккера—Планка). Дополнительным основанием к этому служит тот факт, что интеграл Винера удовлетворяет соотношению, аналогичному уравнению Чепмена—Колмогорова (это и использовал Фейнман для амплитуды вероятности), не удовлетворяя только условиям нормировки.

Важной задачей является разработка методов упрощения выражения (1.6) в соответствии с реальными условиями задачи. В этом смысле представляет интерес получение из выражения (1.6) уже известных результатов, что не всегда просто из-за сравнительной новизны аппарата интегрирования по траекториям. В частности, исследование асимптотических свойств (1.6) при $t \rightarrow \infty$ должно привести к известному результату Бернштейна [1]. Использование квадратичной формы для потенциального рельефа должно также привести к известному результату решения уравнения Фоккера—Планка при линейном коэффициенте сноса. Интересно также рассмотреть частный случай наличия потенциального барьера между началом и концом траектории, позволяющий разумно аппроксимировать (1.6) и получить результат Крамерса [3].

Наконец, дальнейшее развитие методики функционального интегрирования заключается в распространении полученных результатов на случай явной зависимости от времени, как коэффициента сноса, так и дисперсии. Учет зависимости от времени представляет большой практический интерес, так как приводит к управляемому случайному поиску и тем самым к исследованию адаптивных процессов самоорганизации и обучения.

ЛИТЕРАТУРА

- Д. Б. Юдин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, (1966).
- Э. М. Вайсборд, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 24 (1967).
- А. И. Яблонский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, 8, 1229 (1970).
- F. W. Wiegel. Functional integration and the brownian movement in a field of force. Physica, 37, 105 1967.
- G. I. Papadopoulos. Functional integrals in Brownian motion. Journal of physics, ser. 2, A, 1, № 4, 1968.
- Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траектории, изд. Мир, М., 1968
- И. М. Гельфанд, А. И. Яглом, УМН, 11, № 1, 6 (1956).
- А. А. Бейлинсон, ДАН СССР, 128, № 5 (1959).
- М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, изд. Мир, М., 1965
- L. de la Pena—auegbach, E. Braun, L. S. Garcia Colin. Journal of mathematical Physics, V. 9, № 5 (1968).
- L. F. Favella. Ann. Inst. Henry Poincaré. Vol. VII, n°1, 1967. Sec. A. Physique théorique.

TRANSITION PROBABILITY IN RANDOM SEARCH PROBLEM AND
INTEGRATION ALONG TRAJECTORIES*A. I. Yablonsky*

Analogy of random search with the Brownian motion is used to determine the transition probability of random search by the method of functional integration in infinite-dimension space. It is shown that determination of the transition probability is brought to the calculation of the Wiener integral and this yields an expression for transition probability in the form of a series.

An approximate expression for transition probability is given and physical interpretation of the result basing on the Feynman integrals is provided. Further possibilities of the indicated approach are considered.

УДК 62 — 507

К ТЕОРИИ ПОИСКА КОЛЛЕКТИВОМ НЕЗАВИСИМЫХ АВТОМАТОВ

В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт

Исследуется процесс поиска при оптимизации многопараметрических линейных объектов коллективом независимых автоматов с помощью однородных марковских цепей. Найдены предельные распределения вероятностей состояний системы для некоторых значений параметров оптимизирующих автоматов.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с коллективным поведением, приобретают в настоящее время все большее значение, поскольку они направлены на решение проблемы оптимального управления большими системами, функционирующими в средах с неизвестными заранее параметрами.

В работах [1, 2] предлагается оптимизировать многомерные системы при помощи коллективов независимых автоматов. Там же приводятся результаты обширного экспериментального исследования на ЭВМ предложенного способа оптимизации. Рипой в работе [3] для случая линейного функционала размерности два проведено исследование статистических свойств оптимизирующих автоматов и их сравнение с алгоритмом покоординатного обучения. Настоящая работа содержит теоретические результаты анализа процесса оптимизации многомерных линейных объектов коллективом независимых автоматов. С помощью однородных марковских цепей найдено предельное распределение вероятностей состояний системы в случае стохастических автоматов с глубинами памяти, равными единице, при их работе как в обстановке помех, так и без них. Рассмотрен также поиск детерминированными автоматами.

Найденные в работе предельные распределения вероятностей состояний системы поиска коллективом независимых автоматов позволяют определить значения различных характеристик поиска и зависимость этих характеристик как от параметров системы, так и от параметров, характеризующих внешние возмущающие воздействия.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

В работе [1] предложена система оптимизации, структурная схема которой изображена на рис. 1. Здесь $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ — автоматы, перерабатывающие значения $Z(x_1, \dots, x_n)$ в значения переменных x_1, \dots, x_n согласно соотношениям

$$x_j^t = x_j^{t-1} + h_j \tau_j^t, \quad (1.1)$$

где τ_j^t — выходное действие j -го автомата, h_j — величина шага изменения j -ой координаты.

Для оптимизации были использованы стохастические автоматы с линейной тактикой [4] с $2m$ состояниями памяти, смена которых в зави-

симости от знака ΔZ происходит в соответствии с графом, изображенным на рис. 2.

Выходное действие j -го автомата однозначно определяется его состоянием памяти

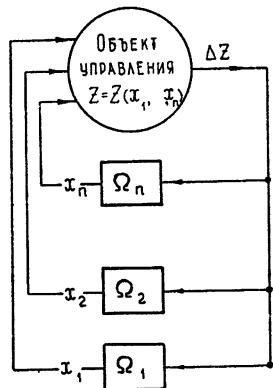
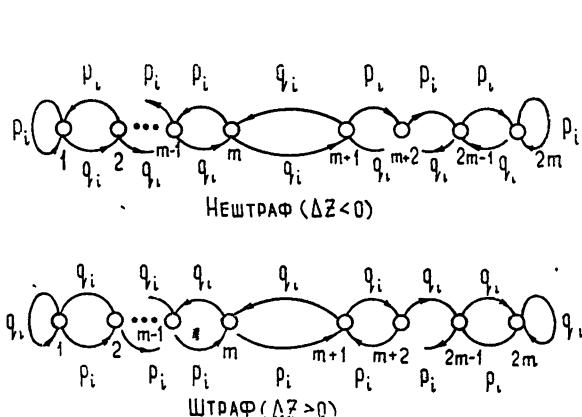


Рис. 1

Рис. 2. Граф автомата Ω_i .

$$\tau_j^t = F(\varphi_j) = \begin{cases} -1, & \text{если } 1 < \varphi_j \leq m_j \\ +1, & \text{если } m_j + 1 \leq \varphi_j \leq 2m_j, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

где φ_j — номер состояния памяти автомата Ω_j , m_j — величина его глубины памяти.

Для изучения статистических свойств системы оптимизации многомерного объекта коллективом независимых автоматов может быть привлечен математический аппарат дискретных цепей Маркова [5]. При этом необходимо определить состояния системы, а также вероятности переходов для этих состояний.

За состояние системы примем множество возможных значений вектора $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, которое обозначим через $M\{\varphi\}$. Из (1), (2) следует, что состояние системы однозначно определяет вектор шага $\bar{\Delta x} = \{h_1 \tau_1, \dots, h_n \tau_n\}$ в пространстве оптимизируемых параметров $X(x_1, \dots, x_n)$.

В процессе оптимизации вектор памяти $\bar{\varphi}$ переходит из одного состояния в другое в соответствии с графиком переходов автомата Ω_k ($k = 1, \dots, n$) (рис. 2). Общее число возможных значений вектора $\bar{\varphi}$ конечно и равно $2^n \prod_{k=1}^n m_k$. Пусть $P_{\bar{i}}^{\bar{j}}$, $\bar{i}, \bar{j} \in M\{\varphi\}$ означает вероятность пе-

рхода из состояния \bar{i} в \bar{j} за один шаг. Тогда переход системы из состояния в состояние является марковским процессом. Легко заметить, что для линейных функционалов $Z(x_1, \dots, x_n)$ этот процесс будет стационарным (однородным), так как вероятности перехода $P_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ в этом случае не зависят от положения системы в пространстве оптимизируемых параметров X .

Разобьем множество состояний системы $M\{\varphi\}$ на два непересекающихся подмножества $M^+\{\varphi\}$ и $M^-\{\varphi\}$, причем $\varphi \in M^+\{\varphi\}$, если $\Delta Z > 0$ вдоль $\bar{\Delta x}$, соответствующего данному φ , в противном случае ($\Delta Z < 0$) —

$\varphi \in M^- \{\varphi\}$. Случай, когда $\Delta Z = 0$, который возможен при совпадении линий уровня функции $Z(x_1, \dots, x_n)$ с одним из поисковых движений Δx , ниже не рассматривается.

2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОМАТЫ С ПАМЯТЬЮ ЕДИНИЦА

В данном разделе будем рассматривать оптимизацию коллективом автоматов с глубинами памяти всех автоматов, равными единице. В этом случае вектор состояний системы $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ имеет ровно 2^n различных значений. Для сокращения записи перенумеруем их следующим образом: номера от 1 до 2^{n-1} присваиваются состояниям системы, входящим в $M^+ \{\varphi\}$. Остальным состояниям, входящим в $M^- \{\varphi\}$, номера присваиваются по следующему правилу: если состояние $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ имеет номер $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ (т. е. $\Delta Z_k < 0$), то номер $k + 2^{n-1}$ присваивается такому состоянию из $M^+ \{\varphi\}$, для которого $\Delta Z_{k+2^{n-1}} = -\Delta Z_k$. Таким образом, в новых обозначениях состояниями системы являются точки действительной оси $1, 2, \dots, 2^n$, причем состояния $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \in M^- \{\varphi\}$, а $i = 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n \in M^+ \{\varphi\}$.

В случае стохастических ($0 < p_i < 1, i = 1, \dots, n$) автоматов множество состояний системы образует эргодический класс, состоящий из одного подкласса. Отсюда следует, что существуют предельные вероятности $U(i)$ того, что система будет находиться в состояниях $i = 1, \dots, 2^n$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Предельные вероятности $U(i)$ и $U(i+s)$ состояний системы $i = 1, 2, \dots, s$, где $s = 2^{n-1}$, определяются следующими формулами:

$$U(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s P_j^i; \quad U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s \bar{P}_j^i, \quad (2.1)$$

где вероятность перехода P_j^i для стохастических автоматов, глубина памяти которых равна единице, имеет вид

$$P_j^i = \prod_{k=1}^n x_k, \quad (2.2)$$

причем $x_k = p_k$ ($k = 1, \dots, n$), если k -я компонента вектора $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, имеющего номер j ($j = 1, \dots, s$) совпадает с k -ой компонентой вектора состояний, имеющего номер i ($i = 1, 2, \dots, 2^n$). В противном случае $x_k = q_k$. Для состояний $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, принадлежащих $M^+ \{\varphi\}$, т. е. имеющих номер $j = s + 1, \dots, 2s$, наоборот, в случае совпадения k -ой компоненты $x_k = q_k$, в случае несовпадения $x_k = p_k$ ($k = 1, \dots, n$).

Легко видеть, что вероятности перехода P_j^i удовлетворяют следующим свойствам.

Свойство 1. $P_j^i = \bar{P}_{j+s}^i \quad (j = 1, \dots, s; i = 1, \dots, 2s)$.

Свойство 2. $P_j^{i+s} = P_j^i \quad (j = 1, \dots, 2s; i = 1, \dots, s)$,

где $\bar{P}_j^i = \prod_{k=1}^n (1 - x_k)$.

Свойство 3. $P_j^i = P_i^i$, если $i, j \in M^- \{\varphi\}$ или $i, j \in M^+ \{\varphi\}$; $P_j^i = \bar{P}_j^i$, если $i \in M^- \{\varphi\}$ и $j \in M^+ \{\varphi\}$ или $i \in M^+ \{\varphi\}$ и $j \in M^- \{\varphi\}$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Сумма предельных вероятностей $U(i)$ и $U(i+s)$ состояний i и $i+s$ постоянна для всех $i = 1, 2, \dots, s$ и равна $\frac{1}{2^{n-1}}$, т. е.

$$U(i) + U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Доказательство леммы. Запишем систему уравнений, которой удовлетворяют предельные вероятности состояний системы

$$\begin{aligned} U(i) &= \sum_{j=1}^{2s} P_j^i U(j), \\ U(i+s) &= \sum_{j=1}^{2s} P_j^{i+s} U(j). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя свойства 1 и 2 вероятностей P_j^i , систему уравнений (2.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} U(i) &= \sum_{j=1}^s P_j^i [U(j) + U(j+s)], \\ U(i+s) &= \sum_{j=1}^s \bar{P}_j^i [U(j) + U(j+s)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сложив уравнения системы (2.4), соответствующие состояниям i и $i+s$, получим

$$U(i) + U(i+s) = \sum_{j=1}^s (P_j^i + \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)] \quad (2.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s).$$

Утверждение леммы, очевидно, состоит в том, что система (2.5) имеет следующее решение

$$U(i) + U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.6)$$

Действительно, подставив (2.6) в систему (2.5), получим

$$\sum_{j=1}^s (P_j^i + \bar{P}_j^i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.7)$$

Из свойств 1—3 вероятностей P_j^i следует

$$\sum_{j=1}^s (P_j^i + \bar{P}_j^i) = \sum_{j=1}^{2s} P_j^i = 1, \quad (2.8)$$

что и завершает доказательство леммы.

Подставив (2.8) в уравнения системы (2.4), получим утверждение теоремы.

3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОМАТЫ (СЛУЧАЙ С ПОМЕХАМИ)

В настоящем разделе рассматривается коллектив стохастических автоматов с глубинами памяти, равными единице, при оптимизации линейного объекта в обстановке помех. На приращение функции качества оптимизируемой системы накладывается помеха ξ , которая яв-

ляется случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и с симметричной функцией плотности вероятности. Тогда поощрение или штрафование автоматов коллектива производится одновременно по сумме

$$\Delta Z'_i = \Delta Z_i + \xi \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n). \quad (3.1)$$

В отличие от случая, когда помехи отсутствовали, теперь в любом состоянии $i \in M^{\pm}\{\varphi\}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) автоматы могут быть оштрафованы с некоторой вероятностью, так как за счет помехи величина $\Delta Z'_i$ может оказаться положительной. Эта вероятность r_i равна

$$\bar{r}_i = P(\Delta Z'_i > 0 / \Delta Z_i < 0) \quad (i = 1, \dots, s). \quad (3.2)$$

Вероятность того, что $\Delta Z'_i < 0$ при условии, что $\Delta Z_i < 0$, будет, очевидно, равна

$$P(\Delta Z'_i < 0 / \Delta Z_i < 0) = 1 - \bar{r}_i = r_i. \quad (3.3)$$

В силу линейности функции качества и ограничений, наложенных на помеху ξ , для состояний $i \in M^{\pm}\{\varphi\}$ ($i = s+1, \dots, 2s$), вероятности штрафа и нештрафа соответственно равны

$$P(\Delta Z'_i > 0 / \Delta Z_i > 0) = r_i, \quad P(\Delta Z'_i < 0 / \Delta Z_i > 0) = \bar{r}_i, \quad (3.4)$$

$$\text{т. е.} \quad r_i = \bar{r}_{i+s}, \quad \bar{r}_i = r_{i+s}.$$

Докажем следующее утверждение: стационарные вероятности $U(i)$ и $U(i+s)$ состояний системы i , $i = 1, \dots, s$ при наличии помех определяются по формулам

$$U(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s (r_j P_j^i + \bar{r}_j \bar{P}_j^i),$$

$$U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s (\bar{r}_j P_j^i + r_j \bar{P}_j^i) \quad (i = 1, \dots, s). \quad (3.5)$$

Предварительно покажем, что в случае действия помех справедлива лемма, доказанная в разделе 2,

$$U(i) + U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (i = 1, \dots, s). \quad (3.6)$$

Запишем систему уравнений, которой удовлетворяют стационарные вероятности $U(i)$ и $U(i+s)$ состояний системы i и $i+s$ ($i = 1, \dots, s$)

$$U(i) = \sum_{j=1}^s (r_j P_j^i + \bar{r}_j \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)],$$

$$(3.7)$$

$$U(i+s) = \sum_{j=1}^s (\bar{r}_j P_j^i + r_j \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)] \quad (i = 1, \dots, s).$$

Используя свойства вероятностей P_j^i и r_i , запишем систему (3.7) в виде

$$U(i) = \sum_{j=1}^s (r_j P_j^i + \bar{r}_j \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)], \quad (3.8)$$

$$U(i+s) = \sum_{j=1}^s (\bar{r}_j P_j^i + r_j \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)] \\ (i = 1, \dots, s).$$

Складывая уравнения системы (3.8), соответствующие состояниям i и $i+s$ ($i = 1, 2, \dots, s$), получим

$$U(i) + U(i+s) = \sum_{j=1}^s (P_j^i + \bar{P}_j^i) [U(j) + U(j+s)] \quad (3.9)$$

$$(i = 1, \dots, s).$$

Подставив (3.6) в (3.9), докажем утверждение леммы, так как

$$\sum_{j=1}^s (P_j^i + \bar{P}_j^i) = \sum_{j=1}^{2s} P_j^i = 1. \quad (3.10)$$

Формулы для стационарных вероятностей состояний системы (3.5) получим, подставив (3.6) в (3.8)

$$U(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s (\bar{r}_j P_j^i + r_j \bar{P}_j^i), \quad (3.11)$$

$$U(i+s) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^s (r_j P_j^i + \bar{r}_j \bar{P}_j^i) \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Пусть помеха ξ является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 , тогда вероятности r_i и \bar{r}_i имеют вид

$$r_i = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{|\Delta Z_i|}{\sigma} \right) \right]; \quad \bar{r}_i = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{|\Delta Z_i|}{\sigma} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s),$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Из (3.12) следует, что при возрастании уровня помех $\sigma \rightarrow \infty$ вероятности r_i и \bar{r}_i стремятся к $\frac{1}{2}$ и распределение вероятностей состояний системы (3.5) приближается к равномерному, в результате чего поиск перестает работать. При $\sigma \rightarrow 0$ $r_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и распределение (4.5) совпадает с распределением (2.1), полученным в пункте 2.

4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ АВТОМАТЫ

Рассмотрим предельный случай, когда вероятности p_i ($i = 1, \dots, n$). смены состояний всех автоматов $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ с глубинами памяти соответственно m_1, \dots, m_n равны единице. В этом случае система будет не эргодической, так как множество ее состояний распадается на несколько замкнутых классов, состоящих из невозвратных и поглощающих состояний.

Поведение системы может быть описано направленным графом, структура которого в случае $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$ и в предположении, что градиент функций $Z(x_1, \dots, x_n)$, находится между биссектрисами первого и четвертого квадрантов, показана на рис. 3. Поведение системы интерпретируется движением изображающей точки в соответствии с топологией графа.

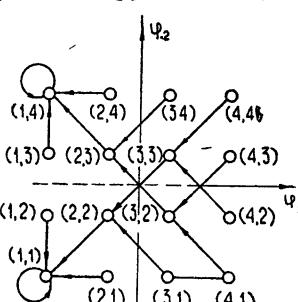


Рис. 3.

Из графа, изображенного на рис. 3, следует, что состояния (1.1) и (1.4) — поглощающие, остальные — невозратные. Оба состояния (1.1) и (1.4) принадлежат $M^-(\varphi)$, т. е. в зависимости от начальных состояний система за конечное число шагов с вероятностью единица попадет в одно из поглощающих состояний, соответствующее движению в сторону уменьшения функции $Z(x_1, \dots, x_n)$.

5. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ АВТОМАТЫ (ПОИСК С ПОМЕХАМИ)

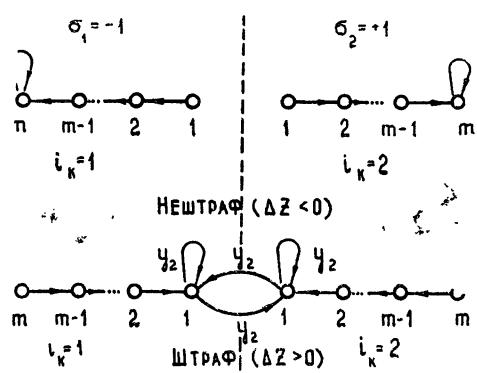
Если помеха действует на входы всех автоматов, на которые поступает величина приращения функции качества ΔZ , то ее можно отнести к возможным сбоям в работе автоматов, когда каждый автомат Ω_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) воспринимает действительное значение знака ΔZ_i , с некоторой вероятностью p_i и мы придем к случаю поиска стохастическими автоматами (с вероятностями смены состояний p_i и $1 - p_i$), который для автоматов с $m_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) рассматривался в разделе 2.

Если же помеха действует в канале вычисления знака ΔZ , тогда поощрение или штрафование автоматов коллектива производится одновременно по сумме $\Delta Z' = \Delta Z + \xi$. В этом случае система будет не эргодической, так как множество ее состояний разбивается на несколько эргодических подклассов.

6. ПОИСК КОЛЛЕКТИВОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ ТИПА $B_{2m, 2}$ В ОБСТАНОВКЕ ПОМЕХ

В предыдущем разделе было показано, что при поиске коллективом детерминированных автоматов как в обстановке помех, так и без них система не эргодическая, так как множество ее состояний состоит из нескольких замкнутых подклассов. Чтобы система стала эргодической, несколько изменим детерминированные автоматы $L_{2m, 2}$ с линейной тактикой, введя в них элемент случайности [6]. На рис. 4 приведен график такого автомата — назовем его стохастическим автоматом типа $B_{2m, 2}$.

В данном разделе будем рассматривать случай оптимизации линейного объекта коллективом одинаковых автоматов типа $B_{2m, 2}$ в обстановке помех. Помеха действует в канале измерения величины приращения функции качества ΔZ , т. е. штраф или поощрение все автоматы коллектива получают одновременно.

Рис. 4. Граф переходов автомата $B_{2m, 2}$

Из графа, приведенного на рис. 4, следует, что каждый автомат $B_{2m, 2}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) коллектива может находиться в одном из $2m$ состояний φ_{i_k, j_k} ($i_k = 1, 2; j_k = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$). При этом, находясь в состоянии φ_{i_k, j_k} , каждый автомат совершает действие σ_{i_k} ($\sigma_{i_k} = -1$ при $i_k = 1$; $\sigma_{i_k} = +1$ при $i_k = 2$; $k = 1, \dots, n$). За состояние системы примем совокупность векторов $(i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n)$, компоненты которых (i_k, j_k) означают, что k -й автомат $B_{2m, 2}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) коллектива автоматов находится в состоянии φ_{i_k, j_k} . Для сокращения записи присвоим каждому значению вектора (i_1, \dots, i_n) номер $i = 1, 2, \dots, 2s$, аналогично тому, как это было сделано в разделе 2. Тогда состояния

$$(i; j_1, \dots, j_n) \in M \text{ при } i = 1, 2, \dots, s;$$

$$(i; j_1, \dots, j_n) \in M^+ \text{ при } i = s + 1, \dots, 2s.$$

Если помеха ξ , накладываемая на систему, является случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и симметричной функцией плотности вероятностей, то в состояниях $(i; j_1, \dots, j_n) \in M^- \{\varphi\}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) коллектив награждается с вероятностью r_i и штрафуется с вероятностью $\bar{r}_i = 1 - r_i$, а в состояниях $(i; j_1, \dots, j_n) \in M^+ \{\varphi\}$ ($i = s + 1, \dots, 2s$) соответственно с \bar{r}_i и r_i , т. е. $r_i = r_{i+s}$, $\bar{r}_i = \bar{r}_{i+s}$ ($i = 1, \dots, s$).

Переход системы из состояния в состояние является марковским стационарным процессом, причем, если все $r_i > 0$, то этот процесс является эргодическим. Отсюда следует, что существуют предельные вероятности $U(i; j_1, \dots, j_n)$ того, что система будет находиться в состояниях $i = 1, \dots, 2s; j_n = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$, которые не зависят от начальных состояний системы. Отметим, прежде всего, что все состояния системы за исключением состояний, удовлетворяющих условию $j_1 = j_2 = \dots = j_n$, являются несущественными, поэтому для этих состояний $(i; j_1, \dots, j_n)$ соответствующие $U(i; j_1, \dots, j_n) = 0$. Вследствие этого будем обозначать через $U(i, \alpha)$ предельную вероятность состояния $U(i; \alpha, \dots, \alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, 2s; \alpha = 1, \dots, m$).

Запишем систему уравнений, которой удовлетворяют величины $U(i, \alpha)$ ($i = 1, \dots, 2s; \alpha = 1, \dots, m$).

$$U(i, \alpha) = r_i U(i, \alpha - 1) + \bar{r}_i U(i, \alpha + 1) \quad (\alpha = 2, \dots, m - 1), \quad (6.1)$$

$$U(i, m) = r_i U(i, m - 1) + \bar{r}_i U(i, m), \quad (6.2)$$

$$U(i, 1) = \bar{r}_i U(i, 2) + \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^s [r_j U(i, 1) + \bar{r}_j U(j + s, 1)] \quad (6.3)$$

для $i = 1, 2, \dots, s$.

$$U(i + s, \alpha) = \bar{r}_i U(i + s, \alpha - 1) + r_i U(i + s, \alpha + 1) \quad (6.4)$$

$$(\alpha = 2, \dots, m - 1),$$

$$U(i + s, m) = \bar{r}_i U(i + s, m - 1) + r_i U(i + s, m), \quad (6.5)$$

$$U(i + s, 1) = \bar{r}_i U(i + s, 2) + \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^s [r_j U(j, 1) + \bar{r}_j U(j + s, 1)] \quad (6.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s).$$

Предельная вероятность Q_i нахождения системы в состояниях, соответствующих i -му направлению поискового движения, вдоль которого приращение функции качества равно ΔZ_i ($i = 1, 2, \dots, 2s$), определяется выражением

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^m U(i, \alpha) \quad (i = 1, 2, \dots, 2s). \quad (6.7)$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (6.1) — (6.6) и подставив найденное решение в (6.7), получим

$$Q_i = \frac{r_i^m - \bar{r}_i^m}{r_i^m (r_i - \bar{r}_i) A}; \quad Q_{i+s} = \frac{r_i^m - \bar{r}_i^m}{r_i^m (r_i - \bar{r}_i) A}, \quad (6.8)$$

где

$$A = \sum_{j=1}^s \left[\frac{r_i^m - \bar{r}_j^m}{r_j - \bar{r}_j} \left(\frac{1}{r_j^m} + \frac{1}{\bar{r}_j^m} \right) \right].$$

Пусть помеха, накладываемая на функцию качества оптимизируемой системы, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 . Тогда вероятности r_i и \bar{r}_i будут равны

$$r_i = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{|\Delta Z_i|}{\sigma} \right) \right]; \quad \bar{r}_i = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{|\Delta Z_i|}{\sigma} \right) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.9)$$

На предельное распределение (6.8) существенно влияет уровень помехи; нетрудно видеть, что при $\sigma \rightarrow \infty$ все $Q_i \rightarrow \frac{1}{2^n}$ ($i = 1, 2, \dots, 2s$), т. е. распределение стремится к равномерному, вследствие чего поиск перестанет работать. Пусть функция качества $Z(x_1, \dots, x_n)$ такова, что

$$|\Delta Z_{i*}| = \max_i |\Delta Z_i|. \quad (6.10)$$

В этом случае нетрудно показать, что при $m \rightarrow \infty$ $Q_{i*} \rightarrow 1$, $Q_i \rightarrow 0$ для $i \neq i^*$. Поскольку вероятность Q_i при длительном функционировании системы пропорциональна доле времени, в течение которого система совершает i -ое действие, то имеет место асимптотическая оптимальность по глубине памяти оптимизирующих автоматов, при достаточно большом m система с вероятностью, близкой к единице, будет двигаться вдоль градиента функции качества.

ЛИТЕРАТУРА

- Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапорт, Об оптимизации независимыми детерминированными и стохастическими автоматами, Уч. записки НИИ ПМК и ВМК ГГУ, Прикладная математика и кибернетика, Горький, 1967
- В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапорт, Изв. высш. ун-тов. — Радиофизика, 11, № 7, 1019 (1968).
- К. К. Рипа, Вопросы кибернетики и вычислительной математики, вып. 28, Ташкент, 1969.
- М. Л. Цетлин, Автоматика и телемеханика, 22, № 10, 1345 (1961).
- В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, М., 1949
- Э. М. Вайсборт, Автоматика и телемеханика, № 3, 91 (1968).

TO THE THEORY OF SEARCH BY A COLLECTIVE
OF AUTONOMOUS AUTOMATA

V. P. Grigorenko, A. N. Rapoport

The paper presents an investigation of a search process when optimizing multi-parametric linear plants by autonomous automata collective with the aid of homogeneous Markovian chains. Limiting distributions of system's states probabilities are found for some values of parameters of optimizing automata.

УДК 62—507

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

В. Н. Гребенщиков

Предлагается алгебраический метод синтеза абстрактных конечных автоматов по заданным регулярным выражениям алгебры событий, обеспечивающий минимальность числа состояний. Описывается его применение в качестве основы сквозных методов синтеза, одновременно решающих задачи построения диаграммы переходов, противогоночного кодирования состояний и структурного синтеза автомата

В настоящей статье предлагается алгебраический метод синтеза абстрактных конечных автоматов по заданным регулярным выражениям алгебры событий, обеспечивающий получение минимального числа состояний. Метод может быть использован в качестве основы сквозных методов синтеза, одновременно решающих задачи построения диаграммы переходов, противогоночного кодирования состояний и структурного синтеза автомата. При этом в зависимости от поставленных требований может обеспечиваться повышенная надежность работы или более эффективная минимизация структурной схемы автомата при сопутствующем введении в диаграмму переходов избыточных состояний.

Конечным автоматом назовем систему объектов $M = (N, A, U, \varphi, \psi)$, где N — множество состояний $1, 2, \dots, n$, A — множество входных сигналов a_1, a_2, \dots, a_k , U — множество выходных сигналов y_1, y_2, \dots, y_l , $\varphi(N, A)$ — функция переходов, принимающая значения в множестве N , $\psi(N)$ или $\psi(N, A)$ — функция выходов, принимающая значения в множестве U . Если используется $\psi(N)$, то имеем автомат Мура, если $\psi(N, A)$ — автомат Мили.

Рассмотрим алгебру событий [1] с алфавитом a_1, a_2, \dots, a_k и операциями дизъюнкции (\vee), произведения (\cdot) и итерации (*). Допустим, что \emptyset — пустое множество слов, λ — пустое слово. Событием назовем любое множество слов в алфавите a_1, a_2, \dots, a_k . Регулярным событием S назовем событие, построенное из величин $\emptyset, \lambda, a_1, a_2, \dots, a_k$ с помощью конечного числа операций дизъюнкции, произведения и итерации. Регулярным выражением R назовем любое представление регулярного события через $\emptyset, \lambda, a_1, a_2, \dots, a_k$ и три указанные операции. Каждому регулярному событию могут соответствовать различные регулярные выражения, которые считаются равными друг другу. Алгоритм для установления равенства регулярных выражений известен [2].

Множество всех входных слов автомата S^{y_1} , вызывающих появление на выходе сигнала y_1 , назовем событием, представленным в автомате выходным сигналом y_1 . В автомате может быть одновременно представлено l событий $S^{y_1}, S^{y_2}, \dots, S^{y_l}$, которые могут быть выражены в виде $R^{y_1}, R^{y_2}, \dots, R^{y_l}$. Процесс определения N, φ, ψ по заданной совокупности регулярных выражений $R^{y_1}, R^{y_2}, \dots, R^{y_l}$ назовем абстрактным синтезом автомата (синтезом диаграммы переходов).

Поставим задачу абстрактного синтеза автомата Мура. Синтез автомата Мили может быть сведен к синтезу автомата Мура одним из из-

вестных способов, и поэтому его не рассматриваем. Ввиду того, что искомой величиной является диаграмма переходов — ориентированный взвешенный граф, разумно предположить, что некоторые алгоритмы синтеза графов, в частности контактных схем, могут оказаться полезными при синтезе автоматов. В настоящей работе исследуется возможность применения для синтеза абстрактных автоматов алгоритма, предложенного в [3] для синтеза бесповторных контактных схем.

Многие методы синтеза графов, в том числе и метод [3], основаны на использовании функций, описывающих все пути между парами вершин. Однако любое R^{y_i} может отображать все пути из начального состояния 1 в несколько состояний, отмеченных символом y_i . С целью преобразования $R^{y_1}, R^{y_2}, \dots, R^{y_l}$ к необходимому для синтеза виду введем фиктивные переменные t_1, t_2, \dots , каждая из которых t_i описывает фиктивные переходы из всех состояний, отмеченных символом y_i , в некоторое фиктивное конечное состояние r . Выражение $R^{y_1}t_1 \vee R^{y_2}t_2 \vee \dots \vee R^{y_l}t_l$ будет, очевидно, описывать все пути из состояния 1 в состояние r . Обозначим его символом R_1 , и используем в качестве исходного выражения.

Рассматриваемый алгоритм состоит из последовательности этапов выделения переходов из черного ящика, символизирующего искомую диаграмму. Переходы выделяются с помощью трех операций, которых достаточно для построения любого графа: операции T_1 выделения продольного перехода (рис. 1 а), операции T_2 выделения попечного перехода (рис. 1 б) и операции T_3 выделения продольно-поперечного перехода (рис. 1 в). Указанные операции применяются последовательно друг за другом в порядке, определяемом алгоритмом, до тех пор, пока выделенные переходы не составят в совокупности искомую диаграмму (этот момент также указывается алгоритмом). На рис. 1 символом A отмечена диаграмма, имевшаяся до выделения перехода x (исходный черный ящик), символом Y отмечена диаграмма, остающаяся после выделения перехода x из диаграммы A (результатирующий черный ящик). Диаграмма Y предыдущего этапа считается диаграммой A следующего этапа. На рис. 1 б все состояния принадлежат как A , так и Y . На рис. 1 а и рис. 1 в состояния $1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n, r$ принадлежат A и Y , и, кроме того, в Y впервые вводится состояние $n+1$. Полагаем, что в рис. 1 б возможен случай $l = k$, и тогда x превращается в петлю.

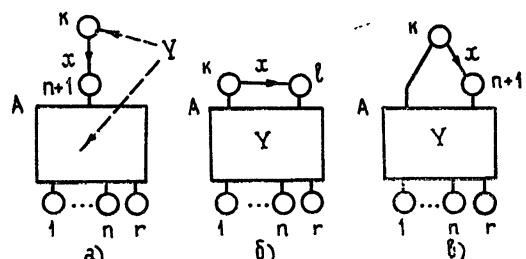


Рис. 1.

Диаграммы A и Y будем описывать с помощью регулярных выражений A_{ar} и Y_{ar} , отображающих все пути из состояния a в состояние r . Кроме того, вводим в рассмотрение выражения S_{ar} , описывающие все пути из a в r в полной диаграмме рассматриваемого автомата, т. е. в диаграмме, которая будет получена, если к любому Y присоединить все выделенные переходы. Перед началом любого этапа имеем выражения A_{ar} , $a = k, \dots, n$ и S_{ar} , $a = 1, \dots, n$ (на первом этапе $n = 1$, $A_{1r} = S_{1r} = R_{1r}$). В результате осуществления этапа получаем выражения Y_{ar} ($a = k+1, \dots, n+1$); $S_{(n+1)r}$, или Y_{or} ($a = k, \dots, n$), или Y_{ar} ($a = k, \dots, n+1$); $S_{(n+1)r}$, и, кроме того, сохраняются без изменения S_{ar} ($a = 1, \dots, n$).

Рассмотрим, каким образом осуществляется этап выделения одного перехода. Выполнение этапа начинается с выбора для рис. 1 индекса k ,

равного наименьшему левому индексу выражений A_{ar} . С помощью известного соотношения алгебры событий $R_1^*R_2 = R_1R_1^*R_2 \vee R_2$ в выражении A_{kr} раскрываются все наружные итерации, которыми начинаются члены, разделенные знаком \vee (в тех случаях, когда разложение бесконечно, например, для $(a_1^*a_2^*)^*$, применяется формула $R_1^*R_2 = a_1D_{a_1}(R_1^*R_2) \vee \dots \vee a_kD_{a_k}(R_1^*R_2) \vee \delta(R_1^*R_2)$ из [4]). Раскрываются также все наружные левые скобки. Далее, выписываются типы левых букв всех членов A_{kr} (например, u, v, \dots). На диаграмме обязательно должны существовать переходы, соответствующие этим буквам и исходящие из состояния k . Поэтому на рассматриваемом и следующих этапах выделяются в любом порядке переходы u, v, \dots , начинающиеся в k . Представим выражение A_{kr} в виде $A_{kr} = P \vee xQ$. Возможны следующие случаи: 1) $P = \emptyset$, $Q = S_{ar}$ ($a = 1, 2, \dots, n$), 2) $Q = S_{kr}$, 3) $Q = S_{ar}$ ($a \in 1, 2, \dots, n; a \neq k$), 4) $R \neq \emptyset$, $Q \neq S_{ar}$ ($a = 1, 2, \dots, n$). Легко убедиться в том, что случай 1 соответствует операции T_1 , случай 4 — операции T_3 , а случай 2, 3 целесообразно сопоставить с операцией T_2 (если сопоставим их с T_1 или с T_3 , что в принципе возможно, то неоправданно введем в диаграмму лишнее состояние). В случае 2 имеем $l = k$, и x превращается в петлю. В случае 3 имеем $l = a$. В случаях 1, 4 индекс $n + 1$ обозначает новое состояние, вводимое в диаграмму. Выражения $Y_{ar}, S_{(n+1)r}$ могут быть определены по выражениям A_{ar}, S_{ar} путем решения следующих систем уравнений алгебры событий

$$\begin{aligned} X_{k(n+1)} Y_{(n+1)r} &= A_{kr}, \\ S_{(n+1)r} &= Y_{(n+1)r}, \\ Y_{ar} &= A_{ar}, \quad a = k + 1, \dots, n \end{aligned} \tag{I}$$

$$\begin{aligned} Y_{kr} \vee X_{kl} S_{lr} &= A_{kr}, \quad l \in 1, 2, \dots, n, \\ Y_{ar} &= A_{ar}, \quad a = k + 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{II}$$

$$\begin{aligned} Y_{kr} \vee X_{k(n+1)} Y_{(n+1)r} &= A_{kr}, \\ S_{(n+1)r} &= Y_{(n+1)r}, \\ Y_{ar} &= A_{ar}, \quad a = k + 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{III}$$

Они следуют непосредственно из рис. 1 (при этом полагаем $X_{k\beta} = x$ при $\beta = l, n + 1$) и из свойств диаграммы. Решение любой из систем единственны в силу детерминизма переходов и в описанных выше четырех случаях имеет следующий вид: 1) $Y_{(n+1)r} = Q$, 2), 3) $Y_{kr} = P$ (если $P = \emptyset$ или $P = t_i$, то Y_{kr} , опускается), 4) $Y_{kr} = P$, $Y_{(n+1)r} = Q$. Решая соответствующую систему уравнений, получаем выражения Y_{ar} , которые представляем в качестве выражений A_{ar} следующего этапа (выражения S_{ar} накапливаются в отдельной таблице).

Процесс выделения переходов продолжается до тех пор, пока не будут удалены все выражения A_{ar} . После этого с помощью величин $X_{k\beta}$ строится диаграмма, и рядом с состояниями, для которых на одном из этапов было получено выражение $Y_{kr} = t_i$ (упущенное в дальнейшем), ставится символ выходного сигнала y_i . Минимальность числа состояний (а также числа переходов) в полученной диаграмме следует из процесса ее построения.

Описанный метод абстрактного синтеза представляет собой однозначный процесс. Однако, если не требовать минимальности числа сос-

точный и варьировать операции (меняя l в T_2 или заменяя T_2 на T_1 или T_3), то можно получить любые избыточные диаграммы переходов, реализующие заданные регулярные выражения. Если в T_2 уравнивать неравные Q и S_{1r} , путем их допустимого доопределения, то можно производить синтез частичных автоматов.

Известно, что не всякая диаграмма переходов позволяет осуществить противогоночное кодирование состояний и получить хорошую минимизацию схемы в структурном синтезе. Поэтому целесообразно вести поиск наиболее подходящей диаграммы. Эффективное решение этой задачи возможно только в рамках единого сквозного метода, в котором одновременно осуществляется построение диаграммы, кодирование состояний и структурный синтез. Однако не всякий метод абстрактного синтеза может быть использован для построения сквозного метода. Например, все методы, в которых на заключительном этапе осуществляется минимизация числа состояний, непригодны для этой цели, так как структура диаграммы остается в них неопределенной почти до самого конца. Необходимо иметь такой метод, в котором структура строится постепенно и построенная часть диаграммы в дальнейшем не изменяется. Изложенный выше метод удовлетворяет этим требованиям и может быть использован в сквозных методах.

Рассмотрим структуру сквозного метода. Основной частью является изложенный выше метод абстрактного синтеза, состоящий из отдельных этапов выделения переходов диаграммы. При осуществлении операции T_2 рассматриваются все варианты ее выполнения при заданных k и x (число их обычно равно 2—5) и для каждого варианта производится оценка параметров кодирования и структурного синтеза. Выбирается тот вариант, который оказывается по совокупности параметров наилучшим. В частности, в простейшем случае может выбираться вариант, который обеспечивает противогоночное кодирование уже построенной части диаграммы и для которого уже полученные фрагменты логических функций, описывающих автомат, оказываются наиболее простыми.

Рассмотрим пример на сквозной метод синтеза синхронного или асинхронного автомата Мура, заданного регулярными выражениями $R^{y_1} = (a_1 \vee a_2 a_3)^* (a_3 \vee a_2 a_1) a_3^*$, $R^{y_2} = (a_1 \vee a_2 a_3)^* a_2$, при условии, что необходимо осуществить его противогоночное кодирование. Основной алгоритм синтеза дополняется в этом случае следующими правилами. Перед началом синтеза состояние 1 кодируется каким-нибудь кодом. После осуществления операций T_1 и T_3 состояние $n+1$ кодируется таким образом, чтобы его код был соседним с кодом состояния k . Такое кодирование всегда возможно. Перед осуществлением операции T_2 сравниваются коды состояний k и l , и если они не соседние, операция выполняется при другом l или заменяется на операцию T_1 или T_3 . Построим выражение $R_{1r} = (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) = A_{1r} = S_{1r}$. Кодируем состояние 1 кодовой группой 000.

1 этап. Выбираем $k=1$. Раскрываем левые итерации и скобки в A_{1r} : $A_{1r} = a_1 (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) \vee a_2 a_3 (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) \times \times a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) \vee a_3 a_3^* t_1 \vee a_2 a_1 a_3^* t_1 \vee a_2 t_2$. Выписываем типы левых букв A_{1r}, a_1, a_2, a_3 . Замечаем, что при $x = a_1$ в разложении $A_{1r} = P \vee x Q$ имеем $P \neq \emptyset$, $Q = S_{1r}$. Так как $k = l$, состояния не могут возникнуть Поэтому применяем операцию T_2 при $X_{11} = a_1$. Решая систему (II), получаем

$$Y_{1r} = a_2 a_3 (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) \vee a_3 a_3^* t_1 \vee \\ \vee a_2 a_1 a_3^* t_1 \vee a_2 t_2 = A_{1r}.$$

2 этап. $k = 1$, $x = a_2$, $P \neq \emptyset$, $Q \neq S_{ar}$, T_1 , $X_{1,2} = a_2$, (III), $Y_{1,r} = a_3 a_3^* t_1 = A_{1,r}$, $Y_{2,r} = a_3 (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) \vee a_1 a_3^* t_1 \vee t_2 = A_{2,r} = S_{2,r}$. Кодируем состояние 2 кодовой группой 001, соседней с 000.

3 этап. $k = 1$, $x = a_3$, $P = \emptyset$, $Q \neq S_{ar}$, T_1 , $X_{1,3} = a_3$, (I), $Y_{2,r} =$ без изменений $= A_{2,r}$, $Y_{3,r} = a_3^* t_1 = A_{3,r} = S_{3,r}$. Кодируем состояние 3 кодовой группой 010, соседней с 000.

4 этап. $k = 2$, $x = a_1$, $P \neq \emptyset$, $Q = S_{3,r}$. Коды состояний 2 и 3 не являются соседними. Поэтому вместо T_2 применяем T_3 . $X_{2,4} = a_1$, (III), $Y_{2,r} = a_3 (a_1 \vee a_2 a_3)^* ((a_3 \vee a_2 a_1) a_3^* t_1 \vee a_2 t_2) \vee t_2 = A_{2,r}$, $Y_{3,r} =$ без изменений $= A_{3,r}$, $Y_{4,r} = a_3^* t_1 = A_{4,r} = S_{4,r}$. Кодируем состояние 4 кодовой группой 011, соседней с 001.

5 этап. $k = 2$, $x = a_3$, $P \neq \emptyset$, $Q = S_{1,r}$. Коды состояний 2 и 1 соседние. T_2 , $X_{2,1} = a_3$, (II), $Y_{2,r} = t_2$ (опускается), $Y_{3,r} =$ без изменений $= A_{3,r}$, $Y_{4,r} =$ без изменений $= A_{4,r}$.

6 этап. $k = 3$, $A_{3,r} = a_3 a_3^* t_1 \vee t_1$, $x = a_3$, $P \neq \emptyset$, $Q = S_{3,r}$. Состязаний не возникает, так как $k = l$. T_2 , $X_{3,3} = a_3$, (II), $Y_{3,r} = t_1$ (опускается), $Y_{4,r} =$ без изменений $= A_{4,r}$.

7 этап. $k = 4$, $A_{4,r} = a_3 a_3^* t_1 \vee t_1$, $x = a_3$, $P \neq \emptyset$, $Q = S_{4,r}$. Состязаний не возникает, так как $k = l$. T_2 , $X_{4,4} = a_3$, (II), $Y_{4,r} = t_1$ (опускается). Синтез окончен. По полученным величинам X_{k3} , $Y_{ar} = t_i$ и кодовым группам строим диаграмму (рис. 2), имеющую одно избыточное состояние, но свободную от состязаний.

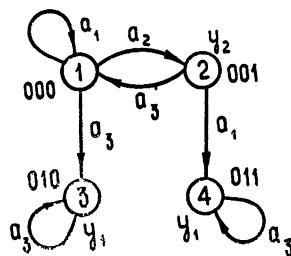


Рис. 2.

1. В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, 1962.
2. A. Ginzburg, Journal of the ACM, 14, No. 2, p. 355 (1967).
3. В. Н. Гребенщикова, ДАН СССР, 119, № 2, 278 (1958).
4. J. A. Brzozowski, Journal of the ACM, 11, No. 4, p. 481 (1964).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
25 декабря 1969 г

COMBINED METHOD FOR FINITE AUTOMATA SYNTHESIS

V. N. Grebenzhchikov

An algebraic method for abstract finite automata synthesis by given regular expressions of algebra of events is suggested. The method provides states number minimality. A description is given of its application as the basis for synthesis "penetrating" methods simultaneously solving the problems of transitions diagrams construction, of hazard-free coding of states and of automaton structural synthesis.

УДК 519.1 + 621.391.19

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ САМООРТОГОНАЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОДОВ

B. E. Алексеев

В статье рассматриваются комбинаторные разностные системы, для которых доказана теорема композиции. Результаты используются для построения оптимальных и близких к оптимальным корректирующих кодов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разностные множества и разностные системы, появлению которых мы обязаны теории комбинаторных блок-схем, оказались весьма полезными при изучении некоторых классов корректирующих кодов. Вместе с тем обнаружилось, что при построении кодов приходится иметь дело с более общим типом разностных систем, нежели совершенные разностные системы, изучаемые в связи с блок-схемами, и имеющиеся сведения об этих объектах недостаточны для систематического построения кодов. Работы же, в которых разностные системы фигурируют как удобная модель какого-либо класса кодов, не предлагают других методов построения этих систем, кроме вычислительных процедур, основанных на методе проб и ошибок. Цель настоящей статьи—в некоторой степени восполнить этот пробел.

Рассмотрим, следуя [1], один класс двоичных линейных блоковых кодов, приводящий к разностным системам в их классической форме. Квазициклическим называется $(m n_0, m k_0)$ —код, обладающий следующими свойствами:

1) все $m n_0$ разрядов разбиты на субблоки длиной n_0 , в каждом из которых первые k_0 разрядов — информационные, а остальные проверочные;

2) циклический сдвиг любого кодового вектора на n_0 разрядов дает опять кодовый вектор.

Код называется самоортогональным, если любая пара информационных разрядов входит не более чем в одно проверочное уравнение. Самоортогональные квазициклические коды, хотя и уступают в скорости передачи лучшим из известных кодов с тем же минимальным расстоянием, но имеют преимущество, делающее их выгодными для практического использования,—простоту декодирования, не требующего сложного оборудования для корректирования большого числа ошибок.

Пусть $n_0 = k_0 = 1$. Тогда все m строк проверочной матрицы H квазициклического кода могут быть получены циклическим сдвигом из единственной строчки. Эту последнюю можно задать системой подмножеств A_1, A_2, \dots, A_k , множества $\{1, 2, \dots, m\}$, где подмножество A_i состоит из номеров субблоков с нулевым i -м символом. Самоортогональность означает, что все разности $x - y$, где $x, y \in A_i$, $i = 1, k_0$, $x \neq y$, должны быть различны по модулю m . Это возможно лишь в том случае, если выполнено соотношение

$$m \geq |A_i| \cdot (|A_i| - 1). \quad (1)$$

Допустим, мы хотим построить код с минимальным расстоянием d . Как известно из [2], для этого необходимо и достаточно, чтобы любая совокупность из $\alpha - 1$ или меньшего числа столбцов H была линейно независимой. Для двоичного самоортогонального кода это равносильно требованию, чтобы каждый столбец H имел вес, не меньший, чем $d - 1$. Это означает, что

$$|A_i| \geq d - 1. \quad (2)$$

Пусть требуется минимизировать длину кода, т. е. величину m , при заданных n_0 и d . Если иметь в виду неравенства (1) и (2), то дополнительное ограничение $|A_i| = d - 1$ находится в соответствии с этой целью.

Подобным же образом случай $k_0 = 1$ приводит к задаче о построении $n_0 - 1$ подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$, мощности $(d - 1)/(n_0 - 1)$ каждое, обладающих сформулированным выше свойством относительно разностей по модулю m . В первом случае получается $(mn_0, m(n_0 - 1))$ — код с расстоянием d и скоростью передачи $\frac{n_0 - 1}{n_0}$, во втором случае — (mn_0, m) — код с расстоянием d и скоростью $1/n_0$. В обоих случаях требуется минимизировать величину m при данных n_0 и d .

Множество, состоящее из k чисел $\{x_1, \dots, x_k\}$, такое, что все разности $x_i - x_j$, $i, j = \overline{1, k}$ ($i \neq j$) различны по модулю n , называется разностным множеством. Если эти разности исчерпывают все множество ненулевых вычетов по модулю n , то такое разностное множество называется совершенным. Параметры разностного множества должны удовлетворять очевидному соотношению $n - 1 \geq k(k - 1)$. Совершенные разностные множества построены Зингером [3] для всех значений $k = p^2 + 1$, где p — простое, a — натуральное число. Их non-existование доказано для всех остальных значений k , если $k \leq 1600$, а также в ряде других случаев [4].

Обобщением разностного множества является понятие разностной системы: это семейство m разностных множеств, мощности k каждое, множества разностей которых, взятых по модулю n , не пересекаются. В дальнейшем такую систему будем называть $C(n, k, m)$ — системой, а иногда просто C -системой. Совершенные C -системы (системы, у которых совокупность множеств разностей всех входящих в систему разностных множеств исчерпывает все множество ненулевых вычетов по модулю n) имеют комбинаторное содержание — они порождают циклические блок-схемы.

Из цитированных выше результатов [1] следует, таким образом, что каждая $C(n, k, m)$ — система дает два самоортогональных квазициклических кода: $(n(m + 1), nm)$ — код с расстоянием $k + 1$ и скоростью $m/(m + 1)$ и $(n(m + 1), n)$ — код с расстоянием $km + 1$ и скоростью $1/(m + 1)$. При этом из совершенных C -систем получаются оптимальные для рассматриваемого класса коды. О совершенных разностных системах при $m > 1$ известно очень мало. По всей вероятности, они существуют столь же редко, как и совершенные разностные множества. Поэтому естественно искать не оптимальные, но близкие к ним коды. При малых значениях параметров это может быть осуществлено с помощью вычислительных алгоритмов, использующих перебор, как это делается в [1]. В настоящей работе для построения C -систем используется подход, который может быть охарактеризован как «метод композиции». Предлагается операция, которая, будучи примененной к двум C -системам, дает новую C -систему. Показано, что с помощью этой операции, исходя из начального запаса C -систем, построенного в разделе 3, можно получить $C(n, k, m)$ -системы, близкие к совершенным, для лю-

бых значений k и m , (если только m достаточно велико). Кроме того, отправляясь от разностных множеств Зингера, в некоторых случаях удается найти новые семейства совершенных C -систем.

К несколько другой разновидности разностных систем приводят рекуррентные самоортогональные коды, исследуемые в [5]. Канонический рекуррентный код задается полубесконечной матрицей проверок вида

$$H = \left[\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} B & I \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} B & I \\ \hline & \end{array} \quad \dots \end{array} \right],$$

где I — единичная $t \times t$ -матрица, B — некоторая $n \times (b - t)$ -матрица, а остальные места заполнены нулями. Кодовая последовательность состоит из субблоков длины b , в каждом из которых первые $b - t$ разрядов — информационные, а остальные — проверочные. Рассматриваются двоичные самоортогональные коды (сокращенно $CSOC$ — канонический самоортогональный код).

При использовании рекуррентных кодов приходится сталкиваться с тем неприятным обстоятельством, что любая ошибка декодирования влечет за собой дальнейшее неправильное декодирование. Мерой этого «эффекта распространения ошибок» может служить число L правильных разрядов сообщения, которое должно следовать за произвольной ошибкой декодирования, чтобы обеспечить восстановление правильного декодирования. В [6] показано, что $CSOC$, использующий пороговое декодирование, имеет конечное L , и утверждается, что L для $CSOS$ меньше, чем для других известных кодов.

$CSOC$ очень похожи на описанные выше блоковые коды и не удивительно, что они приводят к объектам, близким к C -системам. Пусть $t = 1$ и пусть B_i — множество, состоящее из номеров строк, на пересечении которых с i -м столбцом в матрице B стоят единицы. Тогда из самоортогональности следует, что все разности $x - y$, где $x, y \in B_i$ ($i = 1, b - 1$, $x \neq y$) должны быть различны. Так как свойство рекуррентного кода исправлять ошибки определяется минимальным расстоянием d линейного блокового кода, образованного начальными отрезками кодовых последовательностей длины $n_A = nb/t$ (предполагается, что t делит n), то, желая повысить эффективность кода при заданных d и b , мы должны стремиться минимизировать величину n , т. е. максимальный элемент множества $\bigcup_i B_i$. Минимальное расстояние для самоортогонального кода равно $\min_i |B_i| + 1$, поэтому естественным (хотя и не обязательным) является условие, чтобы множества B_i были равномощны.

Семейство, состоящее из m множеств натуральных чисел B_i , мощности k каждое, таких, что все разности $x - y$, где $x, y \in B_i$ ($i = 1, m$, $x \neq y$) различны, будем называть $D(k, m)$ -системой. К $D(k, m)$ -системам приводят также $CSOS$ при $t = b - 1$. В обоих случаях эффективность кода определяется величиной n наибольшего из элементов множества $\bigcup_i B_i$. Ясно, что $n \geq \frac{mk(k-1)}{2}$. В разделе 4 будет доказано, что $n \geq m(k^2 - 2k^{3/2})$. Следовательно, C -системы, близкие к совершенным, оказываются в то же время и неплохими D -системами. Поэтому рассмотрение D -систем, предпринимаемое в разделе 4, ограничивается доказательством упомянутого неравенства и подробным исследованием

случаев, когда могут существовать совершенные D -системы, т. е. такие, у которых $n = \frac{mk(k-1)}{2}$. Для построения совершенных D -систем используется вариант теоремы композиции, обобщающий операцию, примененную автором [6] для $k = 3$.

2. ТЕОРЕМА КОМПОЗИЦИИ

Определение 1.1. $C(n, k, m)$ -системой называется такое множество целочисленных векторов $\{x_i\}_{i=1, m} = \{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})\}$, что все разности $x_{ir} - x_{is}$ ($i = \overline{1, m}; r, s = \overline{1, k}; r \neq s$) различны по модулю n .

Это определение отличается от понятия, сформулированного во введении, только упорядоченностью множеств, входящих в систему.

Определение 2.1. $Q(n, k)$ -системой называется такое множество целочисленных векторов $\{x_i\}_{i=1, n} = \{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})\}$, что для каждого r и s все разности $x_{ir} - x_{is}$ ($i = \overline{1, n}$) различны по модулю n .

$Q(n, k)$ -системы также имеют комбинаторное содержание. Можно показать, что такая система дает $k-1$ ортогональных латинских квадратов порядка n .

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать $k \geq 3$.

Если A и B — два множества векторов, n — число, то под $A + B$, nA будут пониматься соответственно множества всех векторов вида $a + b$, na , где $a \in A$, $b \in B$.

Теорема 2.1. Пусть A является $C(n_1, k, m_1)$ -системой, B — $C(n_2, k, m_2)$ -системой, E — $Q(n_2, k)$ -системой. Тогда $F = (A + n_1E) \cup n_1B$ есть $C(n_1n_2, k, m_1n_2 + m_2)$ -система.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_k)$ — (не обязательно различные) векторы из F и пусть

$$x_i - x_j = y_r - y_s \pmod{n_1n_2}, \quad (2.1)$$

где $i \neq j, r \neq s$.

Рассмотрим всевозможные случаи:

а) $x = a_1 + n_1l_1, y = a_2 + n_1l_2$, где $a_1, a_2 \in A; l_1, l_2 \in E$.

Тогда из (2.1) следует, что $a_{1i} - a_{1j} \equiv a_{2r} - a_{2s} \pmod{n_1}$. Но A есть $C(n_1, k, m_1)$ -система, поэтому $a_1 = a_2, i = r, j = s$. Подставляя это в (2.1), получаем $l_{1i} - l_{1j} \equiv l_{2r} - l_{2s}$, откуда, по определению Q -системы, $l_1 = l_2$, т. е. $x = y$;

б) $x = a + n_1l, y = n_1b$, где $a \in A, l \in E, b \in B$.

Тогда из (2.1) следует, что $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{n_1}$, что невозможно, так как в этом случае для произвольного $t \neq i, j$ было бы $a_i - a_t \equiv a_j - a_t \pmod{n_1}$;

в) $x = n_1b_1, y = n_1b_2$, где $b_1, b_2 \in B$. Соотношение $b_{1i} - b_{1j} \equiv b_{2r} - b_{2s} \pmod{n_2}$, вытекающее в этом случае из (2.1), противоречит определению B , как $C(n_2, k, m_2)$ -системы.

Доказанная теорема лежит в основе предлагаемого метода построения C -систем. Для того, чтобы сделать ее применение возможным, необходим достаточно обширный запас Q -систем. Если n — простое число, то вопрос о существовании $Q(n, k)$ -системы решается просто.

Теорема 2.2. Если p — простое число, то $Q(p, k)$ -система существует тогда и только тогда, когда $k \leq p$.

Доказательство. Действительно, с одной стороны, множество векторов $\{t(0, 1, \dots, k-1)\}_{t=\overline{0, p-1}}$ образует $Q(p, k)$ -систему для любого $k \leq p$. С другой стороны, если $k > p$, то для любых двух k -компонентных целочисленных векторов x и y среди разностей $x_i - y_i$

встречаются одинаковые по модулю p . Если это разности $i - x$ и $j - x$ компонент, то $x_i - x_j \equiv y_i - y_j \pmod{p}$, следовательно, эти векторы не могут одновременно входить в $Q(p, k)$ -систему. Заметим, что последнее рассуждение не требует, чтобы p было простым числом, т. е для параметров $Q(n, k)$ -системы всегда выполняется неравенство $k \leq n$.

Если n не является простым, мы не имеем столь исчерпывающего ответа на вопрос о существовании $Q(n, k)$ -системы. В качестве примера, показывающего, что условие $k \leq n$ не является достаточным для существования $Q(n, k)$ -системы, докажем, что при четном n $Q(n, k)$ -систем с $k > 2$ не существует. Действительно, если множество векторов $\{x_i\}_{i=1, n}$ образует такую систему, то каждое из множеств $\{x_{i1} - x_{i2}\}, \{x_{i2} - x_{i3}\}, \{x_{i1} - x_{i3}\}$ исчерпывает в точности все вычеты по модулю n .

Поэтому $\sum_{i=1}^n (x_{i1} - x_{i2}) + \sum_{i=1}^n (x_{i2} - x_{i3}) \equiv n(n-1) \equiv 0 \pmod{n}$, и в то же время $\sum_{i=1}^n (x_{i1} - x_{i3}) \equiv \frac{1}{2} n(n-1) \pmod{n}$, но для четного n величина

$\frac{1}{2} n(n-1)$ не может быть кратной n . Для любого же нечетного n можно построить $Q(n, 3)$ -систему. Это частный случай следующей теоремы, которая дает множество Q -систем, достаточное для осуществления нашей цели.

Теорема 2.3. Если k не превосходит наименьшего простого делителя числа n , то существует $Q(n, k)$ -система.

Доказательство. Если A является $Q(n, k)$ -системой, $B = Q(n_2, k)$ -системой, то $A + n_1 B$ есть $Q(n_1 n_2, k)$ -система. Доказательство этого утверждения, которое можно назвать теоремой композиции для Q -систем, почти в точности повторяет пункт а) доказательства теоремы 2.1, и мы его опускаем. Последовательно, применяя эту операцию и исходя из $Q(p_i, k)$ -систем для простых делителей p_i числа n , мы приходим к искомой $Q(n, k)$ -системе.

3. ПОСТРОЕНИЕ C -СИСТЕМ

Обозначим через $N(k, m)$ наименьшее n , при котором существует $C(n, k, m)$ -система. Очевидно,

$$N(k, m) \geq mk(k-1) + 1.$$

Теорема 3.1. Существует такая функция $\varphi(k, m)$, что для любых k, m_0 и всех $m > \varphi(k, m_0)$

$$N(k, m) \leq \frac{m}{m_0} N(k, m_0). \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть n_i обозначает i -ое в порядке возрастания число, все простые делители которого больше или равны k . Существует такая величина d_k , что для всех i $n_{i+1} - n_i \leq d_k$. В качестве d_k можно взять, например, произведение всех простых чисел, меньших k .

Обозначим через $M(n, k)$ наибольшее m , при котором существует $C(n, k, m)$ -система. Если A является $C(N(k, m_0), k, m_0)$ -системой, $B = C(n_i, k, m_1)$ -системой, а $E = Q(n_i, k)$ -системой, существование которой гарантируется теоремой 2.3, то, по теореме 2.1, $F = (A + N(k, m_0)E) \cup N(k, m_0)B$ есть $C(n_i N(k, m_0), k, n_i m_0 + m_1)$ -система. Иначе говоря, при $m_1 \leq M(n_i, k)$ имеет место неравенство $N(k, n_i m_0 + m_1) \leq n_i N(k, m_0)$.

Таким образом, (3.1) справедливо для всех m , заключенных в интервалах

$$n_i m_0 \leq m \leq n_i m_0 + M(n_i, k) \quad (3.2)$$

$C(n, k, m)$ -система, в которой компоненты всех векторов выбраны в системе наименьших неотрицательных вычетов по модулю n , будет $C(n', k, m)$ -системой при любом $n' \geq 2n$. Иначе говоря, $M(n', k) \geq M(n, k)$ для всех $n' \geq 2n$. Далее, из теорем 2.1 и 2.3 следует, что $M(n_i N(k, m_0), k) \geq n_i m_0$ для всех i .

Пусть $n_i \geq 4d_k N(k, m_0)$. В каждом интервале длины d_n существует по крайней мере одно число из последовательности $\{n_i\}$, поэтому можно найти такое j , что $n_k \leq n_j \leq \frac{n_i}{2N(k, m_0)}$. В результате получаем цепочку неравенств $M(n_i, k) \geq M(n_j N(k, m_0), k) \geq n_j m_0 \geq d_k m_0 \geq (n_{i+1} - n_i) m_0$, доказывающую, что интервалы (3.2) покрывают все множество чисел $m \geq 4d_k N(k, m_0)$, для каждого из которых, таким образом, справедливо (3.1).

Первую серию кодов, близких к оптимальным, мы получим, применив доказанную теорему к совершенным разностным множествам Зингера.

Следствие 1. Если $k = p^\alpha + 1$, где p — простое число, α — натуральное, то $N(k, m) \leq m(k^2 - k + 1)$ для всех $m > \varphi(k, 1)$.

Для значений k , которые не попадают в эту последовательность, можно брать укороченные разностные множества Зингера. Б. Авдеев заметил, что в этом случае $N(k, 1) \leq k^2 + \varepsilon(k)$, где $\varepsilon(k) \leq 2k^{13/8} + k^{5/4}$. Таким образом, для любого k и всех $m > \varphi(k, 1)$ $N(k, m) \leq m(k^2 + \varepsilon(k))$. Мы получим коды, еще более близкие к оптимальным, взяв в качестве исходных C -системы, которые дает следующая теорема.

Теорема 3.2. Если $km + 1$ — простое число, то существует $C(k^2 m + k, k, m)$ -система.

Доказательство. Рассмотрим в мультиликативной группе G ненулевых вычетов по модулю $km + 1$ подгруппу G_k порядка k . Пусть она порождается элементом q и пусть a_0, a_1, \dots, a_{m-1} — представители различных смежных классов группы G по G_k .

Утверждается, что множество векторов

$$\{(km + 1)(0, 1, \dots, k - 1) + ka_i(q^0, q^1, \dots, q^{k-1})\}_{i=0, m-1} \quad (3.3)$$

и есть искомая система. Действительно, пусть

$$(km + 1)r_1 + ka_i q^{r_1} - (km + 1)r_2 - ka_i q^{r_2} \equiv (km + 1)r_3 + \\ + ka_i q^{r_3} - (km + 1)r_4 - ka_i q^{r_4} \pmod{k^2 m + k}.$$

Тогда $r_1 - r_2 \equiv r_3 - r_4 \equiv c \pmod{k}$, где $c < k$, и $a_i(q^{r_1} - q^{r_2}) \equiv a_i(q^{r_3} - q^{r_4}) \pmod{km + 1}$. Следовательно, $(q^c - 1)(a_i q^{r_2} - a_i q^{r_4}) \equiv 0 \pmod{km + 1}$, т. е., либо $c = 0$ и $r_1 = r_2$, $r_3 = r_4$, либо $a_i q^{r_2} \equiv a_i q^{r_4} \pmod{km + 1}$ откуда $i = j$, $r_2 = r_4$, $r_1 = r_3$, а это доказывает, что множество (3.4) действительно является C -системой.

Следствие 2. Если k и m_0 таковы, что $km_0 + 1$ — простое, то для всех $m > \varphi(k, m_0)$ $N(k, m) \leq mk \left(k + \frac{1}{m_0} \right)$.

Метод, основанный на теореме 2.1, позволяет в некоторых случаях получить и совершенные C -системы. Нетрудно заметить, что в результате применения операции композиции к двум совершенным C -системам получается снова совершенная C -система. Поэтому, если исходить опять из совершенных разностных множеств Зингера, т. е. из $C(p^{2\alpha} + p^\alpha + 1, 1)$ -систем, то для построения новых совершенных C -систем

нам достаточно иметь $Q(p^{2\alpha} + p^\alpha + 1, p^\alpha + 1)$ -системы. Согласно теореме 2.3, такая система существует, если $p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$ не имеет делителей, не превосходящих $p^\alpha + 1$, а это возможно только тогда, когда $p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$ — простое. Применение теоремы 2.1 дает в этом случае следующий результат.

Теорема 3.3. Если p — простое число, α — натуральное и $p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$ — простое, то для любого $s \geq 1$ существует совершенная $C((p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)^s, p^\alpha + 1, m)$ -система.

4. D — СИСТЕМЫ.

Определение 4.1. $D(k, m)$ -системой называется такое множество целочисленных векторов с неотрицательными компонентами $\{x_i\}_{i=1, \dots, m} = \{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})\}$, где $x_{ir} < x_{is}$ при $r < s$, и все разности $x_{ir} - x_{is}$, $i = 1, \dots, m$, $1 \leq r < s \leq k$ различны.

Обозначим через $L(k, m)$ минимальную возможную величину наибольшей из компонент векторов $D(k, m)$ -системы. Элементарным ограничением является $L(k, m) \geq \frac{mk(k-1)}{2}$, более сильное утверждение можно получить из следующей леммы.

Лемма. Для всех l ($1 \leq l \leq k-1$)

$$L(k, m) \geq (mkl + 1) \left(\frac{k}{l+1} - 1 \right) + \frac{ml(l+1)}{2}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть множество векторов $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ образует $D(k, m)$ -систему с максимальной компонентой n . Рассмотрим выражение $D_l = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^l \sum_{v=1}^{k-r} (x_{j, v+r} - x_{j, v})$. В силу определяющего свойства D -системы, все $ml \left(k - \frac{l+1}{2} \right)$ слагаемых этой суммы должны быть различны, следовательно,

$$D_l \geq ml \left(k - \frac{l+1}{2} \right) \left(ml \left(k - \frac{l+1}{2} \right) + 1 \right). \quad (4.2)$$

С другой стороны, $D_l = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^l \sum_{v=1}^{k-r} \sum_{\mu=v+1}^{v+r} (x_{j, \mu} - x_{j, \mu-1}) = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^l \sum_{v=1}^{k-r} \sum_{\mu=1}^r \times (x_{j, \mu+v} - x_{j, \mu+v-1}) = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^l \sum_{\mu=1}^r (x_{j, \mu+k+r} - x_{j, \mu})$. Последняя сумма состоит из $\frac{ml(l+1)}{2}$ различных слагаемых, каждое из которых не превышает n . Поэтому

$$D_l \leq \left(2n - \frac{ml(l+1)}{2} + 1 \right) \frac{ml(l+1)}{2}. \quad (4.3)$$

Сравнивая (4.2) и (4.3), получаем утверждение леммы.

Если в (4.1) положить $l = \sqrt{k-1}$, то получим следующую оценку.

Теорема 4.1. $L(k, m) \geq mk^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{k}} \right)$.

Замечая, что из $C(n, k, m)$ -системы можно получить $D(k, m)$ -систему с наибольшей компонентой, не превышающей n , мы убеждаемся, что для $L(k, m)$ имеет место та же асимптотика, что и для $N(k, m)$. Поэтому необходимость построения $D(k, m)$ -систем для больших значений k отпадает. Однако есть несколько случаев, когда могут существовать совершенные D -системы. Они, конечно, являются в то же время и совершенными C -системами и соответствующие коды оптимальны. Верхнюю границу значений k , при которых возможно существование совершенных D -систем, можно получить полагая в (4.1) $l = \frac{k}{2} - 1$.

Теорема 4.2. При $k \geq 6$ совершенных $D(k, m)$ -систем не существует.

Из оставшихся трех значений k полностью изучен лишь случай $k = 3$ — совершенная $D(3, m)$ -система существует тогда и только тогда, когда m имеет вид $4t$ или $4t + 1$ (см., например, [7]). Автором [6] установлено, что число различных совершенных $D(3, m)$ -систем очень быстро растет с увеличением m . Здесь мы покажем, что метод, примененный в [6], может быть распространен и на случаи $k = 4, 5$. Фактически он является вариантом метода композиции, обоснованного в разделе 2.

Определение 4.2. $Q(n, k)$ -система E называется абсолютной, если для любого $x \in A$ $x_0 = 0$ и для всех $i, j = \overline{1, k}$,

$$x_i - x_j \leq \frac{n-1}{2}.$$

Теорема 4.3. Если A есть совершенная $D(k, m_1)$ -система, B -совершенная $D(k, m_2)$ -система и E -абсолютная $Q(m_2k(k-1)+1, k)$ система, то $F = ((m_2k(k-1)+1)A+E) \cup B$ является совершенной $D(k, m_1m_2k(k-1)+m_1+m_2)$ -системой.

Доказательство. Обозначим $m_2k(k-1)+1$ через n_2 . Из определения 4.2 следует, что при фиксированных i, j разность $x_i - x_j$ принимает своим значением точно один раз каждое целое от $-(n-1)/2$ до $(n-1)/2$, если x пробегает абсолютную Q -систему. Поэтому разности $n_2(y_i - y_j) + x_i - x_j$, где $i, j = \overline{1, k}$, $y \in A$ фиксированы, а x пробегает E , различны при различных x и образуют интервал целых чисел

$$\left[n_2(y_i - y_j) - \frac{n_2 - 1}{2}, \quad n_2(y_i - y_j) + \frac{n_2 - 1}{2} \right].$$

Эти интервалы не пересекаются и их объединение составляет интервал $\left[\frac{n_2 + 1}{2}, \frac{n_2m_2k(k-1)}{2} + n_2 - 1 \right]$, в то время, как разности D -системы B не превосходят $\frac{n_2 - 1}{2}$. Таким образом, разности F удовлетворяют требованию определения 4.1, и так как максимальная компонента векторов F есть $1/2k(k-1)(m_1m_2k(k-1)+m_1+m_2)$, то теорема доказана.

Теорема 4.4. Если существует t попарно ортогональных латинских квадратов порядка k и существует совершенная $C(n, k, m)$ -система A , то существует $Q(n, t+1)$ -система E . Если A является совершенной $D(k, m)$ -системой, то E абсолютна.

Доказательство. Известно (ср. [4], стр. 86), что множество t ортогональных латинских квадратов порядка k эквивалентно $k^2 \times (t+2)$ -таблице, в которой строки каждой из $k^2 \times 2$ -подтаблиц образуют множество всех упорядоченных пар из k элементов. Очевидно, любая перестановка строк и столбцов таблицы, а также любая подстановка на множестве k символов, примененная к любому столбцу, сохраняет

это свойство. Поэтому можно считать, что $k \times (t+2)$ -подтаблица, образованная первыми k строками, имеет вид

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & k & \dots & k \end{array}$$

Отбрасывая первый столбец и первые k строк, получим $k(k-1) \times (t+1)$ -таблицу $T = \{\tau_{ij}\}$, в которой строки каждой $k(k-1) \times 2$ -подтаблицы образуют множество всех пар (i, j) , $i, j = 1, k$, $i \neq j$. Пусть A есть совершенная $C(n, k, m)$ -система. Рассмотрим множество векторов

$$E = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{i=1}^{k(k-1)} (0, a_{\tau_{i2}} - a_{\tau_{i1}}, \dots, a_{\tau_{i,t+1}} - a_{\tau_{i1}}) \cup \{(0, 0, \dots, 0)\}.$$

Из $a_{\tau_{ir}} - a_{\tau_{is}} \equiv a'_{\tau_{jr}} - a'_{\tau_{js}} \pmod{n}$, где $a, a' \in A$, $r \neq s$, следовало бы, что $\tau_{ir} = \tau_{jr}$, $\tau_{is} = \tau_{js}$, а это противоречит определению таблицы T . Таким образом, E есть $Q(n, t+1)$ -система. То, что она будет абсолютноной, если A совершенна, немедленно следует из определений.

Как известно, может существовать не более $k-1$ ортогональных латинских квадратов порядка k . В случае, когда такое полное множество квадратов существует, теоремы 4.3 и 4.4 приводят к следующему утверждению.

Теорема 4.5. Если существует полное множество ортогональных латинских квадратов порядка k и существуют совершенные $D(k, m_1)$ - и $D(k, m_2)$ -системы, то существует совершенная $D(k, m_1 m_2 k(k+1) + m_1 + m_2)$ -система.

Каждое из значений $k = 3, 4, 5$ удовлетворяет этому условию. С помощью ЭВМ автором найдены совершенные $D(4, m)$ -системы для $m \leq 10$ (за исключением $m = 2$ и 3 , когда их не существует)—они приведены в табл. 1.

Таблица 1*

| m | Совершенная $D(4, m)$ -система |
|-----|--|
| 1 | (1, 4, 6) |
| 4 | (1, 9, 21) (3, 4, 18) (2, 19, 24) (7, 13, 23) |
| 5 | (1, 25, 30) (7, 19, 28) (4, 17, 27) (8, 11, 26) (2, 16, 22) |
| 6 | (1, 16, 19) (2, 31, 35) (11, 24, 36) (7, 21, 30) (6, 26, 34) (5, 22, 32) |
| 7 | (1, 17, 19) (6, 21, 33) (4, 24, 38) (8, 30, 39) (5, 28, 41) (7, 32, 42) (3, 29, 40) |
| 8 | (1, 45, 48) (5, 36, 46) (8, 30, 43) (9, 27, 42) (11, 28, 40) (2, 23, 39) (4, 24, 38) (6, 25, 32) |
| 9 | (1, 52, 54) (3, 44, 50) (12, 33, 49) (9, 31, 48) (18, 26, 46) (11, 30, 45) (5, 29, 43) (7, 32, 42) (4, 27, 40) |
| 10 | (1, 58, 60) (3, 52, 56) (11, 37, 55) (15, 31, 54) (8, 32, 51) (9, 29, 50) (12, 34, 48) (5, 30, 47) (6, 33, 46) (7, 35, 45) |

* У каждого вектора опущена нулевая компонента.

Теорема 4.5. позволяет утверждать, что существует бесконечно много $D(4, m)$ -систем. Автору неизвестно, существуют ли совершенные $D(5, m)$ -системы. Существование хотя бы одной такой системы влечет бы, согласно теореме 4.5, существование бесконечного множества их.

ЛИТЕРАТУРА

1. Townsend R. L., Weldon E. I., Self-Orthogonal Quasi-Cyclic Codes, IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-13, № 2, 183 (1967).
2. У. Питерсон, Коды, исправляющие ошибки, изд. Мир, М., 1964.
3. Singer J., A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, Trans. Amer. Math. Soc, 43, 377 (1938).
4. Г. Д. Райзер, Комбинаторная математика, изд. Мир, М., 1966.
5. Robinson J. P., Bernstein A. J., A class of Binary Recurrent Codes with Limited Error Propagation, IEEE Trans on Inform Theory, IT-13, № 1, 106 (1967).
6. В. Е. Алексеев, Математ. заметки, 2, № 2, 145 (1967).
7. А. А. Марков, в сб. Проблемы кибернетики, вып. 15, 1965.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 января 1970 г.

NEW METHOD FOR SELF-ORTHOGONAL ERROR-CORRECTING
CODES CONSTRUCTION

V. E. Alekseyev

The article deals with combinatorial difference systems for which the composition theorem is proved. The results are applied for optimal and close-to-optimal error-correcting codes construction.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 518.6

**ПОГРЕШНОСТЬ КВАНТОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФУНКЦИИ
 $\sin x$ И $\cos x$ НА ЦИМ**

Ю. Т. Фомин

Применение цифровых интеграторов в системах автоматического регулирования ставит вопрос о влиянии квантования [1, 2] на моделируемый процесс. На основании результатов [2] производится построение уравнений погрешности квантования для функций $\sin x$ и $\cos x$, анализ функции погрешности квантования, являющейся решением полученной системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad (2)$$

решенис которой имеет вид

$$\begin{aligned} y &= r_0 \sin(\alpha_0 + x), & z &= r_0 \cos(\alpha_0 + x), \\ r_0 &= (y_0^2 + z_0^2)^{1/2}, & \alpha_0 &= \arctg \frac{y_0}{z_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с теоремами Шеннона [3] система (1) должна быть приведена к виду [1]

$$\begin{aligned} dy &= z dx, & dz &= -y dx, \\ y(x_0) &= y_0, & z(x_0) &= z_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В любой интегрирующей машине интегрирование системы (4) производится шаг за шагом. В соответствии с этим рассмотрим $(k+1)$ -й шаг интегрирования и проинтегрируем систему (4) в пределах от $x=x_k$ до $x=x_{k+1}$. В результате интегрирования получим

$$\delta_k y = \int_{x_k}^{x_{k+1}} z dx, \quad \delta_k z = - \int_{x_k}^{x_{k+1}} y dx, \quad (5)$$

Для вычисления $\delta_k y$, $\delta_k z$ используем формулу прямоугольников

$$\nabla y_{k+1} = z_k \nabla x, \quad \nabla z_{k+1} = -y_k \nabla x \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

В реальных вычислительных процессах, выполняемых с помощью цифровых интегрирующих машин, количество разрядов, отведенное для представления чисел, ограничено. Используем оператор Φ [2], который каким-либо способом числу « b » с бесконечным количеством разрядов после запятой ставит в соответствие число « \bar{b} », имеющее конечное количество разрядов, определяемое конструкцией вычислительного устройства. Процесс квантования числа записывается

$$\bar{b} = \Phi(b). \quad (7)$$

Введем в рассмотрение оператор Φ^{-1} , определяемый соотношением

$$\Phi(b) + \Theta^{-1}(b) = b. \quad (8)$$

Учитывая квантованность информации, систему разностных уравнений (6) преобразуем в систему разностно-квантованных уравнений с остатками [2]:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \bar{y}_{k+1} &= \Phi [\bar{z}_k \nabla x + O_{y,k}], \\ \bar{\nabla} z_{k+1} &= -\Phi [\bar{y}_k \nabla x + O_{z,k}], \\ O_{y,k+1} &= \Phi^{-1} [\bar{z}_k \nabla x + O_{y,k}], \\ O_{z,k+1} &= \Phi^{-1} [\bar{y}_k \nabla x + O_{z,k}], \\ O_{y,0} &= O_{z,0} = 0 \\ (k &= 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{9}$$

Система (9) представляет собой модель численного решения системы (1) методом (6) на цифровом интегрирующем устройстве.

На каждом шаге интегрирования решение системы (6) отличается от решения системы (9) на величину

$$\gamma_{y,k} = y_k - \bar{y}_k, \quad \gamma_{z,k} = z_k - \bar{z}_k.\tag{10}$$

Учитывая (10), вычтем (9) из (6). После преобразований получим систему разностных уравнений погрешности квантования

$$\begin{aligned}\nabla \gamma_{y,k+1} &= \gamma_{z,k} \nabla x + \nabla O_{y,k+1}, \\ \nabla \gamma_{z,k+1} &= -\gamma_{y,k} \nabla x - \nabla O_{z,k+1}, \\ \nabla O_{y,k+1} &= O_{y,k+1} - O_{y,k}, \\ \nabla O_{z,k+1} &= O_{z,k+1} - O_{z,k}, \\ O_{y,0} &= O_{z,0} = 0, \\ \gamma_{y,0} &= y_0 - \bar{y}_0, \quad \gamma_{z,0} = z_0 - \bar{z}_0 \\ (k &= 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{11}$$

Решение системы (11) имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma_{y,n} &= \rho^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{C_k \cos [(n-k)\omega + m_k]}{\rho^k}, \\ \gamma_{z,n} &= \rho^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{C_k \sin [(n-k)\omega + m_k]}{\rho^k},\end{aligned}\tag{12}$$

где

$\rho = (1 + \nabla x^2)$, ∇x — шаг численного решения,

$$C_k = \begin{cases} (\gamma_{y,0}^2 + \gamma_{z,0}^2)^{1/2} & (k=0), \\ (\nabla O_{y,k}^2 + \nabla O_{z,k}^2)^{1/2} & (k \neq 0), \end{cases}$$

$$m_k = \begin{cases} \arctg \frac{\gamma_{z,0}}{\gamma_{y,0}} & (k=0), \\ \arctg \frac{\nabla O_{z,k}}{\nabla O_{y,k}} & (k \neq 0), \end{cases}$$

$O_{y,k}$, $O_{z,k}$ — остатки регистров соответствующих интеграторов.

Используя ограниченность остатков регистров интеграторов, можно оценить полученное решение (12)

$$\begin{aligned} |\gamma_{y,n}| &< 2R^{-m} \sqrt{2} \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}, \\ |\gamma_{z,n}| &< 2R^{-m} \sqrt{2} \frac{\rho^{n+1} - 1}{\rho - 1}, \end{aligned} \quad (13)$$

R^{-m} — вес младшего разряда регистра интегратора, R — основание системы счисления, m — количество разрядов регистра интегратора после запятой.

Из (13), следует, что погрешность квантования растет с ростом n независимо от метода квантования [2]. Полученная оценка (13) подтверждается результатами про веденного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. К а л я е в, Введение в теорию цифровых интеграторов, изд Наукова думка, Киев, 1964.
2. А. В. К а л я е в, Ю. Т. Ф о м и н, в сб Методы математического моделирования и теория электрических цепей, изд. АН УССР, Киев, 1967
3. S h a n n o n C. E., I. Math. and Phys., 20, № 4 (1940).

Таганрогский радиотехнический
институт

Поступила в редакцию
7 июля 1969 г.