

СОДЕРЖАНИЕ

Беспалов В. И., Кубарев А. М., Пасманик Г. А. Вынужденное рэлеевское рас- сеяние света (Обзор)	1433
Костенко В. И., Матвеенко Л. И. Исследование радиоизлучения Крабовидной туманности и некоторых квазаров на волнах 8,2 мм и 3,36 см	1467
Бенедиктов Е. А. О стабильности излучения дискретного радиоисточника Кас- сиопея-А в декаметровом диапазоне волн	1474
Гетманцев Г. Г., Пятова Е. Д., Токарев Ю. В., Шибаев В. А. О галактической и метагалактической составляющих распределенного космического радио- излучения	1480
Ловецкий Е. Е., Силаков В. П. Колебания ограниченной бесстолкновительной плазмы	1486
Богомолов Ю. В. О поглощении электромагнитной волны в ограниченной маг- нитоактивной плазме	1490
Найдя О. Н. О решениях уравнений «квазизотропного» приближения геомет- рической оптики	1496
Жуковский А. П. Рассеивающий образ статистически шероховатой поверхности	1501
Стратонович Р. Л. Тепловые шумы нелинейных сопротивлений	1512
Шачнева М. М., Якимов А. В. Флуктуации в высокочастотном транзисторном автогенераторе	1523
Шевченко В. В. О поведении волновых чисел волн диэлектрического волново- да за критическим значением	1528
Власов Б. И., Котосонов Н. В., Дронова В. С., Пьяных Ю. М. Исследование дифракционных полей плоских неоднородностей в волноводе металлопо- лупроводниковыми пленочными структурами	1532
Розенберг В. И. Дифракция электромагнитных волн на шарах, произвольно расположенных один в другом	1541
Романов П. В., Рошаль А. С., Галимуллин В. Н. О расчете методом Монте- Карло цилиндрического электронного потока в скрещенных полях	1554
Афанасов С. Г., Петров С. Г. Об особенностях скоростной модуляции электро- нов в неоднородных полях	1563
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Ерухимов Л. М., Кунилов М. В., Рапорт В. О., Урядов В. П. Предваритель- ные результаты исследования угловых размеров источников солнечных радиовсплесков с помощью интерферометра интенсивности	1568
Брауде С. Я., Жук И. Н., Лебедева О. М., Мень А. В., Рябов Б. П. О пере- мыслях дискретных источников в декаметровом диапазоне волн	1570
Токарев Ю. В. О фоне радиоизлучения Метагалактики	1571
Зайцев Ю. И., Степанов Д. П. О естественных флуктуациях частоты двухмо- дового гелий-неонового лазера	1574
Бондаренко А. Н., Кривошеков Г. В., Поливанов Ю. Н., Смирнов В. А. Син- хронизация мод рубинового ОКГ методом резонансной модуляции потерь	1576
Зачепицкая Л. П., Малахов А. Н. О спектре синхронизованного генератора при наличии расстройки	1578
Красильников Н. Н. Приближенный расчет вероятности правильного различе- ния L ортогональных сигналов равной энергии	1580
Коваленко А. Н. Влияние края экрана на входное сопротивление вибратора	1582
Аксенова В. С., Антропова Л. Х., Галаванов В. В., Котосонов Н. В. Частотная зависимость чувствительности датчиков Холла в диапазоне СВЧ	1585
Петелин М. И. Принцип подобия для высокочастотных приборов с ультрапре- делятиристскими электронными потоками	1586
Соболь Г. А., Соболь А. Г. О влиянии давления газа на детектирующие свой- ства плазмы	1589

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэропомия», т. X,
№№ 2, 3, 4, 1970 г.

1591

УДК 538.576 452.1

ВЫНУЖДЕННОЕ РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА

(Обзор)

В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	1433
II. Стационарное обратное рассеяние	1435
1 Взаимодействие плоских волн	1436
2. Флуктуационные процессы при стационарном рассеянии	1439
III. Нестационарные процессы при обратном рассеянии	1444
3. Нестационарные процессы при рассеянии в ограниченных средах	1445
4. Рассеяние частично когерентного излучения	1447
5. Рассеяние непрямоугольных импульсов	1449
6. Рассеяние в неограниченных средах	
IV. Взаимодействие стоксовых и антистоксовых компонент	1451
7. Рассеяние встречных пучков	
8. Стационарное рассеяние под малыми углами	1453
9. Нестационарное рассеяние под малыми углами	1455
V. Влияние эффектов насыщения на вынужденное рассеяние	1456
10. Нелинейное взаимодействие встречных волн	
11. Конкуренция различных процессов вынужденного рассеяния	1458
12. Насыщающие эффекты при стационарном рассеянии	1459
13. Генерация света при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна	1460
VI. Заключение	1462

I. ВВЕДЕНИЕ

Спонтанное рассеяние (СР) света, вызванное тепловыми (спонтанными) изменениями локальных значений диэлектрической проницаемости ϵ среды, принято разделять на комбинационное (рамановское) и рэлеевское*. По аналогии с этим вынужденное рассеяние (ВР) света, обусловленное вынужденными изменениями ϵ , также разделяется на комбинационное ВР (ВКР) и рэлеевское ВР, включающее в себя температурное (энтропийное) ВР (ВТР) [1, 2], мандельштам-бриллюэновское ВР (ВРМБ) [3] и ВР крыла линии Рэлея (ВРКР) [4]. Результаты исследований комбинационного ВР (ВКР) суммированы в ряде обзоров и монографий [5—10]. Менее подробно освещены данные, касающиеся рэлеевского ВР [6, 7, 11—13]. В настоящем обзоре, посвященном этому вопросу, основное внимание уделяется тем аспектам, которые практически не затронуты в предыдущих обзора, но в то же время существенны для выяснения особенностей соответствующих процессов. Это относится, в первую очередь, к нестационарным флуктуационным процессам при ВР частично когерентного (в общем случае) света, ВР сверхкоротких пикосекундных импульсов, ВР под малыми углами, а также к некоторым особенностям эффектов насыщения. Обзор теоретических

* Разумеется, такое деление далеко не полное. Оно не включает в себя, например, широко исследуемый в настоящее время класс процессов параметрического рассеяния.

и экспериментальных исследований проводится применительно к ВТР*, ВРМБ и ВРКР. Указанные виды ВР, так же как и соответствующие спонтанные процессы, обусловлены флуктуационными отклонениями ε_{ik} от равновесного значения $\varepsilon_0 \delta_{ik}^{**}$, вызванными, в свою очередь, тепловыми флуктуациями плотности ρ и тензора ζ_{ik}^{***} . Однако при ВР электромагнитное поле мощного возбуждающего излучения (накачки) изменяет характер флуктуационных процессов в среде. Эти изменения связаны с действием электрострикционной силы $f_i = (Y/8\pi) \frac{\partial E^2}{\partial x_i}$ ($Y = \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$)

и наличием в поглощающей среде источника тепла мощностью $Q_p = (1/2\pi) \delta v_{rp} \varepsilon_0 E^2$ (δ — амплитудный коэффициент затухания поля, v_{rp} — скорость света в среде)****. С эффектом ориентации анизотропно-поляризуемых молекул сильным электрическим полем [23, 24] связано появление в уравнениях для ζ_{ik} фактора***** $f_{ik} = \lambda [E_i E_k - (\delta_{ik}/3) E^2]$ (E_i — проекция электрического поля на i -ю ось, δ_{ik} — символ Кронекера, λ — постоянная, определенная ниже).

Каждый из приведенных факторов в той или иной мере влияет на все рассматриваемые процессы ВР. Однако с действием Q_p связано, в основном, ВТР, с действием f_{ik} — ВРКР, с действием f_i — ВРМБ и частично ВТР [20–22]. Под влиянием этих сил флуктуации ε , вызванные тепловым движением молекул (действием так называемого «стороннего источника» [26]), сильно возрастают. Тем не менее, в силу конвективного характера неустойчивости [27, 28] при ВР***** действие стороннего источника остается существенным и при стационарном процессе. Исключение составляет лишь ВРМБ в средах с малым затуханием гиперзвука, при котором возможна абсолютная неустойчивость, т. е. генерация электромагнитной и гиперзвуковой волны [27, 29, 30]. Однако при комнатных температурах такой процесс может иметь место лишь при очень высокой интенсивности накачки, в то время как уже при гораздо меньших интенсивностях возникает сильное ВР, обусловленное конвективной неустойчивостью и наличием стороннего источника [28]. Поэтому ВР последнего типа, практически, только и рассматривается в обзоре.

Теоретический анализ особенностей ВР ниже проводится преимущественно в приближении заданного поля накачки, т. е. предполагается, что интенсивность рассеянного излучения мала по сравнению с интенсивностью возбуждающего света. Такое ограничение вызвано значи-

* Центральная компонента линии Рэлея в СР включает в себя, как известно, кроме температурной составляющей, еще концентрационную часть, рассеяние вблизи критических точек и т. п. Хотя каждому СР, вообще говоря, может быть сопоставлено ВР, однако к настоящему времени исследования этих видов ВР находятся в начальной стадии и в обзоре не включены. Следует вместе с тем заметить, что в специальном обзоре вопросов теории концентрационного ВР [15–17] нет необходимости, так как она в рассматриваемых ниже приближениях совпадает (с точностью до обозначений и параметров) с теорией ВТР.

** Исключение составляет процесс ВР в резонаторе, при котором в стационарном режиме флуктуации оказываются лишь на ширине линии генерации

*** Следуя работе [18], для характеристики анизотропных возмущений мы используем параметр упорядоченности ζ_{ik} , зависимость ε от которого характеризует эффект двойного лучепреломления в потоке. Кроме того, полагая $T_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\rho \ll \rho_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T$, пре-небрегаем зависимостью ε от температуры T при постоянной плотности (T_0 и ρ_0 равновесные значения температуры и плотности).

**** В некоторых газах связь между поглощаемой мощностью и источником тепла нелокальна в пространстве и во времени [19].

***** Здесь предполагается, что энергия взаимодействия молекулы с полем мала в сравнении с $\kappa_B T_0$ (интенсивность накачки $I_0 < 5 \cdot 10^5 M \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$); κ_B — постоянная Больцмана. Обратный случай требует специального рассмотрения [25].

***** Имеется в виду ВР вне резонатора.

тельными трудностями, встречающимися на пути теоретического исследования нелинейных систем с флуктуационными источниками. Некоторые простейшие модели ВР с учетом обратной реакции рассеянного излучения на поле накачки (с учетом эффекта насыщения) рассмотрены в разд. V.

Следует отметить другую возможность проявления эффекта насыщения, связанную с немалостью изменения локальных значений параметров среды. В этом случае, при описании изменения r и ζ_{ik} необходимо учитывать высшие (относительно линейного приближения) гармоники возмущений [^{25, 32}]. Экспериментально этот эффект проявляется, например, при ВРМБ на второй гармонике гиперзвука [³³].

Как уже отмечалось, все рассматриваемые процессы (ВТР, ВРМБ, ВРКР) происходят, вообще говоря, не независимо. Однако в ряде случаев один из процессов является превалирующим и может, с хорошей степенью точности, быть рассмотрен независимо от других. Как показывает эксперимент (см., например, [^{1, 34}]), в нелинейном режиме наблюдается обычно тот из вынужденных процессов, порог которого наименьший*. К такому выводу приводят и теоретическое рассмотрение (разд. V). Наиболее эффективное рассеяние света происходит, как правило, в направлениях, близких к оси пучка**. Поэтому ниже обсуждается преимущественно обратное и попутное ВР. Рассеяние под произвольным углом θ (кроме $\theta \ll 1$) не имеет принципиальных отличий от обратного ($\theta = \pi$). Некоторые особенности соответствующих процессов отмечены в разд. II. Анализ ВР в настоящем обзоре проводится преимущественно применительно к процессам в жидкостях.

Учитывая, что настоящий обзор не является первым по обсуждаемой тематике (см., например, [^{7, 11, 12, 30}]), мы лишь кратко останавливаемся на качественном анализе рассматриваемых видов ВР и сразу же переходим к количественному описанию соответствующих процессов. Некоторую трудность, обусловленную этим обстоятельством, для лиц, мало знакомых с ВР, мы старались скомпенсировать соответствующим расположением обсуждаемого материала. Так в разд. II (первом после Введений) обсуждение стационарного ВР начато с анализа наиболее простого случая взаимодействия плоских волн без учета флуктуационных процессов в нелинейной среде (п. 1), в то время как флуктуационные процессы при стационарном рассеянии (п. 2) исследованы, как уже отмечалось, отдельно для каждого из видов ВР. Разд. III посвящен исследованию нестационарных процессов при обратном рассеянии. Анализ стационарных и нестационарных процессов с учетом взаимодействия стоксовых и антистоксовых компонент содержится в последующем (четвертом) разделе. Во всех названных разделах рассмотрение проведено на основе линеаризованных уравнений (без учета обратного воздействия на накачку). Вопросы нелинейной конкуренции и влияния эффектов насыщения на ВР рассмотрены в разд. V. Попутно с изложением теоретического материала в каждом разделе приводятся также некоторые экспериментальные результаты по данному вопросу или указываются ссылки на соответствующие работы.

II. СТАЦИОНАРНОЕ ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

Совместное рассмотрение различных видов ВР при учете стороннего случайного источника довольно громоздко даже в стационарном слу-

* Очевидное исключение могут составлять процессы с нелинейностями более высшего порядка (например, ВТР при двухквантовом поглощении).

** При фокусировке накачки цилиндрической линзой наиболее эффективным может быть рассеяние в направлении, перпендикулярном к оси пучка [^{35, 36}].

чае. Поэтому в работах, посвященных теоретическому исследованию взаимного влияния ВТР, ВРМБ и ВРКР [12, 17, 19, 37-39], рассеивающая среда предполагается регулярной, и о степени влияния судят по величине циклограммы распространяющейся слабой плоской волны, найденного с учетом всех (или ряда) процессов в среде, приводящих к ВР. В эксперименте условия, допускающие возможность пренебрежения сторонним источником, реализуются при усилении пучков света, интенсивность которых значительно больше интенсивности спонтанного рассеяния. Обзор результатов, относящихся к этому вопросу, а также обсуждение соответствующих экспериментальных данных содержатся в п. 1 данного раздела. Особенности стационарного рассеяния, связанные с флюктуационным характером ВР, рассмотрены отдельно (п. 2) для каждого из видов ВР, без учета их взаимодействия.

1. Взаимодействие плоских волн

При теоретическом анализе ВР (или усиления) света в изотропной, в отсутствие возмущений, среде будем предполагать, что изменение компонент диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} , обусловливающих рассеяние, связано преимущественно с изменениями плотности $\rho_1 = \rho - \rho_0$ и отличием от нуля компонент тензора ζ_{ik} ($\sum_i \zeta_{ii} = 0$), т. е.

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \delta_{ik} \epsilon_0 + \delta_{ik} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \rho_1 + A \zeta_{ik},$$

где $A = M/\tau_c$, M — постоянная Максвелла [11, 18], τ_c — время релаксации анизотропии. Изменения ϵ_{ik} при постоянных ρ и ζ_{ik} , как правило, малы, и они в дальнейшем не учитываются*.

Для описания процессов в жидкости воспользуемся исходными предпосылками работы [18], учтя дополнительно объемную вязкость и влияние электромагнитного поля на среду. При этом уравнение для ζ_{ik} запишется в виде

$$\dot{\zeta}_{ik} + \tau_c^{-1} \zeta_{ik} = \dot{e}_{ik} - \sigma (\delta_{ik}/3) + f_{ik}. \quad (1)$$

В соотношении $f_{ik} = \lambda (E_i E_k - (\delta_{ik}/3) E^2)$ коэффициент $\lambda = 3\epsilon_2/2M$, где ϵ_2 — постоянная**, характеризующая статический керр-эффект ($\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_2 E^2$). Временная производная тензора деформаций e_{ik} [18, 43] записывается через пространственные производные компонент скорости жидкости u_i в виде $\dot{e}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$. Величина σ линейно связана с возмущениями плотности среды [17] $\sigma = \sum_i e_{ii} = -\rho_1/\rho_0$. Уравнение движения, описывающее изменения u_i , имеет вид

$$\rho_0 \ddot{u}_i = K_s \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \eta' \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \zeta_{ik}}{\partial x_k} + \frac{Y'}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial x_i}, \quad (2)$$

K_s — адиабатический модуль сжатия***, $\mu = \eta/\tau_c$ — модуль сдвига, η' —

* Следует, однако, иметь в виду, что при очень быстрых процессах может сказаться зависимость ϵ от других величин, например, от температуры.

** Таблица значений ϵ_2 для ряда жидкостей приведена, например, в работах [40-42].

*** Неадиабатичностью процесса, следствием которой является энтропийное рассеяние, здесь пренебрегается. Влияние ВТР на ВРМБ обсуждается ниже.

коэффициент объемной вязкости*, η — коэффициент сдвиговой вязкости, $Y' = Y + A/6$.

Система уравнений (1), (2) совместно с волновым уравнением для электромагнитного поля (без учета дисперсии)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_l}{\partial t^2} + v_{rp}^2 (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E})_l = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{lk} - \delta_{lk} \epsilon_0) \mathbf{E}_k \quad (3)$$

позволяет рассмотреть взаимодействие ВРМБ и ВРКР и, в частности, найти пространственный инкремент (логарифмический коэффициент усиления) слабой волны

$$\mathbf{E}_1 = \mathcal{E}_1(z, t) \exp(-ik_1 z - i\omega_1 t) + \text{к. с.} \quad (k_1 = \omega_1/v_{rp}), \quad (4)$$

распространяющейся в направлении, противоположном направлению распространения сильной волны накачки

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}_0(z, t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t) + \text{к. с.} \quad (k_0 = \omega_0/v_{rp}) \quad (4a)$$

при одновременном учете процессов ориентации и изменения плотности.

Из рассмотрения системы (1)–(3) следует, что при $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_0$ изменения плотности ρ_1 в среде не происходит и инкремент соответствует «чистому» ВРКР (п. 2). В случае же $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_0$ выражение для инкремента интенсивности волны записывается в виде

$$G = G_{\rho Y'} + G_{\zeta \epsilon_1} + G_{\rho \epsilon_2} + G_{\zeta Y'}, \quad (5)$$

где

$$G_{\rho Y'} = \frac{k_0 q^2 Y Y' |\mathcal{E}_0|^2}{4\pi \epsilon_0 \rho_0} \Omega [(\delta\Omega) + \Omega^2 \tau_\zeta^2 (\delta\Omega_{\eta'})] D(\Omega); \quad (6a)$$

$$G_{\zeta \epsilon_2} = \frac{2k_0 \epsilon_2 \tau_\zeta |\mathcal{E}_0|^2}{\epsilon_0 (1 + \Omega^2 \tau_\zeta^2)} \Omega \left\{ 1 + \frac{\delta\Omega_\eta}{4\tau_\zeta} D(\Omega) [(\Omega_L^2 - \Omega^2) (1 - \Omega^2 \tau_\zeta^2) - \right. \\ \left. - \Omega^2 \tau_\zeta (\delta\Omega_{\eta'} + \delta\Omega)] \right\}; \quad (6b)$$

$$G_{\rho \epsilon_2} = \sqrt{\frac{\eta \tau_\zeta \epsilon_2}{6\pi}} \frac{k_0 q^2 Y |\mathcal{E}_0|^2}{\rho \epsilon_0} \Omega [\Omega^2 - \Omega_L^2 - (\delta\Omega) \tau_\zeta^{-1}] D(\Omega); \quad (6b)$$

$$G_{\zeta Y'} = \sqrt{\frac{\eta \tau_\zeta \epsilon_2}{6\pi}} \frac{k_0 q^2 Y' |\mathcal{E}_0|^2}{\rho \epsilon_0} \Omega [\Omega^2 - \Omega_L^2 + \Omega^2 \tau_\zeta (\delta\Omega_{\eta'})] D(\Omega). \quad (6c)$$

Здесь

$$D^{-1}(\Omega) = [\Omega_L^2 - \Omega^2 - \Omega^2 \tau_\zeta (\delta\Omega_{\eta'})]^2 + \Omega^2 \tau_\zeta^2 [\Omega_L^2 - \Omega^2 + (\delta\Omega) \tau_\zeta^{-1}]^2,$$

$$\Omega_L = \sqrt{\frac{K_s}{\rho_0}} q, \quad \delta\Omega_\eta = \frac{4\eta q^2}{3\rho_0}, \quad \delta\Omega_{\eta'} = \frac{\eta' q^2}{\rho_0},$$

$$\delta\Omega = \delta\Omega_\eta + \delta\Omega_{\eta'}, \quad \Omega = \omega_0 - \omega_1, \quad q = k_0 + k_1$$

и, кроме того, использована связь $A = 16\pi\eta\lambda$ или $A^2 = 24\pi\mu\epsilon_2$, полученная из термодинамических соотношений в присутствии электрического поля. Разбиение G на слагаемые G_{jl} сделано в соответствии с тем, какими возмущениями среды ($j = \rho, \zeta$) и какими силами ($l = Y', \epsilon_2$)

* Дисперсия объемной вязкости [43, 44] здесь не учитывается.

обусловлена соответствующая часть инкремента. Относительная величина вклада того или иного слагаемого определяется в первую очередь соотношением величин Y и ϵ_2 , а также диапазоном рассматриваемых частот Ω . Приведенные выражения позволяют для каждого конкретного случая определить величину $G(\Omega)$ как функцию Ω и, следовательно, найти области максимального инкремента, соответствующие тому или иному типу ВР.

Анализ полученных соотношений в общем случае довольно громоздкий. Легко, однако, видеть, что в двух предельных случаях $\Omega_L \tau_c \ll 1$ и $\Omega_L \tau_c \gg 1$ функция $G(\Omega)$ для жидкостей, обладающих высокочастотным керр-эффектом, имеет два четко разделенных максимума, соответствующих (при достаточных уровнях $|\mathcal{E}_0|^2$) ВРМБ и ВРКР. В этих случаях взаимное влияние процессов, приводящих к ВРМБ и ВРКР, невелико. Так, при $\Omega_L \tau_c \ll 1$ в области частот $\Omega \sim \Omega_L$ инкремент записывается в виде (с точностью до $(A/6Y)^2$)

$$G(\Omega) = G_p(\Omega) \left[1 - \frac{A}{6Y} - \frac{4A}{3Y} \frac{\tau_c \Omega_L}{(\delta\Omega)} (\Omega_L - \Omega) \right], \quad (7)$$

где

$$G_p(\Omega) = \gamma_p |\mathcal{E}_0|^2 \frac{\delta\Omega/2}{(\Omega - \bar{\Omega})^2 + (\delta\Omega/2)^2}, \quad \gamma_p = \frac{k_0^2 Y^2}{4\pi\rho_0 \epsilon_0 v}, \quad \delta\Omega \ll \bar{\Omega}. \quad (8)$$

Здесь $\bar{\Omega} = \Omega_L / \sqrt{1 + (\delta\Omega_\eta) \tau_c}$, $v = v_0 = \sqrt{K_s / \rho_0}$ — низкочастотный предел скорости гиперзвука, G_p — инкремент «чистого» ВРМБ. Из (7) следует, что влияние керр-эффекта на ВРМБ существенно зависит от A/Y . Так, например, при $A/Y < 0$ из-за влияния эффекта Керра максимум в спектре ВРМБ всегда смещается в сторону возбуждающей частоты, что является, возможно, одной из причин, объясняющих несовпадение максимумов спонтанного и ВРМБ [12, 45]. Обычно, однако, $|A/3Y| \ll 1$ и дополнительное смещение, а также добавки к инкременту G_p весьма малы. При $\Omega_L \tau_c \gg 1$ в области $\Omega \sim \Omega_L$ функция G_p имеет лоренцевый профиль (8) с несколько другими значениями оптимальной частоты и ширины линии:

$$\bar{\Omega} = \Omega_L \sqrt{1 + (\delta\Omega) / \Omega_L^2 \tau_c}, \quad \delta\bar{\Omega} = \frac{\delta\Omega}{\Omega_L^2 \tau_c} + \delta\Omega_\eta,$$

т. е. $\delta\Omega$ в (8) заменяется на $\delta\bar{\Omega}$. Скорость гиперзвука при $\Omega_L \tau_c \gg 1$ определяется своим высокочастотным пределом $v = v_\infty = \sqrt{(K_s + 4\mu/3) \rho_0^{-1}}$. Влияние керр-эффекта в этом случае также обычно мало. В области частот $\Omega \sim \tau_c^{-1}$ инкремент, в основном, определяет ВРКР

$$G_\zeta(\Omega) = \gamma_\zeta |\mathcal{E}_0|^2 \frac{\Omega}{\Omega^2 + (\Delta\Omega_\zeta)^2}, \quad \gamma_\zeta = \frac{2k_0 \epsilon_2}{\epsilon_0 \tau_c}, \quad \Delta\Omega_\zeta = \tau_c^{-1}. \quad (9)$$

Максимальное значение инкремента G_ζ приходится на частоту $\Omega = \Delta\Omega_\zeta$. На этой частоте и должна наблюдаться линия ВРКР.

Взаимовлияние ВРКР и ВРМБ существенно при $|\Omega_L \tau_\zeta - 1| \ll 1$. В этом случае зависимость $G(\Omega)$, и, следовательно, спектральное распределение света при ВР отличается от наложения «чистых» ВРМБ и ВРКР. Однако более часто реализуются случаи, когда взаимные добавки невелики и можно рассматривать ВРМБ и ВРКР независимо.

Экспериментальное исследование усиления слабой волны в поле интенсивной накачки за счет эффектов, приводящих к ВРМБ и ВРКР, проводилось рядом авторов [13, 46–48]. Наиболее детальные исследования выполнены в [13]. Полученная в этой работе* зависимость $G(\Omega)$ в нитробензоле приведена на рис. 1. На графике видна широкая «линия», обусловленная ВРКР, и более узкий всплеск в диапазоне ВРМБ. В исследовавшемся случае инкремент на частотах ВРМБ существенно увеличивается за счет керр-эффекта. О положении максимума $G(\Omega)$, обусловленного керр-эффектом, можно судить, например, по результатам работы [49], в которой измерялась величина смещения частоты $\Delta\nu_c = \Delta\Omega_c/2\pi c$ при ВРКР, как функция температуры исследовавшейся жидкости. По наклону полученной прямой с помощью соотношений $\Delta\nu_c = (2\pi c\tau_c)^{-1}$ и $\tau_c = 4\pi a^3\eta/3k_B T_0$ был определен радиус молекулы $a \approx 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, близкий к известному ранее значению $a \approx 3.4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Измерение смещения частоты ВРКР в различных жидкостях выполнено в [50]. По результатам были рассчитаны времена релаксации анизотропии τ_c .

В работах [12, 17, 19, 37–39] проведен теоретический анализ взаимного влияния процессов, приводящих к ВРМБ и ВТР. Было показано, в частности, что у кривой $G(\Omega)$ в области ВРМБ при большом поглощении света за счет влияния энтропийных процессов появляется асимметрия — со стоксовой стороны (относительно Ω_L) усиление увеличивается, а с антистоксовой — уменьшается. Такой характер изменения $G(\Omega)$ (по сравнению с «чистым» ВРМБ) в работе [48] был подтвержден экспериментально**. Необходимо, однако, заметить, что добавка в инкременте ВРМБ, обусловленная ВТР, невелика и падает с уменьшением оптического поглощения, так что обычное поглощение в прозрачных жидкостях (без поглощающих добавок), а также и часть ВТР, связанная со стрикцией, практически не влияют на инкремент ВРМБ.

2. Флуктуационные процессы при стационарном рассеянии

Как отмечалось в предыдущем пункте, при некоторых условиях взаимное влияние различных процессов, приводящих к ВР, относительно мало. При этих условиях, справедливых в значительном числе случаев, можно каждый из вынужденных процессов рассмотреть независимо. Этим обстоятельством мы воспользуемся при обсуждении флуктуационных явлений при ВР.

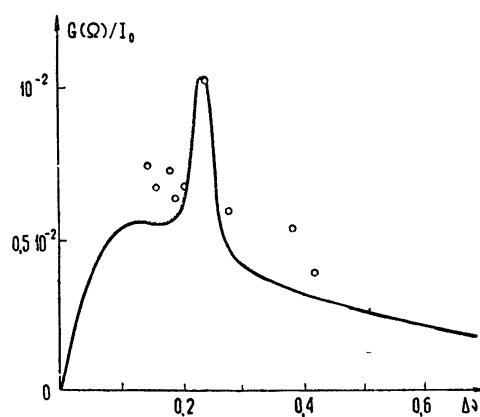


Рис. 1. Инкремент рассеяния в нитробензоле как функция разности частот сигнала и накачки $\Delta\nu = \nu_0 - \nu_1 = (\omega_0 - \omega_1)/2\pi c$. Результаты эксперимента отмечены точками; теоретический расчет — сплошной кривой ($G(\Omega)/I_0$ в $\text{см} \cdot \text{вт}^{-1}$, $\Delta\nu$ в см^{-1}).

* Для получения сигнальных (усиливаемых) волн было использовано ВРМБ в жидкостях. Перестройка частоты осуществлялась путем использования жидкостей, дающих различный сдвиг частоты

** В этой работе для получения сигнальных волн использовалось излучение при ВРМБ в смеси CS_2 и CCl_4 . Частота перестраивалась изменением концентрации смеси. ВРМБ в смесях специально исследовалась в работе [51].

Статистический характер излучения при ВР обусловлен рассеянием падающего света на случайных неоднородностях среды, вызванных развитием в поле накачки флуктуаций давления α_p^* , энтропии α_s и тензора $\alpha_{ik} = \zeta_{ik}$. При этом предполагается, что возмущение плотности ρ_1 связано с малыми изменениями α_p и α_s соотношением $\rho_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s_i}\right)_p \alpha_s + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\right)_s \alpha_p$.

Для совместного (самосогласованного) описания рассеянного поля и флуктуаций параметров среды наряду с уравнением (3) приведем уравнения для величин α с учетом сторонних случайных сил. Уравнение для α_p — уравнение Навье — Стокса [11, 43]

$$\ddot{\alpha}_p - v^2 \Delta \alpha_p - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right) \Delta \dot{\alpha}_p = -v^2 \operatorname{div} (\mathbf{f} + \mathbf{f}_{ct}) \quad (10)$$

—следует из (1), (2) при условии, что ρ_1 зависит только от α_p и $\Omega \zeta \rightarrow 0$. Приняв эти предположения, мы ограничиваем себя рассмотрением лишь «чистого» ВРМБ. В (10) использованы следующие обозначения: $\mathbf{f} = (Y/8\pi) \nabla E^2$ — электрострикционная сила, уже введенная выше, $\mathbf{f}_{ct}(r, t)$ — сторонняя сила, обуславливающая тепловые дебаевские волны. Изменение α_s при независимом рассмотрении ВР описывается уравнением теплопроводности

$$\dot{\alpha}_s - \chi \Delta \alpha_s = (\dot{Q}_n + \dot{Q}_{ct})/T_0, \quad (11)$$

где χ — коэффициент температуропроводности, $\dot{Q}_{ct} = -T_0 \frac{\partial S_{ct}}{\partial t}$ — сторонний источник тепла в единице объема, обуславливающий спонтанные флуктуации энтропии. При «чистом» ВРКР уравнение для α_{ik} формально совпадает с уравнением (1), однако теперь уже тензор $e'_{ik} = e_{ik} - \delta_{ik} \sigma/3$ играет роль стороннего источника $(e'_{ik})_{ct}$. Интенсивность сторонних источников f_{ct} , Q_{ct} и $(e_{ik})_{ct}$ может быть найдена из флуктуационно-диссилиационной теоремы для распределенных систем.

Несмотря на очевидное упрощение, связанное с разделением различных процессов, анализ полученных уравнений остается громоздким и мы, следуя [14], выполним его в приближении достаточно широких пучков накачки, $a_n \gg \sqrt{\lambda_0 L}/n_0$ (a_n и L — поперечный и продольный размер возбуждающего пучка в рассеивающей среде, λ_0 — длина волны падающего света в вакууме, $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ — показатель преломления). В этом случае корреляцией по поперечным координатам рассеянного излучения**

$$E_1(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 k_{1\perp} \mathcal{E}_1(k_{1\perp}, z, t) \exp(i k_1 r - i \omega_1 t) + \text{к. с. } (\mathcal{E}_1 \perp k_1) \quad (12)$$

и возмущений среды

$$\alpha(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 q_{\perp} \alpha'(q_{\perp}, z, t) \exp[i q r - i(\omega_0 - \omega_1)t] + \text{к. с.} \quad (13)$$

* Ради удобства введено единое обозначение α для всех видов флуктуаций с использованием соответствующих индексов. Так как среднее значение ζ_{ik} равно нулю, то $\alpha_{ik} = \zeta_{ik}$.

** Использованное в (12), (13) представление удобно для анализа обратно рассеянного поля. При рассмотрении рассеяния под произвольным углом θ амплитуды \mathcal{E}_1 и α' будут медленными функциями координаты вдоль направления рассеяния.

можно пренебречь [14] и для фурье-компонент $\mathcal{E}_1(\mathbf{k}_{1\perp}, z, t)$ и $\alpha'(q_{\perp}, z, t)$ написать, используя (1), (3), (10), (11), следующую систему укороченных уравнений:

$$\left(-\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_1 = -\frac{i}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) k_1 \mathcal{E}_0 \alpha'^*, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tau^{-1} \right) \alpha'^* = B \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* + \iint_{-\infty}^{\infty} dx_z d\Omega \Psi^*(x, \Omega) \exp [-i(x_z - q_z)z - i(\Omega + \omega_0 - \omega_1)t].$$

Уравнения (12), (13), (14) относятся к каждому из рассматриваемых видов ВР с той лишь разницей, что при ВТР и ВРКР $\omega_1 = \omega_0$, а при ВРМБ* $\omega_1 = \omega_0 - \Omega_L$, где $\Omega_L = qv$, $q = 2k_0 \sin(0/2)$ — волновой вектор возмущений, определяемый из соотношений $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \mathbf{q}$ и $k_0 \approx k_1$. Индекс, указывающий на тот или иной вид рассеяния (p — ВРМБ, s — ВТР, ζ — ВРКР), в (12)–(14), а также, где это можно, в последующих соотношениях, опущен. Производная $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right)$ берется при постоянных двух других характеристиках, например, $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha_p} \right)_{s, \zeta}$. Постоянная B в (14) определяется выражениями**

$$B_p = -\frac{ik_0 v Y}{4\pi}, \quad B_{s_1} = \frac{v_{rp} \epsilon_0 \delta}{\pi T_0}, \quad B_{\zeta \parallel} = \frac{4\lambda}{3}, \quad B_{\zeta \perp} = \lambda,$$

где $B_{\zeta \parallel}$ и $B_{\zeta \perp}$ относятся соответственно к ВР света, поляризованного параллельно и перпендикулярно поляризации накачки. Времена релаксации τ , равные обратным значениям полуширины линий спонтанного рассеяния, определяются соотношениями

$$\tau_p = (\delta\Omega/2)^{-1}, \quad \tau_s = (\chi q^2)^{-1} = (\Delta \Omega_s)^{-1}.$$

Величины Ψ , характеризующие источники шума, выражаются через спектральные плотности введенных выше сторонних источников:

$$\Psi_p = (v/2) f_{ct}(x, \Omega), \quad \Psi_s = -i\Omega S_{ct}(x, \Omega), \quad \Psi_{ik} = i\Omega (e'_{ik}(x, \Omega))_{ct}.$$

Заметим, что при использовании (14) применительно к ВРКР $\Psi \rightarrow \Psi_{ik}$, $\alpha \rightarrow \alpha_{ik}$, $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0^{(i)}$, $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1^{(k)}$.

Решение системы (14) позволяет найти спектральное распределение интенсивности и функцию корреляции обратно рассеянного поля. Поляризация ВРМБ и ВТР совпадает с поляризацией возбуждающего света, тогда как ВРКР деполяризовано с некоррелированными взаимно перпендикулярными компонентами. Выражение для интенсивности рассеянного в единицу телесного угла излучения имеет вид

* В уравнении для α_p в (14) в случае ВРМБ опущен член $v \frac{\partial \alpha_p}{\partial z}$, приводящий, при определенных условиях, к абсолютной неустойчивости. Как уже отмечалось, в большинстве реальных случаев определяющую роль играет конвективная неустойчивость и такое приближение оправдано.

** При двухквантовом поглощении формулы для ВТР остаются теми же при замене B_{s_1} на величину $B_{s_1} = \sigma_2 N \epsilon_0^2 v_{rp} |\mathcal{E}_0|^2 / 4\pi^2 \hbar k_0 T_0$ (σ_2 — сечение двухквантового поглощения, N — концентрация молекул, на которых возможно двухквантовое поглощение, \hbar — постоянная Планка).

$$I = H \sqrt{\pi/\Gamma L} \exp(\Gamma L), \quad (15)$$

где H — постоянная, зависящая от свойств среды, вида рассеяния и частоты накачки [14]. Обычно H составляет величину порядка нескольких десятков ватт на квадратный сантиметр*. Γ — инкремент стационарного рассеяния, равный максимальному значению соответствующей функции $G(\Omega)$. В случае ВРКР $\Gamma_{\zeta\parallel} = G_{\zeta}(\Omega = \Delta\Omega_{\zeta}) = \gamma_{\zeta} |\varepsilon_0|^2 / 2\Delta\Omega_{\zeta}$, $\Gamma_{\zeta\perp} = 3\Gamma_{\zeta\parallel}/4$, для ВРМБ $\Gamma_p = G_p(\Omega = \Omega_L) = 2\gamma_p |\varepsilon_0|^2 / (\delta\Omega)$; при ВТР $\Gamma_s = G_s(\Omega = \Delta\Omega_s) = \gamma_s |\varepsilon_0|^2 / 2\Delta\Omega_s$. Зависимость $G_s(\Omega)$ совпадает (с точностью до замены индекса ζ на s) с формулой (9) для $G_{\zeta}(\Omega)$. Величина γ_s определяется соотношением: $\gamma_s = B_s \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p T_0 k_B |\varepsilon_0|^2 / \rho c_p \epsilon_0$ (c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении). В табл. 1 приведены значения инкрементов Γ для различных видов рассеяния и даны оценки для некоторых жидкостей.

Спектральная плотность света, рассеянного в единицу телесного угла, записывается в виде

$$(I_p)_{\Omega} = H_p \tau_p \left\{ \exp \left[\gamma_p |\varepsilon_0|^2 L \frac{\delta\Omega/2}{(\Omega - \Omega_L)^2 + (\delta\Omega/2)^2} \right] - 1 \right\}, \quad (16)$$

$$(I_{s,\zeta})_{\Omega} = \frac{H_{s,\zeta}}{\sqrt{2\Omega}} \left\{ \exp \left[\gamma_{s,\zeta} |\varepsilon_0|^2 L \frac{\delta\Omega/2}{\Omega^2 + (\Delta\Omega_{s,\zeta})^2} \right] - 1 \right\}. \quad (17)$$

Формулы (16), (17) совпадают с соответствующими выражениями, полученными при рассмотрении ВР как усиления спонтанного рассеяния [28]. Полуширина линии ВР $\delta\Omega_{p,s,\zeta}$ приблизительно равна обратному времени корреляций стационарного рассеяния $t_{p,s,\zeta}$. Из (16), (17) следует, что

$$\delta\Omega_p = (\tau_p M_p^{1/2})^{-1} \sqrt{\ln 2} \approx t_p^{-1}, \quad \delta\Omega_{s,\zeta} = (\tau_{s,\zeta} M_{s,\zeta}^{1/2})^{-1} \sqrt{2 \ln 2} \approx t_{s,\zeta}^{-1}, \quad (17a)$$

$$(M_{p,s,\zeta} = \Gamma_{p,s,\zeta} L).$$

Смещение максимума спектра ВРМБ относительно частоты падающего излучения равно Ω_L , смещение максимумов спектров ВТР и ВРКР равно $\tau_s^{-1} = \Delta\Omega_s$ и $\tau_{\zeta}^{-1} = \Delta\Omega_{\zeta}$, соответственно. При всех видах ВР, кроме ВТР, обусловленного поглощением света при $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p < 0$, смещение

является стоксовым.

Приведенные формулы и табл. 1 позволяют провести количественное обсуждение экспериментальных данных. Наиболее надежно можно это сделать для ВРМБ, которое обычно имеет наименьший порог и может наблюдаться в чистом виде (без самофокусировки, ВКР и т. д.)*. Измерения интенсивности и инкрементов ВРМБ было проведено в ряде

* В случае ВТР и ВРМБ [14]

$$H_p = \frac{v_{rp} k_B T_0 k_0^2}{16\pi^3 v \tau_p}, \quad H_s = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_p k_0^3 k_B T_0^2}{32\pi^3 \delta \epsilon_0 \tau_s}.$$

Для рассеяния света рубинового лазера в CS_2 $H_p = 5,5 \text{ вт}\cdot\text{см}^{-2}$; $H_s = 44,5 \text{ вт}\cdot\text{см}^{-2}$ (при $\delta = 0,02 \text{ см}^{-1}$).

** При этом следует отметить, что результаты исследований ВРМБ в жидкостях с сильной дисперсией и поглощением упругих волн [52, 53] существенно отличаются от данных для недиспергирующих жидкостей

Параметры некоторых жидкостей ($T_0 = 20^\circ\text{C}$) [11–13, 42, 64] и соответствующих ВР на $\lambda_0 = 0,6943 \cdot 10^{-4} \text{ см}$; Γ_{s_2} и Γ_{s_3} — инкремент ВТ1 и электрострикцией; I_0 — интенсивность во

	ρ ($\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$)	n	Y	$v \cdot 10^{-5}$ ($\text{см}\cdot\text{сек}^{-1}$)	$c_p \cdot 10^{-7}$ ($\frac{\text{эрз}}{\text{г}\cdot\text{град}}$)	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p \cdot 10^3$ (град^{-1})	$\varepsilon_2 \cdot 10^{11}$ ($\text{см}^3 \cdot \text{эрз}^{-1}$)	τ_p (нсек)	τ_s (нсек)	Γ_p (см^{-1})
Аналитическое выражение										$\frac{Y^2 k_0^2 \tau_p \varepsilon_0 ^2}{4\pi \rho_0 \varepsilon_0 v}$
Бензол	0,879	1,522	1,62	1,47	1,7	— 1,96	1,37	1,0	14,4	$18 \cdot 10^{-3} I_0$
Сероуглерод	1,262	1,62	2,37	1,247	1,0	— 2,69	8,3	5,0	9,3	$150 \cdot 10^{-3} I_0$
Ацетон	0,791	1,36	0,99	1,19	2,21	— 1,38	0,22	1,7	16,8	$22 \cdot 10^{-3} I_0$
Четыреххлористый углерод	1,595	1,456	1,35	1,01	0,841	— 1,65	0,154	0,54	16,4	$5,8 \cdot 10^{-3} I_0$
Толуол	0,865	1,513	1,6	1,38	1,68	— 1,89	1,56	0,66	13,8	$10 \cdot 10^{-3} I_0$

Таблица 1

Параметры некоторых жидкостей ($T_0 = 20^\circ\text{C}$) [11–13, 42, 64] и соответствующие значения стационарных инкрементов для различных видов ВР на $\lambda_0 = 0,6943 \cdot 10^{-4} \text{ см}$; Γ_{s_2} и Γ_{s_3} — инкремент ВТР, обусловленного двухквантовым поглощением и электрострикцией; I_0 — интенсивность возбуждающего излучения в $\text{Мет}\cdot\text{см}^{-2}$

$v \cdot 10^{-5}$ (см·сек $^{-1}$)	$c_p \cdot 10^{-7}$ $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p$ (з·град град $^{-1}$)	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_p \cdot 10^3$ (см 3 ·зр g^{-1})	$\varepsilon_2 \cdot 10^{11}$ (см 3 ·зр g^{-1})	τ_p (нсек)	τ_s (нсек)	Γ_p (см $^{-1}$)	Γ_{s_1} (см $^{-1}$)	Γ_{s_2} (см $^{-1}$)	Γ_{s_3} (см $^{-1}$)	$\Gamma_{\zeta \parallel}$ (см $^{-1}$)	$\Gamma_{\zeta \perp}$ (см $^{-1}$)
						$\frac{Y^2 k_0^2 \tau_p \varepsilon_0 ^2}{4\pi \rho_0 \varepsilon_0 v}$	$\left \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p \right k_0 \tau_s v_{rp} \delta \varepsilon_0 ^2$	$\left \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p \right \sigma_2 N \tau_s v_{rp} \varepsilon_0 \varepsilon_0 ^4$	$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p^2 k_0 T_0 \varepsilon_0 ^2$	$\frac{k_0 \varepsilon_2 \varepsilon_0 ^2}{\varepsilon_0}$	$\frac{3k_0 \varepsilon_2 \varepsilon_0 ^2}{4\varepsilon_0}$
1,47	1,7	— 1,96	1,37	1,0	14,4	$18 \cdot 10^{-3} I_0$	1,12 δI_0	$4,45 \cdot 10^{24} \sigma_2 N I_0^2$	$2,44 \cdot 10^{-4} I_0$	$11,2 \cdot 10^{-4} I_0$	$8,4 \cdot 10^{-4} I_0$
1,247	1,0	— 2,69	8,3	5,0	9,3	$150 \cdot 10^{-3} I_0$	1,11 δI_0	$5,07 \cdot 10^{24} \sigma_2 N I_0^2$	$4,85 \cdot 10^{-4} I_0$	$60 \cdot 10^{-4} I_0$	$45 \cdot 10^{-4} I_0$
1,19	2,21	— 1,38	0,22	1,7	16,8	$22 \cdot 10^{-3} I_0$	0,885 δI_0	$2,87 \cdot 10^{24} \sigma_2 N I_0^2$	$1,39 \cdot 10^{-4} I_0$	$2,2 \cdot 10^{-4} I_0$	$1,64 \cdot 10^{-4} I_0$
1,01	0,841	— 1,65	0,154	0,54	16,4	$5,8 \cdot 10^{-3} I_0$	1,25 δI_0	$4,60 \cdot 10^{24} \sigma_2 N I_0^2$	$2,12 \cdot 10^{-4} I_0$	$1,2 \cdot 10^{-4} I_0$	$0,9 \cdot 10^{-4} I_0$
1,38	1,68	— 1,89	1,56	0,66	13,8	$10 \cdot 10^{-3} I_0$	1,07 δI_0	$4,30 \cdot 10^{24} \sigma_2 N I_0^2$	$2,39 \cdot 10^{-4} I_0$	$12,8 \cdot 10^{-4} I_0$	$9,6 \cdot 10^{-4} I_0$

работ (см., например, [13, 54–58]). На рис. 2 приведены инкременты обратно рассеянного излучения при ВРМБ в ряде жидкостей как функции интенсивности света рубинового лазера (накачки) [13]. Результаты измерения интенсивности рассеянного света (см., например, [54]) вблизи порога*, когда, обратное влияние на накачку мало, согласуются с теорией. Экспериментальные результаты спектральных исследований ВРМБ достаточно полно освещены в [12] и поэтому здесь не приводятся. Остановимся лишь коротко на обсуждении величины смещения частоты при ВРМБ и СРМБ. К сожалению, известные нам данные по спектру ВРМБ и СРМБ (см., например, [11–15, 30, 45, 59–64]) имеют довольно большой разброс и не дают возможности уверенно заключить о наличии или отсутствии разницы величины смещения при СР и ВР. Высказывания авторов указанных работ по этому вопросу также различны. Так, например, в работе [12] сделано заключение о том, что при ВРМБ с фокусировкой накачки короткофокусными линзами ($F = 5 \text{ см}$) смещение отличается от спонтанного. Вместе с тем, в работе [60] отмечается соответствие спектра ВРМБ (фокусировка накачки линзой с $F = 30 \text{ см}$) спектру СРМБ. Возможно, что различие смещений спектров ВРМБ и СРМБ [45, 59, 65] обусловлено возбуждением других нелинейных эффектов, имеющих больший порог, за счет увеличения плотности накачки в фокусе короткофокусной линзы. Данные наших измерений ВРМБ, полученные при превышении порога в 2–5 раз, сведены в табл. 2. Количественные

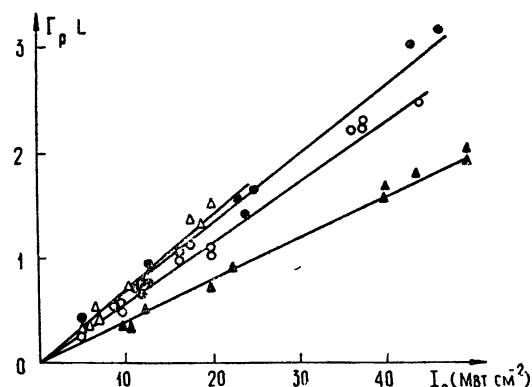


Рис. 2. Зависимость инкрементов рассеяния от интенсивности возбуждающего излучения в различных жидкостях [13]. Сплошные прямые проведены по данным расчета, $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$ — CCl_4 , $\bullet\bullet\bullet$ — CH_3OH , $\circ\circ\circ$ — $\text{CO}(\text{CH}_3)_2$, $\triangle\triangle\triangle$ — $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$.

Рис. 2. Зависимость инкрементов рассеяния от интенсивности возбуждающего излучения в различных жидкостях [13]. Сплошные прямые проведены по данным расчета, $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$ — CCl_4 , $\bullet\bullet\bullet$ — CH_3OH , $\circ\circ\circ$ — $\text{CO}(\text{CH}_3)_2$, $\triangle\triangle\triangle$ — $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$.

имеют довольно большой разброс и не дают возможности уверенно заключить о наличии или отсутствии разницы величины смещения при СР и ВР. Высказывания авторов указанных работ по этому вопросу также различны. Так, например, в работе [12] сделано заключение о том, что при ВРМБ с фокусировкой накачки короткофокусными линзами ($F = 5 \text{ см}$) смещение отличается от спонтанного. Вместе с тем, в работе [60] отмечается соответствие спектра ВРМБ (фокусировка накачки линзой с $F = 30 \text{ см}$) спектру СРМБ. Возможно, что различие смещений спектров ВРМБ и СРМБ [45, 59, 65] обусловлено возбуждением других нелинейных эффектов, имеющих больший порог, за счет увеличения плотности накачки в фокусе короткофокусной линзы. Данные наших измерений ВРМБ, полученные при превышении порога в 2–5 раз, сведены в табл. 2. Количественные

Таблица 2

Скорости гиперзвука, измеренные при ВРМБ и СРМБ

	$T_0^\circ \text{C}$	$\Delta v (\text{см}^{-1})$ (при $\lambda_0 = 0,6943 \mu$)	$v \cdot 10^{-5}$ ($\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$)	$v \cdot 10^{-5} (\text{см} \cdot \text{сек}^{-1})$ по результатам СРМБ
Вода	22,5	0,188	1,472	1,488 [64]; 1,485 [60]; 1,470 [62]; 1,457 [61]
Спирт этиловый	21	0,155	1,184	1,162 [64]
Углерод четыреххлористый	21	0,145	1,033	0,998 [61]; 1,040 [11]; 1,015 [65], 1,046 [64]
Кислота уксусная	21	0,152	1,154	1,180 [12, 64]; 1,169 [66]; 1,212 [62]
Циклогексан	21	0,183	1,346	1,346 [64]

* Рассматриваемые здесь процессы ВР не являются, строго говоря, пороговыми, так как интенсивность рассеяния плавно возрастает от малых значений при спонтанном рассеянии до больших при ВР; под «порогом» обычно имеется в виду порог визуального наблюдения на том или ином приборе.

измерения интенсивности рассеянного света при ВРКР и ВТР практически не проводились из-за влияния других сопутствующих нелинейных явлений. Кроме того, во всех известных экспериментах по наблюдению ВТР, процессы не являются стационарными и на их обсуждении мы остановимся ниже.

Экспериментальных данных, необходимых для однозначной интерпретации спектра ВРКР, еще недостаточно. Узкая линия при ВРКР [49, 50], по-видимому, наблюдается при не слишком больших интенсивностях накачки. Как и следует из теории, она смещена на $\Delta\Omega_c$ относительно частоты возбуждающего излучения*. В ряде экспериментов [4, 67, 68] при ВРКР наблюдается широкая полоса («крыло»), простирающаяся иногда до нескольких обратных сантиметров. Ее появление обусловлено, по-видимому, формированием (при достаточно высоких уровнях накачки) сверхкоротких импульсов, распространяющихся в обратном направлении (см. п. 10). Качественное сравнение результатов эксперимента и теории для ВРКР приведено в табл. 3. Измерения инкрементов в случае линейно поляризованной накачки [18] показали, в соответствии с теорией, что $G_{\zeta\parallel}(\Omega)/G_{\zeta\perp}(\Omega) = 4/3$.

Таблица 3

Инкременты и характер спектра обратного ВРКР при линейной \uparrow
и циркулярно поляризованной \circlearrowleft накачке

Поляризация накачки	\uparrow		\circlearrowleft	
Поляризация рассеяния	\uparrow	\rightarrow	\circlearrowright	
Теоретическое значение инкремента	$G_{\zeta\parallel}$	$\frac{3}{4} G_{\zeta\parallel}$	$\frac{3}{2} G_{\zeta\parallel}$	$\frac{1}{4} G_{\zeta\parallel}$
Экспериментальные наблюдения	линия [49, 50] крыло [4, 67, 68]	линия [50]	сначала линия, потом крыло [50]	не наблюдалось

Проведенное рассмотрение относилось преимущественно к обратному рассеянию, поскольку, как уже отмечалось, рассеяние в других направлениях (кроме попутного) в большинстве случаев не имеет принципиальных особенностей. Однако необходимо отметить, например, возможность наблюдения ВР вбок ($\theta \sim \pi/2$) на частоте сдвиговых волн (аналогично спонтанному рассеянию [18, 69–71]). При этом функция $G_p(\Omega)$ изменится: появятся, в частности, слагаемые, имеющие максимум на частоте сдвиговых волн.

Что же касается «чистых» ВР под углом θ , то все приведенные формулы для инкрементов останутся справедливыми при замене L на соответствующую длину и τ на $\tau \sin^{-2}(\theta/2)$. Кроме того, инкремент умножается на $\sin^2\phi$ для поляризаций E_0 , имеющих угол ϕ с направлением рассеяния k_1 .

III. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОБРАТНОМ РАССЕЯНИИ

Результаты, приведенные в предыдущем разделе, справедливы лишь при условии, что длительность импульса накачки существенно больше времени переходного процесса t_n . Из анализа флюктуационных

* Такое же смещение имеет место при обратном рассеянии в случае циркулярно поляризованной накачки [66] (см. разд. IV).

процессов при стационарном рассеянии видно, что это время, по крайней мере, не меньше времени корреляции ВР, т. е. $t_n \gtrsim \tau(M_p, s, \zeta)^{1/2}$ и в несколько раз больше времени релаксации соответствующего процесса при СР. Следовательно, нестационарность процесса будет в первую очередь иметь место в случае ВТР и ВРМБ, для которых τ_p и τ_s сравнимы с длительностью t_n гигантских импульсов накачки. В случае рассеяния пикосекундных импульсов нестационарность может оказаться существенной и для ВРКР. Кроме того, нестационарность может возникнуть и при неизменной во времени накачке за счет неустойчивости соответствующего процесса. В настоящем разделе мы обсудим эффекты, обусловленные нестационарностью процесса при обратных ВТР и ВРМБ [14, 17, 27, 72]*.

Рассмотрение будем проводить в двух предельных случаях:

- 1) рассеяние в ограниченных средах ($t_n \gg t_L = L/v_{rp}$) — пп. 3 — 5,
- 2) рассеяние в неограниченных средах ($t_n < t_L$) — п. 6.

3. Нестационарные процессы при рассеянии в ограниченных средах

При анализе процессов рассеяния в ограниченных средах будем пренебрегать в уравнении (14) членом $(1/v_{rp}) \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t}$. Это эквивалентно тому, что реальное поле, рассеянное на неоднородностях ϵ , меняющихся во времени, заменяется в каждый момент рассеянием на «замороженных» неоднородностях, что оправдано в том случае, когда медленно в масштабе t_L меняются характеристики среды α^{**} . Для этого необходима медленность изменения в масштабе t_L амплитуд \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 ($\delta\omega_0 \ll t_L^{-1}$, $\delta\omega_1 \ll t_L^{-1}$, $\delta\omega_0$ и $\delta\omega_1$ — ширина спектра падающего и нестационарно-рассеянного излучений, соответственно). Решение уравнений (14) в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{k}_{1\perp}, 0, t) = & -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \mathcal{E}_0(t) \int_0^L dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\mathbf{x}_z - \mathbf{q}_z) z_1] dx_z \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Psi^*(\mathbf{x}, \Omega) \left\{ \frac{\exp(-t/\tau) J_0 \left(2 \left[-i \left(k_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} B z_1 / 2\epsilon_0 \right) \int_0^t |\mathcal{E}_0|^2 dt \right]^{1/2} \right)}{\tau^{-1} - i\Omega} + \right. \\ & \left. + \int_0^t dt_1 \exp \left(\frac{t_1 - t}{\tau} - i\Omega t_1 \right) J_0 \left(2 \left[-i \left(k_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} B z_1 / 2\epsilon_0 \right) \int_{t_1}^t |\mathcal{E}_0(t_2)|^2 dt_2 \right]^{1/2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

* Влиянием конечности t_n на ВРКР для гигантских импульсов ($t_n \approx (1-2) \times 10^{-8}$ сек) обычно можно пренебречь ввиду малости $\tau_\zeta \lesssim 10^{-10}$ сек. Рассмотрение же нестационарности обратного ВРКР в случае пикосекундных импульсов накачки необходимо проводить с учетом изменения импульса [73, 74] за счет ВРКР вперед. Такое совместное рассмотрение связано с существенными трудностями и к настоящему времени не проведено. Неустойчивость процесса обратного ВРКР при непрерывной накачке за счет эффектов запаздывания, не учитываемых в этом разделе ($v_{rp}^{-1} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} = 0$), рассмотрена в п. 10.

** В случае ВРМБ имеется в виду медленность изменения амплитуды звука

Интегральная интенсивность рассеянного в единицу угла света может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: $I_{\text{нест}} = I' + I''$, одно из которых обусловлено начальными флюктуациями (I'), другое—развитием флюктуаций в результате действия флюктуационного источника во время прохождения импульса. При $t_n \leq \tau$ основной вклад дают начальные флюктуации, а при $t_n \rightarrow \infty$ $I' \rightarrow 0$ [14]. На рис. 3 показано раз-

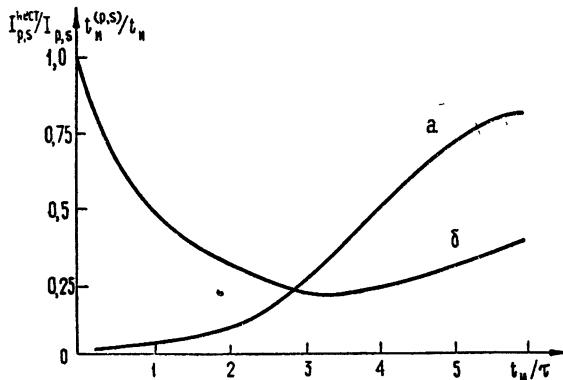


Рис. 3. Зависимость интенсивности нестационарного рассеяния от длительности падающего импульса (кривая „а“). Отношение длительности рассеянного импульса к падающему (кривая „б“).

вление ВР во времени для прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением, а также приведено отношение длительностей рассеянного и падающего импульсов (по уровню 0,5).

Время перехода к стационарному состоянию для $M \gg 1$ определяется соотношением

$$t_n = (\tau M/2) (1 + 2/\sqrt{M})$$

и превышает не только время релаксации $\tau_{p,s}$, но и время корреляции стационарного рассеяния $t_{p,s}$. При $t_n \approx 10 - 20$ нсек процесс ВРМБ выходит, как правило, на стационарный режим*, тогда как ВР существенно нестационарно. При накачке прямоугольным импульсом с синусоидальным заполнением максимум в спектре ВР смещен в антистоксову область (при $(\frac{\partial \epsilon}{\partial T})_p < 0$) на [14, 76]

$$\Delta\Omega_s^{(n)} = (\Gamma_s L / 2\tau_s t_n)^{1/2} = M_s^{(n)} / 4t_n, \quad (19)$$

где $M_s^{(n)} = 2\sqrt{2\Gamma_s L t_n / \tau_s}$ — полный инкремент в конце импульса. Из (19) видно, что в зависимости от величин параметра $(\delta\omega_0) t_n \geq 1$ смещение максимума может быть как больше, так и меньше полуширины спектра накачки. С увеличением длительности импульса смещение уменьшается, стремясь к стационарному значению ($\Delta\Omega_s^{(n)} \rightarrow \Delta\Omega_s$). Обсуждение экспериментальных данных будет проведено после рассмотрения ВР частично когерентного излучения.

При нестационарном процессе понятие пороговой мощности накачки теряет свой первоначальный смысл, так как интенсивность рассеяния существенно зависит от длительности излучения. Если энергия возбуждающего импульса W_0 постоянна, то энергия обратно рассеянного света W зависит от длительности накачки t_n [77]:

* Зависимость длительности переходного процесса от τ_p исследовалась, например, в работе [75].

$$W/W_m = \exp(-2t_n/\tau), \quad W_m = W' (\exp M_{p,s}^{(n)}) / M_{p,s}^{(n)},$$

W' — постоянная, зависящая от свойств среды и частоты возбуждающего излучения, $M_{p,s}^{(n)}$ — значение полного инкремента в конце импульса,

$$M_p^{(n)} = \frac{2Y_{k_n}}{\varepsilon_0} \left(\frac{W_0 L}{S_n \rho_0 v_{rp} v} \right)^{1/2}, \quad M_s^{(n)} = 2 \left(\frac{2k_0 \left| \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p \right| \delta W_0 L}{S_n \rho_0 c_p \varepsilon_0} \right)^{1/2},$$

S_n — поперечное сечение пучка. Оценки показывают, что при рассеянии света рубинового лазера в CS_2 , $M_p^{(n)} = 15(W_0 L / S_n)^{1/2}$ и $M_s^{(n)} = 30(W_0 L \delta / S_n)^{1/2}$, W_0 в Дж , L в см , S_n в см^2 , δ в см^{-1} .

При $t_n < \tau/2$ повышение интенсивности возбуждающего излучения (за счет уменьшения t_n) компенсируется недостаточностью времени взаимодействия для установления процесса, и существенного роста энергии рассеянного света не происходит. Увеличивая же соотношение t_n/τ , можно значительно уменьшить величину энергии того или иного вида рассеяния. Это обстоятельство отмечено в ряде работ [78–80], в которых при $t_n \leq 1 \text{ нсек}$ имело место ВКР, а для более длинных импульсов наблюдалось интенсивное ВРМБ.

Ниже будет показано, что при $t_n < t_L$ энергия ВР растет с увеличением t_n . Очевидно, что наиболее эффективно (при $W_0 = \text{const}$) ВР происходит при $t_n \sim t_L$ [77].

4. Рассеяние частично когерентного излучения

В значительном числе экспериментальных работ по ВР света ширина спектра накачки существенно больше обратной длительности импульса [1, 34, 81] ($\delta\omega_0 \gg t_n^{-1}$), что обусловлено случайной модуляцией (амплитудной или фазовой) падающего на рассеивающий объем излучения. Если время корреляции соответствующего случайного процесса больше t_L , то для определения плотности спектра рассеянного излучения можно воспользоваться формулой (18).

При случайной фазовой модуляции поле накачки можно представить в виде $\Sigma_0(t) = A_0(t) \exp[i\Psi(t)]$, где $A_0(t)$ имеет характерный масштаб порядка t_n , а $\Psi(t)$ — случайная функция с масштабом изменения $t_\Psi \ll t_n$. Из (18) видно, что для двух импульсов накачки с различными функциями $\Psi = \Psi_j(t)$ ($j = 1, 2$) решения $\Sigma_1^{(j)}$ отличаются лишь множителями $\exp(i\Psi_j(t))$, т. е. интенсивности рассеяния обоих импульсов одинаковы, а плотности их спектров $|\Sigma_{1,\omega}^{(j)}|^2$ — различные. В том случае, когда один из импульсов накачки когерентный (например, первый, $\Psi_1(t) \equiv 0$), а другой (второй) некогерентный (частично когерентный), величины $|\Sigma_{1,\omega}^{(1)}|^2$ и $|\Sigma_{1,\omega}^{(2)}|^2$ связаны соотношением [103]

$$\langle |\Sigma_{1,\omega}^{(2)}|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) \langle |\Sigma_{1,\omega+\Omega}|^2 \rangle d\Omega, \quad (20)$$

где

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f_\Omega f_{\Omega+\Omega'}^* \rangle d\Omega' = (|f|^2)_\Omega \text{ и } f = \exp[i\Psi_2(t)].$$

Из (20) следует, что ширина спектра рассеяния частично когерентного излучения больше, чем ширина спектра рассеяния когерентного излуче-

ния, и примерно такая же (при $t_\Psi \ll t_n$), что и у падающего импульса*. В эксперименте, однако, из-за неравномерного распределения интенсивности возбуждающего излучения по поперечному сечению ширина спектра рассеяния иногда может быть уже ширины спектра падающего света. Величина смещения максимумов спектра ВР, как видно из (20), примерно одинакова как у когерентного, так и частично когерентного импульсов и определяется формулой (19).

При рассмотрении ВР в случае амплитудно-некогерентной накачки воспользуемся тем обстоятельством, что ВР определяется (формула (18)), в основном, экспоненциальной зависимостью от величины $\int |\varepsilon_0|^2 dt$ **. Нетрудно заметить, что при $(\delta\omega_0) t_n \gg 1$, дисперсия $\int |\varepsilon_0|^2 dt$ пропорциональна дисперсии $|\varepsilon_0|^2$ и времени корреляции интенсивности накачки $t_0 \approx (\delta\omega_0)^{-1}$ и может быть весьма малой даже при существенной дисперсии амплитуды возбуждающего излучения (при достаточно малом t_0). Тогда одномерная вероятность распределения интенсивности рассеянного света, связанная с амплитудной некогерентностью падающего излучения и экспоненциально зависящая от $(\int |\varepsilon_0|^2 dt)^{1/2}$, может быть близка к δ -образной. Интенсивность рассеяния при этом примерно совпадает с интенсивностью света, рассеянного когерентной накачкой. Для определения спектра света, рассеянного некогерентным по амплитуде импульсом накачки, необходимо, вообще говоря, знание функции корреляции амплитуд $\langle \varepsilon_0(t) \varepsilon_0^*(t_1) \rangle$. Так как характерный масштаб последней приблизительно совпадает с t_0 , то при достаточно малом t_0 флуктуации экспоненциального множителя несущественны и для близких к прямоугольным (по средней интенсивности) импульсам накачки сохраняет силу соотношение (20). При этом, под $S(\Omega)$ следует понимать спектр функции $\langle \varepsilon_0(t) \varepsilon_0^*(t_1) \rangle / \langle |\varepsilon_0| \rangle^2$. Таким образом, вывод о том, что смещение максимума спектра рассеянного света не зависит от ширины линии возбуждающего излучения, остается в силе и в данном случае и, следовательно, при произвольном характере случайной модуляции накачки.

Экспериментальные данные о влиянии нестационарности процесса на ВР можно получить из работ по наблюдению ВР [1, 2, 34, 36, 81–84]. В них, в основном, регистрировались величина смещения максимума спектра рассеяния и условие равенства инкрементов ВР и ВМБР. Экспериментальные значения параметров, при которых имеет место равенство инкрементов ВРМБ и ВР, находятся, как правило, в хорошем согласии с теорией. С другой стороны, величина смещения существенно отличается от стационарного значения для монохроматической накачки $\Delta\Omega_s = \tau_s^{-1}$. По данным работ [1, 81, 83] величина смещения оказалась близкой к значению $\Delta\nu_s^{(n)} = \Delta\Omega_s^{(n)} / 2\pi c = 1/2\pi\tau_s + \delta\nu_0/2 \approx \delta\nu_0/2$ ($\delta\nu_0 = \delta\omega_0/2\pi c$), приведенному в [39] для немонохроматической накачки. Однако оценки, выполненные по формуле (19), дают для максимальных значений инкремента*** $M_s^{(n)} \approx 20 \div 25$ смещение $\Delta\nu_s^{(n)} \approx 3 \cdot 10^{-11} t_n^{-1} \text{ см}^{-1}$, которое при $t_n \approx 10^{-8} \text{ сек}$ порядка $3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ и существенно меньше

* Этому выводу, полученному при выполнении условия $\delta\omega_0, 1 < t_L^{-1}$, противоречит исходное предположение в [17], следствием которого является приведенная там формула для спектра рассеяния, совпадающая с соответствующим соотношением работы [39] и не согласующаяся с приведенными здесь формулами.

** Экспоненциальная зависимость следует из асимптотики функции Бесселя $J_0(\mu)$ при $\mu t_n \gg 1$.

*** При больших значениях инкремента заведомо имеет место выход на режим насыщения, при котором смещение близко к стационарному значению.

экспериментальных значений смещения*, примерно равных в работах [1, 81] величине 10^{-2} см^{-1} и совпадающих с полушириной спектра накачки. Экспериментальные результаты, не противоречащие соотношению (19), получены в работе [34]. В этой работе при длительности импульса накачки $t_n \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$ сек и полуширине его спектра $\delta\nu_0/2 \approx \approx 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ смещения максимума спектра ВТР (с точностью лучшей чем $5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$) не было обнаружено. Теоретическое значение смещения $\Delta\nu_s^{(n)} < 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$. Причиной завышения $\Delta\nu_s^{(n)}$ [1, 81] является, возможно, систематическая ошибка, обсуждаемая в [85].

5. Рассеяние непрямоугольных импульсов

В том случае, когда профиль падающего импульса отличается от прямоугольного, то зависимость интенсивности рассеяния от времени, определяемая выражением (18), отличается от приведенной на рис. 3. Так, например, если интенсивность возбуждающего излучения пропорциональна времени (начальный этап рассеяния), то интенсивность ВР нарастает экспоненциально. Такая же зависимость имеет место при ВР прямоугольных импульсов, входящих в неограниченную среду (см. п. 6). В обоих случаях полная энергия возбуждающего света в рассеивающем объеме $W_0 = \int d\nu \int_0^t P_0 dt$ пропорциональна t^2 (P_0 — мощность накачки).

Зависимость $W_0 \sim t^2$ и обусловливает, фактически, экспоненциальный рост со временем интенсивности ВР.

Аналогично, и при других профилях накачки (параболическом, гауссовом) интенсивность ВР имеет более резкую, чем возбуждающее излучение, зависимость от времени и достигает наибольшего значения позднее максимума накачки [86], что связано с конечным временем релаксации параметров среды. То обстоятельство, что рассеянный импульс растет во времени круче, чем возбуждающий, может быть использовано для создания импульсов с очень резким передним фронтом**. Для этих целей в работе [87] использовалось ВРМБ в воде.

6. Рассеяние в неограниченных средах

Условие $t_n \ll t_L$ (рассеяние в неограниченных средах) имеет место как при ВР пикосекундных импульсов света в лабораторных условиях, так и при рассеянии более длинных импульсов в достаточно больших объемах. При ВРМБ пикосекундных импульсов неравенство $t_n \ll t_L$ выполняется одновременно с условием $t_n < 2\pi/\Omega_L$. В этом случае (при достаточно большой мощности возбуждающего излучения) эффекты распространения акустических возмущений пренебрежимо малы, а спектр обратно рассеянного света шире спектра падающего излучения [14] (длительность рассеянного импульса, однако, превосходит длительность падающего, поскольку $t_L \gg t_n$). Формулы для полных инкрементов рассеяния и некоторые оценки приведены в табл. 4, из которой видно, что ВРМБ и ВТР могут наблюдаться при $t_n \approx 10^{-11}$ сек лишь в том случае, если интенсивность накачки $I_0 \geq 10^2 - 10^3 \text{ Гвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Так как инкременты линейно зависят от t_n , то при достаточно большой длительности падающего излучения ($t_n \approx 10^{-10}$ сек). ВР может быть значительно и при существенно меньших интенсивностях падающего света.

* Заметим, что при невыполнении условия $\delta\omega_0 \ll t_L^{-1}$, использованного при получении (19), величина смещения может только уменьшиться, так как при этом уменьшается значение инкремента, входящего в (19).

** Увеличение крутизны переднего фронта импульсов необходимо, в частности, для уменьшения длительности последних при их усилении в активной среде [88].

Таблица 4
Полные инкременты рассеяния импульсов в неограниченных средах ($t_n < \tau, t_L$), I_0 в $\text{Гц} \cdot \text{см}^{-2}$, t_n в нсек

\tilde{M}_p ($t_n \leqslant T_L$)	\tilde{M}_{s_1} ($t_n \leqslant \tau_s$)	\tilde{M}_{s_2} ($t_n \leqslant \tau_s$)
Аналитическое выражение	$\sqrt{3} \left[\frac{Y^2 v_{rp} k_0^3 \varepsilon_0 ^2}{4\pi \varepsilon_0 \rho_0} \right]^{1/3} t_n$	$\left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_p \frac{\delta k_0 v_{rp}^2 \varepsilon_0 ^2}{2\pi \rho_0 c_p} \right]^{1/2} t_n$
Бензол	$3,37 \cdot 10^{-2} I_0^{1/3} t_n$	$4 \cdot 10^{-2} (\delta I_0)^{1/2} t_n$
Сероуглерод	$3,77 \cdot 10^{-2} I_0^{1/3} t_n$	$4,78 \cdot 10^{-2} (\delta I_0)^{1/2} t_n$
Четыреххлористый углерод	$2,48 \cdot 10^{-2} I_0^{1/3} t_n$	$4,05 \cdot 10^{-2} (\delta I_0)^{1/2} t_n$
		$1,65 \cdot 10^{-10} (\sigma_2 N)^{1/2} I_0 t_n$
		$1,97 \cdot 10^{-10} (\sigma_2 N)^{1/2} I_0 t_n$
		$1,77 \cdot 10^{10} (\sigma_2 N)^{1/2} I_0 t_n$

В случае рассеяния последовательности импульсов может возникнуть накапливающееся изменение ϵ , приводящее к увеличению интенсивности рассеяния от импульса к импульсу с максимальным инкрементом [14]

$$\widetilde{M}_n = \widetilde{M} + (n - 1)(\widetilde{M} - 2\Delta t/\tau),$$

где Δt — период следования импульсов, n — номер импульса, \widetilde{M} — полный инкремент для одиночного импульса. Накапливающиеся эффекты возможны лишь при $\widetilde{M} > 2\Delta t/\tau$. Так, например, увеличение интенсивности рассеяния от импульса к импульсу ($t_n \approx 5 \cdot 10^{-12}$ сек) в случае ВРМБ и ВТР в CS_2 имеет место при $I_0 > 10 \text{ Гет} \cdot \text{см}^{-2}$ и $\Delta t \leq 10^{-10}$ сек.

Спектр рассеянного излучения с ростом номера импульса сужается* и при достаточно большом n может стать уже ширины спектра возбуждающего импульса с синусоидальным заполнением. Если, например, возмущение среды к приходу второго импульса существенно больше спонтанного, то ширина спектра n -го импульса при ВРМБ равна [14]

$$\delta \widetilde{\Omega}_p = 1,75 \sqrt{\widetilde{M}_p/n} \delta \omega_0, \quad \delta \omega_0 \approx t_n^{-1}.$$

Сужение спектра связано с рассеянием на квазипериодическом, акустическом рельефе («дифракционной решетке»), образованном изменением ϵ среды под воздействием света предыдущих импульсов. Глубина и регулярность такого рельефа растет с ростом числа возбуждающих импульсов.

ВР пикосекундных импульсов применительно к обсуждавшимся здесь видам рассеяния экспериментально исследовалось в работе [89]. Отсутствие достаточных количественных данных делает невозможным сравнение этих результатов с расчетом**.

IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТОКСОВЫХ И АНТИСТОКСОВЫХ КОМПОНЕНТ

В том случае, когда в результате ВР на одной и той же волне возмущений среды рассеиваются различные световые волны, последние взаимодействуют между собой. Таким взаимодействием можно объяснить, в частности, возникновение антистоксовых сателлитов при ВР [91], резкое увеличение интенсивности рассеяния под определенными оптимальными углами [92, 93] и ряд других особенностей. Некоторые примеры таких взаимодействий обсуждаются ниже.

7. Рассеяние встречных пучков

Рассеяние двух встречных пучков накачки*** одинаковой частоты может происходить под различными углами в зависимости от величины и направления волнового вектора q возмущений среды. Например, если $q = 2k_0$, ВР происходит в направлениях, близких к оси пучка. Особенности такого рассеяния при $q = 2k_0$ *** мы рассмотрим на примере взаимодействия слабых встречных волн (стоксовой и антистоксовой частоты) в присутствии встречных пучков накачки без учета флуктуационного источника. В плосковолновом приближении

* Сужение имеет место лишь до тех пор, пока ширина спектра рассеяния больше, чем обратная длительность рассеянного импульса.

** Несколько лучше обстоит дело с ВР пикосекундных импульсов света [90].

*** Встречные пучки появляются, например, вследствие отражения возбуждающего излучения от выходной границы.

**** ВР встречных пучков под произвольными углами [35] (за исключением случая крупномасштабных возмущений — $q \ll k_0$) исследуется аналогично.

$$E_{0,1,2} = \mathcal{E}_{0,1,2}^{(+)} \exp(ik_0 z - i\omega_{0,1,2} t) + \text{к. с.} + \\ + \mathcal{E}_{1,2,3}^{(-)} \exp(-ik_0 z - i\omega_{0,1,2} t) + \text{к. с.}, \quad (21)$$

$$\alpha = \alpha^{(+)} \exp(2ik_0 z - i\Omega t) + \text{к. с.} + \alpha^{(-)} \exp(-2ik_0 z - i\Omega t) + \text{к. с.},$$

где $\omega_2 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_1 = \Omega > 0$, $\mathcal{E}_{0,1,2}^{(\pm)}$ — амплитуды накачки стоксовой и антистоксовой компонент, распространяющихся вдоль (+) и против (-) оси z , $\alpha^{(\pm)}$ — амплитуда возмущений среды (плотности, энтропии и тензора ζ_{jk} при ВРМБ, ВТР и ВРКР соответственно) (рис. 4).

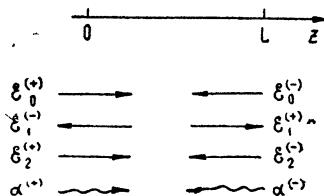


Рис. 4. Направления распространения взаимодействующих волн при накачке встречными пучками.

$$+ g(\Omega) (|\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 \mathcal{E}_1^{(-)} + \mathcal{E}_0^{(+)} \mathcal{E}_0^{(-)} \mathcal{E}_2^{(+)*}) = 0, \quad (22)$$

$$i\Delta k \mathcal{E}_2^{(+)*} + \frac{d\mathcal{E}_2^{(+)*}}{dz} + g(\Omega) (|\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 \mathcal{E}_2^{(+)*} + \mathcal{E}_0^{(+)*} \mathcal{E}_0^{(-)*} \mathcal{E}_1^{(-)}) = 0,$$

где

$$g_p = \frac{\gamma_p}{2[i(\Omega - \Omega_L) + \tau_p^{-1}]}, \quad g_{s,\zeta} = \frac{i\zeta_{s,\zeta}}{2[i\Omega + \tau_{s,\zeta}^{-1}]}, \quad \Delta k = \frac{\Omega}{v_{rp}}.$$

Уравнения для $\mathcal{E}_{1,2}^{(\pm)}$ аналогичны и здесь не приводятся. Полагая $\mathcal{E}_1^{(-)} = \mathcal{E}_{10}^{(-)} \exp(sz)$, $\mathcal{E}_2^{(+)} = \mathcal{E}_{20}^{(+)} \exp(sz)$, из (22) найдем, что s определяется выражением

$$s_{1,2}(\Omega) = h_1 \pm (h_1^2 - (\Delta k)^2 + 2i\Delta k h_2), \quad (23)$$

$$h_{1,2} = \frac{1}{2} g(\Omega) [|\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 \pm |\mathcal{E}_0^{(-)}|^2].$$

Если при $|h_1| \ll \Delta k$ ВР каждого из встречных пучков происходит, фактически, независимо, то при $|h_1| \gg \Delta k$ появляются дополнительные, в сравнении с рассмотренными выше, особенности рассеяния стоксовых и антистоксовых компонент. Так при $|\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 = |\mathcal{E}_0^{(-)}|^2$ и $|h_1| \gg \Delta k$ ($s_1 \approx 2h_1$; $s_2 \approx (\Delta k)^2/2h_1 - i\Delta k h_2/h_1$) коэффициент усиления стоксовой компоненты $k_c \approx (\Delta k L/h_1 L)^2 \exp(2h_1 L)$ зависит от отношения $\Delta k L/h_1 L$. В частности, если $2h_1 L$ не очень сильно превосходит единицу, а $\Delta k L \ll 1$, стоксова компонента может быть весьма малой. При $|\mathcal{E}_0^{(-)}|^2 \ll |\mathcal{E}_0^{(+)}|^2$ возможно появление вынужденной антистоксовой компоненты $\mathcal{E}_2^{(-)}$, обусловленной рассеянием накачки $\mathcal{E}_0^{(-)}$ на волне возмущений, которая образуется, в свою очередь, при рассеянии прямой накачкой $\mathcal{E}_0^{(+)}$ обратного стокса $\mathcal{E}_1^{(-)}$ [94]. Оказывается, что амплитуда такой антистоксовой компоненты пропорциональна фактору $|\mathcal{E}_0^{(-)}| \{g |\mathcal{E}_0^{(-)}|^2 + [g |\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 + 2i\Delta k] \exp[-(g |\mathcal{E}_0^{(+)}|^2 + 2i\Delta k) L] \} \exp[-g |\mathcal{E}_0^{(-)}|^2 L] \}^{-1}$, а максимальный инкремент, соответствующий антистоксовому рассеянию, совпадает с инкрементом, соответствующим стоксовому рассеянию, и ра-

вен $G(\Omega)$. Такое значение инкремента достигается при отношении интенсивностей встречных пучков, равном $I_0^{(-)}/I_0^{(+)} \approx |\exp(-g|\Sigma_0^{(+)}|^2 L)|$. Ясно поэтому, что при наличии даже очень малого коэффициента отражения (или перерассеяния), $R \sim |\exp(-g|\Sigma_0^{(+)}|^2 L)| \ll 1$, возможно появление антистоксовых линий в спектре рассеяния, особенно в том случае, когда существенны эффекты насыщения*. Этот эффект может служить причиной появления в некоторых случаях антистоксовых компонент ВРМБ в отсутствие обратной связи между лазером и рассеивающей средой [91]. Некоторые другие механизмы, объясняющие возникновение вынужденной антистоксовой компоненты, обсуждены в [94].

8. Стационарное рассеяние под малыми углами

При ВР бегущей волны накачки в прямом направлении существенную роль играет взаимодействие стоксовой и антистоксовой компонент. [93]. Рассеяние обеих компонент происходит на волне возмущений с волновым вектором $q \ll k_0$ (рис. 5). При ВРМБ и ВТР, времена релаксации

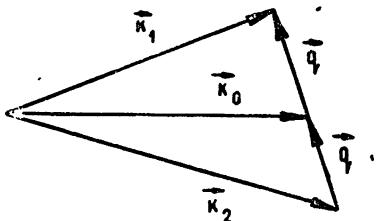


Рис. 5. Диаграмма волновых векторов в случае взаимодействия стоксовой и антистоксовой компонент при их рассеянии под малыми углами.

которых пропорциональны q^{-2} , стационарный процесс не успевает, как правило, установиться за время, равное длительности возбуждающего импульса ($t_i \ll \tau_{p,s}(\theta)$). Однако при ВРКР условие установления стационарного процесса обычно имеет место ($\tau_c \ll t_i$). Поэтому, вначале на примере ВРКР, рассмотрим стационарное взаимодействие плоских волн (без флуктуационного источника), распространяющихся в среде под малыми углами $\theta \ll 1$ в присутствии интенсивной накачки. В следующем пункте остановимся на нестационарных процессах, существенных при ВР в прямом направлении.

Укороченные уравнения, описывающие стационарное взаимодействие стоксовой и антистоксовой компонент $E_{1,2} = \varepsilon_{1,2}(z) \exp[i(k_{1,2}z + k_x x - \omega_{1,2}t) + \text{к. с.}]$, имеют вид

$$\begin{aligned} k_x^2 \varepsilon_{1,2}^{(\parallel)} - 2ik_{1,2} \frac{d\varepsilon_{1,2}^{(\parallel)}}{dz} &= \frac{2\varepsilon_2 k_0^2}{\varepsilon_0(1 \pm i\Omega t_p^{(c)})} (|\varepsilon_0|^2 \varepsilon_{1,2}^{(\parallel)} + \varepsilon_0^2 \varepsilon_{2,1}^{(\parallel)*}), \\ \left(k_x^2 + \frac{3\varepsilon_2 k_0^2 |\varepsilon_0|^2}{\varepsilon_0} \right) \varepsilon_{1,2}^{(\perp)} - 2ik_{1,2} \frac{d\varepsilon_{1,2}^{(\perp)}}{dz} &= \\ &= -\frac{3\varepsilon_2 k_0^2}{2\varepsilon_0(1 \pm i\Omega t_p^{(c)})} (|\varepsilon_0|^2 \varepsilon_{1,2}^{(\perp)} + \varepsilon_0^2 \varepsilon_{2,1}^{(\parallel)*}). \end{aligned}$$

Здесь

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega_{1,2}^2}{v_{rp}^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} |\varepsilon_0|^2 \right), \quad \Omega = \omega_0 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_0; \quad k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{v_{rp}^2} \left(1 + 2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} |\varepsilon_0|^2 \right).$$

* Здесь нет нелинейной конкуренции между стоксовым и антистоксовым рассеяниями, так как оба происходят на одной и той же волне возмущений.

$\mathcal{E}^{(\parallel)}$ — компонента поля параллельного и $\mathcal{E}^{(\perp)}$ — перпендикулярного линейно поляризованной накачке. Представляя $\mathcal{E}_{1,2}^{(\parallel)}$ в виде $\mathcal{E}_1^{(\parallel)} = \mathcal{E}_{10}^{(\parallel)} \exp(sz)$ и $\mathcal{E}_2^{(\parallel)*} = \mathcal{E}_{20}^{(\parallel)*} \exp(-sz)$, найдем [93] зависимость величины s от угла рассеяния $\theta = k_x/k_0$ и частоты Ω^* :

$$s_{1,2} = \pm i \frac{\theta k_0}{2} \left(\theta^2 - \frac{4\epsilon_2 |\mathcal{E}_0|^2}{\epsilon_0 (1 + i\Omega\tau_c)} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что максимальное значение инкремента $2 \operatorname{Re} s_{1,2}$ достигается для $\theta = \theta_{\text{opt}}^{(\parallel)} = \sqrt{2\epsilon_2} |\mathcal{E}_0|^2 \epsilon_0$. При этом оптимальная частота рассеяния — нулевая $\Omega_{\text{opt}} \tau_c = 0$ [93]**. Однако для углов, больших $\sqrt{3}/2 \theta_{\text{opt}}^{(\parallel)}$, оптимальная частота ВР смещается:

$$\Omega_{\text{opt}}(\theta) = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{2\theta^2 - 3\theta_{\text{opt}}^2}{2\theta^2 - \theta_{\text{opt}}^2} \right)^{1/2}.$$

При $\theta \gg \sqrt{3}/2 \theta_{\text{opt}}$ $\Omega_{\text{opt}} \rightarrow \tau_c^{-1}$. Иначе обстоит дело с рассеянием компонент, поляризованных перпендикулярно накачке. В этом случае выражение для $s_{1,2}$ получается заменой в (24) θ^2 на $\theta^2 + 3\epsilon_2 |\mathcal{E}_0|^2/\epsilon_0$ и ϵ_2 на $3\epsilon_2/4$. Нетрудно заметить, что оптимальное значение угла максимального рассеяния компонент $\mathcal{E}_{1,2}^{(\perp)}$ будет другим, $\theta_{\text{opt}}^{(\perp)} = 0$. Оптимальная частота, соответствующая максимальному значению инкремента для рассеяния в перпендикулярной поляризации под $\theta = 0$, есть $\Omega_{\text{opt}} \tau_c = 1/\sqrt{3}$ [66]. Полученные выводы существенно изменяются при рассеяний циркулярно поляризованного излучения. В табл. 5, состав-

Таблица 5

Результаты исследования ВРКР в прямом направлении при линейной \uparrow
и циркулярно поляризованной \circlearrowleft накачке

Поляризация накачки	\uparrow		\circlearrowleft	\circlearrowright
Поляризация рассеяния	\uparrow	\rightarrow	\circlearrowleft	\circlearrowright
Теоретическое значение инкремента [66]	$2\Gamma_{\perp} (\text{при } \theta = \theta_{\text{opt}}^{(\parallel)})$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}\Gamma_{\perp} (\text{при } \theta = 0)$	$\frac{3}{2}\Gamma_{\perp}$	0
Оптимальная частота рассеяния [66]	$\Omega_{\text{opt}} = 0$	$\Omega_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tau_c$	$\Omega_{\text{opt}} = \frac{1}{\tau_c}$	—
Регистрируется экспериментально [50]	крыло	слабое крыло	сначала линия, потом крыло	—

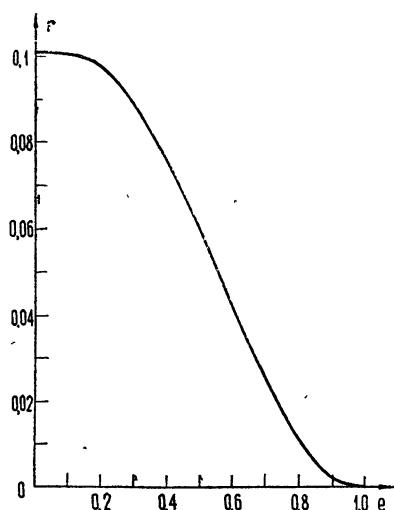
* Рассматриваемый процесс взаимодействия часто называют четырехфотонным взаимодействием [93] или параметрическим усилением с двухфотонной накачкой [95].

** Задача исследования ВР на нулевой частоте представляет, как известно, самостоятельный интерес в связи с проблемой самофокусировки света, широко обсуждаемой в настоящее время. Не имея возможности остановиться здесь на этом вопросе сколь-нибудь подробно (см., например, обзоры [95, 96]), отметим лишь, что даже идеально плоская волна достаточно большой интенсивности в макроскопически однородной среде будет распадаться за счет спонтанных флуктуаций среды. Необходимое для этого значение полного инкремента составляет величину порядка 15—20. Однако в большинстве случаев определяющую роль в рассеянии на нулевой частоте играет процесс усиления начальных возмущений пучка накачки [92, 95].

ленной по данным работ [50, 66], резюмируются основные результаты исследований ВРКР в прямом направлении. На рис. 6, взятом из работы [66], показана зависимость отношения интенсивностей антистоксовой и стоксовой компонент от эксцентрикитета эллипса поляризации накачки.

Наблюдения ВРКР под малыми углами [46, 47, 49, 50, 97] носят, в основном, лишь качественный характер. В ряде случаев при рассеянии в прямом направлении наблюдается широкое крыло (табл. 5). Этот эффект при линейно поляризованной накачке может быть связан с регистрацией рассеянного света в достаточно большом интер-

Рис. 6. Отношение интенсивностей стоксовой и антистоксовой компонент r в зависимости от эксцентрикитета эллипса поляризации накачки e ($e = 1$ — круговая поляризация).



вале углов $\Delta\theta \gg \theta_{opt}$. В этом случае оптимальная частота, зависящая от угла рассеяния, изменяется от 0 до $\Delta\Omega_c$ при изменении угла от 0 до $\theta \gg \theta_{opt}$. Усилиению эффекта может способствовать многократное прямое рассеяние [46, 47]. Причиной, обусловливающей возникновение крыла при ВР циркулярно поляризованной накачки в прямом направлении, может являться перерассеяние сверхкоротких импульсов света, рассеянных в обратном направлении (п. 10) и имеющих достаточно широкий спектр. Возможно, что в ряде случаев определяющим фактором в расширении спектра является эффект самовоздействия [73, 74, 104].

9. Нестационарное рассеяние под малыми углами

При нестационарном рассеянии света под малыми углами (ВРМБ и ВТР) удобно не проводить разделение на стоксову и антистоксову компоненты, а исследовать устойчивость плоской накачки по отношению к малым возмущениям поперечного профиля [92, 95]. Опустим для простоты сторонний шумовой источник и предположим, что ВТР отсутствует ($\delta = 0$). Воспользуемся параболическим уравнением, описывающим распространение световой волны в рассеивающей недиспергирующей среде,

$$\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_\perp \mathcal{E} = -\frac{ik_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}}{2\epsilon_0} \rho_1 \mathcal{E}, \quad (25)$$

где \mathcal{E} — комплексная амплитуда электрического поля. Возмущения плотности $\rho_1 \approx v^2 \alpha_p$ описываются уравнением (10). Для исследования слабого рассеяния плоской волны $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(t - z/v_{rp})$ линеаризуем уравнения (10) и (25) в окрестности $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ и $\rho_1 = 0$. Ограничиваюсь первой степенью возмущений и переходя к фурье-компонентам по поперечным координатам, получим систему дифференциальных уравнений, исследование которой, например, при заданном начальном распределении возмущений плотности $\rho_1(z, 0)$ (начальные флуктуации) и нулевых начальных и граничных условиях для электрического поля и решает поставленную задачу. Решение такой задачи, однако, весьма громоздко. Поэтому

для простоты рассмотрим рассеяние настолько коротких импульсов, что акустическая волна практически не распространяется за время импульса, т. е. $v k_0 \theta \ll t_u^{-1}$. Так как максимальное значение угла, при котором существенно ВР, $\theta \sim a_n / L$ ($a_n \sim S_n^{1/2}$), то последнее неравенство выполняется, если имеет место условие $a_n k_0 < L/vt_u$. Например, при $a_n \approx \approx 0,2 \text{ см}$, $L \approx 10 \text{ см}$, $k_0 \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, $v = 1,25 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ для импульсов длительностью $t_u \lesssim 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$ распространением звука можно пренебречь. Не приводя здесь выражение для интенсивности рассеянного света, укажем лишь значение полного нестационарного инкремента для ВР под малыми углами

$$M_p^{(u)} \approx 1,9 \left(\Gamma_p L \frac{\theta^2 k_0 t_u^2 v}{\tau_p} \right)^{1/3}, \quad t_u > t_L. \quad (26)$$

Выражение (26) справедливо для углов, при которых $M_p^{(u)} \gg 1$ и, кроме того, $\theta \gg (\Gamma_p v t_u^2 / k_0 L \tau_p)^{1/2}$. При интенсивности накачки в несколько десятков мегаватт на квадратный сантиметр оба условия обычно выполняются вплоть до $\theta \sim 2 \cdot 10^{-3}$. Так как с увеличением угла рассеяния инкремент растет, то в рассматриваемом приближении оптимального значения угла не существует. Максимальное значение инкремента достигается, очевидно, при $\theta \sim a_n / L$.

Аналогично рассмотренному выше приводится анализ ВР под малыми углами в неограниченных средах ($t_u < t_L$). В частности, учитывая изменение температурных возмущений, можно рассмотреть ВТР сверхкоротких импульсов под малыми углами, которое экспериментально исследовалось в [98].

В заключение отметим, что нестационарное рассеяние в прямом направлении тесно связано с вопросами самомодуляции излучения и изменения импульса света, распространяющегося в нелинейной среде [73, 74].

V. ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ НАСЫЩЕНИЯ НА ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ

При сильном нелинейном взаимодействии, когда интенсивность возбуждающего света значительно превышает порог ВР, существенную роль начинают играть эффекты насыщения, связанные с обратным влиянием рассеянного излучения на накачку [28]. В этом случае приближение заданного поля становится неприменимым и строгое аналитическое рассмотрение значительно усложняется. Поэтому при обсуждении эффектов насыщения при ВР мы ограничимся наиболее простыми моделями. Так, рассмотрение устойчивости взаимодействия встречных волн и конкуренции различных типов ВР при обратном рассеянии будет проведено без учета флуктуационного источника. Особенности нелинейного ВР при учете «затравочного» флуктуационного источника рассматриваются путем приближенной замены случайного поля его некоторым усредненным аналогом.

Генерация рассеянного излучения, возможная при отсутствии «затравочного» источника в среде или на границе лишь в случае ВРМБ, исследуется в последнем пункте настоящего раздела.

10. Нелинейное взаимодействие встречных волн

Система уравнений, описывающая взаимодействие плоской волны накачки (4 а) с встречной волной (4) и вынужденными возмущениями среды $\alpha = \alpha'(z, t) \exp [i(k_0 + k_1)z - i(\omega_0 - \omega_1)t] + \text{к. с.}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_0 &= i \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} k_0}{2\varepsilon_0} \mathcal{E}_1 \alpha', \\ \left(-\frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_1 &= i \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} k_1}{2\varepsilon_0} \mathcal{E}_0 \alpha'^*, \\ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + (\tau^{-1} - i\Omega) \alpha' &= B \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^*, \end{aligned} \quad (27)$$

$\Omega = \omega_0 - \omega_1$ при ВТР и ВРКР, $\Omega = \omega_0 - \omega_1 - \Omega_L$ при ВРМБ.

Рассмотрим лишь тот случай, когда взаимодействующие волны в масштабе времени релаксации τ изменяются медленно. Тогда можно принять, что возмущения среды «следят» за изменением полей, и положить $\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = 0$. При этом условии система (27) сводится к двум уравнениям

$$\left(\pm \frac{1}{v_{rp}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_{0,1} = -w N_0 N_1, \quad (28)$$

в которых обозначено $N_{0,1} = \varepsilon_0 v_{rp} |\mathcal{E}_{0,1}|^2 / 2\pi\hbar\omega_{0,1} = I_{0,1}/\hbar\omega_{0,1}$ — число фотонов,

$$\begin{aligned} w_p &= \gamma_p \frac{2\pi\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 v_{rp}} \frac{\tau_p^{-1}}{[\Omega^2 + \tau_p^{-2}]}, \\ w_{s,\zeta} &= \gamma_{s,\zeta} \frac{2\pi\hbar\omega_0}{\varepsilon_0 v_{rp}} \frac{\Omega}{[\Omega^2 + \tau_{s,\zeta}^{-2}]} \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя к бегущим координатам $\xi_{1,2} = t \mp z/v_{rp}$, найдем решение системы (28) [78]

$$N_{0,1} = \mp \frac{2F'_{1,2}(\xi_{1,2})}{w v_{rp} [F_1(\xi_1) + F_2(\xi_2)]}, \quad (30)$$

$F_{1,2}(\xi_{1,2})$ — произвольные функции, определяемые из начальных и граничных условий. В частности, при $F_{1,2} = F_{1,2}^{(s)} = \pm N_{0,1}^{(s)}(0) \times \exp\{-(wv_{rp}/2)[N_0^{(s)}(0) - N_1^{(s)}(0)]\xi_{1,2}\}$ формула (30) дает стационарные решения

$$N_{0,1}^{(s)} = \frac{[N_0^{(s)}(0) - N_1^{(s)}(0)] N_{0,1}^{(s)}(0) \exp\{(\pm w/2)[N_0^{(s)}(0) - N_1^{(s)}(0)]z\}}{N_0^{(s)}(0) \exp\{(w/2)[N_0^{(s)}(0) - N_1^{(s)}(0)]z\} - N_1^{(s)}(0) \exp\{(-w/2)[N_0^{(s)}(0) - N_1^{(s)}(0)]z\}} \quad (31)$$

уравнений (28), совпадающие с найденными в [28] при заданных на границах значениях $N_0^{(s)}(0)$ и $N_1^{(s)}(L)$.

Однако в эксперименте стационарный режим может и не реализоваться. Действительно, если, например, обе рассматриваемые волны представляют в начальный момент ступенчатые функции, то нетрудно показать [78], что первоначально слабая рассеянная волна N_1 при достаточно большой интенсивности накачки N_0 может сформироваться в результате нелинейного взаимодействия в мощный короткий импульс с интенсивностью, превышающей интенсивность возбуждающего света. Анало-

гичным образом обстоит дело и при других начальных условиях. Если на границе $z = L$ профиль слабой встречной волны $N_1(L, t)$ не имеет экспоненциальной формы, то характерное время изменения волны $N_1(0, t)$ на выходе $z = 0$, а также длительность образованного при этом импульса определяется величиной порядка $\tau \sim t_L / M = (\omega N_0(0) v_{rp})^{-1}$. Ясно, что при $M = \omega N_0(0)L \gg 1$, имеющем место при интенсивном ВР, слабая рассеянная волна, возникающая вблизи границы $z = L$, существенно вырастет за время прохождения света через рассеивающий объем и сформируется в короткий импульс обратно рассеянного излучения указанной выше длительности, а также вызовет значительную модуляцию проходящего света.

Указанный эффект может служить причиной образования при обратном ВР очень коротких импульсов, наблюдавшихся в экспериментах по ВКР [78, 99] и ВРКР [67]*. Следствием образования коротких импульсов является, в свою очередь, существенное уширение спектра ВР, зарегистрированное в экспериментах по ВРКР [4, 67, 68, 100].

Условие медленного изменения взаимодействующих волн в масштабе времени релаксации τ приводит к требованию $\tau \ll \tau$, т. е. $\tau \ll t_L / M$. Невыполнением этого условия, возможно, объясняется отсутствие коротких импульсов при ВРМБ и ВТР. Можно показать, что при учете конечной величины времени релаксации $\left(\frac{d\alpha'}{dt} \neq 0\right)$ эффект, приводящий к образованию сверхкоротких импульсов обратно рассеянного света, уменьшается по сравнению с рассмотренным выше случаем.

11. Конкуренция различных процессов вынужденного рассеяния

Если в среде могут происходить несколько видов рассеяния (пусть даже на разных частотах), то рассмотрение эффектов насыщения следует проводить, вообще говоря, с одновременным учетом всех эффектов, приводящих к тому или иному вынужденному процессу. При этом определенный интерес представляет вопрос о преобладании одного из видов ВР над другими.

Пусть имеется, например, два конкурирующих процесса — обратное ВРМБ и ВТР. Пренебрегая рассеянием температурной компоненты N_s на гиперзвуковой волне α_p и мандельштам-бриллюэновской компоненты N_p на температурных возмущениях среды α_s (что оправдано при

$\omega_{p,s} N_0(0) < \frac{\Omega_L - \Delta\Omega_s}{v_{rp}}$), получим уравнения, описывающие стационарное взаимодействие встречных волн

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{dz} &= -\omega_p N_0 N_p - \omega_s N_0 N_s, \\ \frac{dN_{p,s}}{dz} &= -\omega_{p,s} N_0 N_{p,s}. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (32) непосредственно следуют два первых интеграла

$$N_0 - N_p - N_s = m_1, \quad N_s^{\omega_p} / N_p^{\omega_s} = m_2. \tag{33}$$

Предполагая, что при $z = L$ $N_p(L) = b N_s(L)$, найдем

* Интересно отметить, что интервал следования в последовательности импульсов изменяется при вариации фокусного расстояния, т. е. при изменении области нелинейного взаимодействия [67].

$$\frac{N_s(z)}{N_p(z)} = \left(\frac{N_p(z)}{N_p(L)} \right)^{(w_s/w_p)-1} \frac{1}{b}.$$

Из полученного соотношения при интенсивном вынужденном рассеянии ($N_p + N_s \sim N_0 \gg N_{p,s}(L)$) следует, что если $w_s/w_p - 1 \geq 0,2$, то $N_s(0) \gg \gg N_p(0)$ и преобладает ВТР. При обратном соотношении ($w_p/w_s - 1 \geq 0,2$) преобладает ВРМБ. Поэтому относительно небольшие изменения в коэффициентах w_p и w_s могут существенно влиять на конкуренцию ВТР и ВРМБ. В частности, изменения оптическое поглощение света, можно изменять отношение w_s/w_p и, следовательно, эффективность того или иного процесса ВР. Это используется, в частности, для выделения в эксперименте «чистого» ВТР [1, 34, 81].

12. Насыщающие эффекты при стационарном рассеянии

В том случае, когда время релаксации возмущений превосходит время прохождения света через рассеивающий объем, формирования коротких импульсов обратно рассеянного излучения ожидать не следует (см. п. 10). Если при этом длительность накачки больше времени переходного процесса, то возможно установление рассеяния, близкого к стационарному, например, стационарного ВРМБ или ВТР (обычно, $\tau_{p,s} > t_L$). Из (31) следует тогда, что при $z > [\omega_0 N_0(L)]^{-1}$ ($\omega_0 = \max w(\Omega)$) всегда выполняется соотношение $N_1(z) \ll N_0(z) \approx N_0(L)$. Используя это обстоятельство, разобъем среду на 2 области: 1) $0 < z < L_0$, 2) $L_0 < z < L$. Величину L_0 при сильном ВР ($\omega_0 N_0(L)L \gg 1$) выберем таким образом, чтобы $[\omega_0 N_0(L)]^{-1} < L_0 \ll L$. Если интенсивность падающего излучения такова, что полный инкремент в 1-й области меньше, чем во 2-й, т. е. $\omega_0 N_0(0)L_0 < \omega_0 N_0(L)(L - L_0)$, или $N_0(0)/N_0(L) < \omega_0 N_0(L)L$, то флуктуационный источник 1-й области существенным образом не скажется на величине ВР. Тогда задача о насыщении сводится, фактически, к определению характера нелинейного взаимодействия в 1-й области волны накачки и пучка обратно рассеянного излучения, сформированного во 2-й области. При этом ширина частотного и углового спектра, в пределах которой в 1-й области может происходить сильное нелинейное взаимодействие, велика по сравнению с шириной частотного и углового спектра рассеянного излучения на выходе из 2-й области. Поэтому для приближенного определения интенсивности ВР в 1-й области воспользуемся стационарными плосковолновыми уравнениями (28) с заданными на границе значениями $N_0(0)$ и $N_1(L_0)$. Величину $N_1(L_0)$ можно определить по формуле (17)*, учитывая при этом, что обратное ВР происходит, в основном, в малом телесном угле $\Delta\Omega_T \approx S_n/(L - L_0)^2 \approx S_n/L^2$ [14].

Решение уравнений (28) позволяет найти зависимость коэффициента преобразования $k_N = N_1(0)/N_0(0)$ и интенсивности прошедшей волны накачки от интенсивности падающей волны. Эта зависимость в неявном виде задается трансцендентным уравнением

$$k_N = 1 - M(L)/M(0) = \bar{\sigma} M(L)^{-3/2} [1 - L_0/L]^{-1/2} \sqrt{\pi} \exp M(L), \quad (34)$$

где $M(0) = \omega_0 N_0(0)L$, $M(L) = \omega_0 N_0(L)L$, $\bar{\sigma} = \Delta\Omega_T w_0 H L / \hbar \omega_1$. Как и следовало ожидать, при $L_0/L \ll 1$ (наличие ВР) k_N и $M(L)$ практически не зависят от L_0 , т. е. флуктуационный источник не существует

* Из анализа, проведенного во II разделе, следует, что интенсивность ВР не зависит, в достаточно широких пределах, от спектрального распределения падающего излучения. Поэтому, несмотря на немонокроматичность $N_0(L)$, вызванную, например, нелинейным взаимодействием в 1-й области, формула (17) справедлива и для рассматриваемого случая.

в конце 2-й области и, следовательно, всюду в 1-й области. Из (34) следует, что при увеличении интенсивности падающего излучения ($M(0) \rightarrow \infty$) интенсивность прошедшей волны накачки стремится к постоянной величине* ($M(L) \rightarrow M_{\text{пп}}(L)$), определяемой из выражения $M_{\text{пп}}^{3/2}(L) = \sqrt{\pi} \sigma \exp M_{\text{пп}}(L)$ (рис. 7). Обычно, при вынужденном рэлеевском рассеянии $\sigma \approx 10^{-7} - 10^{-9}$ и $M_{\text{пп}} \approx 20 \div 25$. Ясно, что при $M(0) > M_{\text{пп}}(L)**$ коэффициент преобразования сильно возрастает ($k_N \approx 1 - M_{\text{пп}}(L)/M(0)$ при $M(0) \gg M_{\text{пп}}(L)$) и поэтому условие $M(0) > M_{\text{пп}}(L) \approx 20 \div 25$ можно рассматривать как пороговое в смысле проявления эффектов насыщения. Зависимость k_N от $M(0)$ приведена на рис. 8 для $\ln \sigma^{-1} = 15$ и 20 (пределы практически важных случаев).

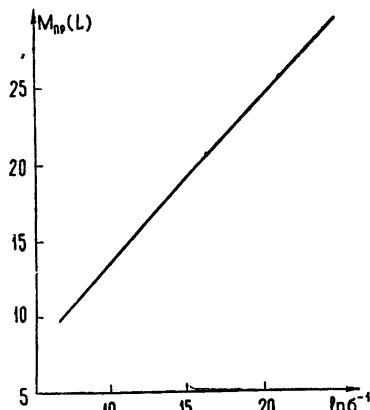


Рис. 7. Зависимость параметра $M_{\text{пп}}(L)$, характеризующего предельную интенсивность прошедшей волны накачки или порог ВР от $\ln \sigma^{-1}$.

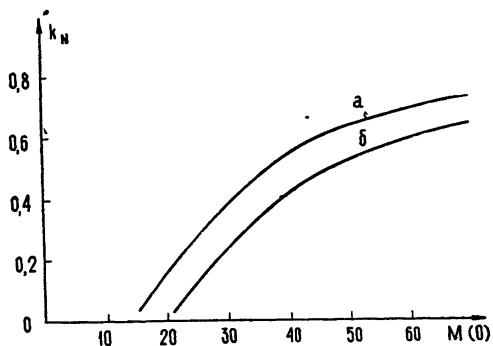


Рис. 8. Зависимость коэффициента преобразования (по числу фотонов) от значения полного инкремента $M(0)$ при $\ln \sigma^{-1} = 15$ (кривая „а“) и $\ln \sigma^{-1} = 20$ (кривая „б“).

Так как спектр рассеянного света на выходе $z = 0$ остается примерно таким же, что и на входе в 1-ю область (и определяется посредством формул (17 а) через $\Gamma(L)L = M(L)$), то при увеличении интенсивности падающего излучения ширина спектра ВР перестает зависеть от $N_0(0)$ и стремится, в пределе, к значениям

$$(\delta\Omega_p)_{\text{пп}} = \frac{\sqrt{\ln 2} \tau_p^{-1}}{\sqrt{M_{\text{пп}}(L)}}, \quad (\delta\Omega_{s,\zeta})_{\text{пп}} = \frac{\sqrt{2 \ln 2} \tau_{s,\zeta}^{-1}}{\sqrt{M_{\text{пп}}(L)}}. \quad (35)$$

Выражение (35) совпадает, фактически, с соответствующим выражением работы [10], если учесть, что величина $M_{\text{пп}}(L)$ определяет, как уже отмечалось выше, порог ВР. Для реальных условий ВРМБ и ВТР $M_{\text{пп}}(L) \approx 20 \div 25$ и $(\delta\Omega_p)_{\text{пп}} \approx \tau_p^{-1}/6$, $(\delta\Omega_{s,\zeta})_{\text{пп}} \approx \tau_{s,\zeta}^{-1}/4$. Соотношения (35) могут быть использованы в эксперименте для оценки времени релаксации τ .

13. Генерация света при вынужденном рассеянии Мандельштама—Бриллюэна

Обсуждавшиеся в предыдущих пунктах обзора процессы ВР были связаны в явной или неявной форме с наличием источника начального

* Эффект ограничения проходящей мощности при ВРМБ наблюдался в работе [79].

** Необходимо, однако, отметить, что в силу условия $N_0(0)/N_0(L) < \omega_0 N_0(L)L$ (см. выше) величина $N_0(0)$ в приведенных формулах ограничена сверху $M(0) < M_{\text{пп}}^2(L)$. Практически ограничение наступает еще раньше вследствие вторичного перерассеяния и других побочных эффектов — $M(0) < (2 \div 3) M_{\text{пп}}(L)$.

(затравочного) поля. При этом для генерации излучения (а не усиления рассеяния) необходим дополнительный резонатор. Однако дисперсионное соотношение для акустических фононов таково, что при ВРМБ, в отличие, например, от ВТР, ВРКР и ВКР, возможно при определенных условиях возникновение абсолютной неустойчивости или генерации электромагнитной и гиперзвуковой волн в рассеивающем объеме без наличия внешнего резонатора [27, 29, 30]. Критическая величина электрического поля, выше которой возможна генерация, определяется соотношением [30] $\Gamma_p \delta_p > (\delta_p + \delta)^2 + (\pi n/L)^2$ или

$$|\mathcal{E}_0|^2 > |\mathcal{E}_0|_{kp}^2 = \frac{8\pi\epsilon_0 [(\delta_p + \delta)^2 + (\pi n/L)^2] \rho_0 v^2}{|q| |k_1| Y^2}, \quad (36)$$

$\delta_p = (v \tau_p)^{-1} = (q^2/2\rho_0 v)(4\eta/3 + \gamma')$ — гиперзвуковое затухание. В том случае, если $|\mathcal{E}_0|^2 > |\mathcal{E}_0|_{kp}^2$, существует n экспоненциально нарастающих во времени решений для возмущений гиперзвука и стоковой компоненты с инкрементом [30]

$$u_n = v \left\{ \left[\Gamma_p \delta_p - \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \right]^{1/2} - (\delta_p + \delta) \right\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, для меньших n — инкремент больше. Такое нарастание, разумеется, имеет место лишь в приближении заданного поля накачки*. Из формулы (36) можно оценить порог генерации. Например, в CS_2 при накачке рубиновым лазером, $(I_0)_{kp} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Это соответствует величине, при которой заведомо будет происходить очень интенсивное усиление шумов. Однако, если величина акустического затухания такова, что $\delta_p L \ll 1$ **, ВРМБ может быть обусловлено генерацией стоковой компоненты на встречной волне гиперзвука без наличия внешнего резонатора. Рассмотрим работу такого генератора в стационарном нелинейном режиме***. Исходные уравнения для медленных амплитуд в плосковолновом приближении обратного рассеяния имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_0}{dz} &= i \frac{Y k_0}{2 K_s \epsilon_0} \mathcal{E}_1 p_1, \quad \frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -i \frac{Y k_1}{2 K_s \epsilon_0} \mathcal{E}_0 p_1, \\ \frac{dp_1}{dz} + \delta_p p_1 &= i \frac{Y q}{8\pi} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^*, \end{aligned} \quad (37)$$

p_1 — амплитуда возмущений давления.

Решение этих уравнений при граничных условиях $\mathcal{E}_0(0) \neq 0$, $\mathcal{E}_1(L) = p_1(0) = 0$ и $\delta_p = 0$ записывается через эллиптические функции Якоби:

$$|\mathcal{E}_0(z)|^2 = |\mathcal{E}_0(0)|^2 (1 - \gamma^2 \operatorname{sn}^2(xz, \gamma)),$$

$$|\mathcal{E}_1(z)|^2 = \frac{k_1}{k_0} \gamma^2 \operatorname{cn}^2(xz, \gamma),$$

$$|p_1(z)|^2 = \frac{K_s q \epsilon_0 |\mathcal{E}_0(0)|^2}{4\pi k_0} \gamma^2 \operatorname{sn}^2(xz, \gamma),$$

* Инкременты u_n получены из линеаризованных уравнений для возмущений плотности и стоковой компоненты поля при $v \frac{\partial p_1}{\partial z} \neq 0$.

** Величина гиперзвукового затухания обычно мала при низких температурах. В частности, при температуре жидкого гелия в кварце $\delta_p \lesssim 0,1 \text{ см}^{-1}$.

*** Время установления стационарного процесса примерно составляет величину $(10^1 \div 10^2) u_n^{-1}$.

где $x = (Y^2 k_1 q / 16\pi K_s \varepsilon_0)^{1/2} \mathcal{E}_0(0)$ и γ определяются из уравнения $K(\gamma) = xL/(2n - 1)$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

Здесь $K(\gamma)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, N — целая часть от $xL/\pi + 1/2$. На рис. 9 изображена пространственная зависимость $\mathcal{E}_1(z)$ для двух решений ($N = 2$; $n = 1, 2$). Коэффициент преобразования $k_w = |\mathcal{E}_1(0)|^2 / |\mathcal{E}_0(0)|^2 = \gamma^2 k_1 / k_0$ как функция x для различных n приведен на рис. 10. Из рис. 10 видно, что генерация воз-

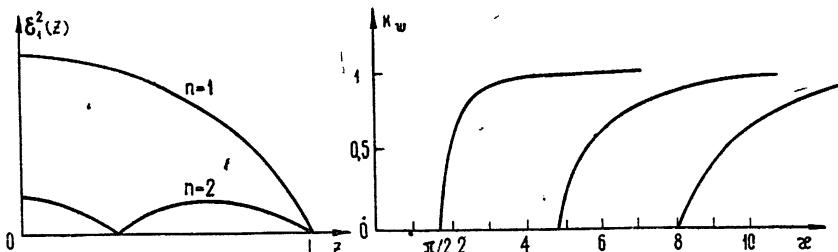


Рис. 9. Пространственное распределение генерируемого света при ВРМБ вне резонатора в различных режимах ($n=1,2$)

Рис. 10. Зависимость коэффициента преобразования по энергии от величины электрического поля накачки.

никает при выполнении условия $N > 1$, т. е. при $xL > \pi/2$, что совпадает с условием (1) для $n = 1$ и $\delta_p = \delta = 0$. При этом пороги сравнительно невелики, например, для кристалла кварца при $L = 10 \text{ см}$ $(I_0)_{kp} \approx 50 \text{ квт} \cdot \text{см}^{-2}$. Аналитическое решение уравнений (37) в случае $\delta_p \neq 0$ получить не удается. Результаты машинного счета [102] показывают, что при заданном $\mathcal{E}_1(L) \neq 0$ и достаточно большом δ_p , когда условие (36) нарушается и генерация исчезает, решения уравнений (37) переходят в (31).

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Систематическое изучение ВР света было начато около пяти лет назад, и хотя к настоящему времени уже получено значительное число интересных результатов, это исследование далеко от завершения. Так, в частности, эпизодический характер еще носят исследования ВР пикосекундных импульсов света. Практически еще не начат совместный анализ попутного и обратного вынужденного рэлеевского рассеяния. По сути дела, не проведено систематическое исследование ВР при наличии высших (относительно линейных) гармоник возмущений в среде; фактически отсутствуют сколько-нибудь подробные данные о наблюдении ВР на сдвиговых волнах в жидкости и т. д.

Теоретическое исследование ВР проводилось преимущественно в приближении заданного поля накачки, хотя в эксперименте очень часто наблюдаются эффекты насыщения. Поэтому необходим более детальный анализ соответствующих процессов и, в первую очередь, изучение нелинейности рассеяния с учетом флюктуационного характера ВР.

Наряду с изучением физики процессов ВР, представляют интерес прикладные вопросы — использование ВР для определения характеристик рассеивающих сред, преобразования частоты и т. п. Заслуживает внимания возможность образования очень коротких импульсов света за счет самомодуляции при обратном рассеянии.

Перечисленные здесь вопросы ни в коей мере не исчерпывают большого круга проблем, имеющихся в ВР, а лишь отмечают некоторые, на наш взгляд, интересные направления исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Rank, C. W. Cho, N. O. Foltz, T. A. Wiggins, Stimulated Thermal Rayleigh scattering, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 828 (1957).
2. Г. И. Зайцев, Ю. И. Кызылласов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное температурное рассеяние света в жидкостях, *Письма в ЖЭТФ*, **6**, 802 (1967).
3. R. Y. Chiao, B. P. Stoicheff, C. H. Townes, Stimulated Brillouin Scattering and Coherent Generation of Intense Hypersonic Waves, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 592 (1964) (см. перевод в сб. „Действие лазерного излучения“, статья 32, изд. Мир, М., 1968).
4. Д. И. Маш, В. В. Морозов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное рассеяние света крыла линии Рэлея, *Письма в ЖЭТФ*, **2**, 41 (1965).
5. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
6. Y. R. Shen, N. Bloembergen, Theory of stimulated Brillouin and Raman Scattering, *Phys. Rev.*, **137**, 1787 (1965).
7. N. Bloembergen, The Stimulated Raman Effect, *Amer. J. Phys.*, **35**, 989 (1967) (см. перевод УФН, **97**, 307 (1969)).
8. В. Н. Луговой, Введение в теорию вынужденного комбинационного рассеяния, изд. Наука, М., 1968.
9. М. М. Сущинский, Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, изд. Наука, М., 1969.
10. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВИНИТИ, М., 1964.
11. И. Л. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965.
12. В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна и вынужденное энтропийное (температурное) рассеяние света, УФН, **98**, 441 (1969).
13. M. Denagie, G. Bret, Investigation of Rayleigh Wings and Brillouin-Stimulated Scattering in Liquids, *Phys. Rev.*, **171**, 160 (1968).
14. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, Обратное вынужденное мандельштам-бриллюэновское и вынужденное энтропийное рассеяние импульсов света, *ЖЭТФ*, **58**, 309 (1970).
15. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, К теории рассеяния света, обусловленного вынужденными изменениями энтропии и концентрации растворов, Доклад на III Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Ереван, 1967.
16. И. М. Арефьев, В. В. Морозов, Вынужденное концентрационное рассеяние света, *Письма в ЖЭТФ*, **9**, 448 (1969).
17. В. С. Старунов, Некоторые вопросы теории вынужденного молекулярного рассеяния света, *ЖЭТФ*, **57**, 1012 (1969).
18. M. Leontovich, Relaxation in Liquids and Scattering of Light, *J. Phys. USSR*, **4**, 499 (1941).
19. R. M. Hergman, M. A. Grey, Nonlinear Thermal Rayleigh Scattering in Gases, *Phys. Rev.*, **181**, 374 (1969).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
21. V. S. Stariakov, On the Theory of Stimulated Temperature (Entropy) Scattering of Light, *Phys. Lett.*, **26A**, 428 (1968).
22. Д. И. Маш, В. В. Морозов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное рассеяние и уширение спектра мощного импульса лазерного излучения в газах, *ЖЭТФ*, **55**, 2053 (1965).
23. П. Дебай, Полярные молекулы, ГТТИ, М., 1931.
24. И. Я. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, изд. АН СССР, М., 1945.
25. R. M. Hergman, Saturation Effects in Stimulated Rayleigh-wing Scattering, *Phys. Rev.*, **164**, 200 (1968).
26. С. М. Рытов, Корреляционная теория рэлеевского рассеяния, *ЖЭТФ*, **58**, 2154 (1970).
27. N. M. Kroll, Excitation of Hypersonic Vibrations by Means of Photoelastic Coupling of High-Intensity Light Waves to Elastic Waves, *J. Appl. Phys.*, **36**, 34 (1965).
28. C. L. Tang, Saturation and Spectral Characteristics of the Stokes Emission in the Stimulated Brillouin Process, *J. Appl. Phys.*, **36**, 1760 (1965).
29. D. L. Bobrow, Coupled-modes Analysis of the Phonon-Photon Parametric Backward Wave Oscillator, *J. Appl. Phys.*, **36**, 1760 (1965).
30. R. Y. Chiao, Brillouin Scattering and Coherent Phonon Generation, Massachusetts Institute of Technology, June 1965.
31. М. И. Рабинович, О методе усреднения в оптике, Доклад на I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, 1969.

32. А. Л. Полякова, Об упругой нелинейности при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна, Письма в ЖЭТФ, 7, 76 (1968).
33. R. G. Bewley, Harmonic Generation of Hypersonic waves in liquids, Appl. Phys. Lett., 6, 165 (1965).
34. V. I. Bespalov, A. M. Kubarev, G. A. Pashanik, Stimulated Thermal Scattering of Short Light Pulses, Phys. Rev. Lett., 24, 1274 (1970).
35. А. П. Ведута, Б. П. Кирсанов, Рассеяние излучения рубинового генератора на больших углах, Письма в ЖЭТФ, 7, 221 (1968).
36. J. L. Emett, A. L. Schawlow, Transverse Stimulated Emission in Liquids Phys. Rev., 170, 358 (1968).
37. K. A. Brueckner, S. Jorna, Linear Instability Theory of Laser Propagation in Fluids, Phys. Rev. Lett., 17, 78 (1966).
38. K. A. Brueckner, S. Jorna, Linearized Theory of Laser-Induced Instabilities in Liquids and Gases, Phys. Rev., 164, 182 (1967).
39. R. M. Негман, M. A. Grey, Theoretical Prediction of the Stimulated Thermal Rayleigh Scattering in Liquids, 19, 824 (1967).
40. G. Mayer, F. Gires, Action d'une onde Lumineuse Intense sur L'indice de Refraction des Liquids, Compt. Rend., 258, 2039 (1964) (см. перевод в сб. „Действие лазерного излучения“, статья 19, изд. Мир, М., 1968).
41. P. D. Mewane, D. A. Sealer, New Measurements of Intensity-dependent Charges in the Refractive Index of Liquids, Appl. Phys. Lett., 8, 278, (1966) (см. перевод в сб. „Действие лазерного излучения“, статья 21, изд. Мир, М., 1968).
42. Y. Shen, Electrostriction Optical Kerr Effect and Self-focusing of Laser Beams, Phys. Lett., 20, 378 (1966).
43. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
44. Л. И. Мандельштам, М. А. Леонович, К теории поглощения звука в жидкости, ЖЭТФ, 7, 438 (1937).
45. Д. И. Маш, В. В. Морозов, В. С. Старунов, Е. В. Тиганов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна в твердых аморфных телах и жидкостях, Письма в ЖЭТФ, 2, 246 (1965).
46. Ю. И. Кзыласов, В. С. Старунов, Усиление стоксовых и антистоксовых компонент вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна вследствие четырехфотонного взаимодействия в нелинейной среде, Доклад на IV Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Киев, 1968.
47. Ю. И. Кзыласов, В. С. Старунов, Усиление стоксовых и антистоксовых компонент вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна вследствие четырехфотонного взаимодействия, Письма в ЖЭТФ, 7, 160 (1968).
48. D. Pohl, I. Reinhold, W. Kaiser, Experimental observation of Stimulated Thermal Brillouin Scattering, Phys. Rev. Lett., 20, 1141 (1968).
49. C. W. Cho, N. D. Foltz, D. H. Rank, T. A. Wiggins, Stimulated Rayleigh Scattering, Phys. Rev. Lett., 18, 107 (1967).
50. N. D. Foltz, C. W. Cho, D. H. Rank, T. A. Wiggins, Stimulated Rayleigh Scattering in Liquids, Phys. Rev., 165, 396 (1968).
51. В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Вынужденное рэлеевское рассеяние в растворах жидкостей, Письма в ЖЭТФ, 6, 500 (1967).
52. F. Bagoschi, Steady-State Gain of Stimulated Brillouin Scattering in Liquids, J. Appl. Phys., 40, 178 (1969).
53. F. Bagoschi, Stimulated Brillouin Scattering: Phonon-Frequency Dependence of Steady-State Gain in Dispersive Liquids, J. Appl. Phys., 40, 2867 (1969).
54. M. Maier, W. Rother, W. Kaiser, Transmission and Intense Reflection of Laser Light in CS_2 , Phys. Lett., 23, 83 (1966) (см. перевод в сб. „Действие лазерного излучения“, статья 36, изд. Мир, М., 1968).
55. R. G. Bewley, Growth of Optical Plane Waves in Stimulated Brillouin Scattering, Phys. Rev., 140A, 800 (1965).
56. I. Walder, C. L. Tang, Stimulated Brillouin Scattering in Nonfocusing Liquids, Phys. Rev., 155, 318 (1967).
57. А. И. Ритус, А. М. Маненков, Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна в плавленном и кристаллическом кварце без разрушения образцов при $T_p = 300^\circ\text{K}$, Письма в ЖЭТФ, 6, 927 (1967).
58. Y. R. Shen, Self-Focusing of Stimulated Raman and Brillouin Scattering in Liquids, Phys. Rev., 163, 224 (1967).
59. И. М. Арефьев, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное и тепловое рассеяние Манделыштама — Бриллюэна в растворах и дисперсия скорости звука в них, Письма в ЖЭТФ, 6, 677 (1967).
60. N. R. Goldblat, T. A. Litovitz, Stimulated Brillouin Scattering: Measurement of Hypersonic Velocity in Liquids, JASA, 41, 1301 (1967).
61. G. B. Benedese, J. B. Lastovka, K. Fritsch, T. Geytak, Brillouin Scattering in Liquids and Solids Using Low-Power Lasers, J. Opt. Soc. Amer., 54, 1284 (1964).

62. R. Y. Chiao, B. P. Stoicheff, Brillouin Scattering in Liquids Excited by the Ne-He Maser, *J. Opt. Soc. Amer.*, **54**, 1286 (1964).
63. W. M. Madigosky, A. Monkewicz, T. A. Litovitz, Stimulated Brillouin Scattering: Measurement of Hypersonic Velocities in Gases, *JASA*, **41**, 1308 (1967).
64. R. A. Fleurty, R. Y. Chiao, Dispersion of Hypersonic Waves in Liquids, *JASA*, **39**, 751 (1966).
65. Д. И. Маш, В. С. Старунов, Е. В. Тиганов, И. Л. Фабелинский, Интенсивность и ширина компонент тонкой структуры линии рассеянного света в жидкостях и затухание гиперзвукового излучения, *ЖЭТФ*, **49**, 1764 (1965).
66. R. Y. Chiao, J. Godine, Polarization Dependence of Stimulated Rayleigh-wing Scattering and the Optical Frequency Kerr Effect, *Preprint*, 1969.
67. Ю. И. Кзылласов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Вынужденное рассеяние света крыла линии Рэлея во внешнем резонаторе, *Письма в ЖЭТФ*, **9**, 383 (1969).
68. Ю. И. Кзылласов, В. С. Старунов, Наблюдение сверхкоротких импульсов излучения при вынужденном рассеянии света в крыле линии Рэлея, *Письма в ЖЭТФ*, **9**, 648 (1969).
69. V. Volterra, Theory of Light Scattering from Shear Waves in Liquids, *Phys. Rev.*, **180**, 156 (1969).
70. G. I. A. Stegeman, B. P. Stoicheff, Spectrum of Light Scattering from Thermal Shear Waves in Liquids, *Phys. Rev. Lett.*, **21**, 202 (1968).
71. Ю. Е. Дьяков, Влияние немонохроматичности накачки на форму спектра вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна, *Письма в ЖЭТФ*, **9**, 487 (1969).
72. Л. А. Островский, О частотном спектре самофокусирующихся световых импульсов, *Письма в ЖЭТФ*, **6**, 807 (1967).
73. Л. А. Островский, О взаимодействии волновых пакетов в нелинейной среде, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **12**, № 2, 268 (1969).
74. Л. А. Островский, Ударные волны огибающих, *ЖЭТФ*, **54**, 1235 (1968).
75. E. E. Hagenlocker, R. W. Mink, W. G. Rado, Effect Lifetime Phonon Stimulated on Scattering in Gases, *Phys. Rev.*, **154**, 226 (1967).
76. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, И. С. Питум, Г. И. Фрейдман, Вынужденное рассеяние коротких импульсов света, Доклад на IV Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Киев, 1968.
77. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, О вынужденном рассеянии сверхкоротких импульсов света, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **13**, № 1, 148 (1970).
78. M. Maier, W. Kaiser, J. A. Giordmaine, Backward Stimulated Raman Scattering, *Phys. Rev.*, **177**, 580 (1969).
79. M. Maier, Quasisteady State in the Stimulated Brillouin Scattering of Liquids, *Phys. Rev.*, **166**, 113 (1968).
80. D. der Linde, M. Maier, W. Kaiser, Quantitative Investigations of the Stimulated Raman Effect Using Subnanosecond Light Pulses, *Phys. Rev.*, **178**, 11 (1969).
81. T. A. Wiggins, C. W. Cho, D. R. Dietz, N. D. Foltz, Stimulated Thermal Rayleigh Scattering in Gases, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 831 (1968).
82. F. Gires, Résultats Expérimentaux sur la Reflexion Thermique Stimulée, *Comp. Rend.*, **266B**, 596 (1968).
83. C. W. Cho, N. D. Foltz, D. H. Rank, T. A. Wiggins, Stimulated Thermal Rayleigh Scattering in Liquids, *Phys. Rev.*, **175**, 271 (1968).
84. W. Rother, D. Pohl, W. Kaiser, Time and Frequency Dependence of Stimulated Thermal Rayleigh Scattering, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 915 (1969).
85. А. М. Кубарев, О точности измерения спектральных сдвигов с помощью интерферометров Фабри—Перо, *Оптика и спектроскопия*, **28**, 1028 (1970).
86. Ю. Е. Дьяков, Вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна при слабо модулированной накачке, Доклад на IV Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Киев, 1968.
87. Т. Б. Степанова, Л. Д. Хазов, Использование ВРМБ в воде для создания мощного генератора наносекундных (1—2 нсек) импульсов (предварительные исследования), сб. Нелинейные процессы в оптике, изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1970.
88. П. Г. Крюков, В. Г. Летохов, Распространение импульсов света в резонансной усиливющей (поглощающей) среде, *УФН*, **99**, 169 (1969).
89. S. L. Shapiro, J. A. Giordmaine, K. A. Wecht, Stimulated Raman and Brillouin Scattering with Picosecond Light Pulses, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1093 (1967).
90. М. А. Большов, Д. И. Голяев, В. С. Днепровский, И. И. Шуминский, Индикаторика и спектр вынужденного комбинационного рассеяния возбуждающего пикосекундного импульса света в жидкостях, *ЖЭТФ*, **57**, 346 (1969).
91. R. V. Wick, D. H. Rank, T. A. Wiggins, Stimulated Optical Frequency Mixing in Liquids and Solids, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 466 (1966).
92. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях, *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 471 (1966).

93. R. Y. Chiao, P. L. Kelley, R. Garmire, Stimulated Four-Photon Interaction and its Influence on Stimulated Rayleigh-wing Scattering, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1158 (1966).
94. N. Goldblatt, M. Hershner, Stimulated Brillouin Scattering: Origins of Anti-stokes Components, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 310 (1968).
95. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Самовозбуждение электромагнитных волн в изотропных кубических средах, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
96. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде, УФН, **93**, 19 (1967).
97. R. L. Garmire, R. Y. Chiao, P. L. Kelley, Observation of Degenerate Stimulated Four-Photon Interaction and Four-wave Parametric Amplification, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1281 (1966).
98. M. E. Mack, Stimulated Thermal Lightscattering in the Picosecond Regime, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 1 (1969).
99. M. Maier, W. Kaiser, Intense Light Burst in the Stimulated Raman Effect, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 1275 (1966).
100. Г. И. Зайцев, Ю. И. Кызылсов, В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, Наблюдение четырехфotonного взаимодействия в спектре вынужденного рассеяния крыла Рэлея, Письма в ЖЭТФ, **6**, 695 (1967).
101. Ю. Е. Дьяков, О ширине линии вынужденного мандельштам-бриллюэновского и комбинационного рассеяния света при насыщении, Письма в ЖЭТФ, **10**, 545 (1969).
102. K. Grob, On the Theory of Stimulated Brillouin Scattering in Liquids, *Z. Phys.* **211**, 59 (1967).
103. В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик, Обратное вынужденное рэлеевское рассеяние, сб. Нелинейные процессы в оптике, изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1970.
104. Н. Г. Бондаренко, И. В. Еремина, В. И. Таланов, Уширение спектра при самофокусировке света в стеклах, Письма в ЖЭТФ, **12**, 125 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 декабря 1969 г.

УДК 523.164.4

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ И НЕКОТОРЫХ КВАЗАРОВ НА ВОЛНАХ 8,2 мм и 3,36 см

B. I. Костенко, L. I. Матвеенко

Проведены измерения распределения радиояркости Крабовидной туманности на волне 8,2 мм. Измерены плотности потоков радиоизлучения источников ЗС 84, ЗС 273, ЗС 279 и NRAO 150 в течение 1968—69 гг. на волнах 8,2 мм и 3,36 см. Рассмотрены изменения потоков во времени. Определены спектральные индексы.

После усовершенствования радиотелескопа РТ-22 с целью повышения его чувствительности на нем были возобновлены наблюдения на волнах 8,2 мм и 3,36 см. В первую очередь были продолжены ранее начатые измерения плотностей потоков радиоизлучения источников ЗС 84, ЗС 273, ЗС 279 [1—3] и распределения радиояркости Крабовидной туманности [4, 5]. Результаты этих измерений и рассмотрены в этой работе.

АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

На радиотелескопе с целью повышения его чувствительности установлена многозеркальная система облучения [6]. Положение фокуса перенесено к основанию параболического зеркала, непосредственно к месту расположения высокочастотной части радиометров. На волне 8,2 мм применена симметричная система облучателей, состоящая из двух рупорно-параболических антенн. Угловое расстояние между электрическими осями выбрано исходя из возможности наблюдения протяженных объектов и равно 23'. Так как для поляризационных измерений и измерений распределения радиояркости необходима осевая симметрия диаграммы направленности и ее минимальная ширина, для этого случая установлен отдельный центральный облучатель, представляющий собой двухзеркальную систему типа Кассегрена с коническим рупором. На волне 8,2 мм используется высокочувствительный радиометр модуляционного типа с квантовым парамагнитным усилителем на входе [6]. На волне 3,36 см установлен радиометр с параметрическим усилителем. Основные параметры радиотелескопа—флуктуационная чувствительность по потоку δS в единицах $10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2}$ гц при постоянной времени $\tau = 1^{\circ}$, шумовая температура $T_{\text{ш}}$ в градусах Кельвина при положении антенны в зенит, эффективная площадь антенны A в квадратных метрах и ширина диаграммы направленности в азимутальной φ_a и угломестной φ_h плоскостях в минутах дуги—приведены в табл. 1.

Измерения на волне 8,2 мм проводились в горизонтальной, а на волне 3,36 см в вертикальной поляризации. Метод наблюдений состоял в регистрации прохождений радиоисточников через диаграмму направленности антенны, выставленной в расчетное положение. Выставление контролировалось по шкалам радиотелескопа. Для исключения воз-

можной систематической ошибки, обусловленной отклонением электрической оси от расчетной вследствие температурных и механических деформаций, а также ошибки из-за изменения рефракции выставление антенн производилось не только в направлении ожидаемого положения источника, но также и в направлении выше и ниже его.

Таблица 1

λ мк	Облуча- тели	δS	$T_{\text{ш}}$ °К	A м ²	φ_a мин дуги	φ_h мин дуги
		10^{-26} $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$				
8,2	боковой	~3,4	200	80 ± 10	$1,80 \pm 0,05$	$1,90 \pm 0,05$
8,2	центральный	~3,9	200	70 ± 10	$1,58 \pm 0,05$	$1,62 \pm 0,05$
33,6	центральный	~1,7	100	150 ± 30	$6,10 \pm 0,05$	$6,10 \pm 0,05$

Распределение радиояркости Крабовидной туманности измерялось путем наблюдений ее прохождений через диаграмму направленности антенны, выставляемой на различные склонения через одну минуту.

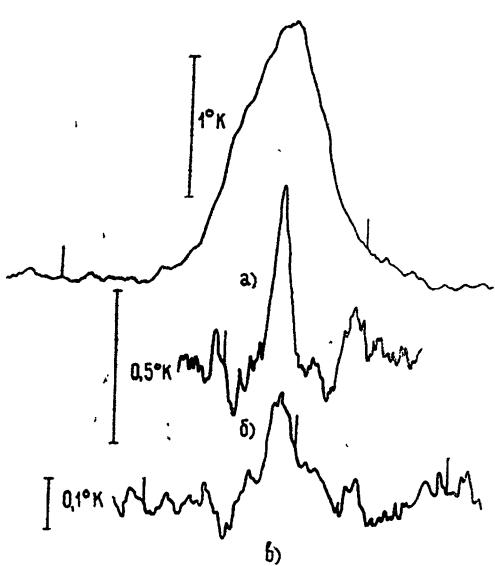


Рис. 1. Записи прохождения радиоисточников через диаграмму направленности антенн: а) 3С 144, б) 3С 273, в) NRAO 150.

среднеквадратичные ошибки измерений и время наблюдения.

На рис. 1 приведены записи радиоисточников Тай-А, 3С 273 и NRAO 150 на волне 8,2 мк. Калибровка измерений на волне 3,36 см. производилась по радиоисточнику Лебедь-А, а на волне 8,2 мк по Юпитеру, температура которого принималась равной 140°К. Для уменьшения влияния изменения параметров антенны и поглощения в атмосфере на точность измерений как калибровочные, так и исследуемые радиоисточники наблюдались примерно при одинаковых углах места. Промежуточная калибровка каждого прохождения производилась с помощью газоразрядной шумовой трубы. Полученные результаты были исправлены за постоянную времени, поглощение в атмосфере, поляризацию и размер радиоисточников.

В табл 2 приведены вычисленные плотности потоков радиоисточников на волнах 8,2 мк и 3,36 см,

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Радиоисточник 3С 84. Изменения плотности потока радиоизлучения источника 3С 84 на волне 8,2 мк за период 1965—69 гг. показаны на рис. 2 а пунктирной линией. На графике нанесены результаты как настоящих, так и более ранних измерений [1, 2], а также результаты, полученные на близкой волне, равной 9,55 мк [7, 8]. Во всех случаях в качестве калибровочного источника был принят Юпитер. Как видно из этого рисунка, какого-либо регулярного изменения потока не наблюдается. Во второй половине рассматриваемого интервала времени, где

точность измерений выше и наблюдения чаще, видны отдельные нерегулярные изменения, период которых составляет примерно 0,5 года. Аналогичные изменения наблюдались в 1966 г. на волне 3,4 мм [9] и на волне 2 см [10].

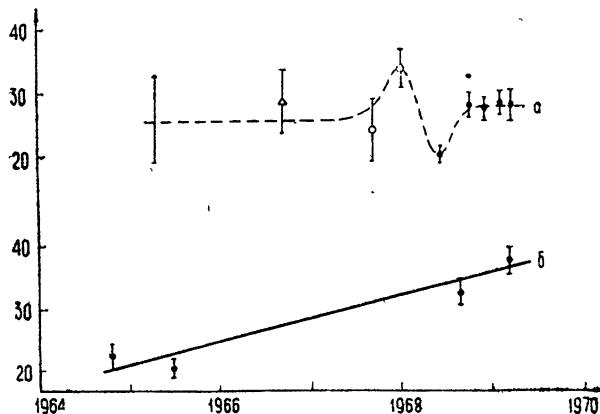


Рис. 2. Изменение плотности потока радиоизлучения источника 3С 84 во времени: а)—на волне 8,2 мм,

б)—на волне 3,36 см;

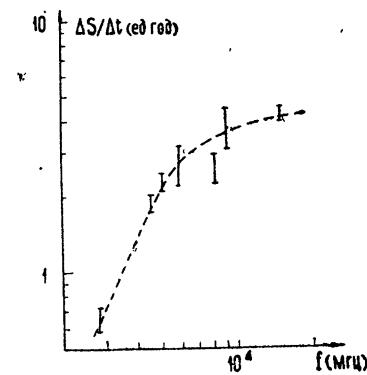
●●●—результаты настоящей работы и [1, 2],

△△△—результаты [7], ○○○—результаты [8].

На волне 3,36 см, как следует из наших измерений (табл. 2 и [1]), наблюдается регулярный рост потока примерно на 4 единицы в год, что соответствует результату на близкой волне в предшествующий период [11]. Наблюданное замедление в росте потока на волне 3,75 см, отмеченное в [10], возможно является кратковременной нерегулярностью в общем изменении потока.

Как видно из работ [10–12], в течение 1964–66 гг. приращение плотности потоков не зависит от времени. Приращение плотности потоков $\Delta S/\Delta t$ на разных волнах за этот период (рис. 3) носит линейный характер на волнах, больших 4 см, где, как следует из графика, спектральный индекс равен $2,2 \pm 0,4$. В случае адиабатического расширения оптически толстого облака релятивистских электронов, плотность потока радиоизлучения которого, согласно [13, 14], будет меняться как $S(v, t) \sim (t/t_0)^{3/8} v^{5/2}$, это будет соответствовать замедлению определяемым $\beta = 1/3$ и оптической толще $\tau = 1$ на волне 4 см.

Рис. 3. Приращение плотности потока радиоизлучения источника 3С 84 в зависимости от частоты в период 1964–66 гг.



Спектральный индекс радиоисточника 3С 84 в диапазоне волн 8,2 мм и 3,36 см в начале 1969 г. оказался равным $0,17 \pm 0,09$.

Радиоисточник 3С 273. Результаты измерений радиоисточника 3С 273 показывают (табл. 2 и [1]), что на волне 8,2 мм плотность его потока сколь-нибудь значительных изменений не претерпевает. Однако рассмотрение результатов работ [7, 8] на близкой волне показывает,

Таблица 2

λ	3C 84			3C 273			3C 279			NRAO 150		
	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата	$10^{26} \text{ см} \cdot \mu\text{-}^{-2} \cdot \text{сц}^{-1}$	дата
8,2	20,2 ± 1,1	19.6.68	45,5 ± 3,0	13.6.68	19,7 ± 2,8	27.6.68	8,6 ± 0,7	18.12.68				
	28,1 ± 2,0	17.10.68	46,1 ± 2,8	19.6.63	9,7 ± 0,9	28.2.69	10,6 ± 1,1	28.2.69				
	27,7 ± 1,9	17.12.68	43,3 ± 3,1	4.10.68	11,4 ± 2,4	8,4.69	12,8 ± 2,2	7.4.69				
	28,5 ± 1,9	28.2.69	49,8 ± 3,0	-	17.12.68							
			40,0 ± 4,9		28.2.69							
	28,1 ± 2,5	8.4.69	42,3 ± 3,5		7,4.69							
33,6	32,3 ± 2,2	28.6.68	40,0 ± 1,6		28.6.68	17,0 ± 1,0	28,6.68					
	36,7 ± 2,6	15.2.69	45,3 ± 2,7		17.2.69							

что, по-видимому, и на волне 8,2 м.м., так же как и на сантиметровых [11], имеет место увеличение потока в 1966 г. (рис. 4 а, пунктирная линия). Как видно из рисунка, в конце 1968 г. возможно появилась новая компонента, которая вызвала небольшой подъем потока. Плотности потоков радиоизлучения, приведенные в работе [15], находятся выше наших результатов, возможно это связано с наличием систематической ошибки измерений.

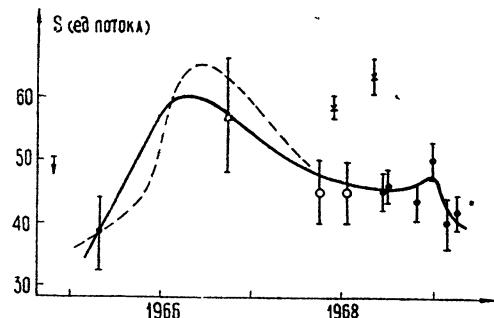


Рис. 4. Изменение плотности потока радиоизлучения источника 3С 273 во времени на волне 8,2 м.м.: ●●●—результаты настоящей работы и [1, 2]; △△△—результаты [7], ○○○—результаты [8], ×××—результаты [16].

Результаты измерений на волне 3,36 см. (табл. 1 и [1, 2]) также соответствуют вышеуказанной зависимости. Спектральный индекс радиоисточника 3С 273 в диапазоне 8,2 м.м.—3,36 см в июне 1968 года равен $\alpha = -0,09 \pm 0,08$, а в феврале 1969 г. $\alpha = 0,09 \pm 0,09$. Смена знака спектрального индекса, по-видимому, связана с запаздыванием возрастания потока, наблюдавшегося на 8,2 м.м. в конце 1968 г., с увеличением длины волны.

Радиоисточник 3С 279. Изменение плотности потока радиоизлучения источника 3С 279 (табл. 1) за время наблюдений с июня 1968 г. по апрель 1969 г. соответствует примерно 10 единицам. Оно соответствует спаду потока, начавшемуся ранее на волне 2 см [10]. Как и следовало ожидать, на более короткой волне спад более крутой. По-видимому, изменение плотности потока во времени, учитывая результаты работы [7], носит за указанный период немонотонный характер. Спектр источника в диапазоне 8,2 м.м.—3,36 см 28.6.68 г.—плоский. Его спектральный индекс равен $\alpha = -0,09 \pm 0,14$.

Радиоисточник MRAO 150. Плотность потока радиоизлучения этого радиоисточника возрастает со временем (табл. 2) и с точностью до ошибки измерений соответствует работе [7], результаты которой получены на близкой волне, равной 9,55 м.м.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИОЯРКОСТИ В КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ

На рис. 5 показано распределение яркости в Крабовидной туманности на волне 8,2 м.м. Исправлений за диаграмму направленности антенны (центральный излучатель) и постоянную времени ($\tau = 1^{\circ}$) не производилось. Область радиоизлучения, учитывая ширину диаграммы направленности по нулевому уровню ($\phi_{00} = 3', 5$) и постоянную времени, совпадает с оптически видимой. Распределение яркости достаточно круто спадает на краях, это хорошо видно из рис. 6, где представлено центральное сечение туманности по склонению (в этом направлении распределение яркости неискажено влиянием постоянной времени). На рис. 5, 6 хорошо видна более яркая центральная область на фоне протяженной. Эта компактная центральная область смешена относительно протяженной к юго-востоку и соответствует положению и размерам наиболее яркой части аморфной массы [16], а также области,

определенной основное излучение туманности на более коротких волнах миллиметрового диапазона [5]. Как следует из [17], эта же область ответственна за поляризованное излучение туманности. Полученное распределение радиояркости соответствует результату на близкой волне.

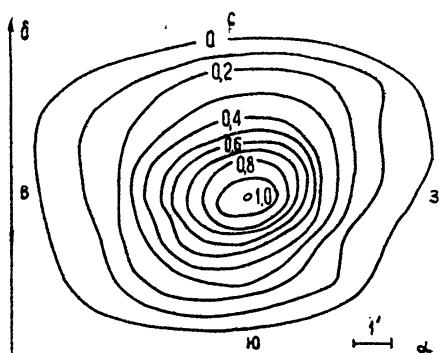


Рис. 5. Распределение радиояркости в Крабовидной туманности на волне 8,2 мм.

Рис. 6. Распределение радиояркости в Крабовидной туманности по склонению в центральном сечении.

не, равной 9,5 мм [8]. Измерения в этом случае проводились с диаграммой около 1'. Таким образом, результаты измерений распределения радиояркости Крабовидной туманности могут быть интерпретированы как излучение оболочки и заключенной внутри ее аморфной массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Х. Баррет, Б. Г. Кутузов, Л. И. Матвеенко, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 42, № 3, 527 (1965).
2. В. И. Костенко, Л. И. Матвеенко, Астрон. ж., 43, № 2, 280 (1965).
3. В. И. Костенко, Л. И. Матвеенко, Астрон. ж., 45, № 6, 1181 (1968).
4. Л. И. Матвеенко, А. В. Павлов, Астрон. ж., 44, № 2, 381 (1967).
5. В. А. Ефанов, А. Г. Кисляков, В. И. Костенко, Л. И. Матвеенко, И. Г. Моисеев, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 6, 803 (1969).
6. Л. Д. Бахрах, М. И. Григорьева, В. И. Загатин, П. Д. Калачев, А. Д. Кузьмин, Л. И. Матвеенко, Г. С. Мисежников, В. А. Никитин, В. А. Пузанов, А. Е. Саломонович, Р. Л. Сороченко, В. Б. Штейншлайгер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1115 (1969).
7. R. W. Hobbs, H. H. Corbett, N. J. Santini, Astrophys. J., 152, № 1, 43 (1968).
8. Л. Д. Браун, Тезисы докторской диссертации, Торонто, 1968.
9. Е. Е. Эпштейн, XIII Международный астрономический съезд, Прага, 1967.
10. K. I. Kellermann, I. I. K. Pauliny-Toth, Astrophys. J., 152, № 2, 639 (1968).
11. W. A. Dent, Astrophys. J., 144, № 2, 843 (1966).
12. Н. М. Липовка, Астрон. ж., 46, 28 (1969).
13. И. С. Шкловский, Астрон. ж., 77, 256 (1960).
14. Van der Laan, Nature, 211, 1131 (1966).
15. В. А. Ефанов, И. Г. Моисеев, Доклад на VI Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Рига, сентябрь, 1968.
16. L. Wolter, Bul. Astr. Inst. Neth., 13, 301 (1957).
17. K. J. Johnston, R. W. Hobbs, Astrophys. J., 10, 145 (1969).

**INVESTIGATION OF THE RADIO EMISSION FROM CRAB NEBULA
AND SOME QUASARS AT THE WAVELENGTHS 8.2 mm AND 3.36 cm***V. I. Kostenko, L. I. Matveyenko*

Measurements are made of the radio brightness distribution of the Crab Nebula at the wavelength 8.2 mm. During the period 1968–69 the flux densities of the radio emission from the sources 3C 84, 3C 273, 3C 279 and NRAO 150 have been measured at the wavelengths 8.2 mm and 3.36 cm. The density variations in time are considered. The spectral indices are determined.

УДК 523.164.4

О СТАБИЛЬНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО РАДИОИСТОЧНИКА КАССИОПЕЯ-А В ДЕКАМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

E. A. Бенедиктов

С 1963 по 1968 годы в г. Горьком проводились систематические измерения отношения интенсивности радиоисточника Кассиопея-А к уровню фона распределенного космического радиоизлучения на частоте 13 Мгц. Результаты наблюдений свидетельствуют об отсутствии существенных вариаций интенсивности источника с характерным временем порядка нескольких месяцев. Не обнаружено также вековое уменьшение интенсивности источника.

В Зименках, вблизи г. Горького, в течение ряда лет велись систематические измерения величины поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим методом [1]. Антенны приемных установок были направлены в зенит, что позволило ежедневно наблюдать прохождение дискретного источника Кассиопея-А (в верхней кульминации). Интенсивность источника составляла при этом около 25—30% от уровня фона распределенного космического радиоизлучения на частотах 25 и 13 Мгц и более 100% на частоте 9 Мгц. В результате оказалось возможным проверить стабильность излучения источника по отношению его интенсивности к уровню фона. Интерес к этой задаче повысился в связи с появившимся сообщением о вариациях интенсивности источника, достигающих 2,4—1,2 дБ в диапазоне 12,6—25 Мгц и происходящих за время порядка нескольких месяцев [2, 3]. В настоящей статье изложены результаты шестилетнего исследования стабильности источника на частоте 13 Мгц. Кроме того, для анализа данных 1966—1967 гг. были привлечены результаты наблюдений на частотах 9 и 25 Мгц.

Аппаратура и методика измерений. На частотах 25 и 13 Мгц антенны представляли собой синфазные горизонтальные полотна, состоящие из 12 волновых диполей каждое. Расчетные диаграммы направленности антенн были одинаковы на обеих частотах и равны $18 \times 25^\circ$ по уровням половинной мощности. На частоте 9 Мгц наблюдения велись с помощью горизонтальной антенной решетки, имеющей 120 волновых диполей. Соответствующие размеры диаграммы направленности составляли около $5 \times 8^\circ$. Приемно-регистрирующая аппаратура, использовавшаяся в наблюдениях, описана в [4]. Сигнал, поступавший из антенно-фидерной системы, усиливался радиоприемниками Р250М и после ограничения импульсных помех и квадратичного детектирования записывался на бумажной ленте со скоростями от 60 до 200 мм/час. Калибровка усиления проводилась автоматически каждый час при помощи шумовых генераторов, подключавшихся к приемникам вместо антенн. Полосы пропускания были равны 10 кгц на частоте 25 Мгц и 1,5—3 кгц на других частотах. Наблюдения проводились с постоянным слуховым контролем регистрируемого сигнала и с отстройкой от помех, в случае необходимости, в пределах ± 50 кгц от номинальной частоты. Постоянная времени аппаратуры из-за наличия ограничителя импульсных

помех была около одной секунды при уменьшении уровня сигнала и порядка одного или нескольких десятков секунд при его увеличении.

Обработка записей на частоте 13 Мгц производилась следующим образом. С лент в момент, соответствующий прохождению источником максимума диаграммы направленности антенны, отсчитывался уровень $I = I_k + I_\Phi$ сигнала, являющийся суммой интенсивностей источника I_k и фона распределенного радиоизлучения I_Φ . Затем находился уровень фона I'_Φ соседнего по времени участка, для которого $I'_\Phi \approx I_\Phi$, и определялось относительное значение

$$\frac{I_k}{I_\Phi} = \frac{I_k + I_\Phi}{I'_\Phi} - 1.$$

Такая методика обработки исключает ошибки, связанные с учетом потерь сигнала в антенно-фидерной системе. В значительной степени исключаются также погрешности, вызванные влиянием поглощения радиоволн в ионосфере, поскольку остаются существенными лишь вариации величины поглощения за интервалы времени порядка нескольких часов.

В вечерние иочные часы вариации поглощения, как правило, были невелики, и их в первом приближении можно было не учитывать. В другие часы суток в качестве уровня фона бралось среднее значение интенсивностей космического радиоизлучения до и после прохождения источника. Последнее приводило к некоторым систематическим погрешностям измерений из-за суточного хода поглощения.

Наибольшие ошибки в нахождении I_k/I_Φ возникали из-за флюктуаций интенсивности источника, определяемых дифракцией радиоволн на неоднородностях электронной концентрации в ионосфере. Когда флюктуации были малы, суммарные погрешности измерений I_k/I_Φ не превышали 10—20%. Однако, такие случаи были сравнительно немногочисленны, а интервалы между ними достигали иногда нескольких недель или даже месяцев. Поэтому, несмотря на увеличение ошибок разовых измерений, для обработки были привлечены записи и с более сильными флюктуациями.

Аналогичным, в принципе, образом обрабатывались и записи на частотах 25 и 9 Мгц*.

Результаты измерений. Наблюдения на частоте 13 Мгц велись с перерывами от нескольких дней до одного месяца. По этой и указанным выше причинам за шесть лет было получено только около 70% значений относительной интенсивности источника. Они были разделены на две неравные группы. К менее многочисленной группе с общей погрешностью нахождения I_k/I_Φ , не превышающей 15%, были отнесены случаи с неискаженной картиной прохождения источника и малыми флюктуациями его интенсивности. В другой группе данных ошибки измерений могли достигать нескольких десятков процентов.

На рис. 1 представлены результаты измерений I_k/I_Φ на частоте 13 Мгц за сентябрь—декабрь каждого года, когда верхняя кульминация источника наблюдалась в вечерние иочные часы суток. Кружками обведены 40 значений первой, более надежной группы измерений. Величина I_k/I_Φ , полученная усреднением по этим 40 значениям, оказалась равной 0,267. При этом разброс индивидуальных значений отно-

* Особенностью наблюдений на последней частоте является более существенное, по сравнению с наблюдениями на $f = 13$ Мгц, влияние флюктуаций интенсивности источника. Заметим также, что при линейных размерах антенны порядка 300 м на частоте 9 Мгц возможно уменьшение эффективной площади антенны при больших искажениях фазового фронта падающей волны,

сительно средней величины не превышал $\pm 15\%$, т. е. был порядка ошибок измерений.

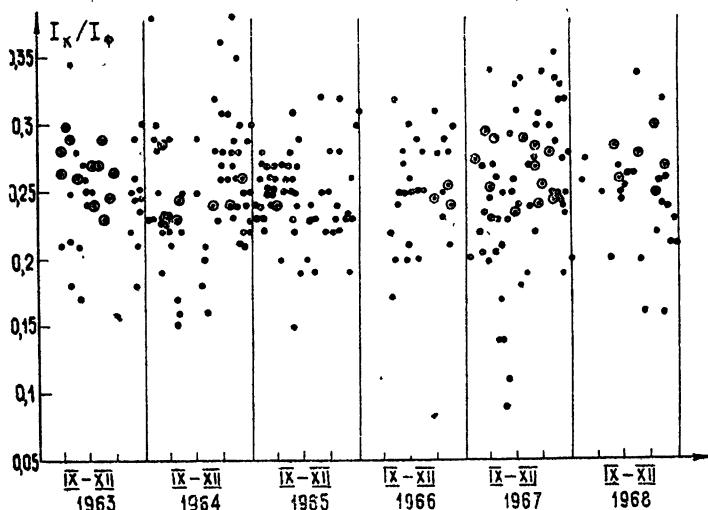


Рис. 1

Незаметны существенные временные изменения I_k/I_ϕ и в том случае, если взять всю совокупность представленных на рис. 1 данных. Исключением являются осенние месяцы 1967 г., когда в течение сентября—ноября значения I_k/I_ϕ , усредненные по двухнедельным периодам наблюдений, сначала уменьшились на 0,35—0,4 дБ, а затем повысились на 0,3 дБ относительно средней величины*.

На рис. 2 представлены результаты измерений за 1965 г., когда активность Солнца была близка к минимуму и критические частоты ионосферы были малы. Сплошной линией соединены среднемесячные

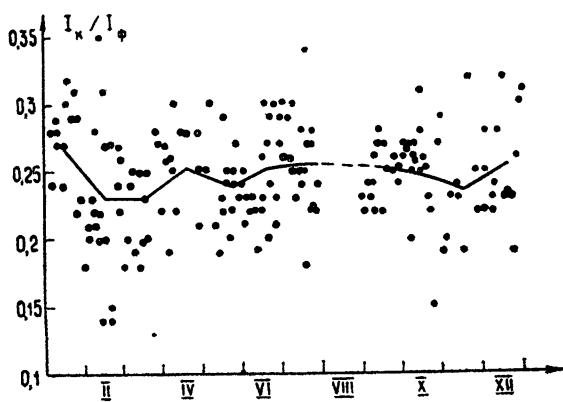


Рис. 2.

* Уменьшение средней интенсивности в октябре в основном произошло за счет недельного интервала наблюдений с 8 по 15 октября. Отдельные дни и группы дней с «низкой» интенсивностью были отмечены и в другие периоды наблюдений. Причины этого явления следует искать, по нашему мнению, в необычных ионосферных условиях, возникающих в эти дни. Например, уменьшение интенсивности источника на записях может появиться при большой скорости флюктуаций из-за особенностей постоянных временем аппаратуры.

значения \bar{I}_k/I_Φ . Вариации последних в первые месяцы года объясняются особенностями методики определения интенсивности источника. Эти вариации систематически повторялись из года в год. В остальные сезоны 1965 г., как видно из рис. 2, среднемесячные значения постоянны в пределах $\pm 0,2$ дБ, что указывает на стабильность интенсивности источника в эти периоды времени. Аналогичные результаты, но с несколько большим разбросом среднемесячных величин \bar{I}_k/I_Φ , получены и в другие годы наблюдений.

Дополнительно были обработаны записи прохождения источника на частотах 25 и 9 МГц для тех периодов наблюдений в 1966—1967 гг., когда проводились измерения в работе [2]. На частоте 25 МГц разброс усредненных за две недели значений \bar{I}_k/I_Φ (равный $\pm 0,3$ дБ) оказался такого же порядка, что и на частоте 13 МГц. В то же время максимальная разница в значениях \bar{I}_k/I_Φ на частоте 9 МГц достигала 1,8 дБ. Существенные вариации интенсивности источника на $f = 9$ МГц можно объяснить воздействием двух факторов — уменьшением эффективной площади антенны при ионосферных возмущениях* и большими, по сравнению с другими частотами, искажениями записи сигнала при увеличении скорости флюктуаций источника.

В целом результаты наблюдений в Зименках свидетельствуют об отсутствии значительных (более 0,5—0,8 дБ) изменений интенсивности источника с характерным временем порядка нескольких месяцев. Этот вывод отличается от результатов работы [2] и согласуется с данными Эриксона и Роджера**. В дальнейшем для решения вопроса о степени переменности источника необходимо проведение таких наблюдений, которые позволили бы с большей надежностью исключить влияние ионосферы на результаты измерений***.

О вековом ходе интенсивности источника. Результаты измерений на частоте 13 МГц были использованы для попытки установить вековой ход интенсивности источника. Для этой цели в первую очередь были использованы данные обработки «более надежной» группы записей прохождения источника в осенние месяцы. В табл. 1 приведены сред-

Таблица 1

Годы	1963	1964	1965	1966	1967	1968
\bar{I}_k/I_Φ	0,267	0,250	0,240	0,246	0,267	0,268
Число измерений	12	6	1	3	12	6
Значения σ	0,0061	0,008	—	—	0,0065	0,0083
\bar{I}_k/I_Φ	0,245	0,249	0,252	0,250	0,260	0,252
Число измерений	25	43	43	22	58	26

* Напомним, что на частоте 9 МГц линейные размеры антенны равны 300 м.

** Доклады на заседаниях комиссии по радиоастрономии УРСИ (Оттава, август 1969 г.)

*** В письме в редакцию [13] авторы работы [2] выражают мнение о том, что результаты наблюдений источника ЗС461 в Зименках не позволяют опровергнуть или подтвердить вывод о наличии переменности источника, сделанный в [2]. Выше-приведенные данные свидетельствуют о том, что если вариации интенсивности источника и существуют, то они не превышают нескольких десятых долей дБ. Зарегистрированные вариации источника, достигающие $\pm 0,4$ дБ, могут быть в значительной степени или полностью объяснены ближним ионосферой. В настоящее время в Зименках ведутся наблюдения источника ЗС461 с несколько улучшенной методикой, которая позволит уменьшить ошибки измерений.

негодовые значения $\bar{I}_{k1}/\bar{I}_\Phi$, число измерений в каждом году и среднеквадратичная ошибка определения $\bar{I}_{k1}/\bar{I}_\Phi$ (в тех случаях, когда усреднялось по 6 и более значений относительной интенсивности источника).

Несмотря на ограниченность числа измерений, результаты оказались довольно любопытными. С одной стороны, они указывают на отсутствие постепенного уменьшения интенсивности источника. С другой стороны, намечается, возможно, некоторая корреляция хода среднегодовых значений $\bar{I}_{k1}/\bar{I}_\Phi$ с циклической активностью Солнца, имевшей минимум с 1964—1965 гг. Вполне вероятно, однако, что последнее является следствием очень малого числа измерений в 1964—1966 гг.

В таблице приведены также средние значения $\bar{I}_{k2}/\bar{I}_\Phi$, полученные по существенно большему числу измерений в осенние месяцы 1963—1968 гг., включающих как «более надежные» единичные результаты определения интенсивности источника, так и более многочисленные результаты обработки других записей прохождения источника. Эти данные также показывают отсутствие заметного уменьшения интенсивности источника в период с 1963 по 1968 г.

Разумеется, следует осторожно относиться к выводу о вековой стабильности источника, поскольку теоретические соображения [5] и измерения на более высоких частотах [6—11] свидетельствуют об уменьшении интенсивности источника на 1—2% в год. Не исключено, однако, что в декаметровом диапазоне волн вековой ход интенсивности источника имеет другой характер по сравнению с высокими частотами.

В заключение автор приносит благодарность В. В. Беликовичу, Г. Г. Гетманцеву, В. А. Разину и Н. М. Цейтлину за критические замечания и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, 8, 462 (1968).
2. С. Я. Брауде, И. Н. Жук, О. М. Лебедева, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Спектры дискретных источников космического излучения в декаметровом диапазоне волн, Препринт № 2, изд. Наукова думка, Киев, 1969.
3. С. Я. Брауде, И. Н. Жук, С. М. Лебедева, А. В. Мень, Б. П. Рябов, ДАН СССР, 180, № 6, 1323 (1968).
4. В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 8, 1127 (1968).
5. И. С. Шкловский, Сверхновые звезды, М., изд. Наука, 1966.
6. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Астрон. ж., 41, 769 (1964).
7. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Х. Ф. Гитерман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика (в печати).
8. D. S. Heeschen, B. L. Meredith, Nature, 190, 705 (1961).
9. J. A. Hogbom, J. R. Shakeshaft, Nature, 189, 561 (1961).
10. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, F. T. Haddock, Astron. J., 69, 552 (1964).
11. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J., 141, 867 (1965).
12. J. W. Findlay, H. Hvatum, W. G. Waltman, Astrophys. J., 141, 873 (1965).
13. С. Я. Брауде, И. Н. Жук, О. М. Лебедева, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1569 (1970).

RADIATION STABILITY OF THE DISCRETE SOURCE CASSIOPEIA-A IN DECAMETER WAVE RANGE

E. A. Benediktov

During the period 1963—1968 in Gorky the regular measurements were carried out of the relation of the intensity of the radio emission from Cassiopeia-A to the background level of the distributed cosmic radio emission at the frequency 13 Mc/s. The observation results show the absence of considerable intensity variations of the source with the characteristic time of the order of several months. Also was not discovered the annual decrease of the source intensity.

УДК 523.164.4

О ГАЛАКТИЧЕСКОЙ И МЕТАГАЛАКТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Г. Г. Гетманцев, Е. Д. Пятова, Ю. В. Токарев, В. А. Шибаев

На основе экспериментальных данных [1, 2] показано, что при удалении от галактической плоскости вдоль круга склонения $\delta = +50^\circ$ спектральный индекс галактического радиоизлучения $\beta_{\text{гал}}$ на частоте 40 $M\text{гц}$ плавно увеличивается от $\beta_{\text{гал}} = 2,33$ при $\alpha = 19^\circ$ до $\beta_{\text{гал}} = 2,53$ при $\alpha = 13^\circ$ для значений температуры и спектрального индекса метагалактической составляющей радиоизлучения $T_{\text{мет}} = 1800^\circ\text{К}$ и $\beta_{\text{мет}} = 2,75$ на частоте 40 $M\text{гц}$. Эти изменения спектрального индекса значительно больше, чем отмечается в работе [3]. Для объяснения полученных вариаций галактического спектрального индекса рассматривается двухкомпонентная модель распределения источников радиоизлучения Галактики с разными спектральными индексами компонент.

1. Для разделения наблюдающегося радиоизлучения на галактическую и метагалактическую составляющие воспользуемся результатами измерений частотного спектра космического радиоизлучения, приведенными в [1, 2], а также данными повторных измерений угловых вариаций спектрального индекса полного космического радиоизлучения $\beta_n(\alpha)$, выполненных в НИРФИ в 1969 г.*. В соответствии с [2] измерениями 1969 г. на частотах 25 и 40 $M\text{гц}$ спектральный индекс β_n для фиксированного склонения $\delta = +56^\circ$ плавно меняется при перемещении диаграмм направленности приемных антенн по небосводу вследствие суточного вращения Земли. Напомним, что в [2] измерения производились с помощью антенн, имевших вертикальные диаграммы направленности с шириной $25 \times 35^\circ$, на серии фиксированных частот 6,3; 9; 13; 18,6; 25; 40 $M\text{гц}$, а в 1969 г.— на частотах 25 и 40 $M\text{гц}$. В течение суток диаграммы направленности описывали на небосводе замкнутые траектории, которые пересекали галактическую плоскость и удалялись от плоскости Галактики до широты $b = +62^\circ$.

Зависимость спектрального индекса $\beta_n(\alpha)$ на частоте 40 $M\text{гц}$ приведена на рис. 1 (a). Кривая рис. 1 (a) получена на основе дополнительной обработки результатов измерения эффективных температур небосвода, выполненных в [2], а также на основе дополнительных, более точных, относительных измерений спектрального индекса кос-

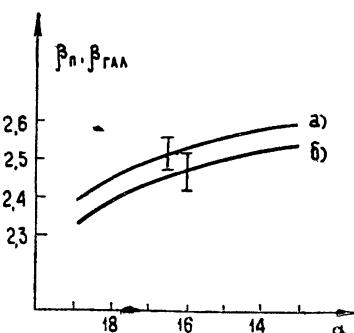


Рис. 1.

* Эти измерения были проведены В. А. Бастраковым и О. А. Казанцевым.

мического радиоизлучения, осуществленных нулевым методом в 1969 г. Вертикальным отрезком на рис. 1 (a) указана погрешность в определении абсолютных значений β_n , взятая из [1]*. Что касается относительного хода кривой $\beta_n(\alpha)$, то он, как показывает анализ результатов измерений, определен с большей точностью. Результатирующая ошибка в определении по кривой рис. 1 (a) разности спектральных индексов для двух произвольных значений не превышает $\pm 0,02$. Таким образом, при изменении α от 13 до 19^h спектральный индекс β_n на частоте 40 $M\text{c}$ меняется на величину $\Delta\beta_n \approx 0,2$, причем на высоких галактических широтах β_n больше, чем на относительно низких широтах. Аналогичные вариации $\Delta\beta_n$ имеются также и на более низких частотах 25 и 13 $M\text{c}$, в чем легко убедиться на основании данных работы [4], в которой приведена зависимость относительного уровня космического радиоизлучения небосвода от звездного времени на частотах 25 и 13 $M\text{c}$ **. Можно показать, что указанные вариации $\Delta\beta_n$ нельзя объяснить увеличением поглощения космического радиоизлучения в межзвездном ионизованном газе при приближении к галактической плоскости, и, следовательно, приведенные вариации $\Delta\beta_n$ на частоте 40 $M\text{c}$ для $\alpha = 13 - 19^h$ являются «истинными», т. е. связаны с распределением источников синхронного излучения***.

2. Пользуясь рис. 1 (a) и приведенными в [2] данными об эффективных температурах небосвода на фиксированных частотах декаметрового диапазона, попытаемся теперь, произвести разделение космического радиоизлучения на галактическую и метагалактическую составляющие. Будем, как обычно, полагать, что полная эффективная температура небосвода и ее составляющие зависят от частоты по степенным законам: $T_n \sim \nu^{-\beta_n}$, $T_{\text{гал}} \sim \nu^{-\beta_{\text{гал}}}$, $T_{\text{мет}} \sim \nu^{-\beta_{\text{мет}}}$, где $T_{\text{гал}}$, $T_{\text{мет}}$ и $\beta_{\text{гал}}$, $\beta_{\text{мет}}$ — соответственно температуры и спектральные индексы галактической и метагалактической составляющих космического радиоизлучения. Пользуясь введенными обозначениями и учитывая, что для любой точки небосвода $T_n(\alpha) = T_{\text{гал}}(\alpha) + T_{\text{мет}}(\alpha)$, можно без труда найти

$$T_{\text{мет}}(\alpha) = T_n(\alpha) \frac{\beta_n(\alpha) - \beta_{\text{гал}}(\alpha)}{\beta_{\text{мет}}(\alpha) - \beta_{\text{гал}}(\alpha)}. \quad (1)$$

Примем теперь, что метагалактическое радиоизлучение является изотропным, т. е. $T_{\text{мет}}$ не зависит от α , и будем также считать не за-

* Привязка кривой β_n рис. 1 (a) к абсолютным измерениям спектрального индекса на частоте 40 $M\text{c}$, выполненным в [1], произведена для прямого восхождения $\alpha = 13^h$, соответствующего для $\delta = +56^\circ$ галактической широте $+62^\circ$. Для $\alpha = 13^h$ в [1] получено значение $\beta_n = 2,57 \pm 0,04$. Измерения в [1] проводились, однако, с простой дипольной антенной, имеющей широкую диаграмму направленности. Поскольку, как это видно из рис. 1 (a), β_n уменьшается с уменьшением галактической широты, при измерениях с антенной, имеющей диаграмму $25 \times 35^\circ$, мы принимаем для $\alpha = 13^h$ ($b = 62^\circ$) значение $\beta_n = 2,6 \pm 0,04$.

** Измерения в [4] также проводились с помощью антенн, имеющих вертикальные диаграммы направленности с шириной $\theta \approx 18 \times 25^\circ$ ($\delta = 56^\circ$).

*** Измерения [5, 6] дают величину оптической толщины в направлении полюса Галактики $\tau \approx 0,05$ на частоте $\nu = 10 M\text{c}$, в то время как результаты экспериментов на ИСЗ приводят к величине $\tau \approx 1 \div 2$ на частоте 1 $M\text{c}$ [7]. Считая, что диффузная среда, поглащающая радиоволны, расположена вдоль плоскости Галактики и $\tau \sim \nu^{-2}$, получим, что для $\alpha = 19^h$ ($b \approx 20^\circ$) оптическая толщина $\tau \lesssim 0,02$ и $\lesssim 0,01$ соответственно для $\nu = 25 M\text{c}$ и $\nu = 40 M\text{c}$. Поглощения радиоизлучения в оптически плотных H_{II} -областях можно ожидать лишь при $|b| < 10^\circ$, как это следует из анализа распределения H_{II} -областей [8, 9]. Об этом же свидетельствуют и наблюдения уровня космического радиоизлучения для $\delta = 56^\circ$, выполненные на 9,0 $M\text{c}$ при помощи антенн с диаграммами $\theta \approx 9 \times 5^\circ$ [10]. Привести более полное рассмотрение затронутого вопроса мы надеемся в дальнейшем.

висящими от α спектральные индексы $\beta_{\text{мет}}$ и $\beta_{\text{гал}}$. Если теперь записать выражение (1) для двух произвольных точек небосвода с координатами α_1 и α_2 и приравнять правые части выражений (1), то из получившегося соотношения легко найти

$$\beta_{\text{гал}} = \frac{T_{n1}\beta_{n1} - T_{n2}\beta_{n2}}{T_{n1} - T_{n2}}. \quad (2)$$

Подставляя затем значение $\beta_{\text{гал}}$ в (1), можно найти эффективную температуру метагалактической составляющей $T_{\text{мет}}$.

Воспользуемся теперь рис. 1 (a) и данными для T_n на частоте 40 $M\text{Гц}$, приведенными в [2], для определения $\beta_{\text{гал}}$ и $T_{\text{мет}}$, полагая $\beta_{\text{мет}} = 2,75$. При этом, вычисляя $\beta_{\text{гал}}$ по формуле (2), не следует, очевидно, в целях сохранения необходимой точности брать слишком близкие точки на небосводе, поскольку в (2) входят разности величин, определенных с некоторыми погрешностями. Например, для точек $\alpha = 13^\circ$ и $\alpha = 18^\circ$ ($\delta = 56^\circ$), принимая значения $\beta_n = 2,6 \pm 0,02$ и $2,45 \pm 0,02$, отвечающие средним значениям температур из [2], получим $\beta_{\text{гал}} = 2,24 \pm 0,06$. При этом из формулы (1) для широты 62° получим $T_{\text{мет}}/T_n = 0,68 \pm 0,06$.

Найденные здесь значения $\beta_{\text{гал}} = 2,24 \pm 0,06$ и $T_{\text{мет}}/T_n = 0,68 \pm 0,06$ для $b = 62^\circ$ противоречат, однако, результатам других авторов [3, 11], полученным в такой же схеме с $T_{\text{мет}}$, $\beta_{\text{мет}}$, $\beta_{\text{гал}}$, не зависящими от координат α и δ . Отметим также, что это противоречие не может быть ликвидировано, если учесть погрешности измерений эффективных температур на частоте 40 $M\text{Гц}$ в [2] и погрешности кривой $\beta_n(\alpha)$ рис. 1 (a). Таким образом, необходимо, очевидно, изменить принятую выше схему вычислений, отказавшись, по крайней мере, от части сделанных предположений. По мнению авторов, наиболее естественно допустить, что $\beta_{\text{гал}}$ не является постоянной, а зависит от галактических координат, и сохранить другое предположение о независимости от небесных координат метагалактической составляющей радиоизлучения.

Для нахождения зависимости $\beta_{\text{гал}}$ от галактической широты, объясняющей график рис. 1 (a), примем в соответствии с [3, 11], что $T_{\text{мет}} = 1800^\circ\text{К}$ на частоте 40 $M\text{Гц}$, т. е. что $T_{\text{мет}}$ (40 $M\text{Гц}$) составляет примерно 30% от полной эффективной температуры на высоких галактических широтах*. В рамках сделанных предположений можно сразу же указать, что спектральный индекс галактического радиоизлучения $\beta_{\text{гал}}$ должен зависеть от α приблизительно так же, как и β_n . Зависимость $\beta_{\text{гал}}$ от α на частоте 40 $M\text{Гц}$ количественно может быть легко найдена из соотношения

$$\beta_n = \beta_{\text{гал}} \frac{T_{\text{гал}}}{T_n} + \beta_{\text{мет}} \frac{T_{\text{мет}}}{T_n}, \quad (3)$$

выполняющегося для всех точек небосвода**. Пользуясь данными работы [2] о зависимости $T_n(\alpha)$ на частоте 40 $M\text{Гц}$ и рис. 1 (a), для $\beta_n(\alpha)$ легко найти искомую зависимость $\beta_{\text{гал}}(\alpha)$, которая приводится на рис. 1 (b). Как видно из рис. 1 (b), вариации $\beta_{\text{гал}}(\alpha)$ действительно значительны и для интервала часовых углов $\alpha = 19 - 13^\circ$ ($b = 20 \div 62^\circ$) составляют величину $\Delta\beta_{\text{гал}} \approx 0,2 \pm 0,02$. Вертикальный отрезок на рис. 1 (b)

* Значение $T_{\text{мет}} = 1800^\circ\text{К}$ принято здесь несколько условно, так как в [3, 11] оно получено для схемы, в которой $\beta_{\text{гал}} = \text{const}$. Как показано в [12], скорее всего $\beta_{\text{мет}} \approx 2,55$ вместо принятого здесь $\beta_{\text{мет}} \approx 2,75$. При $\beta_{\text{мет}} = 2,55$, согласно [12], $T_{\text{мет}} \approx 4 \cdot 10^6 \text{К}$ и в соответствии с (3) $\beta_{\text{гал}}$ существенно зависит от галактических координат.

** Отметим, что соотношения (1) и (2) элементарно выводятся из (3) с учетом оценки $T_n = T_{\text{гал}} + T_{\text{мет}}$.

обозначает погрешность привязки абсолютных значений галактического спектрального индекса.

Интересно сравнить получившиеся результаты с данными работы Бридла [3], в которой производились измерения вариаций по небосводу частотного индекса космического радиоизлучения в большей части северной небесной полусфера ($\delta > 15^\circ$). Согласно [3], для $\delta = 52^\circ$ — склонения, отвечающего измерениям, используемым в настоящей заметке, β_n для $b > 20^\circ$ зависит от небесных координат слабее. Так, при изменении α от 19° до 13° β_n меняется от 2,45 до 2,55. Вследствие этого меньше и вариации галактического спектрального индекса при удалении от галактической плоскости вдоль круга склонения $\delta = 52^\circ$.

Поскольку вопрос об угловых вариациях спектрального индекса космического радиоизлучения исключительно важен с разных точек зрения, необходимы, очевидно, дополнительные измерения, способные ликвидировать расхождение между данными работы [3] и данными, использованными в настоящей работе.

3. Попытаемся теперь найти возможные объяснения полученных в разд. 2 вариаций спектрального индекса галактического радиоизлучения. Отмеченные вариации $\Delta\beta_{gal}$ могут быть, разумеется, интерпретированы в модели с плавным изменением частотного спектра источников синхротронного радиоизлучения. Однако для простоты рассмотрения мы ограничимся здесь лишь двухкомпонентной моделью распределения источников галактического радиоизлучения, различные компоненты которой имеют разные спектральные индексы.

На этом пути могут быть сделаны следующие выводы. Будем полагать, что в первой компоненте радиоизлучения спектральный индекс β_{gal1} определяется энергетическим спектром электронной компоненты космических лучей у Земли. При напряженности магнитного поля $H \approx 10^{-5}$ э радиоизлучению на частотах $v \approx 30$ Мгц отвечают электроны с энергией $\varepsilon \approx 10^9$ эВ и показатель энергетического спектра электронов для этой энергии $\gamma \approx 1,4$ [13]. Таким образом, $\beta_{gal1} = 2 + (\gamma - 1)/2 = 2,2$. Запишем для температур и спектральных индексов галактических компонент соотношение, аналогичное (3). Примем, как и раньше, $T_{gal} = T_n - T_{met}$, $T_{met} = 1800^\circ\text{K}$ на частоте 40 Мгц, зависимость T_n от α из работы [2], β_{gal} от α из рис. 1 (б). Тогда вычисления показывают, что спектральный индекс второй компоненты $\beta_{gal2} > 2,5$, и при сколько-нибудь реальных значениях $2,5 < \beta_{gal2} < 3$ вклад второй компоненты на относительно высоких широтах ($b = 62^\circ$) в суммарное галактическое радиоизлучение значителен. Кроме того, вторая компонента слабо зависит от галактических координат.

В противоположность второй компоненте первая компонента существенно зависит от галактических координат и ее вклад в эффективную температуру $T_{gal}(\alpha)$ заметно меняется при изменении α , обеспечивая наблюдающиеся изменения галактического спектрального индекса $\beta_{gal}(\alpha)$.

В заключение остановимся коротко на возможной природе двухкомпонент галактического радиоизлучения, обладающих, как было показано выше, существенно разными спектральными индексами. Уменьшение β_{gal} по мере приближения α к 19° связано, возможно, с наличием при $\ell'' \approx 90^\circ$, $b'' \approx 30^\circ$ известной особенности в поведении радиоизофотгалактическим шпуром или с местным галактическим рукавом [14-15]. Природа второй компоненты радиоизлучения с более высоким спектральным индексом $\beta_{gal2} \geq 2,5$ менее ясна. Если связать вторую компоненту с так называемой «галактической короной», то она, как это видно из предыдущего, должна быть достаточно обширной и имеет

квазисферическую форму. Если же связывать эту компоненту с локальными особенностями в распределении источников радиоизлучения, то необходимо принять наличие двух типов «шпуротов», причем второй тип «шпуротов» создает иллюзию наличия квазизотропной компоненты радиоизлучения, и эти «шпуры» имеют относительно высокий спектральный индекс.

Что касается различия в спектральных индексах радиоизлучения обеих галактических компонент, то оно может, в принципе, объясняться двояко. Если энергетический спектр релятивистских электронов в двух компонентах одинаков и соответствует спектру, наблюдаемому у Земли (обмен космических лучей между компонентами происходит свободно), то различие в спектральных индексах может быть отнесено только за счет «кривизны» дифференциального энергетического спектра электронов и различия в напряженности магнитного поля в разных компонентах. Оценки показывают, что для объяснения различия в спектральных индексах магнитные поля в разных компонентах должны отличаться не менее чем в 30 раз.

Альтернативная возможность объяснения различия спектральных индексов, связана, очевидно, с непосредственным различием в энергетических спектрах релятивистских электронов в разных компонентах. При этом обмен космическими лучами между компонентами должен быть достаточно затруднен.

В заключение, напомним, что все предыдущие выводы получены для вполне определенных значений $T_{\text{мет}}$ и $\beta_{\text{мет}} \approx 2,75$. Если же принять в соответствии с [12] для $\beta_{\text{мет}}$ значение 2,55 и $T_{\text{мет}}/T_p(13^h) \approx 60\%$, то сформулированные выше заключения о различии спектральных индексов и пространственного распределения источников радиоизлучения в двух галактических компонентах будут еще более категоричными.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. А. Сазонов, А. Ф. Тарасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 191 (1968).
- Г. Г. Гетманцев, Б. С. Караванов, Ю. С. Коробков, А. Ф. Тарасов, Астрон. ж., 45, № 5, 936 (1968).
- A. H. Bridle, Month. Not. R. Astr. Soc., 136, № 2, 219 (1967).
- Б. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1399 (1969).
- G. R. A. Ellis, P. A. Hamilton, Astrophys. J., 146, № 1, 78 (1966).
- А. Н. Bridle, Nature, 221, № 5181, 648 (1969).
- J. R. Alexander, L. W. Brown, T. A. Clark, R. G. Stone, Astron. Astroph., 6, № 3, 476 (1970).
- C. S. Gum, Memories R. Astr. Soc., 67, part 2, 155 (1955).
- A. F. R. Prentice, D. ter Haag, Month. Not. Astr. Soc., 146, № 4, 423 (1969).
- Е. А. Бенедиктов, Т. В. Ефимова, Л. А. Скребкова, Астрон. ж., 46, № 2, 286 (1969).
- K. W. Yates, R. W. Wielebinsky, Austral. J. Phys., 19, № 3, 389 (1966).
- Ю. В. Токарев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1570 (1970).
- G. L. Fanselow, R. S. Hildebrand, P. Mayell, Astrophys. J., 158, № 2, 771 (1969).
- K. W. Yates, Austral. J. Rhys., 21, № 2, 167 (1968).
- D. S. Mathewson, Astrophys. J., 153, № 1, 147 (1968).

GALACTIC AND METAGALACTIC COMPONENTS OF DISTRIBUTED
COSMIC RADIO EMISSION*G. G. Getmantsev, E. D. Pyatova, Yu. V. Tokarev, V. A. Shibaev*

According to the experimental data of the papers [^{1, 2}] it has been shown that with removing from the galactic plane along the declination circle $\delta = +56^\circ$, the spectral index of the galactic radio emission β_{gal} at the frequency 40 Mc/s smoothly increases from $\beta_{\text{gal}}=2.33$ at $\alpha=19^h$ to $\beta_{\text{gal}}=2.53$ at $\alpha=13^h$ for the values of the temperature and the spectral index of the metagalactic component of the radio emission $T_{\text{met}}=1800^\circ\text{K}$ and $\beta_{\text{met}}=2.75$ at the frequency 40 Mc/s. These variations of the spectral index are considerably larger than those reported in the paper [³]. To explain the observed galactic spectral index variations a two-component model of the Galaxy radio emission source distribution with different spectral indices of the components are considered.

УДК 533.951

КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков

Изучаются поверхности дрейфовые и токово-конвективные колебания бесстолкновительной плазмы в случае цилиндрической конфигурации. Учтено влияние на эти колебания проводящего кожуха. Показано, что в ряде случаев поверхностные колебания должны возбуждаться раньше соответствующих им коротковолновых объемных колебаний.

Если неоднородная плазма находится во внешнем магнитном поле, то, как известно, в области неоднородности параметров плазмы возможны дрейфовые [1] или токово-конвективные [2] колебания. Эти колебания изучались в приближении геометрической оптики; длина волны колебаний λ предполагалась малой по сравнению с характерным размером неоднородности L . Наличие в неоднородной области дрейфовых токов и направленной скорости какого-либо сорта частиц плазмы может приводить к возбуждению колебаний, длина волн которых велика по сравнению с характерным размером неоднородности [3, 4], $\lambda \gg L$. Эти так называемые длинноволновые или поверхностные колебания существуют вблизи области неоднородности, которую при этом можно рассматривать как поверхность разрыва, и затухают вглубь плазмы. Существенно, что эти колебания захватывают значительно больший объем плазмы, чем коротковолновые. Укажем еще две причины, из-за которых следует обратить особое внимание на поверхностные колебания. В длинноволновой области возможны спектры колебаний, не имеющие продолжения в коротковолновую область. В ряде случаев спектры длинноволновых колебаний обладают большими инкрементами нарастания колебаний, чем соответствующие им коротковолновые спектры. Таким образом, причиной неустойчивости в некоторых установках могут оказаться колебания, длины волн которых велики по сравнению с областью неоднородности плазмы. В настоящей работе обращено внимание именно на эти аспекты длинноволновых колебаний.

Бесстолкновительная плазма имеет форму кругового цилиндра и находится в постоянном внешнем магнитном поле B , направление которого совпадает с направлением оси цилиндра Oz : Радиус однородного плазменного цилиндра R , а радиус коаксиального с ним металлического кожуха R_0 . В такой системе рассматриваются потенциальные колебания, длины волн которых превышают характерный размер неоднородности L на границе плазма—вакуум. Ларморовские радиусы частиц малы по сравнению с L . В этом случае уравнение для возмущения электрического потенциала в области однородной плазмы имеет простой вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \left(\frac{l^2}{r^2} + \frac{k_z^2 \epsilon_1}{\epsilon} \right) \Phi = 0, \quad (1)$$

где

$$\epsilon = 1 + \sum \omega_L^2 / \Omega^2, \quad \epsilon_1 = 1 + \sum \omega_L^2 / k_z^2 v_T^2 [1 - J_+ (\omega_1 / |k_z| v_T)],$$

$J_+(x) = x \exp(-x^2/2) \int_{-\infty}^x d\tau \exp(\tau^2/2)$, $\omega_1 = \omega - k_z u$, u — направленная скорость частиц, ω_L — плазменная, а Ω — ларморовская частоты, v_T — тепловая скорость частиц. В (1) уже учтено, что возмущение потенциала можно искать в виде $\Phi = \Phi(r) \exp(-i\omega t + il\varphi + ik_z z)$. Уравнение (1) получено из кинетических уравнений для различных сортов частиц и уравнения Пуассона в предположении $\omega_1 \ll \Omega$. В вакууме Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \left(\frac{l^2}{r^2} + k_z^2 \right) \Phi = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с учетом ограниченности потенциала на оси имеет вид $\Phi_1 = C_1 I_l(\alpha r)$, где $I_l(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента, $\alpha^2 = k_z^2 \epsilon_1 / \epsilon$. Уравнение (2) имеет решение $\Phi_2 = C_2 J_l(|k_z|r) + C_3 K_l(|k_z|r)$, $K_l(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента.

Дисперсионное уравнение можно получить из граничных условий на потенциал и его производную. На металлическом кожухе $\Phi_2 = 0$. Условия на границе плазма—вакуум получаются интегрированием уравнения для потенциала в неоднородной пограничной области, которое имеет вид

$$\left(\epsilon - \frac{l}{r} \frac{d\Theta}{dr} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{d(\epsilon r)}{dr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \left[\frac{l^2}{r^2} \left(\epsilon - \frac{l}{r} \frac{d\Theta}{dr} \right) + k_z^2 \epsilon_1 + \frac{l}{r} \frac{dg}{dr} \right] \Phi = 0, \quad (3)$$

где

$$\Theta = \sum \frac{\omega_L^2 v_T^2}{\Omega^3 \omega_1} J + \left(\frac{\omega_1}{|k_z| v_T} \right), \quad g = \sum \frac{\omega_L^2}{\Omega \omega_1} J + \left(\frac{\omega_1}{|k_z| v_T} \right).$$

Уравнение (3) получено в тех же предположениях, что и уравнение (1), но только для неоднородной плазмы. Из уравнений (2) и (3) получаем следующие граничные условия:

$$\Phi_1 = \Phi_2; \quad -l \Theta \frac{d^2 \Phi_1}{dr^2} + \epsilon R \frac{d\Phi_1}{dr} - l \left(g - \frac{l^2}{R^2} \Theta \right) \Phi_1 = R \frac{d\Phi_2}{dr}, \quad (4)$$

где значения величин берутся в точке $r = |R|$.

Если в граничные условия (4) подставить решения уравнений (1) и (2), то получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\epsilon + \frac{l}{R^2} \Theta \right) \alpha \frac{I'_l(\alpha R)}{I_l(\alpha R)} - \frac{l}{R} (g + \alpha^2 \Theta) + |k_z| f = 0, \quad (5)$$

где

$$f = \frac{I_l(|k_z|R_0) K'_l(|k_z|R) - I'_l(|k_z|R) K_l(|k_z|R_0)}{I_l(|k_z|R) K_l(|k_z|R_0) - I_l(|k_z|R_0) K_l(|k_z|R)},$$

а штрихом обозначена производная по аргументу. Заметим, что $f > 0$ и при $k_z R \ll l$ $f \approx (|l|/|k_z|R) \{ [(R_0/R)^{2l} + 1]/[(R_0/R)^{2l} - 1] \}$, а при $k_z R \gg l$ $f = \operatorname{ctg} |k_z|(R_0 - R)$.

Дисперсионное уравнение (5) определяет спектры колебаний ограниченной плазмы.

Первоначально рассмотрим область частот колебаний $\omega_1 \gg k_z v_{T_e}$ ($\Omega \gg \omega_1$). Когда отсутствует направленная скорость частиц, следующие два спектра соответствуют нарастающим поверхностным дрейфовым колебаниям:

$$\omega^3 = \frac{l}{|l|} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e} \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{1 + c^2/v_A^2 + f |k_z| R / |l|}; \quad (6)$$

$$\omega^2 = i \frac{l}{R} |k_z| v_{Te}^2 \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right). \quad (7)$$

Первый спектр имеет место в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ при условии $l^2 \rho_e^2 / R^2 \gg k_z R (m/M)^{1/2} / l$, где $\rho_e = v_{Te} / \Omega_e$. При обратном условии в случае почти поперечного распространения $(l/R) (m/M)^{1/2} \gg k_z$ справедливо выражение (7). В спектре (7) отсутствует f , что возможно при условии $(c/v_A)(\omega_{Le}/\omega) \gg f$ (v_A — альфеновская скорость). Если это условие нарушено, то проявляется стабилизирующее действие кожуха. При этом, как и в дальнейших условиях, для простоты считаем $c \gg v_A$. Спектр (6) имеет продолжение в коротковолновую область ($\lambda \ll L$), в то время, как (7) не имеет. Если сравнить инкременты нарастания колебаний (6) и соответствующего локального спектра [5], то окажется, что отношение ω_k^3 (коротковолновая область) к ω_d^3 (длинноволновая область) $\omega_k^3/\omega_d^3 \sim l/RLk^2 \ll 1$, где $k^2 = k_x^2 + l^2/R^2 + k_z^2$ — квадрат волнового вектора в коротковолновой области. Отсюда следует, что первоначально должны возбуждаться поверхностные колебания.

В этой же области частот при учете направленной скорости электронов возможно возбуждение поверхностных токово-конвективных колебаний. Когда частоты колебаний лежат вне области (выше) частот обычной пучковой неустойчивости $\omega \gg k_z u$, поверхностные токово-конвективные колебания распространяются почти поперек пучка $(l/R)(m/M)^{1/2} \gg k_z$ и их спектры имеют вид

$$\omega^2 = - \frac{l}{|l|} \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i} \frac{k_z u}{1 + c^2/v_A^2 + f |k_z| R / |l|}; \quad (8)$$

$$\omega = i \frac{k_z}{|k_z|} \frac{lu}{R} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Спектр (8) получен при условии $(l^2/R)(u/\Omega_e) \gg k_z R$, второй спектр — при обратном условии. Выражение (9) справедливо при $(c/v_A)(\omega_{Le}/\omega) \gg f$. Учет члена f в дисперсионном уравнении приводит к стабилизации колебаний (9). Заметим, что выражения (8) и (9) имеют место даже при $u < v_{Te}$, а именно: спектр (8) существует при условии $u^3/v_{Te}^3 \gg k_z v_{Te} / \Omega_i$, а спектр (9) — при условии $u/v_{Te} \gg k_z v_{Te} / \omega$. Спектр (8) имеет продолжение в коротковолновую область, причем отношение частот $\omega_k^2/\omega_d^2 \sim l/RLk^2 \ll 1$, т. е. как и в предыдущем случае преимущественно должны раскачиваться поверхностные колебания. Спектр (9) не имеет продолжения в область $\lambda \ll L$. В работе [6] были получены для плоского случая выражения, аналогичные (8) и (9), без учета воздействия кожуха.

В области частот $|k_z| v_{Te} \gg \omega \gg |k_z| v_{Ti}$ имеет место спектр слабонарастающих ($\omega \gg \gamma$) поверхностных дрейфовых колебаний:

$$\omega = \frac{(l/R) v_s}{1 + [(|k_z| v_s) / \Omega_i] (v_A^2/c^2) f}, \quad \gamma = \sqrt{\pi/8} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}, \quad (10)$$

где $v_s^2 = T_e/M$. Выражение (10) справедливо при выполнении неравенств $T_e \gg T_i$ и $(l/R)(m/M)^{1/2} \ll k_z$. Спектр (10) не имеет продолжения в коротковолновую область.

Если $T_i = 0$, то с помощью уравнения (5) можно проанализировать колебания в области частот ω_{Li} , $|k_z|v_{Te} \gg \omega \gg \Omega_i$. При выполнении условия $k_z^2 R^2 / l^2 \ll k_z \rho_e$ в этой области частот имеет место раскачка поверхностных дрейфовых колебаний, характеризующихся следующим спектром:

$$\omega^2 = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|l|}{l} |k_z| v_{Te} \Omega_i. \quad (11)$$

Выражение (11) получено в предположении, что выполнено условие $\omega_{Li}^2 / \omega^2 \gg (|k_z|R/|l|)f$. В противоположном случае проявляется стабилизирующее действие кожуха. Спектр (11) имеет продолжение в коротковолновую область, причем $\omega_k^2 / \omega_d^2 \sim LRk^2/l \gg 1$, т. е. в этом случае первоначально должны возбуждаться коротковолновые колебания.

Таким образом, в работе показано, что высокчастотные длинноволновые колебания ($\omega \gg |k_z|v_{Te}$) ограниченной плазмы в магнитном поле обладают более высокими инкрементами по сравнению с соответствующими им коротковолновыми колебаниями. Некоторые длинноволновые (крупномасштабные) возмущения, такие как (7) и (9), могут быть стабилизированы проводящим кожухом, в то время как локализованные внутри плазмы коротковолновые колебания не чувствительны к выбору граничных условий. В области длинных волн возможны спектры колебаний [3, 4], у которых нет продолжения в коротковолновую область (например, (7)).

Авторы благодарны А. А. Рухадзе за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, 82, № 3, 499 (1964).
2. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез, 6, № 1, 9 (1966).
3. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков, ЖТФ, 39, № 9, 1709 (1969).
4. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков, ЖТФ (в печати).
5. Л. М. Коврижных, Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ДАН СССР, 149, № 5, 1052 (1963).
6. Э. А. Пашицкий, А. Б. Михайловский, ЖЭТФ, 48, № 6, 1787 (1965).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
29 января 1970 г

OSCILLATIONS OF BOUNDED COLLISIONLESS PLASMA

E. E. Lovetskii, V. P. Silakov

The surface drift and current-convective oscillations of a cylindrical collisionless plasma are studied. The influence of the conducting housing on these oscillations is taken into account. It is shown that in some cases surface oscillations must be excited more formerly than shortwave volume oscillations corresponding to them.

УДК 533.951

О ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. В. Богомолов

Рассмотрена задача о наклонном падении электромагнитной волны на полуограниченную магнитоактивную плазму. Постоянное магнитное поле параллельно границе плазмы. Электрический вектор волны перпендикулярен плоскости падения и параллелен постоянному магнитному полю. Пространственная дисперсия предполагается слабой. Вычислен коэффициент поглощения волны при зеркальном отражении электронов от границы плазмы. Показано, что поглощение зависит от знака угла падения волны

Представим себе плазму, заполняющую полупространство $x > 0$. Граница плазмы $x = 0$ моделируется условием зеркального отражения электронов. Это значит, что при соударении электрона с границей меняет знак нормальная компонента его скорости v_x . Тепловое движение электронов считается слабым, так что его можно трактовать как возмущение. Движением ионов и столкновениями пренебрегаем. Вдоль оси z , параллельной границе плазмы, наложено постоянное магнитное поле H_0 , однородное внутри плазмы. Оси x , y , z образуют правую систему координат.

Пусть на плазму падает наклонно под углом θ плоская электромагнитная волна единичной амплитуды, поляризованный так, что $E \parallel H_0$ (обыкновенная волна). Требуется вычислить коэффициент поглощения.

Сформулированная задача решалась рядом авторов [1–3] для нормального падения волны. Арсенин [1] показал, что поглощение начинается только с ларморовской частоты ω_H . Полученная им формула, однако, неточна и была исправлена в работе [2]. Джонс и Зондхаймер [3] вариационным методом решили аналогичную задачу для фермиевской плазмы. При этом они пренебрели током смещения.

Кондратенко и Онищенко [4] исследовали проникновение поля в плазменный слой при сформулированных выше условиях с тем, однако, отличием, что электрон при столкновении с границей меняет знак не только v_x , но и тангенциальные компоненты скорости v_y . При этом электрон движется в плоскости xy поочередно по дугам, дополняющим друг друга до окружности. Хотя авторы называют эту модель зеркальной, однако сравнение с работой [1] показывает, что коэффициенты поглощения для этих двух моделей совпадают лишь по характеру зависимости от тепловой скорости (пропорциональны кубу тепловой скорости). Что же касается частотной зависимости поглощения, то она является совершенно различной для этих моделей. В частности, в модели работы [4] поглощение начинается с нулевой, а не ларморовской, частоты. Указанное различие не связано с геометрией плазмы.

Шафранов [5] рассмотрел проникновение поля в плазму при произвольной ориентации H_0 относительно зеркальной границы. Однако его предположение о том, что оператор электропроводности является разностным по координатам, справедливо лишь для H_0 , перпендикулярно-

го границе, и в нашем случае не выполняется. Это обстоятельство отмечено в работе [6].

Будем описывать плазму системой уравнений, состоящей из уравнений Максвелла и кинетического уравнения с самосогласованным полем для электронов. Представим функцию распределения электронов в виде суммы $f_0 + f$, где f_0 — невозмущенная (максвелловская) функция распределения, а f — связанная с волной поправка к ней. Волна распространяется в плоскости xy , так что зависимость всех величин от координаты y и времени t имеет вид $\exp i(k_y y - \omega t)$, где $k_y = k \sin \theta$, $k = \omega/c$. Отличной от нуля компонентой электрического поля является лишь E_z . Индекс z у поля и тока будем опускать. Линеаризованное кинетическое уравнение для f имеет вид

$$i(k_y v \sin \delta - \omega) f + v \cos \delta \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_H \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (1)$$

где $\omega_H = eH_0/mc$; $e > 0$; v, δ — полярные координаты в пространстве скоростей, так что, например, $v_x = v \cos \delta$. Для f_0 имеем

$$f_0 = N \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m}{2T} (v^2 + v_z^2) \right], \quad (2)$$

где N — число электронов в 1 см^3 , T — температура в энергетических единицах. Решение уравнения (1) можно записать в виде

$$f(x, \delta) = \exp [\mu \delta + i(k_y v / \omega_H) \cos \delta] \left\{ C + \frac{e}{m \omega_H} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\delta}^{\delta} \exp [-\mu \delta' - i(k_y v / \omega_H) \cos \delta'] E(x') d\delta' \right\}. \quad (3)$$

Здесь $\mu = i\omega / \omega_H$, $x' = x + (v / \omega_H) (\sin \delta' - \sin \delta)$, а постоянная C определяется из граничных условий.

Рассмотрим ларморовский кружок, касающийся границы. Соответствующее значение x обозначим через x_0 . Полагая $x' = 0$, $\delta' = -\pi/2$, найдем, что $x_0 = (v / \omega_H) (\sin \delta + 1)$. Введем ступенчатую функцию $\eta(x)$, определив ее так: $\eta(x) = 0$ для $x < 0$, $\eta(x) = 1$ для $x > 0$. Электрон в плазме имеет две возможности: либо совершать периодическое движение ($x > x_0$), либо столкнуться с границей ($x < x_0$). Соответственно этому функцию f можно записать следующим образом:

$$f = \eta(x - x_0) f_1 + \eta(x_0 - x) f_2. \quad (4)$$

Для функции f_1 имеем условие периодичности.

$$f_1(x, \delta) = f_1(x, \delta + 2\pi), \quad (5)$$

а для функции f_2 — условие зеркального отражения

$$f_2(0, \delta_0) = f_2(0, \pi - \delta_0). \quad (6)$$

Здесь δ_0 — угол отлета электрона от границы плазмы

$$\delta_0 = \arcsin (\sin \delta' - x' \omega_H / v). \quad (7)$$

Определяя постоянную C из граничных условий (5) и (6), находим

$$f(x, \delta) = \frac{e}{m \omega_H} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \left\{ \frac{\eta(x - x_0)}{e^{-2\pi\mu} - 1} \int_{\delta}^{\delta+2\pi} + \eta(x_0 - x) \times \right. \\ \left. \times \right\} \quad (8)$$

$$\times \left[[\exp(\mu(2\delta_0 - \pi) + 2i(k_y v/\omega_H) \cos \delta_0) - 1]^{-1} \int_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} + \int_{\delta_0}^{\delta} \right] \times \\ \times \exp[\mu(\delta - \delta') + i(k_y v/\omega_H)(\cos \delta - \cos \delta')] E(x') d\delta'.$$

Здесь штрихи в определении δ_0 можно уже снять.

Электромагнитная волна, падающая на плазму, поглощается даже в отсутствие соударения между частицами. Поглощение носит поверхностный характер и связано с тем, что электрическое поле волны производит работу над электроном, сталкивающимся с границей плазмы. Те электроны, которые не сталкиваются с границей, вклада в поглощение не делают. Однако их нельзя отбросить сразу, так как для поля решается самосогласованная задача.

Волновое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_x^2 E = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j, \quad (9)$$

где $k_x = k \cos \theta$, а ток j определяется соотношением

$$j = -e \int_0^\infty v dv \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\delta \int_{-\infty}^\infty v_z f dv_z. \quad (10)$$

Указанная область изменения угла δ очевидна для частицы, сталкивающейся с границей. Для холодной плазмы $j = -(\omega_0^2/4\pi i \omega) E$, где $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — плазменная частота. В этом случае плазму можно описывать диэлектрической постоянной $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$.

Введем оператор

$$I(E) = -\frac{\omega_0^2}{c^2} E - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j, \quad (11)$$

обращающийся в нуль для холодной плазмы. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + h^2 E = I(E), \quad (12)$$

где $h = k \sqrt{\epsilon - \sin^2 \theta}$. Для свободного пространства имеем уравнение

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_x^2 E = 0. \quad (13)$$

Решение уравнений (12), (13) будем искать в виде

$$E = E_0 + u, \quad (14)$$

где E_0 соответствует холодной плазме, а u характеризует тепловое движение. Рассматривается случай слабой пространственной дисперсии, когда

$$\frac{kv}{\omega_H} \ll 1. \quad (15)$$

Заметим, что k и h по порядку величины совпадают. Если неравенство (15) выполнено, то u можно рассматривать как возмущение:

$$u \ll E_0. \quad (16)$$

Для E_0 имеем известные выражения:

$$E_0(x) = \begin{cases} \frac{2k_x}{k_x + h} \exp(ihx) & (x > 0) \\ \exp(ik_x x) + \frac{k_x - h}{k_x + h} \exp(-ik_x x) & (x < 0) \end{cases}. \quad (17)$$

Подставив (14) в (12), (13) и учитывая (16), приходим к уравнениям для функции $u(x)$:

$$u'' + h^2 u = I(E_0) \quad (x > 0); \quad (18)$$

$$u'' + k_x^2 u = 0 \quad (x < 0). \quad (19)$$

Уравнение (18) решаем методом вариации постоянной с учетом ограниченности решения при $x = \infty$, а при решении (19) учитываем условие излучения. На границе $x = 0$ требуем непрерывности u , $\frac{du}{dx}$.

Для $u(x)$ внутри плазмы находим следующее выражение:

$$u(x) = \frac{1}{2ih} e^{ihx} \int_0^\infty \left(e^{-ihs} - \frac{k_x - h}{k_x + h} e^{ihs} \right) I(E_0(s)) ds + \\ + \frac{1}{h} \int_x^\infty \sin[h(s - x)] I(E_0(s)) ds. \quad (20)$$

Нам нужны величины $u(0)$ и $u'(0)$:

$$u(0) = \frac{1}{i(k_x + h)} \int_0^\infty e^{ihs} I(E_0(s)) ds; \quad (21)$$

$$u'(0) = -ik_x u(0). \quad (22)$$

Запишем $u(0)$ более подробно. Для этого сначала необходимо учесть формулы (8), (10), (11), (17) и проинтегрировать по v_z . Затем вводим новую переменную δ_0 вместо s в той части формулы (21), которая соответствует столкновениям электронов с границей. Связь δ_0 и s аналогична формуле (7):

$$s = (v/\omega_H) (\sin \delta - \sin \delta_0). \quad (23)$$

В оставшейся части формулы (21) интегрирование по s производится непосредственно.

Имея все это в виду и совершая несложные тождественные преобразования, находим

$$u(0) = -\frac{k_x \omega_0^2}{hc^2 (k_x + h)^2} W, \quad (24)$$

где

$$W = 1 + \frac{\mu m}{2\pi T (e^{-2\pi\mu} - 1)} \int_0^\infty v \exp[2i(hv/\omega_H)] dv \int_0^{2\pi} d\delta \int_{-\delta}^{\delta+2\pi} \Phi d\delta' -$$

$$\rightarrow \frac{i\hbar \mu m}{\pi \omega_H T} \int_0^\infty v^2 dv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp [-2i(\hbar v/\omega_H) \sin \delta_0] \cos \delta_0 d\delta_0 \int_{\delta_0}^{\pi - \delta_0} d\delta \times \quad (25)$$

$$\times \left\{ [\exp (\mu(2\delta_0 - \pi) + 2i(k_y v/\omega_H) \cos \delta_0) - 1]^{-1} \int_{\delta_0}^{\pi - \delta_0} + \int_{\delta_0}^{\delta} \right\} \Phi d\delta';$$

$$\Phi = \exp [- (mv^2/2T) + \mu(\delta - \delta') + i(k_y v/\omega_H) (\cos \delta - \cos \delta') + i(\hbar v/\omega_H) (\sin \delta + \sin \delta')]. \quad (26)$$

Коэффициент поглощения A определим как отношение средней энергии Q , поглощаемой единицей поверхности в единицу времени, к средней плотности потока энергии, падающей на плазму:

$$A = \frac{Q}{(c/8\pi) \cos \theta}. \quad (27)$$

Рассмотрим наиболее интересный случай запертой плазмы: $\varepsilon - \sin^2 \theta < 0$. Введем $x = k \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon}$, так что $h = ix$. Учитывая, что $Q = -(c/8\pi) \operatorname{Re}(E_z H_y^*)$, $H_y = -(1/ik) \frac{dE_z}{dx}$, а также имея в виду формулы (14), (22) и (24), приходим к следующему соотношению:

$$A = \frac{2k_x}{x} \operatorname{Im} W. \quad (28)$$

Разложим W в ряд по малым параметрам $k_y v/\omega_H$, $\hbar v/\omega_H$. При этом во втором слагаемом формулы (25) нужно брать четыре члена разложения, а в третьем — три. Вычисляя получающиеся интегралы, находим

$$A = \left(\frac{2T}{mc^2} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}\Omega \cos \theta}{(\Omega^2 - 1)^2} (\Omega \sqrt{\sin^2 \theta - \varepsilon} - \sin \theta)^2 \sum_{n=1}^{[\Omega]} \sin^3 \frac{n\pi}{\Omega}, \quad (29)$$

где $\Omega = \omega/\omega_H$, а $[\Omega]$ означает целую часть числа Ω .

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (29). Если $\theta = 0$ (нормальное падение), то

$$A = \left(\frac{2T}{mc^2} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}\Omega^3}{(\Omega^2 - 1)^2} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \sum_{n=1}^{[\Omega]} \sin^3 \frac{n\pi}{\Omega}. \quad (30)$$

Эта формула соответствует импедансу, вычисленному в работе [2], и при $1 < \Omega < 2$ отличается от полученной в [1] отсутствием множителя Ω^3 .

Если $H_0 = 0$ (изотропная плазма), то, учитывая соотношение

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^{[\Omega]} \sin^3 \frac{n\pi}{\Omega} = \frac{4}{3\pi}, \quad (31)$$

нетрудно получить:

$$A = 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{3/2} \cos \theta (\sin^2 \theta - \varepsilon). \quad (32)$$

Эта формула совпадает с результатом, полученным в работе Силина и Фетисова [7].

Поглощение, описываемое формулой (29), имеет порядок величины $(v/c)^3$ и происходит в диапазоне частот от $\omega = \omega_H$ до $\omega = \omega_0/\cos\theta$. Наиболее интересной особенностью коэффициента поглощения является его зависимость от знака угла падения. Это объясняется тем, что электрон между соударениями с границей движется преимущественно в положительном направлении оси y . Из формулы (29) видно, что волна, бегущая в направлении оси y , поглощается меньше, чем волна, бегущая в противоположном направлении. При этом для первой из них коэффициент поглощения обращается в нуль при $\omega = (\omega_0/\cos\theta) \times \sqrt{[1 - (\omega_H \sin\theta/\omega_0)^2]^{1/2}}$. Для нормального падения поглощение отсутствует при $\omega = \omega_0$ [2].

Автор признателен М. Л. Левину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Арсенин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 457 (1963).
2. Ю. В. Богомолов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 618 (1968).
3. M. C. Jones, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., 278, 256 (1964).
4. А. Н. Кондратенко, И. Н. Онищенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 175 (1967).
5. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
6. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 39, 845 (1960).
7. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
29 июля 1969 г.

ABSORPTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN BOUNDED MAGNETOACTIVE PLASMA

Yu. V. Bogomolov

The oblique incidence of electromagnetic wave on a semibounded magnetoactive plasma is considered. The constant magnetic field is parallel to the plasma boundary. The electric wave vector is perpendicular to the incidence plane and parallel to the constant magnetic field. The spatial dispersion is assumed weak. The absorption coefficient of a wave at mirror reflection of electrons from the plasma boundary has been calculated. The absorption is shown to depend on the sign of the wave incident angle.

УДК 621.371 : 538.57 : 535 31

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ «КВАЗИЗОТРОПНОГО» ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

O. H. Найда

Для поляризации электромагнитной волны, распространяющейся в слабоанизотропной среде, рассмотрено уравнение в «квазизотропном» приближении, предложенное Ю. А Кравцовым.

Показано, что хотя это уравнение в общем случае и не интегрируется в квадратурах, так как оно сводится к уравнению Риккати, но для некоторых важных частных случаев уравнение допускает быстро сходящиеся инерционные методы решения, причем каждый шаг итерации сводится к вычислению квадратур

Указанный метод развит для случаев, когда $|\epsilon_{ik} - \epsilon_{ki}| \gg |\epsilon_{ik} + \epsilon_{ki} - (2/3) \delta_{ik} \text{Sp } \epsilon|$, для противоположного случая, а также для случая, когда размер неоднородностей среды гораздо больше периода пространственных биений в волне. В последнем случае дана итерационная формула для поляризационных параметров волны, асимптотически переходящей в нормальную волну

Особенность применяемого метода заключается в том, что уравнение Кравцова записывается не в нормалах и бинормалах к лучу, как это сделано в первоначальной работе Кравцова, а в главных осах двумерной части тензора $\epsilon_{ik} + \epsilon_{ki}$, которая соответствует плоскости, перпендикулярной лучу. Показано, в частности, что уравнения Кравцова для случая произвольной (лишь бы не поглощающей) среды легко сводятся к тем же уравнениям для одномерного случая, когда $\epsilon_{ik} + \epsilon_{ki}$ не зависит от координат, луч и вектор гирации параллельны одной из осей тензора $\epsilon_{ik} + \epsilon_{ki}$ и лишь величина вектора гирации переменна зависит от одной координаты (вдоль луча)

1. Будем называть слабоанизотропной средой, у которой тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} удовлетворяет ограничению:

$|\nu_{ik}| \ll 1$, где ν_{ik} означает тензор: $\nu_{ik} = \epsilon_{ik} - \delta_{ik} \epsilon$, $\epsilon = (1/3) \text{Sp } \epsilon$. Тензор магнитной проницаемости будем считать равным δ_{ik} . Характерный масштаб неоднородности среды, соответствующий тензору $\nu_{ik}(r)$, обозначим через L . Среду будем считать стационарной.

Как известно, эффективный геометрооптический метод для расчета волн, распространяющихся в неоднородных слабоанизотропных средах, был предложен Кравцовым [1] («квазизотропное» приближение). Поскольку этот метод обладает более широкой областью применения и приводит к более простым уравнениям, чем используемый обычно метод взаимодействующих нормальных волн (см. [2], § 26 и цитированную там литературу), то представляет интерес вопрос о нахождении наиболее простых способов решения уравнений «квазизотропного» приближения, в частности, таких методов, которые в максимальной мере ограничивались бы взятием квадратур.

Оказывается, что предложенное в работе [1] уравнение для поляризационных параметров луча (а именно, уравнение (5) из [1]) может быть значительно упрощено, если переписать его не в тех осах, в которых оно получено в работе [1], т. е. не в нормалах и бинормалах к лучу, а в осах, совпадающих с главными осями эллипсов поляризации нор-

мальной волны, распространяющейся вдоль того же луча. В этом случае указанное уравнение сводится к уравнению Риккети с одной функцией-параметром, характеризующей отношение гиротропных и анизотропных свойств среды.

В настоящей работе быстро сходящиеся итерационные формулы для получения решений уравнений «квазиизотропного» приближения будут получены для следующих частных случаев.

а) Для случая, когда гиротропия гораздо больше пространственной анизотропии, т. е., когда выполняется

$$|\nu_{ik} - \nu_{ki}| \gg |\nu_{ik} + \nu_{kl}|. \quad (1)$$

б) Для противоположного случая.

в) Для случая, когда

$$|\nu_{ik} L| \gg \lambda, \quad (2)$$

где λ — длина волны. В последнем случае, как и в первых двух, предлагаемые формулы на каждом шаге итерации требуют лишь взятия квадратур, но не решения каких-либо дифференциальных уравнений, в отличие от метода взаимодействующих нормальных волн.

2. Выпишем уравнение, полученное в [1] для поляризационных параметров монохроматической волны:

$$k^{-1} \frac{d\theta}{d\sigma} = (kT)^{-1} + \frac{1}{4} i \varepsilon^{-1/2} [(\nu_{bn} - \nu_{nb}) + (\nu_{nb} + \nu_{bn}) \cos 2\theta - (\nu_{nn} - \nu_{bb}) \sin 2\theta]. \quad (3)$$

Индексы b, n соответствуют бинормали b и нормали n к лучу, T — радиус кручения луча, т. е. величина, определяемая формулой $\frac{db}{d\sigma} = T^{-1}n$, $d\sigma$ — элемент длины, $k = \omega/c$, ω — частота, $\theta = \operatorname{arctg}(E_b/E_n)$.

Произведем в уравнении (3) подстановку:

$$\begin{cases} \theta' = \theta - \varphi \\ \nu_{n'n'} - \nu_{b'b'} = (\nu_{nn} - \nu_{bb}) \cos^{-1} 2\varphi \\ \nu_{b'n'} - \nu_{n'b'} = (\nu_{bn} - \nu_{nb}) - 4i \varepsilon^{1/2} k^{-1} \left(T^{-1} - \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) \end{cases}, \quad (4)$$

где $\varphi(\sigma)$ — какое-либо непрерывное по σ решение уравнения

$$\operatorname{tg} 2\varphi = (\nu_{nb} + \nu_{bn}) / (\nu_{nn} - \nu_{bb}); \quad (5)$$

получаем

$$k^{-1} \frac{d\theta'}{d\sigma} = \frac{1}{4} i \varepsilon^{-1/2} [(\nu_{b'n'} - \nu_{n'b'}) - (\nu_{n'n'} - \nu_{b'b'}) \sin 2\theta']. \quad (6)$$

Если φ комплексно, т. е. ν_{ik} не эрмитово (напомним, что уравнение (3) может описывать также и поглощающие среды), то преобразование (4), (5) имеет чисто формальный смысл подстановки, приводящей к упрощению уравнения (3). Если же φ вещественно, то подстановка (4) означает ортогональное преобразование: $n' = n' \cos \varphi + b' \sin \varphi$, $b' = -n' \sin \varphi + b' \cos \varphi$, где n' , b' — главные оси двумерного тензора

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_{(n, b)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} & \frac{1}{2} (\varepsilon_{nb} + \varepsilon_{bn}) \\ \frac{1}{2} (\varepsilon_{bn} + \varepsilon_{nb}) & \varepsilon_{bb} \end{pmatrix}; \quad (7)$$

кроме того, подстановка (4) включает в себя и тривиальное преобразование над $\gamma_{b\mu} - \gamma_{n\mu}$, в результате которого геометрические факторы T и $\frac{d\phi}{d\sigma}$ оказались формально включенными в гиротропную часть тензора $\gamma_{i'k'}$.

Легко видеть, что θ' означает угол между вектором E и осью n' : $\tan \theta' = E_{b'} / E_{n'}$. Как будет ясно из дальнейшего, b' и n' дают направления эллипсов поляризации нормальных волн (получающихся при $\lambda \rightarrow 0$).

3. Легко видеть, что уравнение (6) решается в квадратурах в случаях, когда отсутствует либо симметричная, либо антисимметричная часть тензора $\epsilon_{(n, b)}$. Соответственно получаем из (6)

$$\theta' = \frac{1}{4} ik \int \epsilon^{-1/2} (\gamma_{b'n'} - \gamma_{n'b'}) d\sigma \quad (\gamma_{n'n'} - \gamma_{b'b'} = 0),$$

$$\ln \tan \theta' = - \frac{1}{2} ik \int \epsilon^{-1/2} (\gamma_{n'n'} - \gamma_{b'b'}) d\sigma \quad (\gamma_{b'n'} - \gamma_{n'b'}) = 0.$$

Первый из этих случаев, применительно к магнитоактивной плазме, был рассмотрен в [1].

В случае, когда одновременно отличны от нуля обе разности, $\gamma_{n'n'} - \gamma_{b'b'}$ и $\gamma_{b'n'} - \gamma_{n'b'}$, любая из них может быть исключена из уравнения (6) соответственно с помощью подстановок:

$$dy = \frac{1}{4} k \epsilon^{-1/2} (\gamma_{b'b'} - \gamma_{n'n'}) d\sigma,$$

$$dz = \frac{i}{4} k \epsilon^{-1/2} (\gamma_{b'n'} - \gamma_{n'b'}) d\sigma,$$

которые приводят уравнение (6) соответственно к виду

$$\frac{d\theta'}{dy} = i \sin 2\theta' + \alpha(y) \quad (8)$$

либо к виду

$$\frac{d\theta'}{dz} = 1 + i \beta(z) \sin 2\theta', \quad (9)$$

где обозначено

$$\alpha = i(\gamma_{b'n'} - \gamma_{n'b'}) (\gamma_{b'b'} - \gamma_{n'n'})^{-1}, \quad \beta = \alpha^{-1}.$$

Если ϵ эрмитово, то переменные y, z, α, β вещественны.

Легко видеть, что уравнение (8) соответствует одномерной задаче, в которой симметричная часть тензора γ_{ik} фиксирована, а меняется лишь антисимметричная часть, т. е. (в случае непоглощающей среды) фиксирована анизотропия в поперечных направлениях, а от σ зависит лишь вектор гирации, который здесь можно считать параллельным направлению распространения волны. Уравнение (9) соответствует одномерной задаче с фиксированным вектором гирации (параллельным направлению распространения волны), с фиксированными осями анизотропии, но с переменной разностью $\gamma_{n'n'} - \gamma_{b'b'}$.

Преобразованием $w = \tan \theta'$ уравнение (9) сводится к уравнению типа уравнения Риккати.

$$\frac{dw}{dz} = w^2 + 2i\beta w + 1, \quad (10)$$

которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах и лишь для некоторых $\beta(z)$ может быть проинтегрировано в известных специальных функциях (см. [3]).

4. Произведем в уравнении (10) подстановки:

$$w = e^{2iu}, \quad dz = \alpha dy; \quad (11)$$

$$w = (a + A)(1 + aA)^{-1}, \quad a = i(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}); \quad (12)$$

в уравнении (8) также произведем подстановку:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1, \quad \sin 2\theta_0 = i\alpha, \quad B = \operatorname{tg}(\theta_1/2). \quad (13)$$

В случае, если выполнено условие (2) и волну можно приближенно считать суперпозицией двух нормальных волн, величины a и A , фигурирующие в (12), имеют простой физический смысл: $|a|$ есть отношение между осями эллипсов поляризации у каждой из нормальных волн (напомним, что и в точной теории это отношение у обоих нормальных волн одинаково, см. [4]); $|A|$ есть отношение больших (либо малых) полуосей эллипсов поляризации нормальных волн, составляющих рассматриваемую волну; $\arg A$ есть фазовый сдвиг между соответствующими колебаниями. В случае, если волна, описываемая функцией $w(z)$, близка к нормальной, то $|A|$ стремится к нулю либо бесконечности, а величины θ_1, B , фигурирующие в (13), стремятся к нулю по мере приближения волны к нормальной.

В результате подстановок (11)–(13) получаем следующие равенства:

$$u(y) - u(y_0) = (y - y_0) - i \int_{y_0}^y \alpha(y) \cos 2udy; \quad (11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(z) = A(z_0) \exp \left[i \Phi(z) - \frac{i}{2} \int_{z_0}^z (A - A^{-1}) \delta(z) dz \right] \\ \Phi(z) = \int_{z_0}^z 2 \sqrt{1 + \beta^2} dz, \quad \delta(z) = (1 + \beta^2)^{-1} \frac{d\beta}{dz} \end{array} \right.; \quad (12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(y) = e^{-iF} \left[B(y_0) - \frac{1}{2} \int_{y_0}^y (1 + B^2) \frac{d\theta_0}{dy} e^{iF} dy \right] \\ F = \tilde{\Phi} + 4 \int_{y_0}^y \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \left(2\theta_0 + \frac{1}{2}\theta_1 \right) dy \end{array} \right.. \quad (13a)$$

$$\tilde{\Phi} = - \int 2 \cos 2\theta_0 dy$$

Легко видеть, что величины Φ и $\tilde{\Phi}$, фигурирующие в (12а) и (13а), с точностью до знака совпадают между собой, и Φ с относительной точностью порядка $|\gamma_{ik}|$ совпадает с разностью точных эйконалов нормальных волн, в чем нетрудно убедиться с помощью формул из [4].

Уравнения (11а)–(13а), наряду с уравнением

$$\theta'(z) - \theta'(z_0) = (z - z_0) + i \int_{z_0}^z \beta(z) \sin 2\theta' dz, \quad (14)$$

вытекающим непосредственно из (9), и представляют собой искомые итерационные формулы. Формула (11 а) дает быструю сходимость при малом отношении гиротропии к анизотропии ($|\alpha| \ll 1$), формула (14)—в противоположном случае, а формулы (12 а) и (13 а)—при выполнении условия (2). Формула (14) (в других обозначениях), в первом шаге итерации, для случая магнитоактивной плазмы рассматривалась в работе [1] (см. формулу (8) в этой работе).

Легко видеть, что уравнение (13 а) дает быструю сходимость при итерации в том случае, если волна близка к нормальной (т. е. $|B| \ll 1$, $|\theta_1| \ll 1$). Напротив, формула (12 а) дает в этом случае наихудшую итерационную сходимость, так как разность $(A - A^{-1})$ становится большой по модулю. Наилучшую итерационную сходимость формула (12 а) дает в том случае, если обе нормальные волны представлены в рассматриваемой волне с одинаковым весом; при этом, разумеется, предполагается выполненным условие (2).

Заметим, что формулы (11 а)–(13 а), (14) дают максимальную экономию вычислений (при численном интегрировании) в том случае, если при вычислении фигурирующих в этих формулах интегралов использовать методику, учитывающую периодичность подынтегрального выражения (см., например, [5] и цитированную там литературу).

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. А. Кравцова, В. П. Быкова и участников семинара за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, ДАН СССР, 183, 74 (1968).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1965.
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТГЛ, М., 1957.
5. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, изд. Наука, М., 1967

Поступила в редакцию
4 января 1970 г.

ON SOLUTIONS OF EQUATIONS OF QUASI-ISOTROPIC GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION

O. N. Naida

The equation in a quasi-isotropic approximation proposed by Yu. A. Kravtsov is considered for investigating the polarization of an electromagnetic wave propagating in a weakly-anisotropic medium. In the general case this equation is not integrated in quadratures but for some important particular cases it does admit rapidly converging iteration methods of solution, each step of iteration being reduced to calculating the quadratures. The method pointed out is developed in the approximation $|\epsilon_{ik} - \epsilon_{kl}| \gg |\epsilon_{jk} + \epsilon_{ki} - (2/3)\delta_{ik}\text{Sp } \epsilon|$. Besides, in the case when the dimension of the medium inhomogeneities is much greater than the period of spatial beats in a wave, the iteration formula is given for the polarization parameters of a wave asymptotically transforming into the normal wave.

The peculiarity of the applied method is that Kravtsov's equation is written not in normals and binormals to the ray, as it was in the original paper by Kravtsov but in the main axes of the two-dimensional part of the tensor $\epsilon_{ik} + \epsilon_{kl}$ and corresponds to the density perpendicular to the ray. Particularly, for the case of the arbitrary (if only absorbing) medium Kravtsov's equations are shown to be easily reduced to the same equations for the one-dimensional case when $\epsilon_{ik} + \epsilon_{kl}$ does not depend on the coordinate, the ray and vector gyration are parallel to one of the axes of the tensor $\epsilon_{ik} + \epsilon_{kl}$. The value of the gyration vector alone is dependent on one coordinate (along the ray).

УДК 538.56 · 519.25

РАССЕИВАЮЩИЙ ОБРАЗ СТАТИСТИЧЕСКИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

A. P. Жуковский

Рассматривается полная матрица диаграмм обратного рассеяния статистически шероховатой поверхности конечной проводимости при ее облучении эллиптически поляризованной электромагнитной волной. Выявляется роль основной и вторичных (в том числе резонансной) структур поверхности на характер диаграмм рассеяния. Показывается, что элементы матрицы, полученные на основе электродинамической теории рассеяния для сложной поверхности, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Вопрос о рассевающих свойствах шероховатых поверхностей при их облучении электромагнитными и звуковыми волнами в литературе рассматривался неоднократно путем экспериментальных исследований конкретных видов земной поверхности [1–4] и в плане создания теории рассеяния [5–7]. Отмечалось, что метод Кирхгофа дает угловые характеристики рассеяния, сравнимые с экспериментальными результатами, только для углов падения, близких к вертикальным [6]. Усложнение моделей реальных поверхностей (суперпозиция нескольких структур) приводит к сопоставимым с экспериментальными данными в большем угловом диапазоне [8, 9]. Однако в последних работах угловые характеристики рассеяния рассматриваются только для компонент поля, совпадающих по поляризации с излученным и при условии идеально проводящей поверхности. Вопрос о матрице рассеяния поставлен в [10] и решается в приближении теории возмущений. Как показано в [11], рассеяние от крупной волны в приближении [5], при обратном отражении дает нулевое значение деполяризованной компоненты поля даже для поверхностей конечной проводимости. Поэтому в [10] характеристики рассеяния деполяризованных компонент определяются только мелкой структурой поверхности и стремятся к нулю при углах облучения, близких к вертикальным. Подобные выводы не совпадают с экспериментальными исследованиями коэффициента деполяризации при квазивертикальном облучении в сантиметровом и дециметровом диапазонах волн. Хорошая систематизация литературного материала и оригинальные исследования содержатся в недавно опубликованной монографии [12]. Однако результаты ограничены углами облучения, близкими к вертикальным, и рассмотрением удельной эффективной площади отражения только для компонент поля, совпадающих по поляризации с излученным.

В настоящей статье на основе электродинамической теории рассеяния волн, изложенной в работе [11], строится полный рассеивающий образ сложной статистически шероховатой поверхности конечной проводимости в случае эллиптически поляризованной падающей волны.

МАТРИЦА ДИАГРАММ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ (ДОР)

При излучении эллиптически поляризованного поля и отражающей поверхности конечной проводимости наиболее общей характеристикой рассеяния является матрица ДОР M_G^0 (или, матрица удельных эффективных площадей рассеяния M_σ^0). Указанные матрицы представляют собой совокупность удельных дифференциальных сечений рассеяния, пропорциональных центральным моментам второго порядка рассеянных (некогерентных) составляющих компонент поля обратного рассеяния:

$$M_G^0 = \begin{vmatrix} G_{11}^0 & G_{12}^0 & | & G_{13}^0 & G_{14}^0 \\ G_{21}^0 & G_{22}^0 & | & G_{23}^0 & G_{24}^0 \\ \hline G_{31}^0 & G_{32}^0 & | & G_{33}^0 & G_{34}^0 \\ G_{41}^0 & G_{42}^0 & | & G_{43}^0 & G_{44}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{\text{вв}} & | & M_{\text{вг}} \\ \hline M_{\text{гв}} & | & M_{\text{гг}} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Индексы у элементов матрицы записаны в следующем порядке: $i = 1, 2, 3, 4$ соответственно для полей обратного рассеяния $\dot{E}_B^B, E_B^r, E_r^B, E_r^r$ (нижняя и верхняя буквы соответствуют поляризованным компонентам излученного и принятого полей). Матрица M_G^0 состоит из 4-х матриц: $M_{\text{вв}}, M_{\text{гг}}$ — матрицы ДОР для линейно поляризованных падающих полей, $M_{\text{вг}}, M_{\text{гв}}$ — перекрестных поляризаций.

Элементы матрицы G_{ij}^0 определяются как отношение плотности потока энергии соответствующих поляризаций, рассеянных единицей площади поверхности в направлении на приемную антенну $\Pi_{ij}(\theta, \varphi)$, к плотности потока при изотропном рассеянии $\Pi_{ij\text{ из}}$:

$$G_{ij}^0(\theta, \varphi) = \frac{\Pi_{ij}(\theta, \varphi)}{\Pi_{ij\text{ из}}} = \frac{d^2 M_2 \{ \dot{E}_i \dot{E}_j^* \} / S_{a_{ij}}}{(p_i^u p_j^u)^{1/2} E_{a_i}^0 E_{a_j}^0 E_{aN_i}(\theta, \varphi) E_{aN_j}(\theta, \varphi) \sigma_r \cos \theta / (4\pi R^2)^2}, \quad (2)$$

где $d^2 M_2 \{ \dot{E}_i \dot{E}_j^* \}$ — дифференциал от центральных моментов второго порядка поля обратного рассеяния [11]; $p_i^u, E_{a_i}^0, E_{aN_i}$ — мощности, КНД и нормированная диаграмма направленности антенн (ДНА) при одновременном излучении двух ортогональных линейно поляризованных компонент с разностью фаз δ ; σ_r — площадь элементарного участка поверхности.

Полагая характеристики ортогонально поляризованных приемо-передающих антенн одинаковыми, выразим эффективную площадь приемной антенны в виде $S_{a_{ij}} = E_{a_i}^0 E_{a_j}^0 E_{aN_i}^0 E_{aN_j}^0 \lambda^2 / 4\pi$ и, подставляя в (2), получим окончательно:

$$G_{ij}^0(\theta, \varphi) = \sigma_{ij}^0 \sec \theta = \frac{(4\pi)^3 R^2 d^2 M_2 \{ \dot{E}_i \dot{E}_j^* \}}{(p_i^u p_j^u)^{1/2} [E_{a_i}^0 E_{a_j}^0 E_{aN_i} E_{aN_j}]^2 \lambda^2 \sin \theta d\theta d\varphi}. \quad (3)$$

Поясним физический смысл элементов матрицы (1). При $i = j$, расположенные на главной диагонали матричные элементы представляют собой: G_{11}^0, G_{44}^0 — ДОР основных поляризаций, пропорциональные дифференциалам мощностей обратного рассеяния составляющих вертикальной и горизонтальной поляризаций и принимаемых на антены с соответствующими поляризациями; G_{22}^0, G_{33}^0 — ДОР ортогональных

поляризаций, пропорциональные дифференциалам мощностей деполяризованных компонент поля и принимаемых на вертикально (G_{3z}^0) и горизонтально (G_{2z}^0) поляризованные антенны. Все остальные элементы матрицы ($i \neq j$) — ДОР перекрестных поляризаций, пропорциональные дифференциалам взаимных мощностей компонент поля. Для элементов с индексами $ij = 12, 14, 23, 34$ (и их сопряженные) — прием на ортогонально поляризованные антенны, а при $ij = 24, 13$ (и их сопряженные) — на антенны с горизонтальной и вертикальной поляризациями соответственно. Характер угловой зависимости элементов матрицы (3) определяется как статистикой поверхности при конкретных ее электрических характеристиках, так и принятой моделью поверхности. Используя интегральную форму записи центральных моментов поля [11] в формуле (3), приведем исходные выражения для элементов матрицы ДОР наиболее целесообразных моделей двумерных статистически шероховатых поверхностей конечной проводимости.

1. Крупномасштабная ($\rho_0/\lambda \gg 1$), плавная ($\rho_{kp}/\lambda \gg 1$), пологая ($(\nabla \zeta_1)^2 \ll 1$) поверхность:

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(\theta, \varphi) &= 4\pi\lambda^{-2} \sec \theta S(\theta, \varphi, \beta_{1x}, \beta_{1y}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i2k \sin \theta (\Delta x \cos \varphi + \Delta y \sin \varphi)] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int F_i(\zeta'_{1x}, \zeta'_{1y}; \theta, \varphi; v) F_j^*(\zeta'_{1xr}, \zeta'_{1yr}; \theta_r, \varphi_r; v) \exp [-i2k \cos \theta (\zeta_{1r} - \zeta)] \times \quad (4) \\ &\times W_6(\zeta_1, \zeta_{1r}, \zeta'_{1x}, \zeta'_{1y}, \zeta'_{1xr}, \zeta'_{1yr}; \Delta x, \Delta y) d\zeta_1 d\zeta_{1r} d\zeta'_{1x} d\zeta'_{1y} d\zeta'_{1xr} d\zeta'_{1yr} d\Delta x d\Delta y. \end{aligned}$$

2. Мелкомасштабная ($\rho_0/\lambda \ll 1$), слабошероховатая ($\sigma_0/\lambda \ll 1$) поверхность с $(\nabla \zeta_2)^2 \ll 1$ и нулевым средним $\bar{\zeta}_2 = 0$:

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(\theta, \varphi) &= (4\pi)^3 \lambda^{-4} \sec \theta (1 - v)^2 B_i(\theta, v) B_j(\theta, v) \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i2k \sin \theta (\Delta x \cos \varphi + \quad (5) \\ &+ \Delta y \sin \varphi)] \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \zeta_{2r} W_2(\zeta_2, \zeta_{2r}; \Delta x, \Delta y) d\zeta_2 d\zeta_{2r} d\Delta x d\Delta y. \end{aligned}$$

3. Мелкомасштабная, слабошероховатая поверхность со средним значением высоты, определяемым крупномасштабной структурой $\bar{\zeta}_2 = \zeta_1$:

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(\theta, \varphi) &= (4\pi)^3 \lambda^{-4} \sec \theta (1 - v)^2 S(\theta, \varphi, \beta_{1x}, \beta_{1y}) \int_{-\infty}^{\infty} L_i(\zeta'_{1x}, \zeta'_{1y}; \theta, \varphi; v) L_j \times \\ &\times (\zeta'_{1x}, \zeta'_{1y}; \theta, \varphi; v) W_2(\zeta'_{1x}, \zeta'_{1y}) d\zeta'_{1x} d\zeta'_{1y} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i2k \sin \theta (\Delta x \cos \varphi + \quad (6) \\ &+ \Delta y \sin \varphi)] \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \zeta_{2r} W_2(\zeta_2, \zeta_{2r}; \Delta x, \Delta y) d\zeta_2 d\zeta_{2r} d\Delta x d\Delta y. \end{aligned}$$

В формулах (4) — (6), $\rho_0, \rho_{kp}, \sigma$ — радиусы корреляции, кривизны и среднеквадратические высоты соответствующих структур поверхности; $S(\theta, \varphi, \beta_{1x}, \beta_{1y})$ — функция затенения поверхности, определяемая среднеквадратическими значениями углов наклона β_{1x}, β_{1y} крупномасштабной структуры; W_k — k -мерные законы распределения случайных высот $\zeta_n(x, y)$, тангенсов углов наклона ζ_{1x}, ζ_{1y} крупномасштабной поверхности; $r = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ — пространственный интервал; $v = 1/\epsilon$, ϵ — диэлектрическая проницаемость.

Подынтегральные функции в (4), (6), связанные с производными ζ'_{1x} , ζ'_{1y} , определяются выражениями:

$$F_{1(4)} = +(-) \frac{(\cos \theta + \gamma \sin \theta) [F_{b(r)} (\sin \theta - \gamma \cos \theta)^2 - F_{r(b)} \eta^2]}{|n_0|^2 - (\cos \theta + \gamma \sin \theta)^2}; \quad (7)$$

$$F_2 = F_3 = (F_b + F_r) \frac{\eta (\sin \theta - \gamma \cos \theta) (\cos \theta + \gamma \sin \theta)}{|n_0|^2 - (\cos \theta + \gamma \sin \theta)^2}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= |n_0| \left(\frac{\cos \theta + \gamma \sin \theta}{|n_0| + \sqrt{v} (\cos \theta + \gamma \sin \theta)} \right)^2 \left(1 + \frac{2 [|n_0| + \sqrt{v} (\cos \theta + \gamma \sin \theta)]}{|n_0| [\sqrt{v} |n_0| + \cos \theta + \gamma \sin \theta]^2} \times \right. \\ L_4 &\left. \times \frac{(\sin \theta - \gamma \cos \theta)^2}{\eta^2} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$L_2 = L_3 = \frac{2 (\cos \theta + \gamma \sin \theta)^2 (\gamma \cos \theta - \sin \theta) \eta}{[|n_0| + \sqrt{v} (\cos \theta + \gamma \sin \theta)] [\sqrt{v} |n_0| + \cos \theta + \gamma \sin \theta]^2}, \quad (10)$$

$$\text{где } F_b = \frac{\cos \theta + \gamma \sin \theta - \sqrt{v} |n_0|}{\cos \theta + \gamma \sin \theta + \sqrt{v} |n_0|}, \quad F_r = \frac{\sqrt{v} (\cos \theta + \gamma \sin \theta) - |n_0|}{\sqrt{v} (\cos \theta + \gamma \sin \theta) + |n_0|}$$

случайные локальные коэффициенты отражения,

$$|n_0| = (1 + \zeta'^2_{1x} + \zeta'^2_{1y})^{1/2}; \quad \gamma = \zeta'_{1x} \cos \varphi + \zeta'_{1y} \sin \varphi; \quad \eta = \zeta'_{1x} \sin \varphi - \zeta'_{1y} \cos \varphi.$$

Дальнейшая конкретизация решений (4) — (6) возможна при задании вида законов распределения.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦЫ ДОР ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЫСОТ И ГРАДИЕНТА ПОВЕРХНОСТИ

Распределения высот ζ и градиента $\nabla \zeta$ многих реальных поверхностей хорошо описываются нормальными законами. Мы это и будем полагать в формулах (4) — (6) для разных моделей поверхности. Пространственные корреляционные функции поверхностей примем изотропными и гауссовыми с соответствующими значениями σ_k и ρ_{0k} :

$$B_k = \sigma_k^2 \exp \left(-\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\rho_{0k}^2} \right).$$

Используем в (7) — (10) разложение по степеням производных ζ'_{1x} , ζ'_{1y} крупномасштабного профиля поверхности [11].

В результате интегрирования (4) — (6) получим окончательные решения для элементов матрицы ДОР.

1. Крупномасштабная, сильношероховатая ($(2k \sigma_1 \cos \theta)^2 \gg 1$) поверхность

Во «втором» (по ζ'_{1x} , ζ'_{1y}) приближении

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(2)} &= \frac{\sec^3 \theta}{2 \operatorname{tg}^2 \beta_{ck}} \exp(-z) S(\theta, \varphi, \beta_{ck}) \left\{ a_i a_j + \operatorname{tg}^2 \beta_{ck} [b_i b_j (1 - A_1) + \right. \\ &+ 2(a_i c_j + a_j c_i)] + 4 \operatorname{tg}^4 \beta_{ck} [c_i c_j (1 - A_2) + (c_i d_j + c_j d_i) \frac{2z}{q^2} \times \quad (11a) \\ &\times \cos^2 2\varphi (1 - A_3) + d_i d_j (1 - A_4)] \} \quad (ij = 11; 14; 41; 44); \end{aligned}$$

$$G_{ij}^{0(2)} = \frac{\sec^3 \theta}{2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}}} \exp(-z) S(\theta, \varphi, \beta_{\text{ск}}) \left\{ \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}} b_i b_j \left(1 - \frac{1}{q^2} \right) + 4 \operatorname{tg}^4 \beta_{\text{ск}} d_i d_j \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \frac{2}{q^2} \left[1 - z - \frac{1}{2q^2} \left[1 - 2z + (1-z) \sin^2 2\varphi + \frac{3}{4} z^2 \sin^2 4\varphi \right] \right] \right\} \right\} \quad (11\text{a})$$

$(ij = 22; 23; 32; 33);$

$$G_{ij}^{0(2)} = \frac{\sec^3 \theta}{2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}}} \exp(-z) S(\theta, \varphi, \beta_{\text{ск}}) \left\{ \frac{2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}}}{q^2} \sin 4\varphi \left\{ c_i d_j \operatorname{tg}^2 \theta \left[1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{q^2} (3-z) \right] + \frac{d_i d_j}{q^2} [\operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}} - \operatorname{tg}^2 \theta + z \operatorname{tg}^2 \theta (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi - \sin^2 2\varphi)] \right\} \right\} \\ \left(\begin{array}{l} ij = 12; 13; 21; 31 \\ 43; 42; 34; 24 \end{array} \right), \quad (11\text{b})$$

где

$$\beta_{\text{ск}} = \beta_{1x} = \beta_{1y}; q = 4\pi(\sigma_1/\lambda) \cos \theta; z = \operatorname{tg}^2 \theta / 2 \operatorname{tg}^2 \beta_{\text{ск}};$$

$$A_1 = (1/q^2)(1+2z); A_2 = (2/q^2)[1 - z - (1/q^2)(2-4z+z^2)]; A_3 = (1/q^2)(3-z); \\ A_4 = (2/q^2) \{ 1 - z - (1/2q^2) [(1-2z+z^2/2)(1+\cos^2 2\varphi) + \\ + (1/2)(z^2/q^4)(3\cos^2 2\varphi - 1)\cos 4\varphi] \}.$$

Коэффициенты $a, b, c, d = f(\theta, \nu)$ и приведены в [11]. Отметим, что при $q^2 \gg 1$ формулы (11 а), (11 б) можно значительно упростить. В силу того же условия значения ДОР перекрестных поляризаций (11 в) весьма малы. Для элементов матрицы ДОР в «первом» приближении $G_{ij}^{0(1)}$ надо в (11) положить коэффициенты $c = d = 0$. При этом ДОР перекрестных поляризаций (11 в) равны нулю. При «нулевом» приближении $G_{ij}^{0(0)}$ в (4) не учитывается распределение градиента поверхности ($\zeta'_{1x} = \zeta'_{1y} = 0$), откуда $F_i F_j^* = a_i a_j$. Следовательно, из всех элементов матрицы можно определить только (11 а).

2. Мелкомасштабная, слабошероховатая поверхность с $(\bar{\zeta}_2 = 0)$

$$G_{ij}^0 = 64 \pi^4 (1-\nu)^2 \sec \theta \left(\frac{\sigma_2}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\rho_{0,2}}{\lambda} \right)^2 \exp \left[- \left(2\pi \frac{\rho_{0,2}}{\lambda} \sin \theta \right)^2 \right] B_i(\theta, \nu) B_j(\theta, \nu) \\ (ij = 11; 14; 41, 44); \quad (12\text{a})$$

$$(12\text{b}) G_{ij}^0 \equiv 0 \quad (12\text{c})$$

— для всех остальных сочетаний ij .

Значения коэффициентов $B(\theta, \nu)$ приведены в Приложении.

3. Мелкомасштабная, слабошероховатая поверхность с $(\bar{\zeta}_2 = \zeta_1)$

$$G_{ij}^0 = 64 \pi^4 (1-\nu)^2 \sec \theta \left(\frac{\sigma_2}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\rho_{0,2}}{\lambda} \right)^2 \exp \left[- \left(2\pi \frac{\rho_{0,2}}{\lambda} \sin \theta \right)^2 \right] \times \\ \times S(\theta, \varphi, \beta_{1x} \beta_{1y}) J_{ij}(\theta, \varphi, \beta_{1x}, \beta_{1y}, \nu), \quad (13)$$

где при статистически анизотропной крупномасштабной поверхности:

$$J_{ij} = B_i B_j + \operatorname{tg}^2 \beta_{1x} Q_{ij}^{(1)} + \operatorname{tg}^2 \beta_{1y} Q_{ij}^{(2)} + \operatorname{tg}^2 \beta_{1x} \operatorname{tg}^2 \beta_{1y} Q_{ij}^{(3)} + \\ + 3 (\operatorname{tg}^4 \beta_{1x} Q_{ij}^{(4)} + \operatorname{tg}^4 \beta_{1y} Q_{ij}^{(5)}) \quad (ij = 11; 14; 41; 44); \quad (14\text{a})$$

$$J_{ij} = \cos^2\theta \{ [\sin^2\varphi \operatorname{tg}^2\beta_{1x} + \cos^2\varphi \operatorname{tg}^2\beta_{1y}] D_2^2 + [2(2\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi) \times \\ \times \operatorname{tg}^2\beta_{1x} \operatorname{tg}^2\beta_{1y} + 3 \sin^2 2\varphi (\operatorname{tg}^4\beta_{1x} + \operatorname{tg}^4\beta_{1y})] I_2^2 \} \quad (ij = 22; 23; 32; 33); \quad (146)$$

$$J_{ij} = \cos\theta \sin 2\varphi [(\operatorname{tg}^2\beta_{1x} - \operatorname{tg}^2\beta_{1y}) Q_{ij}^{(1)} - \operatorname{tg}^2\beta_{1x} \operatorname{tg}^2\beta_{1y} Q_{ij}^{(2)} + \\ + 3(\operatorname{tg}^4\beta_{1x} Q_{ij}^{(3)} - \operatorname{tg}^4\beta_{1y} Q_{ij}^{(4)})] \quad \begin{cases} ij = 12; 13; 21; 31 \\ 43; 42; 34; 24 \end{cases}. \quad (14b)$$

При статистически изотропной крупномасштабной поверхности:

$$J_{ij} = B_i B_j + \operatorname{tg}^2\beta_{ck} (Q_{ij}^{(1)} + Q_{ij}^{(2)}) + \operatorname{tg}^4\beta_{ck} [Q_{ij}^{(3)} + 3(Q_{ij}^{(4)} + Q_{ij}^{(5)})] \quad (15a)$$

$$(ij = 11; 14; 41; 44);$$

$$J_{ij} = \cos^2\theta (\operatorname{tg}^2\beta_{ck} D_2^2 + 4\operatorname{tg}^4\beta_{ck} I_2^2) \quad (ij = 22; 23; 32; 33); \quad (156)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{2} \cos\theta \sin 4\varphi I_2 \operatorname{tg}^4\beta_{ck} \begin{cases} N_1 & ij = 12; 13; 21; 31 \\ (I_4 - N_4) & 43; 42; 34; 24 \end{cases}. \quad (15b)$$

В формулах (14), (15) введены сокращения

$$Q_{11}^{(1)} (Q_{11}^{(2)}) = \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) [D_1^2 + 2B_1 N_1] + 2B_1 I_1,$$

$$Q_{11}^{(3)} = 2I_1(I_1 + N_1) + \frac{3}{2} N_1^2 \sin^2 2\varphi,$$

$$Q_{11}^{(4)} (Q_{11}^{(5)}) = [I_1 + N_1 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi)]^2,$$

$$Q_{44}^{(1)} (Q_{44}^{(2)}) = \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) [D_4^2 + 2B_4 I_4] + \sin^2\varphi (\cos^2\varphi) N_4 + P_4,$$

$$Q_{44}^{(3)} = 2(I_4 \cos^2\varphi + N_4 \sin^2\varphi + P_4) (I_4 \sin^2\varphi + N_4 \cos^2\varphi + P_4) + T_4^2 \sin^2 2\varphi,$$

$$Q_{44}^{(4)} (Q_{44}^{(5)}) = [I_4 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) + N_4 \sin^2\varphi (\cos^2\varphi) + P_4]^2,$$

$$Q_{14}^{(1)} (Q_{14}^{(2)}) = [B_1 I_4 + B_4 N_1 + D_1 D_4] \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) + B_1 [P_4 + N_4 \sin^2\varphi (\cos^2\varphi)] + B_4 I_1,$$

$$Q_{14}^{(3)} = I_1(I_4 + N_4 + 2P_4) + N_1 \left[\left(T_4 + \frac{1}{2} I_4 \right) \sin^2 2\varphi + N_4 (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) + P_4 \right],$$

$$Q_{14}^{(4)} (Q_{14}^{(5)}) = [I_1 + N_1 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi)] [I_4 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) + N_4 \sin^2\varphi (\cos^2\varphi) + P_4],$$

$$Q_{12}^{(1)} = B_1 I_2 - \frac{1}{2} D_1 D_2; \quad Q_{12}^{(2)} = 3N_1 I_2 \cos 2\varphi, \quad Q_{12}^{(3)} (Q_{12}^{(4)}) = I_2 [I_1 + N_1 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi)],$$

$$Q_{43}^{(1)} = B_4 I_2 - \frac{1}{2} D_4 D_2, \quad Q_{43}^{(2)} = I_2 (I_4 - N_4 + 2T_4) \cos 2\varphi,$$

$$Q_{43}^{(3)} (Q_{43}^{(4)}) = I_2 [I_4 \cos^2\varphi (\sin^2\varphi) + N_4 \sin^2\varphi (\cos^2\varphi) + P_4].$$

Коэффициенты $B, D, I, N, P, T = f(\theta, \nu)$ и их значения приведены в Приложении.

Анализ формул (11 а), (11 б) показывает, что при $q^2 \gg 1$ элементы матрицы ДОР основных, ортогональных и перекрестных (вида $ij = 14, 41, 23, 32$) поляризаций крупномасштабной структуры поверхности, помимо ϵ , практически зависят только от одной статистической характеристики поверхности—угла наклона β_{ck} . Элементы ДОР остальных перекрестных поляризаций (11 в) связаны как с β_{ck} , так и обратно пропорциональны относительной шероховатости q .

Элементы матрицы ДОР мелкомасштабной поверхности с $\zeta_2 = 0$ полностью определяются двумя статистическими характеристиками: относительными шероховатостью σ_2/λ и корреляцией ρ_{02}/λ . Отметим, что используемое при анализе рассеянного поля первое (по ζ_2) приближение и условие $\zeta_2 = 0$ приводят к такому результату, когда кроме основных и перекрестных ($ij = 14; 41$) ДОР остальные элементы дают нулевые значения (12 б). Следовательно, в рассматриваемом приближении деполяризацию волны определить невозможно.

Если мелкомасштабная поверхность ζ_2 располагается на крупномасштабной ζ_1 и, следовательно, средняя высота $\bar{\zeta}_2 = \zeta_1$, то элементы матрицы ДОР от такой структуры (13) определяются статистическими параметрами обоих профилей: σ_2/λ , ρ_{02}/λ , β_{1x} , β_{1y} , а также весьма сложной зависимостью от ε .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов дает модель в виде суперпозиции крупномасштабного рельефа — основной структуры (11) и мелкомасштабного — вторичных структур (13). Тогда элементы матрицы ДОР выражаются в виде суммы

$$(G_{ij}^0)_{\Sigma} = (G_{ij}^0)_{\text{осн}} + (G_{ij}^0)_{\text{вт.}}$$

Результаты расчетов G_{ij}^0 для статистически изотропной морской поверхности представлены на рис. 1—3. Известно, что основным фактором, определяющим состояние водной поверхности, является скорость ветра v_b . В нашей модели изменение v_b функционально связано с изменением угла наклона основной структуры поверхности: $\beta_{\text{ск}} = 6, 12, 18^\circ$ приблизительно соответствует $v_b = (1-1,5), (5-6)$ и $>14 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Вторичные структуры (мелкие волны, рябь, пена и т. п.), образующиеся на поверхности основной структуры в результате воздействия местной турбулентности атмосферы, характеризуются параметром относительной корреляции ρ_{02}/λ , причем принято $\sigma_2/\lambda \sim 0,1 \rho_{02}/\lambda$.

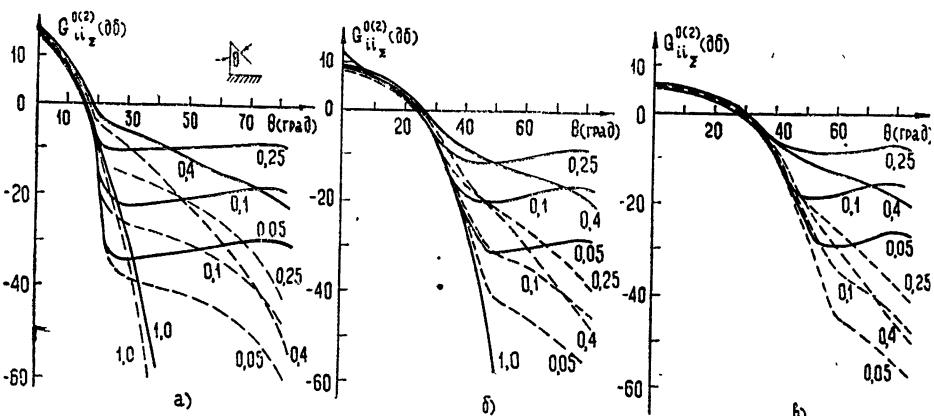
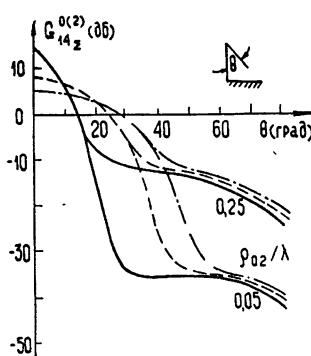


Рис. 1. а) ДОР основных поляризаций от морской поверхности при угле наклона $\beta_{\text{ск}} = 6^\circ$, $\varepsilon = 65 + j31$, $\lambda = 3,2 \text{ см}$ и различных значениях параметра ρ_{02}/λ : $ii = 11$, $ii = 44$.

б). То же, что и на рис. а, но при $\beta_{\text{ск}} = 12^\circ$.

в). То же, что и на рис. а, но при $\beta_{\text{ск}} = 18^\circ$.



ДОР основных G_{11z}^0 , G_{44z}^0 (рис. 1 а, б, в), а также перекрестной $G_{14z}^0 = G_{41z}^0$ (рис. 2) поляризаций имеют два достаточно хорошо выраженных участка: главный лепесток ДОР (у углов, близких к вертикали) и боковой слабонаправленный лепесток.

Рис. 2. ДОР перекрестных поляризаций от морской поверхности при $\beta_{\text{ск}} = 6, 12, 18^\circ$:
 — $\beta_{\text{ск}} = 6^\circ$; — $\beta_{\text{ск}} = 12^\circ$;
 -·-. $\beta_{\text{ск}} = 18^\circ$.

При увеличении степени волнения водной поверхности главный лепесток расширяется и уменьшается абсолютная величина $G_{ij}^0(\theta = 0)$. Определяющей в формировании главного лепестка, имеющего ширину $\Delta\theta \sim 20^\circ$ ($\beta_{\text{ск}} = 6^\circ$), 30° ($\beta_{\text{ск}} = 12^\circ$) и 40° ($\beta_{\text{ск}} = 18^\circ$), является основная структура поверхности: $G_{\text{осн}}^0 \gg G_{\text{вт}}^0$. Поэтому согласно (11 а) и в силу последнего неравенства поляризационная и частотная зависимости G_{ijz}^0 на этом участке выражены весьма слабо. Боковой лепесток формируется, в основном, вторичной структурой поверхности ($G_{\text{вт}}^0 \gg G_{\text{осн}}^0$), и, согласно (13), (14 а), имеет сильно выраженную поляризационную и частотную зависимости. Для одинаковых параметров ρ_{02}/λ при углах $\theta = 70$ — 80° мощность сигнала обратного рассеяния при вертикальной поляризации на 20 — 27 дБ соответственно больше, чем при горизонтальной. Экспериментальные результаты дают разницу в 22 дБ [1], что хорошо согласуется с нашими данными. С повышением волнения несколько увеличивается уровень рассеяния и на скользящих углах падения, что объясняется увеличением крутизны $\operatorname{tg} \beta_{\text{ск}}$ основной структуры (15 а), и, следовательно, более благоприятными условиями обратного рассеяния волн от вторичной структуры, находящейся на поверхности основной. В то же время, повышение уровня отражения на скользящих углах меньшее, чем понижение уровня на вертикальных углах падения. Эта разница является следствием эффекта затенения $S(\theta, \beta_{\text{ск}})$ части отражающей поверхности на скользящих углах падения.

Специалистам известен эксперимент по выявлению зависимости отраженного сигнала от вторичной структуры морской поверхности, при котором сравнивались интенсивности отражения от участков чистого моря и залитого нефтью [4]. Было установлено, что при $\theta = 30^\circ$, $v_b \sim 2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ отношение средних мощностей сигналов, отраженных от чистого моря и нефтяного пятна, порядка +9 дБ. Подобный результат можно получить и на основе теории. Скорости ветра $2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ соответствует $\beta_{\text{ск}} \sim 8^\circ$. Подставляя последнее значение в (11 а), получим $G_{44z \text{ осн}}^0(\theta = 30^\circ) \approx -23,7$ дБ. С учетом вторичной структуры поверхности (13), (15а) при $\rho_{02}/\lambda = 0,25$ результирующая ДОР $-G_{44z}^0(\theta = 30^\circ) \approx -15$ дБ. Следовательно, отношение $G_{44z}^0/G_{44z \text{ осн}}^0 = +8,75$ дБ, что совпадает с результатами эксперимента.

Элементы матрицы ДОР ортогональных поляризаций $G_{22z}^0 = G_{33z}^0 = G_{32z}^0 = G_{23z}^0$ представлены на рис. 3 а, б, в. При вертикальных углах облучения уровень элементов ДОР определяется основной структурой поверхности (11 б), причем увеличение наклона поверхности под-

нимает абсолютный уровень ДОР ортогональных поляризаций. Влияние вторичной структуры (13), (15б) сказывается весьма сильно, приводя к общему подъему уровня ДОР с увеличением θ . Особо следует подчеркнуть практически изотропный характер ДОР при $\rho_{02}/\lambda = 0,25$. Для всех углов облучения ярко выражена частотная зависимость ДОР

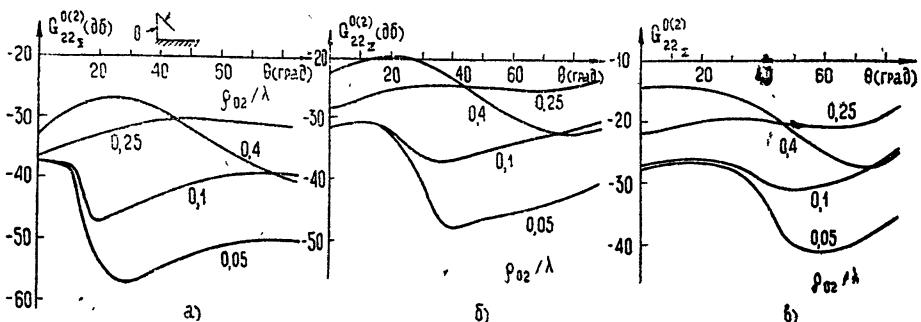


Рис. 3. а) ДОР ортогональных поляризаций от морской поверхности при угле наклона $\beta_{ск}=6^{\circ}$.

б) То же, что и на рис. а, но при $\beta_{ск}=12^{\circ}$.

в) То же, что и на рис. а, но при $\beta_{ск}=18^{\circ}$.

деполяризованных компонент. В то же время поляризационная зависимость отсутствует. Последний результат противоположен подобной же зависимости для ДОР основных поляризаций.

Подчеркнем общую для всех элементов матрицы закономерность формирования ДОР при вариациях величины относительной корреляции ρ_{02}/λ вторичной структуры поверхности. Из всех графиков рис. 1, 2, 3 следует, что увеличение ρ_{02}/λ от 0,05 до 0,25 приводит к подъему уровня обратного рассеяния. Однако дальнейшее увеличение ρ_{02}/λ до 0,4 начинает менять форму ДОР: повышается уровень рассеяния на углах, близких к вертикальным, и понижается при больших θ , причем эта тенденция проявляется в одинаковой мере при вертикальной и горизонтальной поляризациях. Объясним физическую сущность вышеизложенной картины. Применимально к водной поверхности при данной силе и скорости ветра на море образуются волны разной длины. Максимальное (разностное) обратное рассеяние при любой излучаемой поляризации образуют те волны, длина которых $l \sim 2\rho_0, \sim \lambda/2$, т. е. $\rho_{02}/\lambda \sim 0,25$. Для значений $\rho_{02}/\lambda < 0,25$ общий уровень ДОР снижается. Когда же $\rho_{02}/\lambda > 0,25$, то мелкие неровности поверхности становятся более «плоскими» и начинает формироваться рассеяние по закону равенства углов падения и отражения. Естественно, что при этом уровень ДОР при скользящих углах падает ($\rho_{02}/\lambda = 0,4$). Если $\rho_{02}/\lambda \geq 1$, то вторичная структура уже практически не формирует боковой лепесток (рис. 1а), а отражение обусловлено главным образом основной структурой (основной лепесток ДОР).

Отметим, что все вышеизложенное можно перенести и на земную поверхность с соответствующей сложной структурой. Реальные статистически шероховатые поверхности представляют собой суперпозицию образований с различными ρ_{0k}/λ . Однако основной вклад в обратное рассеяние при углах, отличных от вертикальных, вносят только те структуры, линейные размеры которых соизмеримы с $\lambda/2$.

Остановимся на ДОР от поверхности с очень крутыми наклонами.

На рис. 4 представлены элементы матрицы основных и ортогональных поляризаций при $\beta_{ск} = 45^{\circ}$, $\rho_{02}/\lambda = 0,25$ и $\epsilon = 3,2$, что прибли-

зительно соответствует местностям с сухим травяным покровом, пустыне с крупными барханами и лесистой*.

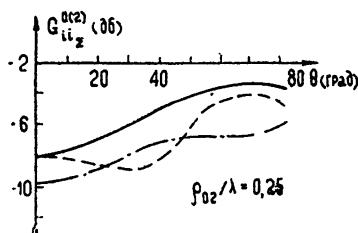


Рис. 4. ДОР основных и ортогональных поляризаций от земной поверхности с $\beta_{ск} = 45^\circ$, $\epsilon = 3,2 + j 0,0142$, $\rho_{02}/\lambda = 0,25$, $\lambda = 3,2$ см;

— G_{11}^0 , - - - G_{44}^0 , - · - - G_{22}^0 .

Из графиков следует, что поляризационная и частотная зависимости для всех углов облучения θ выражены очень слабо. Разница в ДОР при вертикальной и горизонтальной поляризациях не более 2–3 дБ. Уровень ДОР ортогональных поляризаций в среднем всего на 2–4 дБ меньше, чем основных. Общий характер угловой зависимости всех элементов матрицы ДОР показывает, что отражение практически изотропное, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами [2].

В заключение отметим, что рассмотренная в статье матрица ДОР является основой для анализа матрицы когерентности сигнала обратного рассеяния и различных поляризационных параметров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения коэффициентов в формулах (12)–(15):

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_0/\beta_0; \quad D_1 = (\alpha_1 - \beta_1 B_1)/\beta_0; \quad I_1 = (\alpha_3 - \beta_3 B_1)/\beta_0; \quad N_1 = (\alpha_2 - \beta_2 B_1 - \beta_1 D_1)/\beta_0; \\ B_4 &= \gamma_0/\beta_0; \quad D_4 = (\gamma_1 - \beta_1 B_4)/\beta_0; \quad I_4 = (\gamma_2 - \beta_1 D_4 - \beta_2 B_4)/\beta_0; \quad N_4 = \gamma_3/\beta_0; \\ P_4 &= (\gamma_4 - \beta_3 B_4)/\beta_0; \quad T_4 = I_4 - \gamma_3/\beta_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (1 + \sin^2 \theta + \nu) \cos^2 \theta + 2 \sqrt{\nu} \cos^3 \theta (1 + \sin^2 \theta), \quad \alpha_1 = \sin 2\theta [2 \sin^2 \theta + \\ &+ \sqrt{\nu} \cos \theta (1 + 5 \sin^2 \theta) + \nu], \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = 2(1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + 2 \sqrt{\nu} \cos \theta (1 - 5 \sin^2 \theta \cos 2\theta) + \nu \sin^2 \theta,$$

$$\alpha_3 = (1/2) \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta + 4 \sqrt{\nu} \cos \theta + 3 \nu),$$

$$\beta_0 = (1 + \nu^2) \cos^2 \theta + \nu (1 + 4 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) + 2 \sqrt{\nu} (1 + \nu) \cos \theta (1 + \cos^2 \theta),$$

$$\beta_1 = \sin 2\theta [1 + \nu^2 + 2\nu (2 + \cos^2 \theta)] + 2 \sqrt{\nu} (1 + \nu) \sin \theta (1 + 3 \cos^2 \theta),$$

$$\beta_2 = \sin^2 \theta [1 + 6 \sqrt{\nu} (1 + \nu) \cos \theta + 2 \nu (2 + 3 \cos^2 \theta) + \nu^2],$$

$$\beta_3 = (1 + \nu^2) \cos^2 \theta + \sqrt{\nu} (1 + \nu) \cos \theta (3 + \cos^2 \theta) + 2\nu (1 + 2 \cos^2 \theta),$$

$$\gamma_0 = \cos^2 \theta (\cos \theta + \sqrt{\nu})^2, \quad \gamma_1 = \sin 2\theta (2 \cos^2 \theta + 3 \sqrt{\nu} \cos \theta + \nu),$$

$$\gamma_2 = \sin^2 \theta [6 \cos \theta (\cos \theta + \sqrt{\nu}) + \nu], \quad \gamma_3 = 2 \cos^2 \theta (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta),$$

$$\gamma_4 = (1/2) \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + 4 \sqrt{\nu} \cos \theta + 3 \nu),$$

* Под $\beta_{ск}$ леса следует понимать среднеквадратический угол наклона листвы, хвои, веток и т. п. отражателей, эффективно участвующих в рассеянии волн.

$$D_2 = \sin 2\theta/\mu_0, I_2 = \{ 1 - 3 \sin^2 \theta + (1/2) D_2 \sin \theta [2(1+2\nu) \cos \theta + \\ + 3\sqrt{\nu} \cos^2 \theta + \sqrt{\nu} (2+\nu)] \} / \mu_0,$$

где

$$\mu_0 = (1+2\nu) \cos^2 \theta + \sqrt{\nu} \cos^3 \theta + (2+\nu) \sqrt{\nu} \cos \theta + \nu.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение УКВ, Пер с англ., под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио. М., 1954.
2. G. R. Grant, B. S. Yapple, Proc. IRE, 45, № 7, 976 (1957).
3. A. R. Edison, R. K. Moore, B. D. Warner, IRE Trans., AP-8, № 3, 246 (1960).
4. J. W. Crispin, R. G. DeLoosh, F. T. Johnson, D. E. Lamphiear, O. L. Tiffany, B. W. Wentworth, "Sea Clutter Investigations using Oil Slacks", V Nat'l. Conv. Military Electronics, VI, 1961, p. 437.
5. М. А. Исаакович, ЖЭТФ, 23, № 3 (9), 305 (1952).
6. H. Davies, Proc. IRE, 101, № 7, 209 (1954).
7. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволны вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
8. Р. Вескап, Proc. IEEE, 53, № 8, 384 (1965).
9. Б. И. Семенов, Радиотехника и электроника, 11, № 8, 1351 (1966).
10. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 876 (1966).
11. А. П. Жуковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1482 (1969).
12. С. Г. Зубкович, Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1968.

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
23 июня 1969 г.

SCATTERING IMAGE OF STATISTICALLY ROUGH SURFACE

A. P. Zhukovsky

A consideration is made of the full matrix of the diagram of the reverse scattering of the finite conductivity rough surface when it is irradiated by elliptically polarized electromagnetic wave. The influence of the basic and secondary (including resonance) structure of the surface on the character of the scattering diagram is clarified. It is shown that the matrix elements obtained on the basis of electrodynamic theory of scattering for a complex surface agree well with experimental data.

УДК 621.391.822.2

ТЕПЛОВЫЕ ШУМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

P. L. Стратонович

Развитая ранее автором нелинейная флюктуационно-диссипационная феноменологическая термодинамика применена для расчета тепловых шумов нелинейных сопротивлений в неквантовом случае. Найдены обусловленные нелинейностью поправки к формуле Найквиста. В качестве примеров рассмотрены различные схемы, содержащие нелинейные сопротивления

1. ВВЕДЕНИЕ

Получившая в настоящее время распространение теория тепловых электрических шумов, изложенная, например, в [1, 2], ограничена результатами равновесной и линейной неравновесной (т. е. флюктуационно-диссипационной) термодинамики. Эту теорию можно применять как к линейным, так и к нелинейным сопротивлениям, однако ее недостаточно для полного расчета тепловых шумов в нелинейных сопротивлениях. Применение ее к нелинейным сопротивлениям позволяет рассчитать интенсивность шумов лишь в равновесной точке, т. е. при нулевом среднем токе (если нет внешнего магнитного поля). При этом данный расчет носит совершенно тривиальный характер. Дело в том, что в типичных случаях, к которым применена феноменологическая (макроскопическая) теория, среднеквадратичный флюктуационный разброс σ много меньше.

$$\sigma \ll \Delta_{\text{нел}} \quad (1.1)$$

масштаба нелинейности

$$\Delta_{\text{нел}} \sim \left| \frac{\partial \varphi}{\partial A} \right| \sqrt{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial A^2}} \quad (1.2)$$

феноменологических уравнений

$$\dot{A} = \varphi(A) \quad (1.3)$$

(A — некоторые макроскопические параметры.) Этот факт, справедливость которого для ряда примеров показана в [3], является в настоящее время общепризнанным.

Благодаря неравенству (1.1) справедливо соотношение

$$\overline{\varphi(\dot{A})} \approx \varphi(\overline{\dot{A}}), \quad (1.4)$$

позволяющее устанавливать соответствие между флюктуационным уравнением

$$\dot{A} = \varphi(A) + \xi \quad (1.5)$$

(где ξ — флюктуационная добавка, имеющая нулевое среднее значение: $\bar{\xi} = 0$) и получаемым из него путем усреднения феноменологическим уравнением

$$\dot{\bar{A}} = \varphi(\bar{A}),$$

т. е. уравнением (1.3). В формулах (1.3)–(1.5) отклонения A от равновесных значений A_0 , удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(A_0) = 0,$$

могут быть сравнимы с масштабом нелинейности, важно лишь, чтобы и для существенно неравновесных значений A выполнялось неравенство (1.1).

Вблизи равновесной точки A_0 при рассмотрении типичных тепловых флюктуаций $A - A_0 \sim \sigma$ уравнения (1.3), (1.5) можно линеаризовать по $A - A_0$ благодаря (1.1). После этого задача расчета шумов становится тривиальной. Можно забыть о том, что сопротивление нелинейное, и применять обычные формулы линейной теории к дифференциальному (в равновесной точке) сопротивлению.

Сказанное, однако, никак не помогает ответить на вопрос, какова интенсивность флюктуаций ξ в (1.5) при больших отклонениях $A - A_0 \sim \Delta_{\text{нел}}$. По-видимому, некоторые придерживаются мнения, что термодинамика (т. е. феноменологическая теория) вообще не способна ответить на указанный вопрос, поскольку де подобные большие отклонения являются редким случаем в равновесных флюктуациях и флюктуационно-диссипационный процесс при таких отклонениях является существенно неравновесным. Автор решительно не согласен с такой точкой зрения. Действительно, такой процесс является существенно неравновесным, но он является составляющей, пускай и редкой, равновесного процесса. Разве формулу Больцмана—Гиббса нельзя применять в тех областях, где энергия много больше ее среднего значения? Против этого можно было бы выдвинуть в точности те же самые возражения.

Итак, по мнению автора, должна существовать теория, позволяющая рассчитывать интенсивность флюктуаций (неважно, как называть их: равновесными или неравновесными) при больших отклонениях $A - A_0 \sim \Delta_{\text{нел}}$. Такая теория необходима, скажем, для анализа флюктуаций в простой схеме, изображенной на рис. 1. Для этого примера в качестве A можно взять ток и рассматривать в качестве уравнения (1.5) такое уравнение:

$$L \frac{dI}{dt} = -U(I) + \xi \quad (\bar{\xi} = 0; I_0 = 0). \quad (1.6)$$

Как найти интенсивность флюктуационной ЭДС ξ при больших I ? Если мы хотим применить, скажем, формулу Найквиста, то какое сопротивление в ней брать? Их теперь несколько: дифференциальное

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI}(I),$$

среднее

$$R_{\text{ср}} = \frac{U(I)}{I},$$

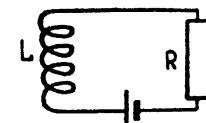


Рис. 1. R — нелинейное сопротивление.

диссипативное

$$R_{\text{дис}} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dI^2} (UI).$$

Эти сопротивления при $I \sim \Delta_{\text{нел}}$ отличаются друг от друга и совпадают лишь в тривиальной равновесной точке $I = 0$. Если воспользоваться линейно-квадратической аппроксимацией характеристики

$$U(I) = R_0 I + R_1 I^2, \quad (1.7)$$

то указанные формулы дают

$$R_{\text{диф}} = R_0 + 2R_1 I; \quad R_{\text{ср}} = R_0 + R_1 I; \quad R_{\text{дис}} = R_0 + 3R_1 I. \quad (1.8)$$

Шумы в указанной схеме и других схемах, содержащих нелинейные сопротивления, должны рассчитываться при помощи нелинейной флуктуационно-диссипационной термодинамики, развиваемой автором, начиная с работ [4-7]. В данной теории к соотношениям линейной теории (соотношениям Онзагера и флуктуационно-диссипационной теореме) — двухиндексным соотношениям — добавляются новые соотношения — соотношения нелинейной теории: трехиндексные, четырехиндексные и т. д. Первые из этих новых соотношений будут использоваться в настоящей статье. Согласно трехиндексным соотношениям для указанного примера формулу Найквиста нужно применять с диссипативным сопротивлением, а не каким-либо другим. Подобные выводы нелинейной теории можно было бы проверить экспериментально.

2. СВОДКА НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБЩЕЙ (ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ) ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ (НЕКВАНТОВЫЙ ВАРИАНТ)

То обстоятельство, что макроскопические параметры A образуют полный набор переменных и в соответствии с уравнениями (1.3) полностью определяют собственное будущее, хорошо согласуется с гипотезой о том, что флуктуационный процесс $A(t)$, соответствующий (1.5), является процессом Маркова. Приняв эту гипотезу, получаем, что плотность распределения $w(A)$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\dot{w} = Fw \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial A_{\alpha_1}} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial A_{\alpha_n}} \right) [K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A) w], \quad (2.1)$$

где

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \overline{\Delta A_{\alpha_1} \dots \Delta A_{\alpha_n}} \quad (K_{\alpha}(A) = \varphi_{\alpha}(A)) \quad (2.2)$$

— коэффициенты интенсивности, которые предполагаются не зависящими от времени. Обозначим через $w_{\text{ст}}(A)$ стационарное решение указанного уравнения.

Для вывода термодинамических соотношений используем принцип временной симметрии, требующий неизменности процесса и, следовательно, инвариантности уравнения (2.1) при обращении времени (замене t на $-t$): Пусть среди параметров A_{α} имеются временно-четные параметры B_i и временно-нечетные параметры C_j , меняющиеся при обращении времени на B_i и на $-C_j$, соответственно. Используя принцип временной симметрии и учитывая, что при обращении времени оператор F кинетического уравнения меняется на $w_{\text{ст}} F^T (1/w_{\text{ст}})$, получаем равенство

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! s!} \frac{\partial}{\partial B_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial B_{i_r}} \frac{\partial}{\partial C_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial C_{j_s}} K_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s}(B, -C) w_{ct}(B, C) = \\ = w_{ct}(B, C) \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{1}{r! s!} K_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s}(B, C) \frac{\partial}{\partial B_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial B_{i_r}} \frac{\partial}{\partial C_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial C_{j_s}}.$$

Отсюда непосредственно следуют соотношения

$$K_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s}(B, -C) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+l+m}}{l! m!} \frac{1}{w_{ct}} \times \\ \times \frac{\partial^{l+m} [K_{i_1 \cdots i_r + l j_1 \cdots j_{s+m}}(B, C) w_{ct}]}{\partial B_{i_{r+1}} \cdots \partial B_{i_{r+l}} \partial C_{j_{s+1}} \cdots \partial C_{j_{s+m}}}.$$
(2.3)

Это равенство справедливо также при $r=s=0$, (если полагать при этом левую часть равной нулю), что вытекает из условия стационарности плотности w_{ct} . В дальнейшем предполагается, что

$$w_{ct}(B, -C) = w_{ct}(B, C).$$
(2.4)

Умножим (2.3) на вспомогательное распределение вероятностей

$$w_{XY}(B, C) = N^{-1} \exp \left\{ \frac{B_i X_i + C_j Y_j}{T} \right\} w_{ct}(B, C)$$
(2.5)

(N — нормировочная постоянная) и проинтегрируем по $dB dC$. Это дает

$$\bar{K}_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s}(X, -Y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{l! m!} \bar{K}_{i_1 \cdots i_{r+l} j_1 \cdots j_{s+m}}(X, Y) \times \\ \times X_{i_{r+1}} \cdots X_{i_{r+l}} Y_{j_{s+1}} \cdots Y_{j_{s+m}},$$
(2.6)

где обозначено

$$\bar{K}(X, Y) = \int K(B, C) w_{XY}(B, C) dB dC.$$
(2.7)

Плотность (2.5) имеет максимум при значениях $B(X, Y)$, $C(X, Y)$, определяемых из уравнений

$$X_i = -T \frac{\partial \ln w_{ct}(B, C)}{\partial B_i}, \quad Y_j = -T \frac{\partial \ln w_{ct}(B, C)}{\partial C_j}.$$
(2.8)

Если среднеквадратичный разброс σ распределения (2.5) много меньше масштаба нелинейности $\Delta_{\text{нел}}$ функции $f(A)$ (см. (1.1), (1.2)), то подобно (1.4) имеем

$$\int f(A) w_{XY}(A) dA \approx f(A(X, Y)).$$

Поэтому из точного равенства (2.6) имеем приближенное, асимптотическое равенство

$$\bar{K}_{i_1 \cdots i_r j_1 \cdots j_s}(X, -Y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{l! m!} K_{i_1 \cdots i_{r+l} j_1 \cdots j_{s+m}}(X, Y) \times \\ \times X_{i_{r+1}} \cdots X_{i_{r+l}} Y_{j_{s+1}} \cdots Y_{j_{s+m}},$$
(2.9)

где K — функции (2.2), а переход к X, Y означает просто замену (2.8) исходных переменных на термодинамически сопряженные. Поучительно отметить, что в приведенном выводе не требуется, чтобы распределение (2.5) являлось фактическим неравновесным распределением. Они играют чисто вспомогательную математическую роль.

Равенства (2.9) являются производящими для последовательности основных термодинамических соотношений. Последние получаются дифференцированием (вообще говоря, многократным) обеих частей равенства по X_i, Y_j с последующим приравниванием этих переменных нулю. Для производных в нулевой точке $X = Y = 0$ будем использовать такие обозначения:

$$K_{ij_1, j_2} = \left[\frac{\partial K_{ii_1}}{\partial Y_{j_2}} \right]_{X=Y=0}, \quad K_{j_1, ii_2} = \left[\frac{\partial K_{j_1}}{\partial X_i \partial Y_{j_2}} \right]_0$$

и т. п. (Ряд соотношений получается, в частности, без дифференцирования.) Выпишем соотношения низших порядков. Одноиндексные соотношения

$$K_i = 0; \quad (I.1a) \quad K_j = 0 \quad (I.1b)$$

являются тривиальными. Двухиндексные соотношения имеют вид

$$K_{ij} = 0; \quad (II.26) \quad K_{i_1 i_2} = -2TK_{i_1, i_2}; \quad (II.1a)$$

$$K_{i_1, i_2} = -K_{i_1, i_2}; \quad (II.1b) \quad K_{j_1 j_2} = -2TK_{j_1, j_2}. \quad (II.1b)$$

Эти соотношения составляют содержание флукутационно-диссипационной теории в неквантовом варианте (соотношения Онзагера, флукутационно-диссипационная теорема). Трехиндексные соотношения, имеющие вид

$$K_{i_1 i_2 i_3} = 0; \quad (III.3a) \quad K_{ii_1 i_2} = 0; \quad (III.3b)$$

$$K_{i_1 i_2 j} = -2TK_{i_1 i_2, j} = -2TK_{i_1, i_2, j}; \quad (III.26)$$

$$K_{j_1 j_2 j_3} = -2TK_{j_1 j_2, j_3}; \quad (III.2r)$$

$$K_{i_1 i_2, i_3} = TK_{i_3, i_1 i_2} - TK_{i_1, i_2 i_3} - TK_{i_2, i_1 i_3}; \quad (III.1a)$$

$$K_{i_1 i_2, i} = K_{i_1 i_2, i} = -TK_{i_1, i_2 i} - TK_{i_2, i_1 i} - TK_{i_1, i_2 i}; \quad (III.1b)$$

$$K_{i_1 i_2, i} = TK_{j_2, i_1 i_2} - TK_{i_1, i_2 i_2} - TK_{i_1, i_2 i_2} \quad ; \quad (III.1b)$$

$$K_{i_1 i_2, i} = TK_{i_1, i_1 i_2} - TK_{i_1, i_2 i_2} - TK_{i_2, i_1 i_2} \quad ; \quad (III.1b)$$

$$K_{j_1 i_2, i_3} = -TK_{i_1, i_2 i_3} - TK_{i_2, i_1 i_3} - TK_{i_3, i_1 i_2}, \quad (III.1r)$$

относятся к нелинейной теории. Здесь выписаны все независимые трехиндексные соотношения. Мы видим, что число их увеличилось по сравнению с двухиндексными. Еще больше четырехиндексных соотношений. Мы не будем их все приводить, а ограничимся тем, что выпишем следующие соотношения:

$$2TK_{i_1, i_2 i_3 i_4} + K_{i_1 i_2, i_3 i_4} + K_{i_1 i_3, i_2 i_4} + K_{i_1 i_4, i_2 i_3} = (1/2T^2) K_{i_1 i_2 i_3 i_4}; \quad (IV.1a)$$

$$2TK_{i_1, i_2 i_3 i_4} + K_{i_1 i_2, i_3 i_4} + K_{i_1 i_3, i_2 i_4} + K_{i_1 i_4, i_2 i_3} = (1/2T^2) K_{i_1 i_2 i_3 i_4}, \quad (IV.1d)$$

которые будут использованы в дальнейшем. В этом разделе мы следовали, в основном, методу, предложенному в [5]. Соотношения (IV.1a) получены впервые в [5], а (III.1a) — в [6].

Указанные соотношения более лаконично записываются при помощи величин $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = -1$, а именно, формулы (III) принимают такой вид:

$$K_{\alpha\beta\gamma} = -T(1 - \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma) K_{\alpha\beta\gamma}; \quad (III.2)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} = -TK_{\alpha\beta\gamma} - TK_{\beta\alpha\gamma} + T\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma K_{\gamma\alpha\beta}. \quad (III.1)$$

Здесь индексы α , β , γ пробегают уже полный набор значений, т. е. значения, соответствующие как временно-четным, так и временно-нечетным параметрам.

3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА СХЕМ, СОДЕРЖАЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Пусть задана произвольная разветвленная цепь, содержащая индуктивности, емкости (неважно, линейные или нелинейные), нелинейные сопротивления и источники постоянного тока. Путем составления уравнений Кирхгофа получаем для этой цепи «канонические» уравнения в форме системы уравнений, в которую входят лишь первые производные по времени и которая разрешена относительно этих производных:

$$A_i = \varphi_i(A) + f_i. \quad (3.1)$$

Здесь f_i — внешние «силы», представляющие собой комбинацию внешних электродвижущих сил. Часть переменных A_i (обозначим ее C_j) имеет физический смысл токов, или пропорциональна таковым. Эти переменные являются временно-нечетными. Остальные переменные, связанные с зарядами или напряжениями на емкостях и обозначаемые B_i , являются временно-четными. Если индуктивностей в схеме достаточно много, то сопротивления будут входить только в уравнения $\dot{C}_j = \varphi_j + f_j$. Назовем этот случай невырожденным. Если индуктивностей, напротив, очень мало, то система (3.1) может состоять только из уравнений $\dot{B}_i = \varphi_i + f_i$ (полностью вырожденный случай).

Приравнивая нулю временные производные в (3.1), нетрудно найти стационарную рабочую точку A_0 как корень уравнений $\varphi_i(A_0) + f_i = 0$. Для расчета флуктуаций в схеме внешние «силы» можно опустить и анализировать далее пассивную схему, к которой можно применять формулы равновесной и флуктуационно-диссипационной термодинамики. В соответствии с (1.5) в «каноническую» систему дописываются флуктуационные возмущения, характеризуемые коэффициентами интенсивности (2.2) при $n \geq 2$ (K_{α} совпадает с φ_{α}). Далее нужно ввести сопряженные переменные по формулам (2.8). Стационарное распределение w_{ct} находится при помощи распределения Гиббса. Соответствующая формула

$$w_{ct}(B, C) = \text{const} \exp[-E(B, C)/T] \quad (3.2)$$

отличается от распределения Гиббса лишь заменой переменных (B и C не обязаны быть координатами и импульсами). При линейной связи между (B, C) и (q, p) функция $E(B, C)$ в (3.2) имеет смысл энергии. В вырожденном случае (3.2) нужно трактовать как формулу Больцмана. Подставляя (3.2) в (2.8), находим сопряженные переменные

$$X_i = \frac{\partial E(B, C)}{\partial B_i}, \quad Y_j = \frac{\partial E(B, C)}{\partial C_j}. \quad (3.3)$$

Преобразуя переменные в правой части, записываем «каноническую» систему уравнений в таком виде:

$$\dot{B}_i = K_i(X, Y) + \xi_i, \quad \dot{C}_i = K_i(X, Y) + \xi_j, \quad (3.4)$$

после чего остается воспользоваться результатами предыдущего раздела.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СХЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

1. Начнем с простого случая: с замкнутых друг на друга индуктивности и нелинейного сопротивления. Индуктивность будем предполагать линейной, так что $E = (1/2)LI^2$ (I — ток в цепи), и в соответствии с (3.3) можно положить: $C = LI$, $Y = I$.

Нелинейное сопротивление пусть имеет характеристику $U(I)$. Данная схема описывается одним «каноническим» уравнением (1.6), которое в указанных сопряженных переменных (т. е. в приведенном виде) таково:

$$\dot{C} = -U(Y) + \xi(t). \quad (4.1)$$

Здесь $\xi(t) = \mathcal{E}(t)$ — случайная возмущающая электродвижущая сила, имеющая нулевое среднее значение, а также (вследствие марковского характера процесса $C(t)$ — см. [8]) дельта-образные кумулянтные функции

$$\begin{aligned} K[\xi(t), \xi(t + \tau)] &= K_{11}(C) \delta(\tau), \\ K[\xi(t), \xi(t + \tau_1), \xi(t + \tau_2)] &= K_{111}(C) \delta(\tau_1) \delta(\tau_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в разд. 2, разложение Маклорена характеристики сопротивления записывается так:

$$U(Y) = -K_{1,1}Y - (1/2)K_{1,11}Y^2 - (1/6)K_{1,111}Y^3 - \dots \quad (4.3)$$

(учтено (I.1 а)).

Сопоставление этого равенства с (1.7), очевидно, дает

$$-K_{1,1} = R_0, \quad -K_{1,11} = 2R_1. \quad (4.4)$$

Применяя термодинамическое соотношение (II.1 в) из разд. 2, имеем

$$K_{11}(0) = -2TK_{1,1} \equiv 2TR_0. \quad (4.5)$$

Из трехиндексных формул отношение к данному случаю имеют только формулы (III.1 г) и (III.2 г), принимающие вид

$$K_{111}(0) = -2TK_{11,1}; \quad (4.6)$$

$$K_{11,1} = -3TK_{1,11} \equiv 6TR_1. \quad (4.7)$$

Наконец, соотношение (IV.1 д) записывается так:

$$2TK_{1,111} + 3K_{11,11} = (1/2T^2)K_{1111}(0). \quad (4.8)$$

Корреляционной функции $K_{11}(0) \delta(\tau)$ (см. (4.2)) соответствует спектральная плотность $S(\omega) = 2K_{11}(0)$, поэтому формула (4.4), которую можно записать

$$S(\omega) = 4TR_0,$$

есть не что иное, как обычная формула Найквиста, примененная в равновесной точке. Взяв разложение Маклорена

$$K_{11}(Y) = K_{11}(0) + K_{11,1}Y + (1/2)K_{11,11}Y^2 + \dots, \quad (4.9)$$

мы учтем непостоянство диффузационного коэффициента K_{11} , его зависимость от тока Y . Линейный по Y член позволяет рассчитать это непостоянство в первом приближении. Подставляя (4.4), (4.7) в (4.9), получаем

$$K_{11}(Y) = 2T(R_0 + 3R_1 Y) + \dots, \quad (4.10)$$

что аналогично (4.4), но с заменой R_0 на $R_0 + 3R_1 Y$. Это и есть упомянутый во Введении результат, говорящий о том, что при расчете шумов в данной схеме можно пользоваться формулой Найквиста, но при использовании диссипативного сопротивления (1.8). Разумеется, этот результат является не вполне точным, он имеет погрешность $O(Y^2)$.

Формула (4.6) определяет $K_{1111}(0)$, формула же (4.8) представляет собой одно соотношение, связывающее два неизвестных K_{1111} и $K_{11111}(0)$. Поэтому в рамках четырехиндексной теории не представляется возможным полностью выразить флюктуационные характеристики через диссипационные.

2. В качестве более сложного примера рассчитаем схему, приведенную на рис. 66 (стр. 255) монографии [2], полагая в ней сопротивления R, R_1, R_2 нелинейными. Вводя переменные $C_1 = L_1 I_1 = L_1 Y_1, C_2 = L_2 I_2 = L_2 Y_2$, записываем для этой схемы приведенные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -X - U_1(Y_1) - U(Y_1 + Y_2) + \mathcal{E}_1, \\ \dot{C}_2 &= -X - U_2(Y_2) - U(Y_1 + Y_2) + \mathcal{E}_2, \\ \dot{B} &= Y_1 + Y_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь B — заряд на емкости C , а X — сопряженная с ней переменная — потенциал по этой емкости (обозначения соответствуют обозначениям разд. 2). Флюктуационные ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ можно выразить через взаимно независимые локальные ЭДС, e, e_1, e_2 , сосредоточенные на нелинейных сопротивлениях R, R_1, R_2 соответственно:

$$\mathcal{E}_1 = e + e_1, \quad \mathcal{E}_2 = e + e_2. \quad (4.12)$$

Применяя формулу (II.1 в) к уравнениям (4.11), получаем диффузионную матрицу

$$\| K_{I_1 I_2} \| = 2T \begin{pmatrix} R_1(0) + R(0) & R(0) \\ R(0) & R_2(0) + R(0) \end{pmatrix}.$$

Далее формула (III.1 г) дает следующие производные от диффузионных коэффициентов в нулевой точке:

$$\| K_{I_1, I_2, 1} \| = 3T \begin{pmatrix} R'_1(0) + R'(0) & R'(0) \\ R'(0) & R'(0) \end{pmatrix},$$

$$\| K_{I_1, I_2, 2} \| = 3T \begin{pmatrix} R'(0) & R'(0) \\ R'(0) & R'_2(0) \end{pmatrix}.$$

Используя разложение $K_{I_1 I_2}(Y) \approx K_{I_1 I_2} + K_{I_1 I_2, i_3} Y_{i_3}$, отсюда получаем

$$\| K_{I_1 I_2}(Y) \| = 2T \begin{pmatrix} R_1(Y_1)_{\text{дис}} + R(Y_1 + Y_2)_{\text{дис}} & R(Y_1 + Y_2)_{\text{дис}} \\ R(Y_1 + Y_2)_{\text{дис}} & R_2(Y_2)_{\text{дис}} + R(Y_1 + Y_2)_{\text{дис}} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

где $R_{1,2}(I)_{\text{дис}}, R(I)_{\text{дис}}$ — соответствующие диссипационные сопротивления при токе I . Результат (4.13), очевидно, можно получить

и иначе, а именно, пользуясь формулой (4.10) для каждого локального флюктуационного напряжения (e , или e_1 , или e_2), а затем учитывая формулы сложения (4.12) при условии независимости флюктуаций.

В случае нелинейных сопротивлений, однако, описанный прием раздельного расчета локальных флюктуаций ЭДС нужно применять (в отличие от линейного случая) с большой осторожностью. В некоторых схемах, например, в случае параллельного соединения нелинейных сопротивлений могут добавиться новые токовые вырожденные степени свободы—замкнутые токи, не проходящие через индуктивность. В нелинейных сопротивлениях это связано с детектированием флюктуационных ЭДС, которые, напомним, имеют бесконечную дисперсию. Все это лишает в таких случаях метод раздельного расчета корректности, но не препятствует методике единого расчета, описанной в разд. 3.

В данном примере метод раздельного расчета локальных ЭДС не связан ни с какими трудностями, и им удобно пользоваться, особенно для вычисления вторых производных $K_{i_1 i_2, i_3 i_4}$. Для полного их определения при этом недостает, в силу (4.8), лишь трех величин, например, чисел K_{III}^R , $K_{\text{III}}^{R_1}$, $K_{\text{III}}^{R_2}$, характеризующих соответственно сопротивления R , R_1 , R_2 . В методе совместного расчета остается большее число (шесть) неопределенных величин, которые нужно определять из динамических соображений (условия независимости флюктуаций в различных сопротивлениях являются как бы динамическими данными по отношению к методу совместного расчета).

3. В приведенных выше примерах и в других невырожденных схемах достаточно использования только соотношений для временно-нечетных параметров: (II.1 в), (III.1 г), (III.2 г), (IV.1 д), ... При этом комбинация (II.1 в) и (III.1 г) эквивалентна использованию следующей простой формулы:

$$K_{i_1 i_2}(Y) = 2T \frac{\partial^2 F(Y)}{\partial Y_{i_1} \partial Y_{i_2}} + O(Y^2), \quad (4.14)$$

аналогичной соответствующему результату линейной теории. Здесь $2F = -Y_i C_i = -Y_i K_i$ — диссипативная функция общей (не только линейной) теории. Однако такое положение дел имеет место не всегда, формула (4.14), (а следовательно и применение в линейно-квадратичном приближении формулы Найквиста с диссипативным сопротивлением) неправильна в случае вырожденных схем. Проиллюстрируем это на простейшем примере: замкнутых друг на друга нелинейного сопротивления и линейной емкости C . Соответствующее этому случаю уравнение

$$\dot{Q} = -I(U) + \xi \quad (U = Q/C) \quad (4.15)$$

уже является приведенным, причем $Q = B_1$, $U = X_1$ — временно-четные параметры (в отличие от предыдущих случаев); ξ — флюктуационный ток, имеющий кумулянтные функции (4.2). Теперь нужно применять термодинамические формулы для временно-четных переменных: (II.1 а), (III.3 а), (III.1 а), (IV.1 а), ... Формулы (II.1 а) и (IV.1 а) похожи на (II.1 в) и (IV.1 д), поэтому в том отношении нет принципиального различия от предыдущего случая. Разница лишь в том, что равенства (4.4), (4.8) относятся теперь не к флюктуационным напряжениям, а к флюктуационным токам. Соотношения же (III.1 а) и (III.3 а) отличаются от (III.1 г), (III.2 г). Формула (III.1 а) дает

$$K_{\text{II},1} = -TK_{1,\text{II}} \equiv TI''(0). \quad (4.15a)$$

Комбинируя ее с формулой $K_{11} = 2TI'(0)$ линейной теории, имеем

$$K_{11}(U) = 2T[I'(0) + (1/2)I''(0)U] + O(U^2). \quad (4.16)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть средняя проводимость $S_p(U) = I(U)/U$, а не диссипативная проводимость $S_{\text{дис}}(U) = (1/2)d^2(U)/dU^2$, соответствующая использованию формулы типа (4.14), которая, следовательно, оказывается несправедливой.

Аналогичным способом исследуются и смешанные случаи, когда имеются как временно-четные, так и временно-нечетные параметры. Важно отметить, что результаты для вырожденных случаев нельзя получить из результатов для невырожденных посредством предельного перехода, устремляя соответствующие индуктивности L к нулю. Дело в том, что при некоторых малых значениях индуктивности L разброс тока $\sigma = \sqrt{T/L}$ через нее станет сравнимым с масштабом нелинейности, и предположение $\sigma \ll \Delta_{\text{нел}}$, лежащее в основе теории, нарушится. Теорию можно применять только при крайних значениях L : или очень больших, или очень малых, непрерывного же перехода наблюдать нельзя. Формулу (4.16) нельзя рассматривать как простое следствие формулы (4.10).

Интенсивности флуктуаций тока (типа (4.16)) простым образом складываются при параллельном соединении нелинейных сопротивлений. При их последовательном соединении они пересчитываются сложнее (формулы для результирующего тока нельзя вывести из локальных). Напомним, что при расчете флукуационных ЭДС положение было как раз обратным.

Результаты (4.16), (4.8), (III.3 а) нелинейной теории, разумеется, подтверждаются, как показывает расчет, для конкретной динамической модели нелинейного сопротивления, рассмотренной в [9]. Кроме того, анализ результатов работы [9] показывает, что в данном случае справедлива формула

$$K_{1111} = e^2 K_{11}. \quad (4.17)$$

Последняя относится к типу формулы Шоттки $K_{11} = eK_1$ и говорит о дробовом характере флукуаций тока. Подобные формулы полезны в том отношении, что позволяют устраниТЬ произвол, остающийся в четырехиндексной теории в отношении вычисления производных от диффузионных коэффициентов. Подстановка (4.17) в (4.8), очевидно, дает

$$K_{11,11} = (2/3)TI'''(0) - (e^3/3T)I'(0). \quad (4.18)$$

Этот результат является определяющим при расчете непостоянства диффузионного коэффициента в нелинейных сопротивлениях с симметричной характеристикой, когда $I''(0) = 0$, и первая производная $K_{11,11}$, следовательно, исчезает. Представляет интерес проверить экспериментально формулы (4.17), (4.18) и проанализировать степень их общности.

Есть основания также считать, что в симметричном частном случае (когда $I''(0) = 0$), возможно, справедлива формула $K_{11,11} = 2TI'''(0)$ [5]. Это, однако, нуждается в дополнительной проверке и обосновании.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
- М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флукуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
- Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 1, 83 (1962).
- Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 39, вып. 6 (12), 1647 (1960).

5. Р. Л. Стратонович, Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., № 5, 16 (1962).
6. Р. Л. Стратонович, Вестн. Моск. ун-та, сер., физ., астрон., № 4, 84 (1967).
7. Р. Л. Стратонович, Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астрон., № 1, 40 (1969).
8. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. Р. Л. Стратонович, Вестн. Моск. ун-та, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 4, 99 (1960).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 июня 1969 г.

THERMAL NOISES OF NONLINEAR RESISTANCES

R. L. Stratovich

The nonlinear fluctuation-dissipation phenomenological thermodynamics developed by the author earlier is used to calculate the thermal noises of nonlinear resistances in the nonquantum case. The corrections to Nyquist formula due to the nonlinearity have been found. Different schemes containing nonlinear resistances are considered as an example.

УДК 621.373.43

ФЛУКТУАЦИИ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ТРАНЗИСТОРНОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ

М. М. Шачнева, А. В. Якимов

Рассматриваются флюктуации в высокочастотном автогенераторе на полупроводниковом триоде (ППТ). Учет инерционности ППТ производится путем решения уравнения диффузии носителей через базу ППТ. Указана возможность уменьшения амплитудных и частотных флюктуаций путем соответствующего подбора амплитуды и частоты автоколебаний. Полученные выводы справедливы для анализа как естественных, так и технических флюктуаций в высокочастотных генераторах на ППТ.

1. Транзисторные автогенераторы используются в качестве источников высокостабильных гармонических колебаний помимо радиочастотного диапазона также и в диапазоне СВЧ. Вместе с этим, какие-либо теоретические работы, посвященные анализу флюктуационных процессов в указанных генераторах при их работе на высоких частотах, отсутствуют.

В настоящей статье исследуются особенности флюктуаций амплитуды и частоты автоколебания в *LC*-генераторе, работающем на таких высоких частотах, когда инерционность транзистора оказывает существенное влияние на его работу.

2. На высоких частотах обычные вольтамперные характеристики ППТ неприменимы, так как транзистор существенно инерционен. Инерционные свойства транзистора сильно зависят от его конструкции и принципа работы. Ограничимся изучением автогенераторов, собранных на диффузионных ППТ. В этом случае, при исследовании работы генератора необходимо решать уравнение диффузии носителей через базовую область ППТ с учетом решения уравнения Ван-дер-Поля.

Рассмотрим простейший транзисторный *LC*-генератор с трансформаторной обратной связью, собранный по схеме с общим эмиттером. Обозначим через ω_1 и Q —собственную частоту и добротность колебательного контура, L и n —индуктивность контура и коэффициент ослабления трансформатора обратной связи. Считаем $n \sim Q \gg 1$. Пусть выполнено условие самовозбуждения генератора, и колебания в нем имеют вид:

$$v = R \cos \psi; \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_1 R \sin \psi; \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta. \quad (1)$$

Для R и ϑ , медленных по сравнению с $\cos \omega_1 t$, пользуясь методом [1], получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{\omega_1 R}{2Q} + \frac{\omega_1^2 L R}{2n} S_1(R) \cos \varphi_k + \frac{\omega_1}{2} e_{\perp}(t), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\omega_1^2}{2n} S_1(R) \sin \varphi_k - \frac{\omega_1}{2R} e_{\parallel}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $S_1(R)$ — амплитуда средней крутизны по первой гармонике коллекторного тока i_{k1} , φ_k — разность фаз между колебаниями i_{k1} и напряжением на базе транзистора v ; $e_\perp(t)$ и $e_\parallel(t)$ — случайные процессы, обусловленные наличием в схеме генератора естественных или технических шумов (см. [2, 3]). Таким образом, учет высокочастотности генератора влияет только на вид функции $S_1(R)$ и приводит к появлению фазового сдвига φ_k , который на низких частотах автоколебаний равен нулю.

Предположим, что в отсутствие шумов система (2) имеет устойчивое стационарное решение R_0 , $\frac{d\vartheta_0}{dt} = \Delta\omega_0$. Линеаризуя (2) около R_0 , $\Delta\omega_0$ и рассматривая установившийся режим, получаем флюктуационные уравнения для ε и v — относительных флюктуаций амплитуды и флюктуаций частоты автоколебаний:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= -p\varepsilon + \frac{\omega_1}{2R_0} e_\perp(t), \\ v &= -q\varepsilon - \frac{\omega_1}{2R_0} e_\parallel(t),\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}p &= -\frac{R_0 \omega_1^2 L}{2n} \left[\frac{dS_1(R)}{dR} \right]_{R_0} \cos \varphi_k, \\ q &= p \operatorname{tg} \varphi_k\end{aligned}\quad (4)$$

— прочность предельного цикла и неизохронность генератора.

Сравним систему (3) с системой флюктуационных уравнений для обычного низкочастотного транзисторного генератора [2, 3]. Можно заметить, что с точки зрения флюктуационных уравнений ВЧ генератор отличается от НЧ генератора только значениями коэффициентов p и q (у НЧ генератора $q \ll p$). Таким образом, спектральные характеристики флюктуаций амплитуды и частоты автоколебаний рассматриваемого генератора будут иметь качественно тот же вид, что и в НЧ генераторе [2, 3]. Все различие будет носить чисто количественный характер. Именно, из-за роста φ_k с частотой автоколебаний будет уменьшаться величина p и расти q . В результате этого будет расти мощность флюктуаций амплитуды; кроме того, будет усиливаться «перекачка» последних во флюктуации частоты. Следствием чего является увеличение ширины спектральной линии автоколебания (как естественной, так и технической). Иначе говоря, колебания генератора станут менее стабильными как по амплитуде, так и по частоте.

3. Для отыскания p и q необходимо знать зависимость $S_1(R_0)$ и φ_k от режима работы генератора. Рассмотрим для простоты одномерную модель транзистора. На эмиттерный и коллекторный переходы подаются напряжения [2]:

$$v_s = V + v; \quad v_k = -(E + u) + v_s; \quad u = -nv. \quad (5)$$

V и $-E$ — постоянные смещения на базовом и коллекторном выводах ППТ.

Обозначим $N = N(x, t)$ концентрацию неосновных носителей в базе транзистора. В этом случае коллекторный ток равен:

$$i_k = i_k(t) = -eDS \left[\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \right]_{x=x_k}. \quad (6)$$

Здесь e — заряд электрона, D — коэффициент диффузии, S и $x = x_k$ — площадь и координата коллекторного перехода.

Процесс диффузии неосновных носителей через базу описывается уравнением (см., например, [4], § 3.6):

$$D\tau \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - (N - N_0) = \tau \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (7)$$

Здесь τ и N_0 — время жизни и равновесная концентрация неосновных носителей в базе.

Найдем из (1) и (5) граничные условия для (7) (см., например, [4], § 3.4). Найдем далее решение для первой гармоники $N_1(x, t)$ концентрации $N(x, t)$. После этого, пользуясь соотношением (6), получим выражение для первой гармоники коллекторного тока $i_{k1}(t)$. Зная $i_{k1}(t)$, можно вычислить

$$S_1(R) = \frac{eS}{R} \sqrt{\frac{D}{\tau}} \sqrt[4]{1 + \omega_0^2 \tau^2} \times \\ \times \left\{ \frac{B_s^2 - (n/|n|) 2B_s B_k \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + B_k^2 [(\operatorname{ch} \alpha \cos \beta)^2 + (\operatorname{sh} \alpha \sin \beta)^2]}{(\operatorname{sh} \alpha \cos \beta)^2 + (\operatorname{ch} \alpha \sin \beta)^2} \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

$$\varphi_k = \eta - \operatorname{arctg} (\operatorname{cth} \alpha \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{arctg} \left[\frac{-B_k \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{(n/|n|) B_s - B_k \operatorname{ch} \alpha \cos \beta} \right],$$

$$\eta = 0,5 \operatorname{arctg} (\omega_0 \tau).$$

Здесь

$$\alpha = \frac{w}{\sqrt{D\tau}} \sqrt[4]{1 + \omega_0^2 \tau^2} \cos \eta; \quad \beta = \frac{w}{\sqrt{D\tau}} \sqrt[4]{1 + \omega_0^2 \tau^2} \sin \eta; \\ B_k = N_0 \exp \left\{ \frac{V-E}{v_T} \right\} 2I_1 \left[\frac{(n+1)R}{v_T} \right]; \quad B_s = N_0 \exp \left\{ \frac{V}{v_T} \right\} 2I_1 \left(\frac{R}{v_T} \right); \quad v_T = \frac{kT}{e}, \quad (9)$$

B_s и B_k имеют смысл амплитуд колебаний первой гармоники $N_1(x, t)$ у эмиттерного и коллекторного переходов, соответственно, w — толщина базы, $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0$ — частота автоколебаний, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го порядка.

Введем характерную частоту ω_a , как частоту, при которой коэффициент усиления ППТ по току эмиттера уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со своим низкочастотным значением: $\omega_a = 0,8 D w^{-2}$. При изменении ω_0 в пределах от нуля до нескольких ω_a порядок величины крутизны $S_1(R)$ не меняется. Иначе говоря, зависимость $S_1(R)$ от частоты ω_0 является довольно слабой. Гораздо более существенной для работы генератора является зависимость φ_k от ω_0 . На рис. 1 изображено семейство кривых $\varphi_k = \varphi_k(\omega_0/\omega_a)$ при $w = 0,1 \sqrt{D\tau}$. В качестве параметра взято значение установившейся амплитуды автоколебаний. При переходе от кривой (a) к кривой (z) амплитуда R_0 и отношение B_s/B_k растут. Кривая (z) имеет смысл асимптоты и соответствует сколь угодно большой амплитуде автоколебаний*.

Как видно из графика, в рассмотренном диапазоне частот сдвиг фазы φ_k тем меньше, чем больше значение возбужденной амплитуды

* Заметим, что кривые (z) дают также зависимость $\varphi_k(\omega_0/\omega_a)$ при работе генератора в режиме ограничения амплитуды за счет автосмещения эмиттерного перехода (а не за счет реакции коллекторной цепи, как предполагалось выше и в [2, 3]).

R_0 . Это происходит потому, что с ростом R_0 увеличивается влияние эмиттерного перехода на $N_1(x, t)$ по сравнению с влиянием коллекторного перехода. В результате этого уменьшается запаздывание «волны» $N_1(x, t)$, а следовательно и $i_{k1}(t)$. Здесь необходимо подчеркнуть, что на коллекторный вывод напряжение автоколебаний подается в противофазе с напряжением на базовом выводе v . Таким образом, влияние коллекторного перехода заключается в «притягивании» фазы φ_k к значению, примерно равному $-\pi/2$ (даже на сколь угодно низких частотах ω_0).

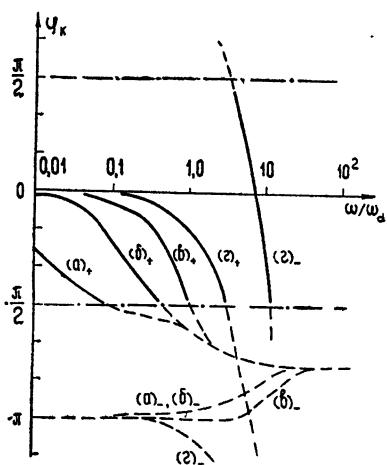


Рис. 1. Кривые (a) соответствуют $B_9=1,01 B_k$; (б) — $B_9=1,1 B_k$; (в) — $B_9=2 B_k$; (г) — $B_k=0$. Знак „+“ или „—“ указывает на то, при каком знаке n получена эта кривая. Участки кривых, изображенные пунктиром, соответствуют значениям параметров схемы, при которых данный генератор возбудить невозможно.

Исследуя зависимость крутизны $S_1(R)$ от ω_0/ω_a можно обнаружить, что амплитуда установившихся колебаний с точностью до члена порядка v_T/nR_0 совпадает со значением амплитуды в НЧ генераторе $R_0 = (V + E)/(n + 1)$. Тем самым, с точки зрения отыскания R_0 все различие между ВЧ и НЧ генераторами заключается в ухудшении условия самовозбуждения из-за запаздывания фазы колебаний коллекторного тока.

Как видно из рисунка, для каждого значения $|R_0|$ при $n > 0$ существует невозбудимая («слепая») частота ω_c , на которой $\varphi_k = -\pi/2$ в результате чего данный генератор возбудить невозможно. Для возбуждения генератора на частоте $\omega_0 > \omega_c$ необходимо сменить знак коэффициента обратной связи n , т. е. поменять местами выводы катушки обратной связи. Однако, из рисунка видно, что при смене знака n генератор можно возбудить только при $B_k = 0$ (кривая (г)-).

Из рисунка, на основании (3) и (4) также замечаем, что чем выше амплитуда автоколебаний $|R_0|$, тем меньше φ_k , следовательно, генератор может работать стабильнее. Кроме того, при росте ω_0 от нуля до ω_c неизохронность генератора монотонно нарастает, а прочность его предельного цикла падает до нуля. В результате амплитудные и частотные флюктуации автоколебаний резко увеличиваются. Заметим, что амплитуда $|R_0|$ при этом меняется очень слабо, так как генератор работает в жестком режиме [2]. Частота ω_c в зависимости от $|R_0|$ меняется в пределах $(0,1 \div 10) \omega_a$. Выражение для отыскания $\omega_c = \omega_c(R_0)$ можно получить из второй формулы в (8), полагая $\varphi_k = -\pi/2$, $n > 0$.

Авторы признательны А. Н. Малахову за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи, и Л. В. Постникову за полезное обсуждение ряда вопросов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, § 5.2, изд. Наука, М., 1968.
2. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 13, № 8, 1460, (1968).
3. А. В. Якимов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 12, № 5, 727 (1969).
4. Р. П. Нанавати, Введение в полупроводниковую электронику, гл. 3, изд. Связь, М., 1965.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 ноября 1969 г.

FLUCTUATIONS IN HF TRANSISTOR SELF-OSCILLATOR

M. M. Shachneva, A. V. Yakimov

Fluctuations in HF self-oscillator on a semiconductor triode (SCT) are considered. The allowance for SCT inertiality is made by solving the diffusion equation of the carriers through SCT base. A possibility is pointed out of decreasing the amplitude and frequency fluctuations by the proper choice of self-oscillation amplitude and frequency. The conclusions made are valid for analysing both inherent and thechnical fluctuations in HF SCT oscillator.

УДК 621.372.826

О ПОВЕДЕНИИ ВЛНОВЫХ ЧИСЕЛ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЛНОВОДА ЗА КРИТИЧЕСКИМ ЗНАЧЕНИЕМ

B. V. Шевченко

На основе графического решения дисперсионных уравнений исследовано поведение волновых чисел волн плоского и круглого диэлектрических волноводов при изменении частоты поля и параметров волноводов. Основное внимание удалено переходу волновых чисел через критическое значение и поведению их в области за критическим значением, где волны уже не являются поверхностными.

Обычно при анализе волн диэлектрических волноводов, плоского (пластина) и цилиндрического (стержень), соответствующее дисперсионное уравнение для волновых чисел решается (графически или численно) лишь для случая существования поверхностных волн (см., например, [1-3]). При этом поперечное волновое число x той части поля волны, которая находится вне волновода, в случае среды без потерь является чисто мнимым: $x = -i\alpha$, где $\alpha > 0$ для зависимости от времени $\exp(i\omega t)$.

С уменьшением частоты поля, поперечного размера волновода или диэлектрической проницаемости величина α уменьшается ($\alpha \rightarrow 0$) и при некоторых (критических) значениях указанных параметров, своих для каждого типа волны, α обращается в нуль, что соответствует возрастанию до бесконечности эффективной протяженности поля волны вне волновода: $d = 1/\alpha \rightarrow \infty$. При этом поперечное волновое число поля волны внутри волновода $g = [k^2(\epsilon - 1) + x^2]^{1/2}$ и продольное волновое число $h = \pm (k^2 - x^2)^{1/2}$ (знак выбирается так, чтобы было $\operatorname{Im}h < 0$) принимают критические значения: $g_{kp} = k(\epsilon - 1)^{1/2}$, $h_{kp} = k$, где $k = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$, ϵ_0 и μ_0 — параметры среды вне волновода.

В последнее время в связи с исследованием вытекающих волн диэлектрических волноводов сделаны попытки рассмотреть поведение волновых чисел за критическими значениями, т. е. в случае, когда параметры волновода изменяются таким образом, что x , поднимаясь по мнимой оси, переходит через нуль и выходит в верхнюю половину комплексной плоскости. Поскольку объяснение поведения волновых чисел за критическим значением в некоторых работах (см. [4, 5]) дано неверно, рассмотрим этот вопрос в настоящем сообщении более подробно. Заметим, что данный вопрос частично уже обсуждался в работах [6, 7] для плоского диэлектрического волновода и в работе [8] для общего случая, включая круглый волновод.

Из анализа, приведенного в работах [4(§ 56), 5], следует, что при выходе x в верхнюю комплексную полуплоскость оно сразу становится комплексным, т. е. сходит с мнимой оси, и при этом траектория его движения сразу оказывается в области быстрых несобственных или вытекающих волн (см. рис. 1, штрих-пунктирная линия; мы используем здесь терминологию и классификацию волн, данных в [8]). В дейст-

вительности же, как увидим ниже (см. также [6, 7 (§14), 8]), движение волновых чисел за критическим значением $\alpha=0$ будет иным, а именно таким, как показано на рис. 1 пунктиром. Сначала α поднимается вверх по мнимой оси (волна опять становится медленной: $h > k$), а затем выйдет в комплексную плоскость в первый квадрант и только после перехода границы медленных и быстрых волн попадает в область вытекающих волн. Это нетрудно показать, например, на основании графического решения дисперсионного уравнения.

Дисперсионное уравнение для плоского диэлектрического волновода (пластины) имеет вид [2]

$$i \times a = \frac{1}{\epsilon} g a \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} g a \\ -\operatorname{ctg} g a \end{array} \right\}, \quad (1)$$

соответственно для четных и нечетных волн, где a — полутолщина пластины, ϵ — относительная (по отношению к внешней среде) диэлектрическая проницаемость:

Для круглого диэлектрического цилиндра дисперсионное уравнение (для простоты, как и в [5], мы ограничимся рассмотрением симметричных волн) имеет вид [1, 3]

$$\alpha a \frac{H_0^{(2)}(\alpha a)}{H_1^{(2)}(\alpha a)} = \frac{1}{\epsilon} g a \frac{J_0(ga)}{J_1(ga)}, \quad (2)$$

где a — радиус цилиндра. Здесь мы выписали только уравнения для E -волн. Аналогичный вид имеют дисперсионные уравнения для H -волн, для которых дальнейшие рассуждения также справедливы. Дополнительным к уравнениям (1) и (2) является уравнение связи поперечных волновых чисел для поля внутри и вне волновода:

$$(ga)^2 + (i \times a)^2 = (ka)^2 (\epsilon - 1). \quad (3)$$

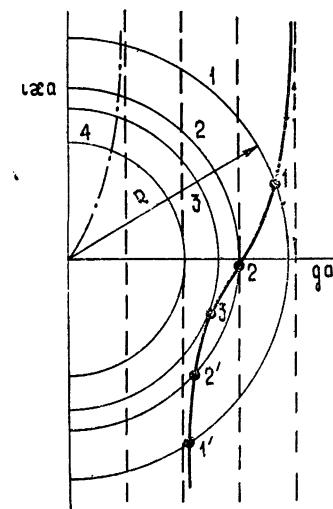


Рис. 2.

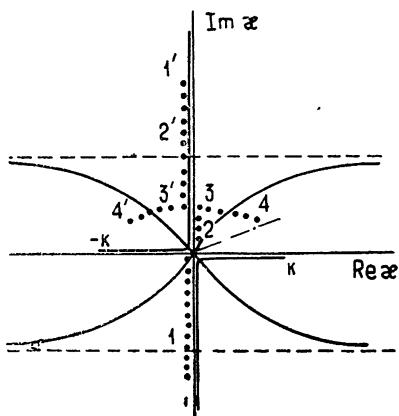


Рис. 1.

На рис. 2 дано качественное графическое решение дисперсионных уравнений (1), (2) совместно с уравнением (3). Это последнее уравнение в координатах ga , $i \times a$ изображается в виде окружностей радиуса $R = ka(\epsilon - 1)^{1/2}$. Уравнения же (1) и (2) дают многозначные ветви такого вида, как показано на рис. 2. При этом важно подчеркнуть, что в местах пересечения ветвей с осью ga они имеют конечную положительную производную $0 < d(i \times)/dg < \infty$. Обычно, как уже говорилось выше, рассматривались только решения, соответствующие положительным значениям $i \times = \alpha > 0$. Мы же исследуем, кроме того, отрицательные решения.

Проследим за поведением графического решения на примере пересечения

окружности с представленной ветвью. Пусть при некотором значении частоты поля (ν , следовательно, k) окружность занимает положение 1 и имеются два пересечения в точках 1 и 1'. Первое решение соответствует поверхностной волне, второе—медленной несобственной волне. При уменьшении частоты поля окружность последовательно занимает положение 2, 3, 4. В положении 2 волновое число \times поверхностной волны, пройдя через нуль, входит в область медленных несобственных волн (точка 2). В положении 3 оба решения совпадают (окружность касается ветви), и при дальнейшем уменьшении частоты пересечение отсутствует: корни выходят в комплексную плоскость. Дальнейшее движение корня в комплексной плоскости будет таким, как было сказано выше и как показано на рис. 1. Этот последний результат был получен в работе [6] (см. также [7]) путем численного решения дисперсионного уравнения на ЭВМ для плоского диэлектрического волновода.

Как известно, особым случаем является четная волна в плоском волноводе и дипольная волна в круглом волноводе, которые не выходят в верхнюю комплексную полуплоскость. Значение поперечного волнового числа \times для них при $\omega \rightarrow 0$ или $\epsilon \rightarrow 1$ стремится к нулю. На рис. 2 соответствующая этим волнам ветвь показана штрих-пунктирной линией.

Важным результатом приведенного анализа является то, что он показывает существование для каждого типа волн (кроме двух, отмеченных выше) области изменения частоты или параметров волновода, когда данный тип волны не является ни поверхностным, ни вытекающим. Согласно введенной в [8] терминологии мы говорим, что в этой области волна существует в виде медленной ($\text{Re } h > k$) несобственной ($\text{Im } \times > 0$) волны, хотя с физической точки зрения интерпретировать такую волну пока не удается. Интересно отметить, (на это уже указывалось в [6, 7]), что решения, соответствующие точкам 1'—4', дают обратную ($\text{Re } h < 0$) несобственную волну, волновое число которой располагается во втором квадранте (рис. 1). Причем, как показано в [9], в случае круглого диэлектрического волновода из-за многозначности функций Ханкеля волновые числа обратных несобственных волн находятся на другом листе римановой поверхности по отношению к волновым числам прямых волн.

Далее, если кривая движения волнового числа \times достаточно далеко зайдет в область медленных несобственных волн, что для диэлектрических волноводов и имеет место, то вытекающая волна уже сразу после возникновения оказывается быстро затухающей вдоль оси волновода волной ($|\text{Im } h|$ велико).

Наличие указанной промежуточной области между областями, где волна является либо поверхностной, либо вытекающей, непосредственно связано с резонансным характером поля волны в поперечном сечении, который математически отражен в том, что поперечные волновые числа одновременно удовлетворяют уравнениям (1) или (2) и (3). Именно неучет этого обстоятельства привел авторов работ [4, 5] к неверным результатам. Надо еще отметить, что важно, чтобы резонансные свойства определялись границами волновода, а не неоднородностью среды волновода в поперечном сечении, как, например, в рассмотренном в работе [10] случае. В этом последнем случае кривая движения волнового числа \times практически не заходит в область медленных несобственных волн, а сразу попадает в область быстрых (т. е. вытекающих) волн. При этом вытекающие волны непосредственно после возникновения обладают малыми потерями на излучение.

В работе [10] рассмотрен случай непрерывной неоднородной по сечению среды. Но и при кусочно-однородной среде, а именно в многослой-

ных и трубчатых волноводах [6, 7], также могут существовать слабозатухающие вытекающие волны, т. е. волны, имеющие малые потери на излучение.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. G. Kiely, *Dielectric aerials*, Methuen and Co, London, 1953.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966
4. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. J. Argonak, Electron. Lett., 5, № 3, 41 (1969).
6. В. П. Мальцев, Е. И. Нефедов, В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1855 (1969).
7. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
8. В. В. Шевченко, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1768 (1969).
9. J. R. James, Electron. Lett., 5, № 11, 252 (1969).
10. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1389 (1969).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1969 г.

BEHAVIOUR OF THE WAVE NUMBERS OF WAVES IN DIELECTRIC WAVEGUIDE BEHIND THE CUTOFF VALUE

V. V. Shevchenko

On the basis of the graphical solution of dispersion equations, the behaviour of the wave numbers of waves of plane and circular dielectric waveguides has been investigated when the field frequency and waveguide parameters vary. Basic consideration is given to the transition of wave numbers through the cutoff value and their behaviour in the region behind the cutoff value in which the waves are not already surface waves.

УДК 538.56 : 621.372.8

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ПЛОСКИХ
НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ВОЛНОВОДЕ
МЕТАЛЛОПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ПЛЕНОЧНЫМИ
СТРУКТУРАМИ**

Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, В. С. Дронова, Ю. М. Пьяных

Из теоретических расчетов и экспериментальных результатов устанавливается возможность исследования дифракционных полей в волноводе путем регистрации температурных рельефов на металлополупроводниковых пленочных структурах.

В работе [1] описан метод распределенной согласованной нагрузки для изучения распределения электромагнитного поля в регулярных волноводах. Процесс формирования информации о пространственном распределении потока мощности СВЧ связан с поглощением и преобразованием энергии ВЧ поля в тепловую энергию и возникновением температурного рельефа на тонкопленочной нагрузке. Регистрация температурного рельефа может осуществляться как точечным полупроводниковым термозондом [1], так и мозаикой пленочных полупроводниковых термодатчиков [2]. Возможно применение методов визуализации тепловых полей на основе температурных эффектов в пленках полупроводниковых материалов [3] и люминофоров [4].

Представляет интерес анализ возможности использования согласованной пленочной структуры для исследования полей СВЧ нерегулярных волноводов. Очевидно, основные особенности и количественные соотношения легко установить, рассматривая дифракционные поля плоских неоднородностей сравнительно простой конфигурации, которые электродинамическим путем можно рассчитать с необходимой степенью точности.

1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В качестве эталона выберем поле дифракции, возникающее в прямоугольном волноводе с волной типа H_{01} вблизи центральной индуктивной полоски, размещенной в плоскости расположения согласованной пленочной структуры [2]. Отстоящая на расстоянии l от короткозамыкающего поршня многослойная структура состоит из диэлектрической подложки (слюда) толщиной d_2 , на которую нанесен поглощающий металлический слой толщиной d_1 и электропроводностью σ_1 (никром), с обратной стороны — нанесена полупроводниковая пленка толщиной d_3 . Индуктивная полоска представляет собой пленку толщиной d_0 высокопроводящего (σ_0) металла (серебро), нанесенную на отдельную слюянную полоску шириной s и размещенную в центре волновода непосредственно перед металлополупроводниковой структурой. Полагая, что

1) индуктивной составляющей сопротивления металлических слоев по сравнению с активной составляющей можно пренебречь,

2) влиянием диэлектрической подложки и полупроводниковой пленки вследствие малости их толщин и комплексных диэлектрических проницаемостей можно пренебречь [5],

3) расстояние l от структуры до поршня постоянно и равно $(2n+1)\lambda_b/4$, рассчитаем поле дифракции в нашем случае.

Предварительно рассмотрим вариант размещения индуктивной полоски и структуры в бесконечном волноводе. Тогда под действием падающей волны основного типа H_{01}

$$E_x = E_0 \exp(-jk'z) \sin(\pi y/a),$$

где $k' = [k^2 - \pi^2/a^2]^{1/2} = 2\pi/\lambda_b$, $k = 2\pi/\lambda$ ($E_0 = 1$) в составной металлической пленке, закрывающей все поперечное сечение волновода и включающей области различной толщины (d_0, d_1) и проводимости (σ_0, σ_1), индуцируется ток

$$\begin{aligned} I = & \sigma_1 \int_0^{\frac{a-s}{2}} \int_0^{d_1} E_{x \text{ пл}}(y, z) dy dz + \sigma_0 \int_{\frac{a-s}{2}}^{\frac{a+s}{2}} \int_0^{d_0} E_{x \text{ пл}}(y, z) dy dz + \\ & + \sigma_1 \int_{\frac{a+s}{2}}^a \int_0^{d_1} E_{x \text{ пл}}(y, z) dy dz. \end{aligned}$$

Условие непрерывности на поверхности составной пленки тангенциальной электрической составляющей поля в силу отсутствия зависимости тока I от толщины ($d_1 \ll d_0 \ll \delta = \sqrt{2/\mu\omega\sigma_i}$) можно записать так:

$$E_{x \text{ пл}}(y, d_i) = E_{x \text{ пл}}(y, 0) = E_{x \text{ пад}}(y, 0) + E_{x \text{ изл}}(y, 0) \quad (i = 1, 2).$$

Излученное составной пленкой поле $E_{x \text{ изл}}$ будем искать в виде суперпозиции H_{0n} -волн:

$$E_{x \text{ изл}}(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{B}_n \sin(\pi ny/a) \exp(-j\Gamma_n |z|), \quad (1)$$

где $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - n^2\pi^2/a^2}$ ($\Gamma_1 = k'$).

Поле излучения пленки с хорошим приближением ($d_i \ll \delta$) определим как поле излучения плоского тока [6]:

$$E_{x \text{ изл}}(y, z) = -\frac{120\pi k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \frac{\exp(-j\Gamma_n |z|)}{\Gamma_n} \times$$

$$\times \left\{ d_1 \sigma_1 \int_0^{\frac{a-s}{2}} \left(\sin \frac{\pi y_1}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m \sin \frac{m\pi y_1}{a} \right) \sin \frac{n\pi y_1}{a} dy_1 + d_0 \sigma_0 \times \right. \\ \left. \times \int_{\frac{a-s}{2}}^{\frac{a+s}{2}} \left(\sin \frac{\pi y_1}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m \sin \frac{m\pi y_1}{a} \right) \sin \frac{n\pi y_1}{a} dy_1 \right\} \quad (2)$$

$$\times \int_{\frac{a+s}{2}}^a \left(\sin \frac{\pi y_1}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m \sin \frac{m\pi y_1}{a} \right) \sin \frac{n\pi y_1}{a} dy_1 + d_1 \sigma_1 \int_{\frac{a+s}{2}}^a \left(\sin \frac{\pi y_1}{a} + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \dot{B}_m \sin \frac{m\pi y_1}{a} \Big) \sin \frac{n\pi y_1}{a} dy_1 \Big\}.$$

Для определения амплитудных значений B_n , решая совместно (1), (2) и приводя бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений к каноническому виду, получим:

где

$$\begin{aligned} \alpha'_{2n+1, 2m+1} = & -\frac{60\sigma_0 d_0 k}{\Gamma_{2n+1}} (-1)^{m+n} \left[\frac{\sin(m-n)(\pi s/a)}{m-n} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(m+n+1)(\pi s/a)}{m+n+1} \right] = \sigma_0 d_0 \Phi_{2n+1}(m, n, s), \end{aligned}$$

$$\alpha''_{2n+1\,2m+1} = \sigma_1 d_1 \Phi_{2n+1}(m, n, s),$$

$$\begin{aligned} a'_{2n+2 \ 2m+2} = & -\frac{60 \sigma_0 d_0 k}{\Gamma_{2n+2}} (-1)^{m+n} \left[\frac{\sin(m-n)(\pi s/a)}{m-n} \right. \\ & \left. - \frac{\sin(m+n+2)(\pi s/a)}{m+n+2} \right] = \sigma_0 d_0 \Phi_{2n+2}(m, n, s), \end{aligned}$$

$$\alpha''_{2n+2 \ 2m+2} = \sigma_1 d_1 \Phi_{2n+2}(m, n, s) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\beta_{2n+1, 2m+1} = -\frac{60\pi\sigma_1 d_1 k}{\Gamma_{2n+1}} \delta(n-m), \quad \beta_{2n+2, 2m+2} = -\frac{60\pi\sigma_1 d_1 k}{\Gamma_{2n+2}} \delta(n-m).$$

Бесконечная система (3) имеет единственное решение, принадлежащее классу ограниченных решений. Строгое доказательство единственности ограниченного решения бесконечной системы (3) можно провести, например, методом [7], разработанным для задач дифракции на металлических препятствиях. Это решение можно выразить в виде сходящихся бесконечных определителей Крамера. В силу существования

единственного ограниченного решения бесконечной системы (3) она может быть решена (приближенно) методом редукции, для чего следует положить $(\alpha'_{mn} - \alpha''_{mn}) = 0$ при всех $m = n > N/2 - 1$ и решить систему из конечного числа N уравнений с комплексными коэффициентами. Чтобы получить приближенное решение, отличное от точного не более чем на 0,1%, на ЭВМ решалась система 20 порядка методом Гаусса с выбором главного элемента. При определении постоянных коэффициентов системы (3) использовались следующие параметры и размеры пленок: $1/\sigma_0 d_1 = \sqrt{\mu/\epsilon} (\lambda_b/\lambda) = Z_b$, $1/\sigma_0 d_0 = Z_b/50,4$, $s/a = 0,1$, $a = 23 \text{ м.м.}$, $b = 10 \text{ м.м.}$. Частота поля СВЧ принималась равной $f = 9,375 \text{ Гц}$ ($\lambda = 3,2 \text{ см.}$). На рис. 1 (кривая 4) представлено поведение модуля напряженности электрической компоненты дифракционного поля в плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_d(y, 0)}{E_d|_{\max}} \right| &= \left| \sin \frac{\pi y}{a} + \sum_{n=0}^{N/2-1} \dot{B}_{2n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi y}{a} \right| = \\ &= \left| \sin \frac{\pi y}{a} + \sum_{n=0}^{N/2-1} (b'_{2n+1} + jb''_{2n+1}) \sin (2n+1) \frac{\pi y}{a} \right|. \end{aligned}$$

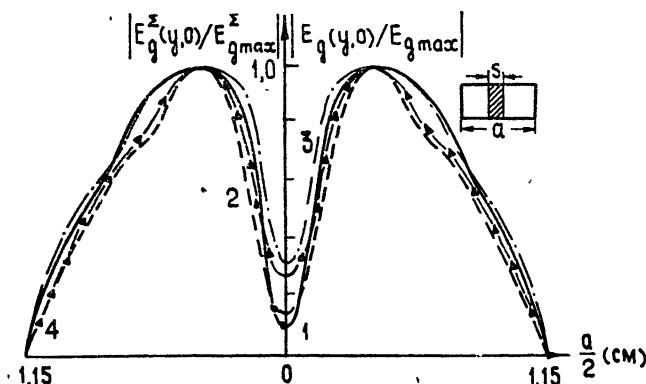


Рис. 1. Влияние согласованной структуры на поле дифракции индуктивной полоски в короткозамкнутом и бесконечном волноводах.

При распространении вдоль волновода от плоскости $z = 0$ высшие типы волн быстро затухают [8]. Только прошедшая волна основного типа, отразившись от поршня, наводит дополнительный ток, возбуждающий вторичное поле, высшие типы которого при распространении по волноводу также затухают. Вторично отраженная волна основного типа, отразившись от поршня, вновь наводит в пленке дополнительный ток и т. д. Результирующее дифракционное поле в плоскости $z = 0$ можно представить в виде суперпозиции:

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_d^2(y, 0)}{E_d^2|_{\max}} \right| &= [(1 + \dot{B}_1) - (1 + \dot{B}_1)^2 \exp(-j2k'l) [1 - \dot{B}_1 \exp(-j2k'l) + \\ &+ \dot{B}_1^2 \exp(-j4k'l) - \dots + (-1)^n \dot{B}_1^n \exp(-j2nk'l)]] \sin \frac{\pi y}{a} + \end{aligned}$$

$$+ \dot{B}_3 - \dot{B}_3(1 + \dot{B}_1) \exp(-j2k'l) [1 - B_1 \exp(-j2k'l) + \\ + \dot{B}_1^2 \exp(-j4k'l) - \dots + (-1)^n \dot{B}_1^n \exp(-j2nk'l)] \} \sin \frac{3\pi y}{a} + \dots \quad (4)$$

Учитывая, что $l = (2n + 1)(\lambda_b/4)$, выражение (4) упростится:

$$\frac{|E_d^y(y, 0)|}{|E_d^y|_{\max}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2n+1} + j\tilde{b}''_{2n+1}) \sin (2n + 1) \frac{\pi y}{a} = 2 \frac{1 + \dot{B}_1}{1 - \dot{B}_1} \sin \frac{\pi y}{a} + \\ + \frac{2\dot{B}_3}{1 - \dot{B}_1} \sin \frac{3\pi y}{a} + \dots + \dot{B}_{2n+1} \frac{2}{1 - \dot{B}_1} \sin (2n + 1) \frac{\pi y}{a}. \quad (5)$$

Конечное число членов в ряде (5) обусловлено применением метода редукции ($n = N/2 - 1$) при решении бесконечной системы (3). Используя уже известные значения \dot{B}_n , было рассчитано поведение модуля $|E_d^y(y, 0)| / |E_d^y|_{\max}$ дифракционного поля для составной пленки в короткозамкнутом волноводе (кривая 3 рис. 1).

Чтобы оценить степень влияния пленочной структуры, по аналогичной методике было просчитано поле дифракции одной индуктивной полоски, размещенной в бесконечном (кривая 2) и закороченном (кривая 1) волноводах (рис. 1). Из сравнения поведения кривых рис. 1 следует, что наличие поглощающей пленки в плоскости расположения неоднородности незначительно искажает дифракционное поле последней.

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ

Дифракционное электромагнитное поле однозначно определяет распределение наведенных токов в поглощающей пленке, формирующих температурный рельеф. Тогда для интенсивности выделения тепла в элементе объема металлической пленки $dV = d_1 dx dy$, размещенной в короткозамкнутом волноводе, можно записать.

$$dP(x, y) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_1 d_1 |E_d^y(y, 0)|^2 dt dx dy = P_0 \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1} \tilde{b}'_{2n+1} + \\ + \tilde{b}''_{2m+1} \tilde{b}''_{2n+1}) \sin \left[(2m + 1) \frac{\pi y}{a} \right] \sin \left[(2n + 1) \frac{\pi y}{a} \right] dx dy,$$

где $P_0 = \sigma_1 d_1 E_0^2 / 2$ — плотность потока энергии [$\text{вт} \cdot \text{см}^{-2}$].

Составляя уравнение теплового баланса в случае нестационарного процесса для элемента «приведенной» пленки (структурой) толщиной $d = d_1 + d_2 + d_3$ и площадью $dx dy$, полагая, что выделение тепла происходит по всей толщине структуры и не меняется со временем, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - h^2 u + p'(x, y), \quad (6)$$

где

$$g^2 = \lambda/c\rho, \quad h^2 = \eta/dc\rho, \quad p'(x, y) = \frac{P_0}{dc\rho} \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1} \tilde{b}'_{2n+1} + \\ + \tilde{b}''_{2m+1} \tilde{b}''_{2n+1}) \sin \left[(2m + 1) \frac{\pi y}{a} \right] \sin \left[(2n + 1) \frac{\pi y}{a} \right];$$

λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, η — коэффициент теплообмена, $T(x, y) - T_0 = u$ — перепад температуры пленочной структуры относительно температуры окружающей среды T_0 , принятой равной нулю.

Краевые условия записываются в виде:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, 0, t) = u(x, a, t) = 0, \quad u(0, y, t) = u(b, y, t) = 0. \quad (7)$$

Решение неоднородного линейного уравнения (6), удовлетворяющего условиям (7), можно представить в виде ряда:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{P_0}{dc\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^p]}{\pi p} \frac{2q[1 - (-1)^q]}{\pi} \sin\left(p \frac{\pi x}{b}\right) \times \\ & \times \sin\left(q \frac{\pi x}{a}\right) \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1} \tilde{b}'_{2n+1} + \tilde{b}''_{2m+1} \tilde{b}''_{2n+1}) \left[\frac{1}{q^2 - (2m - 2n)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{q^2 - (2m + 2n + 2)^2} \right] \frac{1 - \exp\{-[g^2(p^2\pi^2/b^2 + q^2\pi^2/a^2) + h^2]t\}}{[(p^2\pi^2/b^2 + q^2\pi^2/a^2) g^2 + h^2]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) описывает процесс установления теплового состояния пленочной структуры под действием электромагнитного поля, сформированного индуктивной полоской и самой структурой, установленных в короткозамкнутом волноводе.

В целях упрощения рассмотрим одномерную задачу и установим распределение температуры вдоль оси y . Тогда линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - h^2 v + p''(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} p''(x, y) = & \frac{P_0}{dc\rho} \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1} \tilde{b}'_{2n+1} + \tilde{b}''_{2m+1} \tilde{b}''_{2n+1}) \cos\left[(2m + 1) \frac{\pi y}{a}\right] \times \\ & \times \cos\left[(2n + 1) \frac{\pi y}{a}\right], \end{aligned}$$

при начальном и граничных условиях

$$v(y, 0) = 0, \quad v(-a/2, t) = v(a/2, t) = 0$$

будет иметь решение

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1} \tilde{b}'_{2n+1} + \tilde{b}''_{2m+1} \tilde{b}''_{2n+1}) \left\{ Q_{mn}^{(1)} \cos\left[(2m + 1) \frac{\pi y}{a}\right] \right. \\ & \times \cos\left[(2n + 1) \frac{\pi y}{a}\right] + Q_{mn}^{(2)} \sin\left[(2m + 1) \frac{\pi y}{a}\right] \sin\left[(2n + 1) \frac{\pi y}{a}\right] - \quad (9) \\ & \left. - Q_{mn}^{(2)} (-1)^{m-n} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{ch} k(a/2)} \right\} - \frac{P_0}{\eta} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q[1 - (-1)^q]}{\pi[1 + (q\pi/a)^2]} \times \\ & \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{m=n=0}^{N/2-1} (\tilde{b}'_{2m+1}\tilde{b}'_{2n+1} + \tilde{b}''_{2m+1}\tilde{b}''_{2n+1}) \left[\frac{1}{q^2 - (2m-2n)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{q^2 - (2m+2n+2)^2} \right] \exp \left[- \left(h^2 + \frac{q^2 \pi^2 g^2}{a^2} \right) t \right] \times \\ & \times \sin \left[\frac{\pi q}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k^2 = \frac{h^2}{g^2} = \frac{\eta}{\lambda d}, \quad Q_{mn}^{(1)} = \frac{P_0}{\eta} [1 + (\pi/ak)^2 (2m+1)^2 + (\pi/ak)^2 (2n+1)^2] \{ [1 + \\ + (\pi/ak)^2 (2m+1)^2 + (\pi/ak)^2 (2n+1)^2]^2 - [2(\pi/ak)^2 (2m+1)(2n+1)]^2 \}^{-1}, \\ Q_{mn}^{(2)} = \frac{P_0}{\eta} \frac{2(\pi/ak)^2 (2m+1)(2n+1)}{[1 + (\pi/ak)^2 (2m+1)^2 + (\pi/ak)^2 (2n+1)^2]^2 - [2(\pi/ak)^2 (2m+1)(2n+1)]^2}. \end{aligned}$$

Здесь P_0/η — температура единицы поверхности пленки, находящейся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой выделяется тепловая мощность P_0 в случае отсутствия теплопередачи огоссенных участков.

Первая конечная сумма в (9) соответствует установившемуся тепловому состоянию, а вторая в виде бесконечных рядов — возрастанию температуры при $t > 0$. Степень отклонения установившегося температурного рельефа от закона распределения потока мощности СВЧ в основном определяется теплофизическими параметрами $k = \sqrt{\eta/\lambda d}$. Кривая рис. 2 согласно (9) изображает теоретическое распределение

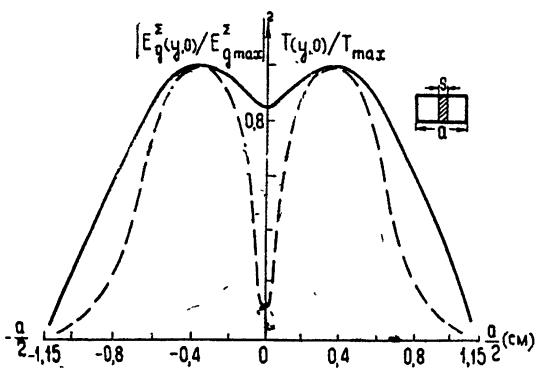


Рис. 2. Теоретическое распределение температурного рельефа ($F = 0$) на структуре ($k = 10.43 \text{ см}^{-1}$), размещенной в плоскости индуктивной пластики.

$T(y) = T_0/T_{\max}$ на пленочной структуре ($k = 10.43 \text{ см}^{-1}$) вдоль широкой стороны осевого сечения короткозамкнутого волновода. Для сравнения здесь же пунктирная кривая изображает теоретическое распределение потока мощности дифракционного поля $|E_y(y, 0)|^2 / |E_y|_{\max}^2$. Легко показать, что при достаточно больших значениях параметра k постоянные в (9) $Q_{mn}^{(1)} \rightarrow P_0/\eta$, $Q_{mn}^{(2)} \rightarrow 0$ и температурный рельеф структуры будет воспроизводить распределение потока мощности СВЧ.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для экспериментального исследования дифракционных полей в волноводе была использована пленочная структура, аппаратура и методика измерения, описанная в [2]. На рис. 3 представлены температурные рельефы нулевого ($F = 0$ гц) и первого ($F = 18$ гц) порядков вдоль оси y , где пунктирной кривой изображено теоретическое распределение

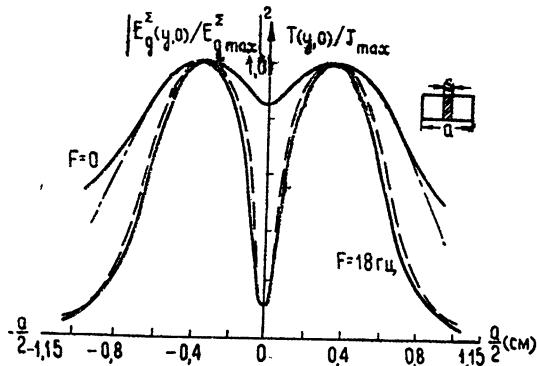


Рис. 3. Экспериментальное распределение температурных рельефов нулевого ($F=0$) и первого ($F=18$ гц) порядков на структуре ($k=10,43 \text{ см}^{-1}$), размещенной в плоскости индуктивной полоски.

потока мощности СВЧ, а штрих-пунктирной кривой — теоретическое распределение температуры ($F=0$ гц) согласно (9). Хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов подтверждает возможность использования метода распределенной согласованной нагрузки (РСН), для исследования дифракционных полей в волноводе.

В качестве иллюстраций возможности метода РСН было исследовано поле сложной неоднородности, образованной встречными металлическими полосками нулевой толщины (рис. 4). Экспериментальные

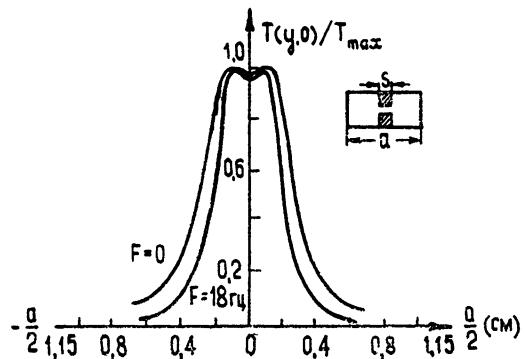


Рис. 4. Экспериментальное распределение температурных рельефов нулевого ($F=0$) и первого ($F=18$ гц) порядков на структуре ($k=10,43 \text{ см}^{-1}$), размещенной в плоскости сложной неоднородности.

кривые отражают известный факт концентрации энергии СВЧ в зазоре, которому соответствует концентрация тепловой энергии в нашем случае.

Систематическая погрешность при регистрации пульсирующих температурных рельефов ($F = 18$ гц), обусловленная тепловым растеканием, составляла 3—5% и снижалась с ростом модуляционной частоты F в соответствии с результатами [2].

ВЫВОДЫ

1. Решена задача дифракции волны типа H_{01} прямоугольного волновода на центральной индуктивной полоске и металлогипопроводниковой пленочной структуре.
2. Показано, что искажение поля дифракции индуктивной полоски, вносимое согласованной многослойной структурой, незначительно.
3. Отклонение температурных рельефов от закона распределения наведенных токов в поглощающей пленке, обусловленное растеканием теплового поля, уменьшается с ростом значений параметра k и модуляционной частоты F .
4. Теоретически и экспериментально показана возможность применения метода РСН с использованием металлогипопроводниковых пленочных структур для исследования дифракционных полей в волноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Котосонов, Б. И. Власов, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2 311 (1968).
2. Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Б. Д. Корчагин, Ю. М. Пьяных, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 8, 1222 (1969).
3. W. Harding, C. Hilsim, D. Northrop, Nature, 181, 691 (1958).
4. А. П. Бажулин, Е. А. Виноградов, Н. А. Ирисова, С. А. Фридман, Письма в ЖЭТФ, 8, вып. 5, 261 (1968).
5. Г. А. Югова, Тр. ВНИИФТРИ, Стандартгиз, М., вып. 80 (140), 108 (1966).
6. А. Левин, Современная теория волноводов, М.: ИЛ, 1954.
7. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестopalов, ЖТФ, 32, № 4, № 4, 381 (1962).
8. Müller, Archiv der elektrischen Übertragung, 7, 451 (1953).

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
3 октября 1969 г.

INVESTIGATION OF DIFFRACTION FIELDS OF PLANE IRREGULARITIES
IN A WAVEGUIDE USING METAL-SEMICONDUCTOR FILM STRUCTURES

B. I. Vlasov, N. V. Kotosonov, V. S. Dronova, Yu. M. Pyanykh

From theoretical calculations and experimental results a possibility is established of investigating diffraction fields in a waveguide by registering temperature relieves on metal-semiconductor film structures.

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ШАРАХ, ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОДИН В ДРУГОМ

B. I. Розенберг

Построено строгое решение задачи о дифракции электромагнитных волн на шарах, произвольно расположенных один в другом. Получено решение в виде рядов по сферическим функциям с коэффициентами, определяемыми из бесконечной алгебраической системы.

Задача, сформулированная в заголовке статьи, возникла в связи с ее важными и многочисленными приложениями к радиолокации (радиометеорологии), геофизике, радиоастрономии и др. и в общей постановке к настоящему моменту решена только для двух шаров. Так, в [1, 2] было построено общее решение в случае концентрического расположения двух шаров, которое допускало непосредственное обобщение (см., например, [3]) на случай любого их количества при условии, что все они имеют общий центр. Случай же неконцентрического расположения двух шаров, когда источником является вертикальный диполь, расположенный на линии их центров, исследован в [4, 5], а при произвольной ориентации диполя — в [6, 7]. В работе [7] также рассмотрен случай плоской волны и различные характеристики вторичного электромагнитного поля в дальней зоне.

1. ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ ОДИН В ДРУГОМ шаров в поле дипольного излучателя

Пусть в безграничном пространстве находятся v шаров, расположенных один в другом (рис. 1) с центрами O_1, O_2, \dots, O_v , ($O_1O_2 = h_2, O_2O_3 = h_3, \dots, O_{v-1}O_v = h_v$) с радиусами b_1, b_2, \dots, b_v соответственно. Будем называть средой 0 часть пространства, внешнего по отношению к шару радиуса b_1 ; средой j — часть внутренности шара радиуса b_j , исключая область, занимаемую шаром с центром в точке O_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, v - 1$; средой v — внутренность шара радиуса b_v . При этом будем связывать с j средой ее электромагнитные параметры ϵ_j (диэлектрическая проницаемость) и μ_j (магнитная проницаемость), считая их в общем случае комплексными. Предположим также, что в некоторой точке O_0 среды 0 ($O_0O_1 = h_1 > b_1$) находится элементарный электрический диполь* момента p , произвольно ориентированный в пространстве**. Ставится задача определения электромагнитных полей в каждой из рассматриваемых сред.

Сформулируем задачу в координатной форме, для чего введем $2v - 1$ систем координат.

* В случае магнитного диполя решение непосредственно будет следовать из соотношений между потенциалами Дебая первичного поля электрического и магнитного диполей (см., например, [6], стр. 376).

** Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и в дальнейшем опускается. Система единиц СИ.

Система $X_1Y_1Z_1$. Ось Z_1 проведем по прямой O_1O_0 ; ось X_1 —по линии пересечения плоскости, перпендикулярной O_1O_0 в точке O_1 и плоскости, проходящей через ось Z_1 и вектор p ; ось Z_1 —перпендикулярно осям X_1 и Z_1 , так, чтобы система координат $X_1Y_1Z_1$ была правой. Если вектор

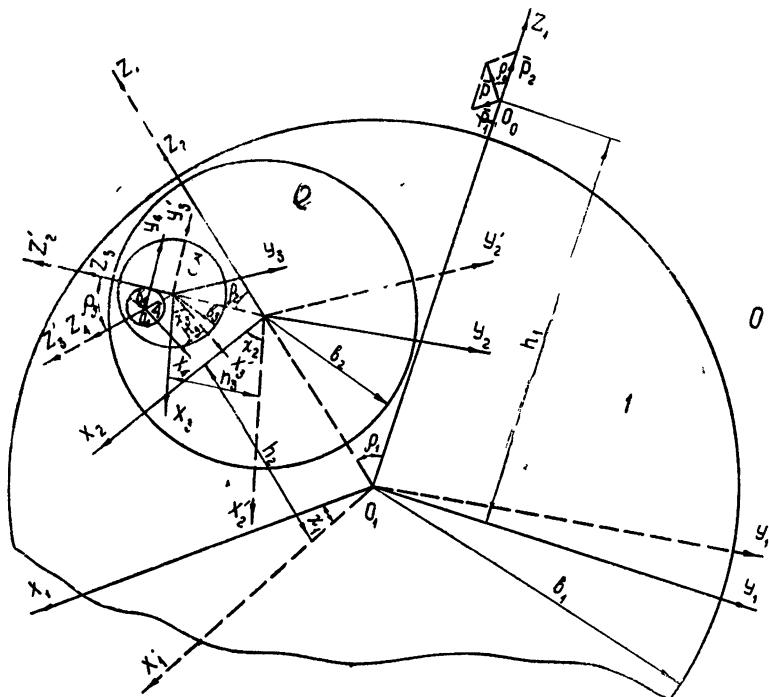


Рис. 1. Произвольно расположенные один в другом шары в поле дипольного излучателя.

лежит на прямой O_1O_0 (вертикальный диполь), то положение оси X_1 фиксируем таким образом, чтобы плоскость $X_1O_1Z_1$ проходила через точку O_2 . Угол между моментом диполя p и осью Z_1 обозначим через ρ_0 .

Системы $X'_jY'_jZ'_j$, $j = 1, 2, \dots, v - 1$. Ось Z'_j проведем по прямой O_jO_{j+1} ; ось X'_j проведем по линии пересечения плоскости, перпендикулярной оси Z'_j , в точке O_j с плоскостью $X_jO_jY_j$ и направим в ту сторону, откуда наблюдатель видит вращение, совмещающее ось Z_j с осью Z'_j по углу, меньшему π , происходящим против часовой стрелки; ось Y'_j —перпендикулярно осям X'_j и Z'_j так, чтобы система координат $X'_jY'_jZ'_j$ имела правую ориентацию. Если точка O_{j+1} лежит на прямой $O_{j-1}O_j$, то ось X'_j направим по оси X_j , Y'_j —по оси Y_j , Z'_j —по оси Z_j .

Системы $X_jY_jZ_j$ ($j = 2, 3, \dots, v$) получаются сдвигом системы $X'_{j-1}Y'_{j-1}Z'_{j-1}$ параллельно самой себе вдоль положительной полуоси Z'_{j-1} на расстояние h_j . При этом начало O_{j-1} переходит в точку O_j , а оси X_j , Y_j параллельны осям X'_{j-1} , Y'_{j-1} соответственно.

Зададим положение системы координат $X'_jY'_jZ'_j$ ($j = 1, 2, \dots, v - 1$) с помощью углов Эйлера: χ_j —угла, составляемого осью X'_j с осью X_j ($0 \leq \chi_j < 2\pi$), ρ_j —угла, образованного осью Z'_j с Z_j ($0 \leq \rho_j \leq \pi$), причем под положительным углом мы подразумеваем угол, на который

осуществляется (в правой системе координат) вращение против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси, вокруг которой производится поворот. Углами Эйлера γ_j , ρ_j система $X'_j Y'_j Z'_j$ определяется однозначно. Исключение составляют углы, соответствующие положению точки O_{j+1} на положительной, либо отрицательной частях оси Z_j . Тогда согласно сделанному предположению о выборе системы $X'_j Y'_j Z'_j$ будем считать для обоих случаев $\rho_j = 0$ и $\chi_j = 0$.

Введем в каждой из построенных систем $j = 1, 2, \dots, v$ сферические координаты: в системе $X_j Y_j Z_j - r_j, \theta_j, \varphi_j$, в системе $X'_j Y'_j Z'_j - r'_j, \theta'_j, \varphi_{j+1}$, причем $0 \leq \theta_j, \theta'_j \leq \pi$, $0 \leq r_j < \infty$, $0 \leq \varphi_j < 2\pi$.

Решение задачи, сформулированной в заголовке разд. 1, связано с решением векторных уравнений Максвелла при условии непрерывности касательных составляющих результирующих полей на границах сред и условии излучения Зоммерфельда. Используя потенциалы Дебая $T_j = \{U_j, V_j\}$, с помощью тех же, что в работе [7], формул и обозначений указанную задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_j + k_j^2 T_j &= 0 \text{ в } j \text{ среде } (j = 0, 1, \dots, v), \\ q_j T_j &= q_{j+1} T_{j+1} \\ \frac{\partial(r_{j+1} T_j)}{\partial r_{j+1}} &= \frac{\partial(r_{j+1} T_{j+1})}{\partial r_{j+1}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{при } -r_{j+1} &= b_{j+1} \\ j &= 0, 1, \dots, v-1, \\ \frac{\partial T_0}{\partial r} - i k_0 T_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Будем искать решение задачи (1) в виде

$$T_j = \begin{cases} T_{0,0} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm}^{(0)} h_n(k_0 r_1) P_n^m(\cos \theta_1) \exp(im\varphi_1) & (j=0) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(j)} j_n(k_j r_j) P_n^m(\cos \theta_j) \exp(im\varphi_j) + B_{nm}^{(j)} h_n(k_j r_{j+1}) \times \\ \times P_n^m(\cos \theta_{j+1}) \exp(im\varphi_{j+1}) & (j=1, 2, \dots, v). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $B_{nm}^{(v)} \equiv 0$, $T_{0,0}$ — отличается от аналогичного в [7] заменой символа t_{0n}^m на $A_{nm}^{(0)}$, k_1 на k_0 , h на h_1 , α_1 на σ_0 .

Удовлетворяя граничным условиям в (1) с помощью теорем сложения [6, 8, 9] и учитывая свойство ортогональности тессеральных функций, после замены

$$\hat{A}_{nm}^{(i)} = Z_{nm}^{(2i+1)} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} h_n^*(k_i b_i) \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

$$B_{nm}^{(j)} = Z_{nm}^{(2j)} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} j_n^*(k_j b_{j+1}) \quad (j = 0, 1, \dots, v-1), \quad (3)$$

$$A_{nm}^{(0)} = X_{nm}^{(0)} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2},$$

где

$$h_n^*(k_i b_i) = \frac{(2n-1)!!}{(k_i b_i)^n}, \quad j_n^*(k_j b_{j+1}) = \frac{(k_j b_{j+1})^n}{(2n+1)!!}, \quad (4)$$

и преобразований придем к системе

$$\sum_{i=0}^{2v-1} Z_{nm}^{(i)} \alpha_{is}^{(n)} + \sum_{i=0}^{2v-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{l=-\tau}^{\tau} Z_{\tau l}^{(i)} a_{\tau l n m s}^{(i)} = \Phi_{nm}^{(s)} \quad (5)$$

$$(s = 0, 1, \dots, 2v - 1; n = 0, 1, \dots; m = -n, \dots, n).$$

Здесь

$$\alpha_{is}^{(n)} = b_{is}^{(n)} - \delta_{is}; \quad b_{is}^{(n)} = \begin{cases} a_n^{(s)} & (i = s + (-1)^s) \\ 0 & (i \neq s + (-1)^s) \end{cases};$$

$$a_n^{(2j)} = \frac{q_{j+1} j_n(k_{j+1} b_{j+1}) h_n^*(k_{j+1} b_{j+1})}{q_j h_n(k_j b_{j+1}) j_n^*(k_j b_{j+1})}; \quad a_n^{(2j+1)} = \frac{\zeta'_n(k_j b_{j+1}) j_n^*(k_j b_{j+1})}{\psi'_n(k_{j+1} b_{j+1}) h_n^*(k_{j+1} b_{j+1})}$$

$$(j = 0, 1, \dots, v - 1);$$

δ_{is} — символ Кронекера;

$$\Phi_{nm}^{(j)} = \begin{cases} \frac{j_n(k_0 b_1)}{h_n(k_0 b_1) j_n^*(k_0 b_1)} X_{nm}^{(0)} & (j = 0), \\ -\frac{\psi'_n(k_0 b_1)}{\psi'_n(k_1 b_1) h_n^*(k_1 b_1)} X_{nm}^{(0)} & (j = 1); \\ 0 & (j > 1) \end{cases}$$

$$a_{\tau l n m 2j}^{(2l-1)} = - \left[\frac{(n+m)! (\tau-l)!}{(n-m)! (\tau+l)!} \right]^{1/2} \frac{j_n(k_l b_{l+1}) h_\tau^*(k_l b_l)}{h_n(k_l b_{l+1}) j_n^*(k_l b_{l+1})} K_{nm \tau l} \quad (j = 1, 2, \dots, v-1);$$

$$a_{\tau l n m 2j}^{(2j+2)} = \left[\frac{(n+m)! (\tau-l)!}{(n-m)! (\tau+l)!} \right]^{1/2} \frac{q_{j+1} h_n(k_{j+1} b_{j+1}) j_\tau^*(k_{j+1} b_{j+2})}{q_j h_n(k_j b_{j+1}) j_n^*(k_j b_{j+1})} K_{nm \tau l j+1}^{(-1)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-2); \quad (6)$$

$$a_{\tau l n m 2j+1}^{(2j-1)} = \left[\frac{(n+m)! (\tau-l)!}{(n-m)! (\tau+l)!} \right]^{1/2} \frac{\psi'_n(k_j b_{j+1}) h_\tau^*(k_j b_l)}{\psi'_n(k_{j+1} b_{j+1}) h_n^*(k_{j+1} b_{j+1})} K_{nm \tau l j} \quad (j = 1, 2, \dots, v-1);$$

$$a_{\tau l n m 2j+1}^{(2j+2)} = - \left[\frac{(n+m)! (\tau-l)!}{(n-m)! (\tau+l)!} \right]^{1/2} \frac{\zeta'_n(k_{j+1} b_{j+1}) j_\tau^*(k_{j+1} b_{j+2})}{\psi'_n(k_j b_{j+1}) h_n^*(k_{j+1} b_{j+1})} K_{nm \tau l j+1}^{(-1)} \quad (j = 0, 1, \dots, v-2);$$

$$K_{\tau l n m j} = b_{l n m j} F_{\tau l j}^{(-1)}; \quad K_{\rho \lambda n m j}^{(-1)} = b_{\rho \lambda m j}^{(-1)} F_{\rho n m j};$$

$$b_{l n m j} = \exp(im\chi_j) [(n+m)!(n-l)!(n-m)!(n+l)!]^{1/2} P_{-ml}^n(\cos \rho_j);$$

$$b_{\lambda n l j}^{(-1)} = (-1)^{\lambda+l} \exp(-i\chi_{j+1}) [(n+l)!(n-\lambda)!(n-l)!(n+\lambda)!]^{1/2} \times P_{-l\lambda}^n(\cos \rho_j);$$

$$F_{\rho n m j} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (2\rho + 1) i^{n-p} \sum_{\sigma=|n-p|}^{n+p} i^{-\sigma+2\sigma \cos(\theta'_{j, j+1}/2)} j_\sigma(k_j h_{j+1}) \delta_{\sigma p}^m;$$

$$F_{\tau pm}^{(-1)} = \frac{(p+m)!}{(p-m)!} (2\tau+1) i^{p-\tau} \sum_{\sigma=|\tau-p|}^{p+\tau} i^{-\sigma+2\sigma \sin(\theta'_{j, j+1}/2)} j_\sigma(k_j h_{j+1}) \delta_{\sigma p \tau}^m;$$

$$\delta_{\sigma np}^m = \frac{2\sigma+1}{2} \int_{-1}^1 P_p^{-m}(x) P_n^{-m}(x) P_\sigma(x) dx;$$

$\theta'_{j, j+1}$ — сферическая координата θ'_j начала θ_{j+1} , штрих означает, что суммирование распространяется только на индексы, имеющие ту же четность, что и верхний индекс суммы; $P_{mr}^n(z)$ — функции, через которые выражаются [8, 9] матричные элементы неприводимых представлений $T_l(g)$ группы $SL(2, C)$; выражения $a_n^{(s)}$, $\Phi_{nm}^{(s)}$ и $a_{nlms}^{(t)}$ для индексов i и s , удовлетворяющих одному из соотношений:

$$i = 2j - 1, s = 2j, j = 1, 2, \dots, v-1; i = 2j + 2, s = 2j,$$

$$j = 0, 1, \dots, v-2;$$

$$i = 2j - 1, s = 2j + 1, j = 1, 2, \dots, v-1; i = 2j + 2,$$

$$s = 2j + 1, j = 0, 1, \dots, v-2,$$

определяются по формулам (6). Для всех остальных соотношений

$$a_{nlms}^{(i)} \equiv 0. \quad (7)$$

При этом предполагается, что

$$h_n(k_j b_{j+1}) \neq 0; \quad (8)$$

$$\psi'_n(k_{j+1} b_{j+1}) \neq 0. \quad (9)$$

Условие (8) выполняется при любых $k_j b_{j+1}$ с* $\operatorname{Im} k_j \geq 0$ согласно теореме Фалкенберга [10], которая утверждает, что уравнение $h(z) = 0$ не имеет корней в полуплоскости $0 \leq \arg z < \pi$. Условие же (9) может и не выполняться. Этот случай будет затем рассмотрен отдельно.

Система (5) допускает простую функциональную трактовку. Введем в рассмотрение пространство \tilde{l}_2 , состоящее из бесконечных трехмерных матриц $Z = \{Z_{nm}^{(j)}\}$, $n = 0, 1, \dots$; $m = -n, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, (2v-1)$. Нормой $\|Z\| = \left[\sum_{l=0}^{2v-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |Z_{nm}^{(j)}|^2 \right]^{1/2} < \infty$.

При этом сложение и умножение на число определяются следующим образом: $X + Y = \{X_{nm}^{(j)} + Y_{nm}^{(j)}\}$, $\lambda X = \{\lambda X_{nm}^{(j)}\}$. Поскольку любая трехмерная матрица из \tilde{l}_2 содержит лишь счетное число составляющих ее элементов, то нетрудно путем соответствующей их перенумерации установить алгебраическую изоморфность и изометрию пространств \tilde{l}_2 и l_2 (пространства последовательностей $\{Z_k\}$, $k = 0, 1, \dots$), откуда следует, что введенное пространство \tilde{l}_2 есть B пространство**.

* Именно таким и выбирается k_j (см. [7]).

** Пространство Банаха.

В терминах пространства \tilde{l}_2 систему (5) можно записать с помощью матричных операторов W и T :

$$(W + T) Z = \Phi \quad (10)$$

соответственно с ядрами $\alpha_{is}^{(n)}$ и $\alpha_{nlmns}^{(i)}$ и свободным членом $\Phi \in \tilde{l}_2$. Последнее следует из неравенства $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |\Phi_{nm}^{(j)}|^2 < \infty$, которое получается из формул (6), (3), (4) и [7] с помощью элементарных оценок. Это соотношение справедливо при $b_1 < h_1$, т. е. когда диполь не касается шара радиуса b_1 .

Для доказательства разрешимости уравнения (10) нам необходимо будет воспользоваться альтернативой Фредгольма. Путь к этому открывает теорема Никольского [11], которую можно сформулировать следующим образом: если а) W и T — линейные операторы, определенные в \tilde{l}_2 и отображающие его в свою часть; б) W — обратимый, а T — вполне непрерывные операторы, то для уравнения (10) с $\Phi \in \tilde{l}_2$ справедлива альтернатива Фредгольма. Рассмотрим порознь операторы W и T .

Оператор W каждому $Z \in \tilde{l}_2$ ставит в соответствие некоторое $U = WZ$ с помощью преобразования $U_{nm}^{(s)} = \sum_{i=0}^{2s-1} \alpha_{is}^{(n)} Z_{nm}^{(i)}$. Можно показать справедливость следующей оценки:

$$\|U\| < C_1 \|Z\|. \quad (11)$$

Из неравенства (11) следует ограниченность и в силу аддитивности — линейность оператора W , а также тот факт, что оператор W действует из \tilde{l}_2 в \tilde{l}_2 . Покажем, что W — обратимый в \tilde{l}_2 оператор. Действительно, можно показать, что матрица $\alpha^{(n)} = \{\alpha_{is}^{(n)}\}$ преобразования W является квазидиагональной [12] с

$$\det \alpha^{(n)} = \prod_{j=0}^{s-1} \left(1 - \alpha_n^{(2j)} \alpha_n^{(2j+1)}\right).$$

Докажем, что при любых n и j справедливо неравенство $1 - \alpha_n^{(2j)} \alpha_n^{(2j+1)} \neq 0$ или равносильное ему вследствие соотношений (9), (8):

$$\Delta_n^{(j)} = -q_j h_n(k_j b_{j+1}) \psi_n'(k_{j+1} b_{j+1}) + q_{j+1} j_n(k_{j+1} b_{j+1}) \zeta_n'(k_j b_{j+1}) \neq 0. \quad (12)$$

Для этого рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть в безграничном пространстве (j среда) находится шар радиуса b_{j+1} ($j+1$ среда). Ставится однородная скалярная задача математической физики для уравнений Гельмгольца:

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_j + k_j^2 T_j &= 0, & q_j T_j &= q_{j+1} T_{j+1}, \\ \Delta T_{j+1} + k_{j+1}^2 T_{j+1} &= 0, & \frac{\partial(r T_j)}{\partial r} &= \frac{\partial(r T_{j+1})}{\partial r} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial T_j}{\partial r} - i k_j T_j \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{при } r = b_{j+1},$$

которая имеет, как известно [13], только тривиальное (нулевое) решение, т. е. $T_j \equiv 0 \equiv T_{j+1}$. Если же искать решение этой задачи в виде

$$T_j = a_n h_n(k_j r) P_n(\cos \theta), \quad T_{j+1} = b_n j_n(k_{j+1} r) P_n(\cos \theta),$$

то, удовлетворяя граничным условиям, в силу единственности решения приедем с необходимостью к условию (12). Отсюда следует обратимость в \tilde{l}_2 оператора W .

Оператор T . Можно показать, что условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{l=-\tau}^{\tau} |a_{\tau l n m s}^{(i)}|^2 < \infty \quad (13)$$

является достаточным для утверждения, что а) T — оператор, действующий из \tilde{l}_2 в \tilde{l}_2 , б) T — вполне непрерывный оператор. Если подставить в левую часть (13) вместо $a_{\tau l n m s}^{(i)}$ соответствующие выражения из (6), (7), произвести ряд оценок с использованием асимптотических разложений, формулы Стирлинга, неравенства Буняковского, и исследовать на сходимость получаемые при этом двойные ряды путем разделения их на две суммы с помощью подходящей замены, то приедем к безусловному неравенству.

Следовательно, для уравнения (10) выполнены условия теоремы Никольского, и поэтому справедлива альтернатива Фредгольма. Покажем, что уравнение

$$(W + T)Z = 0 \quad (14)$$

имеет только тривиальное решение. Для этого нам понадобится следующая лемма: из условия $Z = \{Z_{nm}^{(s)}\} \in \tilde{l}_2$ ($s = 0, 1, \dots, 2v - 1$; $n = 0, 1, \dots$; $m = -n, \dots, n$) следует, что как ряды (2), так и ряды, получающиеся из них дифференцированием, конечное число раз по сферическим координатам, сходятся абсолютно и равномерно.

Предположим теперь, что в \tilde{l}_2 найдется такое, тождественно не равное нулю, $Z^* = \{Z_{nm}^{(j)*}\}$, что $(W + T)Z^* = 0$. Это значит, что существует такое $j = j_0$, что $Z_{nm}^{(j_0)*} \neq 0$, откуда следует, что

$$A_{nm}^{(j_0)*} \neq 0 \quad \text{либо} \quad B_{nm}^{(j_0)*} \neq 0 \quad (15)$$

(см. соотношения (3)).

Система (14) соответствует однородной краевой дифракционной задаче, которая при отсутствии источника, условии излучения на бесконечности, при сопряжении касательных составляющих и учете теоремы единственности однородной системы Максвелла в многосвязной области приводит только к нулевому решению. Отсюда и из леммы вытекает, что*

$$T_1^* = 0. \quad (16)$$

Воспользовавшись теоремой сложения в (2) при $j = 1$, после ряда преобразований с учетом (3), (5), (16) получим

$$A_{nm}^{(1)*} [\delta_n j_n(k_1 r_1) - h_n(k_1 r_1) \Delta_n^{(0)}] \equiv 0, \quad (17)$$

* Под T_1^* понимается решение однородной задачи (14) в 1 среде.

где

$$\delta_n = q_1 h_n(k_1 b_1) \zeta'_n(k_0 b_1) - q_0 h_n(k_0 b_1) \zeta'_n(k_1 b_1), \quad \Delta_n^{(0)} = \Delta_n^{(j)}|_{j=0}.$$

Если рассмотреть два случая $\delta_n \neq 0$ и $\delta_n = 0$, то из (12), (17) и других соотношений будет сразу же следовать

$$A_{nm}^{(1)*} = 0 = B_{nm}^{(1)*}. \quad (18)$$

Как нетрудно видеть, из (3), (5), (7) в предположении, что $A_{nm}^{(j)} = 0 = B_{nm}^{(j)}$, следует $A_{nm}^{(j+1)} = 0 = B_{nm}^{(j+1)}$. Отсюда и соотношения (18) по индукции имеем $A_{nm}^{(j_0)*} = 0 = B_{nm}^{(j_0)*}$, что противоречит предположениям (15). Поэтому однородная система (14) имеет только тривиальное решение, а система (10), или (5), разрешима единственным образом в \tilde{l}_2 . Из доказанного утверждения и леммы получаем, что решения (2) через посредство потенциалов Дебая [7] удовлетворяют уравнениям Максвелла, граничным условиям на поверхностях раздела сред и условию излучения Зоммерфельда.

По аналогии [14] с \tilde{l}_2 можно показать, что система (10) разрешима в \tilde{l}_2 и редукцией. Снимем теперь ограничение (9) и рассмотрим отдельно случай

$$\psi'_n(k_{j+1} b_{j+1}) = 0. \quad (19)$$

Согласно теореме Ломмеля [5] уравнение $\psi'_n(z) = 0$ имеет только вещественные корни. Поэтому вопрос о невыполнимости неравенства (9) и, следовательно, всех предыдущих построений имеет смысл рассматривать только при k_{j+1} вещественном. Правда, и при вещественном k_{j+1} можно считать, что конкретная практическая задача допускает незначительное варьирование k_{j+1} и b_{j+1} в пределах даже большой точности их измерения, такое, что $\psi'_n(k_{j+1} b_{j+1}) \neq 0$.

Однако такое предположение делает систему (5) плохо обусловленной [12], являющейся с точки зрения численных расчетов неразрешимой со сколько-нибудь удовлетворительной точностью*.

Пусть для некоторого $n = n_0$ и $j = j_0$ справедливо равенство (19). Не нарушая общности, будем предполагать, что $j_0 \geq 1$. Тогда, проделав преобразования, аналогичные тем, что привели к системе (5) с учетом (19), получим следующую систему:

$$\sum_{l=0}^{2j-1} Z_{nm}^{(s)} \tilde{a}_{ls}^{(n)} + \sum_{l=0}^{2j-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{l=-\tau}^{\tau} Z_{\tau l}^{(i)} \tilde{a}_{\tau lnms}^{(i)} = \Phi_{nm}^{(s)}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{a}_{n_0}^{(2j_0+1)} = \frac{q_{j_0} h_{n_0}(k_{j_0} b_{j_0+1}) j_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0+1})}{q_{j_0+1} j_{n_0}(k_{j_0+1} b_{j_0+1}) h_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0})},$$

$$a_{\tau ln_0 m 2j_0}^{(2j_0-1)} = - \left[\frac{(\tau-l)! (n_0+m)!}{(\tau+l)! (n_0-m)!} \right]^{1/2} \frac{\psi'_{n_0}(k_{j_0} b_{j_0+1}) h_{\tau}^*(k_{j_0} b_{j_0})}{\zeta'_{n_0}(k_{j_0} b_{j_0+1}) j_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0+1})} K_{n_0 m \tau l j_0}^{(-1)},$$

$$a_{\tau ln_0 m 2j_0}^{(2j_0+2)} = \left[\frac{(\tau-l)! (n_0+m)!}{(\tau+l)! (n_0-m)!} \right]^{1/2} \frac{\zeta'_{n_0}(k_{j_0+1} b_{j_0+1}) j_{\tau}^*(k_{j_0+1} b_{j_0+2})}{\zeta'_{n_0}(k_{j_0} b_{j_0+1}) j_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0+1})} K_{n_0 m \tau l j_0+1}^{(-1)},$$

* Этот важный случай, при котором не проходят все предыдущие рассуждения и несправедливы построенные выражения, в работах [4-7] вообще не рассматривался.

$$\begin{aligned}
 a_{\tau l n_0 m^2 j_0 + 1}^{(2j_0 - 1)*} &= \left[\frac{(\tau - l)! (n_0 + m)!}{(\tau + l)! (n_0 - m)!} \right]^{1/2} \frac{q_{j_0} j_{n_0} (k_{j_0} b_{j_0+1}) h_{\tau}^*(k_{j_0} b_{j_0})}{q_{l_0+1} j_{n_0} (k_{j_0+1} b_{j_0+1}) h_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0})} K_{n_0 m^2 l j_0}, \\
 a_{\tau l n_0 m^2 j_0 + 1}^{(2j_0 + 2)*} &= - \left[\frac{(\tau - l)! (n_0 + m)!}{(\tau + l)! (n_0 - m)!} \right]^{1/2} \times \\
 &\quad \times \frac{h_{n_0} (k_{j_0+1} b_{j_0+1}) j_{\tau}^*(k_{j_0+1} b_{j_0+2})}{j_{n_0} (k_{j_0+1} b_{j_0+1}) h_{n_0}^*(k_{j_0} b_{j_0})} K_{n_0 m^2 l j_0 + 1}^{(-1)}, \\
 a_{n_0}^{(s)*} &= \begin{cases} \tilde{a}_{n_0}^{(2j_0 + 1)} & (s = 2j_0 + 1) \\ 0 & (s = 2j_0) \\ a_{n_0}^{(s)} & (s \neq 2j_0 + 1, 2j_0) \end{cases}, \quad b_{ls*}^{(n_0)} = \begin{cases} a_{n_0}^{(s)} & (i = s + (-1)^s) \\ 0 & (i \neq s + (-1)^s) \end{cases},
 \end{aligned}$$

$\tilde{a}_{\tau l n_0 m s}^{(i)*}$ для индексов i и s , не равных соответственно $2j_0 - 1, 2j_0; 2j_0 + 2, 2j_0; 2j_0 - 1, 2j_0 + 1; 2j_0 + 2, 2j_0 + 1$, тождественно равно $a_{\tau l n_0 m s}^{(i)}$;

$$\tilde{a}_{\tau l n m s}^{(i)} = \begin{cases} a_{\tau l n m s}^{(i)} & (n \neq n_0) \\ a_{\tau l n_0 m s}^{(i)*} & (n = n_0) \end{cases}, \quad \tilde{\alpha}_{is}^{(n)} = \begin{cases} b_{ls}^{(n)} - \delta_{is} & (n \neq n_0) \\ b_{ls*}^{(n_0)} - \delta_{is} & (n = n_0) \end{cases}.$$

Если систему (20) по аналогии с (10) записать в виде $(\tilde{W} + \tilde{T})Z = \Phi$, то опираясь на оценки, полученные при доказательстве разрешимости системы (10), можно показать, что \tilde{W} обратимый*, а T — вполне непрерывный операторы в \tilde{l}_2 .

Если же равенство (19) выполняется для нескольких n , то для каждого такого n перестраиваем систему (5) по аналогии со случаем $n = n_0$. При этом все теоремы существования и единственности имеют и здесь место**.

Обозначим $Z_{nm}^{(j)}(u)$, $Z_{nm}^{(j)}(v)$ решения системы (5), соответствующие потенциалам U , V , а выражющиеся через них по формулам (3) коэффициенты — $A_{nm}^{(j)}(u)$, $A_{nm}^{(j)}(v)$, $B_{nm}^{(j)}(u)$, $B_{nm}^{(j)}(v)$ ($j = 0, 1, \dots, v$).

Рассмотрим отдельно случаи вертикального ($\rho_0 = 0$) и горизонтального ($\rho_0 = \pi/2$) диполей.

* Матрица $\alpha_*^{(n_0)} = \{b_{ls*}^{(n_0)} - \delta_{ls}\}$, как нетрудно видеть, будет также квазидиагональной и получается из $\alpha^{(n_0)}$, если j_0 клетку главной диагонали заменить определителем $\begin{vmatrix} -1 & a_{n_0}^{(2j_0+1)} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. При этом $\det \alpha^{(n_0)} = \prod_{j=0}^{v-1} (j_0')' (1 - a_{n_0}^{(2j)} a_{n_0}^{(2j+1)})$, где штрих у произведения с индексом j_0 означает, что из произведения исключен член, соответствующий $j = j_0$. В силу (12) справедливо неравенство $\det \alpha^{(n_0)} \neq 0$, что приводит к обратимости оператора \tilde{W} . Если же условие (19) будет выполнено при данном n_0 для нескольких j : j_0, j_1, \dots, j_k , то, проводя все предыдущие рассуждения,

без существенного изменения получим $\det \alpha^{(n_0)} = \prod_{j=0}^{(j_0, j_1, \dots, j_k)'} (1 - a_{n_0}^{(2j)} a_{n_0}^{(2j+1)}) \neq 0$,

т. е. в этом случае оператор \tilde{W} обратим.

** В процессе доказательства этого случая существенным является предположение, что наряду с (19) $\psi_{n_0}(k_{j_0+1} b_{j_0+1}) \neq 0$. Это неравенство всегда выполняется ввиду отсутствия у функции $\psi_{n_0}(z)$ кратных нулей [15].

Вертикальный диполь. В этом случае $|p_1| = 0$, $\chi_1 = \pi/2$ и, как следует из [7], $A_{nm}^{(0)(v)} = 0$,

$$A_{nm}^{(0)(u)} = \begin{cases} ik_0 |p_2| (2n+1) h_1^{-1} & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases},$$

что влечет за собой с учетом (3), (6) $\Phi_{nm}^{(j)(v)} \equiv 0$. Отсюда вытекает, что система (5), соответствующая потенциалу V , — однородная и в силу теоремы единственности имеет только нулевое решение, т. е. $Z_{nm}^{(i)(v)} = 0$, или с учетом (3) $A_{nm}^{(j)(v)} = 0 = B_{nm}^{(i)(v)}$, $j = 1, 2, \dots, v$.

Горизонтальный диполь. В этом случае $|p_2| = 0$; $A_{2n} = \{0, 0\}$; $A_{nm}^{(0)} = 0$ при $|m| \neq 1$. Это единственные упрощающие моменты в общих выражениях для поля. Заметим здесь, что для обоих случаев, как не-трудно показать с помощью преобразований и асимптотических оценок в приближении дальней зоны среды 0, рассеянное поле носит попеченный характер.

2. ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫЕ ОДИН В ДРУГОМ шаров в поле плоской волны

Если взять решение рассеянного поля в дальней зоне для горизонтального диполя и устремить точку O_0 (рис. 1) расположения диполя вдоль положительной полуоси Z в бесконечность, сохранив при этом его ориентацию, то составляющие падающего поля примут тот же вид, что и соответствующие им в [7], если в последних заменить k_1 на k_0 . Если ввести обозначения

$$\tilde{\Phi}_{nm}^{(i)} = \begin{cases} \frac{j_n(k_0 b_1)}{h_n(k_0 b_1) j_n^*(k_0 b_1)} \tilde{X}_{nm}^{(0)} & (j=0) \\ -\frac{\psi'_n(k_0 b_1)}{\psi'_n(k_1 b_1) h_n^*(k_1 b_1)} \tilde{X}_{nm}^{(0)} & (j=1) \\ 0 & (j>1) \end{cases},$$

$$\tilde{A}_{nm}^{(0)} = \begin{cases} n(n+1) \beta_{00} g_n & (m=-1) \\ \alpha_{00} g_n & (m=1) \\ 0 & (|m| \neq 1) \end{cases},$$

то, проводя рассуждения по аналогии с [7], получим в случае плоской волны решение

$$Z_{nm}^{(i)} = E_0 \tilde{Z}_{nm}^{(i)},$$

где $\tilde{Z}_{nm}^{(i)}$ определяется из системы:

$$\sum_{l=0}^{2v-1} \tilde{Z}_{nl}^{(i)} \alpha_{ls}^{(n)} + \sum_{l=0}^{2v-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{l=-\tau}^{\tau} \tilde{Z}_{\tau l}^{(i)} \alpha_{\tau lnms}^{(i)} = \tilde{\Phi}_{nm}^{(s)}$$

$$(s = 0, 1, \dots, 2v-1; n = 0, 1, \dots; m = -n, \dots, n),$$

разрешимость которой в \tilde{l}_2 вытекает из разрешимости системы (5) и соотношения

$$\tilde{\Phi}_{nm}^{(s)} \in \tilde{l}_2.$$

Выражения для характеристик рассеянного поля в дальней зоне среды 0 в случае любого числа (v) шаров, произвольно расположенных один в другом, получаются точно так же, как и при $v = 2$ в [7]. Так, если ввести обозначения*:

$$\Xi_{nm}^{(1)} = -\frac{2i^{n-1} \operatorname{sgn} m}{k_0(2n+1)} \left[\frac{(n+m)! n(n+1)}{(n-m)!} \right]^{1/2} \tilde{B}_{nm}^{(0)(u)},$$

$$\Xi_{nm}^{(2)} = -\frac{2i^{n-1} \beta_0 |m|}{k_0^2(2n+1)} \left[\frac{(n+m)! n(n+1)}{(n-m)!} \right]^{1/2} \tilde{B}_{nm}^{(0)(v)},$$

то величины факторов эффективности** примут следующий вид: поперечное сечение обратного рассеяния σ_B —

$$\sigma_B = \frac{1}{2(k_0 b_1)^2} \sum_{m=-1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (\Xi_{nm}^{(1)} - \Xi_{nm}^{(2)}) \right|^2,$$

радиолокационное поперечное сечение рассеяния σ_0 —

$$\sigma_0 = \frac{1}{4(k_0 b_1)^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\pm 1} (-1)^n (2n+1) (\Xi_{nm}^{(1)} - \Xi_{nm}^{(2)}) \right|^2, \quad (21)$$

эффективная площадь полного рассеяния σ_1 —

$$\sigma_1 = \frac{1}{(k_0 b_1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) (|\Xi_{nm}^{(1)}|^2 + |\Xi_{nm}^{(2)}|^2),$$

эффективная площадь ослабления σ_2 —

$$\sigma_2 = \frac{1}{(k_0 b_1)^2} (-\operatorname{Re}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\pm 1} (2n+1) (\Xi_{nm}^{(1)} + \Xi_{nm}^{(2)}), \quad (22)$$

индикаторика рассеяния $J(\theta_1, \varphi_1)$ —

$$J(\theta_1, \varphi_1) = [\pi k_0^2 (k_0 b_1)^2 \sigma_1]^{-1} [|S_7^*(\theta_1, \varphi_1)|^2 + |S_8^*(\theta_1, \varphi_1)|^2],$$

где $S_7^*(\theta_1, \varphi_1)$, $S_8^*(\theta_1, \varphi_1)$ описываются соответствующими выражениями из [7], если в последних заменить \tilde{A}_n^m на $\tilde{B}_{nm}^{(0)(u)}$ и \tilde{A}_n^m на $\tilde{B}_{nm}^{(0)(v)}$.

В качестве примеров, иллюстрирующих построенное выше общее решение задачи, на рис. 2 и 3 приведены результаты расчета на ЭВМ σ_0 и σ_2 по формулам (21), (22) при следующих значениях параметров: $v = 3$; $\alpha = 2\pi b_1/\lambda$; $\lambda = 3,21 \text{ см}$; $b_2/b_1 = 0,8$; $b_3/b_2 = 0,25$; $h_2/b_2 = 0,125$; $h_3/b_3 = 0,5$; $\chi_j, \rho_j = 0$, $j = 1, 2$; среда 0 — воздух, среда 1 — лед плотностью $0,38 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, среда 2 — лед, плотностью $0,60 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, среда 3 — лед плотностью $0,92 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $t = 0^\circ\text{C}$. Диэлектрические проницаемости указанных сред выбирались согласно [16].

* Под символом $\operatorname{sgn} m$ подразумевается знак m .

** Все факторы эффективности нормированы делением на πb_1^2 .

Выбранные параметры соответствуют реальной трехслойной гради-
не* с обычно неконцентрическим расположением слоев различной
плотности [17, 18].

Сравнение кривых σ_0 , представленных на рис. 2, с аналогичными

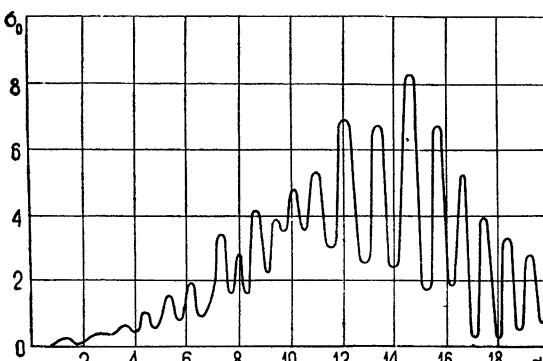


Рис. 2. Эффективная площадь радиолокационного рассеяния неконцентрических слоистых градиенов.

Например, при $b_j=0$, $j=2, 3, \dots$, получаем составляющие электромагнитного поля и характеристики одного шара; $h_j=0$, $j=2, 3, \dots$, — концентрических шаров; $h_j=0$, $j=2, 3, \dots$, и $b_j=0$, $j=3, 4, \dots$, — двух концентрических шаров; $\rho_j=0$, $j=1, 2, \dots$, — систему v шаров, произвольно вложенных один в другой с общей линией центров, проходящей через точку приложения источника; $\delta_1 \rightarrow \infty$ — полупространства с включением в виде $v-1$ шаров, произвольно расположенных один в другом; $b_j=\infty$, $j=1, 2, \dots$, v_0 — слоистое (v_0 — слоев) полупространство с включением в виде $v-v_0$ шаров, произвольно расположенных один в другом; $k_v^2=i\infty$ — идеально проводящий v -й шар с неконцентрическими $v-1$ шаровыми покрытиями; $h_1=b_1$, $k_1^2=i\infty$ — излучение элементарной кольцевой щели на шаре радиуса b_1 и другие.

на рис. 2, с аналогичными кривыми работы [19], показывает, что неконцентричность может оказывать существенное влияние на величину радиолокационного поперечника рассеяния. Что касается ослабления (рис. 3), то тот же эффект для него выражен слабее.

В заключение отметим, что из построенного общего решения и характеристик рассеянного поля шарами, произвольно расположеннымми один в другом, вытекают частные решения и характеристики, совпадающие с известными.

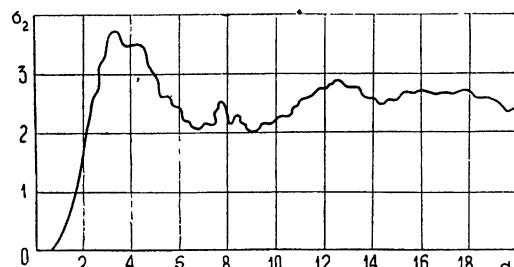


Рис. 3. Эффективная площадь ослабления неконцентрических слоистых градиенов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Aden, M. Kegkeg, J. Appl. Phys., 22, № 10, 1242 (1951).
2. К. С. Шифрин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 15 (1952).
3. В. Ф. Кулько, В. И. Михайловский, Электромагнитное поле в слоистых проводящих средах, изд. Наукова думка, Київ, 1967.
4. Б. П. Дьяконов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1579 (1959).
5. Е. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 992 (1963).
6. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
7. В. И. Розенберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 431 (1970).
8. Н. Я. Вilenkin, Специальные функции и теория представления групп, изд. Наука, М., 1965.
9. И. М. Гельфонд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представление группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.

* В предположении сферичности ее формы.

10. Г. Э. Бейтмен, Высшие трансцендентные функции, т 2, изд. Наука, М., 1966.
11. С. Н. Никольский, Изв АН СССР, сер. математическая, 7, № 3, 147 (1963).
12. Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М.—Л., 1963.
13. В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1962.
14. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1958.
15. Г. К. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
16. W. A. Sutherland, J. Appl. Phys., 23, № 7, 768 (1952).
17. Р. Женев, Град, Гидрометеоиздат, Л., 1966.
18. K. A. Browning, Quart. J. Roy. Met. Soc., 92, № 391, 1 (1966).
19. В. И. Розенберг, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 2, 168 (1970).

Ленинградский институт
водного транспорта

Поступила в редакцию
25 августа 1969 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON SPHERES ARBITRARILY SITUATED ONE IN ANOTHER

V. I. Rozenberg

A strict solution of the problem of diffraction of electromagnetic waves on spheres arbitrarily situated one in another is built. The solution is derived as the series over the spherical functions with the coefficients defined from the infinite algebraic system.

УДК 538.56 : 621.385.7

О РАСЧЕТЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. Н. Галимуллин

Описан метод Монте-Карло цифрового моделирования нелинейных процессов в электронном потоке, распространяющемся в цилиндрическом промежутке между катодом и анодной структурой. Метод обеспечивает высокую точность и скорость решения. Представлены некоторые результаты расчетов.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать распространение электронного потока в двухмерном промежутке между цилиндрическим катодом и коаксиальной цилиндрической анодной структурой. Полагаем, что поток сильно взаимодействует лишь с одной пространственной гармоникой поля структуры U'_c частоты ω' , соответствующей колебаниям π -вида. (Штрихами отмечаем ненормированные, размерные переменные.) Все остальные гармоники поля U'_c не учитываем. Протяженность промежутка в направлении оси z' равна k_z .

Уравнение Пуассона для потенциала U' в неподвижной (лабораторной) системе координат $\varphi_a Or'$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial U'}{\partial r'} \right) + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 U'}{\partial \varphi_a^2} = - \frac{\rho'}{\epsilon_0} \quad (1)$$

имеет при этом краевые условия

$$U'(\varphi_a, r'_k) = 0, \quad U'(\varphi_a, r'_a) = U'_a + U'_c(\varphi_a, r'_a), \\ U'(\varphi_a, r') = U'(\varphi_a + 2\pi/p, r'); \quad (2)$$

$$U'_c(\varphi_a, r') = U'_{rm} \operatorname{sir} \left(\frac{r'}{r'_k} \right)^p \sin \left(\int_0^{t'} \omega' dt' - p\varphi_a \right), \quad (3)$$

где p — число пар резонаторов анодного блока, sir — функция, введенная в работе Капицы [1], U'_a — постоянный потенциал анода, r'_k — радиус катода, r'_a — радиус анода (рис. 1).

В системе координат $\varphi Or'$, вращающейся относительно лабораторной системы $\varphi_a Or'$ с угловой скоростью ω'/p , уравнение Пуассона и его краевые условия имеют вид (1), (2) с заменой φ_a на φ , причем

$$\varphi = \int_0^{t'} \frac{\omega'}{p} dt' - \varphi_a; \quad (4)$$

$$U'_c(\varphi, r') = U'_{rm} \operatorname{sir} \left(\frac{r'}{r'_k} \right) \sin p\varphi. \quad (5)$$

Благодаря периодичности U' (3), можно ограничиться исследованием области $(0, 2\pi/p; r'_k, r'_a)$ цилиндрического промежутка. Аппроксимируем эту область сеточной областью $(0, N; 0, M)$ и введем безразмерные (нештрихованные) переменные r, x, y, U, t, ω :

$$r' = d'r, \quad r = r_k \exp(k_y y), \quad \varphi = k_x x, \quad \varphi_a = k_x x_a, \quad U' = k_U U; \quad (6)$$

$$t = \omega_c' t' \quad (\omega_c' = \eta B_0'), \quad \omega' = \omega_0' \omega, \quad (7)$$

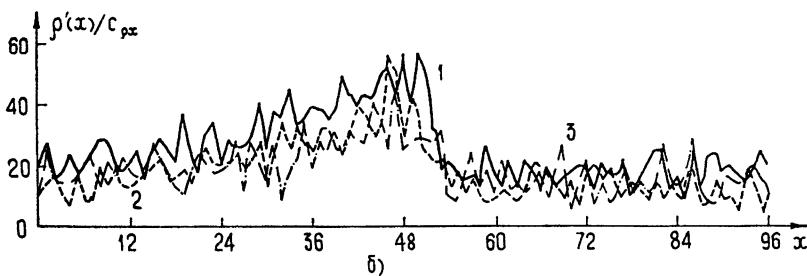
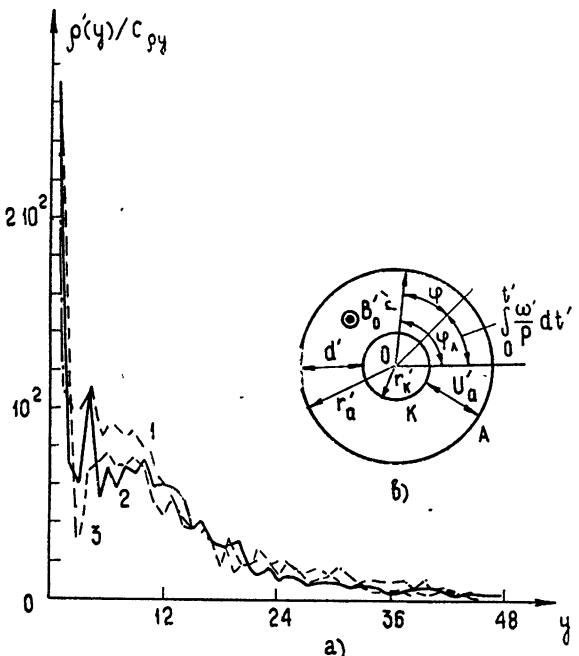


Рис. 1. Распределение пространственного заряда вдоль радиуса (а) и по окружности (б) изображенного цилиндрического промежутка (в) (*K*—катод, *A*—анод).

1. $U_a = 620$ ($U'_a = 14,5 \text{ кВ}$), $U_r = 0,02$;
2. $U_a = 641$ ($U'_a = 15 \text{ кВ}$), $U_r = 0,02$;
3. $U_a = 641$, $U_r = 0,03$.

где ω'_0 — частота интересующей нас гармоники в «холодной» системе, ω'_c — циклотронная частота,

$$d' = r'_a - r'_k, \quad r_a = \frac{r'_a}{d'} = r_k + 1, \quad r_k = \frac{r'_k}{d'}; \quad (8)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{pN}, \quad k_y = \frac{1}{M} \ln \frac{r_a}{r_k}, \quad k_U = \frac{(\omega'_e r'_k k_y)^2}{\eta}. \quad (9)$$

Катод K ($r = r_k$) (рис. 1 в) расположен при $y = 0$, анод A ($r = r_a$) — при $y = M$. Обозначим также

$$Y_a \equiv p \ln \frac{r_a}{r_k}, \quad U'_{cm} = U'_{rm} \operatorname{sir} \left(\frac{r'_a}{r'_k} \right)^p, \quad U_r \equiv \frac{U'_{rm}}{U'_a}. \quad (10)$$

При $r'_k/d' = r_k \rightarrow \infty$

$$\ln \frac{r_a}{r_k} \rightarrow \frac{1}{r_k}, \quad Y_a \rightarrow \beta'_r d', \quad k_U = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\omega'_e d'}{M} \right)^2, \quad (11)$$

где

$$\beta'_r = \frac{p}{r'_{cp}}, \quad r'_{cp} \equiv 0,5 (r'_a + r'_k). \quad (12)$$

Таким образом, нормировочные множители стремятся к своим значениям, принятым для плоского случая [2].

Зададимся единичным зарядом — $|q_1| k_z$ («укрупненный электрон»). Используя свойства функции sir [1] и учитывая, что

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} = \frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad dV' \equiv r'^2 k_x k_y k_z dx dy \quad (13)$$

(dV' — элемент объема промежутка), получаем в безразмерных переменных (6), (7) уравнение Пуассона и уравнения взаимодействия потока с полем в том же виде, что и для плоского промежутка [2]. В частности, по-прежнему имеют место формулы (6), (8) — (11), (13) — (19) из [2]. Аналогично полностью сохраняется и метод решения, описанный в [2], в частности, формулы (32) — (34), (36) — (38).

Различие между плоской и цилиндрической конфигурацией проявляется, следовательно, лишь в уравнениях движения. Уравнения движения в безразмерных переменных (6), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_{x\lambda} &= -\alpha^2 \exp(-2k_y y) E_x - \alpha v_y (2k_x v_{x\lambda} - 1), \\ \dot{v}_y &= -\exp(-2k_y y) E_y - k_y v_y^2 + \frac{1}{\alpha} v_{x\lambda} (k_x v_{x\lambda} - 1), \\ \dot{x}_\lambda &= v_{x\lambda} \quad \left(E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \dot{y} &= v_y \quad \left(E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\ddot{\zeta} + j\dot{\zeta} = -k_x E_+ / j\zeta^*, \quad (15)$$

где

$$x_\lambda = x + \int_0^t \beta \omega dt, \quad v_{x\lambda} = v_x + \beta \omega, \quad v_x = \dot{x}; \quad (16)$$

$$\beta = \gamma N / 2\pi, \quad \alpha = k_y / k_x; \quad (17)$$

$$\zeta = \exp(-jk_x r_+), \quad r_+ = x_a + jay; \quad (18)$$

$$E_+ = a^2 E_x + ja E_y. \quad (19)$$

Решение (15)

$$\zeta(t + \Delta t) = \zeta(t) - j\dot{\zeta}(t)(1 - e^{-j\Delta t}) + k_x \int_t^{t+\Delta t} [1 - e^{-j(t-\tau)}] \frac{E_+}{\zeta^*(\tau)} d\tau. \quad (20)$$

Полагая в (20) при малых Δt напряженность поля $E_+ \approx \text{const}$

$$\frac{1}{\zeta^*(\tau)} \approx \frac{1}{\zeta^*(t)} - \frac{\dot{\zeta}^*(t)}{(\zeta^*(t))^2} (\tau - t) \quad (21)$$

и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \zeta(t + \Delta t) = \zeta(t) - j\dot{\zeta}(t)(1 - e^{-j\Delta t}) + \frac{k_x E_+}{\zeta^*(t)} \left\{ [j(1 - e^{-j\Delta t}) + \Delta t] - \right. \\ \left. - \frac{\dot{\zeta}^*(t)}{\zeta^*(t)} \left(\frac{(\Delta t)^2}{2} + j\Delta t - 1 + e^{-j\Delta t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно (18)

$$\Delta x_a \equiv x_a(t + \Delta t) - x_a(t) = -\frac{1}{k_x} \arctg \frac{\text{Im} [\zeta(t + \Delta t) \zeta^{-1}(t)]}{\text{Re} [\zeta(t + \Delta t) \zeta^{-1}(t)]}; \quad (23)$$

$$\Delta y \equiv y(t + \Delta t) - y(t) = \frac{1}{2k_y} \ln \left[\text{Re}^2 \frac{\zeta(t + \Delta t)}{\zeta(t)} + \text{Im}^2 \frac{\zeta(t + \Delta t)}{\zeta(t)} \right]; \quad (24)$$

$$\text{Re} \frac{\zeta(t + \Delta t)}{\zeta(t)} = e_a + e_{b1} + k_{yv}(e_{d1} + e_{s1}) + k_{xv}(e_{b1} - e_{c1}); \quad (25)$$

$$\text{Im} \frac{\zeta(t + \Delta t)}{\zeta(t)} = e_{a1} + e_{b2} - k_{yv}(e_{b1} - e_{c2}) + k_{xv}(e_{d1} + e_{s2}); \quad (26)$$

$$k_{xv} \equiv k_x v_{xn}(t), \quad k_{yv} \equiv k_y v_y(t); \quad (27)$$

$$e_{ai} = e_i a, \quad e_{bi} = e_i b, \quad e_{di} = e_i d \quad (i = 1, 2); \quad (28)$$

$$e_1 = a k_y \exp(-2k_y y) E_x, \quad e_2 = k_y \exp(-2k_y y) E_y; \quad (29)$$

$$e_{c1,2} = e_{d2} \pm a, \quad e_{s1,2} = e_{b2} \pm s, \quad e_a = 1 - e_{a2}; \quad (30)$$

$$c = \cos \Delta t, \quad s = \sin \Delta t, \quad a = 1 - c, \quad b = \Delta t - s; \quad (31)$$

$$d = 1 - 0,5(\Delta t)^2 - c, \quad (32)$$

причем Δx связано с Δx_a соотношением

$$\Delta x = \Delta x_a - \int_t^{t+\Delta t} \beta \omega d\tau \approx \Delta x_a - \beta \omega(t) \Delta t - 0,5(\Delta t)^2 \beta \omega(t). \quad (33)$$

Заменяя в (25), (26) Δt на $-\Delta t$ и учитывая, что

$$\text{Re} \frac{\zeta(t)}{\zeta(t + \Delta t)} = e_y c_1, \quad \text{Im} \frac{\zeta(t)}{\zeta(t + \Delta t)} = e_y s_1, \quad (34)$$

где

$$c_1 \equiv \cos(k_x \Delta x_a), \quad s_1 \equiv \sin(k_x \Delta x_a), \quad e_y = \exp(-k_y \Delta y), \quad (35)$$

находим из полученной системы двух уравнений

$$v_{x\lambda}(t) = (A_1B_3 - A_3B_1)(k_x \Delta)^{-1} \quad (v_x(t) = v_{x\lambda}(t) - \beta \omega(t)); \quad (36)$$

$$v_y(t) = (A_3B_2 - A_2B_3)(k_y \Delta)^{-1}; \quad (37)$$

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1; \quad (38)$$

$$A_1 = e_{d1} - e_{s1}, \quad A_2 = -e_{b1} - e_{c1}, \quad A_3 = e_y c_1 - e_a + e_{b1}; \quad (39)$$

$$B_1 = -e_{b1} - e_{c2}, \quad B_2 = -e_{d1} + e_{s2}, \quad B_3 = -e_y s_1 + e_{a1} - e_{b2}, \quad (40)$$

причем в (35)

$$\Delta y = y(t) - y(t - \Delta t),$$

$$\Delta x_\lambda = x(t) - x(t - \Delta t) + \beta \omega(t) \Delta t - 0,5(\Delta t)^2 \beta \ddot{\omega}(t). \quad (41)$$

Как показывают сделанные оценки, решение (23), (24), (36), (37) уравнения движения (15) обладает достаточной точностью при $\Delta t \leq 0,25\pi$. Погрешность решения зависит от степени неоднородности поля E_+ . В частности, при малом пространственном заряде решение (23), (24), (36), (37) с шагом $\Delta t = 0,25\pi$ в сеточной области $N = 96$, $M = 48$ практически не отличается от решения уравнений движения (14) улучшенным методом Эйлера [3] с шагом $\Delta t = 0,01$.

Кинетическая энергия в безразмерных потенциалах

$$U_p = \frac{1}{2} \exp(2k_y y(t)) \left[v_y^2(t) + \frac{1}{a^2} v_{x\lambda}^2(t) \right]. \quad (42)$$

Мощности тепловых потерь определяются по формулам (36) из [2], где U_p дается (42).

2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При расчетах были выбраны размеры сеточной области $N = 96$, $M = 48$. Общая длительность счета одного шага по формулам разд. 1 на ЭВМ М-220 составляет около 75 сек для 3000 элементарных зарядов—«электронов» в выбранной сеточной области. На рисунках представлены некоторые результаты расчетов для случая, когда геометрические размеры и электрические параметры соответствуют магнетрону 4J52 [4].

Введем средние плотности пространственного заряда

$$\rho'(x) = \frac{1}{M} \int_0^M \rho'(x, y) dy, \quad \rho'(y) = \frac{1}{N} \int_0^N \rho'(x, y) dx, \quad (43)$$

где $\rho'(x, y)$ [$\text{k} \cdot \text{м}^{-3}$]—плотность пространственного заряда в точке с безразмерными координатами x , y . На рис. 1 представлены соответствующие безразмерные величины, причем в нашем случае нормировочные коэффициенты $C_{px} = 0,414 \cdot 10^{-2} \text{ к} \cdot \text{м}^{-3}$, $C_{py} = 0,288 \cdot 10^{-2} \text{ к} \cdot \text{м}^{-3}$.

По результатам моделирования средняя плотность

$$\rho' = \frac{1}{N} \int_0^N \rho'(x) dx = \frac{1}{M} \int_0^M \rho'(y) dy \quad (44)$$

составляет $1-2 \text{ к} \cdot \text{м}^{-3}$, что совпадает с экспериментальными данными для приборов типа М. Наибольшая плотность пространственного заряда $\rho'(y) \gg \rho'$ наблюдается в непосредственной близости к катоду (рис. 1 а).

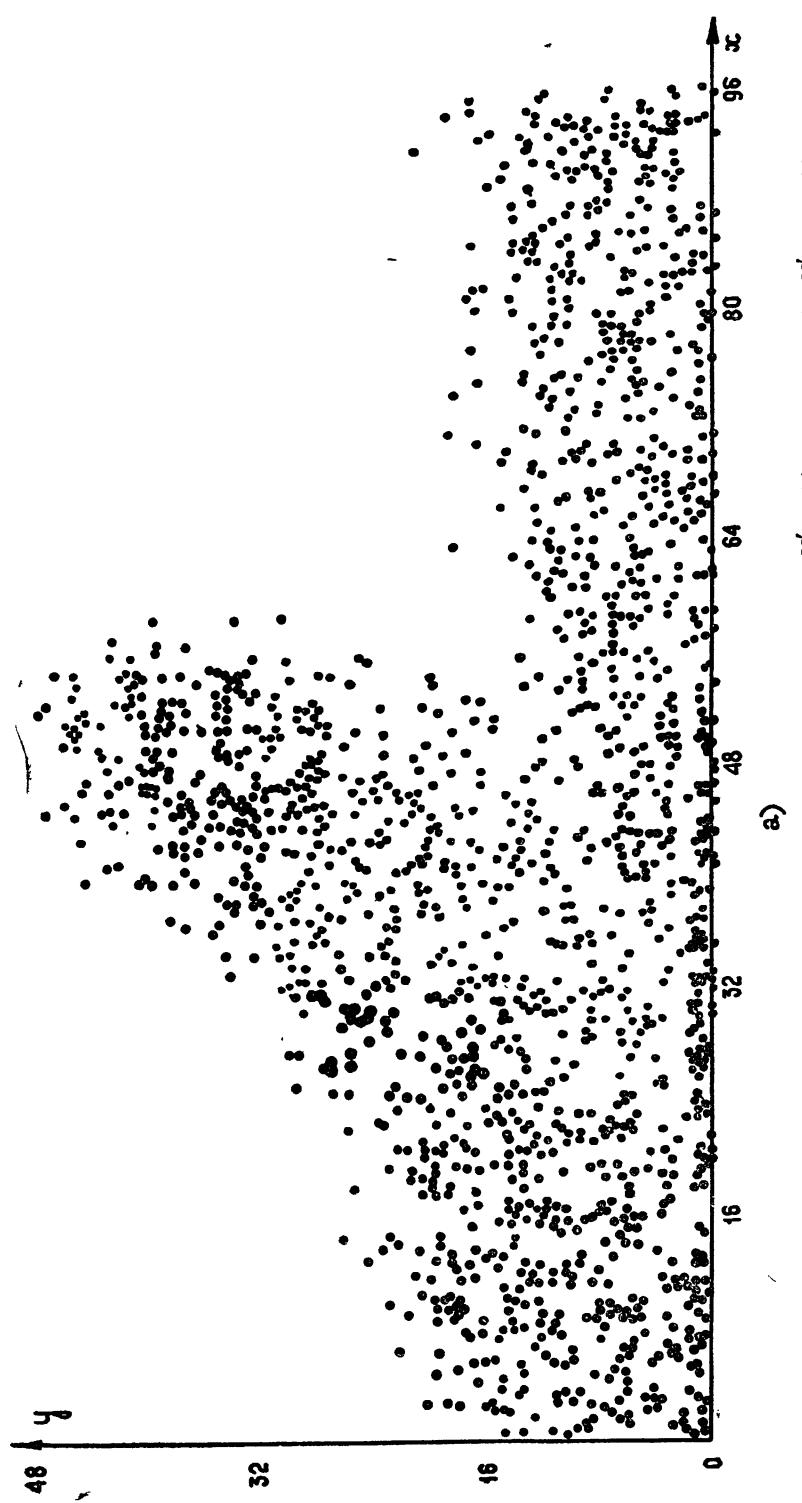


Рис. 2а. Конфигурации электронного облака в стационарном режиме при $U'_a = 15 \text{ кВ}$ ($U_a = 64$): $U'_{cm} = 4,32 \text{ кВ}$ ($U_a = 0,02$), $n = 1967$.

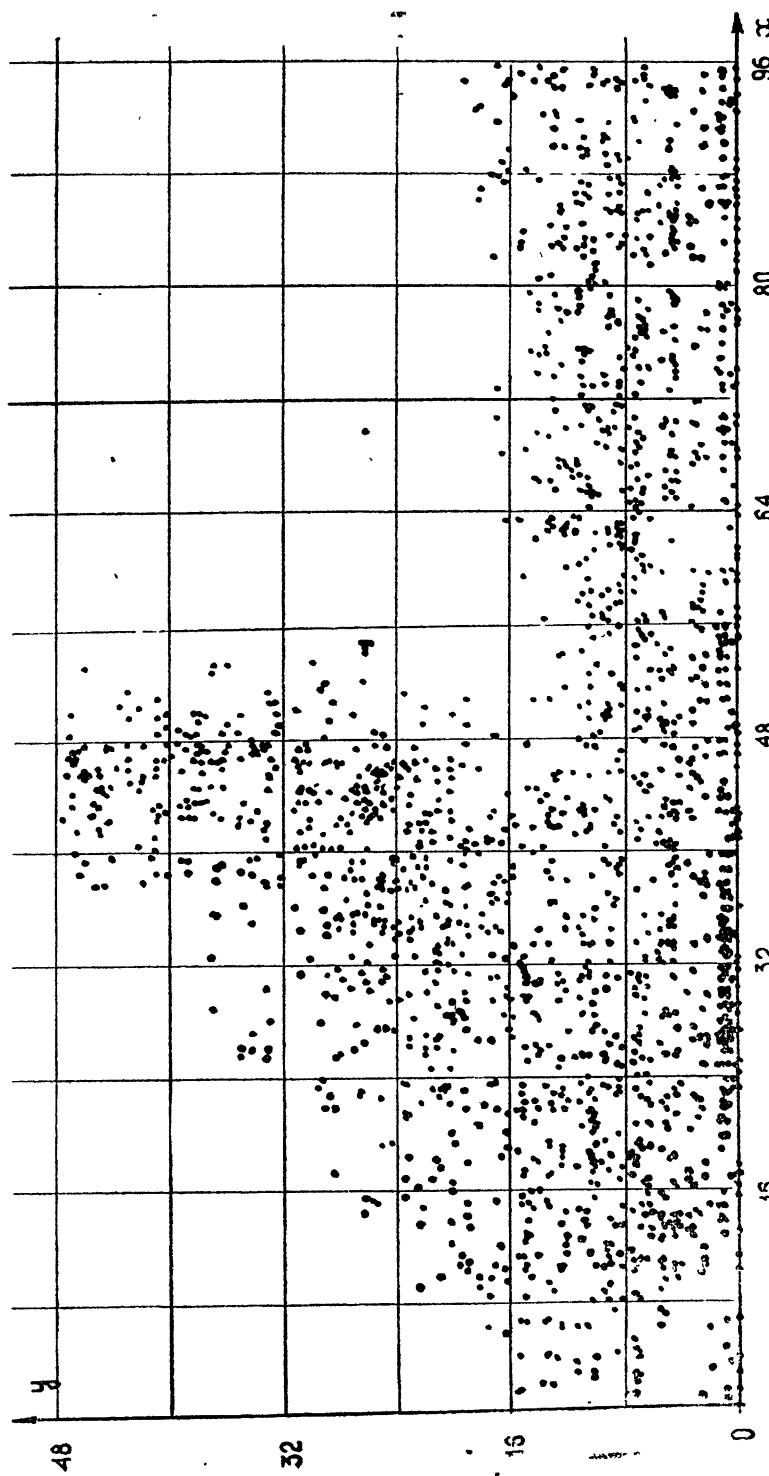


Рис. 26. Конфигурации электронного облака в стационарном режиме при $U'_a=15$ кв ($U_a=641$):
 $U'_{cm}=6,48$ кв ($U_r=0,03$), $n=2354$.

Далее имеется область с меньшей, но довольно высокой плотностью $\rho'(y) \approx \rho'$, соответствующая прикатодной части электронного облака («втулка»). Наконец, область $y \geq M/3 = 16$ с плотностью $\rho'(y) \ll \rho'$ соответствует «спице» облака. Значение $y = M/3 = 16$ близко к границе Хелла [4] облака пространственного заряда бриллюэновского потока, которая в магнетроне 4J52 при $U_r = 0$, $U_a' = 15$ кВ (т. е. $U_a = 641$) располагается при $r' = 3,06$ мм, т. е. $y = 15,8$.

Распределение пространственного заряда по окружности $\rho'(x)$ (рис. 1б) напоминает огибающую электронного облака и дает некоторое представление о его конфигурации. Более полное представление дает рис. 2. Каждой точке на рис. 2 соответствует заряд порядка $0,5 \times 10^7$ электронов. Из рисунка видно, что с увеличением амплитуды ВЧ напряжения на структуре U_{cm}' электроны вытесняются из отрицательного $y > 48$ в положительный $y < 48$ полуperiод волны, с которой происходит взаимодействие. Это наиболее заметно для электронов, расположенных ближе к аноду и подверженных действию более сильных ВЧ полей.

На рис. 3 показаны траектории в облаке пространственного заряда восьми электронов с координатами вылета с катода $y(t_0) = 0$; $x(t_0) = 12, 24, \dots, 96$ (t_0 — момент вылета). Электроны с координатами вылета $x(t_0) = 12, 36$ попадают в тормозящее поле и сразу возвращаются

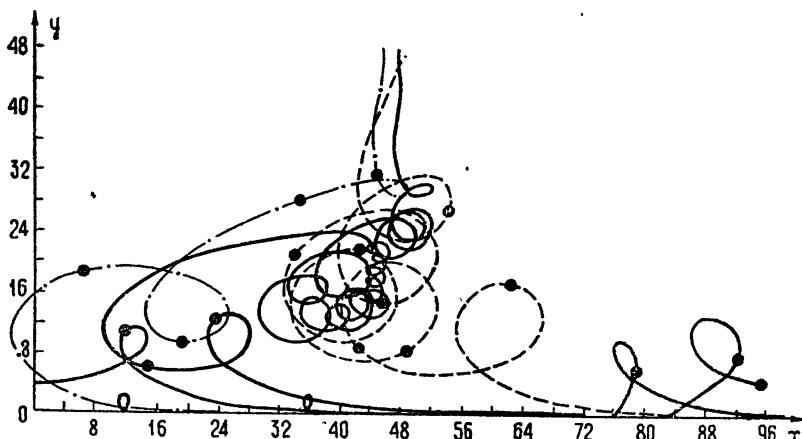


Рис. 3. Типичные траектории электронов с различными координатами вылета с катода в облаке пространственного заряда:

$$U_a = 641 \quad (U_a' = 15 \text{ кВ}), \quad U_r = 0,03 \quad (U_{cm}' = 6,48 \text{ кВ}).$$

на катод. Также возвращаются на катод электроны с координатами вылета $x(t_0) = 48, 72, 96$. Среди электронов имеется «долгоживущий» электрон с координатой вылета $x(t_0) = 60$, достигающий затем анода. Этот электрон движется по очень сложной траектории. Сначала он движется по направлению к аноду, затем, попав в потенциальную яму, изменяет направление и движется к катоду, но не достигает его и, изменив второй раз направление, попадает на анод. Сравнительно быстро достигают анода электроны с координатами вылета $x(t_0) = 24$ и 84. Из рисунка видно, что под действием поля пространственного заряда время обращения электрона по циклоиде увеличивается приблизительно в два раза (черные точки на траекториях поставлены через интервал времени t , равный 2π).

На рис. 4 показано распределение потенциала U_{1i} в узлах $i = 1, 2, \dots, 96$ первой строки сеточной области (на расстоянии около 0,03 мм от катода). Суммарный потенциал U_{1i} складывается из постоянного потенциала $U_{01} = U_a/M$, потенциала пространственного заряда и ВЧ потенциала с амплитудой $U_{cm,1} \approx U_{01}U_aY_a \ll U_{01}$.

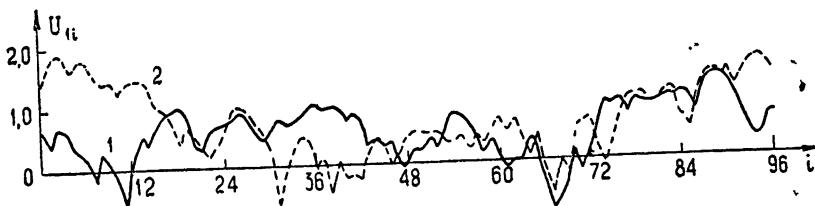


Рис. 4. Распределение потенциала в узлах первой строки сеточной области:

1. $U_a = 641$, $U_r = 0,02$;
2. $U_a = 641$, $U_r = 0,03$.

Как видно из рисунка, среднее значение потенциала U_{1i} , порядка единицы, тогда как его постоянная составляющая $U_{01} = 13$ при $U_a = 620 \div 641$, а ВЧ составляющая $U_{cm,1} \approx (0,06 \div 0,1) U_{01}$ при $U_r = 0,02 \div 0,03$. Отсюда следует, что в непосредственной близости от катода движение электронов в значительной степени определяется полем пространственного заряда, которое близко по абсолютной величине и противоположно по знаку постоянному полю.

Цифровое моделирование дает детальную информацию о нелинейных процессах в цилиндрическом электронном потоке и позволяет изучить некоторые сложные физические явления. Оно дает возможность исследовать не только усредненные, макроскопические характеристики (токи, мощности и др.), но и мгновенные, микроскопические (например, координаты и скорости электронов в облаке пространственного заряда), что в ряде случаев представляет значительный интерес. Благодаря этому описанный метод может успешно применяться для изучения нелинейных колебаний в мощных приборах типа М с цилиндрической конструкцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
2. П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. Н. Галимуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1096 (1970).
3. Я. С. Дымарский, Н. Н. Лозинский, А. Т. Макушкин, В. Я. Розенберг, В. Р. Эрглис, Справочник программиста, Судпромгиз, Л., 1963.
4. Дж. Коллинз, Магнетроны сантиметрового диапазона, 2, перевод с англ. под ред. С. А. Зусмановского, изд. Сов. радио, М., 1951.

Поступила в редакцию
22 сентября 1969 г.

CALCULATION OF CYLINDRICAL ELECTRON BEAM IN INTERSECTED FIELDS BY THE MONTE-KARLO METHOD

P. V. Romanov, A. S. Roshal', V. N. Galimullin

The Monte-Karlo method of digital modelling of nonlinear processes in the electron beam propagating in a cylindrical gap between the cathode and the anode structure is described. The method provides the high rate and accuracy of solution. Some calculation results are presented.

УДК 621.385.6

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СКОРОСТНОЙ МОДУЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

С. Г. Афанасов, С. Г. Петров

В данной работе рассматриваются особенности использования некоторых неоднородных СВЧ полей в качестве промежутков модуляции электронных потоков по скорости.

В работе [1] рассматривалась возможность взаимодействия электронных потоков с электрическими СВЧ полями, локализованными вблизи геометрических неоднородностей, представляющих собой два встречных острия.

Однако приближения, сделанные в этой работе (распределение потенциала аппроксимировалось ломаной линией), не позволили выяснить принципиальные особенности поведения электронов в неоднородных высокочастотных полях. Как и следовало ожидать, результаты, полученные при этих предположениях, аналогичны выражениям обычной теории клистрона с плоскими промежутками взаимодействия.

Чтобы избежать рассмотрения взаимодействия пучка с поперечными компонентами поля, рассматриваемые ниже электрические СВЧ поля предполагаются аксиально-симметричными (ось симметрии x), а пучок достаточно тонкий и направлен вдоль оси симметрии.

В качестве примеров рассмотрим взаимодействие электронного пучка с неоднородными полями трех видов*:

$$E_1 = E_{01}(1 - x/x_1) \sin(\omega t); \quad (1)$$

$$E_2 = E_{02} \frac{\rho/2}{x + \rho/2} \sin(\omega t). \quad (2)$$

Выражение (2)—поле параболоида вращения с радиусом кривизны на вершине ρ , если анод имеет форму эквипотенциала поля одиночного параболоида. Это приближение обычно используется для определения полей вблизи автоэлектронного эмиттера [2]:

$$E_3 = E_{03} e^{-kx} \sin(\omega t). \quad (3)$$

Аксиальная симметрия будет иметь место при возбуждении волны E_{01} в «закритическом» круглом волноводе [3]. Графики зависимости амплитуд B_n этих полей от координаты приведены на рис. 1 (кривые 1, 2, 3, соответственно)**.

Уравнения движения записываются для этих полей в виде

$$\ddot{x} = A_n f_n(x) \sin(\omega t),$$

* Тем самым учитывается влияние степени неоднородности поля, а также возможность аппроксимации истинного поля рассмотренными.

** Выбор постоянных x , ρ , k будет ясен из дальнейшего.

где $A_n = \eta E_{0n}$ ($n = 1, 2, 3$), а $f_n(x)$ — соответствующая функция изменения поля вдоль координаты x , а $\eta = e/m$.

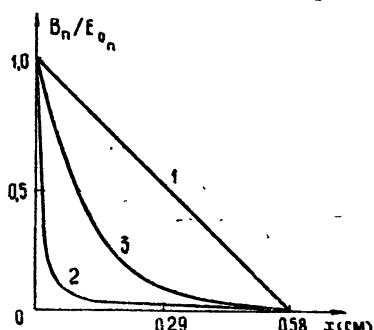


Рис. 1. Зависимость нормированных амплитуд полей от координаты x и $x_1 = 0,58$ см, $\varepsilon = 0,0117$ см, $k = 7,96$ см $^{-1}$.

Предположим, что $v_0 \gg |v_\infty|$, где v_∞ — возмущение скорости электронов. В этом случае угол пролета электронов, входящих в различных фазах в область поля, практически постоянен и, следовательно, группировка незначительна. За нулевое приближение берется решение уравнения $\ddot{x} = 0$, которое записывается

$$x^0 = v_0(t - t_0),$$

где t_0 — момент влета электрона в пространство взаимодействия. Интегрируя уравнение

$$\dot{x}^1 = A_n f[x^0(t, t_0)] \sin(\omega t)$$

при начальных условиях $t = t_0$, $x^1 = 0$, $\dot{x}^1 = 0$, и вводя $\tau = x/v_0$ — время пролета электрона до точки x , получим

$$\dot{x} = \dot{x}^0 + \dot{x}^1 = v_0 + A_n F(t, t_0) = v_0 + A_n F(\tau + t_0, t_0). \quad (4)$$

Полученные решения записываются в виде

$$1) \dot{x}(x_1) = v_0 + (A_1/\omega) \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t_0 + \sigma_1), \quad (5a)$$

где

$$a = 1 - M \cos \varphi_1; \quad b = M \sin \varphi_1; \quad M = \frac{\sin \varphi_1}{\omega}; \quad \sigma_1 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega \tau_1}{2}; \quad \tau_1 = \frac{x_1}{v_0};$$

$$2) \dot{x}(x_2) = v_0 + \frac{A_2 \omega}{2v_0} \sqrt{K^2 + N^2} \sin(\omega t_0 + \alpha_2), \quad (5b)$$

где

$$K = \sin(\varphi_2 + \varphi_0) - \sin \varphi_0; \quad N = \cos(\varphi_2 + \varphi_0) - \cos \varphi_0; \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{K}{N} - \varphi_0;$$

$$\varphi_0 = \frac{\omega \tau_0}{2v_0}; \quad \varphi_2 = \frac{\omega x_2}{v_0};$$

Для решения уравнений движения используем метод последовательных приближений. При нахождении скорости электронов на выходе из промежутка ограничимся решением в первом приближении. Будем считать границей поля точку x_n , которая уже задана в случае поля, описываемого выражением (1), а в случаях (2) и (3) определяется из равенства $f_n(x) = \gamma_n f_n(0)$ ($\gamma_n \ll 1$, $n = 2, 3$), т. е. поле в точке x_n практически отсутствует.

Пусть электрон влетает в пространство взаимодействия (при $x = 0$) со скоростью v_0 . В пространстве взаимодействия присутствует лишь высокочастотное поле, определяемое формулами (1) — (3).

Предположим, что $v_0 \gg |v_\infty|$, где v_∞ — возмущение скорости электронов. В этом случае угол пролета электронов, входящих в различных фазах в область поля, практически постоянен и, следовательно, группировка незначительна. За нулевое приближение берется решение уравнения $\ddot{x} = 0$, которое записывается

$$x^0 = v_0(t - t_0),$$

где t_0 — момент влета электрона в пространство взаимодействия. Интегрируя уравнение

$$\dot{x}^1 = A_n f[x^0(t, t_0)] \sin(\omega t)$$

при начальных условиях $t = t_0$, $x^1 = 0$, $\dot{x}^1 = 0$, и вводя $\tau = x/v_0$ — время пролета электрона до точки x , получим

$$\dot{x} = \dot{x}^0 + \dot{x}^1 = v_0 + A_n F(t, t_0) = v_0 + A_n F(\tau + t_0, t_0). \quad (4)$$

Полученные решения записываются в виде

$$1) \dot{x}(x_1) = v_0 + (A_1/\omega) \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t_0 + \sigma_1), \quad (5a)$$

$$a = 1 - M \cos \varphi_1; \quad b = M \sin \varphi_1; \quad M = \frac{\sin \varphi_1}{\omega}; \quad \sigma_1 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega \tau_1}{2}; \quad \tau_1 = \frac{x_1}{v_0};$$

$$2) \dot{x}(x_2) = v_0 + \frac{A_2 \omega}{2v_0} \sqrt{K^2 + N^2} \sin(\omega t_0 + \alpha_2), \quad (5b)$$

где

$$K = \sin(\varphi_2 + \varphi_0) - \sin \varphi_0; \quad N = \cos(\varphi_2 + \varphi_0) - \cos \varphi_0; \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{K}{N} - \varphi_0;$$

$$\varphi_0 = \frac{\omega \tau_0}{2v_0}; \quad \varphi_2 = \frac{\omega x_2}{v_0};$$

$$3) \dot{x}(x_3) = v_0 + \frac{A_3}{\sqrt{\omega^2 + (kv_0)^2}} [1 - 2 \exp(-kx_3) \cos \omega \tau_3 + \\ + \exp(-2kx_3)]^{1/2} \sin(\omega t_0 + \alpha_3), \quad (5b)$$

где

$$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{kv_0} - \operatorname{arctg} \frac{\exp(-kx_3) \sin \omega \tau_3}{1 - \exp(-kx_3) \cos \omega \tau_3}; \quad \tau_3 = \frac{x_3}{v_0}.$$

Сравним полученные результаты с известными аналогичными выражениями для плоского промежутка.

Положим, например, зазор плоского промежутка 0,58 см, $v_0 = 0,58 \cdot 10^{10}$ см·сек⁻¹, что соответствует ускоряющему напряжению $U_0 = 10000$ в. В случае пролета в неоднородных полях для сравнения необходимо, чтобы угол пролета в пространстве взаимодействия равнялся углу пролета в плоском промежутке. Поэтому для линейно спадающего поля положим $x_1 = 0,58$ см, а для поля параболоида вращения и экспоненциально спадающего поля будем считать границами области взаимодействия точки, в которых поле спадает в 100 раз по сравнению с полем при $x = 0$, и координату этой точки положим также 0,58 см.

Кроме того, в соответствии с указанными предположениями будем считать в квазистатическом случае $\left. \frac{v_{\sim m}}{v_0} \right|_{\omega \tau=0} = \frac{1}{100}$, где $v_{\sim m}$ — амплитуда v_{\sim} . При указанных предположениях зависимость $M_n(\omega \tau) = 100 v_{\sim m}(\omega \tau)/v_0$ будет аналогична коэффициенту взаимодействия M потока с полем в линейной теории клистрона. На рис. 2 приведена зависимость этой функции от угла пролета для плоского промежутка (кривая 4), а также промежутков, в которых существуют рассматриваемые поля (кривые 1, 2, 3). Очевидно, что характер модуляции для монотонно спадающих полей совершенно иной, чем для плоского промежутка. Точки обращения скоростной модуляции в нуль отсутствуют, поэтому модуляция наблюдается при любом угле пролета.

Для оценки эффективности скоростной модуляции неоднородными полями с точки зрения их использования в системах клистронного типа вычислим проводимость электронного пучка в этих полях. Активная компонента проводимости, как известно, характеризует мощность потерь на модуляцию, т. е. нагрузку источника СВЧ сигнала, модулирующего пучок, а реактивная компонента — расстройку источника. При тех же предположениях, которые использовались при выводе выражений (5), воспользовавшись методами теории малого сигнала (например, [4]), проводимость Y можно записать в виде

$$Y = j \frac{1}{2} Y_0 \beta \frac{\int_0^{x_n} f_n(x) dx \int_0^x f_n(x - \eta) \eta e^{-j\beta\eta} d\eta}{\left(\int_0^{x_n} f_n(x) dx \right)^2}, \quad (6)$$

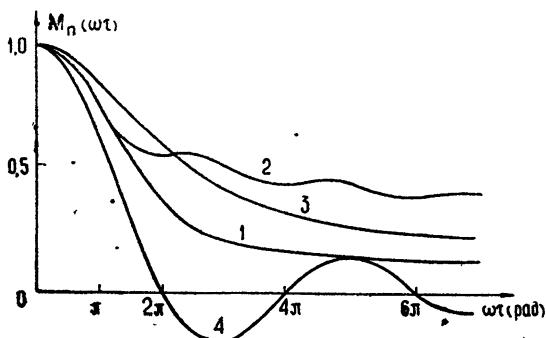


Рис. 2.

где $\beta = \omega/v_0$, $Y_0 = I_0/U_0$ — статическая проводимость электронного потока.

Подставив в это выражение соответствующую функцию изменения поля от координаты $f_n(x)$, легко найти в аналитическом виде проводимость электронного пучка как функцию угла пролета.

Для полей, определяемых выражениями (1) — (3), соответствующие выражения активных компонент проводимостей имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re} Y_1 = 2Y_0\theta^{-4}(4 - 4\cos\theta - 4\sin\theta + \theta^2 + \theta^2\cos\theta),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y_2 &= (1/2) Y_0 \frac{1}{\ln^2(1+x_3/\alpha)} [\cos\theta_0 \operatorname{ci}(\theta + \theta_0) + \sin\theta_0 \operatorname{si}(\theta + \theta_0) - \\ &- \operatorname{ci}\theta_0 \cos\theta_0 - \operatorname{si}\theta_0 \sin\theta_0 - \operatorname{ci}(\theta + \theta_0) \cos(\theta + \theta_0) - \\ &- \operatorname{si}(\theta + \theta_0) \sin(\theta + \theta_0) + \operatorname{ci}\theta_0 \cos(\theta + \theta_0) + \operatorname{si}\theta_0 \sin(\theta + \theta_0)], \\ \operatorname{Re} Y_3 &= \frac{1}{2} Y_0 \frac{\theta\delta^2}{(\theta^2 + \delta^2)^2} [\theta - 2e^{-\delta\theta} \cos\theta - e^{-\delta(\delta^2 + \theta^2)} \sin\theta], \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta = \omega x_n/v_0$; $\theta_0 = \omega\alpha/v_0$; $\alpha = \rho/2$; $\delta = kx_3$.

На рис. 3 приводятся графики зависимости нормированной активной компоненты проводимости \bar{Y}/Y_0 от угла пролета для трех рассматриваемых полей (кривые 1, 2, 3 соответственно предыдущей нумерации), построенные при тех же численных значениях величин x_n , ρ , k , v , что и рис. 1 и 2.

Кроме того, для сравнения построена известная зависимость $Y_{\text{пл}}/Y_0 = \varphi(\theta)$ плоского промежутка.

В реальном случае при расчете мощности, затрачиваемой источником СВЧ сигнала на модуляцию, приходится также учитывать джоулевы потери в резонаторе, формирующем модулирующее поле. Эти потери активной проводимостью Y_p можно характеризовать эквивалентной подключенной параллельно проводимости электронного потока Y_p .

Для сравнения эффективности модуляции рассмотренных промежутков с плоским промежутком введем коэффициенты эффективности K_n и $K_{\text{пл}}$, которые будем определять выражениями

$$K_n = \frac{M_n}{(\operatorname{Re} Y_n + Y_p)/Y_0}, \quad K_{\text{пл}} = \frac{|M|}{(\operatorname{Re} Y_{\text{пл}} + Y_p)/Y_0}.$$

Графики $K_n/K_{\text{пл}}$ приведены на рис. 4. При построении этих графиков величина \bar{Y}_p/Y_0 полагалась равной 0,3*, что соответствует $1/Y_p = 33 \text{ км}$ при первенстве пучка $P = 10^{-6} \text{ а} \cdot \text{б}^{-3/2}$ и $U_0 = 10^4 \text{ в}$.

Как видно из графиков, все рассматриваемые промежутки с неоднородными полями (за исключением небольшой области для линейно спадающего поля) более эффективны при всех углах пролета, чем обычный плоский зазор.

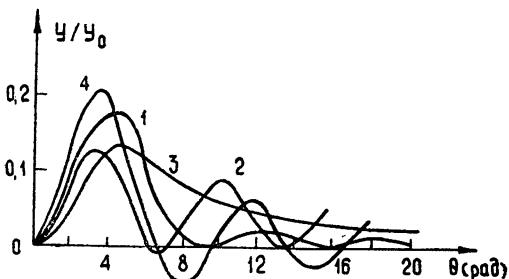


Рис. 3.

можно характеризовать эквивалентной подключенной параллельно проводимости электронного потока Y_p .

Для сравнения эффективности модуляции рассмотренных промежутков с плоским промежутком введем коэффициенты эффективности K_n и $K_{\text{пл}}$, которые будем определять выражениями

$$K_n = \frac{M_n}{(\operatorname{Re} Y_n + Y_p)/Y_0}, \quad K_{\text{пл}} = \frac{|M|}{(\operatorname{Re} Y_{\text{пл}} + Y_p)/Y_0}.$$

Графики $K_n/K_{\text{пл}}$ приведены на рис. 4. При построении этих графиков величина \bar{Y}_p/Y_0 полагалась равной 0,3*, что соответствует $1/Y_p = 33 \text{ км}$ при первенстве пучка $P = 10^{-6} \text{ а} \cdot \text{б}^{-3/2}$ и $U_0 = 10^4 \text{ в}$.

Как видно из графиков, все рассматриваемые промежутки с неоднородными полями (за исключением небольшой области для линейно спадающего поля) более эффективны при всех углах пролета, чем обычный плоский зазор.

* Очевидно, выбор этой величины не меняет характера проводимых сравнений.

Кроме того, как видно из рис. 3, максимальная величина проводимости (т. е. потери на модуляцию) для неоднородных полей меньше, чем для однородного поля и, по крайней мере, не больше, чем собственная эквивалентная проводимость γ_p резонатора.

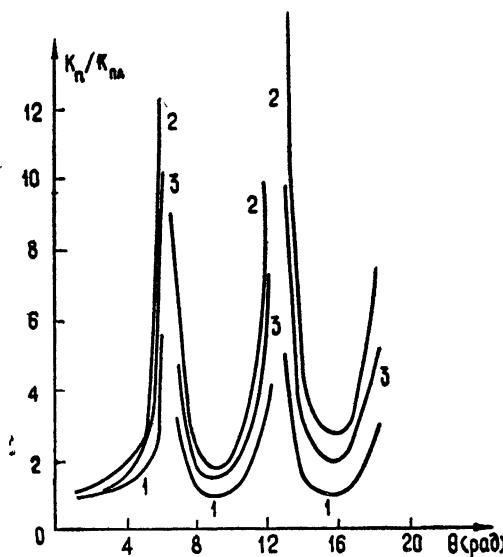


Рис. 4.

Из приведенных выше результатов видны особенности скоростной модуляции электронных потоков неоднородными полями.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Афанасов, М. И. Калашников, С. Г. Петров, О. В. Терехов. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1778 (1967).
2. М. И. Елинсон, Г. Ф. Васильев, Автоэлектронная эмиссия, Физматгиз, М., 1958.
3. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
7 марта 1969 г.,
после доработки
5 июня 1970 г.

THE PROPERTIES OF HIGH-SPEED ELECTRON MODULATION IN INHOMOGENEOUS FIELDS

S. G. Afanasov, S. G. Petrov

The properties of using some inhomogeneous UHF fields as the interval of the velocity modulation of electron streams are considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКОВ СОЛНЕЧНЫХ РАДИОСПЛЕСКОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ИНТЕНСИВНОСТИ

Л. М. Ерухимов, М. В. Кунилов, В. О. Рапопорт, В. П. Урядов

Нетрудно привести ряд аргументов* в пользу того, что источники радиоизлучения в некоторых случаях могут иметь размеры существенно меньшие, чем приводимые в литературе [2, 3]. Такая точка зрения подтверждается, по-видимому, недавно проведенными измерениями на частоте 169 Мгц с базой порядка 1,5 км [4].

В связи с этим представляются крайне желательными измерения в метровом диапазоне с базами 10—100 км для обнаружения источников с размерами $\leq 1-10$ угл. сек. Измерения с размерами базы порядка 100 км на интерферометре Майкельсона связаны с большими техническими трудностями, которые обусловлены необходимостью фиксировать фазу сигнала в каждом из пунктов. Задача существенно упрощается при использовании интерферометра интенсивности (ИИ) [5]. В этом случае, как известно, определяется корреляционный момент четвертого порядка $\langle \bar{I}_1 \bar{I}_2 - \bar{I}_1 \bar{I}_2 \rangle$, где \bar{I}_i — интенсивность сигнала в i -м плече интерферометра и, следовательно, существенно смягчаются требования к точности синхронизации сигналов в элементах интерферометра. Кроме того, в ряде случаев ИИ позволяет значительно уменьшить влияние флюктуаций, возникающих при распространении сигнала в статистически неоднородной среде.

Основной недостаток ИИ, существенно ограничивающий возможности его использования в радиоастрономии, состоит в том, что в случае слабых сигналов ($P_c \ll P_{sh}$) его чувствительность определяется отношением $(P_c/P_{sh})^2$, в отличие от интерферометра Майкельсона, где чувствительность определяется отношением P_c/P_{sh} . Однако при исследовании спорадического радиоизлучения Солнца достаточно часто наблюдаются случаи, когда P_c одного порядка или даже больше P_{sh} . Поэтому измерения размеров радиоисточников на Солнце с большим угловым разрешением вполне можно проводить с помощью этого весьма простого инструмента**.

Ниже кратко излагаются предварительные результаты проведенных в НИРФИ наблюдений за солнечными радиосплясками на ИИ на частоте 148,4 Мгц с базой $d = 18$ км.

В качестве элементов интерферометра были использованы поворотные логопериодические антенны с шириной диаграммы направленности $30^\circ \times 30^\circ$.

На выходе промежуточной частоты приемника с шириной полосы $\Delta f = 400$ кгц находился квадратичный детектор с полосой ~ 4 кгц. Переменная составляющая продетектированного сигнала (в полосе 50—4000 гц) с вспомогательного пункта с помощью ретранслятора передавалась в основной пункт, где производилось перемножение сигналов низкой частоты обоих каналов интерферометра на аналоговом устройстве. С этой целью низкочастотными сигналами модулировалась несущая (100 кгц) вспомогательного гетеродина. Для перемножения использовались три кольцевых детектора, на выходе которых получались величины $(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)$, $(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)$, $(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)(\bar{I}_2 - \bar{I}_1)$. Регистрация сигнала проводилась с постоянной времени $\tau = 0,7$ сек.

* В частности, аргументы, связанные с объяснением тонкой структуры радиосплясков I типа особенностями распространения радиоволн в неоднородной солнечной короне [1].

** Нетрудно убедиться, что ИИ подобно интерферометру Майкельсона позволяет получать распределение радиояркости по источнику. Интересно, что ИИ также имеет многолепестковую диаграмму, однако положение максимумов диаграммы определяется не положением эффективного центра источника, а относительным расстоянием между отдельными «яркими» в источнике.

Для компенсации временных задержек сигнала в основном пункте использовалась линия задержки, позволяющая получить компенсацию с точностью до 50 мксек. Калибровка системы осуществлялась с помощью шумовых генераторов, расположенных в обоих пунктах. Характеристика перемножителя определялась путем подачи шумового сигнала с основного приемника на низкочастотные каналы. При этом мы находили уровни, где коэффициент корреляции

$$\rho = \frac{(I_1 - \bar{I}_1)(I_2 - \bar{I}_2)}{[(I_1 - \bar{I}_1)^2(I_2 - \bar{I}_2)^2]^{1/2}}$$

был равен 1. При подаче сигнала от независимых генераторов оценивалась величина паразитного эффекта (отличие ρ от нуля). Величина паразитного эффекта составляла 10% ($\rho_p \approx 0,1$), что и лимитировало, в основном, точность измерений. Одновременно в каждом из пунктов записывались интенсивности радиоизлучения на трех частотах: 145,6; 148,4 и 150,2 Мгц.

Всего было обработано около 50 всплесков, наблюдавшихся 22 июня, 29 октября и 26 ноября 1969 г. Оказалось, что для заметной части кратковременных ($\tau \lesssim 2-3$ сек) всплесков (~30%) коэффициент корреляции ρ был больше 0,1—0,3. В единичных случаях величина достигала значений 0,9—1. Примеры записей всплесков на выходе корреляционного канала приведены на рис. 1.

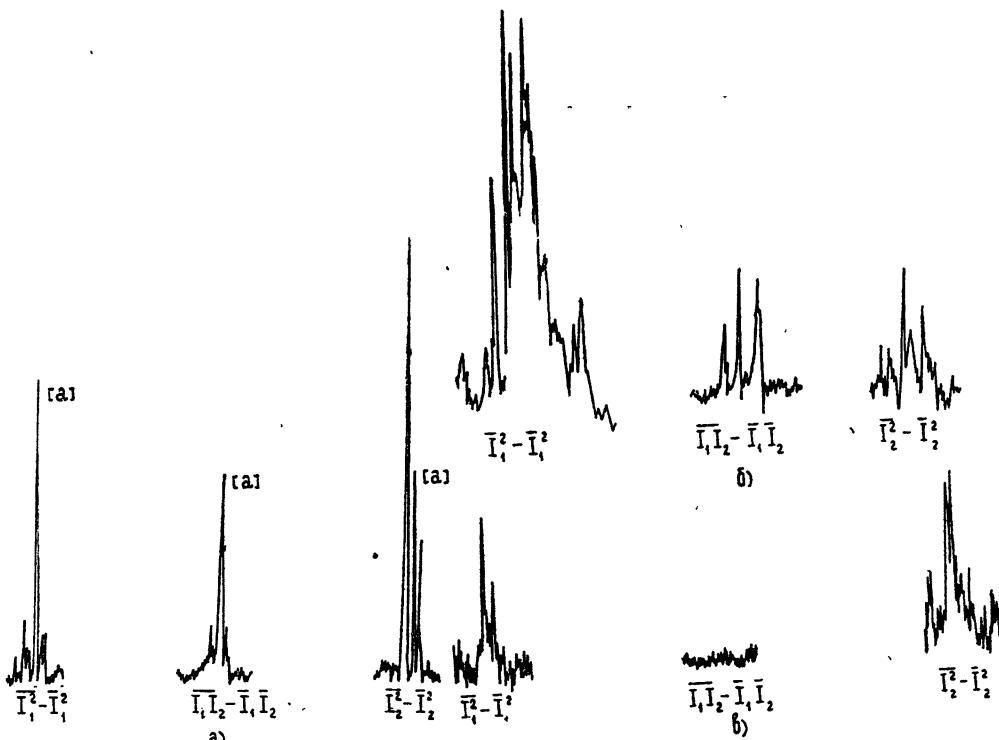


Рис. 1. Примеры записей кратковременных радиовсплесков на ИИ с базой 18 км:

- а) — 26.11.69, $\rho \sim 1,0$; размер источника всплеска $\lesssim 10-20$ угл. сек;
- б) — 29.11.69, $\rho \sim 0,9$; размер источника всплеска $\lesssim 10-20$ угл. сек;
- в) — 05.03.70, $\rho \sim 0,0$; размер источника всплеска $\gg 20$ угл. сек.

К сожалению, низкая точность определения ρ в указанных измерениях позволяла пока дать только оценку угловых размеров источников. Для гауссового распределения интенсивности излучения по источнику $I \sim \exp[-(\theta/\theta_0)^2]$ эффективный угловой размер источника определяется величиной $2\theta_0 \approx 2\lambda/3d$. Можно утверждать, что в наших измерениях в 20—30% случаев величина $2\theta_0$ была меньше или порядка 15—20 угл. сек, что в 5—10 раз меньше угловых размеров, сообщавшихся ранее в литературе.

Кроме всплесков, результаты корреляционной обработки которых приведены выше, наблюдались интенсивные всплески III типа (27 ноября 1969 г.) и для них

$\rho \leq 0,05$. Это находится в соответствии с данными предшествующих измерений, согласно которым размеры источников всплесков III типа порядка нескольких угловых минут [3].

Следует заметить, что приведенные значения размеров источников $2\theta_0$ могут быть завышены из-за влияния неоднородностей солнечной короны. Этот вопрос предполагается рассмотреть в следующей статье авторов, где будут приведены подробные результаты проводящихся в настоящее время наблюдений на интерферометрах интенсивности с большими базами.

В заключение отметим только, что предельное разрешение интерферометра, связанное с рассеянием на неоднородностях околосолнечной плазмы, не должно превышать 5—20 угл. сек.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Ерухимов, Доклад на Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Рига, 1968 г.; Астрон. ж. (в печати).
- В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
- Дж. Уайлд, С. Смэрд, А. Вейсс, УФН, 84, № 1 (1964).
- G. Daigle, Nature, 220, № 5167, 567 (1958).
- R. H. Brown, R. Q. Twiss, Phil. Mag., 45, 603 (1954).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 декабря 1969 г.

УДК 523.164 4

О ПЕРЕМЕННОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ДЕКАМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

С. Я. Брауде, И. Н. Жук, О. М. Лебедева, А. В. Мень, Б. П. Рябов

Предварительные данные о переменности плотности потока излучения дискретных источников ЗС84, ЗС144, ЗС461 в декаметровом диапазоне волн были опубликованы в [1, 2]. Как было показано в этих работах, усредненная за время две—три недели плотность потока этих источников нерегулярно изменяется во времени.

Вместе с тем, у ряда других источников (ЗС196, ЗС218, ЗС274, ЗС348, ЗС353 и т. д.), которые, как правило, наблюдались в те же промежутки времени, что и какой-либо из переменных источников, среднее значение плотности потока с точностью до ошибок измерения оставалось неизменным. Поэтому в [1, 2] было высказано предположение, что временные изменения средних значений потоков ЗС84, ЗС144, ЗС461 связаны с самими источниками, а не с процессами в среде, в которой распространяются радиоволны (ионосфера, межпланетная плазма).

В последнее время были приведены данные об измерениях плотностей потока источников ЗС461 на частотах 9, 13 и 25 Мгц (Зименки, СССР, [3]) и источника ЗС84 на частоте 22, 25 Мгц (Пентиктон, Канада, [4]). В работе [3] отмечается отсутствие переменности у источника ЗС461, а в работе [4] переменность ЗС84 не превышает 12%.

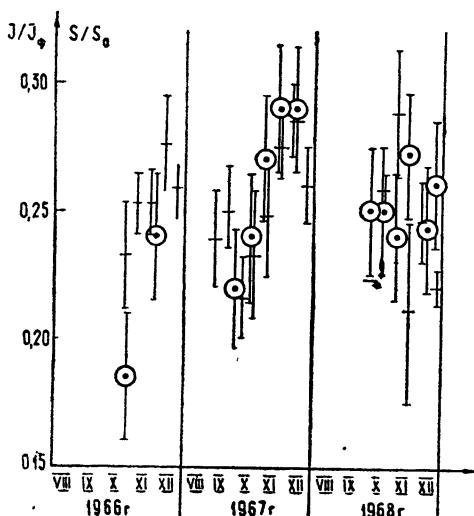


Рис. 1.

Если по данным работы [3] определить среднее значение плотности потока 3C461 (за двухнедельные интервалы) и построить изменение этой величины во времени, то получим зависимость, изображенную на рис. 1, где крестиками даны средние плотности потока 3C461, измеренные в [3], а кружками — в [2].

Обращает на себя внимание то, что наблюдавшаяся в [1, 2] тенденция изменения среднего значения плотности потока в течение 1966—1967 гг. имеет место и в измерениях, проведенных в Зименках на частоте 13 Мгц. Аналогичная ситуация наблюдается и на частоте 22,25 Мгц для источника 3C84 [4]. Таким образом, в трех пунктах — Граково, Зименки и Пентиктон, разделенных на несколько тысяч километров друг от друга, временные изменения средних плотностей потоков 3C461 и 3C84 протекают аналогично.

Следует также отметить, что в Зименках [3] при измерениях переменности 3C461 не имелось опорного источника, у которого не изменялась бы средняя плотность потока, а в Пентиктоне [4] измерения проводились на частоте 22,25 Мгц, где вариации средней величины плотности потока сравнительно невелики и лежат в пределах ошибок измерений.

Поэтому, хотя публикацию дополнительных независимых экспериментальных данных об излучении в декаметровом диапазоне источников, подозреваемых в переменности, следует всячески приветствовать, необходимо отметить, что по указанным выше причинам результаты наблюдений 3C461 [3] и 3C84 [4] не позволяют опровергнуть или подтвердить вывод о наличии переменности источников 3C461 и 3C84 сделанный в работах [1, 2].

В заключение авторы благодарят Е. А. Бенедиктова и Р. С. Роджера за предоставление результатов наблюдений дискретных источников в Зименках и Пентиктоне до их опубликования, а также и за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Брауде, И. Н. Жук, О. М. Лебедева, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Препринт, № 2 ИРЭ АН СССР, изд. Наукова думка, Киев, 1969.
2. S. Ya. Braude, O. M. Lebedeva, A. V. Megn, B. P. Ryabov, I. N. Zhousk, Msp. Not. Roy. astr. Soc., 143, 301 (1969).
3. Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1474 (1970).
4. R. S. Roger, Preprint № 285 Dominion RAO, Penticton, B. C., Canada, 1969.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
24 декабря 1969 г.

УДК 523.164.4

О ФОНЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ МЕТАГАЛАКТИКИ

Ю. В. Токарев

В последние годы ряд авторов [1—4] отмечали значительную и, возможно, определяющую роль нормальных галактик в формировании метагалактического радиоизлучения. С другой стороны, имеющиеся в литературе сведения [5, 6] свидетельствуют о том, что спектры нормальных галактик на частотах ниже 1000 Мгц становятся менее крутыми, чем у большинства наблюдающихся источников радиоизлучения. Эти факты заставляют пересмотреть оценки спектрального индекса и величины фона радиоизлучения Метагалактики, приведенные в [7, 8].

1. В работе [9], анализируя спектры источников 3 CR каталога, авторы нашли корреляцию среднего спектрального индекса в диапазоне 750—5000 Мгц и светимости P радиогалактик. Интересно построить подобную зависимость и для нормальных галактик. В табл. 1 приводятся спектральные индексы и светимости нормальных галактик на частоте 178 Мгц, причем спектральные индексы источников, имеющих перелом спектра в исследованном диапазоне частот [6], относятся к частоте ниже перелома. Сведения о спектрах нормальных галактик взяты из работ [5, 6, 9]. Спектры еще шести галактик (NGC 3547, 4254, 4278, 5813, 4565, 4030) построены по данным [6, 10, 11] наблюдений источников с антennами, имеющими примерно одинаковые диаграммы направленности. Поток на частоте 178 Мгц находился экстраполяцией спектра прямой линией к частоте 178 Мгц (за исключением источников NGC 3067 и 741-2,

для которых он измерен непосредственно). Расстояния до галактик были взяты из [12] или из [1].

Таблица 1

Номер по NGC	α	Автор	P_{178}	Номер по NGC	α	Автор	P_{178}
			вт				гц·стераад
253	0,5	[5]	$8 \cdot 10^{20}$	4374	0,57	[9]	$1,25 \cdot 10^{21}$
741-2	0,5	[6]	$9,1 \cdot 10^{22}$	4449	0,5	[5]	$3 \cdot 10^{20}$
1068	0,53	[9]	$1,6 \cdot 10^{22}$	4472	0,95	[6]	$1,5 \cdot 10^{21}$
2903	0,6	[6]	$1,5 \cdot 10^{21}$	4490	0,3	[5]	$1,6 \cdot 10^{21}$
3031	0,5	[5]	$6,3 \cdot 10^{20}$	4565	0,2	[6, 10, 11]	$5,5 \cdot 10^{20}$
3034	0,25	[9]	$1,25 \cdot 10^{21}$	4579	0,5	[6]	$1,7 \cdot 10^{21}$
3067	0,4	[6]	$7,4 \cdot 10^{21}$	4631	0,37	[6]	$7,5 \cdot 10^{20}$
3521	0,55	[6]	$3,8 \cdot 10^{20}$	5005	0,25	[6]	$5 \cdot 10^{20}$
3547	0,55	[6, 10, 11]	$4 \cdot 10^{21}$	5194	0,5	[5]	$1,6 \cdot 10^{21}$
3627	0,2	[6]	$5,7 \cdot 10^{20}$	5236	0,5	[6]	$8 \cdot 10^{21}$
3628	0,95	[6]	$1,15 \cdot 10^{21}$	5248	0,5	[6]	$8,4 \cdot 10^{20}$
4030	0,25	[6, 10, 11]	$3,1 \cdot 10^{20}$	5444	0,3	[6]	$1,35 \cdot 10^{21}$
4254	0,4	[6, 10, 11]	$2,7 \cdot 10^{21}$	5813	0,1	[6, 10, 11]	$6,1 \cdot 10^{21}$
4258	0,6	[5]	$8 \cdot 10^{20}$	6946	0,5	[5]	10^{21}
4278	0,1	[6, 10, 11]	$2,2 \cdot 10^{20}$	7331	1,05	[6]	$2,7 \cdot 10^{21}$
4303	0,95	[6]	$3,4 \cdot 10^{21}$	16342	0,8	[5]	$1,3 \cdot 10^{21}$
4321	0,3	[6]	$1,35 \cdot 10^{21}$				

По данным табл. 1 и работы [9] о спектрах отождествленных радиогалактик из ЗСР в диапазоне 38—750 Мгц (значения светимостей последних взяты из [13]) вычислены средние спектральные индексы на частотах ниже 1000 Мгц (табл. 2). Средняя ошибка $\bar{\alpha}(P)$ принята равной σ/\sqrt{n} , где σ — интервал по $(\alpha)P$, в котором содержится 2/3 источников, n — число источников в данном интервале светимости.

Таблица 2

P_{178}	$\bar{\alpha}(P)$
вт	гц·стераад
$10^{20} - 10^{21}$	$0,37 \pm 0,05$
$10^{21} - 10^{22}$	$0,54 \pm 0,05$
$10^{22} - 10^{23}$	$0,54 \pm 0,04$
$10^{23} - 10^{24}$	$0,67 \pm 0,06$
$10^{24} - 10^{25}$	$0,74 \pm 0,04$
$10^{25} - 10^{26}$	$0,76 \pm 0,05$
$10^{26} - 10^{27}$	$0,79 \pm 0,06$

2. Для вычисления спектрального индекса радиоизлучения Метагалактики $\alpha_{\text{мет}}$ необходимо знать распределение источников по светимости. Большинство авторов при построении функции светимости пользуются измерениями нормальных галактик на частоте 1410 Мгц [10] и радиогалактик на частоте 178 Мгц в ЗСР. Мы воспользуемся функцией радиосветимости на 178 Мгц, полученной Шоломицким [1]:

$$n(P) = 1,3 \cdot 10^{23} P^{-2,18} \quad (P_1 < P < P_2), \quad (1)$$

где $P_1 = 2,5 \cdot 10^{20}$ вт·гц⁻¹·стераад⁻¹, $P_2 = 1,5 \cdot 10^{26}$ вт·гц⁻¹·стераад⁻¹ — статистические границы функции светимости.

Для значений $\bar{\alpha}(P)$ из табл. 2 и выражения (1) по формуле

$$\alpha_{\text{мет}} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{P}{\bar{\alpha}(P)} P n(P) dP \left(\int_{P_1}^{P_2} P n(P) dP \right)^{-1} \quad (2)$$

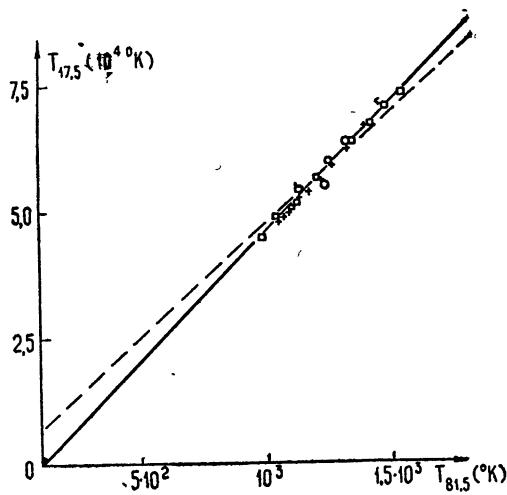
получим $\alpha_{\text{мет}} = 0,55 \pm 0,05$. На эту оценку может повлиять то, что $n(P)$ нормальных галактик в (1) пересчитана на 178 Мгц со средним индексом $\bar{\alpha} = 0,9$. На самом же деле $\bar{\alpha}_{1410-2695} = 1,25$ [11], в диапазоне частот от 1200 до 200 Мгц среднее «уплощение» спектра нормальных галактик $\bar{\alpha} = 0,8 \pm 0,4$ [8], а зависимость $\bar{\alpha}(P)$ на частоте ниже перелома приведена в табл. 2. С другой стороны, нижнюю границу $n(P)$, по-видимому, следует уменьшить за счет учета слабых галактик до значения $6,3 \cdot 10^{19}$ [14]. Расчет показывает, что поправки к $\alpha_{\text{мет}}$ из-за указанных эффектов компенсируют друг друга, так что для спектрального индекса радиоизлучения Метагалактики на метровых волнах, полученного по результатам подсчетов радиоисточников, следует принять значение $\alpha_{\text{мет}} = 0,55 \pm 0,05$.

3. Независимую оценку $\beta_{\text{мет}}$ можно получить при весьма естественных предположениях из спектральных измерений распределенного космического радиоизлучения на ряде частот. Для анализа измерений этих результатов обычно строится двухтемпературная зависимость $T_{v_2}(T_{v_1})$ [1]:

$$T_{v_2} = T_{v_1} (\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{гал}}} + \quad (3)$$

$$+ T_{\text{мет}} [(\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{мет}}} - (\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{гал}}}],$$

Рис. 1. — $\beta_{\text{гал}} = 2,55$;
 - - - $\beta_{\text{гал}} = 2,475$ [8];
 + + + $\delta = 52^\circ$; $\square \square \square \square \square \square$ $\delta = 35^\circ$;
 ○ ○ ○ ○ ○ ○ $\delta = 16^\circ$.



где ν_1, ν_2 — частоты радиоизлучения, $\beta_{\text{гал}}, \beta_{\text{мет}}$ — температурные спектральные индексы радиоизлучения Галактики и Метагалактики, $T_{\text{мет}}$ — температура радиоизлучения Метагалактики. В области небосвода, где $\beta_{\text{гал}}$ не зависит от координат и, следовательно, от T_{v_1}, T_{v_2} , (3) есть уравнение прямой с наклоном $(\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{гал}}}$ и «излишком» $I = T_{\text{мет}}[(\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{мет}}} - (\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\text{гал}}}]$ на оси T_{v_2} . Заметим, что если $\beta_{\text{мет}} = \beta_{\text{гал}}$, то «излишок» I при любых $T_{\text{мет}}$ обращается в нуль, и точки зависимости $T_{v_2} - T_{v_1}$ ложатся на прямую, выходящую из начала координат.

На рис. 1 нанесены значения температур на частотах 17,5 и 81,5 Мгц (диаграммы $12^\circ \times 17^\circ$) по данным [8] для области 2 (в области 2 излучение приходит с направлений, не захватывающих излучения рукава и Северного шпура [8]). Точки хорошо ложатся на прямую с наклоном $(81,5/17,5)^{2,55 \pm 0,13}$ и нулевым излишком*. Допустив, что излучение из области 2 характеризуется постоянным $\beta_{\text{гал}}^{**}$ (это довольно естественно, если учесть характер области), получим для области 2 $\beta_{\text{гал}} = \beta_{\text{мет}} = 2,55 \pm 0,03$. Совпадение $\beta_{\text{гал}}$ в одной из областей Галактики с $\beta_{\text{мет}}$ довольно естественно, поскольку вариации $\beta_{\text{гал}}$ по небосводу заметны [8, 16].

4. $T_{\text{мет}}$, определяемая из (3), существенно зависит от значения $\beta_{\text{мет}}$ и предположения о постоянстве $\beta_{\text{гал}}$ по небосводу. Если для излучения рукава (область 1 [8]) $\beta_{\text{гал}} = 2,38$, то при $\beta_{\text{мет}} = 2,75$, отвечающем спектрам мощных радиогалактик $T_{\text{мет}} 81,5 = -250 \pm 50^\circ\text{K}$ ($T_{\text{мет}} 17,5 = 30 \pm 7^\circ$) [8]. Если же $\beta_{\text{мет}} = 2,55$, то $T_{\text{мет}} 81,5 = (6,4 \pm 1,3) \cdot 10^2^\circ\text{K}$ и излучение Метагалактики составляло бы не менее $3/4$ от радиоизлучения из области минимума ($T_{\text{мин}} = 6,8 \cdot 10^2^\circ\text{K}$ [8]). В заключение подчеркнем, что конкретизация $T_{\text{мет}}$ и $\beta_{\text{мет}}$ приобретает особое значение для определения $\beta_{\text{гал}}$ по результатам эксперимента типа [15, 16], когда число точек зависимости $T_{v_2} - v_1$ мало или по ним нельзя непосредственно определить значение $\beta_{\text{гал}}$.

Автор благодарен Г. Г. Гетманцеву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Б. Шоломицкий, Астрон. ж., 44, 939 (1967).
- А. В. Засов, Астрон. ж., 43, 7 (1966).
- P. Veron, Ann. Astrophys., 30, 719 (1967).
- K. Brecher, P. Moggison, Phys. Rev. Lett., 23, 802 (1969).
- C. Hazard, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 126, 489 (1963).
- K. R. Lang, Y. Tersian, Astrophys. Lett., 3, 29 (1969).
- A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. Kenderdine, I. I. K. Pauliny-Toth, Mon. Not. R. A. S., 124, 297 (1952).

* В [8] для области 2 получено $\beta_{\text{гал}} = 2,475 \pm 0,04$ по измерениям на частотах 17,5 и 81,5 Мгц с диаграммой $12^\circ \times 17^\circ$. Однако при определении наклона в [8] были включены точки $\delta = 35^\circ, \alpha = 16^\circ 30' \div 17^\circ 30'$, захватывающие область шпура, и, наоборот, не учтены точки $\delta = 35^\circ, \alpha = 11^\circ 30' \div 12^\circ 30'$ и $\delta = 52^\circ, \alpha = 13^\circ 30' \div 14^\circ 30'$, принадлежащие области 2.

** Тот факт, что точки зависимости $T_{v_2}(T_{v_1})$ в какой-то области ложатся на прямую, вообще говоря, еще не доказывает постоянства $\beta_{\text{гал}}$ в этой области.

8. A. H. Bridle, Mon. Not. R. A. S., 136, 219 (1967).
9. K. I. Kellerman, I. I. K. Pauliny-Toth, Astrophys. J., 157, 1 (1969).
10. D. S. Heeshen, C. M. Wade, Astron. J., 69, 277 (1964).
11. M. L. De Jong, Astrophys. J., 150, 1 (1967).
12. C. Chester, M. S. Roberts, Astron. J., 69, 635 (1964).
13. V. Petrosian, Astrophys. J., 155, 1029 (1969).
14. Г. Б. Шоломицкий, Астрон. ж., 45, 478 (1968).
15. Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. С. Коробков, А. Ф. Тарасов, Астрон. ж., 45, 936 (1968).
16. Г. Г. Гетманцев, Е. Д. Пятова, Ю. В. Токарев, В. А. Шибаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1480 (1970).
17. A. G. Doroshkevich, M. S. Longair, Ya. B. Zeldovich, Mon. Not. R. Astr. Soc., 147, 139 (1970).
18. W. Davidson, Nature, 227, 357 (1970).
19. T. F. Howell, I. R. Shakeshaft, Nature, 216, 753 (1967).
20. T. F. Howell, Astrophys. Lett., 6, 45 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 февраля 1970 г.

Примечание при корректуре. Расширенный подсчет внегалактических радиоисточников говорит, по-видимому, об увеличении с ростом космологического расстояния относительного вклада мощных радиогалактик и квазаров в интегральное излучение дискретных источников [17, 18]. Поэтому оценка $\beta_{\text{мет.}}$, полученная в статье, по существу, для локальной функции светимости, может оказаться заниженной. С другой стороны, спектральный индекс тотального космического радиоизлучения в области северного галактического полюса $\beta = 2,55 \pm 0,04$ вплоть до частот $\nu \geq 400 \text{ МГц}$ [8]. Если на этих частотах в соответствии с [7, 19, 20] $\beta_{\text{гал.}} = 2,8 \pm 0,1$, то наличие значительной внегалактической составляющей с относительно низким спектральным индексом представляется необходимым.

УДК 621.378.338

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ЧАСТОТЫ ДВУХМОДОВОГО ГЕЛИЙ-НЕНОВОГО ЛАЗЕРА

Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов

В работах [1, 2] были приведены результаты измерений естественных частотных флуктуаций НЕ-Не лазера, генерирующего лишь единственный аксиальный тип колебаний (одночастотный режим) при различных настройках его частоты по отношению к центру линии оптического перехода. В данном сообщении приводятся результаты измерений частотных флуктуаций одного из типов колебаний при одновременной генерации лазером двух аксиальных мод (двуихчастотный режим) на оптическом переходе $\lambda = 0,63 \text{ мк.}$

При двухмодовом режиме генерации, как известно, наблюдается взаимодействие колебаний, приводящее к ряду своеобразных динамических эффектов. Это же взаимодействие вызывает в общем случае и ряд особенностей в характере флуктуаций излучения отдельных типов колебаний лазера. Проведенные измерения флуктуаций интенсивности двухмодового лазера показали (в согласии с расчетами), что спектр флуктуаций интенсивности каждой моды существенно изменяется: при прочих равных условиях уровень флуктуаций на низких частотах значительно увеличивается, а протяженность спектра резко уменьшается по сравнению со случаем генерации одного типа колебаний [3].

Отмеченные обстоятельства при двухмодовой генерации в силу неизохронности лазера могут проявиться и в естественных частотных флуктуациях. Расчет показывает, однако, что последние не должны претерпевать существенных изменений подобно флуктуациям интенсивности. Дело в том, что частотные флуктуации отдельной моды зависят от флуктуаций интенсивности обеих мод одновременно; воздействие последних нейтрализуется в силу их значительной отрицательной корреляции в широком интервале частот наблюдения.

Остановимся на случае генерации лазером двух мод с приблизительно одинаковыми мощностями. В этом случае для каждого типа колебания спектральная плотность флуктуаций частоты $\delta_{\text{пп}}^2$ может быть представлена (без учета влияния дисперсии) в виде

$$\overline{\delta_{n\Omega}^2} = \overline{\delta_\Omega^2} + P'_{nn} P'_{nk} \overline{M_\Omega^2} + 0.25 (P'_{nn} - P'_{nk})^2 \overline{M_{n\Omega}^2}. \quad (1)$$

Здесь $\overline{\delta_{n\Omega}^2}$ — спектральная плотность частотных флуктуаций излучения лазера в центре перехода, при условии, что лазер генерирует лишь одно колебание, параметры P'_{nn} и P'_{nk} — коэффициенты неизохронности данного типа колебания, $\overline{M_\Omega^2}$ и $\overline{M_{n\Omega}^2}$ — спектральные плотности коэффициента глубины модуляции интенсивности полного излучения лазера и излучения одной из мод соответственно.

Из выражения (1) следует, что форма и значения спектральной плотности $\overline{\delta_{n\Omega}^2}$, определяемые лишь первыми двумя слагаемыми, практически совпадают (для Не-Не лазера обычно с точностью до двойки) с теми, которые имеют место при генерации того же лазера в одиночастотном режиме. Из сказанного выше относительно спектра флуктуаций $\overline{M_{n\Omega}^2}$ каждой моды следует, что появляющееся при двухчастотном режиме генерации третье слагаемое в (1) обуславливает качественную специфику спектра $\overline{\delta_{n\Omega}^2}$. Действительно, форма спектра частотных флуктуаций каждой моды (тем самым и форма ее спектральной линии), зависит от формы спектра флуктуаций интенсивности $\overline{M_{n\Omega}^2}$ отдельной моды. Однако влияние этой зависимости, по-видимому, в случае Не-Не лазера мало, так как оно определяется разностью близких по величине коэффициентов $P'_{nn} - P'_{nk}$.

С целью проверки высказанных выше соображений нами были проведены эксперименты по измерению спектров флуктуаций частоты аксиальных типов колебаний лазера при одиночастотной и двухчастотной генерациях.

Схема и методика измерений частотных флуктуаций в основных чертах совпадает с описанной в [1]. В опытах использовались два лазера на естественной смеси изотопов Не с приблизительно одинаковыми механическими и электрическими параметрами (межмодовые расстояния были около 675 и 615 Мгц). При этих условиях спектральные плотности флуктуаций частоты обоих лазеров были приблизительно одинаковыми и независимы; поэтому измеряемые на опыте значения спектральной плотности w флуктуаций частоты разностного колебания, обусловленного обоими лазерами, приблизительно вдвое больше значений спектральной плотности флуктуаций частоты каждого типа колебаний исследуемых лазеров. Параметры установки позволяли обеспечить значительное отношение сигнал/шум вплоть до частоты наблюдения $F = 300$ кци, где чувствительность установки достигала значения $w = (2 \pm 3) \cdot 10^{-3}$ Гц²·Гц⁻¹.

Отметим также, что схема наблюдения оптических спектров лазеров позволяла исследовать их как совместно, так и отдельно.

Измерения проводились вначале при настройке частот обоих лазеров на центр линии перехода (точнее говоря, на провал Лэмба в кривой зависимости мощности от частоты). Затем путем изменения лишь длины резонатора лазеры были переведены в двухмодовый режим генерации с приблизительно одинаковой мощностью в каждой моде. При этом в обоих режимах полные мощности излучения отличались не более чем на 15%.

Результаты одного из циклов измерений приведены на рис. 1. Кривыми 1 и 2 представлены спектральные плотности флуктуаций частоты w (F) разностного коле-

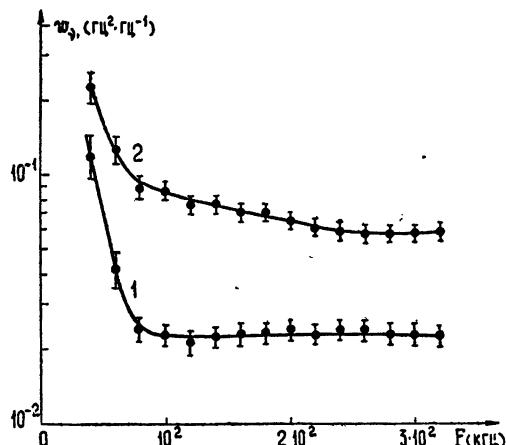


Рис. 1. Экспериментальные зависимости спектральной плотности флуктуаций частоты биений (8,4 Мгц) от частоты наблюдения; 1 — оба лазера в одномодовом режиме; 2 — оба лазера в двухмодовом режиме генерации.

бания соответственно для одночастотного и двухчастотного режимов генерации. (Вертикальные отрезки указывают границы наблюдавшегося от цикла к циклу измерений разброса экспериментальных точек.) Интервал частот наблюдения F был выбран от 40 до 300 кгц. В указанном интервале значения $w_{\nu}(F)$ на кривой 1 в диапазоне от 80 до 300 кгц практически постоянны, что является характерным для естественных флуктуаций; значения же $w_{\nu}(F)$ на частотах до ~ 80 кгц можно объяснить техническими причинами.

В двухмодовом режиме генерации, когда мощность каждой моды приблизительно уменьшилась вдвое и частота генерации уже не совпадала с центром линии перехода, спектр $w_{\nu}(F)$ изменился. Как видно из кривой 2, на участке спектра от 80 до 300 кгц произошло в основном лишь увеличение $w_{\nu}(F)$ немногим более чем в два раза. Такое изменение спектральной плотности вполне согласуется с указанным изменением мощности генерации в mode и расстройкой частоты. Кроме того, на кривой 2 в отличие от 1 наблюдается некоторое непостоянство значений величины $w_{\nu}(F)$ в интервале F от 80 до 200—240 кгц, что, как показали опыты, не связано с техническими флуктуациями.

По нашему мнению, этот эффект непостоянства $w_{\nu}(F)$ можно объяснить воздействием амплитудных флуктуаций на частотные в силу неизохронности лазера (речь идет о влиянии третьего слагаемого в соотношении (1)). Однако различие значений $w_{\nu}(F)$ на частотах 100 и 300 кгц относительно мало, что свидетельствует о близости значений коэффициентов P'_{nn} и P'_{nk} *.

Наблюдаемое различие в ходе кривых 1 и 2 в интервале частот от 80 до 240 кгц, по-видимому, могло бы проявиться наиболее полно на частотах наблюдения до 80—100 кгц; но, к сожалению, эта область замаскирована техническими флуктуациями. Это не позволяет в наших опытах при двухмодовом режиме генерации провести строгого сопоставления форм спектра естественных частотных и амплитудных флуктуаций в районе низких частот наблюдения.

Таким образом, проведенные измерения показывают, что при двухчастотной генерации характер спектра флуктуаций частоты отдельного типа колебаний не претерпевает существенного изменения по сравнению со случаем генерации лишь одного типа колебания лазера. Аналогичная ситуация в Не-Не лазере наблюдается и при неравных мощностях типов колебаний.

Очевидно также, что имеет место корреляция частотных флуктуаций различных мод в силу корреляции флуктуаций их интенсивностей, но соответствующих экспериментов нами не проводилось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, Письма в ЖЭТФ, 6, 733 (1967); ЖЭТФ, 55, 1645 (1968); ЖЭТФ, 56, 718 (1969).
2. A. E. Siegman, R. Aggarwal, Phys. Rev. Lett., 20, 901 (1968); R. Aggarwal, A. E. Siegman, J. Appl. Phys., 40, 910 (1969).
3. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 898 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 октября 1969 г

УДК 621.378.32

СИНХРОНИЗАЦИЯ МОД РУБИНОВОГО ОКГ МЕТОДОМ РЕЗОНАНСНОЙ МОДУЛЯЦИИ ПОТЕРЬ

А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, Ю. Н. Поливанов, В. А. Смирнов

Создание мощных импульсных ОКГ, генерирующих ультракороткие импульсы света с хорошей пространственной когерентностью, необходимо для целей нелинейной оптики, голограмм и т. д. При самосинхронизации мод с использованием нелинейных поглотителей получены импульсы света длительностью $2 \cdot 10^{-13}$ сек [1]. Однако, как показали наши измерения, в режиме самосинхронизации мод пространственная когерентность не сохраняется. Известно, что и в режиме обычного гигантского импульса пространственная когерентность излучения также не сохраняется [2] из-за перестройки собственных частот резонатора в процессе снятия инверсии [3–5].

* Не исключено, что указанный эффект в какой-то мере связан с прохождением флуктуаций интенсивности мод на выход частотного дискриминатора (хотя при контрольных опытах этого обнаружено не было).

В настоящем сообщении приводятся результаты предварительных исследований синхронизации мод методом резонансной модуляции потерь.

Генератор высоковольтных импульсов, (см. рис. 1), собранный на коаксиальных линиях, выдавал на оптический затвор (ячейка Керра) серию прямоугольных импульсов длительностью 7 нсек. Период повторения импульсов равнялся времени двойного прохождения света в резонаторе (9 нсек). Амплитуда импульсов соответствовала 100-процентной модуляции потерь. Коэффициент усиления ОКГ за один проход примерно равнялся 12. Резонатор длиною 85 см образовывался двумя плоскими зеркалами M_1 и M_2 с коэффициентами отражения соответственно 0,3 и 0,98. Ячейка Керра с призмой Глана—Томсона помещалась вблизи зеркала M_2 . Расстояние между электродами ячейки Керра равнялось 7 мм, что определяло поперечные размеры резонатора. Таким образом, селекции поперечных мод не осуществлялось.

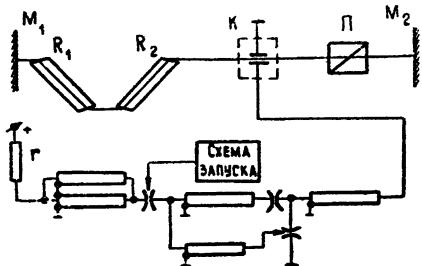


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
 R_1, R_2 — кристаллы рубина 12×120 мм;
 M_1, M_2 — зеркала с коэффициентом отражения 30, 90%;
 K — ячейка Керра;
 Π — поляризатор;
 r — зарядное сопротивление.

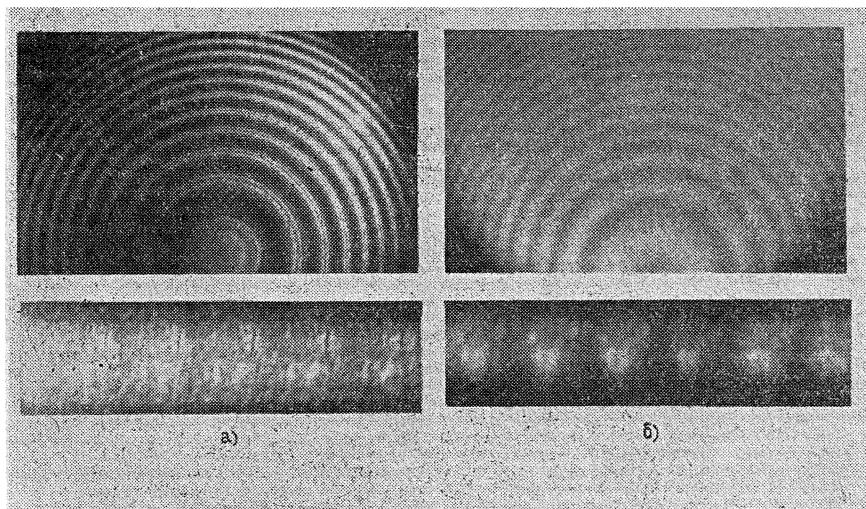


Рис. 2. Спектрограммы и интерферограммы излучения:
а) спектрограмма (вверху) и интерферограмма (внизу) излучения в режиме обычного гигантского импульса;
б) спектрограмма (вверху) и интерферограмма (внизу) излучения в режиме синхронизации мод.

Длительность импульсов излучения измерялась осциллографом И-2-7 и ФЭК-14. Спектр регистрировался эталоном Фабри—Перо с базой 2 мм. Пространственная когерентность определялась по интерференционной картине от дифракционной решетки с шириной щели 0,03 мм и расстоянием между щелями 0,3 мм. На рис. 2а приведены спектрограмма излучения рубина и интерференционная картина для случая обычного гигантского импульса. (На ячейку Керра подавался гладкий прямоугольный импульс длительностью 300 нсек.) На рис. 2б приведены спектрограмма излучения и интерференционная картина для случая, когда на ячейку Керра подавалась серия прямоугольных импульсов. Как видно, в этом случае пространственная когерентность сохраняется в течение всего времени генерации на расстоянии не менее 0,3 мм. Ширина спектра излучения составляла $2,1 \text{ см}^{-1}$. Длительность одного импульса излучения равнялась 4 нсек, что близко к пределу разрешения регистрирующей аппаратуры. Длительность всей генерации равнялась 60 нсек.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. DeMeria, W. H. M. Glenn, J. Briengå, M. E. Mach, Proc. IEEE, 57, № 1, 2 (1969).
2. В. Б. Коробкин, А. М. Леонтьевич, М. Н. Попова, М. Я. Щелев, ЖЭТФ, 53, 16 (1967).
3. D. Phol, Phys. Lett., 26, № 8, 357 (1968).
4. Berkley, D. A. Wolde, G. J. S. Appl. Phys., 38, № 8, 3231 (1967).
5. И. С. Горбань, Г. Л. Конончук, ЖПС, 8, № 5, 864 (1968).

Институт физики полупроводников
СО АН СССР

Поступила в редакцию
1 сентября 1969 г.

УДК 621.373.072.9

О СПЕКТРЕ СИНХРОНИЗОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ РАССТРОЙКИ

Л. П. Зачепицкая, А. Н. Малахов

1. В работе [1] рассматривался спектр генератора, подверженного воздействию сильного δ -коррелированного шума (нелинейная задача) и монохроматического синхронизующего сигнала при нулевой расстройке. Было показано, что в спектре содержится дискретная линия на частоте автоколебаний. Представляет интерес рассмотрение случая ненулевой расстройки. Этому вопросу и посвящено настоящее сообщение.

2. Известно (см., например, [2]), что сумма случайного процесса и гармонического сигнала обладает такой функцией корреляции $\Phi(\tau)$, которая при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Phi(\tau) = m \cos \omega_0 \tau, \quad (1)$$

где ω_0 — частота, m — мощность гармонического сигнала.

Функция корреляции колебаний синхронизованного генератора в пренебрежении амплитудными флюктуациями может быть представлена в виде [1]

$$\Phi_x(\tau) = (R_0^2/2) [\langle \cos \Delta\varphi(t, \tau) \rangle^t \cos \omega_c \tau - \langle \sin \Delta\varphi(t, \tau) \rangle^t \sin \omega_c \tau], \quad (2)$$

где R_0 — амплитуда колебания, $\Delta\varphi(t, \tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$, ω_c — частота синхронизующего гармонического сигнала. При этом фаза $\varphi(t)$, являющаяся разностью фаз синхронизуемого и синхронизующего колебаний, подчиняется, как известно, следующему нелинейному уравнению:

$$\dot{\varphi} + \Delta_c \sin \varphi = -\Delta - \xi(t), \quad (3)$$

где $\Delta = \omega_r - \omega_c$, ω_r — частота синхронизуемого генератора, Δ_c — полоса синхронизации, $\xi(t)$ — нормальный случайный процесс с функцией корреляции $\Phi_\xi(\tau) = D\delta(\tau)$.

3. Для отыскания среднего косинуса и синуса, входящих в (2), необходимо знать двумерное вероятностное распределение фазы $\varphi(t)$. Это вероятностное распределение может быть записано в виде.

$$W[\varphi_1(t), \varphi_2(t + \tau)] = W(\varphi_1) W[\varphi_2(t + \tau)/\varphi_1(t)],$$

где вероятность переходов $W[\varphi_2(t + \tau)/\varphi_1(t)]$ является решением уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП), соответствующего уравнению (3), а $W(\varphi)$ — стационарным решением уравнения ЭФП.

Ограничиваюсь отысканием средних значений косинуса и синуса только при сколь угодно больших τ , можно воспользоваться тем обстоятельством, что $W[\varphi_2(t + \tau)/\varphi_1(t)]$ стремится к $W(\varphi_2)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Вследствие этого получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \cos \Delta\varphi(t, \tau) \rangle^t = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi W(\varphi) d\varphi \right]^2 + \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi W(\varphi) d\varphi \right]^2 = \\ = \langle \cos \varphi \rangle^2 + \langle \sin \varphi \rangle^2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \sin \Delta\varphi(t, \tau) \rangle^t = 0. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\Phi_{x, \tau \rightarrow \infty}(\tau) = (R_0^2/2) [\langle \cos \varphi \rangle^2 + \langle \sin \varphi \rangle^2] \cos \omega_c \tau. \quad (5)$$

Сравнивая (5) с (1), нетрудно видеть, что если $\langle \cos \varphi \rangle^2 + \langle \sin \varphi \rangle^2 = n > 0$

то в спектре синхронизованного генератора содержится дискретная линия на частоте ω_c . При этом n имеет смысл относительной мощности этой линии.

4. Для отыскания n можно воспользоваться выражением для стационарного распределения фазы $W(\varphi)$, полученным в работе [3]:

$$W(\varphi) = \frac{1}{N} \exp \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{\Delta_c} \varphi + \cos \varphi \right) \right] \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta}{\Delta_c} \psi + \cos \psi \right) \right] d\psi, \quad (6)$$

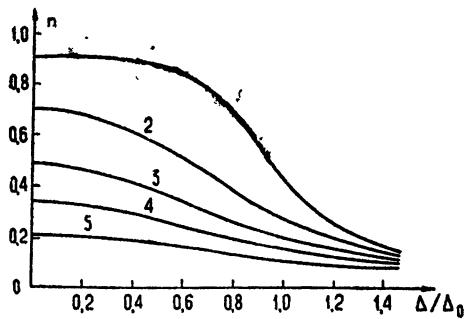
где N — нормировочный множитель, равный

$$N = 2\pi \int_0^{2\pi} \exp \left(-\frac{\Delta}{\Delta_c} \cdot \frac{1}{\alpha} \eta \right) I_0 \left(\frac{2}{\alpha} \sin \eta/2 \right) d\eta,$$

$I_0(y)$ — функция Бесселя, $\alpha = D/2\Delta_c$ — параметр, характеризующий относительную интенсивность шумового воздействия или относительную ширину спектральной линии свободного генератора (абсолютное значение которой равно $\pi D/2$), $W(\varphi)$ есть так называемое свернутое распределение, условие нормировки для которого выполнено на интервале $[-\pi, \pi]$.

На основании (6), согласно выражению (4), для нескольких значений относительной расстройки Δ/Δ_c и относительной интенсивности шумового воздействия α были рассчитаны значения параметра n . Построенные в результате этих расчетов графики зависимости относительной мощности дискретной линии n от расстройки для нескольких значений параметра α представлены на рис. 1. Из этих графиков следу-

Рис. 1. 1.— $D/2\Delta_0 = 0,1$; 2.— $D/2\Delta_0 = 0,3$; 3.— $D/2\Delta_0 = 0,5$; 4.— $D/2\Delta_0 = 0,7$; 5— $D/2\Delta_0 = 1$.



ет, что при достаточно слабом шуме и малой относительной расстройке Δ/Δ_c практически вся мощность синхронизированного генератора сосредоточена в дискретной линии. При увеличении уровня шума и расстройки мощность дискретной линии уменьшается.

Полученные результаты могут быть интерпретированы следующим образом. Вклад в мощность дискретной линии дают только те составляющие спектра свободного генератора, которые попадают в полосу синхронизации. С увеличением интенсивности флуктуаций ширина спектральной линии свободного генератора увеличивается. Поэтому суммарная мощность спектра генератора, попадающего в полосу синхронизации, уменьшается, что, в свою очередь, и приводит к уменьшению мощности дискретной линии. Аналогично объясняется и уменьшение мощности дискретной линии при увеличении относительной расстройки.

Таким образом, при синхронизации генератора монохроматическим сигналом, несмотря на воздействие больших флуктуаций, которые приводят в выбросам частоты генератора за полосу синхронизации, в спектре синхронизированного генератора при любой расстройке всегда содержится дискретная линия*, частота которой равна частоте синхронизующего воздействия, а мощность определяется относительной шириной спектральной линии свободного генератора и относительной расстройкой.

Авторы благодарны Г. Н. Бочкову за обсуждение вопросов, рассмотренных в сообщении.

* Для случая больших медленных флуктуаций $\xi(t)$ параметры дискретной линии рассматривались в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. Радио, М., 1966.
3. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, 3, 4 (1958).
4. Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв. выс. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1372 (1969).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
30 января 1970 г.

УДК 538.56

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ПРАВИЛЬНОГО РАЗЛИЧЕНИЯ
L ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ РАВНОЙ ЭНЕРГИИ**

H. H. Красильников

Как известно, задача о расчете вероятности различия многих сигналов, связана с большими трудностями математического характера и в настоящее время отсутствует ее решение, доведенное до формул, пригодных для расчета. Вместе с тем такая необходимость существует.

Ниже рассматривается частный случай расчета вероятности различия L орто-гональных сигналов равной мощности с полностью известными параметрами на фоне аддитивного гауссова шума с априорной вероятностью передачи каждого из них, равной $1/L$.

Как известно, вероятность правильности различия p_k , т. е. вероятность правильного приема k -го сигнала в этом случае равна

$$p_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\Psi}{\sqrt{2}} + x \right) \right] \right\}^{L-1} \exp(-x^2/2) dx, \quad (1)$$

где $\Phi(z) = 2/\sqrt{2\pi} \int_0^z \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности. Параметр Ψ имеет физический смысл отношения сигнала к шуму.

Для того, чтобы перейти от выражения (1), которое неудобно для практических расчетов, к выражению, более удобному для таких целей, используем следующую аппроксимацию:

$$f_0(x; L) = \left\{ \frac{1}{2} [1 + \Phi(x)] \right\}^L \approx \frac{1}{2} [1 + \Phi(Ax - B)], \quad (2)$$

где A и B являются функциями L . Делая подстановку (2) в (1) и проводя интегрирование, будем иметь

$$p_k = \frac{1}{2} [1 + \Phi(K_1 \Psi - K_0)], \quad (3)$$

где

$$K_1 = \frac{A}{\sqrt{2} \sqrt{1+A^2}}; \quad (4)$$

$$K_0 = \frac{B}{\sqrt{1+A^2}}. \quad (5)$$

Параметры A и B , являющиеся функциями L и определяющие, в свою очередь, K_0 и K_1 , найдем следующим образом. Во-первых, потребуем, чтобы при нулевом отношении сигнала к шуму вероятность правильного различия сигналов, даваемая формулой (16), равнялась бы $1/L$, т. е.

$$p_k = \frac{1}{L} = \frac{1}{2} [1 + \Phi(-K_0)]. \quad (6)$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$K_0 = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2}} = \Phi^{(-1)} \left(1 - \frac{2}{L} \right), \quad (7)$$

где $\Phi^{(-1)}$ — функция, обратная интегралу вероятности.

В качестве второго условия потребуем, чтобы точная и аппроксимирующая функции совпадали при каком-либо заданном промежуточном их значении $f_0(x; L)$, например, $f_0 = 0,5$ или $f_0 = 0,8$. Несмотря на известный произвол, допускаемый в выборе значения f_0 , мы мало теряем в точности аппроксимации, вместе с тем, это позволяет значительно упростить определение интересующих нас параметров.

Итак, полагаем

$$\left\{ \frac{1}{2} [1 + \Phi(x_0)] \right\}^{L-1} = f_0(x_0; L - 1), \quad (8)$$

где x_0 — значение аргумента, при котором функция равна выбранному значению f_0 . Решая (8) относительно x_0 , найдем

$$x_0 = \Phi^{(-1)} \left(2 \sqrt[L-1]{f_0} - 1 \right). \quad (9)$$

С другой стороны,

$$f_0 = \frac{1}{2} [1 + \Phi(Ax_0 - B)]. \quad (10)$$

Разрешая (10) относительно A , будем иметь

$$A = \frac{\Phi^{(-1)}(2f_0 - 1) + B}{x_0}. \quad (11)$$

Из (7) и (11) приходим к квадратному уравнению относительно A ; решением которого будет

$$A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (12)$$

где

$$a = 1 - \left[\frac{\Phi^{(-1)}(1 - 2/L)}{\Phi^{(-1)}(2 \sqrt[L-1]{f_0} - 1)} \right]^2; \quad (13)$$

$$b = -\frac{2 \Phi^{(-1)}(2f_0 - 1)}{\Phi^{(-1)}(2 \sqrt[L-1]{f_0} - 1)}; \quad (14)$$

$$c = \frac{[\Phi^{(-1)}(2f_0 - 1)]^2 - [\Phi^{(-1)}(1 - 2/L)]^2}{[\Phi^{(-1)}(2 \sqrt[L-1]{f_0} - 1)]^2}. \quad (15)$$

Подставляя найденное значение A в (4), найдем K_1 .

На рис. 1 представлено семейство зависимостей $p_k = f(L)$, вычисленных для разных значений Ψ .

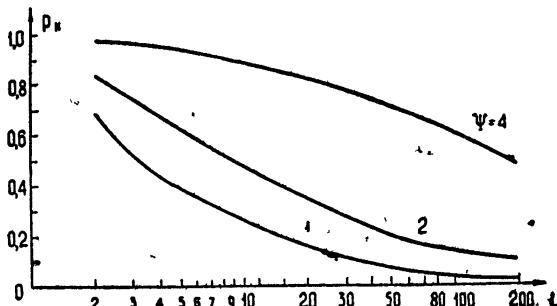


Рис. 1. Зависимость p_k от L .

Найденное решение может быть легко распространено на случай расчета вероятности различия равновероятных коррелированных сигналов S_k равной энергии E , удовлетворяющих следующему условию:

$$\overline{S_k S_r} = \lambda E \quad (16)$$

при $k \neq r$, где $k = 1, \dots, L$; $\lambda < 1$. При этом отношение сигнала к шуму Ψ , входящее в выражение (3), следует заменить величиной $\Psi \sqrt{1 - \lambda}$. Последний случай представляет интерес при решении задачи о различении L изображений, переданных малокадровой телевизионной системой, поскольку, как показывают экспериментальные данные, условие (16) можно считать выполненным для изображений, составляющих алфавит, в первом приближении, не допуская при этом заметных ошибок в вычислении P_k .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, Госэнергоиздат, М., 1956.
2. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1968.

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступила в редакцию
25 сентября 1969 г

УДК 538.574.6

ВЛИЯНИЕ КРАЯ ЭКРАНА НА ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВИБРАТОРА

А. Н. Коваленко

Рассмотрим несимметричный вибратор, расположенный в плоскости, перпендикулярной ребру клина, и отстоящий от оси y на расстоянии (рис. 1). Пусть по оси вибратора течет ток $I_y^3 = I_0^3 f(y)$, где I_0^3 — ток в точках питания, $f(y)$ — функция распределения тока вдоль вибратора. Тогда входное сопротивление вибратора, согласно методу наводимых ЭДС, определяется выражением

$$Z = (-1/I_0^3) \int_{y=0}^h E_y f(y) dy, \quad (1)$$

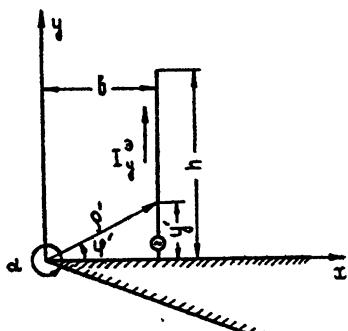


Рис. 1.

где E_y — продольная составляющая электрического поля на поверхности вибратора, которую удобно выразить через векторный A^3 и скалярный φ^3 потенциалы:

$$E_y = -ikWA_y^3 - [\text{grad } \varphi^3]_y, \quad (2)$$

$k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $W = 120\pi$ ом.

Подставляя (2) в (1) и интегрируя второе слагаемое по частям, получаем

$$Z = i \frac{Wk}{I_0^3} \int_{y=0}^h A_y^3 f(y) dy - \frac{W}{k} \int_0^h \int_0^h G^3(y, y') f'(y) f'(y') dy dy'. \quad (3)$$

Здесь $G^3(y, y')$ — функция Грина.

Если интересоваться лишь активной составляющей входного сопротивления $R = ReZ$, то при малых расстояниях вибратора до ребра клина ($kb < 1$) удобнее всего воспользоваться разложениями G^3 и A_y^3 по сферическим функциям Бесселя и Ханкеля, которые можно получить из [1, 2]. При синусоидальном распределении тока в вибраторе ($f(y) = \sin k(h-y)/\sin kh$) выражение для сопротивления излучения приводится к виду

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{W}{2\pi a \sin^2 kh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) \Gamma(n+1/2+\mu)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+1+\mu)} \left\{ 2(\mu+n) \frac{2(\mu-1+2n)+1}{2(\mu-1+n)+1} \times \right. \\
 & \times \left[\int_0^h \cos(\mu-1)\varphi \sin k(h-y) \frac{\psi_{\nu-1}(kp)}{\rho} dy \right]^2 - 2[2(\mu+2n)+1] \times \\
 & \times \left[\int_{y=0}^h \sin \mu \varphi \cos k(h-y) \frac{\psi_{\nu-1}(kp)}{\rho} dy \right]^2 \} + \\
 & + \frac{W}{2\pi a \sin^2 kh} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) \Gamma(n+1/2+\mu)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+1+\mu)} \frac{[2(\mu+n)+1][2(\mu+2n+1)+1]}{2(\mu+n+1)} \times \\
 & \times \left[\int_{y=0}^h \cos(\mu+1)\varphi \sin k(h-y) \frac{\psi_{\nu+1}(kp)}{\rho} dy \right]^2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\rho = \sqrt{y^2+b^2}$, $\varphi = \arctg y/b$, $\mu = \pi m/a$, $\psi_{\nu}(kp) = \sqrt{\pi kp/2} J_{\nu+1/2}(kp)$.

При небольших значениях kp двойные ряды в правой части полученного выражения быстро сходятся, и при расчете достаточно учесть несколько первых членов разложения. Если $kp < 0.5$, то можно ограничиться лишь одним основным членом с номером $m=1$, $n=0$. Кроме того, если $b > h$, то стоящие под интегралом функции $\cos(\pi/a-1)\varphi$, $\sin \mu \varphi/\alpha$, $\psi_{\pi/a}(kp)/\rho$ можно приближенно заменить первыми членами соответствующих разложений по степеням y . В результате получим простую формулу для сопротивления излучения

$$R \approx \frac{W}{2\pi a} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/2+\pi/a)}{\Gamma(1+\pi/a)} \left\{ \frac{2\pi}{a} \left[\frac{\psi_{\pi/a-1}(kb)}{kb} \right]^2 - 2 \left(\frac{2\pi}{a} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[\frac{\psi_{\pi/a}(kb)}{(kb)^2} \right]^2 \right\} \operatorname{tg}^2 \frac{kh}{2},$$

которая после замены функции Бесселя и тангенса первыми членами степенных разложений сводится к следующей:

$$R \approx \frac{W}{2a} \frac{\pi + \alpha}{(2\pi + \alpha) \Gamma(2\pi/a)} \frac{1}{4} \left(\frac{h}{b} \right)^2 (kb)^{2\pi/a}. \tag{5}$$

Как показывают расчеты, формула (5) дает точность до 10% при $kb < 0.5$ и $h < b$.

Полезно сравнить (5) с аналогичной формулой для сопротивления излучения вибратора, расположенного непосредственно на ребре клина, т. е. при $b=0$ [3, 4]:

$$R|_{b=0} \approx W \frac{\alpha(\pi+\alpha)}{4\pi^2(2\pi+\alpha) \Gamma(2\pi/a)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\pi} \right)^2 (kh)^{2\pi/a}. \tag{6}$$

Полагая в (5) и (6) $\alpha = 2\pi$, получим соответственно $R \approx (45/8)(h/b)kh$ ом и $R|_{b=0} \approx 20kh$ ом. Таким образом, при малых значениях kb сопротивление излучения короткого вибратора изменяется обратно пропорционально длине волны, что является следствием кромочного эффекта. Однако степень возбуждения кромочной волны существенно зависит от соотношения между длиной вибратора h и расстоянием вибратора до ребра клина b : при $b > h$ и $kb < 0.5$ сопротивление излучения уменьшается приблизительно в 3,5 h/b раз. Заметим, что резкая зависимость сопротивления излучения от расстояния вибратора до ребра клина имеет место лишь на сравнительно небольшом интервале изменения b ($0 < b < h$).

Чтобы оценить влияние края экрана на входное сопротивление вибратора при больших значениях kb , представим y -составляющую напряженности электрического поля в виде суммы геометрооптического и дифракционного членов [5]. При $\alpha > \pi$ $Z = Z_{\infty} + \Delta Z$, где Z_{∞} — входное сопротивление вибратора, расположенного на плоском бесконечном экране,

$$\Delta Z = i \frac{Wk}{I_0^2} \int_{y=0}^h A_{yu}^0 f(y) dy - i \frac{W}{k} \int_{y=0}^h \int_{y'=0}^h G_u^0 f'(y) f'(y') dy dy', \tag{7}$$

A_{yu}^0 и G_u^0 — дифракционные составляющие векторного потенциала и функции Грина.

При $kb \gg 1$ для определения A_{yu}^0 и G_u^0 можно воспользоваться асимптотическими формулами, приведенными в [5]. В результате получим

$$\Delta Z = \Delta R + i\Delta X \approx \frac{W}{4a\sqrt{\pi}} \operatorname{ctg} \frac{\pi^2}{2a} \operatorname{tg}^2 \frac{kb}{2} \frac{\exp[-i(2kb - \pi/4)]}{kb\sqrt{kb}}. \quad (8)$$

Формула (8) является первым членом асимптотического разложения ΔZ по обратным степеням kb . Стого говоря, она справедлива при $kb \gg 1$ и $b \gg h$. Но для ориентировочных расчетов ею можно пользоваться при $kb > 1$ и $b > h$. Это легко проверить, используя кривые зависимости $\Delta R/R_\infty$ и $\Delta X/R_\infty$ от kb (рис. 2), рассчитанные для угла $a = 2\pi$ по формуле (7) на ЭВМ.

Интересно, что независимо от длины вибратора величина ΔR обращается в нуль примерно при одинаковых значениях kb ($kb \approx 1$) и при дальнейшем увеличении kb колеблется вокруг нуля. При этом период осцилляций близок к π , а амплитуда осцилляций убывает приблизительно по закону $(kb)^{-3/2}$. Следовательно, уже на сравнительно небольших расстояниях от ребра ($kb > 1$, $b > h$) рассеянное от него поле носит характер цилиндрических волн и приближенно описывается асимптотической формулой (8).

Практический интерес представляют случаи, когда вибратор расположен в непосредственной близости от острой кромки. При $kb < 0,5$ и $h < b$ расчет сопротивления излучения можно провести по приближенной формуле (5). В общем случае приходится обращаться к численному интегрированию выражения (4). На рис. 3 приведены частотные характеристики для вибратора, расположенного вблизи кромки полуплоскости ($a = 2\pi$).

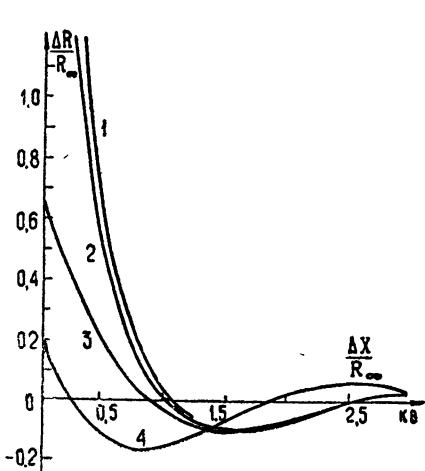


Рис. 2. 1. $-kb \rightarrow 0$; 2. $-kb = 0,5$; 3. $-kb = \pi/2$; 4. $-kb = \pi/2$; $a = 360^\circ$, $R = R_\infty + \Delta R$; $X = X_\infty + \Delta X$.

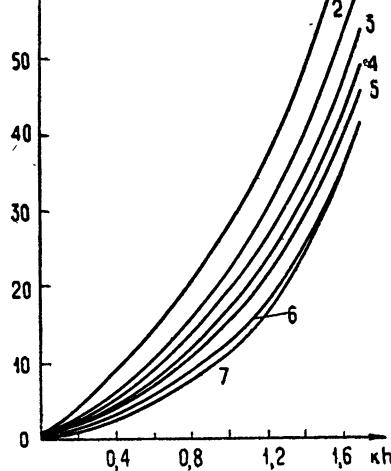


Рис. 3. $a = 360^\circ$; 1. $-b/h = 0$; 2. $-b/h = 0,125$; 3. $-b/h = 0,25$; 4. $-b/h = 0,375$; 5. $-b/h = 0,50$; 6. $-b/h = 0,75$; 7. $-b/h = 1,0$.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Т. Марков, Воздушение бесконечного клина, Тр. МЭИ, вып. 21, Радиотехника, Госэнергоиздат, М., 1956.
- H. M. Macdonald, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 410 (1915).
- А. И. Потехин, Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 3, № 2, 592 (1958).
- А. Н. Коваленко, Радиотехника и электроника, 13, № 6, 1093 (1968).
- F. Oberhettinger, J. Res. NBS, 61, № 5, 343 (1958).

ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДАТЧИКОВ ХОЛЛА В ДИАПАЗОНЕ СВЧ

В. С. Аксенова, Л. Х. Антропова, В. В. Галаванов, Н. В. Котосонов

Одним из основных недостатков измерителей мощности СВЧ диапазона является их узкополосность. Так, известные в литературе ваттметры на эффекте Холла работают в узкой полосе частот, причем измерительная схема громоздка и требует тщательной настройки [1, 2]. Использование двухэлектродного датчика Холла [3, 4], по-видимому, позволит создать широкополосный измеритель мощности в миллиметровом и сантиметровом диапазонах частот, простой по конструкции и методике измерения. Очевидно, это будет возможно только при отсутствии частотной зависимости чувствительности Холла.

Целью настоящей работы является исследование условий, при которых частотная зависимость чувствительности датчиков Холла в диапазоне СВЧ мало существенна и ею можно пренебречь с определенной степенью точности.

При использовании датчиков Холла в качестве индикаторов мощности на СВЧ зависимость чувствительности γ от частоты выражается следующей формулой:

$$\gamma = \frac{U_x}{P_{cp_1}} = \frac{\mu u b}{1 + (\omega t)^2} Z_9, \quad (1)$$

где U_x — ЭДС Холла, $\mu = \mu_0 \mu_r$, u — подвижность носителей тока, b — расстояние между выводами Холла (ширина датчика), $Z_9 = P_{cp_2}/P_{cp_1}$, P_{cp_1} — средняя плотность мощности в объеме, занимаемом датчиком Холла, при отсутствии последнего, P_{cp_2} — средняя плотность мощности в объеме, занимаемом датчиком Холла, при его наличии.

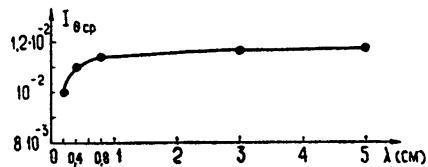
В связи с искажениями электромагнитного поля, вызываемыми наличием датчика Холла, вопрос о частотной зависимости чувствительности его следует рассматривать в двух аспектах:

а) частотная зависимость γ при постоянном отношении средней плотности мощности СВЧ в объеме датчика при отсутствии последнего (P_{cp_1}) к средней плотности мощности СВЧ в том же объеме при наличии датчика Холла (P_{cp_2}), что эквивалентно отсутствию частотной зависимости, обусловленной дифракционными искажениями падающего поля;

б) частотная зависимость γ конкретных датчиков, которые вносят зависящие от частоты дифракционные искажения падающего поля.

Начнем рассмотрение нашей задачи с исследования частотной зависимости $Z_9(\omega)$. Для этого найдем значения H и J на поверхности датчика из n -InSb с размерами $l = 4$ мм, $b = 2$ мм, $d = 0,1$ мм и $\sigma = 185 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Определение токов и полей на поверхности датчика проводилось путем численного интегрирования уравнений Максвелла, решение находилось методом последовательных приближений. Расчеты были выполнены при одном и том же значении мощности падающего поля для следующих длин волн: $\lambda = 5; 3; 0,8; 0,4; 0,2$ см.

Рис. 1. Зависимость среднего значения продольной составляющей тока на поверхности датчика Холла от частоты.



На рис. 1 представлено среднее значение продольной составляющей тока на поверхности датчика Холла. Усреднение проводилось по всей поверхности датчика.

Приведенные результаты показывают, что средний ток на поверхности датчика при $\lambda/l > 2$ практически не зависит от частоты. В интервале изменения частоты $2 \gg \lambda/l \geq 1$ частотная зависимость очень слабая (средний ток изменяется в этом интервале на 16% от его стационарного значения). Следовательно, частотной зависимостью чувствительности датчика, обусловленной дифракционными искажениями поля, можно пренебречь при выполнении условия

$$\lambda/l \geq 2, \quad (2)$$

При выполнении условия (2) коэффициент пропорциональности среднего тока на поверхности датчика с точностью до 5% не зависит от частоты. Поскольку значение произведения (ωt)², по литературным данным для t [5], вплоть до значения $\lambda = 2 \text{ мм}$ много меньше единицы, то, согласно (1) и приведенным результатам расчета, чувствительность γ не должна зависеть от частоты при выполнении условия (2).

Для экспериментальной проверки частотной зависимости чувствительности датчиков Холла требуется весьма точная калибровка мощности в широком диапазоне частот (0,2–5 см). Имеющиеся в нашем распоряжении приборы не позволяли контролировать уровень мощности в этом диапазоне. Поэтому для датчиков Холла был применен следующий метод.

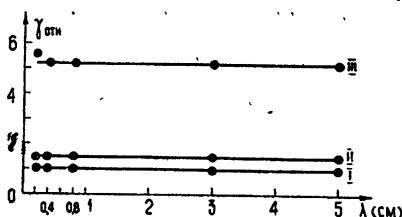


Рис. 2. Зависимость вольтовой чувствительности 3 датчиков Холла от частоты.

Выбиралось три датчика, один из которых служил контрольным, а два других отличались от него либо размерами, либо материалом. Следовательно, если частотная зависимость есть, то она должна быть различной для всех трех датчиков. При калибровке мощности по контрольному датчику отсутствие частотной зависимости отсчетов двух других датчиков должно свидетельствовать об отсутствии частотной зависимости чувствительности датчиков. Результаты усредняются по четырем замерам. На рис. 2 приведены значения γ для трех датчиков в зависимости от частоты. Результаты измерений показывают, что чувствительность датчиков Холла действительно не зависит от частоты по крайней мере до тех пор, пока $\lambda \geq l$.

Таким образом, в настоящей работе

1) теоретически и экспериментально показано отсутствие частотной зависимости чувствительности датчиков Холла, обусловленной дифракционными искажениями падающего поля при соблюдении условия $\lambda/l \geq 2$;

2) экспериментально обнаружена возможность использования одного и того же двухэлектродного датчика Холла для измерения мощности сантиметрового и миллиметрового диапазонов.

ЛИТЕРАТУРА.

1. H. E. M. Barlow, L. M. Stephenson, Proc. IEE, 103 B, № 7, 110 (1956).
2. H. E. M. Barlow, S. Kataoka, Proc. IEE, 105 B, 53 (1958).
3. H. E. M. Barlow, Proc. IEE, 109 B, Suppl. 23, 746 (1962).
4. Н. В. Котосонов, Я. Л. Хлявич, В. П. Дудкин, Л. Х. Антропова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 5, 786 (1968).
5. Proceedings of the IEEE, 52, № 3, 298 (1964).

Научно-исследовательский институт физики
при Воронежском университете

Поступила в редакцию
30 сентября 1968 г.,
после доработки
14 июля 1969 г.

УДК 538.56 : 621.385.6

ПРИНЦИП ПОДОБИЯ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПРИБОРОВ С УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ

М. И. Петедин.

Появившиеся в последнее время экспериментальные методы получения электронных пучков с напряжением 1–10 Мв и импульсной мощностью 10^{10} – 10^{12} вт [1–3] создали предпосылки для разработки новых разновидностей мощных генераторов и усилителей, электромагнитных волн. Такие устройства могут быть основаны на различных типах индуцированного излучения электронов—черенковском (приборы типа ЛБВ и оротрона), переходном (моноotron), а также тормозном (убитрон, синхротронные генераторы) излучений, — однако должны отличаться от своих слаборелятивистских аналогов рядом особенностей, обусловленных спецификой движения электронов с энергиями E , значительно превышающими их энергию покоя E_0 :

$$m = E/E_{\text{пок}} \gg 1. \quad (1)$$

Некоторые из этих особенностей можно пояснить, рассматривая взаимодействие высокочастотного поля с прямолинейным пучком электронов.

1. Одномерное движение электронов в поле $F = \text{Re}[F(z)e^{it}]$ будем описывать уравнением

$$\frac{d}{dt} (mv) = F, \quad (2)$$

где z и t — безразмерные координата и время (соответствующие размерные величины z' и t' связаны с z и t соотношениями $z' = zc/\omega$, $t' = t/\omega$, c — скорость света, ω — частота поля), $m = (1 - v^2)^{-1/2}$ — безразмерная энергия — масса электрона, $v = \frac{dz}{dt}$ — его скорость.

Запишем уравнение (2) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{dm}{dz} = \text{Re}[F(z)e^{it}]; \quad (3)$$

$$\frac{dt}{dz} = (1 - 1/m^2)^{-1/2}, \quad (4)$$

считая m и t функциями их входных значений и координаты z . Предположим, что на входе в рабочее пространство прибора, при $z = 0$, электроны образуют стационарный моноэнергетический поток, т. е. равномерно распределены по времени влета $t = t_0$ и обладают одинаковой энергией $m = m_{\text{вх}}$. Изменение энергии электронов $m(z, t_0)$ в результате их взаимодействия с переменным полем в рабочем пространстве, имеющем длину L , определяет электронный КПД прибора

$$\eta = (m_{\text{вх}} - 1)^{-1} \left[m_{\text{вх}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m(L, t_0) dt_0 \right]. \quad (5)$$

Уравнения движения электронов (3), (4) необходимо решать совместно с уравнениями для комплексной амплитуды высокочастотного электромагнитного поля $F(z)$, дополненными системой граничных условий, конкретный вид которых зависит от типа электронного прибора. С точки зрения последующих рассуждений существенно, однако, лишь то, что в вакуумных приборах уравнения высокочастотного поля обычно являются линейными. (исключение могут составлять, в частности, приборы, основанные на взаимодействии электронных пучков с собственными волнами плазмы) и со храняют свою структуру при линейных преобразованиях координат и времени.

2. В ультрарелятивистском пределе (1) в правой части уравнения (4) можно пренебречь членами высокого порядка малости по параметру $1/m$:

$$\frac{dt}{dz} = 1 + 1/2m^2. \quad (4a)$$

После линейной замены переменных

$$z = 2m_{\text{вх}}^2 \zeta, \quad m = m_{\text{вх}} \mu, \quad t - z = \tau \quad (6)$$

система уравнений (3), (4a), граничные условия для электронов и выражение для электронного КПД приобретают вид

$$\frac{d\mu}{d\zeta} = \text{Re}[\Phi(\zeta)e^{i\tau}], \quad (7)$$

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = \frac{1}{\mu^2};$$

$$\mu(0) = 1, \quad \tau(0) = \tau_0; \quad (8)$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\Lambda, \tau_0) d\tau_0, \quad (9)$$

где

$$\Lambda = L/2m_{\text{вх}}^2.$$

$$\Phi(\zeta) = 2m_{bx} F(2m_{bx}^2 \zeta) \exp(i 2m_{bx}^2 \zeta). \quad (10)$$

3. Отыскание функций $\Phi(\zeta)$, обеспечивающих максимальный КПД для приборов данного типа, в общем случае должно производиться на основании системы уравнений (7), дополненной уравнениями высокочастотного поля, путем подбора параметров, пропорциональных электронному току, а также величинам, характеризующим электродинамическую систему (диаметру и поверхностному импедансу волновода и т. п.).

Для ряда приборов — генераторов с высокодобротными резонаторами, где про странственную структуру высокочастотного поля можно считать фиксированной — подбор оптимальных функций $\Phi(\zeta)$ может быть осуществлен и непосредственно на основании соотношений (7) — (9). Так, например, в резонансной ЛБВ и оротроне электронный КПД может достигать — в зависимости от выбора конкретного класса функций $\Phi(\zeta)$ — 23—48%, а в релятивистском монотроне [4] — 22%.

4. Существенно, что соотношения (7) — (9) не содержат релятивистского параметра m_{bx} в явном виде. Поэтому, если оптимальная функция $\Phi(\zeta)$ для приборов данного типа найдена, то тем самым согласно (10) определена оптимальная структура электромагнитного поля при любой энергии электронов, удовлетворяющей условию (1). В ультрарелятивистском пределе ($m_{bx} \rightarrow \infty$) оптимальная величина переменного поля падает обратно пропорционально m_{bx} , оптимальная длина приборов растет пропорционально m_{bx}^2 , а максимальный электронный КПД, определяемый из (7) — (9), остается постоянной величиной.

Уменьшение оптимальной величины напряженности высокочастотного поля с ростом энергии электронов обеспечивает ограничиваемую возможновением высокочастотного пробоя возможность продвижения приборов, основанных на индуцированном излучении ультрарелятивистских электронных пучков, в диапазон все более коротких волн — тенденция, противоположная соответствующей тенденции генераторов и усилителей со слаборелятивистскими электронными пучками.

Увеличение оптимальной длины приборов при $m_{bx} \rightarrow \infty$ приводит, как это ясно из кинематических соображений, к необходимости обеспечивать все более высокую точность изготовления электродинамических систем, а также к все более жестким ограничениям на разброс Δv_{bx} начальных скоростей электронов: $\Delta v_{bx}/v_{bx} \lesssim 1/(m_{bx})^2$ (v_{bx} и m_{bx} — средние значения начальных скоростей и энергий). При этом, однако, допустимая величина относительного разброса энергий $\Delta m_{bx}/m_{bx}$ в силу соотношения $\Delta m_{bx}/m_{bx} = (m_{bx})^2 (\Delta v_{bx}/v_{bx})$ сохраняется постоянной.

5. Найденный здесь принцип подобия применим непосредственно лишь к приборам, основанным на индуцированном черенковском и переходном излучении электронов. Однако использованный метод может быть применен при получении аналогичных соотношений и для высокочастотных генераторов и усилителей, основанных на индуцированном тормозном излучении электронов, движущихся по криволинейным траекториям. Законы подобия приборов с криволинейными электронными пучками оказываются, вообще говоря, отличными от приведенных выше (такие же различия имеют место и для приборов со слаборелятивистскими электронными пучками, как это видно, например, из сравнения МЦР [5] и обычных приборов типа «О»). В частности, в убитроне при $m_{bx} \rightarrow \infty$ оптимальная длина растет пропорционально m_{bx}^2 , а произведение амплитуды высокочастотного поля на амплитуду фокусирующего периодического магнитостатического поля остается постоянной величиной; электронный КПД убитрона в ультрарелятивистском пределе составляет (при некоторых частных видах функций, описывающих структуру высокочастотного поля) 20—45%.

Приношу благодарность А. В. Гапонову, В. К. Юлпатову, Л. В. Родыгину и А. В. Сморгонскому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. T. Link, IEEE Trans. Nucl. Sci., 14, № 3, 777 (1967).
2. S. E. Graybill, S. V. Nablo, IEEE Trans. Nucl. Sci., 14, № 3, 782 (1967).
3. F. C. Ford, D. Martin, D. Sloan, W. Link, Bull. Am. Phys. Soc., 12, 961 (1967).
4. В. К. Юлпаторов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
5. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпаторов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).

УДК 533.9.1

О ВЛИЯНИИ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА НА ДЕТЕКТИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

Г. А. Соболь, А. Г. Соболь

В настоящей работе приведены результаты исследования зависимости величины продетектированного тока от давления газа в разрядной трубке методом детекторных характеристик двойного зонда [4], который до сих пор, насколько нам известно не использовался при анализе детектирующих свойств плазмы [1-3].

В области квадратичного детектирования (слабые высокочастотные сигналы), выражение детекторной характеристики — кривой $I_d = f(\Delta V)$ двойного зонда записывается в виде

$$I_d = \frac{1}{2} I_0 \alpha^2 V_d^2 e^{-\alpha \Delta V} (e^{-\alpha \Delta V} - 1) (e^{-\alpha \Delta V} + 1)^{-3}, \quad (1)$$

$\alpha = e/kT_e$, ΔV — разность потенциалов между зондами в плазме, V_d — амплитуда детектируемых сигналов, $I_0 = (1/4) e n_e s \sqrt{8 k T_e / \pi m}$. Исходя из соотношения $k T_e = 0,63 e \lambda_0 E / P \sqrt{\chi}$, применимого к плазме, и подставляя значение α и I_0 , получим выражение детекторной кривой $I_d = f(P)$ при $\Delta V = \text{const}$:

$$I_d = AP^{3/2} e^{-\beta P} (e^{-\beta P} - 1) (e^{-\beta P} + 1)^{-3}, \quad (2)$$

A — постоянная опыта, P — давление газа в трубке, а

$$\beta = 1,59 \Delta V \sqrt{\chi} \lambda_0 E. \quad (3)$$

Здесь χ — доля энергии, теряемая электроном при одном столкновении, λ_0 — длина свободного пробега электрона в плазме, отнесенная к давлению газа 1 мм рт. ст. E — градиент поля в плазме в области зонда

Из формулы (2) следует, что величина продетектированного тока находится в сложной зависимости от давления газа: с увеличением давления газа P детекторный ток сначала возрастает, затем, достигнув своего максимального значения, начинает постепенно падать. В максимуме имеет место соотношение $\beta P_{\max} = 2,358$. Следовательно, поддерживая постоянными E и ΔV в процессе измерений, можно легко определить по формуле (3) β , а затем и P_{\max} .

Величины E и ΔV_m измерялись методом детекторных характеристик двойного зонда [4]. Постоянная опыта A определялась из соотношения

$$A = 15,385 I_d P^{-3/2}, \quad (4)$$

имеющего место в максимуме кривой (2).

Измерения производились по электрической схеме, где кроме источника постоянного напряжения в зондовую цепь индуктивно подавалось переменное напряжение высокочастотных сигналов $V_{\sim} = V_d \cos \omega t$. Давление газа в разрядной трубке изменилось простым добавлением соответствующих порций газа или же изменением температуры жидкой капли ртути в отростке, а измерение давления P осуществлялось с помощью специального манометра. Амплитуда детектируемых сигналов измерялась ламповым вольтметром ВЛУ-2 и равнялась $V_d = 0,3$ в, частота сигналов $\nu = 100$ Мгц. Эти величины в процессе измерений не менялись. Температура и плотность электронов плазмы дугового разряда в неоне, аргоне и парах ртути определялись известным методом [4] детекторных характеристик двойного зонда соответственно по формулам

$$T_e = 8,8 \cdot 10^3 \Delta V_m (\text{°K}), \quad n_e = 84 \cdot 6 \cdot 10^7 \frac{l_{\text{д}}}{s V_d^2 \alpha^2 \sqrt{T_e}} (\text{см}^{-3}). \quad (5)$$

Градиент поля E также определялся по способу, предложенному в [4], а λ_0 и $\sqrt{\chi}$ были взяты из таблицы для соответствующих режимов разряда

Все величины, измеренные нами или же взятые из соответствующих источников, которые необходимы для построений графиков зависимости $I_d = f(P)$ по формуле (2), представлены в табл. 1.

Таблица 1

	β (мм Hg)	A (мкA)	P_{\max} (мм Hg)	E (в · см ⁻¹)	λ_0 (см · мк Hg ⁻¹)	$V \bar{\chi}$	ΔV_m (в)	I_{dm} (мкA)	T_e (°K)	n_e (см ⁻³)
Ne	0,46	245	5,12	2,0	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	5,0	225	$44 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{10}$
Ar	0,72	619	3,27	0,8	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	3,0	242	$26 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^{10}$
Hg	0,50	357	4,68	0,7	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	1,5	235	$22 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^{10}$

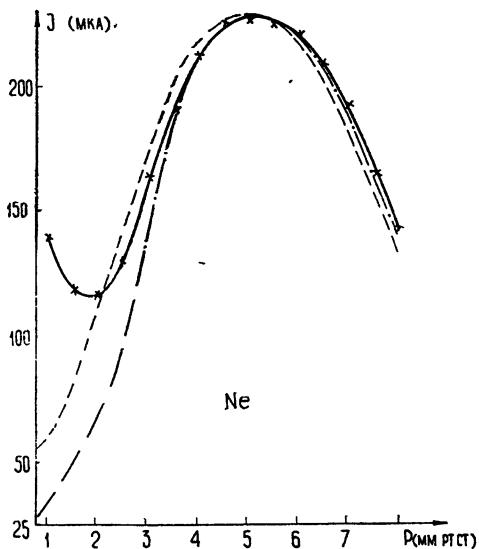


Рис. 1.

Следовательно, определив для данного по формуле (2) найти оптимальные условия процесса детектирования в плазме методом двойного зонда — найти P_{\max} .

На рис. 1 представлены графики кривых $I_d = f(P)$ для плазмы дугового разряда в неоне. Сплошная линия с крестиками соответствует экспериментальным данным; штрихами отмечена кривая, рассчитанная методом детекторных характеристик одного зонда [3] по формуле

$$I_d = BP^2 e^{-\alpha P}, \quad (6)$$

штрихпунктиром — кривая, полученная предлагаемым методом по формуле (2) с использованием данных таблицы Из рис. 1 видим, что кривые, рассчитанные по формулам (2) (двойной зонд) и (6) (одиночный зонд) с достаточной степенью точности совпадают с опытной кривой, за исключением области давлений $P < 2$ мм Hg. При давлениях, меньших 2 мм рт. ст. (для неона), очевидно, имеет место косвенное влияние эффекта Рамзауера на детектирующие свойства плазмы, когда длина свободного пробега электрона зависит от его скорости. Для аргоновой и ртутной плазмы имеют место аналогичные зависимости $I_d = f(P)$.

режима плазмы величины A и β , можно

получить оптимальные условия

детектирования в плазме методом

двойного зонда — найти P_{\max} .

ЛИТЕРАТУРА

- П. О Яковлев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 285 (1960).
- Г. Д. Лобов, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 56 (1961).
- Г. А. Соболь, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 5, 963 (1962).
- Г. А. Соболь, А Г Соболь, Р. С. Коземчук, Н Ф Мережко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 419 (1966).

Тернопольский филиал
Львовского политехнического института

Поступила в редакцию
22 декабря 1969 г.