

## С О Д Е Р Ж А И Е

Грингауз К. И. Малоэнергичная плазма в магнитосфере Земли (обзор) . . . . .	1275
Лизогуб П. П. К излучению заряда, равномерно движущегося в неоднородной магнитоактивной среде . . . . .	1311
Демченко В. В., Долгополов В. В., Степанов К. Н. Поглощение поверхностных волн в плазменном волноводе вследствие плазменного резонанса в переходном слое . . . . .	1317
Гарibян Г. М., Мурадян М. М. Потери энергии релятивистской частицы при пролете через пластины произвольной толщины . . . . .	1326
Островский Л. А. Дисперсионное сжатие частотно-модулированных волн в неоднородной плазме . . . . .	1333
Бродский Ю. Я., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Электромагнитные пучки в анизотропных средах. I . . . . .	1339
Орлов Р. Ю. Генерация гармоник оптического излучения в двухосных кристаллах . . . . .	1351
Бурштейн А. И., Бобровский А. С. Неадиабатическая теория усреднения тонкой структуры при спектральном обмене . . . . .	1355
Малахов А. Н., Мальцев А. А. Естественные фазовые флуктуации в трехчастотном генераторе. Синхронный режим . . . . .	1363
Зачепицкая Л. П., Клибанова И. М., Малахов А. Н. Структура спектра синхронизованного генератора при наличии больших флуктуаций . . . . .	1372
Бочков Г. Н. Флуктуации параметров резонансных систем . . . . .	1376
Андреев Г. А. Выбросы сигнала с нормальным распределением фазы . . . . .	1384
Шевченко В. В. Квазиволноводные (вытекающие) волны в слоисто-неоднородных волноводах . . . . .	1389
Солин Н. Н. Естественные флуктуации в автогенераторе с нелинейным квадратичным резонатором . . . . .	1393
Куликов Э. Л., Сошественская Л. А. К расчету волноводных трансформаторов . . . . .	1398
Герценштейн М. Е., Малахов А. Н., Бокун Р. Ч. О тонкой структуре спектра при синхротронном излучении . . . . .	1401
Вербицкий И. Л. О взаимодействии потока электронов с полем замедляющей системы типа «гребенка» . . . . .	1411
Гурзо В. В., Куликов М. Н., Стальмахов В. С. Электронная линия передачи типа М на быстрых циклотронных волнах пучка как элемент управления СВЧ сигналом . . . . .	1422
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Гречишkin B. C., Shishkin E. M. Квадрупольное спиновое эхо в случае широких линий поглощения . . . . .	1429
Алексеев Б. Ф. Об эффекте Блоха—Зигерта при динамической поляризации ядер	1430

533.9 : 550.3

**МАЛОЭНЕРГИЧНАЯ ПЛАЗМА В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ***К. И. Грингауз*

(Обзор)

**ВВЕДЕНИЕ**

Околоземное пространство заполнено заряженными частицами, распределение которых существенным образом влияет на распространение низкочастотных радиоволн вблизи Земли.

Подавляющее большинство этих частиц составляют электроны и ионы сравнительно малых энергий ( $\leq 50$  кэв); концентрации частиц с субрелятивистскими и релятивистскими скоростями, образующих радиационные пояса Земли, и их потоки энергий значительно меньше, чем у малоэнергичной плазмы; практически эти частицы несущественны как с точки зрения распространения радиоволн, так и в смысле их влияния на такие геофизические явления как полярные сияния, магнитные и ионосферные бури.

«Картографирование» распределения малоэнергичной плазмы в магнитосфере, весьма важное для понимания взаимодействия электромагнитных волн и частиц в ней, как видно из дальнейшего, еще далеко не закончено.

Эксперименты, проведенные при помощи спутников Земли и других космических аппаратов, в течение последнего десятилетия привели к существеннейшим изменениям представлений о физических свойствах околоземного пространства, созданных ранее на основе многолетних наземных наблюдений. В частности, размеры плазменной оболочки Земли — ионосферы, состоящей из заряженных частиц весьма низких (тепловых) энергий, оказались гораздо большими, чем это предполагалось. Были открыты радиационные пояса Земли. Было также найдено, что конфигурация геомагнитного поля на значительных расстояниях от Земли в направлении к Солнцу заметно отличается от поля диполя, а в антисолнечном направлении оно теряет всякое сходство с ним, образуя магнитный хвост протяженностью много сотен земных радиусов, и т. д.

Все эти вновь открытые явления весьма тесным образом связаны с геомагнитными возмущениями, вызываемыми взаимодействием геомагнитного поля с солнечным ветром, в результате которого вблизи Земли возникают сложным образом распределенные потоки заряженных частиц с различными скоростями — от тепловых до релятивистских. Пространственное распределение этих потоков в большой степени определяется структурой магнитного поля вблизи Земли и, в свою очередь, сильно влияет на структуру этого поля (особенно на геоцентрических расстояниях  $\sim (7-10) R_z$ , где  $R_z$  — радиус Земли).

Высота обнаруженной в 1959 году на расстояниях  $\sim 4R_z$  области резкого спада концентрации заряженных частиц в холодной плазменной оболочке Земли (Грингауз и др., 1960 а; Грингауз, 1961 а) оказа-

лась сильно зависящей от геомагнитной активности (Карпентер, 1963, 1966 а).

После открытия в 1958 г. четко очерченных радиационных поясов во время проведения опытов, целью которых являлось изучение космических лучей (Ван Аллен, 1958; Вернов и др., 1958),казалось, что внешняя граница радиационных поясов, соответствующая  $\sim(7 \div 8)R_{\oplus}$  в экваториальной плоскости, и является внешней границей околосеменного пространства. Зона захваченной радиации представлялась в то время симметричной относительно геомагнитного диполя (зависимость ее характеристик от местного времени была обнаружена лишь в конце 1961 г. (О'Брайен, 1963)).

Поэтому, когда в 1959 г. при полетах советских лунных космических аппаратов во время проведения экспериментов, поставленных с целью изучения межпланетной плазмы, было обнаружено, что за границей внешнего радиационного пояса существуют зоны, в которых имеются значительные потоки малоэнергичных электронов ( $E > 200$  эв), не регистрируемые счетчиками космических лучей, то естественно было предположено, что за границей внешнего радиационного пояса существует третий радиационный пояс, состоящий из весьма мягких электронов, по форме напоминающий внешний пояс, но отличающийся меньшими энергиями электронов и большими величинами их потоков (Грингауз и др., 1960 а; Грингауз и др., 1960 б). В 1961 г. зона существования этих потоков была названа самым внешним поясом заряженных частиц (Грингауз, 1961); о зависимости характеристик потоков в этой зоне от местного времени тогда еще известно не было.

Сейчас известно, что потоки малоэнергичных электронов за границей внешнего радиационного пояса в полуденном направлении принадлежат к нестабильной зоне радиации, доходящей до границы магнитосферы, и к частично термализованной солнечной плазме, образующейся за фронтом ударной волны, которая возникает при взаимодействии сверхзвукового потока солнечной плазмы (солнечного ветра) и геомагнитного поля. Потоки малоэнергичных электронов за границей радиационного пояса с полуночной стороны наблюдаются в нестабильной зоне радиации и в плазменном слое в хвосте магнитосферы, внутри которого находится магнитно нейтральный слой. Однако, когда эти потоки электронов были впервые обнаружены, о степени различия структуры геомагнитного поля за пределами радиационных поясов (т. е. при геоцентрических расстояниях  $\sim(7 \div 10)R_{\oplus}$ ) над дневной иочной сторонами Земли еще не было известно.

Современные представления о строении магнитосферы Земли отображены на рис. 1 — одном из последних изображений магнитосферы (Несс, 1967).

В настоящем обзоре в дальнейшем будут ссылки на этот рисунок: следует, однако, заметить, что, хотя на нем показаны некоторые зоны существования потоков заряженных частиц, он не дает полного представления о распределении заряженных частиц в магнитосфере (автор рисунка, по-видимому, и неставил это своей задачей). Так, на рисунке не изображена плазменная оболочка Земли (ионосфера), состоящая из частиц с very малой (тепловой) энергией, граница которой проходит внутри зоны энергичной захваченной радиации (точнее внутри внешнего радиационного пояса). В то время как на рисунке на южной стороне магнитосферы радиационный пояс окружен потоками плазмы, на дневной стороне за границей радиационного пояса плазма не показана (в действительности там существуют потоки плазмы в нестабильной зоне радиации и далее в переходном слое за границей магнитосферы).

Совершенно очевидно, что показанная на рис. 1 и столь неожидан-

ная с точки зрения представлений 50-х годов стабильная структура магнитного поля в околоземном пространстве с огромной протяженностью в антисолнечном направлении является результатом наложения на магнитное поле земного диполя магнитных полей некоторой достаточно стабильной системы электрических токов. Совершенно очевидно также, что эти токи не могут быть созданы потоками заряженных частиц с энергиями  $E < 50$  кэв в радиационных поясах, расположенных на сравнительно малых расстояниях от Земли, на которых магнитное поле еще сравнительно мало отличается от дипольного, причем кинетическая энергия частиц в единице объема ( $\Sigma mv^2/2$ ) составляет лишь малую часть от величины энергии магнитного поля  $B^2/8\pi$ .

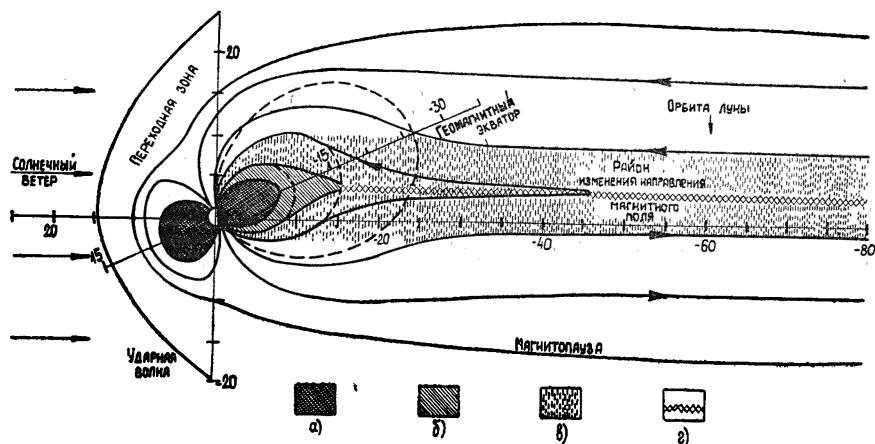


Рис. 1. Структура геомагнитного поля, возмущенного солнечным ветром (магнитосфера Земли в плоскости магнитного меридиана; Несс, 1967):  
а) радиационные пояса; б) мысообразная область; в) плазменный слой, г) нейтральный слой.

Такие электрические токи могут, однако, создаваться всегда существующими за пределами радиационных поясов потоками заряженных частиц со сравнительно малыми энергиями ( $E < 30-50$  кэв).

Именно потоки заряженных частиц малых энергий, по-видимому, пополняют частицами радиационные пояса и имеют решающее значение для образования полярных сияний и связанных с ними явлений, вот почему некоторые авторы называют их «авороральным излучением». Десслер и Джадей (1965) назвали так потоки малоэнергетичной плазмы, поступающие в полярные области из хвоста магнитосферы и связанные с магнитно нейтральным слоем. О'Брайен (1966, 1967) дополнили это понятие, включив в него потоки заряженных частиц в дневной и ночной частях нестабильной зоны радиации, т. е. в области  $8 < L < 10^*$ .

Потоки малоэнергичных заряженных частиц существуют и внутри радиационных поясов, хотя они весьма изменчивы во времени, иногда величина их существенно превышает гораздо более стабильные потоки высокозэнергичных частиц (Грингауз и др., 1965, 1966 а; Пизелла и др., 1966), и могут создавать магнитные бури (Франк, 1967).

Из сказанного следует, что изучение малоэнергичной плазмы является одной из основных проблем магнитосферной физики; основные особенности магнитосферы и главные события в ней определяются распределением в магнитосфере малоэнергичной плазмы, ее характеристиками и поведением (которые, в свою очередь, зависят от солнечного ветра).

\* Об использовании в этом обзоре координаты  $L$  см. ниже.

В настоящем обзоре рассматривается малоэнергичная плазма (состоящая из частиц с энергиями от тепловых до  $\sim 45$  кэв) в различных областях магнитосферы, в порядке их удаления от Земли. При этом главное внимание уделено описанию результатов экспериментальных исследований.

Несмотря на отмеченную выше большую важность изучения малоэнергичной плазмы в магнитосфере, ее исследования развивались значительно медленнее, чем изучение высокоенергичной захваченной радиации. Частично это объясняется трудностями создания приборов для регистрации заряженных частиц с малыми энергиями, связанными с необходимостью исключения влияния на показания прибора ультрафиолетового излучения Солнца, вторичных эффектов, создаваемых жесткой радиацией, и т. д.

Если в первые годы после обнаружения существования потоков малоэнергичной плазмы в магнитосфере изучение их велось при помощи «интегральных» приборов, которые позволяли лишь утверждать, что энергии частиц лежат в пределах от сотен электронвольт до минимальных энергий, регистрируемых счетчиками высокоенергичных частиц (Грингауз и др., 1960; Грингауз и др., 1964; Фримен, 1964), то в последние годы проведены измерения, позволяющие определять энергию частиц со значительно большей точностью (Вернов и др., 1965, 1966; Вульф и др., 1966 а, 1966 б, 1967; Бейм и др., 1967; Франк, 1967 а, 1967 б; Василюнас, 1968 б).

Результаты экспериментальных исследований малоэнергичных частиц в магнитосфере и понимание отдельных вопросов в последние годы (1965—68) излагались в ряде обзоров и во введениях к некоторым оригинальным статьям (Безруких, Грингауз, 1965; Тейлор и др., 1965; Грингауз, Хохлов, 1965; Карпентер, 1966; О'Брайен, 1967; Данжи, 1967; Несс, 1967; Бинзак, 1967; Франк, 1967 а; Василюнас, 1968 б и др.).

В этом обзоре делается попытка кратко просуммировать сведения, опубликованные до начала Вашингтонского симпозиума\*. Допустимые размеры обзора не позволяют уделить внимание вопросам методики измерений заряженных частиц малых энергий в космическом пространстве, хотя они, бесспорно, представляют весьма значительный интерес.

В обзоре будет использоваться введенный Мак Иллуэйном (1961) параметр магнитной оболочки  $L$ , для дипольного поля равный расстоянию от центра диполя (центра Земли) до геомагнитной оболочки, выраженному в  $R_{\oplus}$ . Этот параметр для высоких широт (при  $L > 8-10$ ) лишен физического смысла, так как геометрия реального геомагнитного поля соответствует рис. 1. Однако многие авторы, представляя экспериментальные результаты, условно пользуются этим параметром и при  $L > 10$ ; также поступим и мы.

Некоторые характеристики упоминаемых в дальнейшем пролетавших через магнитосферу космических аппаратов и спутников, на которых были установлены приборы для изучения плазмы, приведены в табл. 1.

### 1. ПЛАЗМЕННАЯ ОБОЛОЧКА ЗЕМЛИ (ПЕРИФЕРИЙНАЯ ОБЛАСТЬ ИОНОСФЕРЫ)

Целесообразно начать с терминологии. В этой части обзора будут приведены данные, относящиеся к области на высотах до 20 000—30 000 км, заполненной электронами и протонами с тепловыми энергиями (не превышающими единиц электронвольт).

В литературе (как уже отмечалось ранее, Грингауз, 1967) для этой

\* Международный симпозиум по физике магнитосферы в Вашингтоне, 3—13 сентября 1969 г.

области использовалось много различных наименований: «ионизированная компонента геокороны» (Грингауз и др., 1960), «протононосфера» (например, Гейслер и Боухилл, 1965), «магнитоионосфера» (Тейлор и др., 1965), «плазмосфера» (Карпентер, 1966), «периферийная часть ионосферы» (Грингауз, 1966).

Таблица 1

Космический аппарат	Дата запуска	Апогей (км)	Перигей (км)	Наклонение к экватору	Приборы для изучения малоэнергичной плазмы
1. Луна-1	2.I.1959				Ловушки заряженных частиц
2. Луна-2	12.IX.1959				Ловушки заряженных частиц
3. Эксплорер-12	16.VIII.1961	83600	6700	33°	Детектор CdS; сферический электростатический анализатор
4. Алуэтт-1	29.IX.1962	1000 (круговая орбита)		80°	Станция для радиоизондирования ионосферы; приемник УНЧ излучения
5. Эксплорер-14	2.X.1962	85300	300	33°	Сферический электростатический анализатор
6. Марс-1	1.XI.1962	Межпланетная станция			Ловушки заряженных частиц
7. Инджун-3	13.XII.1962	2785	237	70,4°	Электронный умножитель
8. ИМП-1	27.XI.1963	191230	197	33°	Ловушки заряженных частиц (анализатор с тормозящим потенциалом и фарадеева чаша модуляционного типа). Сферический электростатический анализатор
9. Электрон-2	30.I.1964	68200	460	61°	Ловушка заряженных частиц. Электростатический анализатор
10. Электрон-4	11.VII.1964	66235	460	61°	Ловушка заряженных частиц; сферический электростатический анализатор
11. Вела-2 В	17.VII.1964	115140	90920	40°	Сферический электростатический анализатор
12. Ого-1	5.XI.1964	150000	280	31°	Фарадеева чаша (ловушка заряженных частиц модуляционного типа); сферический электростатический анализатор
13. ИМП-2	4.X.1964	93910	197	33°	Ловушка заряженных частиц; анализатор с тормозящим потенциалом и фарадеева чаша модуляционного типа; сферический электростатический анализатор
14. Эксплорер-22	19.X.1964				Цилиндрический зонд Лэнгмиора, станция для радиоизондирования ионосферы

Космический аппарат	Дата запуска	Апогей (км)	Перигей (км)	Наклонение к экватору	Приборы для изучения малоэнергетической плазмы
15. Инджун-4	21.XI.1964	2495	530	81°	Сцинтилляционный счетчик для измерения энергий потоков
16. Зонд-2	30 XI.1964	Межпланетная станция		--	Ловушки заряженных частиц интегрального и модуляционного типа
17. Вела-3А	20.VII.1965	115840	106370	35°	Сферический электростатический анализатор
18. Вела-3В	20.VII.1965	122080	100570	34°	Сферический электростатический анализатор
19. Алуэтт-2	29.XI.1965	2980	500	80°	Станция для радиозондирования ионосферы
20. Луна-10	31.III.1966	Спутник Луны			Ионная ловушка; электронная ловушка; ловушка для регистрации ионов тепловых энергий модуляционного типа—фарадеева чаша
21. Ого-3	7.VI.1966	122300	295	31°	Ловушка заряженных частиц модуляционного типа; 4 цилиндрических электростатических анализатора
22. Эксплорер-33	1.VII.1967	440000	50000	7°	Ловушка заряженных частиц модуляционного типа
23. Пионер-7	17.VIII.1966	Межпланетная станция			Ловушка заряженных частиц модуляционного типа; четвертьсферический анализатор
24. АТС-1	7.XII.1966	Синхронная орбита 35800			Ловушка для регистрации ионов тепловых энергий
25. Эксплорер-35	19.VII.1967	Спутник Луны			Ловушки заряженных частиц модуляционного типа

Если, начиная с высот 1500—2000 км (которые всегда относятся к ионосфере), измерять электронную или ионную концентрацию при помощи вертикально поднимающейся ракеты, то приборы не обнаружат никаких особенностей в ходе концентрации, вплоть до области ускоренного уменьшения концентрации заряженных частиц («колена»). Иначе говоря, между обычной ионосферой и рассматриваемой областью не имеется границы. Не было даже сделано попыток хотя бы условно определить такую границу. Поэтому, хотя термин «плазмосфера» приобретает все большую популярность, «периферийная часть ионосферы» представляется мне более подходящим названием для этой области.

В настоящее время имеется ряд наблюдений как ионосфера, так и электронного компонентов периферийной части ионосферы, позволяющих с достаточной уверенностью говорить о ее некоторых физических особенностях и, в частности, о существовании (во всяком случае на умеренных геомагнитных широтах, на геоцентрических расстояниях от  $\sim 3R_{\oplus}$  до  $\sim 6R_{\oplus}$ ) области резкого излома (спада) в высотном распределении концентрации заряженных частиц (так называемого

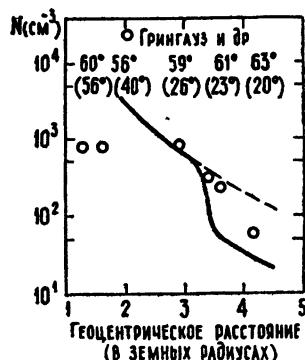
«колена»). Границей периферийной области ионосферы будем считать границу области, лежащей ниже «колена», и называть ее «плазмопаузой» (вслед за Карпентером, 1966).

Первые прямые изменения концентрации положительных ионов в положительной области ионосферы были выполнены в 1959 г. при помощи ловушек заряженных частиц на советских лунных космических аппаратах Луна-1 и Луна-2 (Грингауз и др., 1960; Грингауз, 1961). Эти измерения обнаружили существование на высотах  $\sim 20\,000$  км ( $R \sim 4R_3$ ) области ускоренного спада концентрации заряженных частиц, своеобразного «плато» в их высотном распределении, и впервые позволили дать грубую оценку ионной температуры  $T_i$  при  $4R_3$  (а именно—утверждать, что  $T_i$  не превышает десятков тысяч градусов).

Весьма важным этапом в изучении этой области явилось обнаружение области «колена» в экваториальном высотном распределении электронной концентрации  $n_e$  при анализе результатов наземных наблюдений распространения вистлеров (Карпентер, 1963). Эта работа явилась началом серии исследований, выполненных лично Карпентером и при его участии, в результате которых получены богатые в статистическом отношении данные, характеризующие изменения высоты области «колена» в экваториальной зоне периферийной части ионосферы в зависимости от местного времени и геомагнитной активности.

Рис. 2, взятый из первого сообщения Карпентера (1963), показывает профиль  $n_e$  по данным вистлеров; белыми кружками показаны значения ионной концентрации  $n_i$  на соответствующих геоцентрических расстояниях, определенных в 1959 г. по данным ловушек заряженных частиц на Луне-2. При этом автор работы считал согласие между этими данными удовлетворительным.

Рис. 2 Электронная плотность  $n_e$  (по данным свистящих атмосфериков) и ионная плотность  $n_i$  (по данным космического аппарата Луна-2) в функции геоцентрического расстояния. В верхней части графика приведены инвариантные (без скобок) и геомагнитные (в скобках) широты, пересекаемые Луной-2 (Карпентер, 1963)



Обсуждая различие между данными, полученными на Луне-2, и результатами Карпентера, Обаяши (1964) указал, что возможной причиной различия высотных зависимостей концентраций заряженных частиц может быть то, что измерения относятся к районам с различными геомагнитными широтами. Высотное распределение температуры ионосферной плазмы может сильно зависеть от геомагнитной широты—на высоких широтах температура может быть выше из-за того, что теплопроводность ионосферы имеет существенно анизотропный характер; это может отразиться на высотном распределении концентрации заряженных частиц. Карпентер и Смит (1964) отметили, что расхождение между относящимся к экваториальной плоскости  $n_e$  профилем на рис. 2, построенным по данным Луны-2, может быть связано с уменьшением концентрации на сравнительно малых высотах при росте геомагнитной широты, так как измерения  $n_i$  на Луне-2 начались на высоте  $\sim 2000$  км при геомагнитной широте  $60^\circ$ .

В дальнейшем Карпентер (1966) обработал весьма обширный экспериментальный материал по вистлерам, зарегистрированным на высокочиротных станциях в Антарктике, измеряемый сотнями тысяч сонограмм. На рис. 3 приведены усредненные данные о положении «колена» в плоскости геомагнитного экватора, относящиеся к дням с умеренной геомагнитной активностью ( $K_p=2-4$ ).

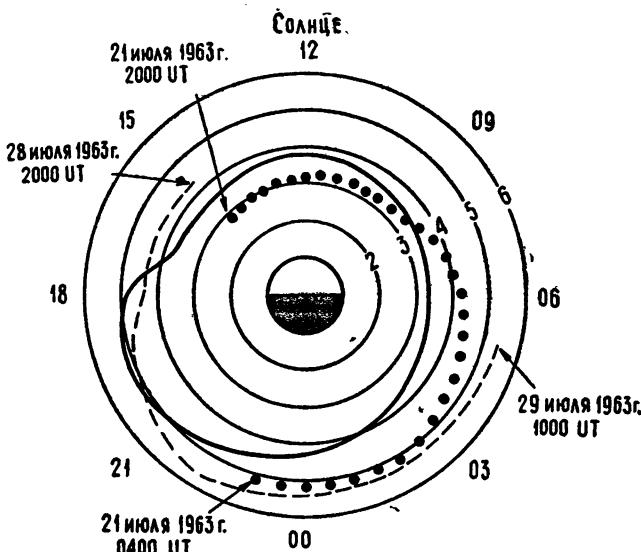


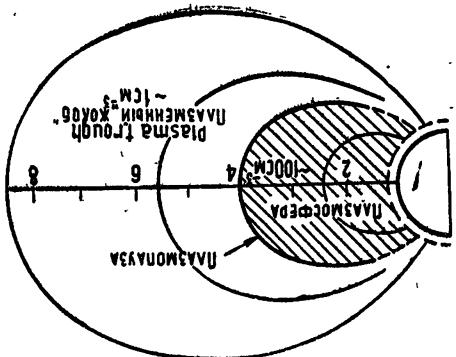
Рис. 3. Изменения положения плазмопаузы в зависимости от местного времени. Цифры указывают значения  $R$ , выраженные в  $R_3$ . Точечная кривая соответствует увеличению уровня магнитной активности, штриховая—уменьшению магнитной активности (Карпентер, 1966).

Штриховой линией показано положение «колена» с 15.00 LT 28 июля по 4.30 LT 29 июля 1963. Кривая, характеризующая усредненные суточные вариации положения «колена» (или, что то же, плазмопаузы), для дней с умеренной геомагнитной активностью имеет следующие особенности:

- 1) наименьшее геоцентрическое расстояние области «колена» наблюдается в утренние часы (около 6.00 LT) и составляет 3—3,5  $R_3$ ;
- 2) около 18.00 LT происходит резкое увеличение высоты области «колена», такое, что  $R$  меняется от 3,5 до 5. Движение области «колена» вниз происходит гораздо медленнее и длится приблизительно 10 часов;
- 3) от 6.00 LT до полудня высота области «колена» плавно увеличивается.

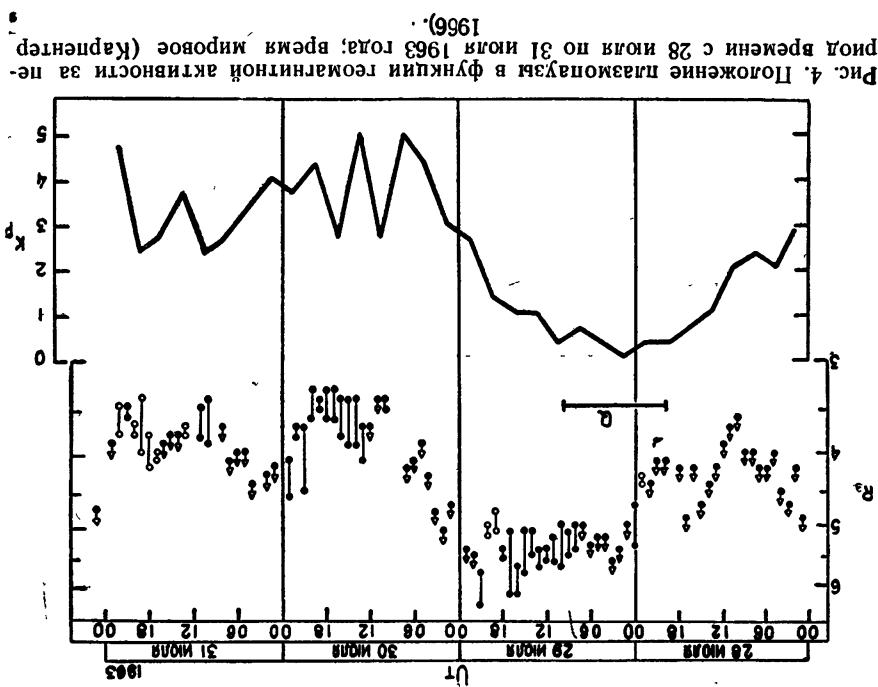
В первых же работах, в которых описывается «колено», отмечалось, что высота «колена» сильно зависит от уровня геомагнитной возмущенности (Карпентер, 1963; Карпентер и Смит, 1964). Подробные данные об этой зависимости опубликованы позже (Карпентер, 1966). Пример таких данных приводится на рис. 4, из которого ясно видно, что рост геомагнитных возмущений вызывает приближение «колена» к Земле. Автор отметил, что изменение уровня геомагнитной возмущенности отражалось на высоте «колена», как правило, через 6 часов.

Анализ многих данных, использованных Карпентером с учетом изложенных далее результатов масс-спектрометрических исследований



Pic. 5. Molaren pacupjejehna temboon mazans & mejnjanahphon cehennin marhn- rocfepai okojo 14.00 LT (mpn ymepenhoq reomarhntohn aktribochin,  $K_p = 2 \div 4$ ) (kap- netep, 1996).

Ha pnc. 5 morkaa njeajinangopbaraha megnunohajibhaa nbolekuna  
jhebonn accin miamenehoni ogojokon (~14.00 LT). Samutpxobaraan  
ojojactib orphanheneha marhithon ogojokon  $L = 4$  c kouhethpanueh  
jierkphobor  $n^2 = 10^2 \text{ cm}^{-3}$ , sa mpejehamn sroj ogojactin  $n^2 \sim 1 \text{ cm}^{-3}$ . To  
mehnhino Kaphethpea, Bujobs cunboron jhinnin  $L = 4$  upan naabix marhithinx  
bosnyumuhennax cyumeccbyer aobsojibho pegraka rphahuna sroj ogojactin.  
C ihpajinkenhem k Bemje, Otharko, pajahineh beinhinu "no oge ctogophis  
fapanuhu moker shahntehjibho ymhphumtpea. Ha pnc. 5 zot yhactek cintu-



ноноб (Ленгоп и др., 1965), мозаичныи элементы морфологии и паттернов (Федорова, 1965). Мозаичные элементы морфологии и паттернов включают в себя морфогенные единицы, обладающие определенными генетическими и функциональными свойствами, а также морфогенные единицы, обладающие определенными генетическими и функциональными свойствами, но не имеющими ясной морфогенной функции.

вой линии обозначен пунктиром. Усреднение многочисленных результатов анализа записей вистлеров (Карпентер, 1966), зарегистрированных при умеренной геомагнитной активности, показало, что высотное распределение имеет резкий излом на геоцентрических расстояниях  $\sim 4R_3$  и в дневные, и вочные часы. Если, однако, ночью изменение  $n_e$  составляет 30—100 раз на расстоянии 0,15  $R_3$ , то днем это изменение уменьшается до 10 раз.

Измерения ионного компонента окружающей Землю тепловой плазмы при помощи ловушек заряженных частиц, начатые на советских лунных ракетах в 1959 г., были продолжены в 1964 г. на спутниках типа Электрон. Некоторые предварительные результаты, полученные на спутнике Электрон-2 и относящиеся к экваториальным районам периферийной ионосферы, были опубликованы в 1965 г. (Безруких, Грингауз, 1965; Грингауз и др., 1966); более детальные результаты приводятся в работе Безруких, 1968. На рис. 6 и 7 приводятся образцы результатов измерений на спутниках Электрон. Из рис. 7 видно, что из данных, полученных на спутниках Электрон, можно сделать выводы, близкие к указанным выше выводам Карпентера.

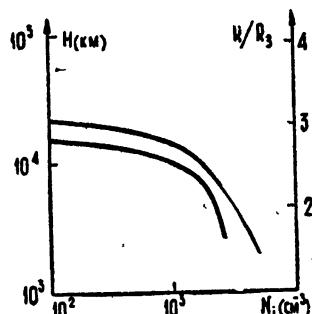


Рис. 6. Высотное распределение ионной плотности ( $n_i$ ) в области, близкой к магнитной экваториальной плоскости, по данным ловушек заряженных частиц на спутнике Электрон-2 (Безруких и Грингауз, 1965).

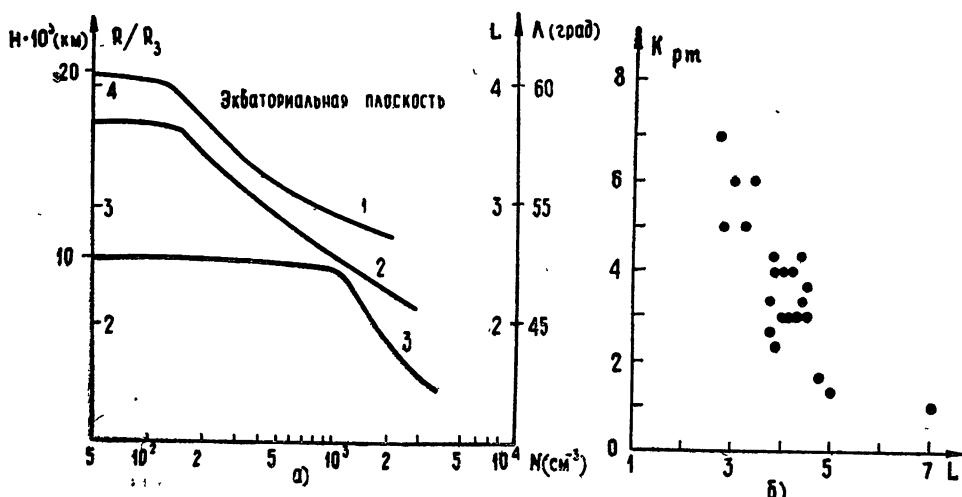


Рис. 7а. Ионная плотность  $n_i$  как функция высоты  $H$ , геоцентрического расстояния  $R$  и  $L$ -координат. (ночные часы; январь—февраль 1964; данные спутника Электрон-2 (Безруких, 1968): 1)—31.01, 1964,  $K_{pm}=3_6$ ; 2)—12.02, 1964,  $K_{pm}=4_0$ ; 3)—14.02, 1964,  $K_{pm}=5_0$ .

Рис. 7б. Связь между положением „колена“ в  $L$ -координатах и максимальным  $K_p$ -индексом в течение дня, предшествующего измерениям по данным спутников Электрон-2 и Электрон-4 (Безруких, 1968).

Ионные компоненты периферийной части ионосферы изучались

также при помощи радиочастотного масс-спектрометра типа Беннета на спутниках Ого-1 и Ого-3 (Тейлор и др., 1965; Тейлор и др., 1968). На этих же спутниках данные о положении плазмопаузы были получены при помощи плазменных детекторов типа ловушки заряженных частиц (Василюнас, 1968). Кроме того, данные о периферийной части ионосферы были получены при помощи ловушек заряженных частиц на спутнике ИМП-2 (Сербу и Майер, 1966 а, 1966 б; Бинзак, 1967).

На рис. 8 и 9 показаны некоторые результаты ионных масс-спект-

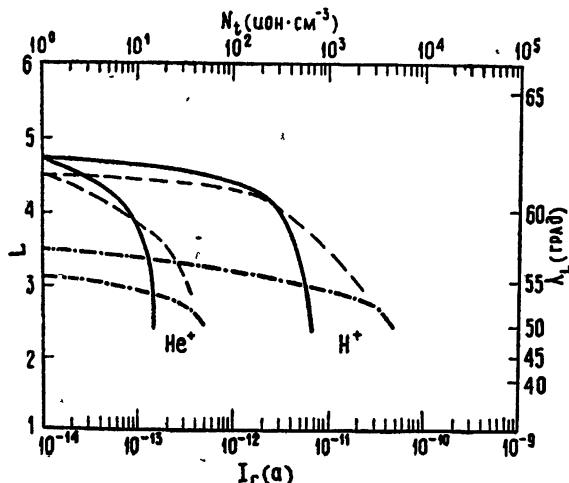


Рис. 8. Плотности протонов и ионов гелия как функции координат по данным масс-спектрометра на спутнике ОГО-1 (Тейлор и др., 1965):

- 2 ноября 1964;
- - - 10 ноября 1964;
- · - - 26 ноября 1964.

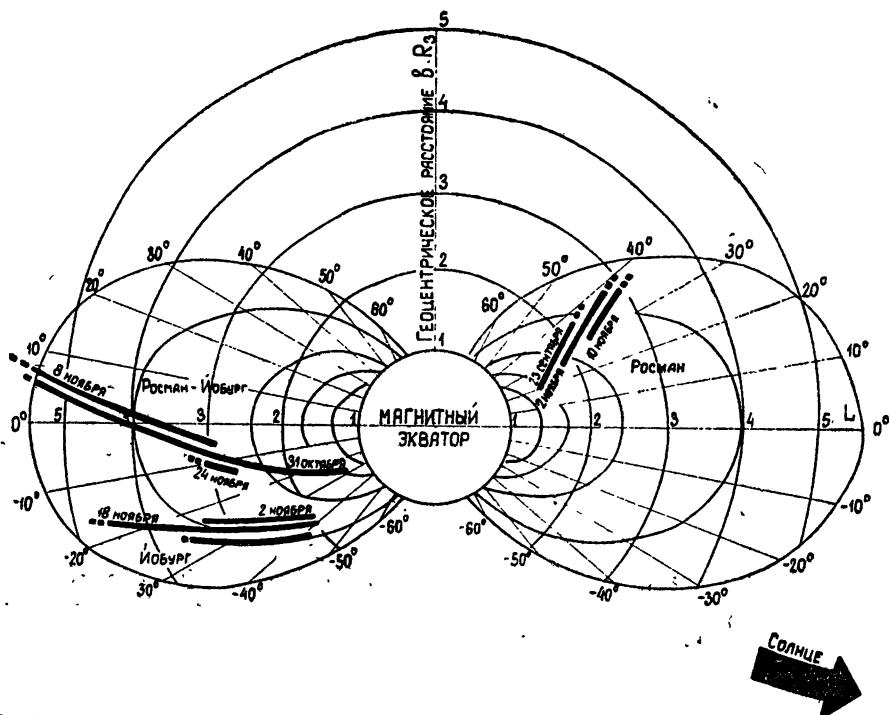


Рис. 9. Участки орбит, на которых наблюдался спад протонного тока для действий спутника ОГО-1. Сплошная часть каждой кривой соответствует области чистотенного спада ионного тока с высотой; начало штрихованной части указывает положение резкого спада тока (Тейлор и др., 1965).

рометрических измерений на Ого-1 (Тэйлор и др., 1965). Из данных этих измерений следовало, что в подавляющем большинстве случаев «плато» в высотном распределении  $n$ , опускается при высокой геомагнитной активности и поднимается при низкой. Вопросы сжатия периферийной части ионосферы в связи с геомагнитными возмущениями по данным ионных радиочастотных масс-спектрометров, полученным в 1965—66 гг. на спутниках Ого-1 и Ого-3, исследованы в статье Тэйлора и др. (1968), авторы которой приходят к выводу о существовании обратной корреляции между координатой  $L$  плазмопаузы и максимальным  $K_p$ -индексом за 24 часа, предшествующие измерениям. Во время событий, связанных с солнечными вспышками 15 июня 1965 г. и 7—9 июля 1966 г. при  $K_p = 5$ , плазмопауза опускалась от  $L = 6$  до  $L = 3.3$ .

Карпентер, Парк и Тэйлор (1968) во время полетов спутников Ого-1 и Ого-3 одновременно несколько раз наблюдали «колено» тремя независимыми способами: по анализу вистлеров, зарегистрированных в Антарктике, при помощи ионного масс-спектрометра на спутнике и по измерениям УНЧ излучения на спутнике. При последнем способе пересечение спутником плазмопаузы отличается резким изменением характера принимаемого УНЧ излучения. Наблюдаемые величины  $L$ -координаты «колена» лежали в пределах 3,2—5,5. Одновременные измерения на Земле и на спутнике при разнице местного времени около 1 часа определяют одно и то же положение плазмопаузы (в пределах экспериментальной ошибки  $\pm 0,2 R_3$ ). Измерения положения плазмопаузы на спутнике при помощи масс-спектрометра и УНЧ приемника в описываемых авторами случаях дали расхождение  $\sim 0,1 R_3$ .

Эти эксперименты показывают, что определения положения «колена» заслуживают доверия как в случае наземных наблюдений вистлеров, так и при измерениях на спутниках. Они свидетельствуют также о справедливости предположения, что плазмопауза (во всяком случае, на умеренных геомагнитных широтах) имеет форму геомагнитной оболочки.

На тех же спутниках Ого-1 и Ого-3 и на спутнике ИМП-2 устанавливались плазменные детекторы Массачусетского технологического института, предназначенные для регистрации электронов (Бинзак, 1967; Василионас, 1968). Анализ показаний этих приборов и особенностей регистрации ими заряженных частиц показал, что вследствие некоторых вторичных процессов, на которых мы не останавливаемся, они уверенно регистрировали входжение спутников в зону значительных концентраций положительных ионов, т. е. пересечение спутниками плазмопаузы. Сопоставление изменений положения плазмопаузы с изменениями геомагнитной активности привели авторов к выводам, близким к указанным выше выводам Карпентера и Тэйлора и др. В частности, Бинзак считает, что при магнитно спокойных условиях плазмопаузе соответствует  $L = 6$  и что при увеличении  $K_p$  координата, соответствующая плазмопаузе, может быть приближенно описана при помощи эмпирической формулы

$$\Delta = 6 - 0,6 K_p,$$

где  $K_p$ -индекс относится ко времени измерений.

Следует отметить, что на том же спутнике ИМП-2 одновременно проводились измерения как электронного, так и ионного компонентов плазменной оболочки Земли при помощи ловушек заряженных частиц (с анализом энергий частиц методом задерживающего потенциала, Сербу и Майер, 1966 а, 1966 б). При интерпретации данных этого эксперимента авторы не обнаружили «колена» в распределении концентрации заряженных частиц. Мы уже отмечали, что этот результат противоречит ряду других независимых наблюдений (Гриңгауз, 1967). Теперь к этому можно добавить, что он находится в противоречии даже с одно-

временными наблюдениями, выполненными на том же космическом аппарате (Бинзак, 1967). Причина этих противоречий нуждается в выяснении.

Из результатов тех же измерений, проведенных на спутнике ИМП-2, Сербу и Майер сделали вывод в том, что при  $4R_3 < R < 10R_3$  ионная температура существенно превышает электронную ( $T_e \sim 1 - 2$  эв,  $T_i \sim 4 - 8$  эв). Заметим, что эти величины  $T_i$  существенно превышают оценки верхнего предела  $T_i$  при  $R < 5.5 R_3$  по данным Электрона-2 (Безруких и др., 1967). Из теоретических температурных моделей периферийной части ионосферы (Гейслер и Боухил, 1965; Глиддон, 1966; Баэр, 1967) следует, что при отсутствии селективных источников нагрева и охлаждения электронного и ионного газов  $T_i$  не должна превышать  $T_e$ ; сколько-нибудь удовлетворительного механизма такого селективного нагрева пока не обнаружено. Исследования нижней части ионосферы, проведенные в последние годы, показали, что геомагнитное поле в значительной степени контролирует поведение ионосферы. Ряд ионосферных особенностей, связанных с транспортировкой заряженных частиц вдоль геомагнитных силовых трубок, указан в обзоре Родерера (1967), посвященном явлениям в магнитосопряженных точках. Были обнаружены значительные широтные градиенты на высоких широтах, связанные с провалом (rough) электронной концентрации на высотах от 1000 км до максимума слоя F, по данным ионограмм, полученных со спутника Алуэт-1 (Томас и др., 1964), а также на высоте  $\sim 1000$  км по результатам зонда Ленгмюра на спутнике Эксплорер-22 (Брейси и Редди, 1965). Поразительно малые величины обнаружены по данным высокоширотных ионограмм, полученных со спутника Алуэт-2, на высотах 1500—3000 км, где при  $L > 6$  определены значения  $n_e$  в пределах от 8 до 100 см<sup>-3</sup>, причем граница области существования 30 см<sup>-3</sup> смещается по геомагнитной широте от полудня к полуночи на 8° (Хагг, 1967). Авторы этих экспериментов отмечают подобие упомянутых явлений, обнаруженных в высокоширотных областях на малых высотах, с «коленом», наблюдаемым на больших высотах при малых геомагнитных широтах. Хотя связь этих явлений представляется нам бесспорной, однако она не может служить полным объяснением существования «колена», хотя бы потому, что сами особенности высокоширотной ионосферы на малых высотах также нуждаются в объяснении. Кроме того, как отметили Ангерами и Карпентер (1966), имеются некоторые несоответствия между вариациями положения «колена» в экваториальной плоскости и вариациями нижней части ионосферы на высоких широтах.

В 1961 г. была опубликована теория высокоширотных геофизических явлений и магнитных бурь Эксфорда и Хайнса, в которой предлагалась модель магнитосферы, содержащая во внешних ее частях конвективно движущуюся плазму. Источником конвекции принималось вязко-подобное взаимодействие магнитосферной плазмы с солнечным ветром. В результате конвективного движения плазмы в магнитном поле в магнитосфере создаются электрические поля. Вблизи геомагнитного диполя образуется запрещенная зона, в которую плазма, участвующая в конвекции, не проникает, с размерами, определяемыми геомагнитной широтой 62°, что соответствует в экваториальной плоскости  $\sim 4.5 R_3$ . Совершенно ясно, что законы изменения плотности плазмы в зависимости от геоцентрического расстояния внутри запрещенной зоны и вне ее должны быть различными.

Тогда же была предложена модель магнитосферы с конвективным движением магнитосферной плазмы, вызываемым соединением силовых линий хвоста магнитосферы с силовыми линиями межпланетного магнитного поля (Данжи, 1961).

Таким образом, вскоре после опубликования первых эксперимен-

тальных данных, полученных на лунных ракетах, о распределении концентрации заряженных частиц при  $R$  порядка нескольких  $R_3$  и независимо от этих данных были опубликованы теоретические аргументы, позволяющие сделать вывод о существовании излома в распределении плазмы при  $R$  порядка  $4,5R_3$ . Позднее был опубликован ряд теоретических статей, в которых общей чертой было признание существования конвекции в магнитосфере и запрещенной зоны и в которых граница этой зоны прямо отождествляется с «коленом» (Блок, 1966; Нишида, 1966; Данжи, 1966; Самохин, 1966, 1967, 1967 а, 1968; Кавана и др., 1968; Брайс, 1967). Эти работы отличаются друг от друга по выбору причин, создающих конвективное движение магнитосферной плазмы и запрещенную зону, по конфигурации постулируемых магнитосферных электрических полей; в одних работах существенное значение имеет вращение Земли, а в других оно не учитывается. Тем не менее конвективное движение плазмы является одной из основных особенностей рассмотренных магнитосферных моделей.

Необходимо отметить, что если до недавнего времени о наличии конвективной циркуляции плазмы в магнитосфере судили по косвенным данным (таким, как наземные наблюдения дрейфов полярных сияний и радиосияний, геомагнитных возмущений на высоких широтах и т. д.), то в последнее время измерения, проведенные на геостационарном спутнике АТС-1; по-видимому, дали прямые экспериментальные свидетельства существования конвекции (Фримен, 1967; Фримен и др., 1968; Фримен и Юнг, 1968). Установлено наличие движения со скоростью  $\sim 30 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$  магнитосферных ионов с тепловой энергией  $(E \sim 1 \text{ эВ})$ . По оценке авторов это движение соответствует электрическому полю  $\sim 5 \text{ мв} \cdot \text{м}^{-1}$ , направленному поперек магнитосферы с утренней стороны к вечерней.

В модели Десслера и Мичела (1966) распределение плотности плазмы в магнитосфере объясняется без использования конвективного движения на основе испарения плазмы из полярных областей ионосферы вдоль силовых линий открытого хвоста магнитосферы.

В последних работах Эксфорда (1968), Бэнкса и Холцера (1968) приводятся аргументы и расчеты, свидетельствующие в пользу сверхзвукового истечения плазмы из полярных областей ионосферы (названного ими «полярным ветром»), которое также может служить для объяснения существования «колена».

Рассмотрение упомянутых работ могло бы само быть предметом специального обзора и, по-видимому, будет в какой-то степени сделано в следующем докладе.

Резюмируя, можно сказать следующее. Совокупность имеющихся сейчас экспериментальных данных о холодной (тепловой) плазме в магнитосфере дает основание считать, что существует характерная поверхность — граница самой внешней части ионосферы — плазмопауза, которая, по-видимому, отделяет магнитосферную плазму, участвующую в конвективном движении, от плазмы, вращающейся вместе с Землей. Плазмопауза расположена внутри внешнего радиационного пояса; при увеличении геомагнитной активности она сжимается (приближается к Земле), а при уменьшении расширяется.

Возвращаясь к модели Карпентера (1966), определяемой в экваториальной плоскости, рис. 3, и в меридиональной, рис. 5, следует заметить, что, пользуясь ею, целесообразно иметь в виду следующее.

1) Метод, используемый при получении концентрации электронов из данных вистлеров, позволяет определять значения  $n_e$  только в экваториальной плоскости.

2) При построении модели холодной плазменной оболочки Земли в меридиональном сечении Карпентер частично опирался на результаты

Тэйлора и др. (1965), полученные на Ого-1. Однако этот спутник также, как и спутники ИМП-2 и Ого-3, имеет сравнительно малый наклон орбиты к экватору, вследствие чего полученные данные относятся к области геомагнитных широт  $\leq 45^\circ$ . По-видимому, именно по этой причине автор модели отметил, что часть граничной силовой линии, показанная пунктиром, соответствует области, в которой структура «колена» недостаточно хорошо известна.

Следует отметить, что именно на профилях концентрации заряженных частиц, относящихся к геомагнитным широтам  $> 45^\circ$  и полученных в 1964 г. при помощи ловушки заряженных частиц на спутнике Электрон-4, четко выраженное «колено» отсутствует (Безруких, 1968).

Необходимо также иметь в виду, что определения концентрации положительных ионов по данным масс-спектрометров на спутниках Ого осуществлены с точностью до фактора 5 в связи с трудностями пересчета величин измеренных токов в концентрации частиц (Тэйлор и др., 1965) и что с аналогичными трудностями приходилось сталкиваться при обработке данных, полученных на спутниках Электрон (Безруких, Грингауз, 1965).

Поэтому к рассматриваемой модели следует подходить с некоторой осторожностью, не рассматривая ее как окончательную, тем более, что и сам автор называет ее «предварительной».

## 2. ПОТОКИ МАЛОЭНЕРГИЧНЫХ ЧАСТИЦ ( $E \leq 40$ кэв) В ЗОНЕ ЗАХВАЧЕННОЙ РАДИАЦИИ

Оценки потоков частиц в радиационных поясах были первоначально сильно завышены авторами первых американских и советских экспериментальных исследований, а энергии их были приняты слишком малыми. Считалось, что во внешнем поясе поток электронов составлял  $10^{10}$ — $10^{11} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  при энергиях  $E > 20$  кэв. Такие оценки были связаны с тем, что для интерпретации показаний приборов, применявшихся для наблюдений, приходилось делать недостаточно обоснованные предположения об энергетическом спектре изучаемых частиц. Несмотря на то, что данные ловушек заряженных частиц на аппарате Луна-2 показали, что полные потоки электронов во внешнем радиационном поясе не могли превышать  $2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  (Грингауз и др., 1960; Грингауз и др., 1963), остальными экспериментаторами до 1962—63 гг. принимались величины потоков, завышенные на три порядка.

Столь большие потоки позволяли многим авторам считать, что энергичные заряженные частицы, захваченные во внешнем поясе, могут служить причинами магнитных бурь, высыпание их в атмосферу может непосредственно создавать полярные сияния и т. п.

Когда пониженные оценки потоков электронов и их более жесткий энергетический спектр стали общепризнаны, интерес к внешнему радиационному поясу, как к причине других важных геофизических явлений, значительно ослаб. Он, по-видимому, вновь возрастает сейчас, после того как установлено существование во внешнем поясе потоков малоэнергичных частиц, весьма сильно меняющихся во времени, плотность энергии которых иногда становится весьма значительной.

Начнем с рассмотрения внутреннего радиационного пояса ( $L \leq 2$ ).

Сообщения о потоках малоэнергичной плазмы в нем весьма малочисленны. Фримен (1962) интерпретировал результаты наблюдений при помощи кристаллического детектора CdS на спутнике Инджун-1 на высоте  $\sim 1000$  км при  $L > 1,7$  как свидетельствующие о потоках протонов с энергией  $0,5$  кэв  $< 5 < 1$  Мэв, несущих поток энергии  $50 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ .

Франк и Суишер (1968) на основании данных, полученных в 1966 г.,

при полете спутника Ого-3 при помощи электростатического анализатора, отметили, что при  $L < 1,7$  максимальные потоки энергии зарегистрированных протонов с энергиями от 100 эв до 50 кэв меньше величины, указанной Фрименом, в 10—100 раз. Они отметили также, что анализ полученных в 1965 г. результатов экспериментов на спутнике Инджун-4 (неопубликованные данные) показал, что поток энергии протонов с энергией  $E > 30$  кэв во внутреннем радиационном поясе также в 10—100 раз меньше величины, указанной Фрименом. Так как измерения на упомянутых трех спутниках были проведены в существенно разные времена, то нельзя исключить возможность того, что расхождение результатов связано с изменениями характеристик внутреннего пояса с 1961 г. до 1966 г.

Единственные, по-видимому, сообщенные до настоящего времени результаты измерений потоков протонов с энергиями  $E < 50$  кэв при  $L < 2$  относятся к периоду геомагнитных возмущений и приведены на рис. 10 (указаны верхние пределы, Франк, 1967 б). Какие-либо результаты измерений потоков электронов с энергиями  $E < 50$  кэв во внутреннем радиационном поясе не публиковались.

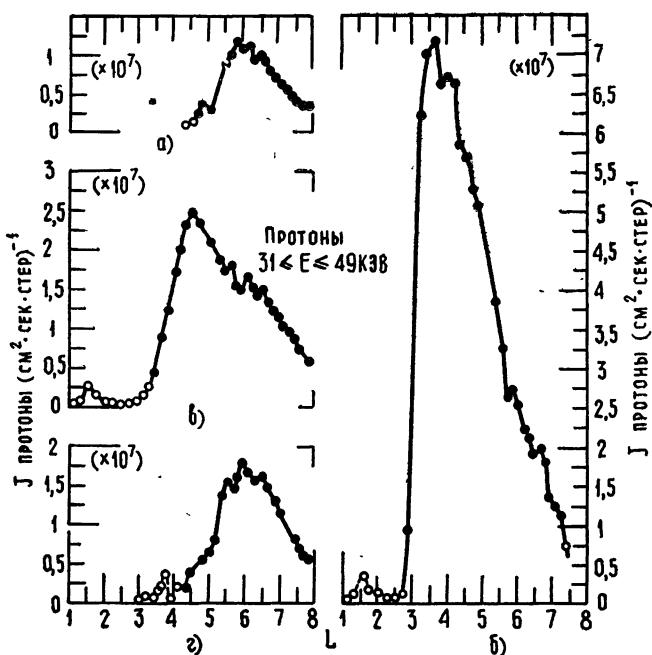


Рис. 10. Величины потоков протонов с энергией  $E < 50$  кэв в функции  $L$ -координат во время магнитного возмущения по данным электростатического анализатора на спутнике Ого-3 (Франк, 1967): а) — 7 июля 1966, перед магнитной бурей; б) — 9 июля, главная фаза; в) — 11 июля, фаза восстановления; г) — 13 июля, после магнитной бури. Условные обозначения: ●●● — интенсивность; ○○○ — верхний предел.

Более полны сведения о малоэнергичной плазме во внешнем радиационном поясе.

При полете космического аппарата Луна-1 в январе 1959 г. при помощи ловушек заряженных частиц, начиная с геоцентрического расстояния  $\sim 5R_3$ , были обнаружены потоки электронов  $\sim 2 \cdot 10^8$   $\text{cm}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  с энергией  $E > 200$  эв, превышающие по величине примерно

на порядок потоки высокoenергичных электронов в максимуме внешнего радиационного пояса (Грингауз и др., 1960 б). Последующий анализ показал, что эти потоки частично зарегистрированы в утренней части магнитосферы внутри внешнего радиационного пояса.

Фримен и др. (1963) упоминали о том, что на Эксплорере-12 в дневном секторе магнитосферы иногда наблюдались малоэнергичные электроны с максимальными потоками при  $R \sim 7R_{\oplus}$ , хотя в большинстве случаев эти электроны отсутствовали. Более детального описания этих наблюдений авторы не привели.

При ряде пролетов спутника Электрон-2 через внешний радиационный пояс при помощи установленной на нем ловушки заряженных частиц были зарегистрированы значительные потоки электронов (до  $3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ ) с энергиями  $100 \text{ кэв} \leq E \leq 50 \text{ кэв}$ . Были также зарегистрированы случаи (при других пролетах спутника), когда указанные потоки электронов оказывались меньше чувствительности прибора, т. е. меньше  $2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  (Безруких и др., 1965; Грингауз и др., 1966). Как в тех, так и в других случаях потоки захваченных во внешнем радиационном поясе электронов с энергией  $E > 100 \text{ кэв}$ , измерения которых описаны Верновым и др. (1965) и Кузнецовым и др. (1965), были почти неизменны (их значения колебались в пре-

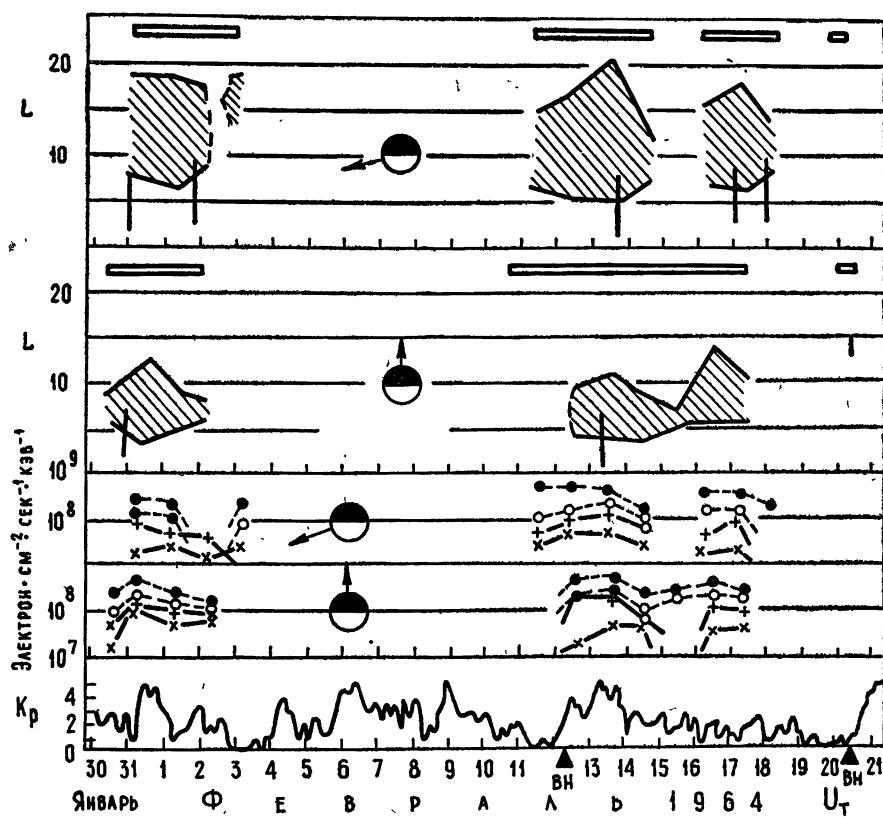


Рис. 11. Области повышенной интенсивности малоэнергичных электронов в  $L$ -координатах и максимальные величины потоков в различных энергетических интервалах по данным сферического электростатического анализатора на спутнике Электрон-2. Сплошные вертикальные линии соответствуют положению внешнего радиационного пояса (Вернов и др., 1965):

● ● ● — 1 кэв; ○ ○ ○ — 2,5 кэв; + + + — 5 кэв; × × × — 10 кэв; — время, за которое имеется информация о работе анализатора;

▲ — внезапное начало магнитной бури.

делах примерно  $\pm 10\%$ ). Это позволило авторам наблюдений сделать вывод о существовании мягкого электронного компонента внешнего радиационного пояса, отличающегося от энергичной захваченной радиации большей изменчивостью.

Этот вывод, подтвержденный результатами, полученными на том же спутнике при помощи электростатического анализатора (часть результатов приведена на рис. 11, Вернов и др., 1966), дополнен указанием границ внешнего радиационного пояса по данным измерений частиц с энергией  $E > 100$  кэв; можно видеть, что зарегистрированные в одних случаях внутри радиационного пояса потоки частиц с энергией от 0,1 до 10 кэв при других пролетах отсутствуют.

Рис. 12 показывает для некоторых пролетов (витков) спутника, при каких  $L$ -координатах и при каком местном времени регистрировались при помощи лсвушек заряженных частиц потоки мягких электронов, описанные Безрукими и др. (1965) и Грингаузом и др. (1966). Черные кружки и квадраты, соединенные пунктиром, показывают значения  $L$  и  $T$ , при которых во время одного пролета спутника регистрировались потоки мягких электронов, равные 0,5 от максимального значения потока, наблюдавшегося при этом пролете. Крестиком

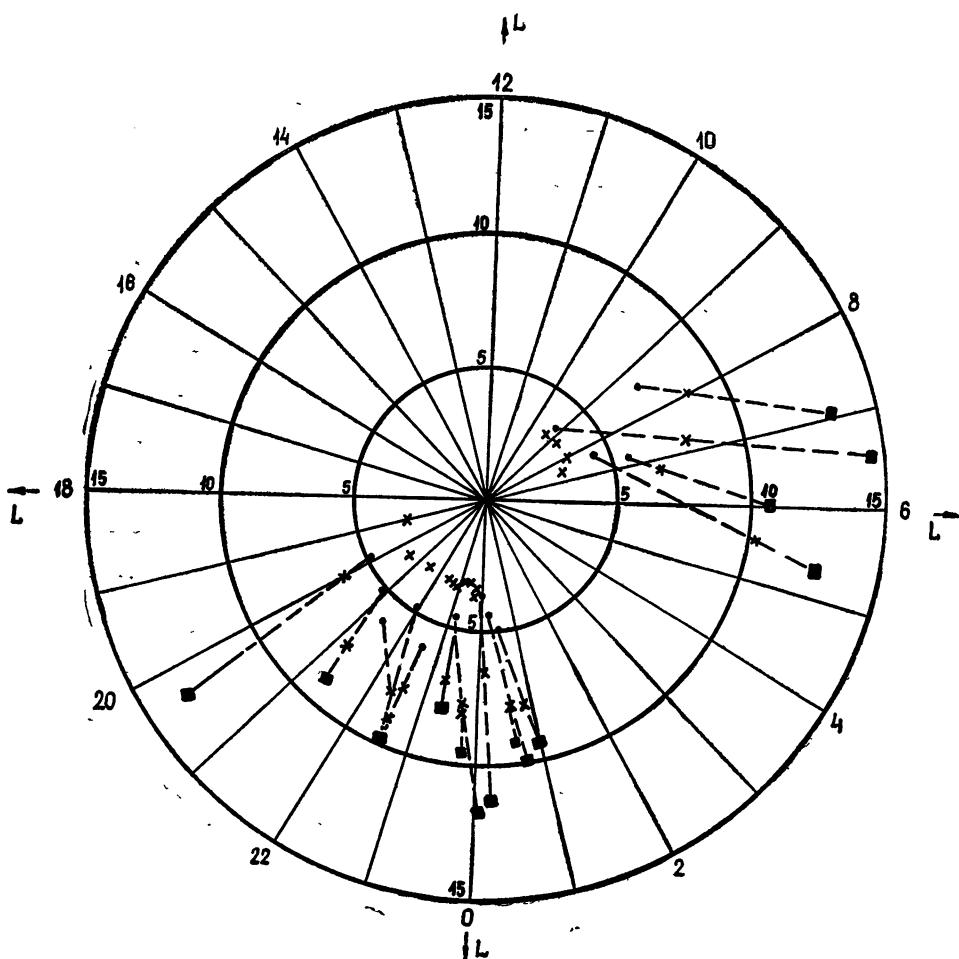


Рис. 12. Значения  $L$ -координат и местного времени, соответствующие регистрации потоков электронов с энергией  $E > 100$  эВ при помощи ловушки заряженных частиц на спутнике Электрон-2 (подробнее см. текст).

показаны границы внешнего радиационного пояса, определенные по резкому спаду потоков электронов с энергией  $E > 100$  кэв (Кузнецов и др., 1965). Пересечения внешней границы внешнего пояса никак не отражались на токе ловушки заряженных частиц; потоки электронов продолжали регистрироваться за пределами пояса.

Франк (1966) сообщил о наблюдениях временных вариаций интенсивностей малоэнергичных электронов во внешнем радиационном поясе во время геомагнитных бурь, проведенных при помощи детектора CdS на спутнике Эксплорер-12. Согласно выводам автора, в начале больших геомагнитных бурь 1 и 29 октября 1961 г. в области  $L = 2,8 - 4$  резко возрастали потоки энергий электронов в энергетическом интервале  $100$  эв  $< E < 40$  кэв, достигая максимальной величины  $1000 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Оценки возрастаний величин потоков частиц не делались. Франк предположил, что зарегистрированные малоэнергичные электроны образуют кольцевой ток с центром, расположенным на  $L = 3$ , частично ответственный за главную фазу магнитных бурь.

В 1966 г. были также опубликованы некоторые результаты исследований потоков электронов с энергией  $E = 5 \div 10$  кэв на спутнике Эксплорер-14 (Пизелла, Дэвис и Уильямсон, 1966). Измерения проводились при помощи фотоумножителя с периодически изменявшимся поглотителем и с коллиматором, позволявшим измерять питч-углы регистрируемых электронов; регистрация велась в утренней части магнитосферы (местное время 8—10 час). В том же эксперименте регистрировались также и частицы больших энергий.

Вот некоторые выводы авторов эксперимента. Существует область захваченных электронов со средней энергией около 10 кэв и максимальной интенсивностью  $10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  при  $L = 8$ , причем как максимальная интенсивность потоков, так и ее положение в  $L$ -координатах сильно меняются во времени. Эти электроны являются захваченными, так как они существуют в глубине утренней части магнитосферы (граница магнитосферы проходила через  $L = 12$ ) и их распределение по питч-углам типично для захваченных частиц. Авторы отмечают, что энергетический спектр этих электронов имеет разрыв по сравнению с электронами при меньших значениях  $L$ , поэтому указанные электроны не должны рассматриваться как «хвост» более энергичных захваченных электронов и имеют иное происхождение и время жизни. При некоторых оборотах спутника они наблюдались, при других не регистрировались.

Пизелла и др. считают, что эти электроны относятся к электронам, обнаруженным при помощи ловушек заряженных частиц на Луне-1 2 января 1959 г. (Грингауз и др., 1960), когда внутренняя граница зоны существования этих электронов соответствовала  $L = 5$  на геомагнитной широте  $\sim 20^\circ$  и местное время было примерно таким же, как в описанных Пизеллой и др. измерениях.

Авторы экспериментов отметили отсутствие очевидной корреляции между измеренными величинами потоков электронов и геомагнитными условиями; детальный же корреляционный анализ они не проводили в связи с ограниченным количеством изученных данных.

Сравнивая данные Пизеллы и др. с описанными выше измерениями потоков электронов с  $E > 100$  эв на Электроне-2, можно заметить следующее. В числе измерений на Электроне-2 имеются проведенные в утренние часы, так же как и на Эксплорере-14 (см. рис. 12). В обеих сериях измерений наблюдались потоки электронов, весьма изменчивые по величине, но иногда значительно (более чем на порядок величины) превышавшие потоки высокоэнергичных электронов внешнего радиационного пояса. Эти общие черты позволяют предполагать, что потоки электронов со средней энергией 5—10 кэв, измеренные на

Эксплорер-14 во внешнем радиационном поясе, имеют то же происхождение и обладают теми же свойствами, что и электроны, зарегистрированные во внешнем поясе на Электроне-2 (так же как и на Луне-1).

Измерения потоков заряженных частиц с энергиями порядка сотен и тысяч электронвольт проводились также на пересекавших внешний радиационный пояс спутниках Ого-1 и Ого-3.

Плазменные детекторы МТИ, ловушки заряженных частиц модуляционного типа, позволявшие регистрировать электроны с энергиями от 40 эв до  $E \leq 2$  кэв, установленные на этих спутниках, имели сравнительно низкую чувствительность. Эти приборы в вечернем и ночном секторах внешнего радиационного пояса не обнаружили потоков электронов (Василюнас, 1968).

На Ого-3 были также установлены электростатические анализаторы с энергиями от  $\sim 100$  эв до  $\sim 50$  кэв с чувствительностью, существенно превышавшей чувствительность приборов для изучения малоэнергичной плазмы, при помощи которых ранее проводились измерения в радиационных поясах (Франк, 1967 б, с). На рис. 13 приведены энергетические спектры малоэнергичных электронов, полученные во внешнем радиационном поясе на различных магнитных оболочках (при  $3.4 \leq L \leq 8$ ) 23 июня 1966 г. (в магнитно спокойный день) и 25 июня 1966 г. (при сильном магнитном возмущении). Как видно из графиков, в обоих случаях при всех указанных значениях  $L$  зарегистрированы значительные потоки электронов с максимальными

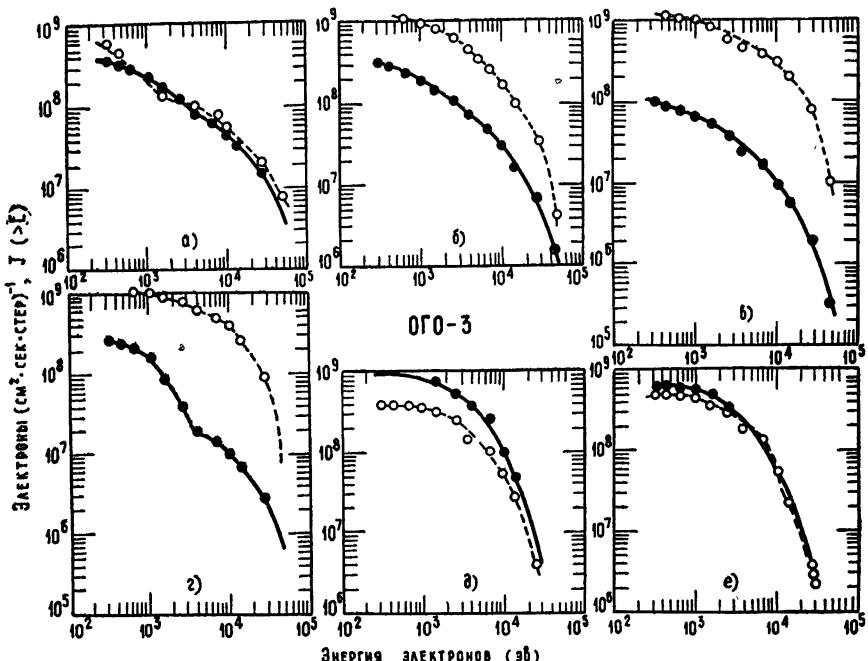


Рис. 13. Интегральные энергетические спектры малоэнергичных электронов по данным электростатического анализатора на спутнике Ого-3 (Франк, 1967б):

$$\text{а)} L = 3,4; \quad \lambda = 1^\circ; \quad \alpha = 94^\circ;$$

$$\text{б)} L = 4,0; \quad \lambda = 4^\circ; \quad \alpha = 100^\circ;$$

$$\text{в)} L = 5,0; \quad \lambda = 8^\circ; \quad \alpha = 108^\circ;$$

$$\text{г)} L = 6,0; \quad \lambda = 11^\circ; \quad \alpha = 113^\circ;$$

$$\text{д)} L = 7,0; \quad \lambda = 14^\circ; \quad \alpha = 117^\circ;$$

$$\text{е)} L = 8,0; \quad \lambda = 15^\circ; \quad \alpha = 120^\circ;$$

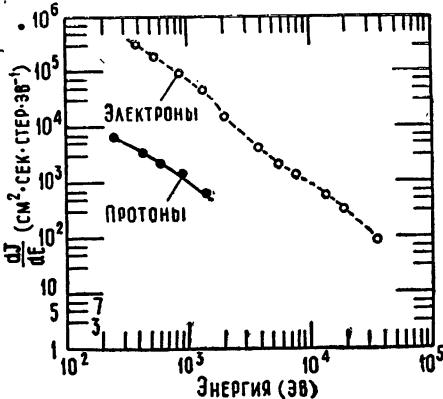
● ● ● — измерения в магнитно спокойный день,  
○ ○ ○ — измерения в магнитно возмущенный день.

потоками в области энергий от нескольких сот электронвольт до 1 кэв. Наличию геомагнитного возмущения соответствует резкое увеличение электронных потоков. На рис. 14 приведен один из электронных спектров, полученный при  $L = 3,9$  15 июня 1966 г., на котором потоки электронов с энергиями  $10^3$ — $10^4$  эв на несколько порядков выше, чем на предыдущем рисунке (Франк, 1967).

Эти данные подтверждают наличие весьма изменчивого во времени мягкого электронного компонента внешнего радиационного пояса и впервые дают детальные энергетические спектры частиц этого компонента.

На Ого-3 Франком (1967 с, д) получены также уникальные данные о мягком протонном компоненте внешнего пояса. Ранее детекторы малоэнергичных заряженных частиц на спутниках, пересекавших зону захваченной радиации, включая электростатические анализаторы на спутниках ИМП-1 (Вулф и др., 1966 а) и Электрон-2 (Вернов и др., 1966), были недостаточно чувствительны и не регистрировали положительные ионы в радиационных поясах, позволяя определять лишь верхние пределы потоков ионов. Образцы определений потоков протонов с  $E < 49$  кэв при  $L = 8$  по данным анализаторов Франка уже приводились на рис. 10. Пример дифференциального энергетического спектра таких протонов при  $L = 3,9$  (вместе с одновременно полученным спектром электронов) приведен на рис. 14. Анализируя результаты

Рис. 14. Энергетический спектр электронов по данным электростатического анализатора на спутнике Ого-3 15 июня 1966 в 07:04 UT на расстоянии  $3,4 R_{\oplus}$ ;  $L = 3,9$  (Франк, 1967 б).



измерений магнитного поля, выполненных на Электроне-2, Долгинов и др. (1965) сделали вывод о существовании токового кольца, образованного мягкими протонами внешнего радиационного пояса, о которых, как отметили авторы, в то время еще не имелось информации.

Анализ значительных вариаций потоков малоэнергичных протонов и электронов во внешнем радиационном поясе в июне—июле 1966 г. в периоды умеренных магнитных бурь привел Франка (1967 д) к выводу о том, что суммарная энергия этих частиц во время возрастания этих потоков достаточна для создания наблюдавшегося на поверхности Земли уменьшения магнитного поля на низких и средних широтах и что именно эти частицы создают в период бури вневселенное токовое кольцо (подобное предположенному Чэпменом и Ферраро (1932)). Оценка показала, что наблюдавшемуся  $D_{st}$  возмущению — 50γ соответствовали следующие суммарные энергии частиц с  $200$  эв  $\leq E \leq 50$  кэв, заключенных между магнитными оболочками  $L = 1$  и  $L = 8$ : для протонов  $2,1 \cdot 10^{22}$  эрг, а для электронов —  $5,3 \cdot 10^{21}$  эрг. Наблюдавшиеся времена жизни τ протонов с энергиями 30—50 кэв в процессе быстрого убывания их потоков после главной фазы магнитной бури были порядка десятка часов. Суишер и Франк (1968) показали, что эти значения τ могут быть хорошо объяснены процессом перезарядки протонов с атомами водорода экзосферы.

### 3. ПОТОКИ МАЛОЭНЕРГИЧНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЗА ПРЕДЕЛАМИ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ

Во Введении было упомянуто о первом обнаружении потоков малоэнергичных электронов ( $E > 200$  эв) за границами внешнего радиационного пояса при помощи первых лунных космических аппаратов в 1959 г. (Грингауз и др., 1960 а, 1960 б, 1961 б). По интенсивности эти потоки существенно (не менее чем на порядок) превышали потоки электронов с энергией  $E > 50$  кэв во внешнем поясе.

Начиная с 1961 г., подобные потоки наблюдались на ряде советских и американских космических аппаратов (которые будут упомянуты далее; напомним, что некоторые данные об орбитах этих аппаратов приведены в таблице во Введении).

Самый внешний пояс заряженных частиц, под которым в 1961 г. подразумевалась промежуточная зона между радиационными поясами Земли и солнечным ветром, как это стало ясно в течение последних лет, включает в себя с полуденной стороны переходную зону между фронтом ударной волны (созданной при обтекании сверхзвуковым потоком солнечной плазмы геомагнитного поля) и границей магнитосферы («магнитопаузой»). С ночной стороны он включает в себя плазменный слой, внутри которого находится магнитно нейтральный слой (Грингауз и Хохлов, 1965; О'Брайен, 1967). В настоящий обзор включены краткие сведения о плазме в переходном слое не только потому, что он первоначально включался нами в самый внешний пояс заряженных частиц, но и потому, что если потоки малоэнергичной плазмы попадают в магнитосферу через нейтральные точки (как это предполагают некоторые авторы, например, Плетнев и др. (1965)), то источником их может быть не плазма возмущенного солнечного ветра, а именно трансформированная плазма переходного слоя, граничащего с магнитосферой.

Понимание физической природы потоков малоэнергичных заряженных частиц в различных областях магнитосферы и вблизи нее во многом помогли магнитные измерения в околоземном пространстве, которые, в частности, привели к обнаружению предсказанных ранее теоретически (например, Эксфорд, 1962) важных характерных поверхностей фронта ударной волны и границы магнитосферы (магнитопаузы) при помощи спутника Эксплорер-12 (Кэхилл и Амазин, 1963) и магнитно нейтрального слоя в ночной части магнитосферы при помощи спутника ИМП-1 (Несс и др., 1964).

Как уже отмечалось, современным представлениям о геометрии околоземного магнитного поля соответствует рис. 1.

При многократных пересечениях дневной части магнитопаузы спутником Эксплорер-12 в 1961 г. при помощи кристаллического детектора CdS, реагирующего на малоэнергичные заряженные частицы, были получены результаты, которые были интерпретированы как свидетельствующие о наличии в переходном слое электронов с энергией  $200$  эв  $\leq E \leq 40$  кэв, с потоками  $10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  (Фримен и др., 1963).

В 1963—64 гг. на спутнике ИМП-1 при пересечении им переходного слоя были измерены потоки электронов  $\sim 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  с энергией  $E > 100$  эв (Сербу, 1965), потоки электронов  $\sim 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  с энергиями  $65 \leq E \leq 210$  эв и спектры положительных ионов в переходном слое (Бридж и др., 1965). Спектры положительных ионов на ИМП-1 измерялись также Вулфом и др. (1966 а).

В дальнейшем характеристики потоков малоэнергичных заряженных частиц в переходном слое измерялись неоднократно, в частности, при помощи электростатических анализаторов положительных ионов

на спутниках Ого-1 и ИМП-2 (Вулф и др., 1966 а, б) и электростатических анализаторов электронов и ионов на спутниках Вела-2 (Гослинг и др., 1967).

Полученные в период после запуска спутника ИМП-1 результаты можно кратко суммировать следующим образом. В переходном слое имеются электроны с энергиями  $E > 100$  эв (Сербу, 1965) и в диапазоне  $165 \leq E \leq 210$  эв (Бридж и др., 1965) с потоками  $\sim 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ , отсутствующие в невозмущенном солнечном ветре. Энергетический спектр электронов в переходном слое по данным спутника Вела-2 показан на рис. 15 а (Бэйм и др., 1967). Протонный компонент плазмы солнечного ветра претерпевает за фронтом ударной волны следующие изменения: энергетический спектр значительно расширяется, направленная скорость падает, а концентрация возрастает примерно в два раза, температура возрастает примерно в 5 раз. Кинетическая энергия протонов в переходном слое вдвое меньше, чем в невозмущенном солнечном ветре; по-видимому, потеря ее объясняется нагревом электронов и генерацией гидромагнитных волн в переходном слое (Вулф и др., 1966). Интересно отметить, что сразу же после первых экспериментов на лунных ракетах (Грингауз и др., 1960; Шкловский и др., 1960) образование потоков электронов с энергией  $E > 200$  эв за зоной захваченной радиации объясняли именно передачей энергии протонов солнечного ветра электронам при набегании плазмы солнечного ветра на геомагнитное поле.

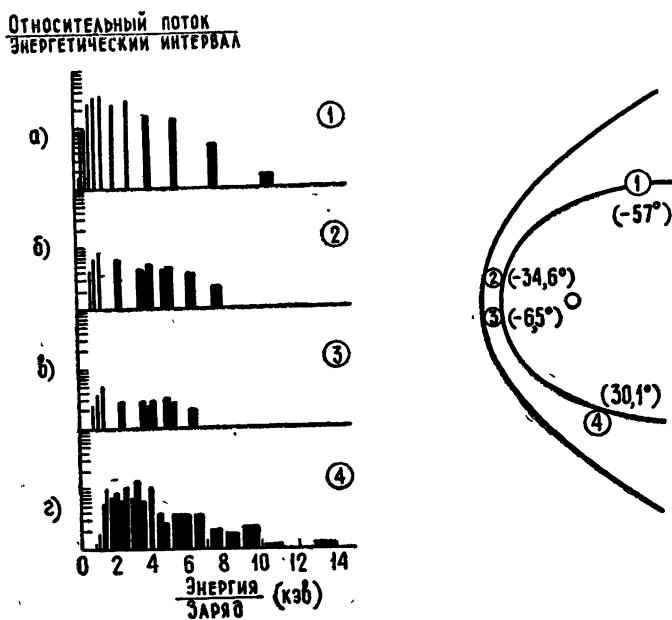


Рис. 15. Энергетические спектры протонов, измеренные в переходной зоне на различных спутниках (Вулф и др., 1966 б):

- а) Вела 2 В, 5 октября 1964, 1903—1916 UT;
- б) ИМП-2, 5 октября 1964, 2029—2224 UT;
- в) ИМП-2, 5 октября 1964, 0654—0917 UT;
- г) Ого-1, 4 октября 1964, 2010—2030 UT.

В правой части рисунка цифры, обведенные кружками, соответствуют положению спутников в переходной зоне во время измерения спектров.

Энергетические спектры протонов, полученные в течение краткого промежутка времени 4—5 октября 1964 г. на спутниках Вела-2В

(Гослинг и др., 1966), ИМП-2 и Ого- (Эго)-1 в различных участках переходного слоя, показаны на рис. 15 (Вулф и др., 1966 б).

Перейдем к ночной части магнитосферы. Измерения, проведенные при помощи кристаллов CdS на спутнике Эксплорер-12, подтвердили существование потоков электронов с энергией 200 эв за границей внешнего радиационного пояса в ночной части магнитосферы. Картина распределения электронов с энергией 200 эв  $\leq E \leq 40$  кэв в экваториальной плоскости магнитосферы в том виде, в каком она рисовалась в 1964 г. с учетом данных Эксплорера-12, приведена на рис. 16 (Van Allen, 1964), на котором между дневной и ночной зонами имеется большой пространственный разрыв.

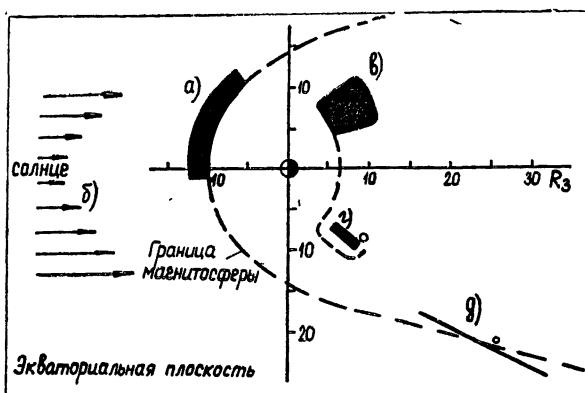


Рис. 16. Распределение потоков электронов с энергией  $200 \text{ эв} \leq E \leq 40 \text{ кэв}$  в экваториальной плоскости (Van Allen, 1964): — — — возможная экстраполяция; — разрывы в наблюдении потоков частиц; ○ ○ — измерения, повернутые в геомагнитную экваториальную плоскость вокруг линии Солнце—Земля;  
 а) Фримен,  $200 \text{ эв} \leq E_e \leq 40 \text{ кэв}, J_0 \sim 10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ ;  
 б) Нейгебауэр и Снейдер,  $E_p \sim 1 \text{ кэв}, J_0 \sim 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ ;  
 в) Фримен,  $200 \text{ эв} \leq E_e \leq 40 \text{ кэв}, J_0 \sim 10^8 - 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ ;  
 г) Грингауз и др.,  $E_p \geq 200 \text{ эв}, J_0 \leq 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ ;  
 д) Бридж и др.,  $E_p \sim 500 \text{ эв}, J_0 \sim 10^7 - 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ .

В конце 1962 г. при помощи ловушек заряженных частиц на космическом аппарате Марс-1 в ночной части магнитосферы были зарегистрированы потоки электронов с энергией  $E > 70$  эв после пересечения границы внешнего радиационного пояса на малых геоцентрических расстояниях ( $2R_3 < R < R_3$ ), но на высоких инвариантных геомагнитных широтах  $\Lambda \sim 65 - 67^\circ$  (Грингауз и др., 1964; Грингауз, 1964). Этот эксперимент подтвердил первоначальное предположение, содержавшееся в гипотезе о «третьем радиационном поясе» (Грингауз и др., 1960), что внутренняя граница потоков мягких электронов располагается вдоль внешней границы радиационного пояса, т. е. по магнитным оболочкам.

Позднее Фритц и Гарнет (1965) сообщили, что на спутнике Инджун-3 наблюдались потоки электронов с энергией 10 кэв за границей внешнего пояса на тех же геомагнитных широтах, что и на Марсе-1. По мнению авторов они наблюдали те же потоки, которые были обнаружены на Луне-2 и Марсе-1.

В 1964 г. на спутнике Электрон-2 потоки электронов с энергиями от 100 эв до 10 кэв регистрировались вне пояса захваченной радиации при помощи сферического электростатического анализатора в южной

части магнитосферы на геомагнитных широтах до  $\sim 60^\circ$  в утренние часы и вблизи полуночи (Вернов и др., 1965; Вернов и др., 1966). Регистрируемые потоки достигали значений  $\sim 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{кэв}^{-1}$  при энергии  $E = 0,2 \text{ кэв}$  и  $\sim 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{кэв}^{-1}$  при  $E \sim 10 \text{ кэв}$ ; было найдено, что протяженность области существования потоков электронов с энергиями  $\sim 1 \text{ кэв}$  больше, чем у электронов с энергией  $\sim 10 \text{ кэв}$ . Была замечена тенденция к смягчению спектра электронов по мере удаления от Земли. Протяженность области и величины потоков в ней сильно менялись с характерными временами порядка суток и положительно коррелировали с геомагнитной активностью.

Некоторые области, в которых на Электроне-2 при помощи ловушки заряженных частиц наблюдались потоки электронов с энергиями  $E > 100 \text{ эв}$  за пределами внешнего радиационного пояса, были показаны на рис. 12.

На рис. 17 приведено распределение потоков малоэнергичных заряженных частиц в околоземном пространстве (с учетом данных наблюдений на различных космических аппаратах), как оно представлялось в 1965 г. (Грингауз и Хохлов, 1965). Даны проекции на плоскость эклиптики (а) и на меридиональную плоскость (б) в солнечно-эксплитической системе координат. В комментариях к этому рисунку отмечалось, что в то время (1965) не имелось доказательства того, что ночная и дневная области существования потоков электронов с энергиями  $E \leq 40 \text{ кэв}$  за пределами зоны захваченной радиации соединены и образуют некую единую зону (см. рис. 17 б), хотя результаты высоколатитудных измерений на Марсе-1 и Электроне-2 (рис. 17 б) давали основания предполагать, что ночная и дневная области соединяются между собою по крайней мере на высоких широтах, составляя единую область сложной конфигурации. С другой стороны, не было также известно, чтобы какой-либо космический аппарат, на котором имелись детекторы таких электронов, пересек границу внешнего пояса и не обнаружил за ней потоков малоэнергичных электронов. Так как внешняя граница зоны захваченной радиации замкнута, то можно было предположить, что зоны существования потоков малоэнергичных электронов, расположенные за ней, также составляют единую область. Это не должно означать, что потоки плазмы в дневной и ночной частях этой области должны иметь общее происхождение и одинаковые свойства.

На основании указанных соображений авторы рис. 17 сочли возможным предположить, что потоки малоэнергичных электронов в меридиональной плоскости расположены в области, отмеченной точками на рис. 17. Заметим, что даже в настоящее время недостаток измерений в высоколатитудной области магнитосферы не дает возможности полностью проверить степень справедливости рис. 17 б. Результаты, полученные на Электроне-2, дали основания Грингаузу и Хохлову (1965) для предварительного вывода о наличии связи между интенсивностью наблюдавшихся потоков мягких электронов и ориентацией оси магнитного диполя Земли относительно направления на Солнце, а именно, максимальные потоки электронов наблюдались на утренних участках орбит спутника, когда южный магнитный полюс максимально наклонен в сторону Солнца, т. е. условия проникновения в магнитосферу солнечной плазмы из переходного слоя через южную нейтральную точку наиболее благоприятны. Этот вывод был подкреплен дальнейшей обработкой указанных результатов Хохловым (1966), который отметил также существование восточно-западной асимметрии в распределении потоков мягких электронов (в утренней части магнитосферы потоки были более интенсивны и чаще наблюдались, чем в вечерней).

К числу важнейших научных результатов полета спутника ИМП-1

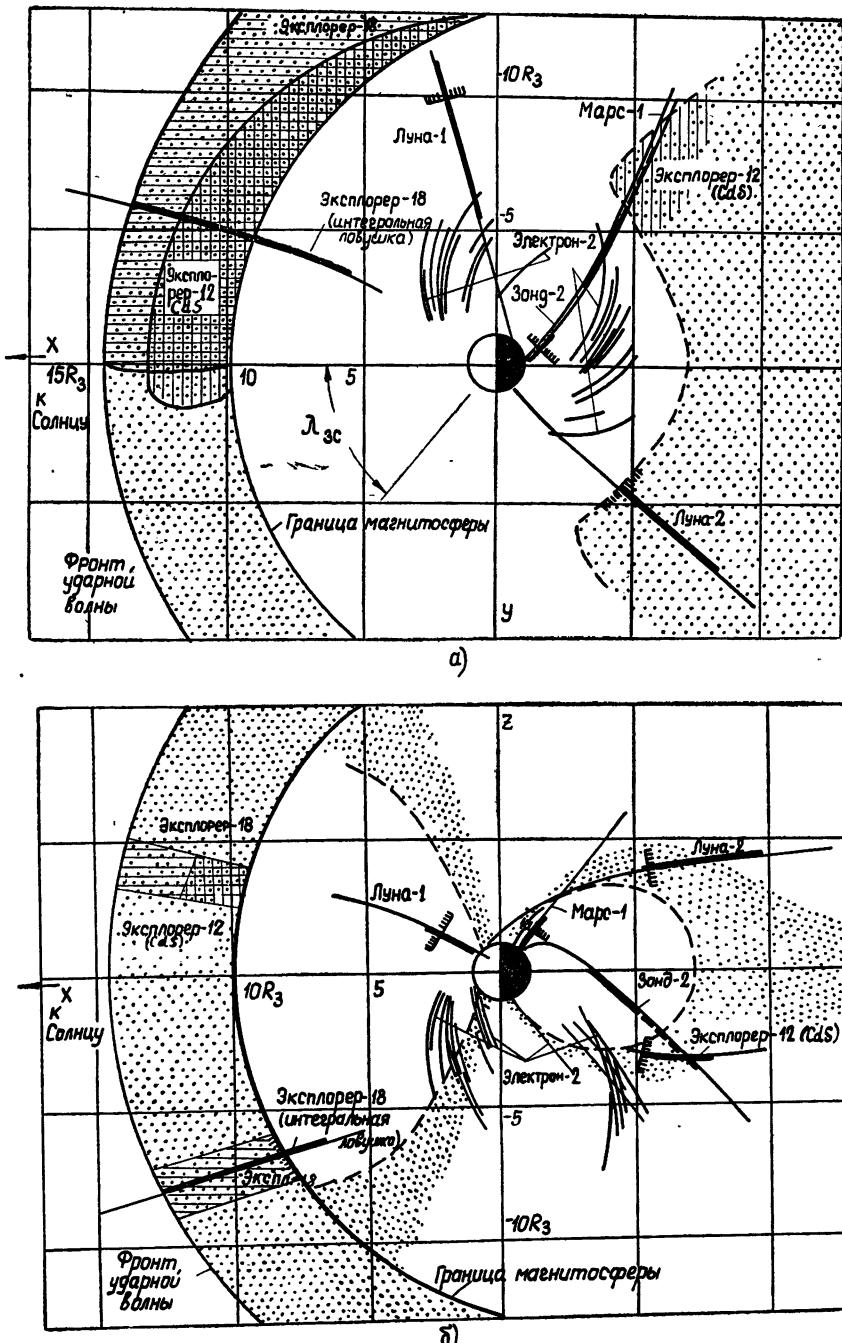


Рис. 17. Распределение потоков малоэнергичных заряженных частиц в околосземном пространстве (Грингауз и Хохлов, 1965):  
 а) — проекция на плоскость эклиптики;  
 б) — проекция на меридиональную плоскость в солнечно-эквиптической системе координат.  
 Участки траекторий космических аппаратов, где были зарегистрированы потоки малоэнергичных заряженных частиц, показаны сплошными и штриховыми линиями; для спутника Электрон-2 показаны только те участки орбит, где наблюдались мягкие электроны (по данным ловушки заряженных частиц). Внешняя граница внешнего радиационного пояса показана тонкой штриховой линией и знаком в форме гребенки. Предполагаемое положение самой внешней зоны заряженных частиц показано точками.

относятся подтверждения того, что магнитосфера сильно вытянута в антисоларном направлении. Об этом также свидетельствовали ранее проведенные магнитные измерения на Эксплорере-10 (Хеппнер и др., 1963) и на Эксплорере-12 (Кэхилл, 1963) и открытие принципиально нового явления — магнитно нейтрального слоя в ночной магнитосфере (Несс и др., 1964; Несс, 1965), см. рис. 1.

Как отметили Эксфорд и др. (1965), для существования нейтрального слоя в хвосте магнитосферы необходимо, чтобы он был заполнен потоками плазмы повышенной интенсивности для того, чтобы сбалансировать давление магнитных полей, расположенных по обе стороны от него и противоположно направленных. Измеренное на спутнике ИМП-1 магнитное поле хвоста (вне нейтрального слоя) составляло  $\sim 17 \gamma$ . В связи с этим Несс (1965) изобразил на одном графике (рис. 18) результаты выполненных различными авторами наблюдений потоков заряженных частиц в ночной магнитосфере, которые могли бы создать давление плазмы, необходимое для существования нейтрального слоя. Область величин потоков и энергий, удовлетворяющая данным магнитным измерениям, заштрихована. Так как результаты наших измерений попали в эту область, то Несс (1965) предположил, что измеренные на Луне-2 потоки электронов связаны с магнитно нейтральным слоем (такое же предположение было высказано Грингаузом и Хохловым, 1965). Впоследствии (1966 г.) при помощи Пионера-7 были проведены одновременные магнитные и плазменные измерения при пересечении магнитным аппаратом ночной магнитосферы на геоцентрических расстояниях до  $\sim 40 R_{\oplus}$ , подтвердившие правильность представлений о квазистатическом магнитосферном хвосте, в котором сумма парциальных магнитного и плазменного давлений постоянна (Лазарус, Сикко и Несс, 1968). Несколько подробнее об этом эксперименте будет сказано ниже.

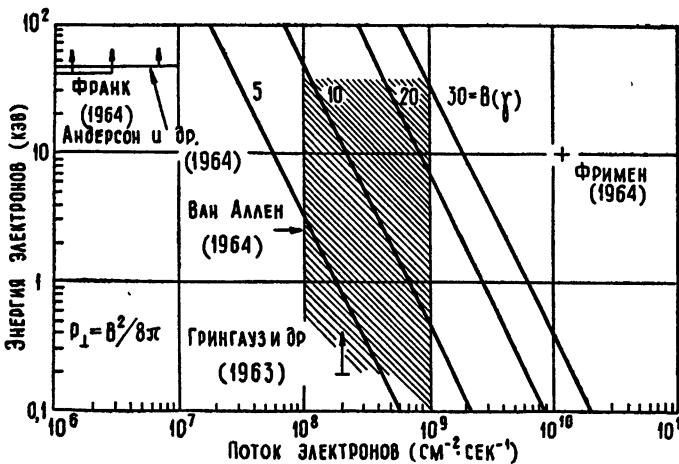


Рис. 18. Предполагаемый баланс давлений между магнитным полем в геомагнитном хвосте (без учета наличия плазмы) и ненамагниченным электронным газом в идеализированной модели нейтрального слоя. На график нанесены результаты наблюдений заряженных частиц, имеющие отношение к интерпретации нейтрального слоя в геомагнитном хвосте.

Начиная с 1964 г., были проведены детальные измерения энергетических спектров электронов с энергиями  $350 \text{ эв} \leq E \leq 20 \text{ кэв}$  в сечениях хвоста магнитосферы на геоцентрических расстояниях  $R \sim 17 R_{\oplus}$  при помощи сферических электростатических анализаторов на спутни-

ках Вела (Бэйм и др., 1967). Образцы полученных спектров приведены на рис. 19 (б, в, г). Помимо электронов впервые в этой области были обнаружены положительные ионы (по-видимому, в основном протоны). Поток их оказался, естественно, гораздо меньше, чем поток электронов; согласно оценкам авторов экспериментов концентрации протонов и электронов примерно равны и достигают  $1 \text{ см}^{-3}$ ; форма протонных энергетических спектров близка к форме электронных. Средние энергии электронов лежат в диапазоне от 200 эв до 12 кэв. Потоки их часто изотропны, однако величина анизотропии достигает 2.

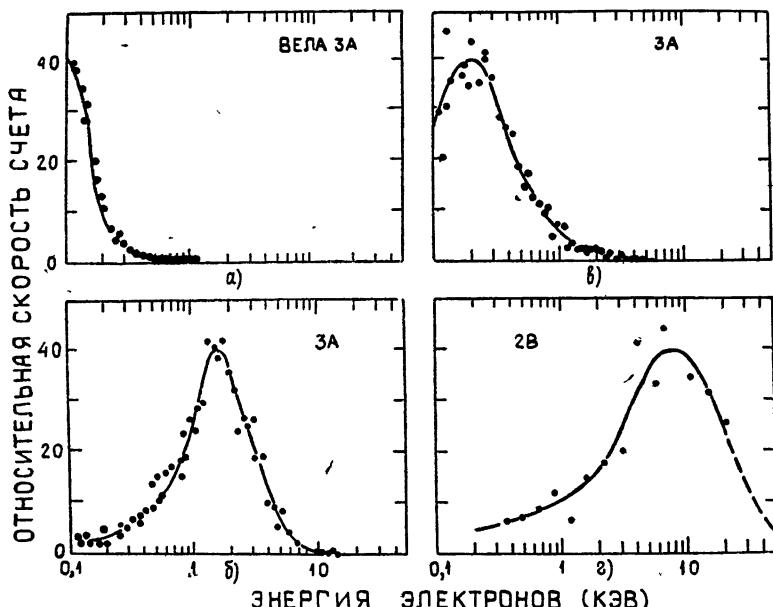


Рис. 19. Энергетические спектры электронов, измеренные на спутнике Вела а) в переходном районе (за фронтом ударной волны) и б, в, г) в плазменном слое хвоста магнитосферы (Бэйм и др., 1967).

Детальные исследования плазмы с энергиями частиц от  $\sim 200$  эв до  $\sim 50$  кэв, часть которых, относящаяся к радиационным поясам, описана в разд. 2, велись также при помощи высокочувствительных цилиндрических электростатических анализаторов на спутнике Ого-3 в хвосте магнитосферы при  $8R_3 < R < 20R_3$  (Франк, 1967); эти исследования хорошо дополнили измерения на спутниках Вела. Сведения о положении области существования потоков плазмы в магнитосферном хвосте по данным электростатических анализаторов на Веле и на Ого-3 можно суммировать следующим образом: магнитно нейтральный слой находится всегда внутри плазменного слоя; последний по толщине существенно превышает первый. На Веле было произвольно принято, что на границе плазменного слоя потоки электронов составляют  $6 \cdot 10^7 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . При таком определении и при  $R \sim 17R_3$  толщина плазменного слоя составляла несколько  $R_3$ . На Ого-3 электронные потоки наблюдались при  $R \sim 19,5R_3$  на расстоянии  $\sim 12R_3$  над нейтральным слоем (для данного измерения посередине между нейтральным слоем и северной границей магнитосферы).

Андерсон (1965) и Франк (1965) сообщили о наблюдениях в хвосте магнитосферы на спутниках спорадически возникающих и исчезающих «островов» электронов с  $E > 45$  кэв. Бэйм и др. (1967) и Франк (1967 а) считают, что эти электроны принадлежат к хвостам энергети-

ческих спектров малоэнергичных электронов плазменного слоя, а их возникновение и исчезновение объясняется быстрым разогревом (возрастанием средней энергии) электронов в плазменном слое и их внезапным охлаждением, т. е. быстрыми изменениями энергетических спектров электронов. Франк (1967 а) отмечает также быстрые пространственные и временные вариации величин потоков электронов в плазменном слое. Плотность энергии вблизи «пиков» электронных потоков не убывает с ростом  $R$  (при  $R > 13R_3$ ) и почти всегда составляет  $10^{-9}$  эрг·см $^{-3}$ , несмотря на то, что средние энергии электронов убывают с увеличением  $R$  (последнее было отмечено Верновым и др. (1966) по данным Электрона-2).

Смещение пиков энергетических спектров с уменьшением  $R$  в сторону больших энергий, сопровождаемое расширением спектров, дает основание предполагать, что процесс ускорения электронов эффективен по крайней мере в области магнитного хвоста от  $\sim 10$  до  $20 R_3$ , и так как пик энергетических спектров сдвигается на расстоянии  $\sim 10 R_3$  на несколько килоэлектронвольт, то это можно приписать существованию в этой области электрического поля  $\sim 5000 v/10 R_3 \approx 100$  мВ·км $^{-1}$  (Франк, 1967 а).

Указанная выше величина плотности энергии электронов в плазменном слое в хвосте магнитосферы свидетельствует о том, что они существенно влияют на магнитное поле при  $|R| > 8R_3$ .

В упоминавшихся выше одновременных измерениях плазмы и магнитного поля в хвосте магнитосферы на Пионере-7 (Лазарус, Сиско и Несс, 1968) регистрировались лишь электроны с энергией  $E \leq 1,6$  кэВ. Как видно из результатов измерений Франка (1967 а), при значениях  $R$ , близких к  $8R_3$ , плазменным детектором на Пионере-7 можно наблюдать лишь наименее энергичную часть существующих в этой области электронов; при этом аккуратное определение давления плазмы затруднительно. Тем не менее результаты одновременных магнитных и плазменных измерений впечатляющи и свидетельствуют в пользу квазистатической модели магнитосферного хвоста, в которой суммарное давление магнитного поля и частиц в хвосте должно быть постоянно и равно суммарному (динамическому, тепловому и магнитному) давлению обтекающей магнитосферу солнечной плазмы, нормальному к граничной поверхности магнитосферы. В пользу такой модели говорят, в частности, одновременные резкие уменьшения магнитного давления и возрастания плазменного давления, наблюдавшиеся, когда Пионер-7 входил в плазменный слой, и обратные изменения при выходе из этого слоя, а также явления при входе в магнитно нейтральный слой (концентрация частиц почти не изменилась, а средняя скорость их существенно возросла).

Бейэм и др. (1967) предположили, что плазменный слой в хвосте магнитосферы начинается у ночной границы области захваченной радиации и что ориентация его вначале совпадает с плоскостью геомагнитного экватора, а вдали от Земли соответствует направлению солнечного ветра. На рис. 1 плазменный слой изображен именно таким образом (Несс, 1967). Измерения других авторов не противоречат этому, а результаты Василюнаса (1968 б), полученные на спутниках Ого-1 и Ого-3, прямо подтверждают это предположение. Эти результаты получены при помощи упоминавшихся выше плазменных детекторов МТИ, позволявших регистрировать наименее энергичную часть электронов плазменного слоя в хвосте магнитосферы ( $100$  эВ  $\leq E \leq 1650$  эВ). На рис. 20 показано распределение потоков малоэнергичных электронов в экваториальной плоскости магнитосферы, построенное по данным спутников Вела и Ого. С внешней стороны границей зоны существования этих потоков является граница магнитосферы

(определенная по появлению значительных потоков положительных ионов); с внутренней стороны она имеет четкую границу, близкую к границе зоны захваченной радиации (а может быть, и совпадающую с ней). Аналогичное распределение в меридиональном сечении магнитосферы, соответствующем позднему вечеру (линия  $CC'$  на рис. 20), показано на рис. 21. Для построения этого распределения на высоких геомагнитных широтах использованы данные, полученные на Марсе-1.

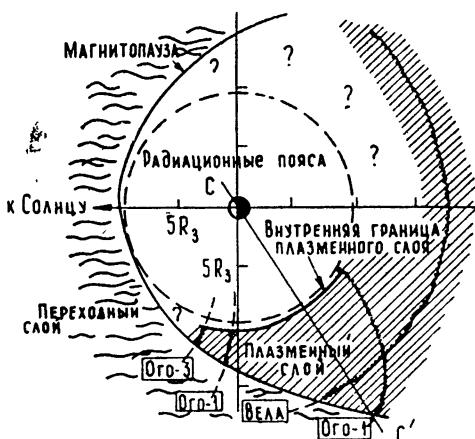


Рис. 20. Положение области повышенной интенсивности малоэнергичных электронов ( $E < 1,7$  кэв) в плоскости геомагнитного экватора (Василюнас, 1968); //--- область интенсивных потоков малоэнергичных электронов.

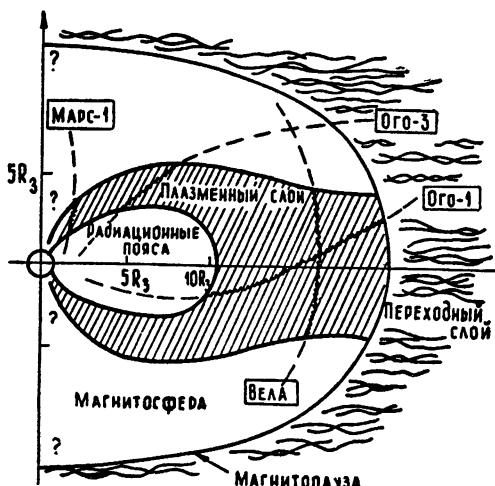
Наблюдения, описанные Василюнасом, показывают, что потоки малоэнергичных заряженных частиц непосредственно за границей внешнего радиационного пояса не являются особенностью только ночной области магнитосферы, но всегда имеются и в ее вечерней области, а возможно, и в дневной. Будет очень интересно познакомиться с данными наблюдений Василюнаса в дневной области магнитосферы. Эти результаты сильно поддерживают представления о самом внешнем поясе заряженных частиц, со всех сторон окружающем радиационные пояса, высказанные нами ранее (Грингауз, 1961 а, 1964; Грингауз и Хохлов, 1965). Несколько неожиданной, однако, является четкость внутренней границы наблюдавшихся потоков электронов, резко обрывающихся вблизи границы внешнего радиационного пояса. Указанное явление не наблюдалось на некоторых других космических аппаратах (см., например, на рис. 12 и 17 данные ловушки заряженных частиц, регистрировавшей электроны с энергией  $E > 100$  эв на Электроне-2). По-видимому, столь четкая граница не наблюдалась и Франком на Ого-3; во всяком случае это не указано в его публикациях (1967 а, б). Возможно, что она является особенностью лишь электронов тех малых энергий ( $E < 1,6$  кэв), распределение которых показано на рис. 19 и 20.

Во время магнитных бурь (типа «бухты») наблюдалось приближение к Земле внутренней границы зоны существования мягких электронов, показанное на рис. 22 (Василюнас, 1968). Автор отметил возможную взаимную связь этого явления с упоминавшимся ранее движением к Земле во время магнитной бури ионных потоков Фрименом и Мэджайром (1967).

В заключение этой части обзора остановимся на плазменных измерениях в отдельных частях хвоста магнитосферы. Существование хвоста магнитосферы на расстояниях  $R < 31 R_{\oplus}$  было доказано при помощи измерений на спутнике ИМП-1 (Несс и др., 1964). С точки зрения характеристик плаэмы, хвост магнитосферы отличается от невозмущенного межпланетного пространства и переходного слоя за

фронтом ударной волны, в частности, резким уменьшением потоков протонов. Использование этого признака на основе данных ловушек заряженных частиц на первом спутнике Луны—космическом аппарате Луна-10, запущенном в марте 1966 г.,—позволило сделать вывод о том, что Луна ежемесячно в течение четырех суток пересекает хвост магнитосферы, т. е. что длина его не менее  $\sim 80 R_3$  (Грингауз и др., 1966). Внутри хвоста наблюдались потоки электронов  $\sim 10^8 \text{ сек}^{-2} \cdot \text{см}^{-1}$  с энергией  $E > 70 \text{ эВ}$  (по-видимому, принадлежащие к плазменному слою хвоста).

Рис. 21. То же самое, что на рис 20, меридиональное сечение по линии  $CC'$  на рис. 20 (Василюнас, 1968); //—— область интенсивных потоков малоэнергичных электронов.



В том же 1966 г. магнитные измерения на спутнике Земли Эксплорер-33 показали, что длина магнитосферного хвоста не менее 510000 км, и, таким образом, подтвердили вывод, сделанный на основе измерений малоэнергичной плазмы на Луне-10 о том, что Луна пересекает магнитный хвост Земли (Несс и др., 1967; Несс, 1967).

Исклучительный интерес представляют плазменные и магнитные измерения, проведенные на Пионере-7 на расстоянии  $\sim 1000 R_3$  от Земли. Пока доступны лишь предварительные сообщения об этих измерениях.

В отличие от плазменных измерений в хвосте магнитосферы на ИМП-1 (Вулф и др., 1966 с) и на Луне-10 (Грингауз и др., 1966) измерения, проведенные при помощи электростатического анализатора во время пересечения Пионером-7 области пространства, окружающей линию Солнце—Земля на указанном расстоянии от Земли, не обнаружили резкого падения величин потоков ионов солнечной плазмы, но показали заметные искажения формы энергетических спектров ионов (Вулф и др., 1967). Авторы этих измерений считают, что либо Пионер-7 оказался в турбулентной зоне, образовавшейся за магнитосферой Земли, либо на столь больших расстояниях солнечный ветер диффундирует внутрь хвоста магнитосферы.

Несс и др. (1967) описали одновременные измерения магнитного поля, которые также показали отличия наблюдавшегося поля от невозмущенного межпланетного, но, по мнению авторов, еще не позволили сделать окончательное заключение о природе этих отличий. Фэйрфилд (1968), сравнивая данные одновременных магнитных измерений, проведенных на Пионере-7 на расстоянии  $\sim 1000 R_3$  и на Эксплорере-33 и Эксплорере-35 в межпланетном пространстве около Земли, пришел к выводу, что Пионер-7 наблюдал качания магнитосферного хвоста.

Нам, однако, кажется, что для окончательного решения этого вопроса необходимы дополнительные сопоставления одновременных плазменных и магнитных измерений, проведенных на Пионере-7.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение малоэнергичной плазмы в различных областях магнитосферы показывает, что ее характеристики (в частности, расположение) меняются при изменениях геомагнитной возмущенности. Это справедливо как в отношении плазмы в периферийной части ионосферы, по-видимому, вращающейся вместе с Землей, так и в отношении плазмы, расположенной над плазмопаузой.

Сейчас ни у кого не вызывает сомнений, что геомагнитная возмущенность отображает изменения некоторой характеристики (а может быть, нескольких характеристик) солнечного ветра, хотя различные авторы имеют разные мнения по этому поводу. В качестве характеристик солнечного ветра, определяющих величину  $K_p$ -индекса, рассматривались величина скорости солнечного ветра (Снайдер и др., 1963), направление межпланетного магнитного поля (Десслер и Уолтерс, 1964), направление вектора скорости плазмы (П. Колман, 1967) и т. д. Независимо от того, кто из упомянутых авторов ближе к истине, совершенно ясно, что положение плазмопаузы и границы зоны захваченной радиации, распределение и характеристики магнитосферной плазмы с энергией  $100 \text{ эВ} < E < 50 \text{ кэВ}$  и вызываемые частицами этой плазмы полярные сияния и магнитные бури — все эти явления в конечном счете связаны с процессами, происходящими в межпланетной среде. Совместное изучение измерений в магнитосфере Земли и вне ее пока привело лишь к некоторым грубым эмпирическим соотношениям, подобным соотношению между скоростью солнечного ветра и  $K_p$ -индексом Снайдера и др. (1963) или между электрическим полем в плоскости вечернего меридиана и скоростью солнечного ветра (Василюнас, 1968 а).

Есть все основания ожидать, что в близком будущем эксперименты позволят выбрать из обилия имеющихся гипотез о связи процессов внутри магнитосферы и вне ее единственную верную либо создать новую теорию, если существующие гипотезы не оправдают себя. Результаты дальнейших измерений малоэнергичной плазмы являются наряду с данными магнитных измерений фундаментом для построения такой теории.

Хотелось бы отметить некоторые важные, но еще не решенные задачи экспериментальных исследований малоэнергичной магнитосферной плазмы, а также связанные с ней проблемы, не отраженные (или недостаточно отраженные) в этом обзоре.

1) Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последние годы в изучении малоэнергичной магнитосферной плазмы как с тепловыми энергиями, так и с энергиями от сотен электронвольт до десятков килоэлектронвольт (особенно при помощи спутников серии Ого), работа по картографированию распределений потоков малоэнергичных заряженных частиц в магнитосфере и по изучению их вариаций еще далека от завершения.

В области геоцентрических расстояний  $R > 2R_3$  при геомагнитных широтах  $\varphi_m > 45^\circ$  до настоящего времени единственными измерениями остаются проведенные на Марсе-1 и спутниках Электрон. Эта область, промежуточная между интенсивно изучаемой зоной магнитосферы с  $\varphi_m < 45^\circ$  и областью, в которой происходят полярные сияния и связанные с ними явления и которая характеризуется высокими геомагнитными широтами, но малыми высотами, безусловно нуждается в дальнейших исследованиях.

2) Как отмечалось в предыдущем разделе обзора, данные, полученные на Электроне-2, свидетельствуют в пользу зависимости наблюдавшихся потоков мягких электронов от угла наклона геомагнитного диполя и подтверждают гипотезу о проникновении солнечной плазмы из переходного слоя в магнитосферу через нейтральные точки магнитопаузы. Для проверки этого были бы очень полезны прямые измерения величин и направлений потоков малоэнергичной плазмы в непосредственной близости от нейтральных точек, для чего необходимы спутники с соответствующими орбитами.

3) Пока неясно, каков источник малоэнергичной плазмы, участвующей в конвективном движении в магнитосфере, — является ли этим источником земная ионосфера или солнечная плазма, проникающая в магнитосферу через открытый магнитный хвост или сквозь магнитопаузу. По-видимому, в первом случае эта плазма должна быть заметно холоднее, чем во втором.

Поэтому весьма важно разработать надежный способ измерения температуры плазмы порядка долей и единиц электронвольт при концентрациях порядка  $10^2 \text{ см}^{-3}$  (внутри периферийной части ионосферы) и порядка единиц  $\text{см}^{-3}$  (над плазмопаузой).

4) В вышеприведенном обзоре не нашлось места для проблемы электрических полей в магнитосфере (хотя о них упоминалось в связи с обнаружением конвекции малоэнергичной плазмы при помощи спутника АТС-1 и эффектом ужесточения энергетических спектров электронов вне радиационных поясов в ночной магнитосфере по мере приближения к границе внешнего пояса (Ого-3, Электрон-2). Действием электрического поля объясняется и движение электронов с  $E \leq 2 \text{ кэВ}$  во время магнитной бури, показанное на рис. 22. Заметим, что специально крупномасштабным электрическим полям в магнитосфере посвящен последний обзор Обаяши и Нишиды (1968).

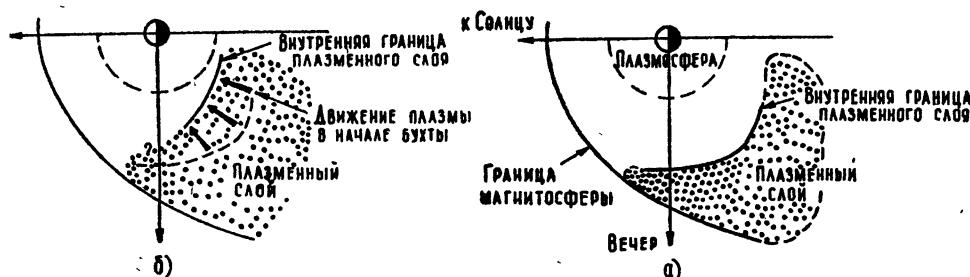


Рис. 22. Схематическое распределение малоэнергичных электронов ( $E < 1,7 \text{ кэВ}$ ) в экваториальной плоскости в вечернем векторе магнитосферы (Василюнас, 1968):  
а) в магнитноспокойный период; б) в магнитновозмущенный период.

Нет сомнений в том, что движение заряженных частиц в магнитосфере (особенно малоэнергичных) в значительной степени определяется электрическими полями. Поэтому прямые измерения электрических полей обязательно должны входить в программу будущих исследований малоэнергичной плазмы.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. В. Безруких и Э. К. Соломатину за помощь при подготовке настоящего обзора.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Anderson, J. Geophys. Res., 70, 4741 (1965).
2. J. J. Angerami, D. L. Carpenter, J. Geophys. Res., 71, 711 (1966).
3. W. I. Axford, C. O. Hines, Canadian J. Physics, 39, № 10, 1397 (1961).
4. W. I. Axford, J. Geophys. Res., 67, 3791 (1962).

5. W. I. Axford, E. E. Petschek, J. L. Siscoe, J. Geophys. Res., **70**, 1231 (1965).
6. W. I. Axford, J. Geophys. Res., **73**, 6855 (1968).
7. P. Bauer, Preprint, The cooling of the Photonosphere. Scientific Report, The University of Michigan, 1967.
8. S. J. Bame, J. R. Asbridge, H. F. Felthauser, E. W. Hones, I. B. Strong, J. Geophys. Res., **72**, 113 (1967).
9. P. M. Banks, F. E. Holzer, Preprint, The Polar wind Report of Institute for Pure and Applied Physical Sciences, JPAPS-67/68-213, 1968.
10. В. В. Безрукых, К. И. Грингауз, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 177.
11. В. В. Безрукых, К. И. Грингауз, Л. С. Мусатов, Э. К. Соломатина, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 418.
12. V. V. Bezrukikh, K. I. Gringauz, M. Z. Khokhlov, L. S. Musatov, R. Ye. Rybchinsky, Space Res., **6**, 862 (1966).
13. В. В. Безрукых, Т. К. Бреус, К. И. Грингауз, Космические исследования, **5**, 798 (1967).
14. В. В. Безрукых, Доклад на Симпозиуме по физике магнитосферы, Вашингтон, 1968.
15. J. H. Binzack, J. Geophys. Res., **72**, 5231 (1967).
16. J. L. Block, J. Geophys. Res., **71**, 885 (1966).
17. L. H. Brace, B. M. Reddy, J. Geophys. Res., **70**, 5783 (1965).
18. H. S. Brice, J. Geophys. Res., **72**, 5193 (1967).
19. H. S. Bridge, A. Egidi, A. Lazarus, E. Lyon, Space Research, **5**, 969 (1965).
20. J. A. Van Allen, Report to the V Assembly IGY, Moscow, 1958.
21. J. A. Van Allen, J. Geophys. Res., **69**, 1011 (1964).
22. V. M. Vasiliunas, J. Geophys. Res., **73**, 2529 (1968 a).
23. V. M. Vasiliunas, J. Geophys. Res., **73**, 2339 (1968 b).
24. С. Н. Вернов, А. Е. Чудаков, Доклад на V Ассамблею МГГ, Москва, 1958.
25. С. Н. Вернов, А. Е. Чудаков, П. В. Бакулов, Е. В. Горчаков, С. Н. Кузнецов, Ю. И. Логачев, А. Г. Николаев, Э. Н. Сосновец, И. А. Рубинштейн, В. Г. Столповский, В. А. Эльтеков, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 394.
26. С. Н. Вернов, В. В. Мельников, И. А. Савенков, Б. И. Савин, Т. И. Первая, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 381.
27. S. N. Vergov, V. V. Melnikov, I. A. Savenko, B. I. Savin, Space Res., **6**, 746 (1966).
28. J. H. Wolfe, R. W. Silva, M. A. Myers, J. Geophys. Res., **71**, 1319 (1966 a).
29. J. H. Wolfe, R. W. Silva, M. A. Myers, Space Res., **6**, 680 (1966 b).
30. J. H. Wolfe, R. W. Silva, D. D. McKibbin, R. H. Mason, J. Geophys. Res., **72**, 4577 (1967).
31. J. S. Geissler, S. A. Bowhill, J. Atmos. Terr. Phys., **27**, 457, 1119 (1965).
32. J. E. C. Gliddon, Aeronomy Report № 12, University of Illinois, 1966.
33. J. T. Gosling, J. R. Asbridge, S. I. Bame, I. B. Strong, Trans. Amer. Geophys. Union, **47**, 141 (1962).
34. J. T. Gosling, J. R. Asbridge, S. I. Bame, I. B. Strong, J. Geophys. Res., **72**, 101 (1967).
35. К. И. Грингауз, В. В. Безрукых, В. Д. Озеров, Р. Е. Рыбчинский, ДАН СССР, **131**, 1301 (1960).
36. К. И. Грингауз, В. Г. Курт, В. И. Мороз, И. С. Шкловский, Астрон. ж., **37**, 716 (1960).
37. K. I. Gringauz, Space Research, **2**, 539 (1961 a).
38. K. I. Gringauz, Space Research, **2**, 574 (1961 b).
39. K. I. Gringauz, S. M. Balandina, T. A. Bordovsky, N. M. Shutte, Space Research, **3**, 432 (1963).
40. K. I. Gringauz, V. V. Bezrukikh, L. S. Musatov, R. Ye. Rybchinsky, Space Research, **4**, 621 (1964).
41. K. I. Gringauz, J. Geophys. Res., **69**, 1007 (1964).
42. К. И. Грингауз, М. З. Хохлов, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 467.
43. К. И. Грингауз, В. В. Безрукых, М. З. Хохлов, Г. Н. Застенкер, А. П. Ремизов, Л. С. Мусатов, Космические исследования, **4**, 857 (1966).
44. K. I. Gringauz, V. V. Bezrukikh, L. S. Musatov, R. Ye. Rybchinsky, E. K. Solomatina, Space Res., **6**, 850 (1966).
45. K. I. Gringauz, Solar-Terrestrial Physics, edited by J. W. King and W. S. Newman, Academic Press, 1967, p. 341.
46. E. L. Hagg, Canadian J. Phys., **45**, 27 (1967).
47. J. P. Наррелл, N. F. Ness, C. S. Scearce, T. L. Skillman, J. Geophys. Res., **68**, 1 (1963).

48. A. J. Dessler, R. D. Juday, Planetary and Space Science, **13**, № 1, 63 (1965).  
 49. A. J. Dessler, G. K. Walters, Plan. Space Science, **12**, 227 (1964).  
 50. A. J. Dessler, F. C. Michel, J. Geophys. Res., **71**, 1421 (1966).  
 51. Ш. Ш. Долгинов, Е. Г. Ерошенко, А. Н. Жузгов, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 342.  
 52. J. W. Dungey, Phys. Rev. Lett., **6**, 47 (1961).  
 53. J. W. Dungey, J. Geophys. Res., **70**, 1735 (1965).  
 54. Дж. В. Данжи, Солнечно-земная физика, перевод с английского под редакцией И. А. Жулина и Г. А. Скуридина, изд. Мир, М., 1968, стр. 153.  
 55. L. D. Kavanagh, J. W. Freeman, A. J. Chen, J. Geophys. Res., **73**, 5511 (1968).  
 56. L. J. Cahill, P. G. Amazeen, J. Geophys. Res., **68**, 1835 (1963).  
 57. L. J. Cahill, Trans. Amer. Geophys. Union, **45**, 231 (1964).  
 58. D. L. Carpenter, Report to XIV General Assembly of IUGS, Tokyo, 1963.  
 59. D. L. Carpenter, R. L. Smith, Reviews of Geophys., **2**, 415 (1964).  
 60. D. L. Carpenter, J. Geophys. Res., **71**, 693 (1966).  
 61. D. L. Carpenter, C. J. Park, M. J. Taylor, Trans. Amer. Geophys. Union, **49**, 254 (1968).  
 62. S. Chapman, V. C. A. Ferrago, Terrestrial Magn. and Atm. Electr., **37**, 147, 421 (1932).  
 63. P. J. Coleman, J. Geophys. Res., **72**, 5518 (1967).  
 64. С. Н. Кузнецов, Э. Н. Сосновец, В. Г. Столповский, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 420.  
 65. A. J. Lazarus, G. L. Siscoe, N. F. Ness, J. Geophys. Res., **73**, 2399 (1968).  
 66. C. E. McIlwain, J. Geophys. Res., **66**, 3681 (1961).  
 67. N. F. Ness, C. S. Scearce, J. B. Speak, J. Geophys. Res., **69**, 3531 (1964).  
 68. N. F. Ness, J. Geophys. Res., **70**, 2989 (1965).  
 69. Н. Ф. Несс, Солнечно-земная физика, перевод с английского под редакцией И. А. Жулина и Г. А. Скуридина, изд. Мир, М., 1968, стр. 115.  
 70. N. F. Ness, K. W. Behannon, S. C. Cantarano, C. S. Scearce, J. Geophys. Res., **72**, 927 (1967).  
 71. N. F. Ness, C. S. Scearce, S. C. Cantarano, J. Geophys. Res., **72**, 3769 (1968).  
 72. A. Nishida, J. Geophys. Res., **71**, 5669 (1966).  
 73. T. Obayashi, The Report on Ionosphere and Space Res. in Japan, **28**, 3, 228 (1964).  
 74. T. Obayashi, A. Nishida, Space Science Rev., **8**, 3 (1968).  
 75. J. O'Brien, J. Geophys. Res., **68**, 989 (1963).  
 76. J. O'Brien, Preprint, Relation of Auroral Radiation to the Magnetopause and to Van Allen Radiation Department of Space Science Rice, University, Houston, Texas, 1966.  
 77. Дж. О'Брайен, Солнечно-земная физика, перевод с английского под редакцией И. А. Жулина и Г. А. Скуридина, изд. Мир, М., 1968, стр. 243.  
 78. I. Pizzella, L. P. Davis, J. W. Williamson, J. Geophys. Res., **71**, 5495 (1966).  
 79. Б. Д. Плетнев, Г. А. Скуридин, В. П. Шалимов, П. Н. Швачунов, Исследования космического пространства, изд. Наука, М., 1965, стр. 285.  
 80. J. G. Rodger, Conjugate Point Phenomena, Preprint of the paper presented to IQSY/COSPAR Symposium, London, 1967.  
 81. М. В. Самохин, Геомагнетизм и аэрономия, **6**, 983 (1966).  
 82. М. В. Самохин, Геомагнетизм и аэрономия, **7**, 411 (1967а).  
 83. М. В. Самохин, Космические исследования, **5**, 378 (1967б).  
 84. М. В. Самохин, Доклад на Симпозиуме по физике магнитосферы, Вашингтон, 1968.  
 85. G. P. Serbu, Space Research, **4**, 564 (1965).  
 86. G. P. Serbu, E. J. R. Maier, J. Geophys. Res., **71**, 3755 (1966).  
 87. G. P. Serbu, E. J. R. Maier, Space Res., **7**, 527 (1967).  
 88. C. W. Snyder, M. Neugebauer, U. R. Rao, J. Geophys. Res., **68**, 6361 (1963).  
 89. R. L. Swisher, L. A. Frank, J. Geophys. Res., **73**, 5665 (1968).  
 90. H. A. Taylor, H. C. Brinton, C. R. Smith, J. Geophys. Res., **70**, 5769 (1965).  
 91. H. A. Taylor, H. C. Brinton, M. W. Pharo, J. Geophys. Res., **73**, 961 (1968).  
 92. J. O. Thomas, A. Y. Sader, J. Geophys. Res., **69**, 4561 (1964).  
 93. D. H. Fairfield, J. Geophys. Res., **73**, 6179 (1968).  
 94. L. A. Frank, J. Geophys. Res., **70**, 1593 (1965).

95. L. A. Frank, J. Geophys. Res., 71, 4631 (1966).
96. L. A. Frank, J. Geophys. Res., 72, 185 (1967 a).
97. L. A. Frank, J. Geophys. Res., 72, 1905 (1967 b).
98. L. A. Frank, On the Distribution of Low Energy Protons and Electrons in the Earth's Magnetosphere, Preprint, Department of Physics and Astronomy, The University of Iowa, 1967 b.
99. L. A. Frank, J. Geophys. Res., 72, 3753 (1967 g).
100. L. A. Frank, R. L. Swisher, J. Geophys. Res., 73, 442 (1968).
101. J. W. Freeman, J. Geophys. Res., 67, 921 (1962).
102. J. W. Freeman, J. A. Van Allen, L. J. Cahill, J. Geophys. Res., 68, 2121 (1963).
103. J. W. Freeman, J. Geophys. Res., 69, 1691 (1964).
104. J. W. Freeman, J. Geophys. Res., 73, 4151 (1968).
105. J. W. Freeman, J. J. Maguire, Preprint, Particle Dynamics at the Synchronous Orbit, Department of Space Science, Rice University, Houston, Texas, 1967.
106. J. W. Freeman, C. S. Warren, J. J. Maguire, J. Geophys. Res., 73, 5719 (1968).
107. J. W. Freeman, D. T. Young, Trans. Amer. Geophys. Union, 49, 227 (1968).
108. L. A. Fritz, D. A. Gurnett, J. Geophys. Res., 70, 2485 (1965).
109. М. З. Хохлов, Тезисы доклада, представленного на Белградский симпозиум по солнечно-земной физике, 1966.
110. И. С. Шкловский, В. И. Мороз, В. Г. Курт, Астрон. ж., 37, 931 (1960).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
7 февраля 1969 г.

УДК 538.56

## К ИЗЛУЧЕНИЮ ЗАРЯДА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ СРЕДЕ

*П. П. Лизогуб*

С помощью метода Фурье и метода возмущений рассматривается излучение заряда в магнитоактивной среде, свойства которой описываются двумя эрмитовыми тензорами с переменными компонентами. Получены выражения для потерь энергии на излучение и спектра излучения заряда при его движении в плазме, помещенной во внешнее пространственно неоднородное периодическое слабое магнитное поле.

Хорошо известно, что при равномерном движении заряда в пространственно неоднородной среде возникает излучение (см., например, [1-3]). Однако пространственную неоднородность можно реализовать не только за счет изменения плотности среды. В конечном итоге здесь оказывается существенным соответствующая неоднородность в величине коэффициента преломления среды. Электронная плазма, помещенная в магнитное поле, является хорошим примером, когда неоднородность коэффициента преломления может создаваться как за счет изменения плотности плазмы, так и из-за пространственной неоднородности внешнего магнитного поля, налагаемого на плазму.

В [4] рассматривалось в приближении геометрической оптики излучение заряженной частицы, равномерно движущейся в неоднородной магнитоактивной среде. Полученные там результаты справедливы, когда свойства среды мало меняются на расстоянии порядка длины волны. Представляет интерес рассмотреть случай, свободный от этого ограничения. При этом, разумеется, неизбежно появляются другие ограничения, определяющие пределы применимости полученных ниже результатов.

Пусть в магнитоактивной среде вдоль оси  $Oz$  некоторой прямоугольной системы координат движется с постоянной скоростью  $v$  частица, обладающая зарядом  $q$ . Свойства среды будем описывать с помощью двух эрмитовых тензоров

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_3 & 0 \\ -i\varepsilon_3 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_3 & 0 \\ -i\mu_3 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

причем будем считать, что все компоненты (кроме  $\varepsilon_2$  и  $\mu_2$ ) тензоров (1) зависят лишь от координаты  $z$ . Для нахождения поля излучения заряженной частицы воспользуемся уравнениями Максвелла, а входящие в них векторы разложим в тройные интегралы Фурье:

$$E = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{\omega, k_{\perp}} \exp(i k_x x + i k_y y - i \omega t) dk_x dk_y d\omega \text{ и т. д.} \quad (2)$$

Материальные уравнения имеют обычный вид:

$$D_{\omega, k \perp} = \hat{\epsilon}(\omega, z) E_{\omega, k \perp}, \quad B_{\omega, k \perp} = \hat{\mu}(\omega, z) H_{\omega, k \perp}. \quad (3)$$

Поле излучения заряда будем описывать с помощью двух скалярных функций  $X$  и  $Y$ , вводимых следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{\omega z} &= X e^{i\omega z/v}, \\ B_{\omega z} &= Y e^{i\omega z/v}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D_{\omega z}$  и  $B_{\omega z}$  — проекции векторов  $D_{\omega, k \perp}$  и  $B_{\omega, k \perp}$  на ось  $Oz$ .

При этом фурье-компоненты векторов  $E$  и  $H$  находятся из соотношений

$$\begin{aligned} E_{\omega z} &= \frac{1}{\epsilon_2} D_{\omega z}, \quad H_{\omega z} = \frac{1}{\mu_2} B_{\omega z}, \\ \lambda^2 E_{\omega \perp} &= \frac{i}{\epsilon_1} \mathbf{k}_\perp \frac{dD_{\omega z}}{dz} - k \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} i \mathbf{k}_\perp B_{\omega z} - \\ &- \frac{i}{\epsilon_1} \mathbf{k}_\perp \frac{q}{2\pi^2 v} e^{i\omega z/v} - k B_{\omega z} [\mathbf{k}_\perp \mathbf{e}_z], \\ \lambda^2 H_{\omega \perp} &= \frac{i}{\mu_1} \mathbf{k}_\perp \frac{dB_{\omega z}}{dz} + k \frac{\mu_3}{\mu_1} i \mathbf{k}_\perp D_{\omega z} - \\ &- \frac{\mu_3}{\mu_1} \mathbf{k}_\perp \frac{q}{2\pi^2 v} e^{i\omega z/v} + k \left( D_{\omega z} + \frac{iq}{2\pi^2 c k} e^{i\omega z/v} \right) [\mathbf{k}_\perp \mathbf{e}_z], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \lambda^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{k}_\perp = \{k_x, k_y\},$$

а квадратные скобки означают векторное произведение.

Функции  $X$  и  $Y$ , как это нетрудно получить из уравнений Максвелла, удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dz^2} + \left[ \epsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \right) + \frac{2\omega i}{v} \right] \frac{dX}{dz} - k \mu_3 \left( \frac{\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_3}{\mu_3} \right) \frac{dY}{dz} + \left[ k^2 \epsilon_1 \mu_1 - \right. \\ \left. - k^2 \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \mu_3^2 + i \frac{\omega}{v} \epsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \right) - \frac{\mu^2}{v^2} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \lambda^2 \right] X - k \left[ \epsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{\omega}{v} \epsilon_3 + i \frac{\omega}{v} \frac{\epsilon_1}{\mu_1} \mu_3 \right] Y = \frac{q}{2\pi^2 v} \left[ \epsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \right) - ik \beta \frac{\epsilon_1}{\mu_1} (\mu_1^2 - \right. \\ \left. - \mu_3^2) + i \frac{\omega}{v} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dz^2} + \left[ \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{2\omega i}{v} \right] \frac{dY}{dz} + k \epsilon_3 \left( \frac{\mu_1}{\epsilon_1} + \frac{\mu_3}{\epsilon_3} \right) \frac{dX}{dz} + \left[ k^2 \epsilon_1 \mu_1 - \right. \\ \left. - k^2 \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \epsilon_3^2 + i \frac{\omega}{v} \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_1} \right) - \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \lambda^2 \right] Y + k \left[ \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{\omega}{v} \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \epsilon_3 \right] X = - \frac{q}{2\pi^2 v} \left[ i \beta \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) - k \mu_3 - k \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \epsilon_3 \right]. \end{aligned}$$

Система (6) является неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Решать ее мы будем методом возмущений, считая возможным выделить постоянный, относительно переменной  $z$ , малый параметр  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) из функций

$$\varepsilon_3, \mu_3, \varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2, \quad 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_1} \right). \quad (7)$$

При этом  $\delta$  может зависеть и от  $\omega$ .

Будем искать  $X$  и  $Y$  в виде разложений

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X_1 + \dots, \\ Y &= Y_0 + Y_1 + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $X_1$  и  $Y_1$  имеют первый порядок малости относительно  $\delta$ ,  $X_2$  и  $Y_2$  — второй порядок малости и т. д. За нулевые приближения  $X_0$ ,  $Y_0$  примем решения системы (6) при  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $\mu_3 = 0$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ . Это соответствует тому, что внешнее магнитное поле, налагаемое на среду, отсутствует. Учитывая, что нас интересуют решения уравнений, обусловленные наличием правых частей, получаем

$$X_0 = - \frac{qki(1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)}{2\pi^2 c \beta^2} \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2(1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2)/v^2}, \quad Y_0 = 0. \quad (9)$$

Остальные приближения  $X_n$ ,  $Y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_n}{dz^2} + \frac{2\omega i}{v} \frac{dX_n}{dz} - \left[ \lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2) \right] X_n &= P_n(z, \omega, \lambda^2), \\ \frac{d^2 Y_n}{dz^2} + \frac{2\omega i}{v} \frac{dY_n}{dz} - \left[ \lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_2 \mu_2) \right] Y_n &= Q_n(z, \omega, \lambda^2), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} P_n &= - \varepsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{dX_{n-1}}{dz} + k\varepsilon_1 \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) \frac{dY_{n-1}}{dz} - \\ &\quad - \left[ i \frac{\omega}{v} \varepsilon_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - k^2 \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \mu_3^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \right] X_{n-1} + k\varepsilon_1 \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right) + i \frac{\omega}{v} \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) \right] Y_{n-1} - \\ &\quad - \left[ \frac{1}{n} \right] \frac{qki}{2\pi^2 c} \left[ (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \mu_3^2 + \frac{\varepsilon_1}{k\beta} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right], \quad (11) \\ Q_n &= - \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_1} \right) \frac{dY_{n-1}}{dz} - k\mu_1 \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right) \frac{dX_{n-1}}{dz} - \\ &\quad - \left[ i \frac{\omega}{v} \mu_1 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_1} \right) + k^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - k^2 \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_3^2 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right] Y_{n-1} - k\mu_1 \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) + i \frac{\omega}{v} \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu_3}{\mu_1} \Big] \Big] X_{n-1} + \left[ \frac{1}{n} \right] \frac{qk}{2\pi^2 v} \mu_1 \left[ \left( \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} + \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) - \frac{i\beta}{k} \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) \right],$$

а  $[1/n]$  означает целую часть числа  $1/n$ .

Подстановка (8) в (4) и использование формул (5) и (2) дают возможность найти поле излучения заряженной частицы, равномерно движущейся в неоднородной среде. Например, для  $E_z = E_{z0} + E_{z1} + \dots$  и  $H_z = H_{z0} + H_{z1} + \dots$  получаем

$$E_{z0} = \frac{qi}{\pi c^2} \int \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_2 \mu_2} \right) e^{i\omega(z-vt)/v} K_0 \left( \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \epsilon_2 \mu_2} r \right) \mu_2 \omega d\omega,$$

$$H_{z0} = 0, \quad (12)$$

$$E_{zn} = 2\pi \int \frac{1}{\epsilon_2} e^{i\omega(z-vt)/v} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) X_n(z, \omega, \eta^2) d\eta d\omega,$$

$$H_{zn} = 2\pi \int \frac{1}{\mu_2} e^{i\omega(z-vt)/v} \int_0^\infty \eta J_0(\eta r) Y_n(z, \omega, \eta^2) d\eta d\omega,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$X_n(z, \omega, \eta^2) = X_n |_{\lambda^2 = \eta^2}, \quad Y_n(z, \omega, \eta^2) = Y_n |_{\lambda^2 = \eta^2},$$

а интегрирование в (12) по  $\omega$  производится в бесконечных пределах, если  $\delta$  не зависит от  $\omega$ , и по области  $0 < \delta(\omega) < 1$ , если  $\delta = \delta(\omega)$ .

Зная поле излучения, можно найти потери энергии на излучение заряженной частицы, равномерно движущейся в неоднородной магнитоактивной среде.

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим потери энергии на излучение и спектр излучения заряда, равномерно движущегося в однородной электронной бесстолкновительной плазме, помещенной в слабое периодическое по переменной  $z$  внешнее магнитное поле

$$\mathbf{H}^{(0)} = \{ 0, 0, H_0 \cos(k_0 z) \}, \quad (13)$$

где  $k_0$  — период пространственной неоднородности поля. Будем называть магнитное поле слабым, если выполняется соотношение

$$\omega \gg \omega_H = |e| H_0 / mc. \quad (14)$$

Заметим, что  $\text{rot } \mathbf{H}^{(0)} = 0$ , и в уравнениях Максвелла не нужно учитывать ток, обусловленный пространственной неоднородностью внешнего магнитного поля. Именно для таких внешних магнитных полей, налагаемых на магнитоактивную среду, и справедливы результаты данной работы.

Постоянные среды в случае (13) и (14) с точностью до членов  $(\omega_H/\omega)^2$  можно записать в следующем виде (см. [5]; замена  $H_0$  на  $H_0 \cos(k_0 z)$  в (10.8) приводит к замене  $\omega_H$  на  $\omega_H \cos(k_0 z)$  в (10.12)):

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_3 = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega^3} \cos(k_0 z), \quad (15)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 0.$$

За малый параметр выбираем  $\omega_H/\omega$ . Тогда  $\delta = \delta(\omega) = \omega_H/\omega \ll 1$ .

Для поля заряда в нулевом приближении отличными от нуля будут компоненты  $E_{z0}$ ,  $E_{r0}$  и  $H_{\varphi 0}$ . Это известные выражения (см., например, формулы (1.38) в [6] при  $\mu=1$ ). Так как в плазме  $\epsilon_2 < 1$ , то излучение Вавилова—Черенкова в нулевом приближении не может иметь места.

Перейдем к первому приближению. Учитывая (15), получим решения уравнений (10) при  $n = 1$ , обусловленные наличием правых частей, а подставив эти решения в (12) при  $n = 1$ , найдем, что

$$\begin{aligned} E_{z1} = 0, \quad H_{z1} = \frac{q\omega_0^2 \omega_H}{2\pi c k_0} \int \frac{k_1^2}{\omega^2 \epsilon_2} \left[ \frac{1}{2\omega + k_0 v} \exp(i\Phi_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\omega - k_0 v} \exp(i\Phi_2) \right] K_0(k_1 r) d\omega - \frac{q\omega_0^2 \omega_H}{2\pi c k_0} \int \frac{k_2^2 \exp(i\Phi_1) K_0(k_2 r)}{\omega^2 \epsilon_2 (2\omega + k_0 v)} d\omega - \\ - \frac{q\omega_0^2 \omega_H}{2\pi c k_0} \int \frac{k_r^2}{\omega^2 \epsilon_2 (2\omega - k_0 v)} \exp(i\Phi_2) K_0(ik_r r) d\omega, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2 (1 - \epsilon_2 \beta^2)}{v^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2 (1 - \epsilon_2 \beta^2) + k_0 v (2\omega + k_0 v)}{v^2},$$

$$k_r^2 = \frac{k_0 v (2\omega - k_0 v) - \omega^2 (1 - \epsilon_2 \beta^2)}{v^2}, \quad \Phi_{1,2} = \frac{z}{v} (\omega \pm k_0 v) - \omega t.$$

Кроме  $H_{z1}$  в первом приближении отличными от нуля будут компоненты  $E_{\varphi 1}$  и  $H_{r1}$ . В выражения для них входит функция  $K_1$ .

Из формулы (16) видно, что в первом приближении излучение заряда полностью обусловлено наличием внешнего неоднородного магнитного поля, налагаемого на плазму.

Итак, применение метода возмущений позволяет сделать вывод, что поле излучения заряда, равномерно движущегося в плазме с компонентами тензора (15), меняющимися в пространстве, совпадает с полем в однородной плазме, диэлектрическая проницаемость которой равна  $\epsilon_2$  и в которой наряду с зарядом появляется дополнительный источник излучения, обусловленный наличием внешнего магнитного поля. Аналогичные выводы получены в [7] для сред с диэлектрической проницаемостью, меняющейся во времени и пространстве по закону бегущей волны.

Используя теорему Пойнтинга, определим количество энергии, излучаемое зарядом на единицу пути через цилиндрическую поверхность радиуса  $b$ , ось которой совпадает с траекторией частицы. Устремив радиус цилиндра  $b$  к бесконечности и воспользовавшись асимптотическими формулами для функций  $K_0$  и  $K_1$ , получим потери энергии заряда на излучение, уходящее в бесконечность (см. [8]):

$$-\frac{dW_1}{dz} = \frac{q\omega_0^4 \omega_H^2}{4c^2 k_0^2} \int \frac{1}{\omega \epsilon_2 (2\omega - k_0 v)^2} \left[ 1 - \frac{1}{\epsilon_2 \beta^2} \left( 1 - \frac{k_0 v}{\omega} \right)^2 \right] d\omega, \quad (17)$$

причем в (17) интегрирование распространяется на ту область частот, для которой

$$0 < \frac{\omega_H}{\omega} \ll 1, \quad 1 - \frac{1}{\epsilon_2 \beta^2} \left( 1 - \frac{k_0 v}{\omega} \right)^2 = \sin^2 \theta > 0, \quad (18)$$

где  $\theta$  — угол между волновым вектором и осью  $Oz$ .

Из (18), в частности, следует, что спектр излучения определяется формулой

$$\omega = \frac{k_0 v}{1 - \beta V \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta}, \quad (19)$$

которая представляет собой допплеровский спектр движущегося осциллятора. Условие (19) есть просто условие резонанса между полем заряда и собственными нормальными колебаниями среды, поэтому оно совпадает с соответствующими формулами в [1, 2, 4, 7] при  $n = 1$ .

В заключение автор благодарит К. А. Барсукова за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тер-Микаэлян, ДАН СССР, 134, 318 (1960).
2. М. Л. Тер-Микаэлян, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ., 14, 103 (1961).
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 5, 901 (1962).
4. К. А. Барсуков, ЖТФ, 34, 725 (1964).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957).
7. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 291 (1964).
8. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР, 14, 3 (1937).

Московский государственный педагогический  
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
7 октября 1968 г.

#### TO THE RADIATION FROM A CHARGE MOVING UNIFORMLY IN INHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE MEDIUM

*P. P. Lizogub*

The radiation from a charge moving in a magnetoactive medium the properties of which are described by two ermit tensors with variable components is considered by means of Fourier and the perturbation methods. The expressions are derived for the radiation energy losses and the spectrum of radiation from a charge moving in a plasma placed in the external spatially inhomogeneous periodic weak magnetic field.

УДК 671.372.826

## ПОГЛОЩЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ ВСЛЕДСТВИЕ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА В ПЕРЕХОДНОМ СЛОЕ

*B. V. Демченко, B. V. Долгополов, K. N. Степанов*

Исследуется затухание поверхностных волн, распространяющихся в однородном плазменном цилиндре, обусловленное плазменным резонансом в узком переходном слое между однородной плазмой и вакуумом. Получены дисперсионные уравнения с учетом затухания в переходном слое. Показано, что коэффициент затухания, обусловленного плазменным резонансом, равен по порядку величины аксиальному волновому числу, умноженному на отношение толщины переходного слоя к радиусу плазменного цилиндра, либо к длине волны, если длина волны значительно меньше радиуса плазменного цилиндра. Поэтому в неоднородном по радиусу плазменном цилиндре, когда толщина переходного слоя порядка радиуса цилиндра, коэффициент затухания порядка аксиального волнового числа, т. е. распространение волн невозможно вследствие сильного затухания. Исключение представляет случай аксиально-симметричных колебаний с длиной волны, значительно большей радиуса плазменного цилиндра.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в однородном плазменном цилиндре могут распространяться медленные поверхностные волны, если частота волны меньше ленгмюровской частоты плазмы. Поэтому при наличии переходного слоя между однородной плазмой и вакуумом, в котором плотность падает до нуля, всегда найдется точка, в которой ленгмюровская частота равна частоте волны. Вблизи этой точки резко увеличивается поглощение энергии волны плазмой. Затухание аксиально-симметричных длинноволновых поверхностных волн (длина волны значительно больше радиуса плазмы) в неоднородном плазменном цилиндре вследствие плазменного резонанса рассматривалось в работе [1].

В настоящей работе исследуется затухание поверхностных волн, распространяющихся в однородном плазменном цилиндре, обусловленное плазменным резонансом в узком переходном слое между однородной плазмой и вакуумом. Получены дисперсионные уравнения с учетом затухания в переходном слое. Коэффициент затухания поверхностных волн, обусловленного столкновениями электронов в области однородной плазмы, пропорционален частоте столкновений. Коэффициент затухания поверхностных волн, связанный с плазменным резонансом в переходном слое, равен по порядку величины аксиальному волновому числу, умноженному на отношение толщины переходного слоя к радиусу плазменного цилиндра, либо к длине волны (если длина волны меньше радиуса плазменного цилиндра). Поэтому в неоднородном плазменном цилиндре (толщина переходного слоя порядка радиуса цилиндра) коэффициент затухания порядка аксиального волнового числа, т. е. распространение волн невозможно из-за сильного затухания. Исключение представляет случай аксиально-симметричных колебаний с длиной волны, значительно большей радиуса плазменного цилиндра.

Будем рассматривать электромагнитные колебания в однородном вдоль оси плазменном цилиндре. При значениях  $r$  (используется цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ ), меньших  $a$ , плотность плазмы постоянна. При изменении  $r$  от  $a$  до  $b$  плотность плазмы падает до нуля. Толщина переходного слоя мала по сравнению с радиусом плазмы:

$$d = b - a \ll a. \quad (1)$$

Зависимость электромагнитного поля волны от пространственных координат  $z$  и  $\varphi$  и времени  $t$  определяется соотношением

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}. \quad (2)$$

Предполагается, что частота волны  $\omega$  значительно превосходит эффективную частоту столкновений электронов с ионами и нейтральными частицами плазмы  $\nu$ , так что диэлектрическая проницаемость плазмы равна

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\omega^2} + i \frac{\nu(r) \omega_p^2(r)}{\omega^3}, \quad (3)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0(r)/m}$  — ленгмюровская частота плазмы,  $n_0(r)$  — плотность электронов.

Мы будем рассматривать волны, фазовая скорость которых значительно больше тепловой скорости электронов, так что пространственной дисперсией можно пренебречь всюду за исключением (в случае редких столкновений) резонансного слоя.

### 1. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вначале рассмотрим более простой случай потенциальных колебаний, которые можно выделить в случае малых фазовых скоростей ( $\omega/k \ll c$ ). Потенциал электрического поля волны  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \epsilon r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (1.1)$$

В области однородной плазмы ( $r < a$ ) решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\psi = I_m(kr). \quad (1.2)$$

В вакууме ( $r > b$ ) будем иметь

$$\psi = CK_m(kr), \quad (1.3)$$

где  $C$  — постоянная.

Учитывая, что при  $a < r < b$  плотность плазмы и, следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  резко изменяются с изменением  $r$ ,

$$\left| \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right| \sim \frac{1}{b-a} |\epsilon| \gg \left| k + \frac{m}{a} \right| |\epsilon|, \quad (1.4)$$

при анализе переходного слоя ( $a < r < b$ ) можно пренебречь в уравнении (1.1) слагаемым  $(k^2 + m^2/a^2)\psi$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0.$$

Отсюда находим выражение для  $\psi$  в переходном слое:

$$\psi = A \int_a^r \frac{dr}{\epsilon} + B, \quad (1.5)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования.

Из условия непрерывности величин  $\psi$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ , определяемых формулами (1.2) — (1.5), в точках  $r = a$  и  $r = b$  исключаем постоянные  $A, B$  и  $C$  и находим дисперсионное уравнение

$$\epsilon_0 - \frac{I_m(ka)}{I'_m(ka)} \frac{K'_m(kb)}{K_m(kb)} - \frac{k\epsilon_0 K'_m(kb)}{K_m(kb)} \int_a^b \frac{dr}{\epsilon} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость плазмы в области однородности ( $r < a$ ),  $I'_m(x)$  и  $K'_m(x)$  — производные от функций Бесселя и Макдональда по аргументам этих функций. В силу неравенства (1), последнее слагаемое в уравнении (1.6) значительно меньше первых двух, однако опускать его мы не будем, поскольку оно ответственно за исследуемое поглощение энергии волны в переходном слое.

Так как  $\operatorname{Re} \epsilon_0 < 0$ , а при  $r > b$   $\epsilon = 1$ , то в некоторой точке  $r = r_c$  переходного слоя ( $a < r_0 < b$ ) реальная часть  $\epsilon$  обращается в нуль. Поэтому вблизи  $r_0$   $\epsilon$  можно представить в виде

$$\epsilon = \frac{1}{h} (r - r_0) + i\delta, \quad (1.7)$$

где

$$\frac{1}{h} \equiv \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right|_{r=r_0} > 0, \quad \delta \equiv \operatorname{Im} \epsilon = \frac{\omega(r_0)}{\omega}.$$

Очевидно, что величина  $h$  порядка толщины переходного слоя  $d$ . Принимая во внимание выражение (1.7), получим, что

$$\operatorname{Im} \int_a^b \frac{dr}{\epsilon} = -\pi h. \quad (1.8)$$

Действительной частью последнего слагаемого в уравнении (1.6) мы пренебрегаем, поскольку она дает лишь малую добавку порядка  $h/a$  к величине  $k$ . Окончательно дисперсионное уравнение (1.6) запишем в виде

$$\epsilon_0 + \eta_m(ka) + i\pi kh \epsilon_0 \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} = 0,$$

где

$$\eta_m(ka) \equiv -\frac{I_m(ka)}{I'_m(ka)} \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)}.$$

Учитывая, что  $\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , где  $\omega_p$  — ленгмюровская частота электронов, из полученного дисперсионного уравнения найдем связь между частотой волны и аксиальным волновым числом:

$$\omega(k) = \frac{\omega_p}{[1 + \eta_m(ka)]^{1/2}}, \quad (1.9)$$

а также коэффициент затухания  $\kappa = \text{Im } k$  волны, обусловленный поглощением энергии волны в переходном слое,

$$\frac{\kappa(k)}{k} = \pi kh \frac{I_m(ka) I'_m(ka) K_m'^2(ka)}{I'_m(ka) K_m'(ka) + \left(1 + \frac{m^2}{k^2 a^2}\right) I_m(ka) K_m(ka)}. \quad (1.10)$$

В предельных случаях  $ka \ll m$  или  $ka \gg m$  получаем  $\eta_m \approx 1$  и

$$\omega(k) = \omega_p / \sqrt{2}.$$

Графики функции  $\omega(k)$ , иллюстрирующие поведение собственных частот в зависимости от волнового числа, показаны на рис. 1. Частота аксиально-симметричной волны монотонно возрастает при увеличении волнового числа. Частоты несимметричных волн при малых  $ka$  убывают с увеличением  $k$  (область аномальной дисперсии), а при  $k \rightarrow \infty$  — возрастают, приближаясь к  $\omega_p / \sqrt{2}$  (область нормальной дисперсии).

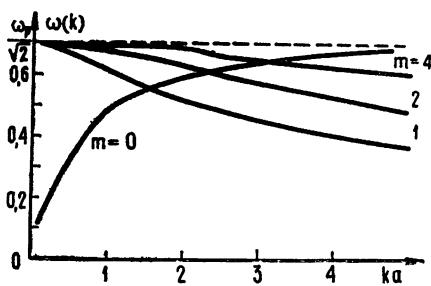


Рис. 1.

Из выражения (1.10) для  $\kappa/k$  получаем

$$\frac{\kappa}{k} = -\frac{\pi}{2} \frac{m^2(m^2-1)}{k^2 a^2} \frac{h}{a} \quad (ka \ll m, m \neq 0, \pm 1),$$

$$\frac{\kappa}{k} = -\frac{\pi h}{ka^2 \xi} \quad (ka \ll 1, m = \pm 1), \quad (1.11)$$

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{\pi h}{a \xi} \quad (ka \ll 1, m = 0),$$

где

$$\xi = -2 \ln \frac{ka}{2} - 2C - 1,$$

$C = 0,577\dots$  — постоянная Эйлера. Если  $ka \gg m$ , то

$$\frac{\kappa}{k} = \pi k^2 a h.$$

В области аномальной дисперсии коэффициенты затухания (1.11) меньше нуля, т. е. поверхностные волны затухают в этой области в направлении групповой скорости.

При наличии идеально проводящего кожуха, окружающего плазменный цилиндр, дисперсионное уравнение, описывающее распространение потенциальных колебаний без учета затухания, будет следующим:

$$\epsilon_0 + \eta_m = 0,$$

где

$$\eta_m = -\frac{I_m(ka) [I_m(kR) K'_m(ka) - I'_m(ka) K_m(kR)]}{I'_m(ka) [I_m(kR) K_m(ka) - I_m(ka) K_m(kR)]},$$

$R$  — радиус кожуха. Из последнего уравнения следует, что  $\omega = \frac{\omega_p}{(1+\eta_m)^{1/2}}$ . В частности, при  $ka \ll 1$ ,  $kR \gtrsim 1$ ,  $\eta_m \approx 1$  и  $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ .

## 2. НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В общем случае непотенциальных колебаний составляющие электрического поля волны удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_r + i \frac{m}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) + ik \frac{\partial E_z}{\partial r} &= 0, \\ i m \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{E_r}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] + \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_\varphi - k \frac{m}{r} E_z &= 0, \quad (2.1) \\ i \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) - k \frac{m}{r} E_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_z &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя во второе и третье уравнения системы (2.1)  $E_r$ , выраженное через  $E_\varphi$  и  $E_z$  из первого уравнения системы (2.1), получим систему уравнений, связывающую азимутальную и аксиальную составляющие электрического поля:

$$\begin{aligned} m^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{x^2 r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] + km \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{x^2 r} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] + \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_\varphi - \frac{km}{r} E_z &= 0, \quad (2.2) \\ \frac{km}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{x^2 r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] + \frac{k^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{x^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - \frac{km}{r} E_\varphi + \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E_z &= 0, \end{aligned}$$

где

$$x^2 \equiv \frac{m^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon.$$

При  $a < r < b$  в уравнениях (2.2) можно пренебречь в силу неравенства (1.4) слагаемыми, не содержащими производных по  $r$ .

В результате интегрирования уравнений системы (2.2) получим следующие выражения для составляющих  $E_z$ ,  $E_\varphi$  и их производных в переходном слое:

$$E_\varphi = \frac{m^2 c^2 C_1}{r \omega^2} \int_a^r \frac{dr}{r \epsilon} + \frac{kmc^2 C_2}{r \omega^2} \int_a^r \frac{dr}{r \epsilon} + \frac{C_3}{r}, \quad (2.3)$$

$$E_z = \frac{kmc^2 C_1}{\omega^2} \int_a^r \frac{dr}{r \epsilon} + \frac{k^2 c^2 C_2}{\omega^2} \int_a^r \frac{dr}{r \epsilon} + C_4;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = \left( \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2 \epsilon} - 1 \right) C_1 r + \frac{kmc^2}{\omega^2 r \epsilon} C_2, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2 \epsilon} - 1 \right) C_2 + \frac{kmc^2}{\omega^2 r \epsilon} C_1,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования. В малых слагаемых, пропорциональных толщине переходного слоя, мы пренебрегаем членами, которые заведомо не дают вклада в затухание волн.

В области однородной среды удобно ввести в рассмотрение векторы

$$\mathbf{u}_+ = \mathbf{H} + \sqrt{-\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{u}_- = \mathbf{H} - \sqrt{-\epsilon} \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

для которых из уравнений Максвелла получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_\pm = \pm i \frac{\omega}{c} \nabla \sqrt{-\epsilon} \mathbf{u}_\pm. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) можно найти связь между составляющими векторов  $\mathbf{u}_\pm$  и их производными:

$$\begin{aligned} u_{r\pm} &= \pm i \frac{\omega}{k c} \sqrt{-\epsilon} u_{\varphi\pm} - \frac{i}{k} \frac{\partial u_{z\pm}}{\partial r}, \\ u_{\varphi\pm} &= \frac{n^2}{k(n^2 - \epsilon)} \left( \pm i \frac{\sqrt{-\epsilon}}{n} \frac{\partial u_{z\pm}}{\partial r} + \frac{m}{r} u_{z\pm} \right), \\ \frac{\partial^2 u_{z\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z\pm}}{\partial r} - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon + \frac{m^2}{r^2} \right) u_{z\pm} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $n \equiv kc/\omega$ .

Решение последнего уравнения системы (2.7) можно представить в виде

$$u_{z\pm} = A_\pm I_m(k_r r) + B_\pm K_m(k_r r), \quad (2.8)$$

где  $k_r^2 \equiv k^2 - \omega^2 \epsilon / c^2$ ;  $A_\pm, B_\pm$  — постоянные интегрирования.

Используя соотношения (2.5), (2.7) и (2.8), найдем составляющие электрического поля волны в области однородной среды:

$$E_z = \frac{1}{2 \sqrt{-\epsilon}} [(A_+ - A_-) I_m(k_r r) + (B_+ - B_-) K_m(k_r r)], \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{k}{2 k_r \sqrt{-\epsilon}} \left[ i \frac{\sqrt{-\epsilon}}{n} I'_m(k_r r) (A_+ + A_-) + \right. \\ &+ \frac{m}{k_r r} I_m(k_r r) (A_+ - A_-) + i \frac{\sqrt{-\epsilon}}{n} K'_m(k_r r) (B_+ + B_-) + \\ &\left. + \frac{m}{k_r r} K_m(k_r r) (B_+ - B_-) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В области однородной плазмы  $k_r^2 = k^2 - \omega^2 \epsilon_0 / c^2 = k_1^2$ ,  $B_+ = B_- = 0$ . Следовательно, для составляющих поля  $E_\varphi, E_z$  и их производных при  $r < a$  из выражений (2.9) и (2.10) получим

$$E_z = \frac{1}{2 \sqrt{-\epsilon_0}} A_1 I_m(k_1 r), \quad (2.11)$$

$$E_\varphi = \frac{k}{2 k_1 \sqrt{-\epsilon_0}} \left\{ i \frac{\sqrt{-\epsilon_0}}{2 k_1} [I_{m+1}(k_1 r) + I_{m-1}(k_1 r)] A_2 + \frac{m}{k_1 r} I_m(k_1 r) A_1 \right\};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{k_1}{4\sqrt{1-\epsilon_0}} A_1 [I_{m+1}(k_1 r) + I_{m-1}(k_1 r)],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = \frac{k}{2k_1 \sqrt{1-\epsilon_0}} \left\{ i \frac{\sqrt{1-\epsilon_0}}{n} \left( k_1 r + \frac{m^2}{k_1 r} \right) I_m(k_1 r) A_2 + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} [I_{m+1}(k_1 r) + I_{m-1}(k_1 r)] A_1 \right\}, \quad (2.12)$$

где

$$A_1 \equiv A_+ - A_-, \quad A_2 \equiv A_+ + A_-.$$

В вакууме ( $\epsilon = 1$ )  $k_r^2 = k^2 - \omega^2/c^2 = k_0^2$ ,  $A_+ = A_- = 0$ . Поэтому для составляющих поля  $E_\varphi$ ,  $E_z$  и их производных при  $r > b$  будем иметь

$$E_z = -\frac{i}{2} B_1 K_m(k_0 r), \quad (2.13)$$

$$E_\varphi = -\frac{i}{2} \frac{k}{k_0} \left\{ \frac{1}{2n} [K_{m+1}(k_0 r) + K_{m-1}(k_0 r)] B_2 + \frac{m}{k_0 r} K_m(k_0 r) B_1 \right\};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{i}{4} k_0 B_1 [K_{m+1}(k_0 r) + K_{m-1}(k_0 r)],$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = \frac{i}{2} \frac{k}{k_0} \left\{ \frac{1}{n} \left( k_0 r + \frac{m^2}{k_0 r} \right) K_m(k_0 r) B_2 + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} [K_{m+1}(k_0 r) + K_{m-1}(k_0 r)] B_1 \right\}, \quad (2.14)$$

где

$$B_1 \equiv B_+ - B_-, \quad B_2 \equiv B_+ + B_-.$$

Приравнивая при  $r = a$  выражения для составляющих электрического поля (2.11) и их производных (2.12) выражениям (2.3) и (2.4) соответственно, а при  $r = b$  — выражения (2.3) и (2.4) выражениям (2.13) и (2.14), получим систему из восьми линейных однородных уравнений относительно восьми постоянных интегрирования. Из условия разрешимости этой системы находим дисперсионное уравнение, описывающее распространение электромагнитных колебаний в плазменном цилиндре. Учитывая соотношения (1.7) и (1.8), дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$D \equiv D_0(\omega, k) - i\pi k_0 \epsilon_0 h D_1(\omega, k) = 0, \quad (2.15)$$

где

$$D_0(\omega, k) = m^2 k^2 (1 - \epsilon_0) I_m K_m^2 \times \\ \times \left[ \frac{k_0}{k_1} (k_0 I_m K'_m - k_1 \epsilon_0 I'_m K_m) - (k_1 I_m K'_m - k_0 \epsilon_0 K_m I'_m) \right] + \\ + k_1 k_0^2 a^2 K'_m (k_1 I_m K'_m - k_0 \epsilon_0 I'_m K_m) (k_0 K_m I'_m - k_1 I_m K'_m),$$

$$D_1(\omega, k) = K'_m \left\{ m^2 k^2 \frac{k_0}{k_1} K_m I_m [k_1 (1 - \epsilon_0) K_m I'_m + k_0 K'_m I_m - k_1 \epsilon_0 K_m K'_m I'_m] - \right. \\ \left. - m^2 k_0^2 I_m K_m (k_1 I_m K'_m - k_0 \epsilon_0 K_m I'_m) + \right\}$$

$$\left. + \frac{k^2}{k_0} I'_m [m^2 k^2 (1 - \epsilon_0) I_m K_m^2 + k_1 I_m K'_m - k_0 \epsilon_0 I'_m K_m] \right\},$$

где

$$I_m \equiv I_m(k_1 a), \quad K_m \equiv K_m(k_0 b).$$

В нулевом приближении ( $h = 0$ ) уравнение  $D_0(\omega, k) = 0$  определяет аксиальное волновое число  $k = k(\omega)$ . В следующем приближении, полагая  $k = k(\omega) + i\alpha(\omega)$ , получим для коэффициента затухания выражение

$$\alpha(\omega) = \pi k_0 \epsilon_0 h \left. \frac{D_1}{dD_0} \right|_{k=k(\omega)}. \quad (2.16)$$

Отсюда следует, что отношение коэффициента затухания, обусловленного плазменным резонансом в переходном слое, к волновому числу порядка отношения толщины переходного слоя к радиусу плазменного цилиндра, либо к длине волны, если последняя значительно меньше радиуса плазменного цилиндра. Таким образом, в неоднородном плазменном цилиндре коэффициент затухания электромагнитных колебаний порядка волнового числа  $k$ , т. е. волна затухает на расстоянии порядка длины волны.

В случае аксиально-симметричных колебаний ( $m = 0$ ) уравнение (2.15) приобретает вид

$$k_1 I_0 K_1 + \epsilon_0 I_1 (k_0 K_0 - i \pi k^2 h K_1) = 0. \quad (2.17)$$

Для длинноволновых колебаний ( $k_0 a \ll 1, k_1 a \ll 1$ ) из уравнения (2.17) получим

$$1 + \epsilon_0 \frac{(k_0 a)^2}{2} \left( \ln \frac{2}{k_0 a} - i \pi \frac{k^2}{k_0^2} \frac{h}{a} \right) = 0.$$

Для коэффициента затухания  $\alpha$ , определяемого последним уравнением, по порядку величины имеем

$$\frac{\alpha}{k} \sim (k/k_0)^2 (h/a) / \ln(2/k_0 a).$$

Так как в рассматриваемом случае  $k_0 a \ll 1$ , то  $\alpha/k$  мало (логарифмически) даже тогда, когда  $h \sim a$ .

Т. е. аксиально-симметричные длинноволновые колебания, распространяющиеся в неоднородном по радиусу плазменном цилиндре, являются слабо затухающими. Это находится в соответствии с результатом работы [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Н. Степанов, ЖТФ, 35, 1002 (1965).

Харьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
19 августа 1968 г.

#### SURFACE WAVE ABSORPTION IN A PLASMA WAVEGUIDE DUE TO PLASMA RESONANCE IN A TRANSIENT LAYER

V. V. Demchenko, V. V. Dolgopolov, K. N. Stepanov

The attenuation of surface waves propagating in an homogeneous plasma cylinder caused by the plasma resonance in a narrow transient layer between homogeneous

plasma and vacuum are investigated. The dispersion equations are obtained taking account of the damping in the transient layer. It is shown that the attenuation coefficient, caused by the plasma resonance, is equal by the order to axial wave number multiplied by the ratio of the thickness of the transient layer to the radius of plasma cylinder or to the wavelength if it is considerably less than the plasma cylinder radius. Therefore, in the inhomogeneous (over the radius) plasma cylinder when the transient layer thickness is of the order of the cylinder radius, the attenuation coefficient is of the order of the axial wave number, i.e. the propagation of waves is impossible due to the strong attenuation. An exception is the case of axially-symmetric oscillations with the wavelength considerably less than the plasma cylinder radius.

---

УДК 538.56

## ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ПЛАСТИНУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

*Г. М. Гарibyan, М. М. Мурадян*

Рассматривается перпендикулярный пролет крайне релятивистской заряженной частицы через пластину вещества. Для вычисления электромагнитных потерь энергии частицы в пластине указан математический прием, который позволяет применить в этих расчетах метод интегрирования Ландау. Полученная таким образом общая формула дает искомые потери энергии в пластине произвольной толщины, которые в предельных случаях малых и больших толщин пластины переходят в известные выражения.

Как известно, вычисление электромагнитных потерь энергии заряженной частицы, пролетающей через пластину, доведено до конца только в крайних случаях малых и больших толщин пластины [1]. В первом случае было установлено отсутствие эффекта плотности Ферми (подтверждено затем и экспериментально [2]), а во втором — образование переходного излучения независимо на каждой из границ пластиинки.

В случае пластины произвольной толщины потери энергии выражаются через двукратный интеграл достаточно сложного вида. В работе [1] (см. также [3, 4]), например, для получения результата в случае малых толщин пластины подынтегральное выражение разлагалось в ряд по толщине пластины и интегрирование линейного члена, которое проводилось методом Ландау [5], приводило к упомянутому эффекту. Такой способ расчета был вызван тем обстоятельством, что в случае пластины произвольной толщины метод интегрирования Ландау не проходил из-за наличия в подынтегральном выражении экспонент, расходящихся на бесконечно удаленной верхней полуокружности в плоскости комплексной переменной  $\omega$ . В работе [6] была сделана первая попытка взять такого типа интегралы, однако на толщину пластины авторы были вынуждены наложить некоторое условие.

В настоящей работе выражение для потерь энергии релятивистских частиц интегрируется без каких-либо ограничений на толщину пластиинки. Для этого был найден некоторый математический прием, который позволил применить в этих расчетах метод интегрирования Ландау. Полученная таким образом общая формула дает искомые потери энергии и в крайних случаях малых и больших толщин дает известные результаты.

В случае малых толщин пластины помимо линейного члена интерес представляет также и член, квадратичный по толщине пластины. Знание его необходимо для определения верхней границы толщины пластины, выше которой начинается эффект плотности Ферми. В работе [4] утверждалось, что в случае квадратичного члена операции интегрирования и разложения в ряд по толщине пластины не переставимы. Из анализа общей формулы в настоящей работе показывается, что квадратичный член, полученный обеими способами, оказывается одним и тем же.

1. При пролете частицы с зарядом  $e$ , движущейся со скоростью  $v$  перпендикулярно через пластину толщины  $a$ , будут генерироваться поля

излучения как внутри пластины, так и вне ее. Вычислив эти поля (см., например, [7]), можно затем найти выражение для работы сил этих полей излучения над частицей на всем пути ее движения в следующем виде [3, 6]:

$$W = -\frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 d\omega d\alpha}{(\rho^+)^2 - (\rho^-)^2 e^{2i\lambda\alpha}} \left\{ [\rho^+ \alpha^+ - \rho^- \alpha^- e^{2i\lambda\alpha}] - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{\lambda} [(\gamma^+)^2 e^{i(\lambda - \omega/v)\alpha} + (\gamma^-)^2 e^{i(\lambda + \omega/v)\alpha}] \right\}, \quad (1)$$

где

$$\alpha^\pm = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\Lambda_0^2 \Lambda^2} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \beta^2 \pm \frac{(\omega^2 \varepsilon/c^2 - \Lambda_0)^2}{\varepsilon \lambda_0 \lambda} \right],$$

$$\gamma^\pm = \frac{1 - \varepsilon}{\Lambda_0 \Lambda} \left( \frac{\omega}{c} \beta \pm \frac{\omega^2 \varepsilon/c^2 - \Lambda_0}{\varepsilon \lambda_0} \right), \quad \rho^\pm = \frac{\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{1}{\lambda_0}, \quad \Lambda_0 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\Lambda = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon, \quad k^2 = x^2 + \frac{\omega^2}{v^2}, \quad \lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - x^2, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Величина  $\lambda_0$  определяется пределами применимости макроскопического рассмотрения. Минимую часть  $\lambda_0$  будем считать положительной во всей комплексной плоскости  $\omega$ . Тогда действительная часть  $\lambda_0$  в верхней полуплоскости будет положительной при  $\omega > 0$  и отрицательной при  $\omega < 0$ , а в нижней полуплоскости — положительной при  $\omega < 0$  и отрицательной при  $\omega > 0$ .

Так как  $\lambda$  не обращается в нуль в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ , то для того, чтобы исключить двузначность подынтегральной функции, возникающую из-за наличия нулей  $\lambda_0$ , необходимо произвести разрез вдоль действительной оси от  $-\infty$  до  $-cx$  и от  $+cx$  до  $+\infty$  и интегрирование производить по верхнему берегу разреза.

Для удобства представим (1) в виде

$$W = W_1 + W_2, \quad (2)$$

где  $W_1$  определяется первой квадратной скобкой выражения (1), а  $W_2$  — второй.

2. Для вычисления  $W_1$  прежде всего отметим, что выражение

$$(\rho^+)^2 - (\rho^-)^2 e^{2i\lambda\alpha}$$

не имеет нулей в верхней полуплоскости  $\omega$ , в чем можно убедиться, используя теорему Руше [6, 8]. Следовательно, полюса выражения (1) будут находиться только в тех точках, где обращаются в нуль  $\Lambda_0$  и  $\Lambda$ .

Используя обычный метод Ландау [5], для  $W_1$  получаем (см. также [6]).

$$W_1 = -\frac{2e^2 \sqrt{\sigma}}{3c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3)$$

где  $\sigma = 4\pi Ne^2/m$ ,  $N$  — число электронов в единице объема,  $m$  — масса электрона. При вычислении  $W_1$  частица считалась крайне релятивистской, т. е.

$$\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 1, \quad (4)$$

и были отброшены члены, убывающие с энергией частицы.

3. Для вычисления  $W_2$  мы не можем просто применить обычный метод интегрирования Ландау [5], т. е. замкнуть путь интегрирования по действительной оси  $\omega$  верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса, поскольку подынтегральное выражение на этой полуокружности из-за наличия  $\exp[i(\lambda - \omega/v)a]$  осциллирует с бесконечно большой амплитудой. Для преодоления этой трудности во второй квадратной скобке выражения (1) добавим и вычтем один и тот же член  $(\gamma^+)^2 \exp[i(\lambda - \omega/c)a]$ . В результате  $W_2$  запишем в виде

$$W_2 = W'_2 + \Delta, \quad (5)$$

где

$$W'_2 = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 d\omega d\omega \epsilon \lambda^{-1}}{(\rho^+)^2 - (\rho^-)^2 \exp(2i\lambda a)} \times \\ \times [(\gamma^+)^2 e^{i(\lambda - \omega/c)a} + (\gamma^-)^2 e^{i(\lambda + \omega/v)a}], \quad (6)$$

$$\Delta = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 d\omega d\omega \epsilon \lambda^{-1}}{(\rho^+)^2 - (\rho^-)^2 \exp(2i\lambda a)} (\gamma^+)^2 \times \\ \times [e^{i(\lambda - \omega/v)a} - e^{i(\lambda - \omega/c)a}]. \quad (7)$$

Покажем, что при выполнении условия (4) величиной  $\Delta$  можно пренебречь относительно  $W'_2$ .

4. Для вычисления  $\Delta$  замкнем путь интегрирования в верхней полуплоскости  $\omega$  окружностью такого большого радиуса, чтобы на ней можно было бы представить в виде  $\epsilon = 1 - \sigma/\omega^2$  и упростить подынтегральное выражение.

Тогда

$$\Delta = \Delta_c + 2\pi i \sum \text{Res}, \quad (8)$$

где  $\sum \text{Res}$  — сумма вычетов подынтегрального выражения формулы (7) в верхней полуплоскости, а

$$\Delta_c = \frac{2e^2}{\pi c} \left( \frac{\sigma}{c^2} \right)^2 \int_0^{x_0} \int_C \frac{x^3 d\omega d\omega}{\Lambda_0'^2 \Lambda'^2} [e^{i(\mu - \omega/v)a} - e^{i(\mu - \omega/c)a}], \quad (9)$$

$C$  — контур интегрирования, показанный сплошной линией на рис. 1,

$$\Lambda'_0 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2) + x^2, \quad \Lambda' = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2) + \frac{\sigma}{c^2} + x^2, \\ \mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\sigma}{c^2} - x^2, \quad \mu = \mu' + i\mu''.$$

Определим  $\mu'' > 0$  на всей плоскости комплексной переменной  $\omega$ , тогда знаки  $\mu'$  в соответствующих четвертях получатся такими, как это показано на рис. 1.

Для того, чтобы подынтегральная функция  $\Delta_c$  стала однозначной в плоскости  $\omega$ , сделаем разрезы, возникающие из-за нулей  $\mu$ , как это показано на рис. 1 жирными линиями. Замкнем контур  $C$  нижней полуокружностью бесконечно большого радиуса, сделав соответствующий обход разрезов (см. пунктирную линию на рис. 1). Интеграл по нижней бесконечной полуокружности равняется нулю, поскольку на ней

подынтегральная функция экспоненциально затухает. Таким образом, выражение  $\Delta_c$  будет равно сумме вычетов в верхней и нижней полуплоскостях и интегралу вдоль разрезов. Вычеты в верхней полуплоскости, обвязанные нулям  $\Lambda^2$ , сокращаются с соответствующими вычетами второго члена формулы (8). Вычеты же  $\Lambda_0^2$  в верхней полуплоскости вместе с аналогичными вычетами второго члена формулы (8) пренебрежимо малы относительно  $W'_2$  при выполнении условия (4). Вычеты выражения  $\Delta_c$  в нижней полуплоскости экспоненциально затухают как  $\exp[-ax_0/c\sqrt{1-\beta^2}]$  или убывают с энергией частицы. Следовательно,  $\Delta$  будет равняться интегралу вдоль разреза, т. е.

$$\Delta = \Delta_p, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_p = & -\frac{8e^2}{\pi c} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 \int_0^{x_0} \int_{c\sqrt{\sigma/c^2+x^2}}^{\infty} \frac{x^3 dx \times d\omega}{\Lambda_0'^2 \Lambda'^2} \times \\ & \times \sin \left( a \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\sigma}{c^2} - x^2} \right) \left( \sin \frac{\omega}{v} a - \sin \frac{\omega}{c} a \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначив  $x = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\sigma/c^2) - x^2}$  и сделав несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Delta_p = & -\frac{16e^2}{\pi \beta^8} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 \int_0^{x_0} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx \times x dx}{\Lambda_0''^2 \Lambda''^2} \sin(ax) \times \\ & \times \frac{\sin \{ [a(1-\beta)/2\beta] \sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2} \}}{\sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2}} \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{a(1-\beta)}{4\beta} \sqrt{x^2 + \frac{\sigma}{c^2} + x^2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Lambda_0'' = \left( x^2 + \frac{\sigma}{c^2} \right) (1 - \beta^2) + x^2, \quad \Lambda'' = x^2 (1 - \beta^2) + \frac{\sigma}{c^2} + x^2.$$

Формулу (12) удобно записать в следующем виде:

$$\Delta_p = \int_0^{x_0} \int_0^{\infty} f(x, x) dx \times dx - 2 \int_0^{x_0} \int_0^{\infty} f(x, x) \varphi(x, x) dx \times dx, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, x) = & -\frac{16e^2}{\pi \beta^8} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 x^3 x \sin(ax) \sin \{ [a(1-\beta)/2\beta] \sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2} \}, \\ \varphi(x, x) = & \sin^2 \frac{a(1+\beta)}{4\beta} \sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку  $\varphi(x, x)$  — знакопостоянная функция, то несложный анализ показывает, что мы можем ее мажорировать единицей, в результате чего

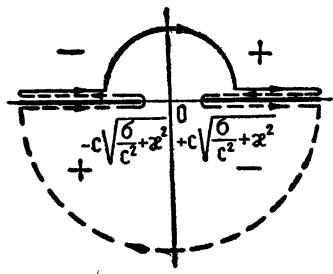


Рис. 1.

$$|\Delta_p| \leq \int_0^{x_0} \int_0^{\infty} f(v, x) d v dx \equiv \Delta'. \quad (15)$$

Для вычисления последнего интеграла распространим интегрирование по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , воспользовавшись четностью подынтегральной функции, и заменим  $\sin(ax)$  на  $e^{iax}$ . Тогда

$$\Delta' = \frac{8ie^2}{\pi\beta^8} \left(\frac{\sigma}{c^2}\right)^2 \int_0^{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx dx e^{iax}}{\Lambda_0''^2 \Lambda''^2} \frac{\sin \{[a(1-\beta)/2\theta]\sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2}}{\sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2}}. \quad (16)$$

Из-за наличия корня  $\sqrt{x^2 + (\sigma/c^2) + x^2}$  в плоскости комплексной переменной  $x$  необходимо сделать разрез от  $-i\sqrt{(\sigma/c^2) + x^2}$  до  $+i\sqrt{(\sigma/c^2) + x^2}$  (рис. 2). Определив мнимую часть указанного корня положительной во всей плоскости, нетрудно видеть, что подынтегральная функция справа и слева от линии разреза имеет один и тот же знак.

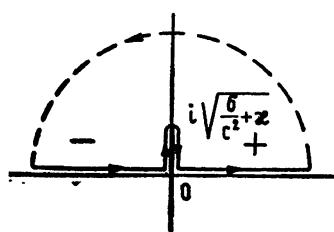


Рис. 2.

Следовательно, путь интегрирования по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  можно заменить контуром, указанным на рис. 2 сплошной линией, так как часть интеграла, связанная с разрезом, равна нулю. Замкнем теперь указанный контур интегрирования верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса (см. пунктирную линию на рис. 2), на которой интеграл экспоненциально стремится к нулю.

Таким образом, выражение (16) преобразуется к виду, где вместо интегрирования по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  надо взять замкнутый контур, показанный на рис. 2, т. е. найти вычеты подынтегрального выражения в верхней полуплоскости.

Расчет показывает, что  $\Delta'$  можно пренебречь относительно  $W'_2$ , поскольку члены, получающиеся при интегрировании (16), или убывают с энергией, или затухают экспоненциально как  $\exp(-ax_0/\sqrt{1-\beta^2})$ .

5. Таким образом, при выполнении условия (4) мы можем считать, что

$$W_2 = W'_2. \quad (17)$$

Для вычисления  $W'_2$  воспользуемся методом Ландау, т. е. замкнем путь интегрирования по действительной оси в плоскости  $\omega$  верхней полуокружностью бесконечно большого радиуса, на которой первый член подынтегрального выражения (6) убывает как  $1/\omega^8$ , а второй член — как  $\exp[(2i\omega a/v)/\omega^8]$ . Следовательно, значением интеграла на этой полуокружности можно пренебречь и наш искомый интеграл будет равен сумме вычетов подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. Полюса имеются в точках, где обращаются в нуль  $\Lambda_0$  и  $\Lambda$ . В результате расчет приводит к следующей формуле:

$$\begin{aligned} W_2 = & a - e^a \left( \frac{1}{a} + \frac{\sigma}{c^2 x_1} \right) e^{-ax} + e^a \left( \frac{1}{a} - \frac{2\sigma}{c^2 x_0} + \frac{32\sigma}{c^2 a^2 x_0^3} + \frac{64\sigma}{c^2 a^3 x_0^4} \right) \times \\ & \times \exp(-ax_0/2) - \frac{e^2 \sigma a}{c^2} \left[ 2K_0(ax_0) + \frac{32}{a^2 x_0^2} K_2(ax_0) + \frac{4}{ax_0} K_1(ax_0) + \right. \\ & \left. + \text{Ei}(-ax_1) + \text{Ei}\left(-\frac{ax_0}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\alpha = \frac{8e^2}{v} \int_0^\infty \frac{\epsilon(i\omega)x_2 \exp[-(\omega a/v)(x_2 - \beta)]}{[\epsilon(i\omega) + x_2]^2 - [\epsilon(i\omega) - x_2]^2 \exp(-2\omega ax_2/v)}, \quad (19)$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{v^2} + \frac{\sigma}{c^2}} - \frac{\Omega}{c}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{\sigma}}{c} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad x_2 = \sqrt{1 - \beta^2} [1 - \epsilon(i\omega)],$$

$Ei(z)$  — интегральная показательная функция,  $K_v(z)$  — цилиндрическая функция мнимого аргумента,  $\Omega$  — частота, начиная с которой можно считать  $\epsilon(\omega) = 1 - \sigma/\omega^2$ .

Отметим, что при вычислении выражения  $W'_2$  на величину  $\sigma$  было наложено следующее условие:

$$\sqrt{\sigma} \gg \Omega \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2}. \quad (20)$$

Таким образом, полные потери энергии частицы определяются суммой выражений  $W_1$  и  $W_2$ , задаваемых соответственно формулами (3) и (18). Выражение  $W_1$  не зависит от толщины пластины и, следовательно, дает потери энергии, происходящие на каждой из границ пластины независимо, т. е. удвоенное переходное излучение на одной границе,  $W_2$  же зависит от толщины пластины и поэтому описывает как взаимное влияние границ на переходное излучение, так и те потери, которые зависят от пройденного частицей пути.

Если в выражении для  $W$  устремить  $\sigma$  к нулю, то согласно (20) необходимо и  $\Omega$  устремить к нулю. В этом случае (3) и (18) обращаются в нуль, что и должно было быть.

6. Произведем анализ формул (3) и (18), рассматривая следующие частные случаи.

а) Толщина пластины больше зоны формирования переходного излучения, т. е.

$$a \gg \frac{c}{\sqrt{\sigma} \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (21)$$

При условии (21) нетрудно видеть, что все члены выражения (18) экспоненциально убывают с энергией. Тогда, пренебрегая ими относительно (3), получим

$$W = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \sqrt{\sigma}}{c \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (22)$$

что и следовало ожидать [1].

б) Толщина пластины настолько мала, что можно разложить в ряд по толщине пластины все члены формулы (18). В этом случае получаем

$$W = -\frac{e^2 \sigma a}{c^2} \left( \ln \frac{\sqrt{\sigma}}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{e^2 \pi \sigma a^2}{4v^3 \Omega}, \quad (23)$$

где

$$\ln \bar{\omega} = \frac{\int_0^\infty \omega \epsilon''(\omega) \ln \omega d\omega}{\int_0^\infty \omega \epsilon''(\omega) d\omega}; \quad (24)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty xy \epsilon''(x) \epsilon''(y) dx dy}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xy}{x+y} \epsilon''(x) \epsilon''(y) dx dy}. \quad (25)$$

Из требования малости квадратичного члена формулы (23) относительно линейного получаем условие на верхнюю границу толщины пластины, при котором ионизационные потери растут логарифмически с ростом энергии частицы:

$$a \ll \frac{4c \bar{\Omega}}{\pi \sigma} \left( \ln \frac{\sqrt{\sigma}}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{2} \right). \quad (26)$$

Заметим, что квадратичный член формулы (23) в точности совпадает с аналогичным членом, полученным в [3] разложением подынтегрального выражения в ряд по толщине пластинки и последующим интегрированием по переменным  $\omega$  и  $x$ .

7. Таким образом, основная идея расчета, как это видно из формул (5)–(7), заключается в том, что трудный для вычислений в выражении для  $W_2$  член с  $\exp[i(\lambda - \omega/v)a]$  заменяется на  $\exp[i(\lambda - \omega/c)a]$ , в результате чего появляется добавочный член  $\Delta$ . Новое выражение  $W'_2$  можно уже вычислить методом Ландау, а выражение для  $\Delta$  оказывается более простым, чем  $W_2$ , и его удается оценить, а затем и преебречь в случае крайне релятивистских частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Гарibyan, ЖЭТФ, 37, 527 (1959)
2. А. И. Алиханян, А. К. Вальтер, Г. М. Гаривян, И. А. Гришаев, М. П. Лорикян, В. А. Петренко, Г. Л. Фурсов, ЖЭТФ, 44, 1122 (1963), 46, 1212 (1964)
3. Г. М. Гаривян, М. М. Мурадян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 1, 310 (1966)
4. В. Е. Пафомов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, № 6, 1072 (1962).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, гл. XII, Гостехиздат, М., 1957.
6. Г. М. Гаривян, С. С. Элбакян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 1, 279 (1966).
7. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, 86, 189 (1965).
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. Наука, М., 1965.

Поступила в редакцию  
25 ноября 1968 г.

#### ENERGY LOSSES OF A RELATIVISTIC PARTICLE TRANSITING THROUGH A PLATE OF ARBITRARY THICKNESS

*G. M. Garibyan, M. M. Muradyan*

A perpendicular transit of a relativistic charged particle through a plate is considered. A mathematical method is given to estimate the electromagnetic energy losses of particle in the plate which gives allowance for using integration method by Landau in these calculations. A general formula obtained gives the unknown energy losses in the plate of arbitrary thickness which, in the limit cases of small and large thicknesses of the plate are transformed into the known expressions.

УДК 533.951

## ДИСПЕРСИОННОЕ СЖАТИЕ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ\*

Л. А. Островский

Решена одномерная задача о распространении частотно-модулированных сигналов в неоднородной диспергирующей среде. Выяснены условия оптимальной компрессии радиоволн в простейших ионосферных слоях.

Сжатие модулированных по частоте волн в диспергирующих средах изучается уже довольно давно как один из способов оптимального приема в радиолокационной технике [1]. Отмечалось также [2], что это явление (временная фокусировка) представляет интерес в связи с распространением радиоволн в ионосфере. Однако этот последний случай имеет существенную специфику ввиду неоднородности среды, которая не только оказывается на результатах расчетов, но и целиком ответственна за некоторые эффекты (например, компрессию отраженной волны).

В данной работе проводится анализ дисперсионного сжатия плоской волны в неоднородной среде на основе методов, обобщающих приближение геометрической оптики на нестационарные квазигармонические процессы [3–7]. В используемой здесь форме (описанной ранее в [5] для однородной среды) метод приводит к уравнениям переноса для мгновенной частоты и интенсивности волны, которые имеют сравнительно простые общие интегралы, позволяющие проследить за процессом сжатия и, в частности, определить условия оптимальной компрессии (фокусировки), когда пространственно-временные траектории всех групповых фронтов сходятся в одной точке. Полученные решения справедливы для любого закона амплитудной и частотной модуляции, даже если величина девиации сравнима с несущей частотой, т. е. спектр волны широк, лишь бы изменение частоты происходило достаточно медленно.

*Общее решение.* Рассмотрим одномерную задачу. В качестве исковых переменных служат мгновенная частота  $\omega(z, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}$  или волновое число  $k(z, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$  ( $\psi$  — эйконал) и плотность энергии  $W(z, t)$ . Для определения частотных изменений будем исходить из дисперсионного уравнения

$$D\{\omega, k, p(z)\} = 0, \quad (1)$$

где  $p(z)$  — параметр (или совокупность параметров) среды, изменение которого предполагается плавным в обычном геометрооптиче-

\* Часть результатов работы докладывалась на Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн. Тбилиси, 1964.

ском смысле. Дифференцирование (1) по  $t$  приводит к уравнению переноса частоты

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v(\omega, z) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $v = -(D_k/D_\omega) = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{D_p}$  — локальная групповая скорость, выраженная с помощью (1) через  $\omega$  и  $p(z)$ . Общий интеграл (2) имеет вид\*

$$t - \int_0^z \frac{dx}{v(\omega, x)} = \xi(\omega), \quad (3)$$

где  $\xi$  — произвольная функция, определяемая условием на границе (очевидно,  $\xi = t(\omega)$  при  $z = 0$ ); интеграл по  $z$  берется при постоянном  $\omega$ . Соотношение (3) определяет в пространстве переменных  $(z, t, \omega)$  семейство кривых (групповых траекторий), каждая из которых лежит в плоскости, нормальной к оси  $\omega$ , т. е.  $\omega$  постоянно на каждой траектории. Проекции таких кривых на плоскость  $\omega = \text{const}$  аналогичны лучам в геометрической оптике.

Благодаря зависимости  $v$  от  $\omega$  решение (3), вообще говоря, становится неоднозначным, начиная с некоторой точки  $(z^*, t^*, \omega^*)$ . Эта точка определяется из (3) совместно с уравнениями (ср. [5])

$$1 + \int_0^z \frac{\partial v^{-1}}{\partial \xi} dx = 0, \quad \int_0^z \frac{\partial^2 v^{-1}}{\partial \xi^2} dx = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial \xi} = \left( \frac{d\xi}{d\omega} \right)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)$ . Первое из соотношений (4) отвечает огибающим «лучей» (каустикам), а второе определяет начальную точку каустики (с минимальными значениями  $z = z^*$ ,  $t = t^*$ ).

Огибающая интенсивности (амплитуды) волны может быть найдена из уравнения переноса энергии

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (vW) = 0. \quad (5)$$

Общий интеграл (5) получается следующим образом: заменим независимые переменные  $z, t$  на  $z' = z$  и  $\xi$ , где  $\xi$  определяется из (3) (так что  $\omega$  зависит только от  $\xi$ ). Легко видеть, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial z} = 1 - \frac{\partial \xi}{\partial t} \int_0^{z'} \frac{\partial v^{-1}}{\partial \xi} dx, \quad (6)$$

$$\text{т. е. } \frac{\partial \xi}{\partial t} = \left\{ 1 + \int_0^{z'} \frac{\partial v^{-1}}{\partial \xi} dx \right\}^{-1}.$$

\* Как известно, уравнение (2) эквивалентно характеристической системе  $\frac{dz}{dt} = v$ ,  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , соответствующей канонической форме записи групповых траекторий (3).

Подставляя (6) в (5), нетрудно получить

$$W = \frac{v^{-1} Q(\xi)}{z'}, \quad (7)$$

$$1 + \int_0^{\xi} \frac{\partial v^{-1}}{\partial \xi} dx$$

где  $Q(\xi)$  — произвольная функция: Из (4) очевидно, что, как и следовало ожидать, на «каустиках» интенсивность поля в данном приближении бесконечна.

Уже упоминавшаяся оптимальная компрессия имеет место, когда при  $z = z^*$ ,  $t = t^*$  соотношения (3) и, следовательно, (4) выполняются тождественно по  $\xi$  (или, что то же самое, по  $\omega$ ) в некотором конечном интервале. Это возможно лишь при определенном законе модуляции падающей волны  $\omega(0, t) = \tilde{\omega}(t)$ .

Все решения заметно упрощаются в случае малых частотных изменений, когда  $\omega = \omega_0 + \omega'$ , и  $v^{-1} = v^{-1}(\omega_0, z) + \omega' \left( \frac{\partial v^{-1}}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}$ . В частности, при любом  $p(z)$  функция  $\tilde{\omega}(t)$ , отвечающая оптимальному сжатию, должна быть линейной:  $\tilde{\omega} = \omega_0 + t \Delta/T$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $|\Delta| \ll \omega_0$ ). При этом  $z^*, t^*$  определяются уравнениями

$$\int_0^{z^*} \left( \frac{\partial v^{-1}}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} dx = -\frac{T}{\Delta}, \quad t^* = \int_0^{z^*} v^{-1}(\omega_0, x) dx. \quad (8)$$

Степень сжатия волны ограничена не учтенным здесь дисперсионным расплыванием группы (временной дифракцией). Условие существенного сжатия имеет вид  $\Delta T \gg 4\pi$ , где, как и выше,  $T$  — характерный период модуляции частоты (или длительность импульса),  $\Delta = \omega_{\max} - \omega_{\min}$  — максимальное изменение частоты. Минимальная деятельность сжатой группы  $T_{\min}$  порядка  $4\pi/\Delta$ , и коэффициент сжатия  $K = (T/T_{\min}) \approx \Delta T / 4\pi$ .

*Линейный слой плазмы.* Применим полученные формулы к расчету сжатия поперечной электромагнитной волны в неоднородной изотропной плазме, когда  $v = c\sqrt{1 - \omega_p^2(z)/\omega^2}$ . Рассмотрим сначала линейное изменение концентрации плазмы:  $\omega_p^2 = az$ . Производя интегрирование в (3), получим

$$t - \frac{2\omega^2}{ac} (1 - \sqrt{1 - az/\omega^2}) = \xi(\omega). \quad (9)$$

Требуя тождественного выполнения (9) при  $t = t^*$ ,  $z = z^*$ , найдем, что для оптимальной компрессии частота падающей волны должна модулироваться следующим образом:

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{c\sqrt{a}}{2} \frac{t^* - t}{\sqrt{c(t^* - t) - z^*}}. \quad (10)$$

Случай малых девиаций получается отсюда, если длительность группы

(импульса)  $T$  такова, что  $cT \ll ct^* - z^*$ ; при этом зависимость  $\tilde{\omega}(t)$ , как указывалось, линейна. Если заданы  $\omega_0$ ,  $T$  и  $\Delta$ , то (см. (8)).

$$\omega_p^2(z^*) = az^* = 8\omega_0^2 \frac{\sqrt{1+s}}{s^2} \left(1 + \frac{s}{2} - \sqrt{1+s}\right); \quad (11a)$$

$$act^* = \frac{4\omega_0^2}{s} (\sqrt{1+s} - 1), \quad (11b)$$

где  $s = 8\Delta\omega_0/acT$ . Отметим, что  $z^*$ ,  $t^*$  положительны только при  $\Delta > 0$ ; физически это очевидно, поскольку групповая скорость растет с ростом  $\omega$ . Может показаться парадоксальным тот результат, что при  $\Delta = 0$  величины  $z^*$  и  $t^*$  конечны. Однако при этом  $\omega_0 = \omega_p(z^*)$ , т. е.  $z^*$  совпадает с точкой поворота. Вблизи этой точки дисперсия неограниченно растет, и формально компрессия происходит при сколь угодно малых изменениях частоты. Фактически, разумеется, эффект сжатия исчезает уже при конечном  $\Delta$ , когда  $\Delta T \lesssim 4\pi$ .

Далее, вычисляя интеграл в (7), найдем изменение интенсивности. Если  $W(0, t) = W_0 = \text{const}$ , т. е. амплитуда падающего сигнала не модулирована, то

$$W = W_0 \frac{1 - (\xi\Delta/\omega_0 T)x/(1-x)}{1 - s [\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^{-1} - 2]/4}, \quad (12)$$

где  $x = az/\omega_0^2$ . Нетрудно убедиться, что для  $z \rightarrow z^*$  выражение (12) расходится в соответствии со сказанным выше.

Сделаем оценку для ионосферы. Положим  $a = 3,2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$  (что примерно соответствует нижней стороне  $F$ -слоя). Тогда на частоте  $(\omega_0/2\pi) = f_0 = 10 \text{ МГц}$  импульс с  $\Delta = 0,1 \omega_0$  и длительностью  $T = 50 \text{ мксек}$  сожмется на расстоянии  $z^* = 96,5 \text{ км}$  от начала слоя; коэффициент сжатия  $K \approx 25^*$ .

*Парabolicкий слой.* Рассмотрим далее слой конечной толщины  $2L$ , в котором  $\omega_p^2 = \omega_m^2 [1 - (1 - z/L)^2]$  при  $0 \leq z \leq 2L$ . Групповые траектории здесь описываются уравнением

$$t - \frac{L}{c} m \ln \left| \frac{\sqrt{m^2 - 1 + y^2} + y}{m - 1} \right| = \xi(m). \quad (13)$$

Здесь  $y = (z/L) - 1$ ,  $m = \omega/\omega_m$ . Одна из возможных задач состоит в том, чтобы добиться сжатия сигнала, прошедшего через весь слой (при  $m > 1$ ), тогда (13) должно выполняться тождественно для  $z = z^* = 2L$ ,  $t = t^*$ . Частота падающей волны должна меняться так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{c}{L} (t^* - t) = \tilde{m} \ln \left| \frac{\tilde{m} + 1}{\tilde{m} - 1} \right| \quad (14)$$

( $\tilde{m} = \tilde{\omega}/\omega_m$ ). Если заданы пределы изменения частоты ( $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ ), то из (14) определяется соответствующая длительность падающего импульса  $T$ . Пусть, например,  $m_1 = 1,5$ ,  $m_2 = 1,66$ , т. е.  $(\Delta/\omega_0) \approx 0,1$ .

\* Здесь не учитывается влияние случайных неоднородностей, уменьшающих эффект. Согласно расчетам И. В. Блиоха [2], это влияние действительно мало в рассмотренных здесь примерах, где  $T_{\min} \gg 1 \text{ мксек}$ .

Тогда при  $L = 150 \text{ км}$  имеем  $T \approx 50 \text{ мксек}$ . Так как для  $F$ -слоя  $\omega_m \approx 8 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ , в данном примере  $f_1 = 19,1 \text{ Мгц}$ ,  $\Delta/2\pi = 2 \text{ Мгц}$ . Длительность выходящего из слоя импульса порядка 1 мксек, т. е. коэффициент сжатия около 50.

*Сжатие отраженного импульса.* Рассмотрим еще сжатие волны, отраженной от ионосферного слоя. Для этого частота падающего сигнала должна убывать со временем; тогда группы, вошедшие позже, проходят меньший путь, поскольку координата точки поворота зависит от частоты (рис. 1). Для отраженных сигналов уравнение траектории группы (3) заменяется на

$$t - \int_0^{\bar{z}(\omega)} \frac{dx}{v(\omega, x)} - \int_z^{\bar{z}(\omega)} \frac{dx}{v(\omega, x)} = \xi(\omega), \quad (15)$$

где  $\bar{z}(\omega)$  — точка поворота для данной частоты, определяемая условием  $\omega = \omega_p^2(z)$ . В частности, при возвращении в точку  $z = 0$  (начало слоя) имеем

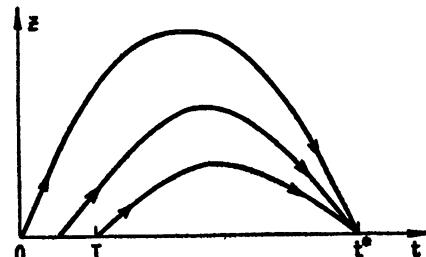


Рис. 1. Групповые траектории при сжатии отраженного сигнала.

$$t - 2 \int_0^{\bar{z}(\omega)} \frac{dx}{v(\omega, x)} = \xi(\omega). \quad (16)$$

Так, для линейного слоя из (16) следует

$$t - \frac{4\omega^3}{ac} = \xi(\omega). \quad (17)$$

Поэтому компрессия волны на выходе из слоя ( $z^* = 0$ ) обеспечивается следующим законом модуляции частоты падающей волны:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{ac}{4}(t^* - t)} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (18)$$

В частности, при малых девиациях из (18) получаем  $\Delta = -acT/8\omega_0$ . Пусть, например,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 9 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$ ,  $T = 200 \text{ мксек}$ , тогда при указанных выше параметрах слоя  $\Delta = -4,2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$ , т. е.  $|\Delta| = 0,075 \omega_0$ . Коэффициент сжатия — около 64.

Для параболического слоя, как нетрудно показать, условие сжатия отраженных волн при  $z = 0$  совпадает по виду с (14) (но здесь, конечно,  $\tilde{m} < 1$ ). Если подставить значения  $\Delta$  и  $\omega_0$ , только что рассмотренные для линейного слоя, то получим  $T \approx 100 \text{ мксек}$ ,  $K \approx 32$ .

Из сказанного следует, что изменение на 5—10% частоты в импульсах длительностью порядка 50—200 мксек с несущей частотой, не слишком далекой от  $\omega_m$ , достаточно для существенной компрессии проходящих и отраженных волн. Отметим в заключение, что данный метод, по-видимому, допускает обобщение на трехмерные задачи, основанное на том, что формулы типа (3) и (7) могут быть записаны для произвольной (вообще говоря, нестационарной) лучевой трубы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров, изд. Сов. радио, М., 1963.

2. П. В. Блиох, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 460 (1964).
3. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 672 (1960).
4. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 293 (1961).
5. Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, 10, 1176 (1965).
6. R. M. Lewis, Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, 1967, p. 845.
7. Ю. Кравцов, ЖЭТФ, 55, 1470 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 февраля 1969 г.

## COMPRESSION OF FREQUENCY-MODULATED WAVES IN AN INHOMOGENEOUS PLASMA

*L. A. Ostrovskii*

The one-dimensional problem on propagation of the frequency-modulated signals in inhomogeneous dispersive medium is solved. The conditions of optimal compression of radio waves in simple ionospheric layers are clarified.

---

УДК 538.56 538.6

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПУЧКИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ. I

Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

Исследуются свойства квазиоптических электромагнитных пучков, распространяющихся в анизотропных средах в особых направлениях. Соответствующие особенности связаны с нарушением обычного диффузионного приближения, что находит формальное выражение в равенстве нулю второй производной  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}$ , где ось  $z$  предполагается ориентированной в

направлении распространения пучка. Подробно проанализировано изменение поперечной структуры таких пучков с увеличением  $z$ . Показано, что электромагнитные пучки, распространяющиеся в указанных особых направлениях, расплюются медленнее, чем это имеет место в обычных направлениях, в частности, в свободном пространстве.

1. Как известно, в однородной анизотропной (в частности, гиротропной) среде поле произвольного электромагнитного пучка может быть записано в виде\*

$$E(r) = \sum_{\gamma=1}^2 \int e_\gamma E(k_\gamma) \exp(-ik_\gamma r) dk_\gamma, \quad (1)$$

где индекс  $\gamma$  отмечает тип волны (обыкновенная, необыкновенная), вектор  $e$  описывает поляризацию. Каждый из двух фактически представленных в (1) пучков допускает независимое рассмотрение; полное поле есть суперпозиция соответствующих полей. Имея это в виду, мы опускаем в дальнейшем и знак суммы и индекс  $\gamma$ .

Если речь идет о направленном пучке с достаточно узким угловым спектром (квазиоптический пучок) вблизи некоторого  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$  (вдоль которого ориентируется ось  $z'$ ), так что  $k_x', k_y' \ll k_0$ , то можно воспользоваться разложением функции  $k_z'$  ( $k_x', k_y'$ ) в ряд по степеням  $k_x', k_y'$  и удерживать в зависимости от обстоятельств различное число членов этого ряда. Принимая затем во внимание, что поляризационный множитель  $e$  является, как правило, достаточно плавной функцией  $k_x', k_y'$ , получим следующее соотношение непосредственно для медленно меняющейся амплитуды поля:

$$E(x', y', z') = \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x', k_y') \exp \left[ -i(k_x' x' + k_y' y') - i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!(m-n)!} p_m^{(n)} k_x'^{m-n} k_y'^n z' \right] dk_x' dk_y', \quad (2)$$

где

$$p_m^{(n)} = \frac{\partial^n k_z'}{\partial k_x'^m \partial k_y'^n} \text{ в точке } k_x' = 0, k_y' = 0.$$

\* Зависимость от времени определяется множителем  $e^{i\omega t}$ .

При удержании только членов второго порядка приходим по существу к обычному диффузионному приближению [1], которое в анизотропных средах удобно отнести к направлению распространения энергии, т. е. записывать в системе координат  $x, y, z$  с осью  $z$ , ориентированной вдоль групповой скорости  $V_0^*$ . В рамках этого приближения (2) эквивалентно следующему соотношению [2]:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{p_2^{(0)} p_2^{(2)} z}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) \exp \left\{ i \left[ \frac{(x - \tilde{x})^2}{2p_2^{(0)} z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(y - \tilde{y})^2}{2p_2^{(2)} z} \right] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad (3)$$

где  $E(x, y, 0)$  — распределение амплитуды поля на начальной апертуре  $z = 0$ . Без ограничения общности здесь можно рассматривать двумерный пучок  $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$ , так как в представлении (3) обобщение на трехмерный случай выполняется очевидным образом.

В отличие от изотропных сред в некоторых анизотропных средах при определенных значениях параметров существуют, однако, такие направления, вдоль которых вторая  $\left(\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}\right)$ , а иногда вместе с ней

и третья  $\left(\frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3}\right)$  производная обращаются в нуль, что формально свидетельствует об отсутствии диффузионного расплывания. На самом деле при этом диффузионное рассмотрение оказывается бессодержательным и приходится прибегать к учету последующих членов разложения\*\*. Изучению свойств квазиоптических пучков, распространяющихся в особых направлениях такого рода, и посвящена первая часть настоящей работы.

С другой стороны, в анизотропных средах может иметь место специфическое «энергетическое» вырождение, когда некоторому фиксированному направлению вектора Пойнтинга (групповой скорости) соответствует множество волновых векторов, заполняющих коническую поверхность (внешняя коническая рефракция). Очевидно, что плоские волны с волновыми векторами, сосредоточенными вблизи поверхности этого конуса, формируют единый волновой пучок, который по характеру спектра мы будем называть кольцевым. Для описания таких кольцевых пучков также приходится предпринимать некоторое обобщение обычных диффузионных формул. Рассмотрение этого особого случая мы оставляем до второй части работы.

2. Прежде чем переходить к анализу поведения пучка в особых направлениях, остановимся на вопросе о возможности реализации указанных особенностей. Соответствующее достаточно подробное исследование было проведено применительно к плазме в постоянном

\* Такая ориентация оси  $z$  обеспечивает равенство нулю первых производных  $\left(\frac{\partial k_z}{\partial k_x}, \frac{\partial k_z}{\partial k_y}\right)$ . Кроме того, путем соответствующего выбора осей  $x, y$  удается (по крайней мере в интересующих нас средах) избавиться и от смешанной производной.

\*\* В дифференциальном описании это соответствует переходу от параболического уравнения для медленно меняющейся амплитуды к уравнению с производными более высокого порядка по поперечной координате.

магнитном поле ( $H^{(0)}$ ) и двухосным кристаллам. Результаты этого исследования особенно удобно и наглядно представляются при использовании поверхностей волновых векторов.

На рис. 1 а, б приведены сечения всех интересующих нас поверхностей волновых векторов (сами поверхности образуются в результате

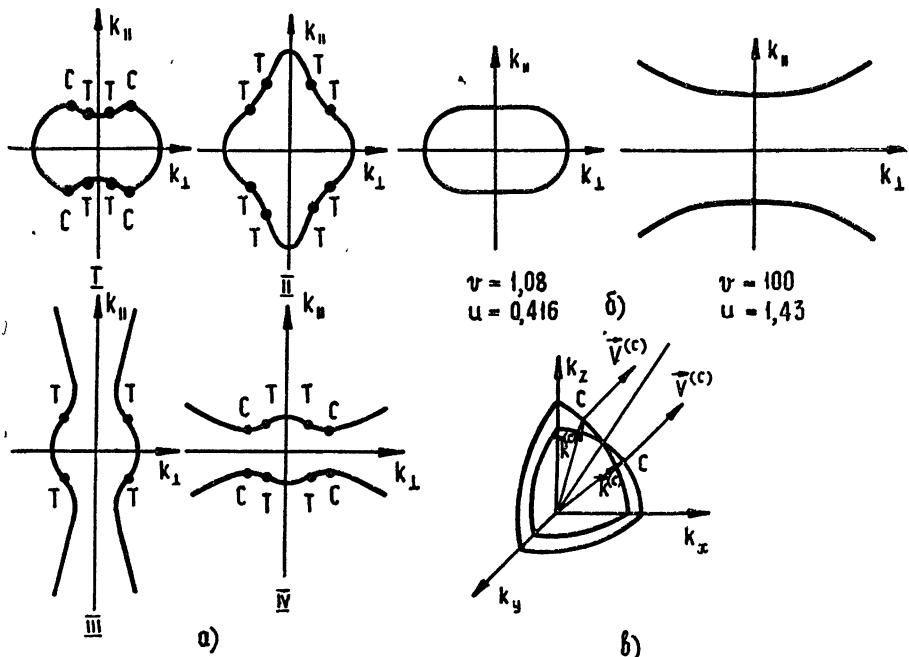
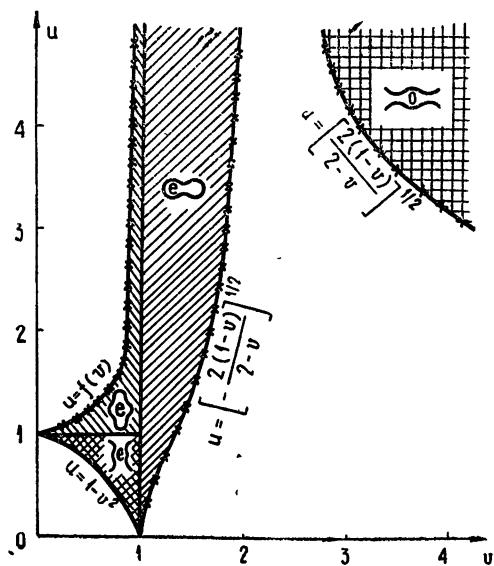


Рис. 1. Поверхности волновых векторов: а, б) — плазма в магнитном поле; в) — двухосный кристалл.

вращения этих кривых вокруг оси ординат) для гиротропной плазменной среды. В отличие от стандартных обозначений, принятых в «изотропном» случае, индексы  $\parallel$  и  $\perp$  отмечают направления вдоль и поперек внешнего магнитного поля\*. Области значений параметров плазмы  $v = \omega^2_0/\omega^2$  и  $u = \omega^2_H/\omega^2$  ( $\omega_0$  — ленгмюровская частота,  $\omega_H$  — гирочастота электронов), при которых имеют место представленные выше кривые, показаны на рис. 2. Знаки  $o$  и  $e$  здесь обозначают тип волны — обыч-

Рис. 2. Области значений параметров плазмы, отвечающие различным поверхностям волновых векторов ( $f(v)$  — некоторая функция параметра  $v$ ).



\* Для изотропной среды  $k_{\parallel}^2 = k^2 - k_{\perp}^2$ , так что соответствующие кривые — окружности.

новенная и необыкновенная соответственно; выражение для  $f(v)$  не приводится ввиду громоздкости. Особое направление с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0$  отвечает, очевидно, точкам перегиба  $T$  ( $\frac{\partial^2 k}{\partial k_x^2} = 0$ ) на кривой волновых

векторов. Волновой вектор ( $k^{(T)}$ ) и вектор групповой скорости ( $V^{(T)}$ ) для одного из таких направлений изображены на рис. 3, воспроизводяющим отдельно первую из кривых рис. 1 а. Там же (рис. 3 б) для большей наглядности дается сечение соответствующей поверхности лучевых векторов. Коническая поверхность, образованная  $V^{(T)}$ , является

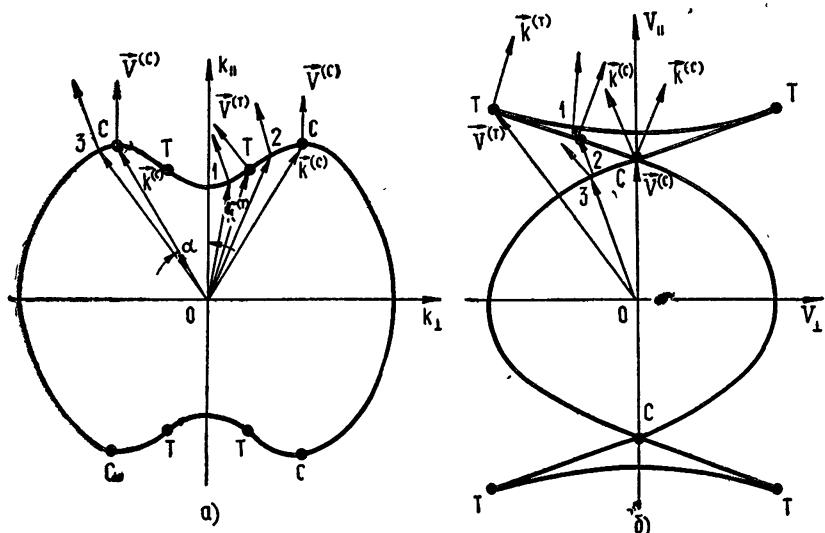


Рис. 3. а) — Поверхность волновых векторов; б) — поверхность лучевых векторов.

границей освещенной области для двух волн (1, 2, рис. 3), формирующих искомый волновой пучок\*.

При определенном изменении параметров плазмы две точки перегиба начинают сближаться и в пределе на границах областей существования кривых рис. 1 а (эти границы помечены на рис. 2 крестиками) сливаются, что приводит к равенству нулю не только второй, но и третьей производной. Две из получающихся при этом кривых волновых векторов, отвечающие кривым I и IV рис. 1 а, даны на рис. 1 б. Такие особые направления представляют не просто теоретический интерес, как это могло показаться, если учесть трудности реализации плазмы со строго фиксированными значениями параметров. Проведенные расчеты позволяют утверждать, что вблизи некоторых границ, или участков границ, кривые волновых векторов не слишком критичны к изменению параметров, т. е. первые три производные остаются достаточно малыми в сравнительно протяженном интервале значений

\* В дальнейшем для простоты будем считать, что третья волна (3, рис. 3), которая наряду с двумя первыми переносит энергию в данном направлении, в формировании рассматриваемого пучка не участвует. Это предположение оказывается оправданным и по существу, поскольку та часть волнового пучка, которая образована набором волн третьего типа, ведет себя обычным образом и потому, как мы увидим позже, расплывается быстрее, так что ее вклад, начиная с некоторых расстояний, становится незначительным.

и и  $v$ . Именно к таким случаям и относятся кривые рис. 1 б, где имеется четко выраженный и довольно большой пологий участок вблизи оси ординат\*.

Конус внешней конической рефракции в гиротропной плазме образуется волновыми векторами, попадающими в экстремальные точки  $c \left( \frac{\partial k_z}{\partial k_x} = 0 \right)$  поверхности волновых векторов, не лежащие на оси ординат ( $k_z^{(c)}$ ,  $V^{(c)}$  на рис. 3); ось этого конуса параллельна постоянному магнитному полю. Еще задолго до начала исследований по распространению электромагнитных волн в плазме явление внешней конической рефракции наблюдалось в двухосных кристаллах. В настоящее время число таких кристаллических веществ довольно значительно. Качественный ход поверхности волновых векторов для двухосного кристалла представлен на рис. 1 в.

В заключение этого раздела следует указать, что подробное исследование полей точечных источников в гиротропной плазме при наличии указанных особенностей выполнено в работах [3, 4].

3. Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению первого из перечисленных выше случаев, связанного с нарушением диффузионного приближения  $\left( p_2 = \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0 \right)$ . Сначала проанализируем поведение пучка, распространяющегося в направлениях, вдоль которых третья производная существенно отлична от нуля:  $p_3 = \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \neq 0$ . Если при этом выполняется условие

$$\frac{1}{4!} p_4 z (\Delta k_x)^4 \ll \pi, \quad (4)$$

где  $\Delta k_x$  — ширина спектра плоских волн, формирующих поле в сечении  $z = \text{const}$ , то член с третьей производной становится определяющим. Тогда формула (2) применительно к двумерному пучку\*\* в системе координат  $x, z$  будет иметь вид

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp [-i(\kappa x + x^3 6^{-1} p_3 z)] dx, \quad (5)$$

где  $\kappa = k_x - k_x^{(T)}$ , а производная берется в точке  $k_x = k_x^{(T)}$ .

Рассмотрим в качестве конкретного примера квазиоптический пучок со спектром  $E(x)$ , описываемым функцией Гаусса

$$E(x) = \tilde{E}_0 \exp (-a^2 x^2), \quad (6)$$

что обеспечивает распределение амплитуды поля на начальной апертуре  $z = 0$  также в виде функции Гаусса:

$$E(x, 0) = E_0 \exp (-x^2 / 4a^2), \quad (7)$$

\* Кривые же, получающиеся в пределе из кривых II, III рис. 1а, как раз потому и не приведены, что являются слишком критичными к «сбою» параметров.

\*\* Можно убедиться, что в принятой системе координат ( $H^{(0)}$ ) лежит в плоскости  $xz$  — плоскость чертежа на рис. 1,3) смешанные производные, по крайней мере интересующих нас низших порядков, обращаются в нуль. Это, как видно непосредственно из (2), и позволяет ограничиться рассмотрением двумерного пучка. К тому же такое ограничение тем более целесообразно, что в направлении  $y$   $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_y^2} \neq 0$  и пучок должен расплываться по обычному диффузионному закону (см. (3)).

где  $E_0 = \sqrt{\pi} \tilde{E}_0/a$ . Получающийся в результате подстановки (6) в (5) интеграл может быть представлен через ту из функций Эйри  $v(\xi)$  (5), которая обеспечивает спадание поля в области тени, так что окончательно имеем

$$E(x, z) = \left( \frac{2}{p_3 z} \right)^{1/3} E_0 \Phi(x, z), \quad (8)$$

где  $\Phi(x, z) = 2av[\xi(x, z)] \exp[\eta(x, z)]$  описывает структуру пучка в поперечном сечении,  $\xi(x, z) = (2/p_3 z)^{1/3} [(2a^4/p_3 z) + x]$ ,  $\eta(x, z) = 2(a^2/p_3 z) \times [(4a^4/3p_3 z) + x]$ . В этой формуле (так же как и всюду далее) все величины, имеющие размерность длины, отнормированы на  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ .

Пользуясь асимптотическими представлениями функции Эйри при достаточно больших и достаточно малых по величине значениях аргумента ( $|\xi| \gg 1$  и  $|\xi| \ll 1$ ), из (8) нетрудно получить упрощенные выражения, отвечающие областям близких к началу ( $z = 0$ ) и достаточно удаленных значений  $z$ :

$$E(x, z) = E_0 \exp(-x^2/4a^2) \left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{p_3 z}{a^4} \left[ \frac{5}{54} - \frac{p_3 z}{a^2} + x \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \right\}; \quad (9)$$

$$E(x, z) = E_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2/3)} \frac{2^{4/3} 3^{2/3}}{(p_3 z)^{1/3}} \frac{a}{3p_3 z} \left( 1 + \frac{x^3}{3p_3 z} \right), \quad (10)$$

где  $\Gamma(2/3)$ —гамма-функция. Первая из приведенных формул при  $z \rightarrow 0$  переходит в (7); вторая же, как нетрудно убедиться, согласуется с асимптотическим выражением поля элементарного диполя (см. [3]).

В соответствии с (8) значение амплитуды поля в главном максимуме ( $\xi(x_m, z) = -1,019$ ), начиная с некоторых  $z$ , удовлетворяющих условию

$$1,019 \left( \frac{2a^3}{p_3 z} \right)^{2/3} \ll 1, \quad (11)$$

спадает как  $1/\sqrt[3]{z}$  в отличие от обычного закона спадания  $\sim 1/\sqrt{z}$ , что свидетельствует о более медленном характере расплывания пучка.

Получение количественных результатов с помощью представленных выше формул сводится, по существу, к определению значения третьей производной  $p_3 = \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \Big|_{k_x^{(T)}}$  — единственного параметра задачи. Соот-

ветствующие уравнения, позволяющие вычислить  $p_3$ , представляются весьма громоздкими и вряд ли пригодными для непосредственных аналитических расчетов, так что приходится прибегать к помощи электронно-вычислительной машины. При этом могут, в принципе, быть построены достаточно подробные «карты» значений  $p_3$  как функции параметров среды, что откроет возможность прямого использования в дальнейшем формулы (8) для количественного анализа поведения соответствующих пучков.

В настоящей работе, однако, вычислялось непосредственно значение медленно меняющейся амплитуды поля, причем расчеты выполнялись на основании общей формулы типа (2), учитывающей наличие всех высших производных. Это позволило избежать процедуры предварительного нахождения  $p_3$ , а после определения  $p_3$  по результатам численного счета—прокорректировать точность укороченной формулы. В разумных пределах (к выяснению которых мы вернемся несколько

позже) результаты счета с достаточной точностью совпадают с полученными из (8) при соответствующем значении  $p_3$  («привязка» осуществлялась по положению первого нуля функции Эйри).

Распределение квадрата амплитуды электрического поля в поперечном сечении при различных значениях  $z$ , отнормированное на максимальное значение амплитуды в начальном сечении  $z = 0$ , представлено на рис. 4 а. Для наглядности рядом (рис. 4 б) показано

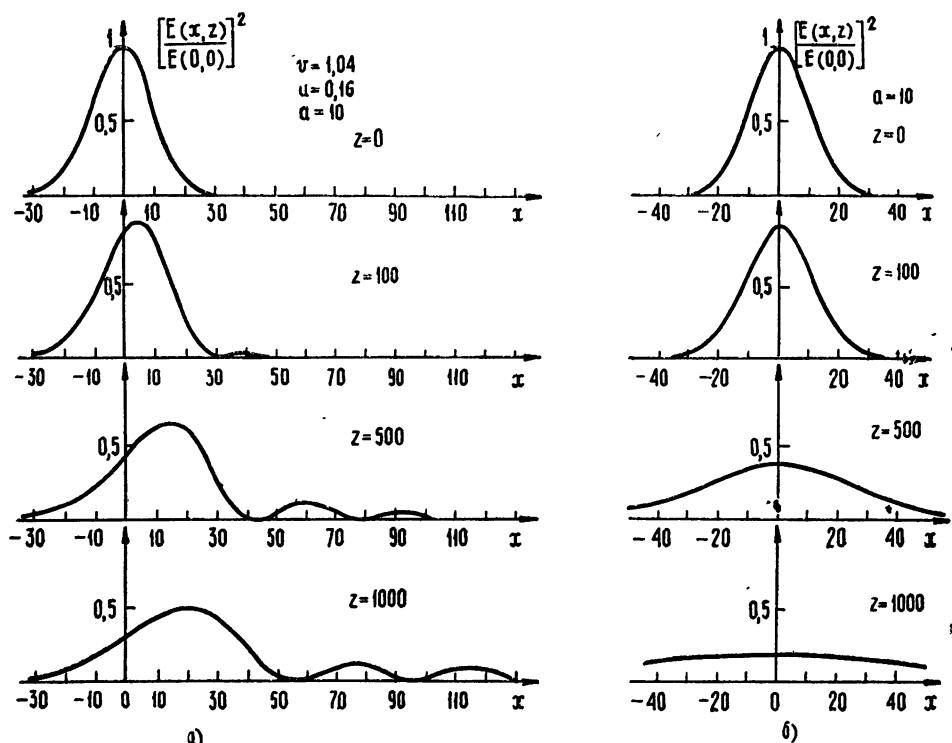


Рис. 4. Распределение квадрата амплитуды электрического поля в поперечном сечении пучка, отнормированное на максимальное значение амплитуды в начальном сечении: а) — пучок в плазме в особом направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \neq 0$ ; б) — пучок в вакууме.

распределение квадрата амплитуды в обычном гауссовом пучке, распространяющемся в вакууме вдоль оси  $z$ . Как видно непосредственно из сравнения кривых рис. 4 а и 4 б, выяснение степени относительной медленности расплывания пучка, распространяющегося в особом направлении, затрудняется осцилляторным характером распределения медленной амплитуды. В зависимости от условий задачи — значения параметров, расстояния  $z$  — за основу могут быть приняты различные признаки, наиболее общими из которых мы и руководствовались при построении графиков рис. 5 и 6. На рис. 5 воспроизводится изменение амплитуды поля в главном максимуме (кривая 2) с расстоянием  $z$  вплоть до выхода на указанную выше асимптотику (см. (11)); там же приведена аналогичная кривая (1) для «вакуумного» случая. Граница пучка в области тени определялась обычным образом — по спаданию квадрата амплитуды в  $e$  раз. Соответствующая кривая, отмеченная на рис. 6 значком  $s$ , с увеличением  $z$  асимптотически приближается к некоторой прямой  $x = \text{const}$ , так что,

начиная уже со сравнительно близких  $z$ , эту границу можно считать фиксированной. Пунктирная кривая на рис. 6 определяет положение

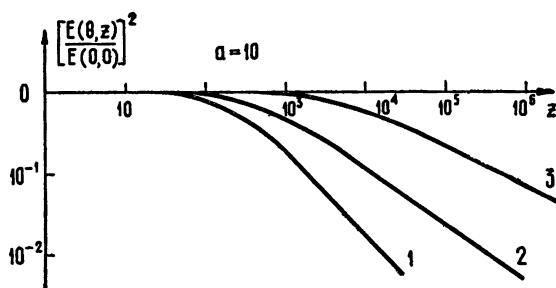


Рис. 5. Значение квадрата амплитуды электрического поля в главном максимуме: 1) — пучок в вакууме; 2) — пучок в плазме в особым направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0, \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \neq 0$ ; 3) — пучок в плазме в особым направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0, \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} = 0$ .

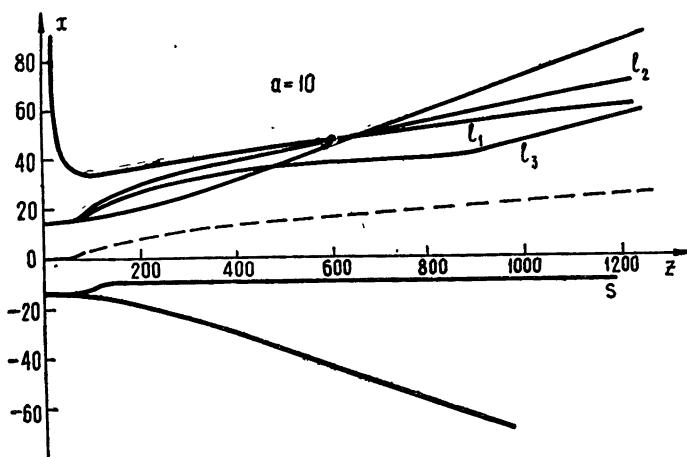


Рис. 6. Границы пучка. Сплошные кривые, не отмеченные значками, относятся к пучку в вакууме; все остальные — к пучку в плазме в особым направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0, \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \neq 0$ ; пунктирная кривая — положения основного максимума; кривая  $s$  — граница в области тени, определенная по спаданию квадрата амплитуды в  $e$  раз; кривые  $l_1, l_2, l_3$  — границы в освещенной области, определенные:  $l_1$  — по положению первого нуля функции Эйри,  $l_2$  — по спаданию в  $e$  раз огибающей,  $l_3$  — по фиксированному значению переосимого потока энергии.

основного максимума; при выполнении условия (11) кривая описывается уравнением

$$x_{m_1} \approx 1,019 \left( \frac{1}{2} p_3 z_{m_1} \right)^{1/3}. \quad (12)$$

Три оставшиеся кривые, отмеченные значком  $l$ , характеризуют границу пучка в освещенной области. Кривая 1 дает положение первого нуля функции Эйри —  $x_{0_1}$ ,  $z_{0_1}$  и описывается уравнением, отличающимся от (12) только постоянным множителем  $1,019 \rightarrow 2,338$ . Вторая кривая (2) построена из условия спадания в  $e$  раз огибающей, соответствующей осциллирующей функции. Наконец, третья кривая (3) вместе с кривой  $s$  ограничивает область с фиксированным значением переосимого потока энергии (точнее  $E^2$ ); причем значение этого потока опре-

делялось по уровню спадания квадрата амплитуды поля в начальном распределении в  $e$  раз. Две оставшиеся кривые относятся к гауссову пучку в вакууме.

Следует отметить, что кривая  $I_3$  на рис. 6 с увеличением  $z$  постепенно выходит на прямую, составляющую некоторый конечный угол  $\psi$  с осью  $z^*$ . Следовательно, площадь поперечного сечения такой моноэнергетической трубы будет убывать как  $1/z$  подобно «вакуумному» случаю. Отсюда, все специфические особенности рассматриваемого пучка связаны, по-видимому, с «перераспределением» поля внутри трубы, обусловленным наличием интерференции волн двух типов—1 и 2 на рис. 3.

Выражение, аналогичное стандартному условию применимости диффузионного описания ( $z \ll 4(2\pi)^4 a^4$ ), получается из (4) в результате подстановки  $\Delta k_x$ , ответственного за формирование пучка в начальном сечении  $\sim 1/a$ :

$$z \ll \frac{4! \pi a^4}{p_4}. \quad (13)$$

Использование же полученных выше формул при больших  $z$  накладывает определенные ограничения на область значений  $x$ . Так, если речь идет о достаточно больших  $z$ , допускающих применение метода стационарной фазы, то соответствующее ограничение выглядит следующим образом:

$$(1/6\pi) (p_4/p_3^2) x^2 \ll z. \quad (14)$$

С ростом  $z$  размер указанной области увеличивается; при этом, как видно из сравнения с (12), она включает все большее число периодов функции Эйри.

4. При изучении распространения пучка в особых направлениях, вдоль которых не только вторая, но и третья производная обращается в нуль ( $p_2 = \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0$ ,  $p_3 = \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} = 0$ ), мы будем иметь в виду непосредственно случаи, описываемые поверхностями волновых векторов, изображенными на рис. 1 б. В силу симметрии задачи относительно интересующего нас направления здесь также можно ограничиться рассмотрением двумерного пучка; обобщение на трехмерный осуществляется очевидным образом. Если выполняется условие

$$\frac{1}{6!} p_6 z (\Delta k_x)^6 \ll \pi \quad (15)$$

( $p_6 = 0$  в силу четности функции  $k_z(k_x)$ ), то определяющим становится член с четвертой производной и выражение для медленно меняющейся амплитуды поля представляется в виде

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x) \exp [-i(k_x x + k_x^4 p_4 z / 24)] dk_x, \quad (16)$$

где производная берется в точке  $k_x = 0$ .

В качестве примера возьмем, по-прежнему, квазиоптический пучок, спектр которого и распределение поля на начальной апертуре описывается функцией Гаусса (6), (7). При этом интеграл (16) может быть переписан следующим образом:

\* Как нетрудно убедиться, при  $z$ , удовлетворяющих условию  $z^{2/3} \gg (1/\operatorname{tg}\psi) (p_4/2)^{1/3}$ , отклонения от прямой практически несущественны.

$$E(x, z) = \frac{a \sqrt[4]{\pi}}{\sqrt[4]{z}} E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(Q\tau + R\tau^3 + \tau^4)] d\tau, \quad (17)$$

где  $Q = x \sqrt[4]{z}$ ,  $R = ia^2 / \sqrt[4]{z}$ . Входящий в (17) интеграл  $I(Q, R)$  исследовался ранее в связи с задачей об определении поля в окрестности точки касания каустик [6, 7]. К сожалению, приведенные в указанных работах численные значения  $I$  как функции  $Q, R$  охватывают только область действительных параметров и потому не могут быть использованы в данном случае.

Значение амплитуды поля на оси пучка  $E(0, z)$ , где  $Q = 0$ , выражается через одну из функций параболического цилиндра  $D_{-1/2}$  [8]:

$$E(0, z) = \sqrt[4]{\frac{3}{ip_4 z}} a E_0 \sqrt{2} D_{-1/2} \left( 2a^2 \sqrt{\frac{3}{ip_4 z}} \right) \exp \left( a^4 \frac{3}{ip_4 z} \right). \quad (18)$$

В соответствии с асимптотическими представлениями функции  $D_{-1/2}$  поле на оси практически не меняется вплоть до значений  $z \ll 32a^4/p_4$ ; при выполнении же неравенства  $z \gg 3a^4/p_4$  поле на оси спадает как  $\sim 1/\sqrt[4]{z}$ :

$$E(0, z) \simeq \Gamma \left( \frac{1}{4} \right) \sqrt[4]{\frac{3}{2ip_4 z}} \exp \left( i \frac{9a^4}{p_4 z} \right). \quad (19)$$

Такой замедленный, даже по сравнению с предыдущим случаем ( $\sim 1/\sqrt[3]{z}$ ), закон спадания свидетельствует, по всей вероятности, об еще более медленном характере расплывания пучка.

Применение формул (17)–(19) требует знания четвертой производной  $p_4 = \frac{\partial^4 k_z}{\partial k_x^4}$  в точке  $k_x = 0$  как функции параметров задачи.

В настоящей работе, однако, как уже отмечалось в пункте 3, вычислялось непосредственно распределение амплитуды в поперечном сечении. Численный счет, по-прежнему, выполнялся на основании общей формулы, включающей все производные высшего порядка. Соответствующие результаты представлены на рис. 5 (кривая 3), 7, 8 (кривая 3). Граница пучка—рис. 8—определялась по спаданию квадрата амплитуды

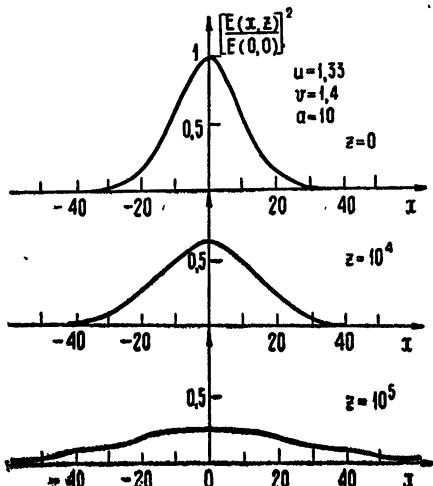


Рис. 7. Распределение квадрата амплитуды электрического поля в поперечном сечении пучка в плазме в особом направлении с

$$\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} = 0.$$

ды в  $e$  раз\*; там же для большей наглядности воспроизведены кривые  $l_3, s$  и кривая, относящаяся к гауссову пучку в вакууме, рис. 6.

Одной из наиболее важных особенностей представленного на указанных рисунках частного случая, как, впрочем, и рассматриваемо-

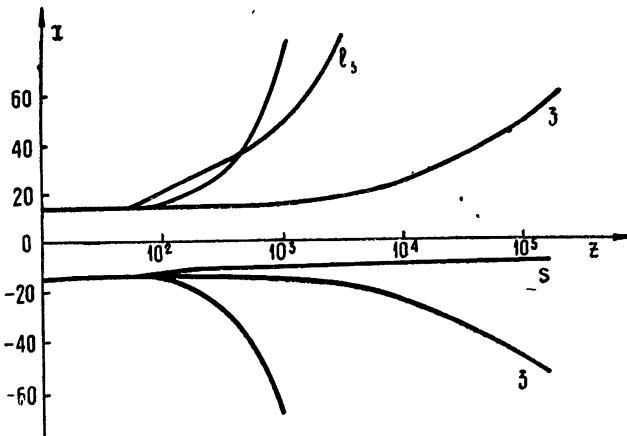


Рис. 8. Границы пучка. Кривые 3—пучок в плазме в особым направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2} = 0, \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} = 0$ ; граница определена по спаданию квадрата амплитуды в  $e$  раз. Кривые  $l_3$  и  $s$ —пучок в плазме в особом направлении с  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}, \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3} \neq 0$ . Кривые без значков—пучок в вакууме.

го в этом пункте случая вообще, следует признать наличие весьма протяженного участка, на котором пучок практически не расплывается.

5. Резюмируя, можно утверждать следующее. В анизотропных (включая гиротропные) средах, действительно, существуют такие особые направления, при распространении вдоль которых квазиоптические пучки расплываются медленнее, чем это имеет место в обычных направлениях, в частности, в свободном пространстве. Рассмотренные в настоящей, первой части работы особенности связаны с нарушением диффузационного приближения и выражаются в равенстве нулю второй

$p_2 = \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}$  или второй и третьей  $p_3 = \frac{\partial^3 k_z}{\partial k_x^3}$  производных одновременно.

При выполнении соответствующих расчетов преследовалась, в основном, цель обоснования высказанных выше утверждений и иллюстрации главных отличительных характеристик исследуемых электромагнитных пучков. Выбор же оптимальных, как с точки зрения получения наименьшей расходимости, так и практической реализации значений параметров требует привлечения значительно большего количества численных данных.

Авторы признательны В. И. Таланову за полезные дискуссии и И. Г. Кисляковой за помощь при выполнении численных расчетов.

\* Этот признак хотя и не является оптимальным, но представляется довольно удобным при сравнении с другими случаями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).
2. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмаков, Е. А. Розенблум, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 725 (1965).
3. E. A g b e l, L. B. F e l s e n, Electromagnetic Theory and Antennas, Proc. Symp. held at Copenhagen, Pergamon Press, 1963, p. 421.
4. В. Ф. Алексин, В. Н. Пахомов, Е. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1135 (1965).
5. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.
6. T. Pearcey, Phil. Mag., 37, 311 (1946).
7. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 октября 1968 г.

## ELECTROMAGNETIC BEAMS IN ANISOTROPIC MEDIA. I

*Yu. Ya. Brodskii, I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller*

The properties of quasi-optical electromagnetic beams propagating in anisotropic media in peculiar directions are examined. The corresponding properties are associated with violation of the usual diffusion approximation which is formally expressed by the condition  $\frac{\partial^2 k_z}{\partial k_x^2}$  where the  $z$ -axis is assumed oriented in the direction of beam propagation. The change of transverse structure of such beams with the growth of  $z$  is analysed in detail. It is shown that electromagnetic beams propagating in the indicated peculiar directions are diffused more slowly than in usual directions, in particular, in a free space.

УДК 621.378 : 538.56

## ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Р. Ю. Орлов

Многие оптически нелинейные соединения являются двухосными кристаллами. В настоящей статье приводятся выражения, определяющие частные направления синхронизма в двухосных кристаллах. Исследован кристалл оксалата аммония, который позволяет осуществить генерацию второй гармоники синхронно с основной частотой и, что особенно существенно, синхронизовать основное излучение со второй и третьей гармониками одновременно. Последнее обстоятельство позволяет, в принципе, создать параметрический генератор с низкочастотной накачкой.

В оптически двухосных кристаллах при достаточно большом двупреломлении направления синхронизма образуют около каждой оптической оси два вложенных друг в друга некруговых конуса. При меньшем двупреломлении соответствующие конусы сливаются и далее стягиваются в конус около средней оси индикатрисы.

Как и в одноосных кристаллах, возможно сложение волн одинаковой поляризации, что дает конус с меньшим углом при вершине, и волн разной поляризации, что дает конус с большим углом. Частные направления синхронизма, лежащие в главных сечениях индикатрисы, а также в сечении, проходящем через среднюю ось индикатрисы и оптическую ось (рис. 1), определяются аналитически (табл. 1)\*. В согласии с симметрией кристалла, в некоторых направлениях генерация может отсутствовать из-за равенства нулю соответствующих компонент тензора квадратичной поляризуемости.

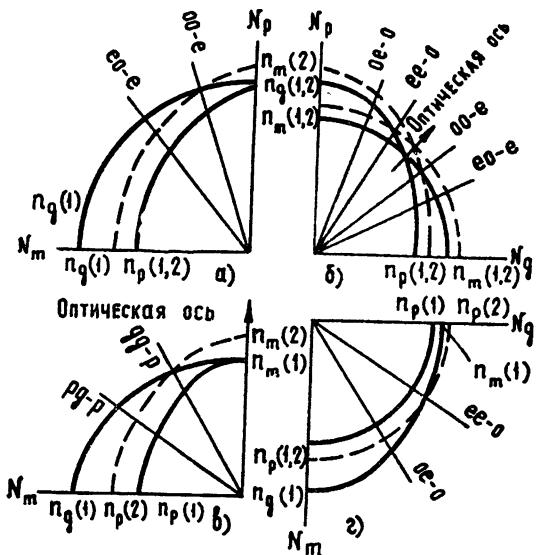


Рис. 1. Сечения поверхностей показателей преломления и типы взаимодействия. Сплошная линия—основная частота, пунктирная линия—вторая гармоника.

\* Выражения, относящиеся к взаимодействию волн разной поляризации, выведены в предположении, что  $n_g - n_p \ll n_g$ , что практически всегда выполняется.

Таблица 1

Рис.	Плоскость и начало отсчета	Синус угла синхронизма	Тип взаимо- действия
1а	$N_m N_p$ ось $N_p$	$\frac{n_p(2)}{n_g(1)} \left[ \frac{n_m^2(2) - n_g^2(1)}{n_m^2(2) - n_p^2(2)} \right]^{1/2}$	$o_1 o_1 - e_2$
"	" — "	$\left[ \frac{2n_m(2) - n_g(1) - n_m(1)}{2n_m(2) - 2n_p(2) - n_m(1) + n_p(1)} \right]^{1/2}$	$e_1 o_1 - e_2$
1б	оптических осей ось $N_p$	$\frac{n_p(1)}{n_m(2)} \left[ \frac{n_g^2(1) - n_m^2(2)}{n_g^2(1) - n_p^2(1)} \right]^{1/2}$	$e_1 e_1 - o_2$
"	" — "	$\frac{n_p(2)}{n_m(1)} \left[ \frac{n_g^2(2) - n_m^2(1)}{n_g^2(2) - n_p^2(2)} \right]^{1/2}$	$o_1 o_1 - e_2$
"	" — "	$\left[ \frac{n_g(1) + n_m(1) - 2n_m(2)}{n_g(1) - n_p(1)} \right]^{1/2}$	$o_1 e_1 - o_2$
"	" — "	$\left[ \frac{2n_g(2) - n_g(1) - n_m(1)}{2n_g(2) + n_p(1) - 2n_p(2) - n_g(1)} \right]^{1/2}$	$e_1 o_1 - e_2$
1в	$N_m$ — оптической оси оптическая ось	$\left[ \frac{n_m(2) - n_m(1)}{n_g(1) + n_m(2) - n_m(1) - n_p(2)} \right]^{1/2}$	$g_1 g_1 - p_2$
"	" — "	$\left[ \frac{2n_m(2) - 2n_m(1)}{2n_m(2) - 2n_p(2) + n_g(1) + n_p(1) - 2n_m(1)} \right]^{1/2}$	$p_1 g_1 - p_2$
1г	$N_m N_g$ ось $N_m$	$\frac{n_m(1)}{n_p(2)} \left[ \frac{n_g^2(1) - n_p^2(2)}{n_g^2(1) - n_m^2(1)} \right]^{1/2}$	$e_1 e_1 - o_2$
"	" — "	$\left[ \frac{n_g(1) + n_p(1) - 2n_p(2)}{n_g(1) - n_m(1)} \right]^{1/2}$	$o_1 e_1 - o_2$
2	оптических осей ось $N_p$	$\left[ \frac{3n_g(3) - 2n_g(2) - n_m(1)}{3n_g(3) - 3n_p(3) + 2n_p(2) - 2n_g(2)} \right]^{1/2}$	$o_1 e_2 - e_3$

$o$  — волна, поляризованная перпендикулярно плоскости данного сечения;  $e$  — волна, поляризованная в плоскости сечения;  $g$  — волна с большим показателем преломления;  $p$  — волна с меньшим показателем преломления; 1, 2, 3 — индексы основной частоты, второй и третьей гармоник.

К оптически двухосным кристаллам принадлежит оксалат аммония —  $(\text{NH}_4)_2\text{C}_2\text{O}_4\text{H}_2\text{O}$ . Кристалл относится к классу Р222, прозрачен в области 3000—11000 Å, имеет двупреломление 0,15 и коэффициенты

квадратичной поляризуемости, выраженные в относительных единицах через  $\chi_{36}$  дигидрофосфата калия [1],  $\chi_{14}=0,9$ ,  $(\chi_{25}+\chi_{36})/2=1,6$ .

Два направления синхронизма, найденные нами экспериментально, лежат в плоскости оптических осей и составляют с осью  $N_p$  углы  $\theta_1 = 23^\circ 10'$  (взаимодействие  $e_1 e_1 - o_2$ ) и  $\theta_2 = 45^\circ 45'$  (взаимодействие  $e_1 o_1 - e_2$ ). Соответствующие расчетные значения, уточненные по [2]  $\theta_1 = 22^\circ 20'$  и  $\theta_2 = 48^\circ$ . Третье направление лежит в плоскости, проходящей через ось  $N_m$  и оптическую ось, и составляет с последней угол  $5^\circ 40'$ .

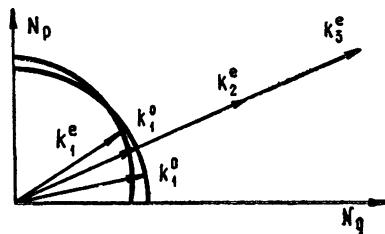
Большое двупреломление оксалата аммония допускает существование новых типов взаимодействия, не наблюдавшихся ранее в KDP. Так, например, возможна одновременная синхронная генерация двух гармоник (второй и третьей) на основе последовательного трехчастотного взаимодействия (рис. 2)

$$\mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_1^o = \mathbf{k}_2^e; \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e = \mathbf{k}_3^e, \quad (2)$$

где (1)—векторное, а (2)—скалярное взаимодействие.

Рис. 2. Векторное взаимодействие для синхронной генерации второй и третьей гармоник в оксалате аммония.



Взаимодействие (2) возможно, например, в плоскости оптических осей под углом  $55^\circ$  к оси  $N_p$ . При этом существуют два решения для углов  $\alpha$ , которые составляют векторы  $\mathbf{k}_1^e$  и  $\mathbf{k}_1^o$  с вектором  $\mathbf{k}_2^e$ :

в первом случае  $\alpha(\mathbf{k}_1^e) = 3^\circ 30'$ ,  $\alpha(\mathbf{k}_1^o) = -3^\circ 20'$ ,

во втором случае  $\alpha(\mathbf{k}_1^e) = -9^\circ$ ,  $\alpha(\mathbf{k}_1^o) = 8^\circ 50'$ .

Положительным считается направление от оси  $N_p$ .

Если в взаимодействии (2) придать векторный характер, так чтобы  $\mathbf{k}_1^o$  был общим вектором в системе взаимодействий, возможно обращение всей системы в параметрический генератор с низкочастотной накачкой (на частоте  $2\omega$ ), рассмотренный, например, в [3].

Разница между групповыми скоростями основной частоты и второй гармоники в оксалате аммония сравнительно невелика:  $(1/u_2) - (1/u_1) = 4 \cdot 10^{-13}$  сек. см<sup>-1</sup> при взаимодействии  $e_0 - e$  и  $7,2 \cdot 10^{-13}$  сек. см<sup>-1</sup> при взаимодействии  $e_0 - o$ . Благодаря этому данный кристалл пригоден также для удвоения частоты пикосекундных импульсов света.

Автор признателен С. А. Ахманову и Р. В. Хохлову за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Израиленко, Р. Ю. Орлов, В. А. Копчик, Кристаллография, 13, 171 (1968).
2. M. V. Hobden, J. Appl. Phys., 38, 4365 (1967).
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.

## HARMONIC GENERATION OF OPTICAL RADIATION IN TWO-AXIAL CRYSTALS

*R. Yu. Orlov*

Many optically-nonlinear compositions are bi-axial crystals. The present paper deals with the expressions determining partial directions of synchronism in biaxial crystals. The ammonium oxalate crystal is investigated, which enables one to realize the second harmonic generation synchronously with the principle frequency and that it especially important, to synchronize the main radiation with the second and the third harmonics simultaneously. The last circumstance permits, in principle, to create a parametric generator with a low-frequency pumping.

---

УДК 538.56

## НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСРЕДНЕНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМ ОБМЕНЕ

*А. И. Бурштейн, А. С. Бобровский*

Дано неадиабатическое обобщение формализма теории, описывающей усреднение структуры спектров магнитного резонанса благодаря перескокам между соседними положениями равновесия. В случае двух ям рассчитан спектр как в области резонанса, так и вблизи нуля частот (спектр потерь). Показано, что аддиабатическое сужение сменяется неадиабатическим уширением и последующим сужением, если частота переходов соизмерима с основной частотой.

### 1. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

В теории магнитного резонанса хорошо известно явление термического усреднения структуры спектра, которое вызывается случайными перемещениями атома или спина, сопровождающимися изменением его резонансной частоты. Усреднение, а затем сужение спектра вблизи его центра тяжести происходит вследствие быстрого изменения частоты резонансной линии. Подобное явление не является привилегией магнитной спектроскопии или конденсированных сред, а носит весьма общий характер и может быть наблюдаемо в газе и в оптическом диапазоне частот [1]. Для этого необходимо только, чтобы модуляция частоты осуществлялась переходами, одинаково изменяющими фазы комбинирующих состояний. Тогда их относительная величина — фаза излучения — остается неизменной, что является непременным условием появления эффекта сужения.

Задача настоящей работы — обобщить теорию динамического усреднения спектров ЭПР и ЯМР, которая обычно развивается в предположении, что плоскость прецессии не изменяется при переходах, на тот случай, когда различные положения равновесия отличаются не только ларморовой частотой, но и ориентацией плоскости прецессии. Относительно частиц (электронов или ядер со спином 1/2) предполагается, что они практически все время находятся в положениях равновесия и только изредка мгновенно меняют их одно на другое. Изменением состояния спина за время перехода пренебрегается, и различаются только те положения равновесия, в которых его гамильтониан не одинаков. Последний является ответственным за сигнал магнитного резонанса на частотах  $\omega_j = |H_j| = |H_0 + \Delta H_j|$ , где  $H_0$  — постоянное поле магнита, а  $\Delta H_j$  — локальная составляющая магнитного поля, отличающая одно положение равновесия от другого.

Гамильтониан взаимодействия спина 1/2 с магнитным полем можно записать в следующем виде:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sigma_i H_j = \frac{\omega_j}{2} \begin{vmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \exp(i\varphi_j) \\ \sin \theta_j \exp(-i\varphi_j) & -\cos \theta_j \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $\theta_j$  и  $\varphi_j$  — углы ориентации  $H_j$  в фиксированной в пространстве системе координат, а  $\sigma_i$  — матрицы Паули.

Так как локальные поля в твердом парамагнетике не обязательно параллельны друг другу, полное поле  $H_0 + \Delta H_j$  в различных положе-

ниях равновесия может различаться не только по величине, но и по направлению. В этом случае спин-гамильтонианы (1.1), соответствующие различным положениям, не коммутативны, и неадиабатическое обобщение теории динамического усреднения структуры спектров ЭПР и ЯМР уместно и необходимо.

Согласно корреляционной теории формы спектральных линий [2], мнимая часть дисперсии магнитной составляющей поля излучения определяется формулой

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega N_0}{2kT} \operatorname{Re} \int_0^\infty K(t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.2)$$

где  $K(t)$  — функция корреляции компонент магнитного момента

$$K(t) = \operatorname{Sp} \overline{\hat{M}(t)} \hat{M}(0), \quad (1.3)$$

$\overline{\hat{M}(t)}$  — оператор компонент магнитного момента, усредненный по всем реализациям случайного процесса.

В рассматриваемой задаче случайной величиной является магнитное поле  $H_j$ , сохраняющееся с вероятностью

$$W_j(t) = \exp(-t/\tau_j), \quad (1.4)$$

где  $\tau_j$  имеет смысл среднего времени пребывания частицы в  $j$ -м положении равновесия. Но если переход имел место, то с вероятностью  $\pi_{jm}$  частица, находившаяся в  $m$ -м положении равновесия, может оказаться в  $j$ -м.

Так как случайный процесс с самого начала предполагался стационарным, т. е. в каждом временном сечении случайного процесса частица распределена между  $j$ -ми положениями равновесия согласно статистическим весам  $P_j = \text{const}$ , то  $P_j$ ,  $\pi_{jm}$  и  $\tau_j$  не независимы, а связаны между собой следующими тождествами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_j} P_j &= \sum_m \frac{1}{\tau_m} \pi_{jm} P_m, \\ \sum_j \pi_{jm} &= 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

являющимися следствием стационарности случайного процесса.

Если известен парциальный оператор магнитного момента  $\hat{M}_j(t)$ , то искомый  $\overline{\hat{M}(t)}$  дается соотношением

$$\overline{\hat{M}(t)} = \sum_i P_i \hat{M}_j(t). \quad (1.6)$$

Релаксационное уравнение для оператора  $\hat{M}_j(t)$ , подверженного случайной модуляции видна (1.4), (1.5), можно получить, следуя работе [3], в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{M}_j(t) = i[\hat{H}_j \hat{M}_j(t)] - \frac{1}{\tau_j} \hat{M}_j(t) + \sum_m \frac{\pi_{jm} P_m}{\tau_m P_j} \hat{M}_m(t). \quad (1.7)$$

Это уравнение отличается от полученного в [3] тем, что случайная переменная имеет дискретный спектр значений. Одновременно оно

является прямым обобщением феноменологических уравнений Мак-Коннела [4] на тот случай, когда спин-гамильтонианы (1.1), соответствующие различным положениям равновесия, не коммутативны.

В случае, когда каждый переход восстанавливает равновесное распределение, следует считать

$$\tau_j = \tau_0, \quad \pi_{jm} = P_j, \quad (1.8)$$

что позволяет придать релаксационному уравнению (1.7) следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_j(t) = i [\hat{H}_j \hat{M}_j(t)] - \frac{1}{\tau_0} \hat{M}_j(t) + \frac{1}{\tau_0} \overline{\hat{M}(t)}. \quad (1.9)$$

Или иначе

$$\frac{\partial}{\partial t} X_{ja}(t) = i A_{\alpha\beta}^j X_{j\beta}(t) - \frac{1}{\tau_0} [X_{ja}(t) - \overline{X_a(t)}]; \quad (1.9a)$$

$$\overline{X_a(t)} = \sum_j P_j X_{ja}(t), \quad (1.9b)$$

где  $\alpha, \beta$  — собирательные индексы, так что

$$X(t)_{ja} = \begin{vmatrix} \langle 1 | \hat{M}_j(t) | 2 \rangle \\ \langle 2 | \hat{M}_j(t) | 1 \rangle \\ \langle 1 | \hat{M}_j(t) | 1 \rangle \\ \langle 2 | \hat{M}_j(t) | 2 \rangle \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

$$A_{\alpha\beta}^j = \omega_j \begin{vmatrix} \cos \theta_j & 0 & -\frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(-i\varphi_j) & \frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(-i\varphi_j) \\ 0 & -\cos \theta_j & \frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(i\varphi_j) & -\frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(i\varphi_j) \\ -\frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(-i\varphi_j) & \frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(i\varphi_j) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(-i\varphi_j) & -\frac{1}{2} \sin \theta_j \exp(i\varphi_j) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\theta_j$  и  $\varphi_j$  — те же, что и в (1.1).

Функция корреляции (1.3) в переменных (1.10) приводится к выражению

$$K(t) = X_a(0) \overline{X_a(t)}, \quad (1.11a)$$

где

$$X_a(0) = \frac{\gamma}{2} \begin{vmatrix} \sin \theta e^{i\varphi} \\ \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \cos \theta \\ -\cos \theta \end{vmatrix}, \quad (1.11b)$$

если линейно поляризованное переменное магнитное поле определено в пространстве углами  $\theta$  и  $\varphi$  ( $\gamma$  — гиромагнитное отношение). С помощью (1.11a) общее определение дисперсии магнитной составляющей излучения (1.2) трансформируется к виду

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega N_0}{2kT} \operatorname{Re} \overline{\Phi_\alpha(\omega)} X^\alpha(0); \quad (1.12)$$

$$\overline{\Phi_\alpha(\omega)} = \int_0^\infty \overline{X_\alpha(t)} e^{i\omega t} dt. \quad (1.13)$$

Проводя фурье-преобразование непосредственно для уравнения (1.9а), разрешив его относительно  $\Phi_{\alpha}(\omega)$  и выполнив усреднение по  $j$ , подобное (1.9 б), легко получить

$$\overline{\Phi_\alpha(\omega)} = \left[ \left( \hat{B}^{-1} - \frac{1}{\tau_0} \right)^{-1} \right]_{\alpha\beta} X_\beta(0), \quad (1.14)$$

где

$$\hat{B} = \sum_j P_j \left[ i\omega - i\hat{A}_j + \frac{1}{\tau_0} \right]^{-1}. \quad (1.15)$$

Используя (1.14) в (1.12), находим окончательное выражение для частотной развертки магнитной проницаемости:

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega N_0}{2kT} \operatorname{Re} X^\alpha(0) \left[ \left( \hat{B}^{-1} - \frac{1}{\tau_0} \right)^{-1} \right]_{\alpha\beta} X_\beta(0); \quad (1.16)$$

ее вычисление сводится этой формулой к чисто алгебраическим операциям.

## 2. ДВА РЕЗОНАНСА

Чтобы выяснить, что нового вносит неадиабатичность в процесс обменного усреднения структуры спектра, рассмотрим простейшую систему с двумя положениями равновесия.

Выберем систему координат так, чтобы ее ось  $z$  совпадала с направлением векторной суммы полных полей, расположенных в плоскости  $xz$  (рис. 1):

$$\omega_1 \sin \theta_1 = \omega_2 \sin \theta_2 = b. \quad (2.1)$$

Тогда спин-гамильтонианы, определенные выражением (1.1), примут следующий вид:

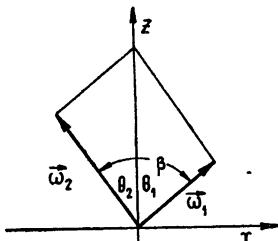


Рис. 1.

$$\hat{H}_1 = \frac{\omega_1}{2} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_2 = \frac{\omega_2}{2} \begin{vmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \end{vmatrix}.$$

Чтобы еще более упростить задачу, ограничимся частным случаем, когда частица равномерно распределена между положениями равновесия, т. е.  $P_1 = P_2 = 1/2$ .

Тогда дисперсия, заданная формулой (1.16), после выполнения необходимых алгебраических преобразований приводится к следующему обозримому виду:

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega N_0 \gamma^2}{2kT} \operatorname{Re} \frac{Q(\omega, \theta, \varphi)}{x^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x^2 + (\omega_1^2\omega_2^2 + |\omega_1 + \omega_2|^2/4\tau_0^2)x + \omega_1^2\omega_2^2 \sin^2 \varphi / 4\tau_0^2} \quad (2.3)$$

где

$$\dot{x} = -\omega^2 + i\omega/\tau_0, \quad \beta = \theta_1 + \theta_2.$$

Частотная зависимость дисперсии определена этой формулой явным образом, что же касается интенсивностей линий, то они заданы функцией  $Q(\omega, \theta, \varphi)$ , которая для каждой ориентации переменного поля в выбранной системе координат имеет свой специфический вид. Ниже приводятся значения этой функции для трех взаимно перпендикулярных ориентаций:

$$Q_r = \begin{vmatrix} Q\left(\omega, \frac{\pi}{2}, 0\right) \\ Q\left(\omega, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ Q\left(\omega, 0, 0\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{vmatrix}; \quad (2.4)$$

$$Q_x = (x + b^2) \left[ i\omega \left( x + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right) + \frac{1}{\tau_0} \left( x + \frac{|\omega_1 - \omega_2|^2}{4} \right) \right]; \quad (2.4a)$$

$$Q_y = x \left[ i\omega \left( x + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right) + \frac{1}{\tau_0} \left( x + \frac{|\omega_1 - \omega_2|^2}{4} \right) \right]; \quad (2.4b)$$

$$Q_z = \frac{b^2 |\omega_1 + \omega_2|^2}{4\tau_0} + \left( i\omega + \frac{1}{\tau_0} \right) \left[ (x + \omega_1^2)(x + \omega_2^2) - b^2 \left( x + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \right) + \frac{|\omega_1 + \omega_2|^2}{4\tau_0^2} \right]. \quad (2.4b)$$

Дальнейший анализ связан с определением корней многочлена

$$y(x) = x^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x^2 + \left( \omega_1^2 \omega_2^2 + \frac{|\omega_1 + \omega_2|^2}{4\tau_0^2} \right)x + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \beta}{4\tau_0^2}, \quad (2.5)$$

появляющегося в знаменателе (2.3). Здесь легко различимы следующие предельные случаи: а)  $1/2\tau_0 \ll |\omega_1 - \omega_2|$ ; б)  $|\omega_1 - \omega_2| < \frac{1}{2\tau_0} < \omega_1, \omega_2$ ;

в)  $\omega_1, \omega_2 < 1/2\tau_0$ .

а) В первом из них корни (2.5) приблизительно равны

$$x_1 = -\omega_1^2 - \frac{\bar{\omega}}{2\Delta\omega\tau_0^2} \cos^4 \frac{\beta}{2}, \quad x_2 = -\omega_2^2 + \frac{\bar{\omega}}{2\Delta\omega\tau_0^2} \cos^4 \frac{\beta}{2}, \quad (2.6)$$

$$x_3 = -\frac{\sin^2 \beta}{4\tau_0^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1).$$

Этот предельный случай в адиабатическом варианте теории соответствует квазистатическому спектру с разрешенной структурой, когда имеются две спектральные линии. То же самое наблюдается и здесь. Используя (2.6) в общем решении (2.3), можно определить форму спектральных линий вблизи резонансных частот:

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{4} \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{2kT} \frac{(1/2\tau_0)Q_r}{\{[\omega^2 - (\omega_1 + \delta)^2]/2\omega\}^2 + (1/2\tau_0)^2}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta_1 \\ 1 \\ \sin^2 \theta_1 \end{vmatrix}; \quad (2.7a)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{4} \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{2kT} \frac{(1/2\tau_0)Q_r}{\{[\omega^2 - (\omega_2 - \delta)^2]/2\omega\}^2 + (1/2\tau_0)^2}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta_2 \\ 1 \\ \sin^2 \theta_2 \end{vmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{4\tau_0^2} \cos^4 \frac{\beta}{2}.$$

Кроме того, возможно поглощение дебаевского типа на нулевых частотах,

$$\chi''(\omega) = \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{2kT} \frac{(1/4\tau_0^2) \sin^2 \beta Q_r}{\omega^2 + (1/\tau_0^2)[1 - (1/2) \sin^2 \beta]}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (2.7b)$$

подобное спектру потерь в параллельных полях [1]. Оно возникает вследствие переориентации плоскости прецессии при переходах, индуцирующих релаксацию  $z$ -компоненты момента. При  $\beta = 0$  нерезонансное поглощение полностью исчезает, поскольку при адиабатической смене частот релаксация вдоль оси  $z$  не возникает, а сторонние механизмы (взаимодействие со средой) нами игнорировались.

б) При увеличении частоты перескоков  $1/2\tau_0$  до величины, большей  $|\omega_2 - \omega_1|$ , но все еще меньшей  $\omega_1, \omega_2$ , в области нулевых частот ничего существенно не изменяется, тогда как резонансное поглощение качественно трансформируется: разрешенная структура смазывается, сливааясь в одну линию. Действительно, корни уравнения в этом случае равны

$$x_1 = x_2^* = -\bar{\omega}^2 + i\omega \left[ \frac{1}{2\tau_0} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \frac{(\Delta\omega)^2 \tau_0}{2 \cos^2(\beta/2)} \right], \quad x_3 = -\frac{\sin^2 \beta}{4\tau_0^2} \quad (2.8)$$

и соответственно

$$\chi''(\omega) = \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{4kT} \frac{\Gamma Q_r}{(\omega - \bar{\omega} + \delta)^2 + \Gamma^2}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

где

$$\delta = \frac{1}{4\tau_0^2 \omega} \left( \sin^2 \beta + \sin^4 \frac{\beta}{2} \right); \quad (2.9a)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\tau_0} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{(\Delta\omega)^2 \tau_0}{4 \cos^2 \beta/2} \quad (\beta < \pi). \quad (2.9b)$$

Из анализа выражения (2.9 б), задающего ширину слившейся линии, видно, что спектральная линия сначала сужается, как в адиабатической теории, но затем начинает уширяться пропорционально  $(1/2\tau_0)$ . Стадия уширения — качественно новое явление, имеющее место в неадиабатической теории. Оно обусловлено изменением ориентации плоскости прецессии при переходах, благодаря чему перескоки вызывают не только частотную, но и амплитудно-фазовую модуляцию, обуславливающую уширение. Естественно поэтому, что при  $\beta \rightarrow 0$  это явление полностью исчезает.

в) Наконец, когда  $(1/2\tau_0)$  становится больше  $\omega_1, \omega_2$ , корни уравнения (2.5) имеют вид

$$x_1 = x_2^* = -\frac{1}{2} \left( \omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \beta}{|\omega_1 + \omega_2|^2} \right) + i \frac{|\omega_1 + \omega_2|}{2\tau_0},$$

(2.10)

$$x_3 = - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \beta}{|\omega_1 + \omega_2|^2}.$$

Соответственно резонансная линия определяется выражением

$$\chi''(\omega) = \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{4kT} \frac{\Gamma Q_r}{(\omega - |\omega_1 + \omega_2|/2)^2 + \Gamma^2}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.10a)$$

где

$$\Gamma = \frac{|\omega_1 - \omega_2|^2 \tau_0}{4} - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \tau_0 \sin^2 \beta}{2 |\omega_1 + \omega_2|^2}, \quad (2.10b)$$

а нерезонансное поглощение имеет вид

$$\chi''(\omega) = \frac{N_0 \gamma^2 \omega}{2kT} \frac{\Gamma Q_r}{\omega^2 + \Gamma^2}, \quad Q_r = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad (2.11a)$$

$$\Gamma = \frac{\tau_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \beta}{|\omega_1 + \omega_2|^2}. \quad (2.11b)$$

Как следует из (2.10b), резонансный сигнал, сместившийся к векторной полусумме полей  $|\omega_1 + \omega_2|/2$ , сужается при возрастании  $(1/2\tau_0)$ . Точно так же ведет себя с увеличением  $1/2\tau_0$  и спектр потерь.

### 3. ОРИЕНТАЦИОННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Выше мы уже отмечали, что если плоскость прецессии не изменяется при переходах, т. е.  $\omega_1 \parallel \omega_2$  ( $\beta = 0$ ), то дело сводится к адиабатической модуляции частоты, и все вышеприведенные формулы редуцируют к известным [5]. Чтобы выделить в чистом виде то новое, что появляется при наличии угла  $\beta$  между полными полями, уместно положить  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ , в результате чего структура спектра (область а) исчезает и в адиабатическом пределе мы имеем просто одиночную бесконечно узкую линию на частоте  $\omega_0$ . Только благодаря переориентации плоскости прецессии при перескоках из (2.9б), (2.10б) получается ненулевая ширина:

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{b^2}{2\omega_0^2 \tau_0} & \text{при } 1/\tau_0 \ll \omega_0 \text{ (область б)} \\ \frac{b^2 \tau_0}{2} & \text{при } 1/\tau_0 \gg \omega_0 \text{ (область в)} \end{cases}, \quad (3.1)$$

где  $b$  — компонента локального поля вдоль оси  $x$ . Характер зависимости ширины (3.1) от частоты перескоков легко интерпретировать, если принять во внимание, что при  $|b| \ll \omega_0$  она просто совпадает с вероятностью переходов, возникающих вследствие изменения знака  $x$  — компоненты поля, рассматриваемого как возмущение:

$$\Gamma = W = \frac{1}{2} \frac{b^2 \tau_0}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2}. \quad (3.2)$$

Естественно, что эта вероятность достигает максимума, когда  $\tau_0$  — время корреляции возмущения совпадает с периодом прецессии (точный резонанс). Результат (3.1) свидетельствует, однако, что вид этой зави-

сности не изменяется и за пределами теории возмущений, когда локальное поле сравнимо с основным:  $b \approx \omega_0$ .

В общем случае при  $\omega_1 \neq \omega_2$  оба эффекта (адиабатическое усреднение структуры и неадиабатическое ориентационное уширение) имеют место одновременно. Вследствие их интерференции и получается сложная немонотонная зависимость ширины слившейся линии от частоты переходов, представленная на рис. 2. Нижняя кривая демонстрирует ее поведение в адиабатическом пределе, верхняя — при наличии конечного угла между полями. Одновременно с изменением ширины происходит и сдвиг линии в область меньших полей — от среднеарифметического к среднегеометрическому (рис. 3), который в адиабатической теории не возникает.

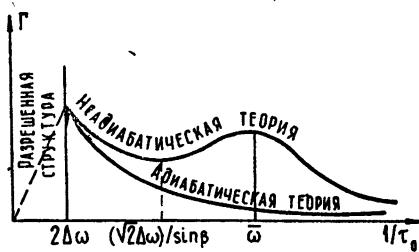


Рис. 2.

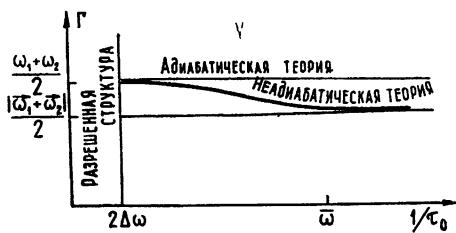


Рис. 3.

Реально, однако, область вторичного сужения для парамагнитного резонанса в СВЧ диапазоне недостижима, так как частоты перехода никогда не достигают величины порядка  $\omega_0 \sim 10^{10}$  гц. Поэтому практический интерес представляет только область б ( $\Delta\omega \ll 1/2\tau_0 \ll \omega_1$ ), где по сдвигу линии и изменению ее ширины можно извлечь информацию об относительной ориентации локальных полей в твердом парамагнетике или молекуле, если их величина не слишком мала по сравнению с постоянным полем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Бурштейн, Ю. И. Наберухин, ЖЭТФ, 52, 1202 (1967).
2. R. Kubo, K. Tomita, J. Phys. Soc. Japan, 9, 888 (1954).
3. А. И. Бурштейн, Ю. С. Оседчик, ЖЭТФ, 51, 1072 (1966).
4. Дж. Попл, В. Шнейдер, Г. Бернстайн, Спектры ядерного магнитного резонанса высокого разрешения, ИЛ, М., 1962, гл. X.
5. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963, стр. 415.

Институт химической кинетики и горения  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
24 апреля 1968 г.

#### NON-ADIABATIC THEORY OF AVERAGING A THIN STRUCTURE IN SPECTRAL EXCHANGE

*A. I. Burshtein, A. C. Bobrovskii*

A non-adiabatic generalization of formalism of the theory, describing the averaging of the structure of magnetic resonance spectra due to jumps between neighbouring positions of equilibrium, is presented. In the case of two pits there is calculated the spectrum both in the resonance region and near the zero of frequencies (the spectrum of losses). It is shown that the adiabatic narrowing is changed into non-adiabatic broadening and the sequent narrowing, if the transient frequency is commensurable with the basic frequency.

УДК 621.373

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ТРЕХЧАСТОТНОМ ГЕНЕРАТОРЕ. СИНХРОННЫЙ РЕЖИМ

*A. H. Малахов, A. A. Мальцев*

Рассмотрено влияние естественных шумов на поведение трех автогенераторов, взаимосинхронизованных на кратных частотах. В приближении сильной синхронизации получены значения ширины всех трех спектральных линий. Найдены условия оптимальной связи между генераторами, приводящие к уменьшению ширины этих спектральных линий по сравнению с режимом свободных колебаний.

### ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестна проблема уменьшения нестабильности частоты автогенераторов. Мерой этой нестабильности может служить ширина спектральной линии автогенератора. Одной из идей, связанных с решением этой проблемы по отношению к естественным флуктуациям, является идея уменьшения естественной ширины спектральной линии путем взаимной синхронизации независимых генераторов. Предполагается, что из-за некоррелированности шумов в каждом из генераторов и взаимосвязанности фаз результирующие флуктуации фаз (а следовательно, и частоты) будут меньшими. Этот вопрос затрагивался в работах [1, 2]\*.

В работе [1], § 9.8 было найдено, что при взаимной синхронизации двух генераторов на близких (совпадающих) частотах ожидаемого эффекта не наступает. Напротив, естественная ширина спектральных линий таких генераторов в синхронном режиме становится большей, чем в режиме свободных колебаний, что объясняется увеличением уровня шумов в генераторах из-за их взаимного проникновения.

В работе [2] рассматривалась взаимная синхронизация двух генераторов, работающих на далеких (кратных) частотах, когда взаимного проникновения шумов практически не происходит. В этом случае действительно было обнаружено уменьшение естественной ширины спектральных линий по сравнению с теми же генераторами, работающими в несинхронном режиме.

В настоящей работе производится дальнейшее изучение этого вопроса. Рассматривается влияние взаимной синхронизации трех генераторов, работающих на дробных частотах, на естественную ширину спектральных линий этих генераторов. Как будет ниже показано, в этом случае также наблюдается уменьшение естественной ширины спектральных линий.

Система трех взаимно синхронизированных автогенераторов представляет собой динамическую систему с тремя степенями свободы и, вообще говоря, может рассматриваться как некоторый трехчастотный (трехмодовый) генератор. Рассмотрение флуктуаций в таком генераторе представляет и собственный интерес. С одной стороны, многомодовые

\* Об анализе проблем по отношению к техническим флуктуациям см. [3, 4].

генераторы начинают привлекать все большее и большее внимание, а с другой стороны, флуктуационные процессы в них почти не изучены (см., например, [5]).

Следует, наконец, отметить, что и динамика автоколебательных систем с тремя степенями свободы исследована чрезвычайно мало. Исследовались лишь одночастотные синхронные режимы [6, 7] и взаимная синхронизация трех автогенераторов на комбинационных частотах [8], когда в целом все колебание является непериодическим. По этой причине определенное внимание в статье будет уделено и динамике синхронного режима с тремя степенями свободы.

### 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ И ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим систему трех взаимосвязанных самовозбужденных изохронных автогенераторов (рис. 1). Естественные шумы представле-

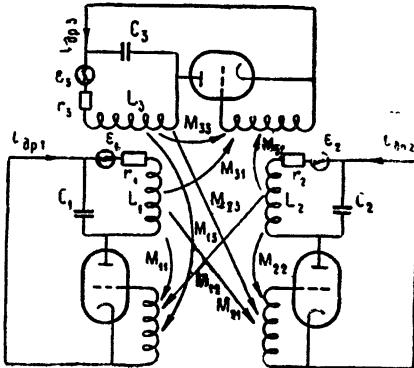


Рис. 1.

ны дробовыми шумами ламп  $i_{dp1}$ ,  $i_{dp2}$ ,  $i_{dp3}$  и тепловыми шумами контуров  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$ . Если через  $u_l(t)$  обозначить напряжение на сетке  $l$ -го генератора в свободном режиме (т. е. в отсутствие связей с двумя другими генераторами), то в режиме достаточно слабой взаимосвязи уравнения движения всей системы примут вид ( $\omega_l = 1/\sqrt{L_l C_l}$ )

$$\ddot{u}_l + \omega_l^2 u_l = F_l(u_1, u_2, u_3, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3) + \omega_l^2 E_l(t) \quad (l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Случайные ЭДС, представляющие естественные шумы автогенераторов, равны

$$E_l(t) = M_l \left( \frac{di_{apl}}{dt} + C_l \frac{d^2 u_l}{dt^2} \right). \quad (2)$$

Малые нелинейные функции  $F_l = F_l(u_1, u_2, u_3, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3)$  имеют вид

$$F_l = \omega_l^2 \left\{ -r_l C_l + S_l \left( \sum_{j=1}^3 k_{lj} u_j \right) \left[ \sum_{j=1}^3 k_{lj} \dot{u}_j \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $S_l(u)$  — нелинейная крутизна,  $k_{lj} = M_{lj} / M_{ll}$  — коэффициенты связи между генераторами, предполагаемые достаточно малыми.

Пусть собственные частоты генераторов близки, к кратным

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \Delta_2, \quad \omega_3 = 3\omega_1 + \Delta_3 \quad (\Delta_2, \Delta_3 \ll \omega_1). \quad (4)$$

Поскольку правые части системы (1) малы, ее решение ищем в виде

$$u_t = R_t \cos(l\omega_1 t + \varphi'_t), \quad \dot{u}_t = -l\omega_1 R_t \sin(l\omega_1 t + \varphi'_t). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1) и применяя метод усреднения (усредняем по периоду  $2\pi/\omega_1$ ), нетрудно получить укороченные уравнения для амплитуд  $R_t(t)$  и фаз  $\varphi'_t(t)$ .

При исследовании взаимодействия генераторов будем учитывать комбинационные тона только низших порядков, поскольку именно они дают основной вклад. Порядком комбинационного тона частоты  $\omega_k = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3$  называется сумма  $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ . При этом для описания всевозможных взаимодействий между главными частотами (4) вполне достаточно представить крутизну ламп полиномами третьей степени:

$$S_t = S_t(u) = S_{t0} + S_{tu} + S_{tu^2} + S_{tu^3}.$$

В этом случае укороченные уравнения могут быть приведены к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_1(R_1, R_2, R_3) + R_1(\lambda_{12} \cos \vartheta'_{12} + \lambda_{13} \cos \vartheta'_{13} + \lambda_1 \cos \vartheta') - \frac{\omega_1}{2} e_{1c}, \\ \dot{R}_2 &= -\frac{1}{2\omega_2} \Phi_2(R_1, R_2, R_3) + R_2(\lambda_{21} \cos \vartheta'_{12} + \lambda_{23} \cos \vartheta'_{23} + \lambda_2 \cos \vartheta') - \frac{\omega_2}{2} e_{2c}, \\ \dot{R}_3 &= -\frac{1}{2\omega_3} \Phi_3(R_1, R_2, R_3) + R_3(\lambda_{31} \cos \vartheta'_{13} + \lambda_{32} \cos \vartheta'_{23} + \lambda_3 \cos \vartheta') - \frac{\omega_3}{2} e_{3c}, \\ \dot{\varphi}'_1 &= \lambda_{12} \sin \vartheta'_{12} + \lambda_{13} \sin \vartheta'_{13} + \lambda_1 \sin \vartheta' - \frac{\omega_1}{2R_1} e_{1c}, \\ \dot{\varphi}'_2 &= \Delta_2 - \lambda_{21} \sin \vartheta'_{12} + \lambda_{23} \sin \vartheta'_{23} + \lambda_2 \sin \vartheta' - \frac{\omega_2}{2R_2} e_{2c}, \\ \dot{\varphi}'_3 &= \Delta_3 - \lambda_{31} \sin \vartheta'_{13} - \lambda_{32} \sin \vartheta'_{23} - \lambda_3 \sin \vartheta' - \frac{\omega_3}{2R_3} e_{3c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Входящие сюда обобщенные разности фаз равны

$$\begin{aligned} \vartheta'_{12} &= \varphi_2 - 2\varphi_1, \quad \vartheta'_{13} = \varphi_3 - 3\varphi_1, \\ \vartheta'_{23} &= 2\varphi_3 - 3\varphi_2, \quad \vartheta' = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1. \end{aligned}$$

Функции  $\Phi_l(R_1, R_2, R_3)$  характеризуют асинхронное взаимодействие между колебаниями генераторов. Они равны (здесь  $2k_{ll}^2$  следует положить равным единице)

$$\begin{aligned} \Phi_l(R_1, R_2, R_3) &= -R_l \omega_l^3 \left[ M_{ll} S_{l0} - r_l C_l + \frac{M_{ll} S_{l2}}{4} (2k_{l1}^2 R_1^2 + 2k_{l2}^2 R_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2k_{l3}^2 R_3^2) \right]. \end{aligned}$$

Члены с коэффициентами  $\lambda_{lj}$  характеризуют синхронное взаимодействие между  $l$ -м и  $j$ -м генераторами и появляются в уравнениях (6) только в том случае, если в спектре колебаний есть комбинационные тона с частотами  $\omega_k$ , близкими к главным частотам генерации  $\omega_l$ .

Коэффициенты  $\lambda_{lj}$  представляют собой, по существу, относительные амплитуды этих комбинационных тонов:

$$\lambda_{12} = \frac{1}{4} k_{12} R_2 M_{11} S_{11} \omega_1^2, \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2} k_{21}^2 \frac{R_1^2}{R_2} M_{22} S_{21} \omega_1^2,$$

$$\lambda_{13} = \frac{1}{8} k_{13} R_1 R_3 M_{11} S_{12} \omega_1^2, \quad \lambda_{31} = \frac{3}{8} k_{31}^3 \frac{R_1^3}{R_3} M_{33} S_{32} \omega_1^2,$$

$$\lambda_{23} = \frac{3}{8} k_{23}^2 R_2 R_3^2 M_{32} S_{23} \omega_1^2, \quad \lambda_{32} = \frac{9}{16} k_{32}^3 R_2^3 M_{33} S_{33} \omega_1^2.$$

Члены с коэффициентами  $\lambda_l$ , появляются в правых частях (6) вследствие суммарного воздействия на  $l$ -й генератор двух других. Эти коэффициенты равны

$$\lambda_l = \frac{l^2}{4} k_{1l} k_{2l} k_{3l} \frac{R_1 R_2 R_3}{R_l^2} M_{ll} S_{ll} \omega_1^2.$$

Случайные функции  $e_{ls}(t)$ ,  $e_{lc}(t)$  являются (см. [1], §5.2) взаимно независимыми дельта-коррелированными процессами. Их спектральные плотности постоянны (на частотах много меньших  $\omega_l$ ) и равны

$$S_l(\Omega) = 2S_{E_l}(\omega_{0l}),$$

где  $S_{E_l}(\omega_{0l})$  — значения спектральных плотностей случайных функций  $E_l(t)$  на установившихся частотах генерации  $\omega_{0l}$ .

Укороченные уравнения (6) имеют сложный вид и их решение в общем случае (даже при малых шумах) практически не реализуемо. Поэтому естественно ограничиться случаем таких малых коэффициентов  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_l$ , обусловливающих синхронизацию, которые приводят к малым поправкам (из-за синхронизации) на значения амплитуд колебаний.

Другими словами, мы будем считать

$$R_l = R_{0l}(1 + \alpha'_l), \quad (7)$$

где полагаем, что  $|\alpha'_l| \ll 1$  и что стационарные амплитуды  $R_{0l}$  определяются уравнениями

$$\Phi_l(R_{01}, R_{02}, R_{03}) = 0 \quad (l = 1, 2, 3).$$

Из (6) нетрудно найти тогда уравнения для амплитудных поправок  $\alpha'^l$  и фаз  $\varphi'_l$ . Последние, например, совпадают со второй тройкой (6), где  $R_l$  в шумовых членах следует заменить на  $R_{0l}$ .

В отсутствие шумов амплитудные поправки и фазы принимают детерминированные значения  $\alpha_{0l}$ ,  $\varphi_{0l}$ , для которых легко записать динамические уравнения. При этом обобщенные разности фаз также принимают детерминированные значения  $\psi_{12} = \varphi_{02} - 2\varphi_{01}$ ,  $\psi_{13} = \varphi_{03} - 3\varphi_{01}$ ,  $\psi_{23} = 2\varphi_{03} - 3\varphi_{02}$ ;  $\psi = \varphi_{03} - \varphi_{02} - \varphi_{01}$ . Можно показать, что из этих четырех обобщенных разностей фаз независимыми являются только две. Выберем в качестве независимых обобщенные разности фаз между вторым и первым, третьим и первым колебаниями (генераторами)  $\psi_{12}$  и  $\psi_{13}$ . Тогда для  $\psi_{12}$  и  $\psi_{13}$  нетрудно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{12} &= \Delta_2 - (\lambda_{21} + 2\lambda_{12}) \sin \psi_{12} - 2\lambda_{13} \sin \psi_{13} - (2\lambda_1 - \lambda_2) \sin (\psi_{13} - \psi_{12}) + \\ &\quad + \lambda_{23} \sin (2\psi_{13} - 3\psi_{12}), \\ \dot{\psi}_{13} &= \Delta_3 - 3\lambda_{12} \sin \psi_{12} - (\lambda_{31} + 3\lambda_{13}) \sin \psi_{13} - (\lambda_3 + 3\lambda_1) \sin (\psi_{13} - \psi_{12}) - \\ &\quad - \lambda_{32} \sin (2\psi_{13} - 3\psi_{12}). \end{aligned} \quad (8)$$

Из динамических уравнений для амплитудных поправок и обобщенных разностей фаз можно, в принципе, найти их стационарные значения  $\alpha_{0l}^0, \psi_{12}^0, \psi_{13}^0$  и определить устойчивость этих стационарных значений. Для произвольных коэффициентов  $\lambda_{ij}, \lambda_i$  отыскание стационарных значений  $\alpha_{0l}^0, \psi_{12}^0, \psi_{13}^0$  и исследование их устойчивости является весьма громоздким и сложным делом. Поэтому для дальнейшего рассмотрения ограничимся одним простым частным случаем, сохраняющим тем не менее все основные особенности взаимосвязи трех автогенераторов. Пусть

$$\lambda_{23} = \lambda_{32} = 0, \quad \lambda_1 \ll \lambda_{12}, \lambda_{13}. \quad (9)$$

Эти условия означают, что второй и третий генераторы не связаны между собой ( $M_{23}, M_{32} = 0$ ) и комбинационное воздействие второго и третьего генераторов на первый много меньше непосредственного взаимодействия между генераторами. Последнее предположение вполне естественно, поскольку коэффициенты связи  $k_{ij}$  предполагались достаточно малыми.

При выполнении условий (9) из (8) уже нетрудно найти следующие стационарные значения обобщенных разностей фаз:

$$\begin{aligned} \sin \psi_{12}^0 &= \frac{\Delta_2(\lambda_{31} + 3\lambda_{13}) - \Delta_2 2\lambda_{13}}{(\lambda_{21} + 2\lambda_{12})\lambda_{31} + 3\lambda_{21}\lambda_{13}}, \\ \sin \psi_{13}^0 &= \frac{\Delta_3(\lambda_{21} + 2\lambda_{12}) - \Delta_2 3\lambda_{12}}{(\lambda_{21} + 2\lambda_{12})\lambda_{31} + 3\lambda_{21}\lambda_{13}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Остальные стационарные значения разностей обобщенных фаз находятся элементарно:

$$\psi_{23}^0 = 2\psi_{13}^0 - 3\psi_{12}^0, \quad \psi^0 = \psi_{13}^0 - \psi_{12}^0.$$

Теперь нетрудно найти и условия устойчивости полученных стационарных значений обобщенных разностей фаз и амплитудных поправок: Условиями устойчивости являются следующие: во-первых действительные части корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \gamma + p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & \gamma + p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & \gamma + p_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad p_{ij} = \frac{R_{0j}}{2\omega_i R_{0i}} \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial R_j} \right]_{R_{0i}}$$

должны быть отрицательными (устойчивость синхронного режима), во-вторых, должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} (\lambda_{21} + 2\lambda_{12}) \cos \psi_{12}^0 + (\lambda_{31} + 3\lambda_{13}) \cos \psi_{13}^0 &> 0, \\ [(\lambda_{21} + 2\lambda_{12})\lambda_{31} + 3\lambda_{21}\lambda_{13}] \cos \psi_{12}^0 \cos \psi_{13}^0 &> 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Установившиеся частоты колебаний, если известны  $\psi_{12}^0$  и  $\psi_{13}^0$ , могут быть легко найдены из уравнений (8). И если синхронный режим устойчив, то для установившихся частот генерации  $\omega_{0i}$  будет справедливо соотношение

$$\frac{\omega_{01}}{1} = \frac{\omega_{02}}{2} = \frac{\omega_{03}}{3}.$$

Таким образом, установившийся режим будет периодическим,

Для дальнейшего упрощения расчетов ограничимся случаем нулевых начальных расстроек:  $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Из (10) следует тогда, что возможны следующие стационарные значения обобщенных разностей фаз:

$$\psi_{12}^0 = 0, \psi_{13}^0 = 0; \quad \psi_{12}^0 = \pi, \psi_{13}^0 = 0;$$

$$\psi_{12}^0 = 0, \psi_{13}^0 = \pi; \quad \psi_{12}^0 = \pi, \psi_{13}^0 = \pi.$$

Выберем для определенности первую пару стационарных значений:  $\psi_{12}^0 = 0, \psi_{13}^0 = 0$ , которые будем полагать устойчивыми.

Перейдем теперь к флуктуациям, ограничиваясь только рассмотрением фазовых флуктуаций, поскольку именно они представляют главный интерес при рассмотрении режима взаимной синхронизации. Записывая  $\dot{\varphi}_l = \varphi_{0l} + \varphi_l$ , для флуктуаций  $\varphi_l$  нетрудно получить

$$\dot{\varphi}_1 = \lambda_{12} \sin \vartheta_{12} + \lambda_{13} \sin \vartheta_{13} + \lambda_1 \sin \vartheta - \frac{\omega_1}{2R_{01}} e_{1c},$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\lambda_{21} \sin \vartheta_{12} + \lambda_{23} \sin \vartheta_{23} + \lambda_2 \sin \vartheta - \frac{\omega_2}{2R_{02}} e_{2c}, \quad (12)$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\lambda_{31} \sin \vartheta_{13} - \lambda_{32} \sin \vartheta_{23} - \lambda_3 \sin \vartheta - \frac{\omega_3}{2R_{03}} e_{3c},$$

где

$$\vartheta_{12} = \varphi_2 - 2\varphi_1, \quad \vartheta_{13} = \varphi_3 - 3\varphi_1, \quad \vartheta_{23} = 2\varphi_3 - 3\varphi_2, \quad \vartheta = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$$

— флуктуации обобщенных разностей фаз.

Будем считать, что между автогенераторами имеет место так называемая сильная синхронизация (см. [1, 2]), когда

$$\langle \vartheta_{12}^2 \rangle \ll 1, \quad \langle \vartheta_{13}^2 \rangle \ll 1.$$

Если представить колебания автогенераторов векторами  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , полные фазы которых, приведенные к одной частоте, равны  $\psi_1, \frac{1}{2}\psi_2, \frac{1}{3}\psi_3$ ,

то условие сильной синхронизации означает, что все три вектора вращаются, флуктуируя фактически как одно целое и испытывая по отношению друг к другу лишь небольшие флуктуации.

В этом случае уравнения (12) можно линеаризовать по обобщенным разностям фаз и получить ( $l = 1, 2, 3$ )

$$\dot{\varphi}_l = a_{1l} \varphi_1 + a_{2l} \varphi_2 + a_{3l} \varphi_3 - \frac{\omega_l}{2R_{0l}} e_{lc}. \quad (13)$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}$  образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_{12} - 3\lambda_{13} - \lambda_1 & \lambda_{12} - \lambda_1 & \lambda_{13} + \lambda_1 \\ 2\lambda_{21} - \lambda_2 & -\lambda_{21} - 3\lambda_{23} - \lambda_2 & 2\lambda_{23} + \lambda_2 \\ 3\lambda_{31} + \lambda_3 & 3\lambda_{32} + \lambda_3 & -\lambda_{31} - 2\lambda_{32} - \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

столбцы которой являются линейно независимыми ( $a_{m1} + 2a_{m2} + 3a_{m3} = 0$ ), поскольку фазу одного из колебаний всегда можно взять произвольной, и для нее не существует устойчивого состояния равновесия.

## 2. ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ТРЕХЧАСТОТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Из линейных уравнений для флюктуаций фаз (13) нетрудно получить спектральные плотности мощности для частотных флюктуаций  $S_{v_l}(\Omega)$ . Поскольку они имеют очень громоздкий вид, мы их приводить здесь не будем. Укажем только, что при  $\Omega \rightarrow \infty$  они совпадают со спектральными плотностями частотных флюктуаций свободных автогенераторов:

$$S_{v_l}(\infty) = \frac{D_l}{2\pi}, \quad D_l = \frac{\pi\omega_{0l}^2}{R_{0l}^2} S_{E_l}(\omega_{0l}),$$

где  $D_l$  — представляют собой коэффициенты диффузии фаз свободных автогенераторов.

Для значений спектральных плотностей в нуле из (13) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{S_{v_1}(0)}{1} = \frac{S_{v_2}(0)}{4} = \frac{S_{v_3}(0)}{9} = \frac{A_{11}^2 D_1 + A_{22}^2 D_2/4 + A_{33}^2 D_3/9}{2\pi(A_{11} + A_{22} + A_{33})^2},$$

где  $A_{mn}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $a_{mn}$  матрицы  $A$ .

Поскольку в рассматриваемом случае ширина спектральных линий колебаний равна  $\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0)$ , то получаем следующую связь между шириной спектральной линии синхронизованных и свободных генераторов:

$$\frac{\Delta\Omega_{1\text{синх}}}{1} = \frac{\Delta\Omega_{2\text{синх}}}{4} = \frac{\Delta\Omega_{3\text{синх}}}{9} = \frac{\Delta\Omega_{1\text{св}} + (1/4)K_2^2\Delta\Omega_{2\text{св}} + (1/9)K_3^2\Delta\Omega_{3\text{св}}}{(1 + K_2 + K_3)^2}, \quad (14)$$

где

$$K_2 = A_{22}/A_{11}, \quad K_3 = A_{33}/A_{11}.$$

В работе [2] для двух связанных автогенераторов было показано, что ширина спектральной линии каждого генератора зависит от одного коэффициента взаимной связи. Теперь ширина спектральной линии каждого генератора зависит от двух коэффициентов  $K_2$  и  $K_3$ , которые в общем случае произвольных связей довольно сложно интерпретировать. В предположении же (9)  $K_2 = \omega_2\lambda_{12}/\omega_1\lambda_{21}$  и является коэффициентом взаимной связи между первым и вторым генераторами, а  $K_3 = \omega_3\lambda_{13}/\omega_1\lambda_{31}$  — коэффициентом взаимной связи между первым и третьим генераторами. Так же, как и для двухчастотного генератора [2], для трех генераторов можно найти оптимальную связь, приводящую к минимальной ширине всех трех спектральных линий.

Нетрудно привести несколько примеров оптимальной связи.

1) Пусть один из генераторов, например, первый, значительно стабильнее двух других ( $\Delta\Omega_{1\text{св}} \ll \Delta\Omega_{2\text{св}}, \Delta\Omega_{3\text{св}}$ ). Тогда, очевидно, выгодно сделать связь, отвечающую односторонней синхронизации первым генератором двух других  $K_2 = K_3 = 0$  ( $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_1 = 0$ ). Спектральные линии генераторов в этом случае будут иметь такую ширину:

$$\Delta\Omega_{1\text{синх}} = \Delta\Omega_{1\text{св}}, \quad \Delta\Omega_{2\text{синх}} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \Delta\Omega_{1\text{св}},$$

$$\Delta\Omega_{3\text{синх}} = \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} \Delta\Omega_{1\text{св}}.$$

2) Пусть все генераторы имеют одинаковые значения  $S_{E_l}(\omega_{0l})$  и  $R_{0l}$ , в этом случае для них будут одинаковыми значения  $\Delta\Omega_{l_{\text{СВ}}} / \omega_l^2$ . Такие генераторы выгодно связывать так, чтобы  $K_2 = K_3 = 1$ , т. е.  $A_{11} = A_{22} = A_{33}$ . Такой режим получается, если выбрать следующие соотношения между коэффициентами  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_i$ :

$$\lambda_{21} = 2\lambda_{12}, \quad \lambda_{31} = 3\lambda_{13}, \quad 2\lambda_{23} = 3\lambda_{32}, \quad \lambda_3 = 9\lambda_1, \quad \lambda_2 = 4\lambda_1.$$

При этом

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 3 [2\lambda_{12}\lambda_{13} + 2\lambda_{12}\lambda_{23} + 3\lambda_{13}\lambda_{23} + \lambda_1(6\lambda_{12} + 4\lambda_{13} + \lambda_{23})].$$

В указанном случае ширина спектральной линии каждого генератора уменьшается в три раза по сравнению со свободным режимом:

$$\Delta\Omega_{l_{\text{СИНХ}}} = \frac{1}{3} \Delta\Omega_{l_{\text{СВ}}}.$$

Полученные результаты нетрудно обобщить для произвольного соотношения между собственными частотами генераторов вида

$$\omega_1/l = \omega_2/m = \omega_3/n$$

( $l, m, n$  — натуральные числа, неравные друг другу).

Для таких генераторов в приближении сильной синхронизации получаются уравнения для флуктуаций фаз, аналогичные (13), из которых нетрудно получить соотношение между шириной спектральных линий:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega_{1_{\text{СИНХ}}}}{l^2} &= \frac{\Delta\Omega_{2_{\text{СИНХ}}}}{m^2} = \frac{\Delta\Omega_{3_{\text{СИНХ}}}}{n^2} = \\ &= \frac{(1/l^2)\Delta\Omega_{1_{\text{СВ}}} + (K_2^2/m^2)\Delta\Omega_{2_{\text{СВ}}} + (K_3^2/n^2)\Delta\Omega_{3_{\text{СВ}}}}{(1 + K_2 + K_3)^2}. \end{aligned}$$

Минимальные значения ширины спектральных линий имеют место при

$$K_2 = m^2\Delta\Omega_{1_{\text{СВ}}} / l^2\Delta\Omega_{2_{\text{СВ}}}, \quad K_3 = n^2\Delta\Omega_{1_{\text{СВ}}} / l^2\Delta\Omega_{3_{\text{СВ}}}.$$

Если для генераторов в свободном режиме справедливо соотношение

$$\frac{\Delta\Omega_{1_{\text{СВ}}}}{l^2} = \frac{\Delta\Omega_{2_{\text{СВ}}}}{m^2} = \frac{\Delta\Omega_{3_{\text{СВ}}}}{n^2},$$

то в оптимальном режиме связи ( $K_2 = K_3 = 1$ ) мы снова получаем уменьшение ширины спектральной линии каждого генератора в три раза.

Это явление можно интерпретировать следующим образом. Пусть имеются три частицы, совершающие свободные броуновские движения, каждая со своим коэффициентом диффузии. Если теперь на эти частицы наложить определенные взаимосвязи (например, связать их между собой пружинками), то становится очевидным, что три связанные частицы, представляющие единую систему, имеют меньший коэффициент диффузии, чем каждая частица в отдельности, если случайные силы, действующие на разные частицы, некоррелированы между собой.

Та же ситуация имеет место и в нашем случае, где происходит аналогичное броуновское движение фазы каждого генератора под действием своих шумов; при этом взаимная синхронизация как раз и означает наложение определенных связей на взаимные значения фаз.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
2. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника (в печати).
3. И. М. Клибанова, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 1, 152 (1968).
4. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника (в печати)
5. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
6. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, 197 (1956)
7. О. А. Курдюмов и И. И. Минакова, Вестник МГУ, сер. физ., астр., № 1, 85 (1966).
8. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 4, 272 (1959).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.INTRINSIC PHASE FLUCTUATIONS IN A THREE-FREQUENCY GENERATOR.  
A SYNCHRONOUS REGIME*A. N. Malakhov, A. A. Mal'tsev*

The influence of natural noises on the behaviour of three auto-oscillators mutually synchronized at the multiple frequencies is considered. The values of three spectral linewidths are derived in a strong synchronization approximation. The conditions of the optimal coupling between generators leading to decreasing the spectral linewidths as compared to the regime of free oscillations are found.

УДК 621.373 : 538.56

## СТРУКТУРА СПЕКТРА СИНХРОНИЗОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШИХ ФЛУКТУАЦИЙ

*Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов*

Рассмотрена структура спектра томсоновского генератора, синхронизованного монохроматическим сигналом и подверженного воздействию больших медленных флюктуаций. Показано, в отличие от ранее опубликованных работ, что спектр колебания всегда содержит дискретную линию. Частота дискретной линии совпадает с частотой внешнего монохроматического воздействия. Пьедестал спектра колебания в общем случае несимметричный.

1. Распределение мощности колебаний по частоте является одной из существенных характеристик автоколебательной системы. Это распределение, т. е. форма спектра колебаний, полностью определяется свойствами динамической системы и характером флюктуационного воздействия. Для простейшей автоколебательной системы, а именно для томсоновского генератора, вопрос о форме спектра колебаний изучен достаточно хорошо для различных шумовых воздействий. В частности, например, известно, что наличие естественных флюктуаций в схеме автогенератора приводит к размыванию его спектральной линии, ширина которой может служить мерой нестабильности колебаний.

Как изменится форма спектра колебаний, если генератор синхронизуется внешним монохроматическим сигналом? Этот вопрос является весьма важным и интересным, однако нельзя сказать, что он полностью ясен. Более того, в литературе имеются разноречивые выводы относительно ширины спектральной линии синхронизированного генератора. Остановимся на этом более подробно.

Если пренебречь амплитудными флюктуациями и записать колебание синхронизированного генератора в виде  $x(t) = R_0 \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$ , то, как известно, разность фаз синхронизированного и эталонного генераторов  $\phi(t)$  описывается уравнением

$$\dot{\phi} + \Delta_0 \sin \phi = -\Delta - \xi(t). \quad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\omega_0$  — частота синхронизующего генератора;  $\Delta_0$  — полоса синхронизации;  $\Delta$  — начальная расстройка;  $\xi(t)$  — флюктуационное воздействие, которое может быть обусловлено либо аддитивными шумами генератора, либо флюктуациями его параметров.

Если флюктуации частоты  $\phi(t)$ , обязанные внешнему флюктуационному воздействию, настолько малы, что генератор не выходит из полосы синхронизации, то, как известно, в спектре колебаний синхронизированного генератора есть монохроматическая линия (см., например, [1], § 9.1).

Каков будет спектр колебаний, если флюктуационное воздействие вызывает большие флюктуации частоты, так что генератор временами оказывается вне полосы синхронизации? Ответ на этот вопрос по

литературным данным оказывается различным. Например, в [1], § 9.3 показано, что если случайный процесс  $\xi(t)$  является дельта-коррелированным, то в спектре колебаний присутствует монохроматическая линия. Естественно было бы ожидать, что и в случае медленных флюктуаций  $\xi(t)$  в спектре колебаний также должна быть дискретная линия.

Вместе с тем в работах [1, 2] утверждается, что в случае достаточно медленных флюктуаций дискретной линии в спектре синхронизованного генератора нет.

В связи с этим обстоятельством мы вновь обратились к исследованию спектра синхронизованного генератора и нашли, как будет показано ниже, что в спектре генератора, находящегося под воздействием больших медленных флюктуаций, действительно существует монохроматическая линия.

2. Для случая больших и медленных (не дельта-коррелированных) флюктуаций  $\xi(t)$  не существует регулярных методов решения нелинейного стохастического уравнения (1). Поэтому решение этого уравнения было нами получено при замене реального медленно меняющегося процесса  $\xi(t)$  случайным скачкообразным процессом, так называемой «шаговой моделью» [2]. И для этого случая было найдено общее выражение для спектра синхронизованного генератора. Однако это выражение оказалось весьма громоздким, в то время как основные результаты этого решения оказались совпадающими с решением, полученным для предельного случая сколь угодно медленных флюктуаций. Поэтому ниже мы приведем решение для этого предельного случая, а затем покажем, как изменится полученное решение, если флюктуации  $\xi(t)$  уже не будут сколь угодно медленными.

3. При сколь угодно медленном флюктуационном воздействии решение уравнения (1) приближенно можно записать в следующем виде\*:

$$\dot{\varphi}(t) = 0 \quad (|\xi + \Delta| < \Delta_0); \quad (2a)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\operatorname{sgn}(\xi + \Delta) \sqrt{(\xi + \Delta)^2 - \Delta_0^2} \quad (|\xi + \Delta| > \Delta_0). \quad (2b)$$

Соотношение (2a) описывает поведение флюктуаций частоты в случае, когда генератор внутри полосы синхронизации, (2b)—когда он вне полосы. Отсюда следует, что флюктуации частоты также оказываются сколь угодно медленными. Поэтому форма спектра колебаний будет совпадать (см., например, [1], § 4.5) с вероятностным распределением флюктуаций частоты.

Полагая вероятностное распределение  $W_\xi(\xi)$  заданным и пользуясь тем, что нелинейная зависимость  $\dot{\varphi}$  от  $\xi$  является безынерционной, легко найти спектр колебаний синхронизованного генератора:

$$S_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ p \delta(\tau) + \frac{|\Omega|}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta_0^2}} W_\xi \left[ -(\Delta + \Omega \sqrt{1 + \Delta_0^2/\Omega^2}) \right] \right\}. \quad (3)$$

Здесь  $\Omega = \omega - \omega_0$  — частота, отсчитываемая от частоты синхронизующего генератора,  $p = \int_{-\Delta_0 - \Delta}^{\Delta_0 - \Delta} W_\xi(\xi) d\xi$  — вероятность пребывания ген-

\* В этом приближении точное значение  $\dot{\varphi}(t)$  при  $|\xi + \Delta| > \Delta_0$  заменено средним по времени значением. Это приближение является достаточно точным при больших значениях параметра  $\xi$  и имеет наибольшую погрешность вблизи границы полосы синхронизации. В картине спектра это наиболее сильно отразится на форме пьедестала соответственно вблизи полосы синхронизации.

ратора внутри полосы синхронизации. Таким образом, из (3) следует, что если вероятность пребывания генератора внутри полосы синхронизации отлична от нуля, то в спектре колебаний всегда есть монохроматическая линия. Частота этой монохроматической линии соответствует частоте синхронизующего сигнала, а мощность, отнесенная к полной мощности колебания, равна  $\rho$ .

Из (3) легко видеть, что в предельном случае, когда флюктуации  $\xi(t)$  становятся достаточно малыми, генератор перестает выходить из полосы синхронизации ( $\rho \rightarrow 1$ ) и вся мощность генератора сосредоточивается в мощности дискретной линии:  $S_x(\Omega) \rightarrow (R_0^2/2)\delta(\Omega)$ .

Если же дисперсия медленных флюктуаций  $\sigma_\xi^2$  неограниченно возрастает (при постоянной полосе синхронизации), то вероятность пребывания генератора внутри полосы синхронизации стремится к нулю и мощность дискретной составляющей уменьшается, имея порядок  $\Delta_0/\sigma_\xi$ .

Интересно отметить, что дискретная линия в спектре будет существовать и тогда, когда генератор в отсутствие флюктуаций не синхронизован ( $\Delta > \Delta_0$ ) и лишь благодаря флюктуациям «забрасывается» иногда в полосу синхронизации.

Второе слагаемое в (3) описывает непрерывную часть спектра, состоящую из пьедестала и крыльев, форма которой существенно зависит от вида вероятностного закона распределения  $W_\xi(\xi)$ , а также от полосы синхронизации  $\Delta_0$  и начальной расстройки  $\Delta$ . При нулевой расстройке ( $\Delta = 0$ ) пьедестал и крылья оказываются симметричными по отношению к точке  $\Omega = 0$ . Если же имеется расстройка ( $\Delta \neq 0$ ), то у пьедестала появляется несимметрия. Этой несимметрии пьедестала и обязано хорошо известное смещение средней частоты колебаний, вызванное большими флюктуациями [3].

Крылья спектральной линии ( $\Omega \gg \Delta_0$ ) являются симметричными. Как следует из (3), они совпадают с крыльями свободного генератора:  $S_x(\Omega) \simeq S_x^{\text{своб}}(\Omega) = (R_0^2/2)W_\xi(\Omega)$ .

Качественный вид спектра синхронизированного генератора изображен (для положительной расстройки) на рис. 1. Там же изображен спектр свободного генератора (пунктир).

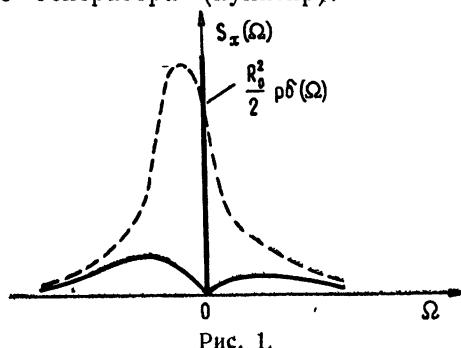


Рис. 1.

4. Как изменится форма спектра, если флюктуационное воздействие нельзя считать сколь угодно медленным процессом? Как показывают расчеты, проведенные для шаговой модели флюктуаций  $\xi(t)$ , в этом случае, как и в случае сколь угодно медленных флюктуаций, в спектре всегда есть дискретная линия, если отлична от нуля вероятность пребывания генератора в полосе синхронизации. Частота дискретной линии также равна частоте синхронизующего воздействия. Однако мощность дискретной линии определяется теперь не только величиной  $\rho$ , но и некоторыми характеристиками фазовых флюктуаций  $\varphi(t)$ . Наличие

этих флюктуаций приводит к уменьшению мощности дискретной линии. Так, например, в случае, когда  $p \approx 1$  и генератор практически не выходит из полосы синхронизации, мощность дискретной линии, в отличие от случая сколь угодно медленных флюктуаций, не равна  $R_0^2/2$ . Ее значение совпадает с мощностью несущей при импульсно-фазовой модуляции с соответствующим законом распределения амплитуд сигнала, модулирующего фазу, и может заметно отличаться от  $R_0^2/2$ . И лишь в том случае, когда дисперсия флюктуаций  $\sigma_\xi^2$  стремится к нулю, мощность дискретной линии стремится к  $R_0^2/2$ .

Качественная картина зависимости мощности дискретной линии от интенсивности флюктуаций, полученной для шаговой модели, приведена на рис. 2.

Таким образом, в случае медленных флюктуаций так же, как и в случае дельта-коррелированного воздействия, в спектре синхронизованного генератора есть дискретная линия. Это позволяет предполагать, что и при любых флюктуационных воздействиях  $\xi(t)$  в спектре синхронизированного колебания будет иметься дискретная линия, если только вероятность пребывания генератора в полосе синхронизации отлична от нуля.

Авторы благодарны А. Е. Каплану за обсуждение результатов работы.



Рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
2. Л. Н. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 102 (1966).
3. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

#### THE STRUCTURE OF THE SPECTRUM OF SYNCHRONIZED GENERATOR IN THE PRESENCE OF LARGE FLUCTUATIONS

*L. P. Zacheptskaia, I. M. Klibanova, A. N. Malakov*

The structure of the spectrum of Tompson's generator synchronized by a monochromatic signal and affected by large slow fluctuations has been considered. As distinct from the papers published earlier, it is shown that the oscillation spectrum contains always a discrete line. The frequency of the discrete line coincides with that of the external monochromatic interaction. The pedestal of the spectrum of oscillations is asymmetric in the general case.

УДК 538.56 : 519.25

## ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

Г. Н. Бочков

Проведено теоретическое исследование прохождения квазимохроматического сигнала, через линейную резонансную систему с флюктуирующими параметрами. Получены формулы, позволяющие находить спектрально-корреляционные характеристики амплитуды и фазы на выходе такой системы. Исследуется форма спектра колебания, прошедшего через резонансную стохастическую систему.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на вход линейной системы со случайно изменяющимися параметрами подается сигнал

$$E(t) = E_0[1 + \varepsilon(t)] \cos [\omega_c t + \gamma(t)],$$

где  $E_0$ ,  $\omega_c$  — постоянные;  $\varepsilon(t)$  и  $\gamma(t)$  — случайные функции времени, медленные по сравнению с  $\cos(\omega_c t)$ .

На выходе линейной стохастической системы получается случайный процесс, который запишем в виде

$$X(t) = A_0[1 + \rho(t)] \cos [\omega_c t + \varphi(t)],$$

где  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$  — случайные флюктуации амплитуды и фазы выходного колебания.

Поставим задачу отыскания спектров случайных процессов  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$ , считая заданными статистические характеристики случайных процессов  $\varepsilon(t)$  и  $\gamma(t)$  и характеристики всех флюктуирующих параметров системы.

Решение указанной задачи для системы с постоянными параметрами содержится в работе [1]. Однако любая реальная динамическая система является, по существу, стохастической системой, обладающей флюктуациями параметров, и часто необходим учет этих флюктуаций в процессе преобразования системой различных входных сигналов. Как показывает анализ, флюктуации параметров резонансных систем дают значительный вклад в величину флюктуаций амплитуды и частоты выходного колебания, существенно изменяя картину его спектра.

Поэтому, например, при измерениях ширины спектральной линии колебания флюктуации параметров измерительной системы наряду с шумами детектора и анализатора являются мешающим фактором и кладут предел минимально обнаружимой случайной частотной модуляции входного колебания и, соответственно, измерению ширины спектральной линии колебания\*.

### 2. ИСХОДНЫЕ, УКОРОЧЕННЫЕ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим следующее уравнение, связывающее колебания  $E(t)$  и  $X(t)$ :

\* Эти результаты подготовлены к печати и будут опубликованы в другом месте.

$$\ddot{X} + 2h(1 + \beta_t) \dot{X} + \omega_0^2(1 + \alpha_t) X = \omega_0^2 E, \quad (1)$$

где  $\omega_0/2h = Q_0 > 1$ ;  $\alpha_t = \alpha(t)$  и  $\beta_t = \beta(t)$  — случайные стационарные и стационарно-связанные процессы с нулевыми средними значениями ( $\langle \alpha \rangle = 0$ ,  $\langle \beta \rangle = 0$ ). Будем полагать заданными их функции корреляции и спектры.

Поскольку «входное» колебание  $E(t)$  можно представить как

$$E_0[1 + \varepsilon(t)] \cos [\omega_c t + \gamma(t)], \quad (2)$$

то решение уравнения (1) будем искать в виде

$$X = A(t) \cos [\Psi(t)], \quad \dot{X} = -\omega_c A(t) \sin [\Psi(t)], \quad \Psi(t) = \omega_c t + \Phi(t). \quad (3)$$

Начнем рассмотрение с простейшего случая, когда внешний сигнал  $E$  является строго монохроматическим:

$$E(t) = E_0 \cos (\omega_c t). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая (4), нетрудно получить для новых переменных  $A$  и  $\Phi$  следующие точные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -[2h(1 + \beta) \omega_c A \sin \Psi + (\omega_c^2 - \omega_0^2 - \omega_0^2 \alpha) A \cos \Psi + \\ & + \omega_0^2 E_0 \cos (\omega_c t)] \frac{\sin \Psi}{\omega_c}, \\ \dot{\Phi} = & -[2h(1 + \beta) \omega_c A \sin \Psi + (\omega_c^2 - \omega_0^2 - \omega_0^2 \alpha) A \cos \Psi + \\ & + \omega_0^2 E_0 \cos (\omega_c t)] \frac{\cos \Psi}{\omega_c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ограничимся случаем достаточно малых флюктуаций параметров, когда

$$\sqrt{\langle \alpha^2 \rangle} \ll 1, \quad \sqrt{\langle \beta^2 \rangle} \ll Q. \quad (6)$$

В этом случае правые части (5) малы и  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  являются медленными функциями времени по сравнению с  $\cos(\omega_c t)$ . Пользуясь тогда методом усреднения [2-4], получим следующие уравнения первого приближения, рассмотрением которых и ограничимся:

$$\begin{aligned} \dot{A} = & -h(1 + \beta_0) A + h[(Q\alpha_s + \beta_c) \cos(2\Phi) + (Q\alpha_c - \beta_s) \sin(2\Phi)] A - \\ & - hQE_0 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} = & \Delta + hQ\alpha_0 - h[(Q\alpha_s + \beta_c) \sin(2\Phi) - (Q\alpha_c - \beta_s) \cos(2\Phi)] - \\ & - hQ \frac{E_0}{A} \cos \Phi. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_c^2 - \omega_0^2}{2\omega_c}, \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_c} Q_0, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \alpha(\tau) d\tau, \quad \alpha_s^c = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \alpha(\tau) \left[ \begin{array}{l} \cos(2\omega_c \tau) \\ \sin(2\omega_c \tau) \end{array} \right] d\tau, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичными соотношениями определены  $\beta_0$ ,  $\beta_c$  и  $\beta_s$ .

Нелинейные уравнения (7) позволяют исследовать флуктуации амплитуды и фазы решения уравнения (1) при любых спектральных плотностях флуктуаций параметров. В частности, флуктуации параметров могут быть как медленными, так и быстрыми по сравнению с  $\cos(\omega_c t)$ .

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая, когда флуктуации  $\alpha$  и  $\beta$  являются медленно меняющимися функциями времени по сравнению с  $\cos(\omega_c t)$ , но в то же время могут быть быстрыми по сравнению с  $\cos(ht)$ . Тогда

$$\alpha_c = \alpha_s = 0, \quad \beta_c = \beta_s = 0, \quad \alpha_0 = \alpha(t), \quad \beta_0 = \beta(t)$$

и уравнения (7) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -h[1 + \beta(t)] A - hQE_0 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\Delta + hQ\alpha(t) - hQ \frac{E_0}{A} \cos \Phi. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая флуктуации параметров равными нулю, из (9) получим уравнения для определения «установившихся» значений амплитуды и фазы колебания  $X(t) = A_0 \cos(\omega_c t + \Phi_0)$ :

$$hA_0 = -hQE_0 \sin \Phi_0, \quad \Delta A_0 = -hQE_0 \cos \Phi_0. \quad (10)$$

Разбивая амплитуду и фазу на регулярную и флуктуационную части

$$A(t) = A_0[1 + \rho(t)], \quad \Phi(t) = \Phi_0 + \varphi(t),$$

перейдем от уравнений (9) к следующим уравнениям для  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -h[1 + \beta(t)](1 + \rho) + h \cos \varphi + \Delta \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + hQ\alpha(t) + \frac{\Delta \cos \varphi - h \sin \varphi}{1 + \rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Система нелинейных уравнений (11) в общем случае (для любых флуктуаций параметров) все еще оказывается довольно сложной. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь достаточно малых амплитудно-фазовых флуктуаций, когда

$$\langle \rho^2 \rangle \ll 1 \text{ и } \langle \varphi^2 \rangle \ll 1 \quad (12)$$

и, следовательно, возможна линеаризация уравнений\*. Заменяя  $\cos \varphi \sim 1$ ,  $\sin \varphi \sim \varphi$  и разрешая уравнения относительно  $\rho$  и  $\varphi$ , имеем

$$\ddot{\rho} + 2h\dot{\rho} + (\Delta^2 + h^2)\rho = \Delta hQ\alpha - h^2\beta - h\dot{\beta}; \quad (13)$$

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + (\Delta^2 + h^2)\varphi = h^2Q\alpha + \Delta h\beta + hQ\dot{\alpha}. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) позволяют определить основные статистические характеристики колебания, прошедшего через систему с флуктуирующими параметрами.

При рассмотрении влияния медленных (квазистатических) флуктуаций параметров на колебательную систему можно использовать очень простые квазистатические соотношения, легко получающиеся из (13) и (14):

\* Условия линеаризации будут заведомо выполнены при условии статистической устойчивости системы (1) (см. [5]) и малости флуктуаций параметров. Тем самым рассматривается случай, когда малым флуктуациям параметров (6) соответствуют малые «возмущения» амплитуды и фазы решения (1).

$$\rho = \frac{1}{h^2 + \Delta^2} [h\Delta Q\alpha(t) - h^2\beta(t)], \quad \varphi = \frac{1}{h^2 + \Delta^2} [h^2Q\alpha(t) + h\Delta\beta(t)]. \quad (15)$$

### 3. АМПЛИТУДНЫЕ И ФАЗОВЫЕ СПЕКТРЫ ВЫХОДНОГО КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим спектры амплитудных и фазовых флуктуаций  $S_\rho(\Omega)$  и  $S_\varphi(\Omega)$ . Будем предполагать, что между флуктуациями собственной частоты  $\alpha(t)$  и флуктуациями затухания  $\beta(t)$  в общем случае имеется какая-либо корреляция, и поэтому будем считать, что  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  определяются спектральными плотностями  $S_\alpha(\Omega)$ ,  $S_\beta(\Omega)$  и совместными спектральными плотностями  $S_{\beta\alpha}^0(\Omega)$ ,  $S_{\beta\alpha}^1(\Omega)$ .

Из уравнений (13) и (14) легко получить следующие выражения для спектральных плотностей амплитудных и фазовых флуктуаций выходного колебания:

$$\begin{aligned} S_\rho(\Omega) &= K(\Delta, \Omega) [\Delta^2 Q^2 S_\alpha(\Omega) + (h^2 + \Omega^2) S_\beta(\Omega) - \\ &\quad - 2\Delta h Q S_{\beta\alpha}^0(\Omega) + 2\Delta Q \Omega S_{\beta\alpha}^1(\Omega)], \\ S_\varphi(\Omega) &= K(\Delta, \Omega) [\Delta^2 S_\beta(\Omega) + Q^2(h^2 + \Omega^2) S_\alpha(\Omega) + \\ &\quad + 2\Delta h Q S_{\beta\alpha}^0(\Omega) + 2\Delta Q \Omega S_{\beta\alpha}^1(\Omega)], \end{aligned} \quad (16)$$

$$S_{\rho\rho}^0(\Omega) = K(\Delta, \Omega) [\Delta h Q S_\alpha(\Omega) - \Delta h S_\beta(\Omega) + (\Delta^2 - \Omega^2 - h^2) Q S_{\beta\alpha}^0(\Omega)],$$

$$S_{\rho\rho}^1(\Omega) = K(\Delta, \Omega) [\Delta \Omega Q S_\alpha(\Omega) - \Delta \Omega S_\beta(\Omega) - (\Delta^2 + \Omega^2 + h^2) Q S_{\beta\alpha}^1(\Omega)],$$

где

$$K(\Delta, \Omega) = [(h^2 + \Delta^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2]^{-1}.$$

Из соотношений (16) следует, что спектры флуктуаций амплитуды и фазы колебания  $X(t)$  довольно сложным образом зависят от спектров флуктуаций параметров системы. Сложность является следствием инерционности колебательной системы (1). Эту инерционность необходимо учитывать, если спектральные плотности флуктуаций рассматриваются на достаточно высоких частотах  $\Omega$ .

В выражении для  $S_\rho(\Omega)$  первый член обусловлен флуктуациями собственной частоты системы, второй—флуктуациями «потерь». В случае нулевой расстройки ( $\Delta = 0$ ) получаем, что

$$S_\rho(\Omega) = \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{h^2} \right]^{-1} S_\beta(\Omega), \quad S_\varphi(\Omega) = \left[ 1 + \frac{\Omega^2}{h^2} \right]^{-1} Q^2 S_\alpha(\Omega), \quad (17)$$

т. е. амплитудные флуктуации на выходе системы обязаны исключительно флуктуациям ее «потерь», а фазовые—флуктуациям собственной частоты.

Из соотношений (17) следует также, что в высокодобротной системе ( $Q \gg 1$ ) для не слишком высоких частот  $\Omega$  ( $\Omega \sim h$ ) и сравнительно небольших расстроек  $\Delta$  ( $\Delta \sim h$ ) основной вклад в спектр флуктуаций фазы дают флуктуации собственной частоты. В спектре амплитудных флуктуаций  $S_\rho(\Omega)$  слагаемое, связанное с флуктуациями собственной частоты, также является преобладающим даже для сравнительно малых расстроек  $\Delta$  (первое и второе слагаемые становятся сравнимыми при  $\Delta \approx h/Q \ll h$ ) и лишь при  $\Delta = 0$  флуктуации амплитуды целиком определяются флуктуациями «потерь».

Отметим определенную «симметрию» выражений для спектров  $S_\rho(\Omega)$  и  $S_\varphi(\Omega)$  по отношению к флуктуациям  $\beta$  и  $Q\alpha$ . Этот факт является следствием «симметрии» самих амплитудно-фазовых уравнений

ний (13) и (14). Так, уравнение (13) переходит в уравнение (14) при замене  $(-\beta)$  на  $(Q\alpha)$ , и  $(Q\alpha)$  на  $(\beta)$ . Поэтому спектральная плотность флюктуаций амплитуды, обязанная лишь флюктуациям собственной частоты  $\alpha(t)$ , имеет такой же вид, как и спектральная плотность фазы при флюктуациях затухания (потерь)  $\beta(t)$  (рис. 1).

Спектр  $S_p$ , обусловленный флюктуациями  $\alpha(t)$ , и спектр  $S_\varphi$  при флюктуациях  $\beta(t)$  показан на рис. 2. Оба рисунка сделаны в предполо-

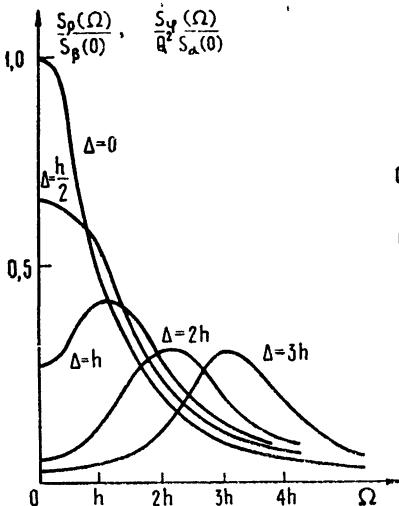


Рис. 1.

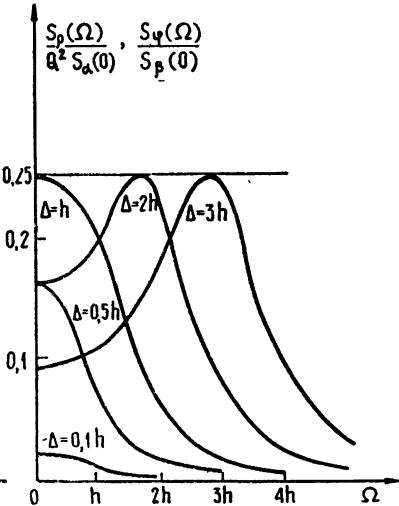


Рис. 2.

жении постоянства спектров флюктуаций параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в полосе  $\Delta\Omega > 2h$ :

$$S_\alpha(\Omega) = S_\alpha(0), \quad S_\beta(\Omega) = S_\beta(0).$$

Анализируя вид амплитудно-фазовых спектров, целесообразно выделить в них два качественно различных диапазона частот: 1)  $0 < \Omega < \Omega_0$  — область, где справедливо квазистатическое рассмотрение воздействия флюктуаций параметров на колебательную систему и 2)  $\Omega > \Omega_0$  — часть спектра, отвечающего «быстрым» флюктуациям параметров.

Поведение спектров  $S_p$  и  $S_\varphi$  (рис. 1, 2) в низкочастотной полосе  $[0, \Omega_0]$  легко пояснить, рассматривая медленные (квазистатические) деформации амплитудной  $K(\Omega, t)$  и фазовой  $\varphi(\Omega, t)$  характеристик линейной резонансной системы, которые вызываются медленными флюктуациями собственной частоты и «потерь» системы\*.

Совершенно ясно, например, что при флюктуациях собственной частоты системы мощность флюктуаций амплитуды выходного сигнала в указанной полосе частот будет максимальна при  $\Delta = h$ , а мощность фазовых флюктуаций — при нулевой расстройке.

Рассматривая теперь воздействие сравнительно быстрых флюктуаций параметров на колебательную систему, отмечаем появление максимумов в спектрах амплитудных и фазовых флюктуаций  $S_p(\Omega)$  и  $S_\varphi(\Omega)$ , обязаных своим происхождением наличию расстройки и инерционности системы.

\* Нетрудно видеть из соотношений (15), что условие квазистатичности сводится к требованию  $\Omega_{\max}^2 / h^2 \ll 1$ , где  $\Omega_{\max}$  — верхняя граничная частота в спектрах флюктуаций параметров или максимальная частота ( $\Omega_0$ ), до которой справедливы квазистатические соотношения при произвольных спектрах параметров.

Достаточно быстрые флуктуации параметров постоянно возбуждают «собственные» затухающие как  $\sim e^{-h t}$  колебания, которые существуют в системе вместе с «вынужденными» колебаниями с частотой  $\omega_c$ . Поэтому амплитудный спектр полного колебания, представленного нами в форме (3) (как суперпозиция двух колебаний с «близкими» частотами), содержит максимумы на частотах  $\Omega^* \simeq \omega_0 - \omega_c$ . Наличие связи амплитуды с фазой в линейной колебательной системе приводит к появлению таких же максимумов и в спектре фазовых флуктуаций.

#### 4. ПРОХОЖДЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Линеаризованные уравнения, описывающие флуктуации амплитуды и фазы колебания на выходе линейной системы с флуктуирующими параметрами при условии, что на вход системы подается сигнал  $E(t) = E_0[1 + \varepsilon(t)] \cos[\omega_c t + \gamma(t)]$ , обладающий флуктуациями амплитуды и фазы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + 2h\dot{\rho} + (h^2 + \Delta^2)\rho &= (h^2 + \Delta^2)\varepsilon + h\dot{\varepsilon} - \Delta\dot{\gamma} + \Delta hQ\alpha - h^2\beta - h\dot{\beta}, \\ \ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + (h^2 + \Delta^2)\varphi &= (h^2 + \Delta^2)\gamma + \Delta\dot{\varepsilon} + h\dot{\gamma} + h^2Q\alpha + \Delta h\beta + hQ\dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

В отсутствие флуктуаций параметров системы уравнения (18) переходят в соответствующие уравнения, полученные в [1], а в отсутствие фазовой и амплитудной модуляции сигнала — в уравнения (13) и (14). Из (18) нетрудно получить полную картину спектров амплитудных и фазовых флуктуаций выходного колебания при известных спектральных характеристиках флуктуаций  $\varepsilon(t)$  и  $\gamma(t)$ . Линейность флуктуационных уравнений (18) и независимость флуктуаций параметров от флуктуаций внешнего сигнала приводят к тому, что полные амплитудно-фазовые спектры определяются как сумма полученных выше спектров  $S_\rho$  и  $S_\varphi$  с соответствующими спектрами, приведенными в [1].

#### 5. СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Определим форму спектра колебания  $X(t)$  на выходе системы с флуктуирующими параметрами, если входным сигналом является монохроматическое колебание  $E_0 \cos(\omega_c t)$ . Для колебания на выходе данной системы характерны флуктуации амплитуды и фазы:  $X(t) = A_0[1 + \rho(t)] \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$ . Характеристики амплитудной и фазовой модуляции описаны выше.

Из уравнений (13) и (14) следует также, что флуктуации амплитуды и фазы являются нормально распределенными, стационарными и стационарно связанными. Поскольку  $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$ , то для нахождения формы спектральной линии  $W_x(\Omega) = W_x^0(\Omega) + W_x^1(\Omega)^*$  можно воспользоваться следующими формулами ([6], § 4.4.):

$$W_x^0(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_\rho(\Omega) + S_\varphi(\Omega)]; \quad (19)$$

$$W_x^1(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} 2S_{\rho\varphi}^1(\Omega). \quad (20)$$

\* В  $W_x(\Omega)$   $\Omega$  отсчитывается от частоты  $\omega_c$ .

Подставляя (16) в (19) и (20), получаем следующее выражение для формы спектра колебания:

$$W_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{A_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{(\Omega + \Delta)^2}{h^2} \right]^{-1} [Q^2 S_\alpha(\Omega) + \\ + S_\beta(\Omega) - 2QS_{\beta\alpha}^I(\Omega)]. \quad (21)$$

Первое слагаемое соответствует монохроматической спектральной линии на частоте  $\Omega = 0$  ( $\omega = \omega_c$ ), второе—пьедесталу линии, обвязанному амплитудным и фазовым флуктуациям. Из формулы (21) следует также, что в высокодобротной системе доминирующий вклад в величину «шумового» пьедестала дают флуктуации собственной частоты  $\alpha(t)$ .

Проанализируем форму спектра колебания в предположении постоянства флуктуаций параметров  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  и при условии их некоррелированности.

При  $\Delta = 0$  (нулевая расстройка) пьедестал является симметричным относительно монохроматической линии и имеет «резонансную» форму.

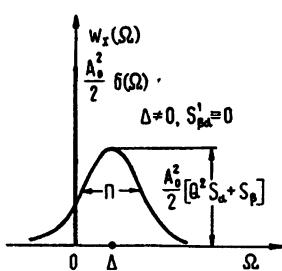


Рис. 3.

Если  $\Delta \neq 0$ , то спектр колебания в целом становится несимметричным, форма же пьедестала сохраняется и лишь максимум смещается относительно  $\omega_c$  точно на величину расстройки  $\Delta$  (рис. 3).

Так как форма пьедестала существенно определяется также видом спектров  $S_\alpha(\Omega)$  и  $S_\beta(\Omega)$ , то при учете структуры спектров флуктуаций параметров форма спектра выходного колебания может существенно отличаться от приведенной на рис. 3. Слагаемое  $2S_{\beta\alpha}^I(\Omega)$ , обвязанное взаимной корреляцией флуктуаций параметров, приведет к несимметрии пьедестала даже при нулевой расстройке.

Найдем теперь спектр выходного колебания в случае, когда входной сигнал  $E(t)$  обладает случайной амплитудной и фазовой модуляцией  $E(t) = E_0[1 + \epsilon(t)] \cos[\omega_c t + \gamma(t)]$  со спектрами  $S_\epsilon(\omega)$ ,  $S_\gamma(\omega)$  и  $S_{\epsilon\gamma}(\omega)$ . Исследуем лишь случай малых флуктуаций фазы:  $\langle \gamma^2 \rangle \ll 1$ . При этом из (18) легко получить следующее выражение для спектра выходного колебания:

$$W_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{A_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{(\Omega + \Delta)^2}{h^2} \right]^{-1} [Q^2 S_\alpha(\Omega) + S_\beta(\Omega) - \\ - 2QS_{\beta\alpha}^I(\Omega)] + \frac{kA_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{(\Omega + \Delta)^2}{h^2} \right]^{-1} [S_\epsilon(\Omega) + S_\gamma(\Omega) - 2S_{\epsilon\gamma}(\Omega)], \quad (22)$$

где  $k = [1 + \Delta^2/h^2]$ . Возможный вид спектра  $W_x(\Omega)$  приведен на рис. 4, где  $S_n(\Omega)$ —часть выходного спектра, обвязанная флуктуациям па-

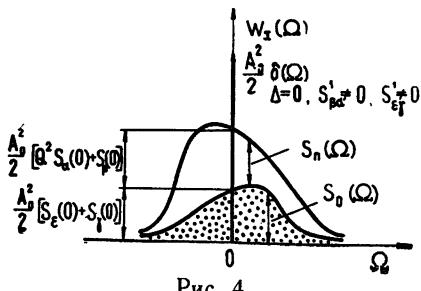


Рис. 4.

метров системы, и  $S_0(\Omega)$  — часть спектра, обязанная флюктуациям амплитуды и фазы входного колебания.

Автор благодарит А. Н. Малахова за внимание к работе и ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, **2**, 28 (1957).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец, Математическая физика, респ. межвуз. сб., вып. 3, 146 (1967).
4. В. И. Тихонов, И. Н. Амиантов, Радиотехника и электроника, **1**, 428 (1956).
5. А. Н. Малахов, Г. Н. Бочков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **91**, № 2, 314 (1966).
6. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968, гл. 4.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

### FLUCTUATIONS OF RESONANCE SYSTEM PARAMETERS

*G. N. Bochkov*

The transmission of a quasi-monochromatic signals through a linear resonance system with fluctuating parameters is theoretically investigated. The formulas giving allowance for finding a spectral correlation characteristics of amplitude and phase in the system output are obtained. The spectrum of oscillation passed through the resonance stochastic system is investigated.

УДК 538.56 : 519.25

## ВЫБРОСЫ СИГНАЛА С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ФАЗЫ

Г. А. Андреев

Получены соотношения между средним числом выбросов гармонической функции с нормальным распределением фазы и параметрами спектра, а также параметрами модулирующего процесса. Рассмотрена возможность использования полученных соотношений для определения параметров диаграммы вторичного излучения протяжинного тела и параметров угловых колебаний и флуктуаций скорости поступательного движения.

Сигналы  $S(t) = A(t) \cos [\Phi(t)]$  встречаются во многих задачах статистической радиофизики [1-4]. Наиболее широко используемыми при этом статистическими характеристиками, описывающими такие сигналы, являются коэффициенты корреляции  $R_s(\tau)$  или спектры  $G(\omega)$ . Получение сведений о параметрах спектра или коэффициента корреляции сигнала по среднему числу выбросов практически более удобно, так как в этом случае требуется сравнительно простая аппаратура, чем при измерении спектров или коэффициентов корреляции.

Из общей теории выбросов случайных процессов [2] известно, что среднее число выбросов в единицу времени  $N_1(C)$  процесса  $S(t)$ , пересекающего уровень  $C$  снизу вверх (т. е. с положительной производной), определяется соотношением

$$N_1(C) = \int_0^{\infty} \dot{S} f_2(C, \dot{S}) d\dot{S}, \quad (1)$$

где  $f_2(C, \dot{S})$  — совместная плотность вероятности процесса  $S(t)$  и его производной  $\dot{S}(t)$  в совпадающие моменты времени. Для сигнала

$$S(t) = \cos [\Phi(t)] \quad (2)$$

между переменными  $S$ ,  $\dot{S}$  и  $\dot{\Phi}$  существует функциональная связь

$$\dot{S} = \pm \dot{\Phi} \sqrt{1 - S^2}. \quad (3)$$

В соотношениях (1) и (3) и в дальнейшем для краткости аргумент  $t$  опущен.

Среднее число выбросов удобно определять для нулевого уровня  $C = S = 0$ . В этом случае (3) представляется в виде  $\dot{S} = \dot{\Phi}$ , т. е. производная сигнала равна производной фазы и процессы  $S$  и  $\dot{S}$  статистически независимы в эти моменты времени, вследствие чего  $f_2(C=0, \dot{S}) = f_s(S=0)f_1(\dot{S})$ . На основании известных правил нелинейных безынерционных [1, 2] преобразований периодической функции  $\dot{S}(t) = \cos [\Phi(t)]$  при нормальном распределении  $\Phi$  и  $\sigma_{\Phi} \gg 2\pi$  в [5] получено выражение  $f_s(S) = 1/2\pi \sqrt{1-S^2}$  и, следовательно,  $f_s(S=0) = 1/2\pi$ . При нормальной плотности вероятности фазы плотность вероятности производной фазы также нормальна с параметрами  $\sigma_{\dot{\Phi}}$  и  $\langle \dot{\Phi} \rangle$ . На

основании изложенного среднее число выбросов на нулевом уровне  $N_{01}$  представляется в виде

$$N_{01} = \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{\Phi}}} \int_0^{\infty} \dot{\Phi} \exp \left\{ -\frac{(\dot{\Phi} - \langle \dot{\Phi} \rangle)^2}{2\sigma_{\dot{\Phi}}^2} \right\} d\dot{\Phi}.$$

После интегрирования по  $\dot{\Phi}$  выражение для  $N_{01}$  [6] принимает вид

$$N_{01} = \frac{\sigma_{\dot{\Phi}}}{2\pi \sqrt{2\pi}} \{ \exp(-z^2) + \sqrt{\pi} z [1 + F_b(z)] \}, \quad (4)$$

где  $F_b(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-x^2} dx$ , а  $z = \langle \dot{\Phi} \rangle / \sqrt{2\sigma_{\dot{\Phi}}}$  — величина, обратная параметру

$m_{\dot{\Phi}} = \sqrt{D\{\dot{\Phi}\}/M\{\dot{\Phi}\}}$ , характеризующему глубину хаотической частотной модуляции,  $D\{\dot{\Phi}\} = \sigma_{\dot{\Phi}}^2$  — дисперсия, а  $M\{\dot{\Phi}\} = \langle \dot{\Phi} \rangle$  — математическое ожидание. Если глубина хаотической частотной модуляции мала, т. е.  $m_{\dot{\Phi}} \ll 1$  и, следовательно,  $z \gg 1$ , то, полагая  $\exp(-z^2) \approx 0$ ,  $F_b(z) \approx 1$ , для  $N_{01}$  получаем выражение  $N_{01} = \langle \dot{\Phi} \rangle / 2\pi$ . Для модулирующего процесса

$$\Phi(t) = \Omega_0 t + \varepsilon(t) + \varphi_0 \quad (5)$$

при  $\langle \varepsilon(t) \rangle = \langle \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta \rangle = 0$  имеем  $\langle \Phi \rangle = \Omega_0 t$  и, следовательно,  $N_{01} = \Omega_0 / 2\pi$ .

Таким образом, среднее число выбросов сигнала со слабой нормальной хаотической частотной модуляцией при средней частоте, отличной от нуля, совпадает со средней циклической частотой сигнала  $f_0 = \Omega_0 / 2\pi$ . Такой же результат получается [2] для среднего числа выбросов квазигармонического сигнала при  $\Phi(t) = \Omega_0 t + \varphi_i$  в случае равномерной плотности начальных фаз  $\varphi_i$ . В случае большой глубины хаотической модуляции  $z \ll 1$  ( $z = 0$  для сигнала с  $\Omega_0 = 0$ ) соотношение (4) преобразуется к виду

$$N_{01} = \frac{\sigma_{\dot{\Phi}}}{2\pi \sqrt{2\pi}}. \quad (6)$$

Для установления связи между выбросами (6) сигнала (2) и параметрами спектра (коэффициента корреляции) необходимо рассмотреть зависимость коэффициента корреляции от параметров хаотической модуляции.

Можно показать [3], что коэффициент корреляции  $R_s(\tau) = \Psi_s(t, t - \tau) / \Psi_s(t, t)$  сигнала (2) описывается соотношением

$$R_s(\tau) = \langle \cos [\Omega_0 \tau + \varepsilon(\tau)] \rangle_{\Phi}. \quad (7)$$

Черта сверху указывает на усреднение по времени, а структурные скобки с индексом указывают на статистическое усреднение по множеству значений индекса.

При нормальной плотности вероятности после усреднения соотношение (7) представляется в виде

$$R_s(\tau) = \exp \left[ -\frac{D\{\varepsilon(\tau)\}}{2} \right] \cos (\Omega_0 \tau), \quad (8)$$

где

$$D\{\varepsilon(\tau)\} = \left\langle \int_0^\tau \int_0^\tau \dot{\varepsilon}(\theta_1) \dot{\varepsilon}(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right\rangle = 2 \int_0^\tau (\tau - \theta) \Psi_\varepsilon(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Дальнейшие вычисления  $D\{\varepsilon(\tau)\}$  требуют конкретизации коэффициента корреляции  $R_\varepsilon(\tau)$  или его фурье-преобразования спектра  $G_\varepsilon(\omega)$ . Чтобы  $D\{\varepsilon(\tau)\}$  была конечна при  $\tau \rightarrow \infty$ , необходимо обращение в нуль  $G_\varepsilon(0)$ . Этому условию удовлетворяет спектр

$$G_\varepsilon(\omega) = \frac{4\alpha^2\omega^2}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]} \quad (10)$$

с коэффициентом корреляции

$$R_\varepsilon(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left[ \cos(\beta\tau) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right]. \quad (11)$$

Интеграл (9) при использовании коэффициента корреляции (11) после интегрирования по  $\theta$  равен  $D\{\varepsilon(\tau)\} = 2\sigma_\varepsilon^2[1 - R_\varepsilon(\tau)]$  и соотношение (8) записывается в виде

$$R_s(\tau) = \exp\{-\sigma_\varepsilon^2[1 - R_\varepsilon(\tau)]\} \cos(\Omega_0\tau). \quad (12)$$

Из соотношения (12) видно, что статистические характеристики модулирующего процесса  $\varepsilon(t)$  определяют вид и параметры огибающей

$$\rho(\tau) = \exp\{-\sigma_\varepsilon^2[1 - R_\varepsilon(\tau)]\} \quad (13)$$

коэффициента корреляции  $R_s(\tau)$ . В случае  $\sigma_\varepsilon \gg 1$  показатель у экспоненциальной функции в выражении (12) не превышает единицы при условии  $[1 - R_\varepsilon(\tau)] \ll 1$ , что соответствует значениям  $\tau$  вблизи нуля. Разложение в ряд по степеням  $\tau$  члена  $[1 - R_\varepsilon(\tau)]$  в окрестности  $\tau = 0$  имеет вид

$$1 - R_\varepsilon(\tau) = -R_\varepsilon(0) - \frac{\ddot{R}_\varepsilon(0)}{2}\tau^2 - \dots$$

Из условия существования отличной от нуля второй производной коэффициента корреляции при нулевом значении аргумента ( $-R_\varepsilon(0) = \omega_{1\varepsilon}^2 \neq 0$ ) и из-за свойства четности  $R_\varepsilon(\tau)$  первая производная  $R_\varepsilon(0)$  должна быть равна нулю. В этом случае, ограничиваясь вторым членом разложения при малых  $\tau$ , для  $\rho(\tau)$  получается соотношение

$$\rho(\tau) = \exp\left(-\frac{\omega_{1\varepsilon}^2\sigma_\varepsilon^2\tau}{2}\right). \quad (14)$$

Из соотношения (5) следует, что  $\omega_{1\varepsilon}^2\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\phi^2$  и, следовательно, выражение (14) представляется в виде

$$\rho(\tau) = \exp\left(-\frac{\sigma_\phi^2\tau^2}{2}\right). \quad (15)$$

Если обозначить  $\tau_e$  время корреляции, соответствующее спаду огибающей коэффициента корреляции (15) в  $e$  раз, то, очевидно,  $\tau_e = \sqrt{2}/\sigma_\phi$  или с использованием соотношения (6)

$$\tau_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}N_{01}}. \quad (16)$$

Ширина спектра  $\Delta F = \Delta\Omega/2\pi$ , соответствующая уменьшению в  $e$  раз величины спектра, как можно показать с использованием фурье-преобразования выражения (15), равна

$$\Delta F = \frac{1}{\pi \tau_e} = \frac{\sigma_\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} = 2\sqrt{\pi}N_{01}. \quad (17)$$

Рассмотрим возможность использования соотношения (6) для определения числа лепестков диаграммы излучения, отраженного ог движущегося протяженного тела со случайными угловыми колебаниями и линейным перемещением. Известно [7], что при когерентном приеме с синусоидальным зондирующими и опорным сигналами для извлечения информации о движении рассеивающего тела используют сигнал

$$\xi(t) = A(t) \cos [\Omega_0 t + 2k_0 \Delta r(t) + \varphi_0], \quad (18)$$

где  $A(t)$  — огибающая;  $\Omega_0 = 2\omega_0 \langle v \rangle / c$  — частота Допплера;  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число;  $\omega_0$  — частота;  $c$  — скорость распространения излучения в среде;  $\langle v \rangle$  — средняя скорость поступательного движения тела;  $\Delta r(t)$  — разность хода, обусловленная как флюктуациями перемещения при прямолинейном движении, так и угловыми колебаниями (например, по углу  $\gamma(t)$ ) тела.

Также известно [7], что протяженные тела сложной формы имеют весьма изрезанную диаграмму вторичного излучения. Число лепестков (экстремумов)  $n$  на угол  $\pi$  диаграммы вторичного излучения много больше единицы. Поэтому при угловых колебаниях с  $\sigma_\gamma \ll \pi$  диаграмма вторичного излучения по углу  $\gamma$  может быть аппроксимирована выражением  $\cos^2(n\gamma)$ . Если пренебречь флюктуациями  $A(t)$  из-за случайных неоднородностей среды, то изменения во времени  $\gamma(t)$  будут полностью проявляться в изменениях огибающей  $A(t)$ , которая как функция времени очевидно пропорциональна  $\cos^2[n\gamma(t)] = \{1 + \cos[2\gamma(t)]\}/2$ . Выделенная переменная составляющая огибающей описывается, таким образом, формулой

$$S(t) = \cos \left[ 2n \int_0^t \dot{\gamma}(\theta) d\theta \right]. \quad (19)$$

У сигнала (19) функция  $\Phi(t)$  имеет вид  $\Phi(t) = 2n \int_0^t \dot{\gamma}(\theta) d\theta$ . Мы видим, что амплитудные флюктуации в рассмотренном случае представляют сигнал с хаотической частотной модуляцией при  $z = 0$ . Среднеквадратичное значение  $\sigma_\Phi$  производной  $\dot{\Phi}$  процесса  $\Phi(t)$  равно  $\sigma_\Phi = 2n\sigma_\gamma$ . Для коэффициента корреляции  $R_\gamma(\tau)$  (11)  $\sigma_\gamma = \sigma_\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Выражая  $n$  и  $\sigma_\gamma$  в градусной мере  $n^\circ$  и  $\sigma_\gamma^\circ$ , соотношение (6) запишем в виде

$$N_{01} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\pi}} n^\circ \sigma_\gamma^\circ. \quad (20)$$

С использованием фазового детектора [7] и устранением описанных выше амплитудных флюктуаций, сигнал  $\xi(t)$  (18) может быть преобразован к виду

$$S(t) = \cos [\Omega_0 t + 2k_0 \Delta r(t) + \varphi_0]. \quad (21)$$

Разность хода  $\Delta r(t)$  в соотношении (21) содержит составляющую  $\Delta r_1(t)$ , обусловленную угловыми колебаниями, и составляющую

$\Delta r_2(t)$ , связанную с флуктуациями перемещения тела в поступательном движении. Для тела с характерным линейным размером  $h$  (относительно центра угловых колебаний при условии  $h \ll \sqrt{\lambda r_0}$ ) сигналы, отраженные от различных точек тела, будут проходить в одинаковой фазе в точку приема, находящуюся на расстоянии  $r_0$  от тела.

Наибольшим значением  $\Delta r_1(t)$  будет  $\Delta r_1(t) = h \int_0^t \dot{\gamma}(\theta) d\theta$ . Выражение для  $\Delta r_2(t)$  имеет вид  $\Delta r_2(t) = \int_0^t \Delta v(\theta) d\theta$ . Окончательно функция  $\Phi(t)$  принимает вид

$$\Phi(t) = \Omega_0 t + 2k_0 \int_0^t [h \dot{\gamma}(\theta) + \Delta v(\theta)] d\theta + \varphi_0. \quad (22)$$

После соответствующих вычислений для случая допплеровских флуктуаций с использованием (22) получается соотношение

$$N_{01} = \frac{k_0}{\pi \sqrt{2\pi}} \sqrt{(\omega_{11} \sigma_\gamma h)^2 + \sigma_v^2}. \quad (23)$$

Соотношения (16), (17), (20) и (23) позволяют определять по известному числу выбросов сигнала (2) как параметры спектра и коэффициента корреляции сигнала  $S(t)$ , так и параметры модулирующего процесса.

Автор благодарит В. И. Зверева за обсуждение изложенных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
4. Случайные колебания, под ред. С. Кренделл, изд. Мир, М., 1967.
5. Б. Р. Левин, В. В. Серов, Радиотехника и электроника, 9, 1066 (1964).
6. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1123 (1967).
7. М. Сколник, Введение в технику радиолокационных систем, изд. Мир, М., 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 ноября 1968 г.

#### ZERO CROSSINGS OF THE SIGNAL WITH NORMAL PHASE DISTRIBUTION

G. A. Andreev

The relation (ships) between the average number of zero crossings of the harmonic function with the normal phase distribution and the spectrum parameters, as well as the parameters of modulating process are obtained. A possibility is considered to use the relations obtained for determining the parameters of the secondary radiation pattern of the extended body and the parameters of angular oscillations and fluctuations of the velocity of translation.

УДК 621.372.826

## КВАЗИВОЛНОВОДНЫЕ (ВЫТЕКАЮЩИЕ) ВОЛНЫ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

B. B. Шевченко

Исследуются волны в волноводе, образованном слоисто-неоднородной средой, заключенной между двумя однородными диэлектрическими средами (стенками). Рассмотрен случай, когда диэлектрическая проницаемость внутренней среды изменяется по квадратичному закону, а поперечный размер волновода значительно больше длины волны. Вычислены волновые числа волни с учетом потерь на излучение через стенки.

В данной работе дается приближенное аналитическое решение дисперсионного уравнения для плоского волновода, образованного слоисто-неоднородной средой (диэлектриком, в частности, газом или плазмой), заключенной между двумя однородными средами (стенками). Предполагается для простоты, что среды не имеют потерь. Рассмотрен случай, когда диэлектрическая проницаемость внутренней среды изменяется по квадратичному закону, поперечный размер волновода значительно больше длины волны (квазиоптический волновод), а стенки бесконечно толстые. Считается, что направляющее действие внутренней среды велико, так что влияние стенок на волны может рассматриваться как малая поправка. Однако это влияние существенно, так как приводит к тому, что часть волн (а в ряде случаев все волны) оказываются затухающими из-за потерь на излучение через стенки. При наличии стенок образуются квазиволноводные или, как их чаще называют, вытекающие волны.

Рассмотрим плоский слоисто-неоднородный волновод толщиной  $2b$  (см. рис. 1) и двумерные волны в нем, которые запишем в виде

$$\psi(y, z, t) = \Psi(y) e^{i(\omega t - kz)}, \quad (1)$$

где  $\psi = E_x$  для ТЕ- или Н-волн ( $E_z = 0$ ), и  $\psi = H_x$  для ТМ- или Е-волн ( $H_z = 0$ ).

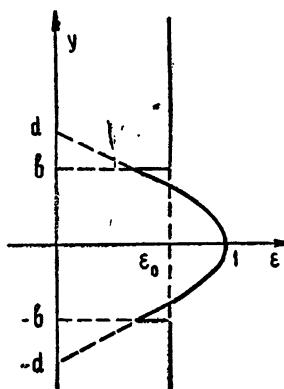
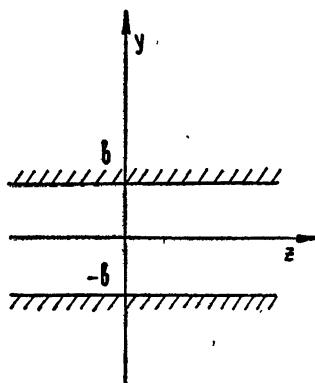


Рис. 1.

Пусть волновод широкий ( $kb \gg 1$ ), а относительная диэлектрическая проницаемость внутренней среды изменяется по закону

$$\epsilon = \epsilon_1(y)/\epsilon_1(0) = 1 - y^2/d^2, \quad (2)$$

и при этом удовлетворяется соотношение

$$\left| \frac{1}{\epsilon^2 k^2 b} \frac{d\epsilon}{dy} \right| < \frac{2}{k^2(d-b)^2} = \frac{\lambda^2/2\pi^2}{d^2(1-b/d)^2} \ll 1, \quad (3)$$

где  $k^2 = \omega^2 \epsilon_1(0) \mu_1 = (2\pi/\lambda)^2$ ,  $\epsilon_1$  и  $\mu_1 = \text{const}$  — параметры внутренней среды,  $\lambda$  — длина волны в среде с параметрами  $\epsilon_1(0)$ ,  $\mu_1$ . Физический смысл условия (3) заключается в том, что диэлектрическая проницаемость должна изменяться медленно (мало на длине волны) внутри волновода, а на его границе должна иметь конечную величину ( $y/d \leq b/d \neq 1$ ,  $b/d < 1$ ,  $\epsilon > 0$  — диэлектрик или прозрачная плазма).

Уравнение для функций поперечного сечения  $\Psi(y)$  имеет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + g^2(y)\Psi = 0, \quad (4)$$

где

$$g^2(y) = k^2\epsilon - h^2 = \chi^2 - k^2y^2/d^2, \quad \chi^2 = k^2 - h^2,$$

причем при условии (3) оно справедливо как для Н-волн, так и для Е-волн [1]. Граничные же условия при  $y = \pm b$  различаются и записываются в виде

$$\Psi_1(\pm b) = \Psi_2(\pm b), \quad \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi_1}{dy} = \frac{d\Psi_2}{dy} \Big|_{y=\pm b}, \quad (5)$$

где  $\tau = 1$  для Н-волн и  $\tau = \epsilon(b)/\epsilon_0$  для Е-волн,  $\epsilon_0 = \epsilon_2/\epsilon_1(0)$  — относительная диэлектрическая проницаемость внешней среды.

При  $b \rightarrow \infty$  (бесконечная в поперечном сечении слоисто-неоднородная среда) уравнение (4) имеет решение в классе квадратично интегрируемых функций (волны должны переносить конечную мощность) только при определенных значениях  $\chi$ :

$$\chi_n = \chi_0 \sqrt{2n+1}, \quad \chi_0 = \sqrt{k/d}, \quad (6)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; при этом сами функции сечения имеют вид

$$\Psi_n(y) = H_n(\chi_0 y) \exp(-\chi_0^2 y^2/4), \quad (7)$$

где  $H_n(v)$  — полиномы Эрмита [2]:  $H_0(v) = 1$ ,  $H_1(v) = v$ ,  $H_2(v) = v^2 - 1$ ,  $H_3(v) = v(v^2 - 3)$ , ... Функции (7) могут быть использованы для приближенного описания поля волны и при конечном, но достаточно большом  $b$ . Недостатком такого описания является то, что с помощью него не удается учесть влияние стенок (в частности, получить потери на излучение), так как функции (7), правильно описывающие поле волн внутри волновода, дают неверный результат вблизи стенок. Верный результат вблизи стенок может быть получен путем решения уравнения (4) методом ВКБ, так как оно в неявной форме содержит большой параметр:

$$\frac{d^2\Psi}{d(y/b)^2} + (kb)^2 \frac{g^2}{k^2} \Psi = 0. \quad (8)$$

Решение уравнений типа (8) методом ВКБ подробно изложено в [3], поэтому мы воспользуемся полученными там результатами. Сла-

бое влияние стенок будет иметь место в том случае, когда  $b > y_0$ , где  $y_0$  есть решение уравнения  $g^2(y) = 0$ . Линия  $y = y_0$  называется линией поворота луча (геометрооптическое представление) или каустикой. Для  $y < y_0 \leq b$  функция  $\Psi(y)$  может быть записана в виде

$$\Psi(y) = \frac{1}{|g|} \left\{ A \exp [\beta_1(y)] + \frac{1}{2} B \exp [-\beta_1(y)] \right\}, \quad (9)$$

где соответственно для четных и нечетных волн

$$A = \begin{cases} \cos \left[ \beta_2(0) + \frac{\pi}{4} \right], \\ \sin \left[ \beta_2(0) + \frac{\pi}{4} \right], \end{cases} \quad B = \begin{cases} -\sin \left[ \beta_2(0) + \frac{\pi}{4} \right], \\ -\cos \left[ \beta_2(0) + \frac{\pi}{4} \right], \end{cases} \quad (10)$$

$$\beta_1(y) = \int_{y_0}^y |g| dy, \quad \beta_2(y) = \int_y^{y_0} g dy.$$

Функция сечения в верхней стенке может быть записана в виде

$$\Psi(y) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp [-\alpha(y - b)], \quad (11)$$

где

$$\alpha^2 = h^2 - k^2 \varepsilon_0 = k^2 (1 - \varepsilon_0) - \chi^2. \quad (12)$$

Сшивая функции (9) и (11) согласно граничным условиям (5), получим дисперсионное уравнение для  $\chi$ :

$$\operatorname{tg} \left[ \beta_2(0) \mp \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \exp [-2\beta_1(b)] \frac{|g| - \tau\alpha}{|g| + \tau\alpha}, \quad (13)$$

где верхний и нижний знаки относятся соответственно к четным и нечетным волнам. Вычисление  $\beta_1(b)$  и  $\beta_2(0)$  по формулам (10) дает

$$\beta_1(b) = \frac{1}{2} [c \sqrt{1-u/c} - u \ln (\sqrt{c/u} + \sqrt{c/u-1})], \quad \beta_2(0) = \frac{\pi}{4} u, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$u = \frac{\chi^2 d}{k}, \quad c = \frac{k b^2}{d}. \quad (15)$$

В обозначениях (15) дисперсионное уравнение принимает вид

$$\operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4}(u \mp 1) \right] = \left( \frac{c}{u} \right)^{u/2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{u}{c}} \right)^u e^{-c\sqrt{1-u/c}} \times \quad (16)$$

$$\times \frac{\sqrt{1-u/c} - \tau \sqrt{\gamma-u/c}}{\sqrt{1-u/c} + \tau \sqrt{\gamma-u/c}},$$

где  $\gamma = (1 - \varepsilon_0) d^2/b^2$ . Решение уравнения (16) можно получить методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения решение при  $b \rightarrow \infty$  ( $c \rightarrow \infty$ ). В первом приближении получим (ср. (6))

$$u_n = 2n + 1 + \delta_n, \quad \chi_n = \sqrt{(2n + 1 + \delta_n) k/d}, \quad (17)$$

где

$$\delta_n = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{p} \right)^{n+1/2} (1 + \sqrt{1-p})^{2n+1} e^{-c \sqrt{1-p}} \frac{\sqrt{1-p} - \tau \sqrt{\gamma-p}}{\sqrt{1-p} + \tau \sqrt{\gamma-p}}, \quad (18)$$

$$p = (2n+1)/c, \quad |\delta_n| \ll 1.$$

Продольные волновые числа волн можно записать следующим образом:

$$h_n = \sqrt{k^2 - \chi_n^2} = k \sqrt{1 - \frac{2n + 1 + \delta_n}{kd}}. \quad (19)$$

При  $2n + 1 < (1 - \epsilon_0)kd$  имеет место  $\gamma > p$  и поправка  $\delta_n$  является действительной, а волна, согласно (12), является медленной (поверхностной) по отношению к внешней среде ( $h > k \sqrt{\epsilon_0}$ ); при  $2n + 1 > (1 - \epsilon_0)kd$   $\gamma < p$  и поправка  $\delta_n$  (18) становится комплексной ( $\delta_n = \delta'_n + i\delta''_n$ ), а волна — быстрой (вытекающей,  $h = h' + ih'', h' < k \sqrt{\epsilon_0}$ ).

При этом возникают потери на излучение:

$$h''_n = - \frac{\delta''_n}{2d \sqrt{1 - (2n + 1)/kd}} \approx - \frac{\delta''_n}{2d}, \quad (20)$$

где

$$\delta''_n = \frac{8}{\pi} \left( \frac{4}{p} \right)^{n+1/2} \frac{\tau \sqrt{p-\gamma}}{1-\tau^2\gamma} e^{-c}. \quad (21)$$

В последней формуле учтено, что полученное решение справедливо только для волн, каустика которых находится внутри волновода ( $y_{0n} < b$ ) и притом достаточно далеко от стенки. Это условие может быть записано в виде

$$p = \frac{2n + 1}{c} = \left( \frac{y_{0n}}{b} \right)^2 \ll 1. \quad (22)$$

Заметим, что при  $\epsilon_0 > 1$  все волны являются вытекающими. Интересно отметить также, что величина  $c$  играет роль квазиоптического параметра, аналогично параметру  $c$  линзовой линии ([4], гл. 8).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Бrehovskikh, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
- Э. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, ГИФМЛ, М., 1959.
- В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, изд. НКЭП, М., 1946.
- Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 июня 1968 г.

#### QUASI-WAVEGUIDE (LEAKY) WAVES IN STRATO-INHOMOGENEOUS WAVEGUIDES

V. V. Shevchenko

The author investigates the waves in a waveguide formed by a strato-inhomogeneous medium comprised between two homogeneous dielectric media. A case is considered when the dielectric permittivity of the inner medium varies according to the square law and the transverse size of the waveguide is considerably larger than the wavelength. The wave numbers are calculated with the radiation losses through the walls taken into account.

УДК 621.373.421.13

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ КВАРЦЕВЫМ РЕЗОНАТОРОМ

*H. H. Солин*

Рассматривается влияние ангармоничности кварцевого резонатора на флуктуационные характеристики двухконтурного кварцевого генератора с кварцем в цепи сетки. Предполагается, что емкость кварца нелинейным образом зависит от амплитуды напряжения на нем. При этом в силу увеличения неизохронности генератора амплитудные флуктуации переходят в частотные. При достаточно больших амплитудах напряжения на кварце указанное обстоятельство приводит к значительному уширению естественной ширины спектральной линии генератора по сравнению со случаем линейного кварцевого контура.

При достаточно больших амплитудах колебания упругого тела его колебания уже нельзя считать линейными. Учет этой нелинейности колебаний приводит, как правило, к появлению некоторых качественно новых особенностей движения колебательной системы. Такой высокодобротной колебательной системой является кварц, ангармонизм которого был обнаружен в эксперименте [1]. Поэтому представляет определенный интерес выяснить, как влияет нелинейность кварцевого резонатора на флуктуационные характеристики кварцевого генератора. Этому вопросу и посвящается настоящая статья.

Данная работа является фактически некоторым обобщением работы [2] на случай нелинейного кварцевого контура. Поэтому здесь рассматривается та же схема кварцевого генератора, используется также методика анализа динамики движения системы и флуктуационных уравнений и, наконец, употребляются те же обозначения параметров схемы.

Предположим, что нелинейность кварцевого контура вызвана зависимостью его эквивалентной емкости  $C_k$  от напряжения на кварце  $y(t)$ . Принимая полиномиальную аппроксимацию этой зависимости, можно показать, что учет члена, пропорционального  $y(t)$ , в первом приближении не вносит никаких новых физических эффектов. Тем самым целесообразно рассмотреть сразу случай квадратичной зависимости:  $C_k = C_{k0}(1 + \gamma y^2)$ . При этом, так же как и в [2], будем считать, что флуктуации амплитуды и частоты анодного и кварцевого контуров обязаны тепловым шумам анодного и кварцевого контуров и дробовым шумам лампы.

Уравнения движения для напряжения на анодном контуре  $x(t)$  и напряжения на кварцевом контуре  $y(t)$  для рассматриваемой схемы будут следующими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \ddot{y} + \omega_1^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = -\Pi_a \dot{x} - s_1 \omega_1^2 y - \omega_1 l y (1 - 3\beta_0 y^2) + h_a \omega_1^2 x,$$

$$H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = s_2 F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) - \frac{\omega_1}{Q_k} \dot{y} - s_1 h_k \omega_1^2 x + \omega_1^2 \gamma y^3,$$

$$E_1(t) = -\frac{1}{\omega_1^2(C+C_1)} \frac{di_{ap}}{dt} + \frac{\omega_a^2}{\omega_1^2} \mathcal{E}_T, \quad E_2(t) = h_k \mathcal{E}_{Tk} + s_2 E_1(t).$$

Обозначения здесь те же, что и в [2]:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{L_k} \left( \frac{1}{C_{k0}} + \frac{1}{C_1 + C_s} \right), \quad \omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_{k0}}, \quad \omega_a^2 = \frac{1}{L(C+C_1)}, \\ s_1 &= \frac{C_1}{C+C_1}, \quad s_2 = \frac{C_1}{C_s+C_1}, \quad h_k = \frac{C_{k0}}{C_1+C_s+C_{k0}}, \quad h_a = \frac{\omega_1^2 - \omega_a^2}{\omega_1^2}, \\ l &= \frac{S}{\omega_1(C+C_1)} \end{aligned}$$

— безразмерная крутизна,  $\Pi_a = \omega_1/Q_a$  — полюса анодного контура.

При сравнении уравнений движения (1) с соответствующими уравнениями в [2] можно заметить, что изменилось лишь выражение для функции  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , в которую входит дополнительное слагаемое, обязанное нелинейности кварца и пропорциональное  $\gamma$ .

Следовательно, вся специфика данной задачи будет зависеть от степени влияния этого члена на динамику и флюктуационные характеристики движения рассматриваемой колебательной системы. Очевидно, что степень влияния нелинейности кварца определяется порядком величины этого члена по сравнению с другими.

Если выбрать, как и в [2], за параметр малости  $\mu_a = 1/Q_a$ , то, учитывая малость нелинейности лампы и малость флюктуаций, можно показать, что правая часть первого уравнения системы (1) будет иметь такой же, как и в [2], порядок малости  $\omega_1^2 \mu_a$ . Однако правая часть второго уравнения системы (1) будет иметь порядок малости  $\omega_1^2 \mu_k = \omega_1^2 \mu_a^n$ , где  $\mu_k = 1/Q_k$  ( $n = 2 \div 3,5$ ), поскольку добротность существующих кварцев  $Q_k$  имеет порядок величины  $10^4 \div 10^7$ , а добротность реальных контуров  $Q_a \sim 10^2$ .

Таким образом, для того, чтобы правая часть второго уравнения системы (1) имела порядок малости, например,  $\omega_1^2 \mu_a^2$  (это наиболее часто рассматриваемый в литературе случай; см., например, [2-4]), необходимо, чтобы все слагаемые, входящие в  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , имели порядок величины  $\omega_1^2 \mu_a^2$ . Если нелинейность кварца настолько мала, что слагаемое  $\omega_1^2 \gamma y^3$ , входящее в  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , имеет более высокий порядок малости по сравнению с остальными, то задача утрачивает свою специфику и ничем не отличается от случая линейного кварцевого резонатора, рассмотренного в [2]. Поэтому рассмотрим следующие два случая: 1) все слагаемые, входящие в  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , в том числе и  $\omega_1^2 \gamma y^3$ , имеют одинаковый порядок малости  $\omega_1^2 \mu_a^2$ ; 2) нелинейность кварца настолько велика, что  $\omega_1^2 \gamma y^3 \sim \omega_1^2 \mu_a$  и, следовательно,  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \sim \omega_1^2 \mu_a$ .

1) Пусть величина  $\omega_1^2 \gamma y^3$  имеет порядок  $\omega_1^2 \mu_a^2$ . Тогда система уравнений (1) является системой двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с неравноценными правыми частями, которая решается так же, как соответствующая система в [2]. Установившиеся амплитуды напряжения на анодном контуре  $P_0$  и  $B_0$  ( $x = P \cos \phi + B \sin \phi$ ) и на кварцевом контуре  $R_0$  ( $y = R \cos \phi$ ) будут иметь то же выражение, что и в [2]. Поправка на частоту равна

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_1}{2} \left( s_1 h_k \frac{P_0}{R_0} - \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right) \quad (2)$$

и, как и в [2], имеет порядок малости  $\omega_1 \mu_a^2$ .

Флуктуационные уравнения остаются теми же, что в [2]. Причем остаются теми же выражения для флуктуационных сил  $f_i$  и для большинства коэффициентов  $p_{ij}$  и  $q_i$ , кроме выражений для  $q_1$ ,  $p_{11}$  и  $p_{13}$ . Однако порядки величин всех  $p_{ij}$  и  $q_i$  остаются теми же, что и в [2]. Поэтому остаются прежними порядки величин и вид зависимости спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций от частоты.

Прежним остается и порядок величины естественной ширины спектральной линии генератора, определяемой выражением (см. [2])

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{2} D_1 (\epsilon^2 + \delta + \Delta_1), \quad (3)$$

где от нелинейности кварца зависит лишь коэффициент  $\Delta_1$ .

Таким образом, если  $\omega_1^2 \gamma y^2$  имеет порядок величины  $\omega_1^2 \mu_a^2$ , то это не приводит к существенному уширению естественной спектральной линии.

2) Пусть теперь  $\omega_1^2 \gamma y^2$  имеет порядок малости  $\omega_1^2 \mu_a$ . В этом случае правые части обоих уравнений системы (1) имеют порядок величины  $\omega_1^2 \mu_a$  и для их решения необходимо воспользоваться формулами, полученными в [2] для общего случая двухконтурного автогенератора.

Тогда можно получить следующее выражение для стационарных амплитуд на анодном и кварцевом контурах:

$$P_0 = - \frac{l Q_a^{-1} (1 - 3\beta_0 R_0^2/4) - s_1 (h_a - 3\gamma R_0^2/4)}{Q_a^{-2} + (h_a - 3\gamma R_0^2/4)^2} R_0 \equiv \frac{R_0}{g_1(R_0^2)}, \quad \frac{3}{4} \gamma R_0^2 = h_k,$$

$$B_0 = - \frac{l (h_a - 3\gamma R_0^2/4) (1 - 3\beta_0 R_0^2/4) + s_1 Q_a^{-1}}{Q_a^{-2} + (h_a - 3\gamma R_0^2/4)^2} R_0 \equiv \frac{R_0}{g_2(R_0^2)}, \quad (4)$$

а также выражение для поправки на частоту

$$\Delta\omega_0 = - \frac{3}{8} \omega_1 \gamma R_0^2, \quad (5)$$

которая теперь определяется только нелинейностью кварца и имеет порядок величины  $\omega_1 \mu_a$ . Тем самым, имеется поправка на частоту в первом порядке малости.

Система флуктуационных уравнений сохраняет свой прежний вид (см. [2]). Однако теперь коэффициенты  $p_{ij}$  и  $q_i$  имеют несколько иное выражение и порядок их величины будет в  $\mu_a^{-1}$  раз большим по сравнению с предыдущим случаем и случаем линейного кварцевого резонатора. Очевидно, что теперь спектральные плотности амплитудных и частотных флуктуаций анодного и кварцевого контуров возрастают в  $\mu_a^{-2}$  раз, но вид их зависимости от частоты  $\Omega$  будет тот же, что и в [2]. Поскольку значение  $S_v(0)$ , определяющее естественную ширину спектральной линии генератора, возрастает в  $\mu_a^{-2}$  раз, то и сама ширина естественной спектральной линии возрастает в  $\mu_a^{-2}$  раз.

Представляет интерес оценить эффект уширения естественной спектральной линии лишь за счет ангармоничности кварца, отвлекаясь

от остальных причин уширения. Из всех коэффициентов, входящих в (3), лишь  $\Delta_1$  зависит от коэффициента нелинейности емкости кварца  $\gamma$ . Представим  $\Delta_1$  в следующем виде:

$$\Delta_1 = \Delta_1^0 + \Delta_1(\gamma),$$

где, следуя [2], можно найти, что

$$\Delta_1(\gamma) = q_1^2(\gamma) A_0 \Omega_0^{-2} - 2q_1(\gamma) \Omega_1^{-1} (M_1 x_2 + M_2 x_3),$$

$\Delta_1^0$  не зависит от  $\gamma$ ,  $q_1(\gamma) = 3\omega_1 \gamma R_0^2 / 4$ , остальные обозначения взяты из [2] и от  $\gamma$  не зависят.

Поскольку в данном случае  $A_0 \sim \mu_a^{-2}$ , а  $\Omega_0^2 \sim \omega_1^2 \mu_a^2$ , то можно считать

$$\Delta_1(\gamma) \sim \mu_a^{-4} \left( \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right)^2. \quad (6)$$

В результате получаем следующее выражение для оценки естественной ширины спектральной линии, обусловленной ангармоничностью кварцевого резонатора (см. [2]):

$$\Delta\Omega(\gamma) \sim \frac{\pi\omega_0^2}{4R_0^2} \left[ \mu_a^{-4} \left( \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right)^2 (2kTr + eI_0 \Gamma^2 r^2 Q_a^2) + h_k^2 2kTr_k \right]. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что для рассматриваемой схемы в (7) можно пренебречь тепловыми шумами анодного и кварцевого контуров по сравнению с дробовыми шумами лампы. Тогда, учитывая, что  $\mu_a^{-1} = Q_a$ , находим

$$\Delta\Omega(\gamma) \sim \frac{\pi\omega_0^2}{4R_0^2} e I_0 \Gamma^2 r^2 Q_a^6 \left( \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right)^2. \quad (8)$$

Из экспериментальных данных, полученных в [1], для кварцевого резонатора на частоту  $f_0 = 1 \text{ МГц}$  при  $R_0 = 1,1 \text{ в}$  имеем коэффициент  $3\gamma/4 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ в}^{-2}$ . Тогда, принимая  $r = 1 \text{ ом}$ ,  $Q_a = 100$ ,  $I_0 = 10 \text{ мА}$ ,  $\Gamma^2 = 0,2$ , получим

$$\Delta F(\gamma) = \frac{\Delta\Omega(\gamma)}{2\pi} \sim 4 \cdot 10^{-9} \text{ герц},$$

а относительная естественная ширина спектральной линии генератора

$$\delta f(\gamma) \sim 4 \cdot 10^{-15}.$$

Это примерно в 100 раз больше, чем в случае автогенератора с линейным кварцем (см. [5]).

Если же оценивать  $\delta f(\gamma)$ , исходя из экспериментальных данных, приведенных в [6] для кварцевых резонаторов на частоту  $f_0 = 2,5 \text{ МГц}$ , то получается еще большее уширение  $\delta f(\gamma)$ . Причем даже для однотипных резонаторов это уширение может быть разное при одинаковых уровнях рассеиваемой каждым кварцем мощности.

Автор выражает благодарность А. Н. Малахову за предложенную тему и постоянное внимание к данной работе. Автор благодарит И. М. Клибанову и Л. П. Зачепицкую за ценные замечания, сделанные при обсуждении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Смагин, Пьезоэлектрические резонаторы и их применение, изд. Стандартов, М., 1967.
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 850 (1968).
3. С. М. Рытов, А. М. Прохоров, М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 10, 557 (1945).
4. В. В. Григорянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968.
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
6. E. A. Gerber, R. A. Sykes, Proc. IEEE, 54, 103 (1966).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 декабря 1968 г.

**NATURAL FLUCTUATIONS IN AUTO-GENERATOR WITH A NONLINEAR QUARTZ RESONATOR***N. N. Solin*

The influence of anharmonic properties of quartz resonator on fluctuation characteristics of a two-circuit quartz generator with quartz in the circuit grid is considered. The quartz capacity is assumed to depend nonlinearly on the amplitude of voltage applied. In this case by virtue of increasing the non-isochronism of generator, the amplitude fluctuations are transformed into frequency fluctuations. At large enough amplitudes of voltages on quartz, the indicated circumstance leads to a considerable narrowing of the natural width of the generator spectral line as compared with the case of a linear quartz circuit.

УДК 621.314

## К РАСЧЕТУ ВОЛНОВОДНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Э. Л. Куликов, Л. А. Сошественская

Обсуждается вопрос об использовании вариационных методов для получения расчетных данных на ЭЦВМ. Построен новый способ решения задачи о волноводном трансформаторе, который может оказаться полезным для инженерной практики. В виде, удобном для использования на ЭЦВМ, построены стационарные функционалы относительно элементов матрицы сопротивлений или проводимостей волноводного устройства.

В последние годы для расчета сложных волноводных СВЧ трансформаторов успешно используются вариационные методы. Среди них наиболее общим и в то же время во многом детально разработанным является метод Галеркина, развиваемый Никольским и его сотрудниками [1]. Однако, несмотря на свою привлекательность, с точки зрения математического формализма, этот метод обладает тем существенным недостатком, что искомые элементы матриц сопротивления  $Z$ , проводимостей  $Y$  или рассеяния  $R$ , описывающих работу волноводного устройства, определяются в виде некоторых интегральных характеристик приближенно находимого распределения поля в изучаемой системе. Это приводит к необходимости построения большого числа приближений для того, чтобы результаты расчета обладали желаемой степенью точности. Поэтому целесообразно развивать такие методы, в которых бы искомые величины представлялись в виде стационарных выражений. Такие методы позволяют во многих случаях получать достаточно точные расчетные данные уже в первых приближениях, когда можно избежать использования электронно-цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ), что важно на практике. Кроме того, подобные методы возможно представить в виде, удобном в вычислительном отношении при использовании ЭЦВМ.

В настоящей работе построен вариационный метод, с помощью которого находятся непосредственно элементы матрицы  $R$  волноводных трансформаторов. Этот метод, по-видимому, целесообразно использовать при «ручном» счете. Помимо этого, метод, предложенный в [2], сформулирован в виде, удобном для проведения расчетов на ЭЦВМ.

*Основные теоретические положения.* Рассмотрим сложное волноводное устройство, описанное в работе [2] и представляющее собой сочленение нескольких регулярных волноводов. Будем считать (лишь для простоты изложения материала), что все допущения, сформулированные в работе [2], выполняются. Решение указанной задачи можно найти, исходя из стационарных свойств «электрического» функционала (2), приведенного в работе [3]. Так как граничные условия, накладываемые на поля  $\tilde{E}$  и  $E$ , могут быть отличными друг от друга [3], то пробные поля, подставляемые в стационарный функционал, подчиним следующим условиям. Пусть в случае поля  $E$  возбуждается лишь  $k$ -й волновод, а остальные нагружены на согласованную нагрузку. Тогда в клеммных сечениях  $S_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) касательные составляющие электрического и магнитного полей можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{s_m} &= (\delta_{k_m} + R_{k_m}) f_m, \\ H_{s_m} &= (\delta_{k_m} - R_{k_m}) g_m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta_{k_m}$  — символ Кронекера;  $f_m$  и  $g_m$  — собственные векторные функции в поперечном сечении  $m$ -го волновода, которые нормированы так, что выполняется условие (2) работы [2], а  $R_{k_m}$  — элементы матрицы рассеяния  $R$ .

Пробные функции для поля  $E$  в дальнейшем должны удовлетворять граничным условиям (1).

Граничные условия, накладываемые на функции  $\tilde{E}$ , зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{s_i} &= f_i, \\ \tilde{E}_{s_m} &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N; m \neq i), \end{aligned}$$

т. е. поле  $\tilde{E}$  возбуждается источником единичной амплитуды в сечении  $s_i$ . В остальных сечениях имеет место условие короткого замыкания.

При таком выборе граничных условий стационарный функционал (2) работы [3] принимает вид

$$\delta_{k_i} - R_{k_i} = \frac{j}{k} \int_v (\operatorname{rot} \tilde{E} \overset{\leftrightarrow}{\mu^{-1}} \operatorname{rot} \tilde{E} - k^2 \tilde{E} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \tilde{E}) dv \quad (2)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, N).$$

На рис. 1 приведены для одного из рассмотренных случаев данные расчета прямоугольного волновода с  $H_{10}$ -волной, внутри которого помещалась диафрагма. Конфигурации устройства ясны из этого рисунка. Размеры системы были выбраны следующими: высота волновода  $b$ , ширина волновода  $2,3 b$ , высота диафрагмы  $0,5 b$ , длина диафрагмы  $b$ . При одних и тех же допущениях (пробная функция и разложение полей такие же, как в работе [4]) была рассчитана зависимость модуля коэффициента отражения  $R$  от отношения  $\lambda/b$  ( $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве) методом, предложенным в работе [4] (пунктирная линия), и данным методом (сплошная кривая). Данные эксперимента нанесены крестиками.

Вариационный метод, изложенный выше, трудно использовать для счета на ЭЦВМ, так как неизвестные величины  $R_{k_i}$  присутствуют в неявном виде и в правой части выражения (2). Положение мало улучшится, если даже все граничные условия для (2) (точнее говоря, аналогичного ему по виду функционала) сделать естественными.

В этом отношении интерес представляет метод, предлагаемый в работе [2]. Однако в виде, данном в работе [2], он не совсем удобен для проведения вычислений на ЭЦВМ [1]. Для практических приложений стационарный функционал (6) работы [2] необходимо преобразовать

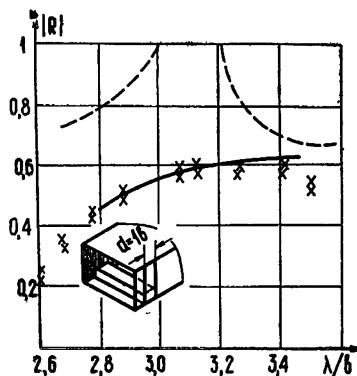


Рис. 1. Зависимость модуля коэффициента отражения от длины волны в волноводе.

таким образом, чтобы для него естественные граничные условия совпадали с граничными условиями задачи. Непосредственным варьированием нетрудно убедиться, что такой стационарный функционал имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_{nk} = & \frac{j}{k} \left[ \int_v (\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}_k \overset{\leftrightarrow}{\epsilon^{-1}} \operatorname{rot} \mathbf{H}_n - k^2 \tilde{\mathbf{H}}_k \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H}_n) dv + \right. \\ & + \sum_{m=1}^N \int_{s_m} (\tilde{\mathbf{H}}_k - \delta_{mk} \mathbf{g}_k, \overset{\leftrightarrow}{\epsilon^{-1}} \operatorname{rot} \mathbf{H}_n) \mathbf{n} ds + \\ & \left. + \sum_{m=1}^N \int_{s_m} (\mathbf{H}_n - \delta_{mn} \mathbf{g}_n, \overset{\leftrightarrow}{\epsilon^{-1}} \operatorname{rot} \mathbf{H}_k) n ds \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Причем здесь сохранены все обозначения, принятые в работе [2].

Пробные функции, подставляемые в (3), можно вообще не подчинять никаким граничным условиям. Это позволяет, в частности, в качестве координатных функций использовать собственные функции расширенной внешней области по отношению к поставленной задаче (базис расширенной области) [1].

Согласно принципу перестановочной двойственности, из (3) автоматически получается аналогичный по виду стационарный функционал относительно элементов матрицы  $\mathbf{Y}$ .

Следует отметить, что приводимые функционалы получены на основе волновых уравнений. Но так же возможно получить подобные выражения и непосредственно на основе уравнений Максвелла. Они могут представить интерес в вычислительном отношении, так как порядок производных в вычислительных выражениях будет меньшим. При этом можно ожидать более быструю сходимость находимого приближенного решения задачи к точному.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, изд. Наука, М., 1967
2. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 10, 559 (1965).
3. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 8, 713 (1963).
4. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 7, 1091 (1962).

Поступила в редакцию  
31 января 1969 г.

#### DESIGN OF WAVEGUIDE TRANSFORMATORS

*E. L. Kulikov, L. A. Soshestvenskaya*

The question on the use of the variational methods to obtain the estimated data on the electron digital computer is discussed. A new method is developed to solve the problem on a wave transformator which may be useful for engineering practice. The stationary functional relative to the elements of resistances or conductances matrix of the waveguide unit is transformed in the form suitable for an electron digital computer.

УДК 538.56

## О ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ СПЕКТРА ПРИ СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

*M. E. Герценштейн, A. H. Малахов, P. Ч. Бокун*

Вычисляется тонкая структура спектра синхротронного излучения сгустка релятивистских электронов с учетом синхротронных колебаний. Получены формулы для интенсивности линии и пьедестала. Показано, что на высоких гармониках линия экспоненциально мала, а пьедестал имеет ряд узких пичков, что в принципе позволяет сравнивать частоты радио и инфракрасного диапазонов с точностью  $\sim 10^{-12}$ .

Синхротронному излучению электронов, движущихся по круговой орбите в магнитном поле, посвящено большое количество работ (см., например, [1–5]). Тем не менее, в связи с развитием возможностей эксперимента после появления лазеров [6, 7] и открытых резонаторов [8] представляет интерес более подробное исследование спектра синхротронного излучения. Это исследование дает, например, возможность более тонко изучить структуру сгустка и взаимодействие электронов в нем. В статье рассматривается излучение электронов, движущихся по окружности в поле синхронной волны радиодиапазона, что имеет место, например, в ускорителях [9] и накопителях [10], в которых поле волны и фокусирующее постоянное магнитное поле образуют движущуюся потенциальную яму. Идеализированная частица постоянно находится на дне ямы и движется синхронно с волной, фаза излучения при этом определяется фазой волны. В действительности, однако, реальная частица всегда совершает случайные колебания около движущегося центра ямы. Наличие этих фазовых (по отношению к фазе волны) флуктуаций приводит к уменьшению мощности спектральной линии (и ее гармоник) за счет появления пьедестала около каждой дискретной линии [11].

Как будет показано ниже, этот пьедестал может состоять из отдельных узких квазигармонических пичков. Поскольку дискретная линия синхротронного излучения вместе со своим пьедесталом может лежать в инфракрасном и юптическом диапазонах, то наличие пичков дает возможность (методами оптического гетеродинирования [12]) непосредственно сравнивать частоты генератора радио и инфракрасного диапазонов.

В настоящей работе вычисляются мощности и ширина указанных пичков, обсуждается возможность их экспериментального обнаружения. При этом нас интересуют принципиальные физические ограничения, а не технические вопросы.

В разд. 3 обсуждаются вопросы влияния излучения на размеры сгустка.

### 1. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим спектр излучения электрона, врачающегося вместе с потенциальной ямой и совершающего случайные колебания в ней. При этом мы будем ограничиваться рассмотрением только синхротронных колебаний электрона (колебаний вдоль траектории), поскольку они

значительно больше бетатронных поперечных колебаний. Излучение электрона в заданном направлении является периодическим (с периодом обращения по орбите), но не синусоидальным. И эта несинусоидальность тем больше, чем выше скорость электрона. При релятивистском движении электрона это излучение богато гармониками, которые могут иметь значительную мощность и в оптическом диапазоне. В дальнейшем нас будет интересовать  $n$ -я гармоника синхротронного излучения.

Для амплитуды  $n$ -й гармоники векторного потенциала имеем формулу [13]

$$\mathbf{A}_n = 2e \frac{e^{ikR}}{cRT} \int_0^T \exp \{ i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)] \} \mathbf{v}(t) dt, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  — скорость электрона,  $T = 2\pi/\omega_0$  — период обращения электрона на орбите,  $R$  — расстояние от центра орбиты до точки наблюдения,  $\mathbf{k}$  — соответствующий волновой вектор ( $k = |\mathbf{k}|$ ),  $e$  — заряд и  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор электрона,  $c$  — скорость света.

Координаты электрона таковы ( $R_0$  — радиус орбиты):

$$x = R_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad y = R_0 \sin [\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad z = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi(t)$  — медленные (по сравнению с  $\cos(\omega_0 t)$ ) флюктуации фазы ( $\langle \varphi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \dots \rangle$  — статистическое усреднение), связанные с синхротронными флюктуациями положения электрона в потенциальной яме.

Воспользовавшись медленностью  $\varphi(t)$ , получаем

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n^0 e^{-in\varphi(t)}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}_n^0$  соответствует отсутствию фазовых флюктуаций. Поэтому  $n$ -я гармоника магнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}_n^0 \exp \{ -in[\omega_0 t + \varphi(t)] \}, \\ \mathbf{H}_n^0 &= 2i [\mathbf{A}_n^0 \mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция корреляции этого колебания равна (полагаем, что стационарные флюктуации фазы имеют симметричное вероятностное распределение) [11]

$$\frac{1}{2} |\mathbf{H}_n^0|^2 \langle \cos [n \Delta \varphi(\tau)] \rangle \cos (n \omega_0 \tau),$$

где  $\Delta \varphi(\tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ .

В этом случае спектр колебания (4) имеет вид ( $\Omega = \omega - n\omega_0$ ) [11]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\mathbf{H}_n^0|^2 \exp(-\mu^2) \left\{ \delta(\Omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \exp [n^2 \Phi_\varphi(\tau)] - 1 \} \cos(\Omega\tau) d\tau \right\}, \\ \mu^2 = n^2 \langle \varphi^2 \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Phi_\varphi(\tau)$  и  $\langle \varphi^2 \rangle = \Phi_\varphi(0)$  — функция корреляции и дисперсия флюктуаций фазы. Спектр гармоники, как следует из (5), состоит из монохроматической линии частоты  $n\omega_0$  (ее существование следует из-за конечности  $\langle \varphi^2 \rangle$ ) и пьедестала, расположенного симметрично около  $n\omega_0$ . Форма пьедестала определяется видом функции  $\Phi_\varphi(\tau)$ .

Мы рассматривали излучение одного электрона. Пусть теперь в потенциальной яме находится  $N$  невзаимодействующих электронов, флуктуации фаз которых статистически независимы, а функции корреляции одинаковы и равны  $\Phi_\varphi(\tau)$ . В этом случае вместо (5) получим

$$\frac{1}{2} |H_n^0|^2 \exp(-\mu^2) \left\{ N^2 \delta(\Omega) + N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \exp[n^2 \Phi_\varphi(\tau)] - 1 \} \cos(\Omega\tau) d\tau \right\}. \quad (6)$$

Спектр излучения состоит теперь из когерентной ( $\sim N^2$ ) дискретной линии и некогерентного ( $\sim N$ ) пьедестала. Поэтому мощность излучения  $n$ -й гармоники в единицу телесного угла равна [13]

$$p_n^0 [N^2 \exp(-\mu^2) + N(1 - \exp(-\mu^2)], \quad (7)$$

$$p_n^0 = \frac{c}{2\pi} |H_n^0|^2 R^2.$$

Полная мощность излучения  $n$ -й гармоники находится отсюда интегрированием по всем направлениям.

Наличие флуктуаций фазы перераспределяет полную мощность гармоники между мощностью монохроматической линии  $P_{\text{лии}}$  и мощностью пьедестала  $P_{\text{пьед}}$ . Напомним, что в ультраквантитативистском случае множитель  $p_n^0$ , проинтегрированный по всем направлениям, равен [13]

$$P_n = \int p_n^0 d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \omega_0^2 \frac{e^2}{c} \gamma F(\xi), \quad (8)$$

$$F(\xi) = \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi \quad \left( \xi = \frac{2n}{3\gamma^3} \right),$$

где  $d\theta$  — элемент телесного угла,  $\gamma = \mathcal{E}/mc^2 \gg 1$  — отношение энергии электрона  $\mathcal{E}$  к его энергии покоя,  $K_{5/3}(\xi)$  — функция Макдональда. Функция  $F(\xi)$  имеет максимум  $F_{\max} \approx 0,92$  при  $\xi \approx 0,29$ ; ее график приведен в [13].

Отношение мощностей линии и пьедестала равно

$$P_{\text{лии}}/P_{\text{пьед}} = N \exp(-\mu^2)/[1 - \exp(-\mu^2)] \quad (9)$$

и существенно зависит от величины  $\mu^2$ , определенной в формуле (5). Если ввести в рассмотрение характерный продольный размер ямы  $d$  — ее длину, в которой в основном и «болтаются» электроны (т. е., другими словами, размер сгустка электронов), то очевидно, что  $d^2 = 4R_0^2 \langle \varphi^2 \rangle$ . С другой стороны, поскольку  $n = \lambda_0/\lambda_n$ , где  $\lambda_0, \lambda_n$  — длины волн излучения, соответствующие основной частоте  $\omega_0$  и ее гармонике  $n\omega_0$ , то легко видеть, что

$$\mu^2 = n^2 \langle \varphi^2 \rangle = \left( \pi \frac{d}{\lambda_n} \right)^2. \quad (10)$$

Если при фиксированном  $n$  размер сгустка таков, что  $\mu^2 \ll 1$ , то

$$P_{\text{лии}}/P_{\text{пьед}} = N/\mu^2 \gg 1,$$

т. е. практически вся мощность излучения сосредоточена в дискретной линии и пропорциональна  $N^2$ . Если же  $\mu^2 \gg 1$ , то

$$P_{\text{лии}}/P_{\text{пьед}} = N \exp(-\mu^2) \ll 1, \quad (11)$$

и дискретной линии практически не существует — вся мощность излучения гармоники становится в  $N$  раз меньше и сосредоточивается в широкополосном пьедестале.

Таким образом, отношение размера сгустка электронов к излучаемой длине волны оказывает существенное влияние на полную мощность гармоники и на соотношение мощностей дискретной линии и пьедестала.

Эта картина совершенно ясна физически. Если  $\mu^2 \ll 1$ , то флуктуации положений электронов происходят на длине, малой по сравнению с длиной излучаемой волны, и излучение, идущее от любых электронов такого сгустка является когерентным, что и дает большой вклад в дискретную линию. При  $\mu^2 \gg 1$  электроны «гуляют» уже на много длин волн, и излучение, идущее от этих электронов, становится практически некогерентным, дискретная линия пропадает и образуется спектр «шумового» пьедестала.

Доказательство наличия когерентной линии в спектре было проведено на классическом языке. Это излучение, согласно квантовой терминологии, является спонтанным, так как происходит при отсутствии внешних электромагнитных полей излучаемой частоты. В квантовой теории излучения [14] спонтанное излучение описывается в первом порядке теории возмущений действием совершенно некогерентных нулевых флуктуаций электромагнитного поля. Наличие дискретной линии вызвано тем, что гамильтониан невозмущенной системы — электрон в поле синхронной волны — зависит от времени явно.

При магнитотормозном излучении точка орбиты, в которой излучается квант, совершенно случайна и излучение квантов независимо, поэтому говорить о фазе единичного кванта нельзя в силу принципа неопределенности. Приведенный выше классический расчет показывает, что фазы излучаемых квантов коррелированы, что необходимо для наличия дискретной линии.

Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и при излучении Мессбауэра — амплитуда тепловых и нулевых колебаний ядер в решетке значительно больше длины волны резонансных  $\gamma$ -квантов. Допплер-эффект из-за колебательной скорости больше ширины линии, но тем не менее в спектре имеется дискретная линия [15]. Линия будет уширяться как при перескоках, так и при тунNELЬНОМ «просачивании» электрона, движущегося в периодической потенциальной яме бегущей волны, в соседние минимумы. Однако оба эффекта экспоненциально убывают при увеличении амплитуды синхронной волны.

Если бы в реальных ускорителях для нужного номера гармоники имело место неравенство  $\mu^2 \ll 1$ , то проблема непосредственного сравнения спектральных линий радио и оптического диапазонов была бы элементарно решена, поскольку при  $\mu^2 \ll 1$  мощность оптической гармоники целиком была бы сосредоточена в легко обнаружимой дискретной линии.

Однако в действительности мы имеем неравенство  $\mu^2 \gg 1$ . Поэтому на основании (10) дискретная линия имеет очень малую мощность и тонет в широкополосном пьедестале, обязанным фазовым флуктуациям электронов на орбите. Таким образом, сравнение частот на первый взгляд кажется безнадежным делом. Тем не менее это не так. Дело в том, что характер фазовых флуктуаций  $\varphi(t)$  таких, что пьедестал  $n$ -й гармоники имеет вид гребенки, состоящей из узких пичков — квазимонохроматических линий (рис. 1). Ширина пичков мала из-за высокой радиационной добротности синхротронных и бетатронных колебаний [16].

Нетрудно рассчитать ширину пичков. Функция корреляции флуктуаций положения электронов в потенциальной яме может быть записана так:

$$\Phi_{\varphi}(\tau) = \langle \varphi^2 \rangle \exp(-\alpha_0 |\tau|) \cos(\Omega_0 \tau), \quad (12)$$

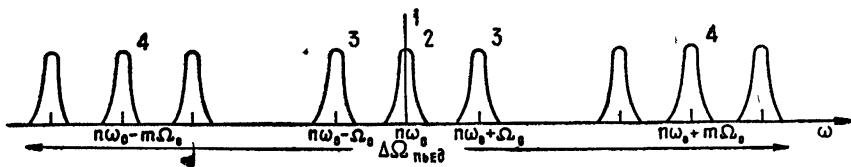


Рис. 1. Спектр  $n$ -й гармоники: 1—монохроматическая линия; пички пьедестала (2—центральный, 3—первого порядка, 4— $m$ -го порядка).

где  $\alpha_0$  — декремент затухания синхротронных колебаний в отсутствие резонансов и коллективных эффектов. По порядку величины [9]

$$\alpha_0 = \omega_0 \frac{3 - 4n}{2(1-n)} \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2 R_0} \gamma^3, \quad (13)$$

где  $n$  — показатель магнитного поля, причем обычно  $n \sim 2/3$ . Из (12) следует, что спектр фазовых флуктуаций электрона имеет резонансную форму, сосредоточен на частоте  $\Omega_0$  (частоте собственных колебаний электрона в потенциальной яме) и имеет полосу, равную  $\Delta\Omega_0 = \alpha_0 \pi$ . Отношение  $\Omega_0/\Delta\Omega_0$  велико. Как видно из формулы (13), при  $\gamma \sim 10$ ,  $R_0 \sim 1,5$  см и  $\omega_0/2\pi \sim 3 \cdot 10^9$  гц величина  $\alpha_0 \sim 10^{-10}$ ,  $\omega_0 \sim 0,3$  сек $^{-1}$ . С другой стороны,  $\Omega_0/\omega_0 \sim 10^{-2}$  [9], поэтому добротность синхротронных колебаний высока:

$$\Omega_0/\Delta\Omega_0 \sim 10^8.$$

Подставляя (12) в (6) с учетом (8), можно найти следующее выражение для формы центрального пичка и пичка  $m$ -го порядка ( $m = 1, 2, \dots$ ):

$$W_0(\Omega) = \frac{1}{\pi} P_n \exp(-\mu^2) N \int_0^\infty \{ I_0 [\mu^2 \exp(-\alpha_0 \tau)] - 1 \} \cos(\Omega \tau) d\tau, \quad (14)$$

$$W_m(\Omega) = \frac{1}{\pi} P_n \exp(-\mu^2) N \int_0^\infty I_m [\mu^2 \exp(-\alpha_0 \tau)] \cos(\Omega \tau) d\tau. \quad (15)$$

Здесь  $I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя. Частота отсчитывается от центра соответствующего пичка. Как следует из (14), (15), форма пичков сильно отличается от резонансной и тем сильнее, чем больше  $\mu^2$ .

Как мы уже убедились выше, мощности линии и пьедестала равны соответственно

$$P_n N^2 \exp(-\mu^2), \quad P_n N [1 - \exp(-\mu^2)].$$

Можно найти, что мощность центрального пичка равна

$$P_n \exp(-\mu^2) N [I_0(\mu^2) - 1],$$

а мощность пичка  $m$ -го порядка ( $m = 1, 2, \dots$ ) —

$$P_n \exp(-\mu^2) N I_m(\mu^2).$$

При  $\mu^2 \gg 1$  мощность пичка почти не зависит от его порядка и в области  $m < \mu^2$  приближенно равна

$$P_n \frac{N}{n\sqrt{2\pi} \langle \varphi^2 \rangle}. \quad (16)$$

Точные выражения для ширины центрального пичка и пичков  $m$ -го порядка имеют вид

$$\Pi_0 = \Delta\Omega_0 \frac{I_0(\mu^2) - 1}{\int_0^\infty [I_0(\mu^2 e^{-x}) - 1] dx}, \quad \Pi_m = \Delta\Omega_0 \frac{I_m(\mu^2)}{\int_0^\infty I_m(\mu^2 e^{-x}) dx}. \quad (17)$$

При произвольном  $\mu^2$  оценка  $\Pi_m$  по формулам (17) затруднительна. Если же ограничиться случаем  $\mu^2 \gg 1$ , то в области  $m < \mu^2$  можно получить

$$\Pi_m \simeq \Delta\Omega_0 \mu^2 = n^2 \Delta\Omega_0 \langle \varphi^2 \rangle. \quad (18)$$

Таким образом, ширина пичков возрастает пропорционально квадрату номера гармоники.

Чтобы пички были хорошо разрешимы, необходимо, во-первых, чтобы  $\Pi_m/\Omega_0 \ll 1$ , во-вторых, чтобы отношение сигнал/шум было достаточно велико. Для  $\langle \varphi^2 \rangle \sim 10^{-3}$  первое условие выполняется вплоть до  $n \sim 10^6$ , т. е. во всем инфракрасном диапазоне. Второе условие будет рассмотрено в разд. 2.

Важно отметить, что при  $\mu^2 \gg 1$  сумма ширин пичков  $n$ -го пьедестала пропорциональна кубу номера гармоники  $\Pi_{\text{пьед}} \simeq \sqrt{2\pi} \Delta\Omega_0 \mu^3$ . Так как число пичков равно  $\Pi_{\text{пьед}}/\Pi_m \simeq \sqrt{2\pi} \mu$ , то ширина области, занятой ими, равна  $\Delta\Omega_{\text{пьед}} \simeq \sqrt{2\pi} \Omega_0 \mu$  и при  $n \sim 10^3$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle \sim 10^{-3}$  меньше расстояния между соседними гармониками  $\Delta\Omega_{\text{пьед}} < \omega_0 \sim 10^2 \Omega_0$ , т. е. пички пьедесталов соседних гармоник практически не перекрываются.

Таким образом, согласно (16) на высоких гармониках мощность пичка пропорциональна  $N$  и не зависит от  $m$ . Как известно [13], интенсивность  $n$ -й гармоники в ультрарелятивистском случае  $\gamma \gg 1$  имеет максимум при  $n \sim \gamma^3$ . Однако (16) сглаживает зависимость мощности пичка от  $n$  и максимум исчезает.

## 2. О ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЛИНИЙ И ПИЧКОВ

Рассмотрим теперь вопрос о том, возможно ли обнаружить монохроматические линии и пички пьедестала на высоких гармониках частоты обращения (при  $n \sim 10^2 \div 10^4$ ).

Так как частота синхронной волны обычно лежит в радиодиапазоне, а  $n \sim 10^2 \div 10^4$  соответствует инфракрасному диапазону, то наличие линии или пичка дает возможность сравнивать частоты генераторов радио и инфракрасного диапазонов. При работе по линии сравнение идет с точностью до фазы, а при работе по пичку пьедестала фаза случайна и сравниваются частоты. Мы рассмотрим здесь только физические ограничения. Предположим, что все излучение гармоники сведено на фотокатод с помощью идеального зеркала нужной формы (рис. 2) и гетеродинируется лазером. При этом на частоте  $f$  будут квантовые шумы, минимальное значение которых равно [17]

$$P_{\text{ш}} = \frac{1}{2} h f B F, \quad (19)$$

где  $B$  — полоса усилителя фототока,  $F$  — шум-фактор. У идеального приемника, использующего фотоэффект,  $F = 2$ ; в принципе же возмож-

но уменьшение  $F$  до единицы [17], однако по техническим причинам это крайне сложно. При идеальной оптической системе отношение сигнал/шум равно

$$P_c/P_{\text{ш}} = \frac{e^2}{\hbar c} N^2 \exp(-\mu^2) \frac{\sqrt{3} \omega_0 \gamma}{2\pi B} F(\xi) \quad (20)$$

— для линии и

$$P_c/P_{\text{ш}} = \frac{e^2}{\hbar c} N \frac{1}{n \sqrt{\langle \varphi^2 \rangle}} \frac{\sqrt{3} \omega_0 \gamma}{(2\pi)^{3/2} B} F(\xi) \quad (21)$$

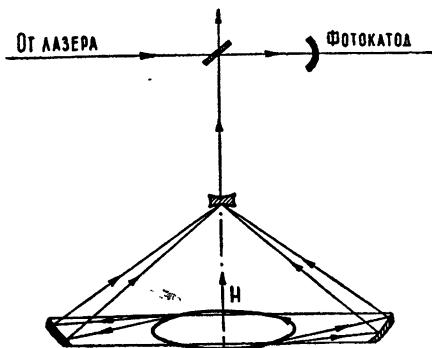


Рис. 2.

— для пичка;  $F(\xi)$  определяется формулой (8). При измерении центральной частоты  $f$  линии с шириной  $\Delta f$  минимальная погрешность (с учетом модуляционного выигрыша) равна [18]

$$\delta f = \Delta f \frac{P_{\text{ш}}}{P_c} \frac{1}{\sqrt{BT}} \quad (\Delta f T \gg 1, BT \gg 1). \quad (22)$$

Оценим входящие в эти формулы величины. Ширина пичка пьедестала, как показывают оценки по формуле (18), составляет (при  $n \sim 10^3$ )  $\Delta f = (\Delta \Omega_0 / 2\pi) \mu^2 \sim 10^3$  гц. Ширина полосы линейной части приемника обычно равна  $B \sim 10^5 \div 10^6$  гц. В случае применения автоподстройки частоты возможна реализация более узких полос. Для оценки возьмем  $\omega_0 / 2\pi \sim 3 \cdot 10^9$  гц,  $T \sim 1$  сек,  $\gamma \sim 10$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle \sim 10^{-3}$  (см. разд. 3) и  $N \sim 10^3$ , что соответствует кольцевому току  $i \sim 0,5$  мка. В этом случае относительная погрешность измерения мощности сигнала для пичка будет мала вплоть до  $n \leq 10^4$ . В тех случаях, когда применяется автоподстройка частоты, можно иметь узкие полосы  $B \sim 1 \div 2$  гц и даже пытаться заметить линию, однако из-за экспоненциального спада интенсивности линии с ростом номера гармоники  $n$  без специальных мер по сжатию сгустка это вряд ли возможно для  $n > 100$ .

Для нашего примера относительная погрешность привязки частоты лазера к генератору СВЧ при отношении их частот  $n \sim 10^3$  не превосходит величины  $\delta f/f \sim 10^{-12}$ . Ниже будут рассмотрены некоторые колективные эффекты, которые, возможно, позволят увеличить  $n$ .

### 3. АМПЛИТУДА СИНХРОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Амплитуда синхротронных колебаний определяется как начальными условиями захвата электрона бегущей волной, так и случайными

толчками отдачи при излучении кванта. Теория синхротронных колебаний хорошо разработана, в этом разделе мы воспользуемся готовыми результатами монографии [9] гл. V, используя обозначения и указывая номера формул по [9]. Уравнение для среднеквадратичной амплитуды  $\bar{A}_\eta^2$  синхротронных колебаний в угловых единицах имеет вид (5.26)

$$\frac{d\bar{A}_\eta^2}{d\varphi} = \frac{55\pi}{12\sqrt{3}} \frac{\alpha q e \Lambda \langle K^3 \rangle}{K_0 V \sin \varphi_s} \gamma^6 - \bar{A}_\eta^2 \left[ 2 \langle \xi_s \rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \ln(\gamma V \sin \varphi_s) \right],$$

где  $\alpha$  — коэффициент расширения орбиты,  $\alpha = 1/(1-n)$ ,  $n$  — показатель магнитного поля;  $\varphi$  — обобщенный азимут;  $\Lambda$  — комптоновская длина волны электрона;  $K$  — кривизна, для круговой орбиты  $\langle K \rangle = K_0 = 1/R_0$ ,  $R_0$  — радиус орбиты;  $q = \omega_0/\omega_s$ ,  $\omega_0$  — частота СВЧ поля,  $\omega_s$  — частота обращения; амплитуда будет наименьшей при  $q = 1$ ;  $V$  — амплитуда ускоряющего поля (потенциал);  $\varphi_s$  — синхронная фаза;  $\xi_s$  — безразмерный декремент затухания синхротронных колебаний,  $\xi_s = \alpha_0/\omega_0$  (см. разд. 1, формула (13)).

Нас интересует стационарный режим синхронной волны, поэтому  $d/d\varphi = 0$ . Для среднего квадрата амплитуды  $\langle \varphi^2 \rangle$  имеем

$$\frac{55\pi}{12\sqrt{3}} \frac{\alpha e \Lambda q}{V \sin \varphi_s} \frac{\gamma^6}{2\xi_s} = R_0^2 \langle \varphi^2 \rangle. \quad (23)$$

Синхронная фаза определяется условием (5.28):

$$e V \cos \varphi_s = \frac{4\pi}{3} e^2 \gamma^2 K_0$$

(сила со стороны синхронной волны равна силе радиационного трения). Нас интересуют, в отличие от техники ускорителей, сравнительно малые  $\gamma$  ( $\gamma \sim 10 \div 30$ ) и (если нужны малые сгустки) большие  $V$ . Поэтому можно положить

$$\cos \varphi_s \approx 0, \quad \sin \varphi_s \approx 1.$$

Поэтому формула для среднеквадратичной амплитуды может быть приведена к виду

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{55\pi\sqrt{3}}{24(3-4n)} \gamma^8 \frac{mc^2}{eV} \frac{\Lambda}{R_0}. \quad (24)$$

Для оценок возьмем  $\gamma \sim 10$ ,  $R_0 \sim 1,5$  см,  $V \sim 10^3$  в (что соответствует подводимой мощности  $\sim 1$  квт на литр объема резонатора с добротностью  $\sim 10^4$ ),  $n = 2/3$ . Тогда получим, что среднеквадратичная амплитуда колебаний равна

$$\langle \varphi^2 \rangle \sim 10^{-6}.$$

Полученное значение  $\langle \varphi^2 \rangle$  относилось к одному электрону. Наличие  $N$  электронов в сгустке из-за электрического отталкивания приведет к увеличению размера области, занятой зарядом. Поэтому при  $N \sim 10^3$  мы брали  $\langle \varphi^2 \rangle \sim 10^{-3}$ . Оценки по электростатике дают при  $N \sim 10^3$  для  $\langle \varphi^2 \rangle$  величину, меньшую примерно на порядок.

Однако обратим внимание на следующее обстоятельство. При выводе формул (5.26) в [9] предполагалось, что излучение происходит в вакуум и резонанса ни на какой излучаемой частоте нет. Покажем, что если круговая орбита электрона расположена внутри открытого резонатора, настроенного на одну из гармоник и имеющего нужную

пространственную структуру поля [8], то излучение и, следовательно, радиационное трение возрастают. Доказательство удобнее вести на квантовом языке [14]. Полная ширина уровня пропорциональна полной вероятности перехода с данного уровня вниз; полная вероятность пропорциональна сумме частных вероятностей переходов с излучением гармоник номера  $n$ :

$$\Gamma \sim \sum_n \Gamma_n, \quad \Gamma_n \sim |A_n j_n|^2 \quad (25)$$

— матричному элементу перехода с излучением  $n$ -й гармоники. Число слагаемых в сумме (25) порядка  $\gamma^3$ . Вероятность перехода пропорциональна квадрату матричного элемента, нормированного на излучение 1 фотона в секунду. При наличии резонанса энергия поля в резонаторе и, следовательно,  $\Gamma_n$  возрастает в  $Q$  раз, где  $Q$  — добротность резонатора. Для открытых резонаторов достижимы  $Q \sim 10^8$  [8], поэтому резонанс может сильно изменить радиационное затухание и спектр колебаний.

Если доля энергии в линии велика, то радиационное затухание пропорционально  $N^2$ , поэтому при увеличении  $N$  возможно уменьшение размеров сгустка, что в свою очередь увеличивает радиационное затухание. Поскольку частоты бетатронных и синхротронных колебаний различны, то, по-видимому, возможно управление продольными и поперечными размерами сгустка.

Заметим также, что уменьшение размера сгустка увеличивает отношение сигнал/шум и тем самым уменьшает погрешность  $\delta f/f$  в области более высоких частот, чем рассмотривавшиеся в разд. 2.

Все изложенное выше относилось к спонтанному излучению, колебаниями электрона под действием высокочастотного поля мы пренебрегали. При этом коллективные эффекты на языке квантовой теории поля описываются индуцированным излучением. Эти вопросы для слаборелятивистского случая были рассмотрены Гапоновым и др. [19, 20], а ультрарелятивистский случай был изучен Железняковым [21, 22] применительно к астрофизике. Подробный анализ их выходит за пределы настоящей работы. Заметим только, что любые коллективные эффекты сказываются на затухании и форме спектра излучения, что позволяет в принципе получать информацию об этих процессах.

1) Спектр синхротронного излучения сгустка релятивистских электронов, движущегося в поле синхронной волны, при сравнительно небольших энергиях состоит из линий и пичков пьедестала. Частоты линий и центральных пичков кратны частоте синхронной волны. Это позволяет связать частоты генераторов радио и инфракрасного диапазонов.

2) Фаза линии определяется фазой синхронной волны, фаза излучения пьедестала случайна, ширина пичка имеет порядок  $1-1000$  кгц.

3) При умножении в  $10^3$  раз точность сличения частот генераторов радио и инфракрасного диапазонов может составить  $\sim 10^{-12}$ .

Авторы выражают свою признательность С. М. Рытову за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*, Cambridge, 1912.
2. Л. А. Арцимович, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, 16, 379 (1946).
3. J. Schwinger, Phys. Rev., 75, 1912 (1949).
4. Сб. Синхротронное излучение, изд. Наука, М., 1966.

- 5 В. Л. Гинзбург, В. Н. Сазонов, С. И. Сыроватский, УФН, 94, 63 (1968).
- 6 Т. Н. Майман, Brit. Commun. Electr., 7, 674 (1960).
- 7 Б. Лендер, Лазеры, изд. Мир, М., 1964.
- 8 Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
- 9 А. А. Коломенский, А. И. Лебедев, Теория циклических ускорителей, Физматгиз, М., 1962.
- 10 В. Л. Аусландер, Г. И. Будкер, А. А. Наумов, Ю. Н. Пестов, В. А. Сидоров, А. П. Скринский, А. Г. Хабахашев, Атомная энергия, 22, 173 (1967).
- 11 А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
- 12 Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, Письма в ЖЭТФ, 6, 733 (1967).
- 13 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
- 14 В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
- 15 Ю. Каган, сб. Эффект Мессбауэра, ИЛ, М., 1962, стр. 5.
- 16 В. Л. Аусландер, Н. С. Диканский, М. М. Карлинер, И. К. Седляров, А. Н. Скринский, И. А. Шехтман, Атомная энергия, 22, 198 (1967).
- 17 М. Е. Герценштейн, И. А. Болошин, Радиотехника, 23, № 5, 2 (1968).
- 18 Ван дер Зил, Флуктуации в радиотехнике и физике, Госэнергоиздат, М—Л., 1958.
- 19 А. В. Гапонов, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- 20 А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 7, 631 (1962).
- 21 В. В. Железняков, ЖЭТФ, 51, 570 (1966).
- 22 В. В. Железняков, Е. В. Суворов, ЖЭТФ, 54, 627 (1968).

Поступила в редакцию  
15 октября 1968 г.

## A THIN STRUCTURE OF THE SPECTRUM OF SYNCHROTRON RADIATION

*M. E. Gertsenshtein, A. N. Malakhov, R. Ch. Bokun*

A thin structure of the spectrum of synchrotron radiation from a cluster of relativistic electrons is calculated taking synchrotron oscillations into account. The formulas are derived for the line and pedestal intensity. It is shown that at the higher harmonics, the line is exponentially small and the pedestal has some narrow pitches that permits, in principle, to compare the infrared and radio frequencies within an accuracy of  $10^{-12}$ .

УДК 621.372.826

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ С ПОЛЕМ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ТИПА «ГРЕБЕНКА»\*

*И. Л. Вербицкий*

В линейном приближении и в предположении малости пространственного заряда рассмотрена самосогласованная задача о взаимодействии электронного потока с электромагнитным полем в гребенке при учете всех пространственных гармоник поля и тока. Коэффициент связи выражен явно через геометрические параметры системы. Показано, что имеется случай, когда бесконечно густая гребенка не описывается импедансным граничным условием, и роль высших пространственных гармоник не становится исчезающей малой при стремлении периода гребенки к нулю.

Задача о взаимодействии электронного потока с электромагнитным полем в периодической замедляющей системе посвящено весьма большое количество работ. Причиной этого является как важность указанной задачи для СВЧ электроники, так и ее сложность. Даже в линеаризованной постановке (в приближении малых сигналов) для нее не удается получить точное аналитическое решение. Поэтому в существующих работах строятся приближенные методы решения. Наиболее общим из известных до настоящего времени является метод, развитый в работах Вайнштейна [1, 2]. Этот метод применим к любым системам, для которых известны собственные волны без пучка. Его недостатком является то, что он позволяет явно учесть взаимодействие только одной пространственной гармоники поля с близкой ей по скорости гармоникой тока.

В настоящей работе при общепринятых предположениях получено в замкнутой форме трансцендентное дисперсионное уравнение задачи о взаимодействии электронного пучка с замедляющей системой типа «гребенка» с бесконечно тонкими ламелями, учитывающее взаимодействие всех пространственных гармоник поля и тока. Это уравнение является асимптотически точным для «не очень мелких» и «не очень редких» гребенок (точный смысл этих утверждений станет ясен из текста статьи). Чтобы не превышать меры точности исходных допущений, полученное уравнение аппроксимируется кубическим. При этом коэффициент связи находится в явном виде как функция геометрических параметров гребенки и толщины пучка. Изучен предельный переход к бесконечно густой гребенке. Показано, что имеется случай, когда бесконечно густая гребенка не описывается импедансным граничным условием, и роль высших пространственных гармоник не становится исчезающей малой при стремлении периода гребенки к нулю. В частном случае, когда электронный поток отсутствует (распространение электромагнитных волн в холодной системе), наши результаты совпадают с результатами работы [3]. Применяемый нами метод является развитием метода работы [4].

\* Работа докладывалась на V межвузовской конференции по электронике СВЧ, Саратов, 1966.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим бесконечный плоский волновод, нагруженный замедляющей системой из бесконечно тонких ламелей высоты  $h$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга. Расстояние от вершин ламелей до верхней стенки волновода обозначим  $A$ . Над ламелями проходит однокоростной пучок электронов, имеющий плотность  $\rho = \rho_0 + \rho_\sim$  и скорость  $v = v_0 + v_\sim$ . Индексами 0 и  $\sim$  обозначаем соответственно постоянные и переменные составляющие. Как обычно в линейной теории, считаем  $|\rho_\sim| \ll |\rho_0|$ ,  $|v_\sim| \ll |v_0|$ , а зависимость от времени принимаем в виде  $e^{-i\omega t}$ . Систему координат введем как указано на рис. 1. Будем считать,

что пучок занимает полосу  $0 \leq y \leq y_1^*$  и что скорость электронов не имеет поперечной компоненты (бесконечное магнитное поле вдоль оси  $x$ ). Потерями в системе пренебрегаем. В силу периодичности замедляющей системы все неизвестные величины в области взаимодействия ( $y > 0$ ) запишем в соответствии с теоремой Флока в виде

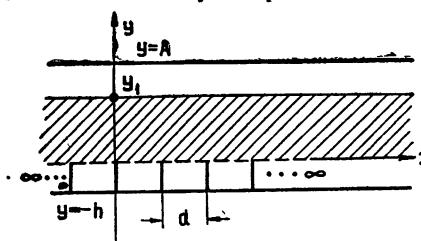


Рис. 1.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(y) \exp(i\beta_n x), \quad \rho_\sim = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(y) \exp(i\beta_n x) \text{ и т. п.} \quad (1)$$

Здесь  $\beta_n = \beta + 2n\pi/d$ ,  $\beta = \beta_0$  — искомая постоянная распространения. (В отличие от холодной системы в данном случае  $\beta$  — величина комплексная.  $\operatorname{Re} \beta$  определяет фазовую скорость волны,  $\operatorname{Im} \beta$  — инкремент нарастания. Из условия существования замедленных волн в системе и из определения  $\beta_n$  следует неравенство  $k < \operatorname{Re} \beta < \pi/d$ .) Очевидно,

$$E_n(A) = 0. \quad (2)$$

Из совместной системы уравнений Максвелла и линеаризованных уравнений движения и непрерывности находим\*\*

$$E_n(y) = \begin{cases} C_{n1} \exp(-\alpha_n y) + C_{n2} \exp(\alpha_n y) & (y_1 \leq y \leq A) \\ C'_{n1} \exp(-\tilde{\alpha}_n y) + C'_{n2} \exp(\tilde{\alpha}_n y) & (0 \leq y \leq y_1) \end{cases}, \quad (3)$$

где обозначено

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \alpha_n = \sqrt{\beta_n^2 - k^2}, \quad \alpha_0 \equiv \alpha, \quad \operatorname{Re} \alpha_n > 0,$$

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \sqrt{1 - \omega_p^2 / (\omega - v_0 \beta_n)^2}, \quad \operatorname{Re} \tilde{\alpha}_n > 0, \quad \tilde{\alpha}_0 \equiv \tilde{\alpha}, \quad \omega_p^2 = 4\pi \frac{e}{m} \rho_0.$$

Используя (2) и условие непрерывности поля вместе с нормальной производной на границе пучка  $y = y_1$ , можно выразить все коэффициенты в (2) через  $C_{n1}$ :

\* В силу поверхностного характера замедленной волны эффективно взаимодействовать с ней может только пучок, прилегающий к аноду.

\*\* Впервые подобное преобразование было проделано в работе Лопухина [5], где получены формулы (3) и приведен также подробный вывод выражений для  $\rho_n(y)$  и  $v_n(y)$  (см. также [6]). В этих работах задача решалась в предположении постоянства поля на входе в резонатор замедляющей системы.

$$C_{n2} = - C_{n1} \exp(-2\alpha_n A),$$

$$C'_{n1} = C_{n1} \left\{ \frac{\alpha_n + \tilde{\alpha}_n}{2\alpha_n} \exp[(\tilde{\alpha}_n - \alpha_n)y_1] - \frac{\tilde{\alpha}_n - \alpha_n}{2\alpha_n} \exp[(\tilde{\alpha}_n + \alpha_n)y_1 - 2\alpha_n A] \right\} \equiv C_{n1} p_n, \quad (3a)$$

$$C'_{n2} = C_{n1} \left\{ \frac{\tilde{\alpha}_n - \alpha_n}{2\alpha_n} \exp[-(\alpha_n + \tilde{\alpha}_n)y_1] - \frac{\tilde{\alpha}_n + \alpha_n}{2\alpha_n} \exp[(\tilde{\alpha}_n - \alpha_n)y_1 - 2\alpha_n A] \right\} \equiv C_{n1} q_n.$$

Запишем теперь  $z$ -компоненту магнитного поля  $H_z$  в области  $y > 0$ :

$$H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\beta_n x) H_n(y), \quad (4)$$

где, как вытекает из уравнений Максвелла,

$$H_n(y) = -\frac{ik}{\alpha_n^2} \frac{\partial}{\partial y} E_n(y). \quad (5)$$

Поля  $E_x$  и  $H_z$  для области резонатора  $-h \leq y \leq 0$ ,  $0 \leq x \leq d$  имеют вид (см., например, [3, 4, 7])

$$E_x = B_0 \sin[k(y+h)] + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi x}{d} \operatorname{sh}[\gamma_m(y+h)], \quad (6)$$

$$H_z = iB_0 \cos[k(y+h)] - ik \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{\gamma_m} \cos \frac{m\pi x}{d} \operatorname{ch}[\gamma_m(y+h)].$$

Здесь  $\gamma_m = \sqrt{(m\pi/d)^2 - k^2}$ ,  $B_m$  — неизвестные постоянные коэффициенты.

Теперь аналогично [3] воспользуемся условием непрерывности  $E_x$  и  $H_z$  на щели резонатора  $y = 0$ ,  $0 < x < d$  и ортогональностью системы функций  $\cos(m\pi x/d)$  на интервале  $(0, d)$ . В результате получим бесконечную систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов  $C_{n1}$  и  $B_m$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n1}(p_n + q_n) \frac{e^{i\beta_n d} - 1}{\beta_n} = idB_0 \sin(kh),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n1}(p_n + q_n) \frac{\beta_n}{\beta_n^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} [(-1)^m e^{i\beta_n d} - 1] = i \frac{d}{2} B_m \operatorname{sh}(\gamma_m h), \quad (7)$$

$$ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n1}(q_n - p_n) \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n^2} \frac{e^{i\tilde{\alpha}_n d} - 1}{\beta_n} = dB_0 \cos(kh),$$

$$ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n1}(q_n - p_n) \frac{\tilde{\alpha}_n}{\alpha_n^2} \frac{\beta_n}{\beta_n^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} [(-1)^m e^{i\beta_n d} - 1] = -\frac{kd}{2} B_m \frac{\operatorname{ch}(\gamma_m h)}{\gamma_m}.$$

Система (7) имеет нетривиальное решение тогда, когда ее определитель равен нулю. Равенство нулю определителя системы (7) и является

точным дисперсионным уравнением рассматриваемой задачи. Однако в исходном виде это уравнение не поддается изучению. Нашей целью является приведение дисперсионного уравнения к удобной для анализа форме.

После некоторых преобразований можно записать

$$\det \| \alpha_{mn} \| = 0, \quad (8)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \left[ \frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} \frac{\alpha_n^2}{\tilde{\alpha}} + \gamma_m \operatorname{th}(\gamma_m h) \right] \frac{1}{\beta_n^2 - (m\pi/d)^2} = \\ &= \left[ \frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} \frac{\alpha_n^2}{\tilde{\alpha}} + \gamma_m \operatorname{th}(\gamma_m h) \right] \frac{1}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Члены  $\alpha_{0n}$  удобно выписать отдельно:

$$\alpha_{0n} = \frac{1}{\beta_n^2} \left[ \frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} \frac{\alpha_n^2}{\tilde{\alpha}} - k \operatorname{tg}(kh) \right] = \left[ \frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} \frac{\alpha_n^2}{\tilde{\alpha}} - k \operatorname{tg}(kh) \right] \frac{1}{\alpha_n^2 - \gamma_0^2} \quad (9a)$$

( $\gamma_0 = ik$ ). Если в уравнении (8) аппроксимировать левую часть членом  $\alpha_{00}$ , считая, что остальные члены дают малый вклад, что соответствует пренебрежению всеми пространственными гармониками, кроме нулевой, то мы придем к уравнению

$$\frac{p_0 + q_0}{p_0 - q_0} \frac{\alpha^2}{\tilde{\alpha}} = k \operatorname{tg}(kh), \quad (8a)$$

эквивалентному уравнению (19) работы [6]. Пренебрегая в (8a) членами порядка  $\exp[-2\alpha(A - y_1)]$  (т. е. переходя к пределу при  $A \rightarrow \infty$ ), получим уравнение

$$\frac{\alpha^2}{\tilde{\alpha}} = k \operatorname{tg}(kh), \quad (8b)$$

совпадающее с уравнением (9) части II работы [1], а также с уравнениями (27) и (40) работы [6]. Поскольку для поверхностной волны влияние верхней пленки несущественно, всюду дальше будем полагать  $A = \infty$ .

## 2. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В этом пункте будут введены все необходимые предположения и обсуждены пределы их применимости.

В качестве основного допущения примем  $\exp(-2\gamma_1 h) \ll 1$ , и всюду в дальнейшем будем пренебрегать величинами  $\exp(-2\gamma_m h)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), так как  $\gamma_m > \gamma_1$  при  $m > 1$ . Это предположение означает, что мы пренебрегаем влиянием высших мод резонатора гребенки, отраженных от дна. Оно не выполняется только либо при весьма малых  $h$  (т. е. гребенка должна быть «не очень мелкой»), либо когда  $\gamma_1 \approx 0$  ( $kd \approx \pi$ ). Нам потребуется в дальнейшем допущение  $(kd/2\pi)^2 \ll 1$  (гребенка «не очень редкая»). Очевидно,  $(kd/2\pi)^2 < (k/2R\operatorname{e}\beta)^2$ , так что при замедлениях порядка 3—5 условие  $(kd/2\pi)^2 \ll 1$  можно считать выполненным. Примем также обычное (см. [1, 2, 5, 6]) предположение

о том, что пучок мало изменяет волновые числа системы, т. е.  $|1 - \beta/\beta^{(0)}| \ll 1$ , где  $\beta^{(0)}$  — волновое число системы без пучка. Это условие эквивалентно малости  $(\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}$  в силу уравнения (8б) (т. е. в «одноволновом» приближении). Мы примем условие  $|(\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}| \ll 1$  как исходное и покажем в дальнейшем, что из него следует малость  $|1 - \beta/\beta^{(0)}|$ .

Далее предположим, что пучок находится в синхронизме с основной гармоникой, т. е.  $v_0 \approx \omega/\beta$ . Точный смысл этого утверждения будет установлен при исследовании дисперсионного уравнения. Здесь отметим, что в силу синхронизма и определения  $\tilde{\alpha}$  из  $|(\alpha - \tilde{\alpha})/\tilde{\alpha}| \ll 1$  очевидно следует малость  $(\omega_p/\omega)^2$  и, следовательно, малость  $|(\alpha_n - \tilde{\alpha}_n)/\tilde{\alpha}_n|$ . Обозначив  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n(1 + \delta_n)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), можем записать  $|\delta_n| \ll 1$  и  $\delta_n \approx \omega_p^2/2(\omega - v_0\beta_n)^2$ . Величинами порядка  $\delta_i\delta_k$  всюду в дальнейшем будем пренебречь.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Положив  $\operatorname{th}(\gamma_m h) = 1$  (в силу малости  $\exp(-2\gamma_m h)$ ) и воспользовавшись тождеством  $\alpha_n^2 - \gamma_m^2 = \beta_n^2 - (m\pi/d)^2$ , получим из (9), (9а) с точностью до величин порядка  $O(\delta_i\delta_k)$

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{\alpha_n - \gamma_m} + \frac{\alpha_n \zeta_n}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \quad (m \geq 1); \quad (10)$$

$$\alpha_{0n} = \frac{\alpha_n - k \operatorname{tg}(kh) - \alpha_n \zeta_n}{\alpha_n^2 + k^2}, \quad (10a)$$

где  $\zeta_n = \delta_n[1 - \exp(-2\alpha_n y_1)]$ .

Считая  $\omega_p = 0$ , находим из (8) дисперсионное уравнение холлодной гребенки в форме, изучавшейся в работе [4]:

$$D^{(0)} \equiv \begin{vmatrix} \cdots & \frac{\alpha_n - k \operatorname{tg}(kh)}{\alpha_n^2 + k^2} & \frac{\alpha_{n+1} - k \operatorname{tg}(kh)}{\alpha_{n+1}^2 + k^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\alpha_n - \gamma_1} & \frac{1}{\alpha_{n+1} - \gamma_1} & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\alpha_n - \gamma_2} & \frac{1}{\alpha_{n+1} - \gamma_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{\alpha_n - k \operatorname{tg}(kh)}{\alpha_n^2 + k^2} = \frac{1 + i \operatorname{tg}(kh)}{2(\alpha_n - \gamma_0)} + \frac{1 - i \operatorname{tg}(kh)}{2(\alpha_n + \gamma_0)},$$

$D^{(0)}$  можно записать в виде

$$D^{(0)} = \frac{1 + i \operatorname{tg}(kh)}{2} \Delta^- + \frac{1 - i \operatorname{tg}(kh)}{2} \Delta^+, \quad (11)$$

где

$$\Delta^- \equiv \Delta^-(\gamma_0, \gamma_1, \dots) = \det \left\| \frac{1}{\alpha_n - \gamma_m} \right\|, \quad \Delta^+ = \Delta^-(-\gamma_0, \gamma_1, \dots)^*.$$

Возвращаясь к случаю  $\omega_p > 0$ , разложим левую часть (8) в ряд Тейлора по  $\zeta_n$  и удержим только линейные члены:

$$D \equiv \det \| a_{mn} \| = D^{(0)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n D_n, \quad (12)$$

где  $D_n$  — определитель, получающийся из  $D^{(0)}$  заменой элементов  $n$ -го столбца на  $1/(\alpha_n^2 - \gamma_m^2)$  ( $m = 0, 1, \dots$ ). Разлагая  $D_n$  по элементам  $n$ -го столбца и используя соотношение (11) для  $D^{(0)}$  и аналогичное ему для миноров  $D_n$ , получаем из (12)

$$D = \frac{1+i \operatorname{tg}(kh)}{2} \left( \Delta^- + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{m,n}^-}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \right) + \frac{1-i \operatorname{tg}(kh)}{2} \times \\ \times \left( \Delta^+ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{m,n}^+}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \frac{D_{0,n}}{\alpha_n^2 - \gamma_0^2}, \quad (12a)$$

где  $D_{m,n}^-$  и  $D_{m,n}^+$  — алгебраические дополнения элементов  $a_{mn}$  в  $\Delta^-$  и  $\Delta^+$  соответственно (очевидно,  $D_{0,n} \equiv D_{0,n}^+ = D_{0,n}^-$ ). Все определители, входящие в (12a), имеют вид  $\det \| 1/(\alpha_n - \gamma_m) \|$ . Для определителей такого вида Коши была получена формула (см. [8, 11])

$$\det \left\| \frac{1}{\alpha_\lambda + b_\mu} \right\|_{\lambda, \mu=1}^N = \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq N} (a_j - a_k)(b_j - b_k)}{\prod_{\lambda, \mu=1}^N (\alpha_\lambda + b_\mu)}.$$

Воспользовавшись этой формулой и затем разделив обе части (12a) на  $\Delta^-$  почленно, получим

$$\frac{1+i \operatorname{tg}(kh)}{2} \left( 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m,n}^-}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \right) + \\ + \frac{1-i \operatorname{tg}(kh)}{2} \left( 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m,n}^+}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta_n \frac{X_{0,n}}{\alpha_n^2 - \gamma_0^2} = 0, \quad (13)$$

где

$$X_{m,n}^- = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=0}^{2N} (\alpha_n - \gamma_j) \prod_{l=-N}^N (\alpha_l - \gamma_m)}{\prod_{l=-N}^N (\alpha_n - \alpha_l) \prod_{s=0}^{2N} (\gamma_s - \gamma_m)}, \quad (14)$$

$$X_{m,n}^+ = X_{m,n}^-(-\gamma_0), \quad X_{0,n}^- = X_{0,n}^+ = X_{0,n}.$$

Введем обозначения

\* Все бесконечные детерминанты здесь понимаются в том же смысле, что и в работе [1].

$$a = \frac{\alpha d}{2\pi}, \quad b = \frac{\beta d}{2\pi}, \quad c = \frac{\gamma_0 d}{2\pi}, \quad b^{(0)} = \frac{\beta^{(0)} d}{2\pi}.$$

Используя некоторые свойства гамма-функции, а также условие синхронизма, и пренебрегая величиной  $(kd/2\pi)^2$  по сравнению с единицей, можно показать, что

$$X_{m,0}^- = - \frac{a - c}{a + c} \frac{1 + (-1)^{m+1} \cos(2\pi b)}{2^{2a-1} d \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[(m/2) + b] \Gamma[(m/2) - b]}{\Gamma(m/2) \Gamma[(m+1)/2]} \quad (m > 0); \quad (15)$$

$$X_{0,0} = (\alpha_0 - \gamma_0) 2^{2c-2a} \frac{\Gamma(1-2c)}{\Gamma(1+b-c) \Gamma(1-b-c)}; \quad (15a)$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\alpha_n \zeta_n| \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{X_{m,n}^{\pm}}{\alpha_n^2 - \gamma_m^2} \right| < 3\chi, \quad (16)$$

где  $\chi = (\omega_p/\omega)^2$ .

Как легко заметить, в дисперсионное уравнение войдут члены порядка  $\delta_0$  и порядка  $\chi$ , причем в силу принятых нами условий  $\chi \ll |\delta_0| \ll 1$ . В дальнейшем будет показано, что  $\delta_0 = O(\chi^{1/3})$ . Значит, поскольку мы пренебрегаем членами порядка  $\delta_0^2 = O(\chi^{2/3})$ , члены порядка  $\chi$  также должны быть отброшены в этом приближении. Из (13) и (16) видно, что при этом останутся только члены, описывающие взаимодействие основной гармоники тока со всеми стоячими волнами резонатора замедляющей системы. Таким образом, получает подтверждение принятая в работах [1, 2] и ряде других работ аппроксимация тока одной волной. На основании формул (П.1) — (П.7) Приложения можем после некоторых преобразований записать дисперсионное уравнение в форме

$$\left(1 + \frac{\zeta_0}{2}\right) \left[1 - \frac{\xi}{a} + 2\xi f(b)\right] + \frac{\zeta_0}{2} 2^{-4a} \left[1 + \frac{\xi}{a} + 2\xi f(b)\right] = 0. \quad (17)$$

Здесь обозначено  $f(b) = \psi(b) + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}(\pi b) + \frac{1}{2b} + C + \ln 2$ ,  $C = 0,577 \dots$

— постоянная Эйлера,  $\psi(b) = \Gamma'(b)/\Gamma(b)$ ,  $\xi = (kd/2\pi)\operatorname{tg}(kh)$ .

В том же приближении по  $c$  дисперсионное уравнение для холодной системы, которое получится из (17) при  $\zeta_0 = 0$ , имеет вид

$$1 - \frac{\xi}{a} + 2\xi f(b) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) эквивалентно уравнению (29) работы [3] (см. также уравнение (49.14) монографии [7]).

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (17) может быть, очевидно, представлено в форме

$$F_1(b) + \zeta_0 F_2(b) = 0. \quad (17a)$$

Введя обозначение  $z = 1 - v_0 \beta / \omega$ , перепишем (17a) в виде

$$z^2 F_1(b) + \frac{\chi}{2} [1 - \exp(-2\alpha y_1)] F_2(b) = 0. \quad (17b)$$

При  $\chi \rightarrow 0$  корни (17b) переходят в  $z_{1,2} = 0$  и  $b = b^{(0)}$ , так как  $F_1(b) = 0$

—дисперсионное уравнение холодной системы. Поэтому при  $\chi \ll 1$  ( $b/b^{(0)} - 1 \ll 1$ ). Разлагая левую часть (17 б) в ряд по  $\tau = (b/b^{(0)}) - 1$ , получим в первом приближении

$$z^2\tau = -\frac{\chi}{2} \frac{[1 - \exp(-2\alpha^{(0)}y_1)]F_2(b^{(0)})}{b^{(0)}F'_1(b^{(0)})}, \quad (19)$$

где  $\alpha^{(0)} = \sqrt{(\beta^{(0)})^2 - k^2}$ . Это кубическое уравнение относительно  $b$ , описывающее две волны электронного потока и прямую волну в системе. Здесь  $z$  выражается через  $\tau$  и рассинхронизм  $s = (v_0\beta^{(0)}/\omega) - 1$ :  $z = -s - \tau - s\tau$ , так что, пренебрегая в (19) величиной  $s\tau$  как величиной более высокого порядка малости, получаем уравнение относительно  $\tau$ :

$$(s + \tau)^2\tau = -\frac{\chi}{2} [1 - \exp(-2\alpha^{(0)}y_1)] \frac{F_2(b^{(0)})}{b^{(0)}F'_1(b^{(0)})}. \quad (20)$$

Легко видеть, что наибольшие значения  $\tau$  и нормированного инкремента нарастания  $\text{Im } \tau$  достигаются при  $s = O(\chi^{1/3})$ . Тогда  $\tau = O(\chi^{1/3})$ . В наиболее интересном для электроники случае больших замедлений, когда  $|b| \gg |c|$  и  $a \approx b$ , уравнение (20) после раскрытия правой части представляется в форме

$$\hat{(s + \tau)^2\tau} = -K, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \chi^{-1/3}\tau, & \hat{s} &= \chi^{-1/3}s, \\ K &= [1 - \exp(-2\beta^{(0)}y_1)] \frac{2^{-4b^{(0)}}}{1 + 2(b^{(0)})^2 f'(b^{(0)})} \end{aligned}$$

— коэффициент связи.

При  $b^{(0)} \rightarrow 0$ , что, как следует из (18), соответствует  $\xi \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow 1 - \exp(-2\beta^{(0)}y_1)$ , и (21) переходит в уравнение Лопухина [6], учитывающее только одну гармонику поля. Таким образом, используя (21), можно найти область применимости одноволнового приближения и оценить влияние на взаимодействие неоднородности поля на щели резонатора замедляющей системы. Следует заметить, что при переходе к бесконечно густой гребенке ( $d \rightarrow 0$ )  $\xi$  может сохранять конечное значение за счет неограниченного роста  $\text{tg}(kh)$  при  $h \rightarrow \lambda/4$  ( $\lambda = 2\pi/k$ ), так, что роль высших пространственных гармоник поля в резонаторе не становится исчезающей малой.

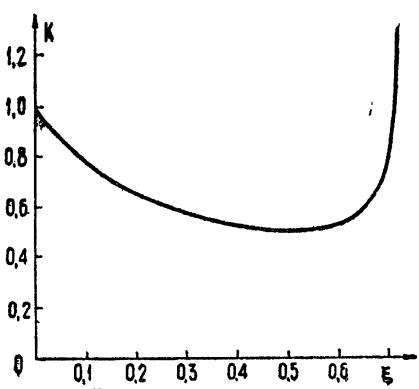


Рис. 2.

Зависимость коэффициента связи  $K$  от  $\xi$  представлена на рис. 2. На рис. 3 изображены графики положительной мнимой части корня уравнения (21) как функции  $s$  при различных значениях  $\xi$ . Толщина пучка всюду принята бесконечной. Для пучков конечной толщины коэффициент связи уменьшается в  $[1 - \exp(-2\beta^{(0)}y_1)]$  раз.

Из рис. 3 видно, что максимальное усиление достигается при  $\hat{s} = 0$ , т. е. при точном синхронизме пучка с волной в холодной системе. С ростом  $\hat{s}$  уси-

ление убывает и при  $\hat{s} \geq \hat{s}_0$ , где  $\hat{s}_0$  — граница полосы усиления по рас-  
синхронизму, уравнение (21) имеет только вещественные корни, т. с.  
происходит срыв усиления. Эти значения  $\hat{s}$  соответствуют крестатрон-  
ному режиму ЛБВ.

Граница полосы усиления  $\hat{s}_0$  зависит от  $\xi$ . Эта зависимость пред-  
ставлена на рис. 4.

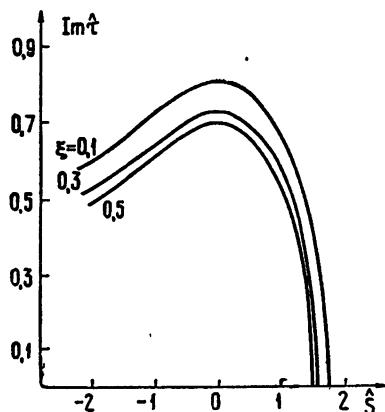


Рис. 3.

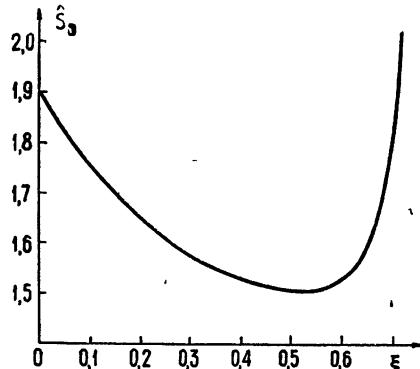


Рис. 4.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод уравнения (17). Из (16) следует, что величину порядка  $\delta_0$  в (13) имеют только члены с  $n = 0$ . Отбрасывая имеющие порядок  $\chi$  члены с  $n \neq 0$ , получим из (13):

$$\frac{1+i \operatorname{tg}(kh)}{2} \left( 1 + \alpha_0 \zeta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m,0}^+}{\alpha_0^2 - \gamma_m^2} \right) + \frac{1-i \operatorname{tg}(kh)}{2} \left( 1 + \right. \\ \left. + \alpha_0 \zeta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{m,0}^+}{\alpha_0^2 - \gamma_m^2} \right) \frac{\Delta^+}{\Delta^-} + \alpha_0 \zeta_0 \frac{X_{0,0}}{\alpha_0^2 - \gamma_0^2} = 0. \quad (\Pi.1)$$

Чтобы найти сумму ряда  $S^- = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,0}^- / (\alpha_0^2 - \gamma_m^2)$  (после чего сумма аналогичного ряда  $S^+$  с  $X_{m,0}^+$  находится заменой  $\gamma_0$  на  $(-\gamma_0)$ ), представим его в виде (см. (15))

$$S^- = (a-c) 2^{1-2a} \frac{d}{8\pi^{5/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{m+1} \cos(2\pi b)}{[(m/2)-c][(m^2/4)-b^2]} \frac{\Gamma[(m/2)+b]\Gamma[(m/2)-b]}{\Gamma(m/2)\Gamma[(m+1)/2]} = \\ = (a-c) 2^{1-2a} \frac{d}{\sqrt{\pi}} \tilde{S}.$$

Разложив  $1/[(m/2)-c][(m^2/4)-b^2]$  на простейшие дроби по  $m/2$  и суммируя отдельно слагаемые с четными и нечетными  $m$ , представим  $\tilde{S}$  в виде  $\tilde{S} = S_1 + iS_2$ , где

$$S_i = M_i \sum_{j=1}^3 S_{ij}, \quad (i = 1, 2), \quad M_1 = \frac{\sin^2(\pi b)}{4\pi}, \quad M_2 = \frac{\cos^2(\pi b)}{4\pi},$$

$$S_{ij} = A_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+z_{ij}} \frac{\Gamma(k+b+\lambda_i)\Gamma(k-b+\lambda_i)}{k! \Gamma(k+2\lambda_i-1/2)},$$

$$A_1 = \frac{1}{c^2 - b^2}, \quad A_2 = \frac{1}{2b(b-c)}, \quad A_3 = \frac{1}{2b(b+c)}, \quad z_{11} = 1-c, \quad z_{12} = 1-b,$$

$$z_{13} = 1+b, \quad z_{2j} = z_{1j} - \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача свелась к вычислению  $S_{ij}$ . Для этого воспользуемся равенством  $1/(k+z) = \int_0^1 t^{k+z-1} dt$ . Выразив таким образом  $1/(k+z_{ij})$  в  $S_{ij}$  и поменяв местами интегрирование и суммирование, получим\*

$$\begin{aligned} S_{ij} &= A_j \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+b+\lambda_i)\Gamma(k-b+\lambda_i)}{k! \Gamma(k+2\lambda_i-1/2)} t^{k+z_{ij}-1} dt = \\ &= A_j \frac{\Gamma(\lambda_i+b)\Gamma(\lambda_i-b)}{\Gamma(2\lambda_i-1/2)} \int_0^1 t^{z_{ij}-1} F\left(\lambda_i+b, \lambda_i-b, 2\lambda_i - \frac{1}{2}; t\right) dt, \end{aligned}$$

где  $F(a, \beta, \gamma; t)$  — гипергеометрическая функция.

Отсюда, используя элементарные свойства гамма-функции (см. [9], 1.2 (6), 1.2 (7)), находим

$$S_{1j} = A_j \frac{2b\sqrt{\pi}}{\sin(\pi b)} \int_0^1 t^{z_{1j}-1} F\left(1+b, 1-b, \frac{3}{2}; t\right) dt; \quad (\text{П.2})$$

$$S_{2j} = A_j \frac{\sqrt{\pi}}{\cos(\pi b)} \int_0^1 t^{z_{2j}-1} F\left(\frac{1}{2}+b, \frac{1}{2}-b, \frac{1}{2}; t\right) dt. \quad (\text{П.3})$$

Из равенств

$$F\left(1+b, 1-b, \frac{3}{2}; \sin^2 \tau\right) = \frac{\sin(2b\tau)}{b \sin(2\tau)},$$

$$F\left(\frac{1}{2}+b, \frac{1}{2}-b, \frac{1}{2}; \sin^2 \tau\right) = \frac{\cos(2b\tau)}{\cos \tau},$$

(см. [9], 2.8 (1), 2.8 (1.2)), сделав в (П.2), (П.3) замену  $t = \sin^2 \tau$ , получаем

$$S_{1j} = A_j \frac{2\sqrt{\pi}}{\sin(\pi b)} \int_0^{\pi/2} (\sin \tau)^{2z_{1j}-2} \sin(2b\tau) d\tau; \quad (\text{П.4})$$

$$S_{2j} = A_j \frac{2\sqrt{\pi}}{\cos(\pi b)} \int_0^{\pi/2} (\sin \tau)^{2z_{2j}-2} \cos(2b\tau) d\tau. \quad (\text{П.5})$$

\* Законность перестановки интегрирования и суммирования следует из равномерной сходимости получающегося ряда при  $t < 1$  и интегрируемости его суммы в точке  $t = 1$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} M_1 S_{1j} + M_2 S_{2j} &= \frac{A_j}{2\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} (\sin \tau)^{2z_{1j}-2} \cos \left[ 2b \left( \tau - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\tau = \\ &= \frac{A_j}{2\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} (\cos \tau)^{2z_{1j}-2} \cos(2b\tau) d\tau = \frac{A_j}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2z_{1j}-1)}{2^{2z_{1j}} \Gamma(z_{1j}+b) \Gamma(z_{1j}-b)} \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

(см. [11] 3.631.9). Подставляя в (П.6) значения  $z_{1j}$  и суммируя по  $j$ , находим  $\tilde{S}$ :

$$\tilde{S} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[ A_1 \frac{2^{2c} \Gamma(1-2c)}{\Gamma(1+b-c) \Gamma(1-b-c)} + A_2 2^{2b} + A_3 2^{-2b} \right]. \quad (\text{П.7})$$

Теперь определяем  $S^-$  и  $S^+$ , после чего уравнение (17) получается прямой подстановкой в (П.1)  $S^-$ ,  $S^+$  и выражения для  $\Delta^+/\Delta^-$ :

$$\frac{\Delta^+}{\Delta^-} = \frac{a-c}{a+c} [1 + 4cf(b) + O(c^2)].$$

Это уравнение легко может быть получено как непосредственно, аналогично  $X_m$ , так и из результатов работ [3, 4].

Автор выражает искреннюю признательность А. В. Гапонову, Г. Я. Левину, Г. Н. Рапопорту, Ф. Г. Бассу, Л. В. Родыгину и Ю. Ф. Филиппову за интерес к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 26, 126, 141 (1956).
2. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2340 (1957).
3. R. A. Hurd, Canadian J. Phys., 32, 727 (1954).
4. R. Mittra, S. Laxpati, Canadian J. Phys., 43, 353 (1965).
5. В. М. Лопухин, ЖТФ, 21, 505 (1951).
6. В. М. Лопухин, ЖТФ, 21, 516 (1951).
7. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
8. Н. И. Ахieзер, Лекции по теории аппроксимации, изд. Наука, М., 1965.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, Гипергеометрическая функция, функции Лежандра, изд. Наука, М., 1965.
10. Э. Ч. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
11. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
24 января 1969 г.

#### INTERACTION OF ELECTRON FLUX WITH A FIELD OF „COMB“ TYPE SLOW-WAVE SYSTEM

I. L. Verbitskii

A self-consistent problem on interaction of electron beam with electromagnetic field in a comb is considered in a linear approximation and under the assumption of spatial charge smallness with all spatial harmonics of the field and of the current taken into account. The coupling impedance is explicitly expressed through the geometrical parameters of the system. It is shown that there is a case when an infinitely dense comb is not described by the impedance boundary conditions and the contribution of high spatial harmonics does not become vanishing small when the period of the comb tends to zero.

УДК 538.56

## ЭЛЕКТРОННАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ ТИПА М НА БЫСТРЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛНАХ ПУЧКА КАК ЭЛЕМЕНТ УПРАВЛЕНИЯ СВЧ СИГНАЛОМ

*B. B. Гурзо, M. N. Куликов, B. C. Стальмахов*

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование линии передачи типа М на быстрых циклотронных волнах, работающей как фазовращатель и линия задержки. Показано, что подобные приборы обладают высокой фазовой чувствительностью к изменению магнитного поля в режиме, близком к циклотронному резонансу. Полученная при этом абсолютная фазовая чувствительность составляла около  $80 \text{ град}\cdot\text{гаусс}^{-1}$ . Исследование линии задержки показало возможность получения значительного (до 0,3 мксек) времени задержки сигнала в схемах с обратноволновым взаимодействием.

В последнее время вызывает интерес исследование взаимодействия с быстрыми циклотронными волнами (БЦВ) в пучках типа М в связи с возможностями создания новых СВЧ приборов, управляющих амплитудой, фазой и временем прохождения сигнала. К таким приборам можно отнести электронные аттенюаторы, фазовращатели, линии задержки и пр. Поэтому представляется интересным как теоретический анализ подобных приборов, так и экспериментальное исследование возможностей осуществления взаимодействия на БЦВ в пучках типа М. В работе [1] исследовались способы управления амплитудой сигнала, в настоящем сообщении описываются возможности управления фазой и временем задержки сигнала при взаимодействии с БЦВ.

Типичные схемы приборов, с помощью которых возможно осуществить управление входным сигналом, показаны на рис. 1. В отличие от

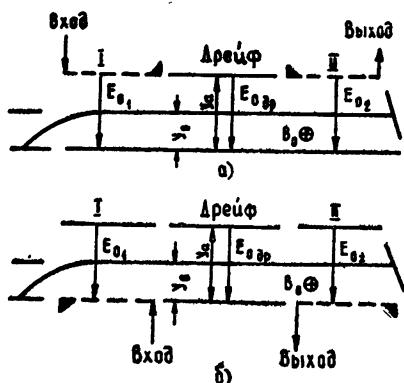


Рис. 1. Схемы взаимодействия:  
а) прямоволновое взаимодействие (групповые скорости волн в потоке и линии имеют одно направление); б) обратноволновое взаимодействие (групповые скорости волн в потоке и линии имеют противоположные направления).

[2] в качестве элементов связи использовались отрезки замедляющих структур, причем в схеме, изображенной на рис. 1 а, осуществлялось взаимодействие с прямой быстрой циклотронной волной (ПБЦВ); в схеме, показанной на рис. 1 б, — с обратной быстрой циклотронной волной пучка (ОБЦВ).

Линейный анализ взаимодействия бегущей волны с циклотронными волнами в лучевых приборах типа М дан в [1, 3, 4], поэтому ограничимся здесь его конечными результатами в применении к рассматриваемым схемам.

### 1. ЭЛЕКТРОННЫЙ ФАЗОВРАЩАТЕЛЬ ТИПА М НА БЫСТРЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛНАХ

Из выражений для комплексных коэффициентов передачи схем рис. 1 а и 1 б, следуя методу расчета, приведенному в [1], можно получить зависимость фазового сдвига на выходе прибора от величины электрических параметров, характеризующих режим работы, и геометрии пространства взаимодействия:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & - \left[ 2\pi(N_1 + N_2) + 2\pi N_{dp}(1 + \alpha_0 g_{m,dp}) + \right. \\ & \left. + 2\pi D_1 N_1 \left( \frac{b_1 + g_{m,1} S_1}{2} \right) + 2\pi D_2 N_2 \left( \frac{b_2 + g_{m,2} S_2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

— для взаимодействия с прямой быстрой циклотронной волной и

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & - \left\{ 2\pi N_{dp}(1 + \alpha_0 g_{m,dp}) - \operatorname{arctg} \left[ \frac{b_1 + g_{m,1} S_1}{2\sqrt{1 - [(b_1 - g_{m,1} S_1)/2]^2}} \times \right. \right. \\ & \times \operatorname{th} \sqrt{1 - [(b_1 - g_{m,1} S_1)/2]^2} 2\pi D_1 N_1 \left. \right] - \\ & - \operatorname{arctg} \left[ \frac{b_2 + g_{m,2} S_2}{2\sqrt{1 - [(b_2 - g_{m,2} S_2)/2]^2}} \operatorname{th} \sqrt{1 - [(b_2 - g_{m,2} S_2)/2]^2} 2\pi D_2 N_2 \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

— для взаимодействия с обратной быстрой циклотронной волной. Параметры  $b_{1,2}$ ,  $S_{1,2}$ ,  $D_{1,2}$ ,  $g_{m,1,2,dp}$ ,  $\alpha_0$ ,  $N_{1,2}$ ,  $N_{dp}$  относятся к соответствующим элементам схем рис. 1 а и 1 б и введены в [1]. В циклотронных лучевых приборах величина пространственного заряда пучка обычно мала ( $\alpha_0, S_{1,2} \ll 1$ ) и в элементах связи выполняются условия синхронизма, т. е.  $b_{1,2} = 0$ . Поэтому выражения (1) и (2) можно упростить:

$$\varphi_0 = - \beta_c (L_1 + L_2 + L_{dp}) \quad (3)$$

— для взаимодействия с ПБЦВ и

$$\varphi_0 = - \beta_c L_{dp} \quad (4)$$

— для взаимодействия с ОБЦВ.

Фазовую чувствительность к изменению электрического и магнитного полей прямоволновой и обратноволновой схем взаимодействия в соответствии с выражениями (3), (4) определим так:

$$\frac{d\varphi_0}{dB_0} = - \frac{\omega}{E_0} \left( 1 - \frac{2\omega_m}{\omega} \right) (L_1 + L_2 + L_{dp}) \quad (E_0 = \text{const}); \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dE_0} = \frac{\omega B_0}{E_0^2} \left( 1 - \frac{\omega_m}{\omega} \right) (L_1 + L_2 + L_{dp}) \quad (B_0 = \text{const}) \quad (6)$$

— для взаимодействия с ПБЦВ и

$$\frac{d\varphi_0}{dB_0} = - \frac{\omega}{E_0} \left( 1 - \frac{2\omega_m}{\omega} \right) L_{dp} \quad (E_0 = \text{const}); \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dE_0} = \frac{\omega B_0}{E_0^2} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega}\right) L_{\text{дп}} \quad (B_0 = \text{const}) \quad (8)$$

— для взаимодействия с ОБЦВ. Здесь  $E_0$ ,  $B_0$ ,  $\varphi_0$  — опорные значения электрического и магнитного полей и выходной фазы.

Соотношения (5) — (8) характеризуют абсолютную фазовую чувствительность фазовращателя на быстрых циклотронных волнах и позволяют рассчитать зависимость выходной фазы от рабочих параметров и геометрии прибора.

Следует указать, что (5), (7) получены в пренебрежении изменением параметров  $b_1$  и  $b_2$  при отстройке от опорного значения магнитного поля, что справедливо для достаточно малых электрических длин элементов связи.

## 2. ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ ТИПА М НА БЫСТРЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛНАХ

Исследуемые схемы (рис. 1 а, б) могут выполнять также функции электронной линии задержки. Так как групповая скорость переноса энергии на быстрой циклотронной волне совпадает со скоростью электронов  $v_e$ , то время задержки сигнала можно определить следующим образом:

$$\tau = \frac{L_1 + L_2 + L_{\text{дп}}}{v_e} \quad (9)$$

— для прямоволнового взаимодействия,

$$\tau = \frac{L_{\text{дп}}}{v_e} \quad (10)$$

— для обратноволнового взаимодействия.

В отличие от известных приборов типа О, осуществляющих задержку сигнала [6], в схемах со скрещенными полями возможно проводить пучок в зоне дрейфа при достаточно малых напряжениях луча, т. е. использовать сверхмедленные пучки. Это, в свою очередь, обеспечивает большие времена задержки и позволяет существенно сократить размеры прибора.

Возможность получения сверхмедленных пучков в зоне дрейфа при использовании фокусировки скрещенными полями определяется тем, что в этом случае сняты ограничения, связанные с разбросом по скоростям. Наличие разброса электронов по скоростям в приборах типа М приводит лишь к разбросу электронных траекторий (различная степень циклодальности), но не меняет средней скорости пучка  $v_e = E_0/B_0$ , которая определяется только внешними полями и может достигать в таких схемах долей вольта [2, 7]. Как показано в [7], существующее здесь ограничение обусловлено пространственным зарядом пучка, однако, поскольку приборы подобного типа работают при малых токах, это ограничение вряд ли будет иметь практическое значение.

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВРАЩАТЕЛЯ И ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ НА БЦВ

Исследование характеристик фазовращателя на БЦВ проводилось на экспериментальных макетах с распределенными элементами связи, описанных в [1], в которых осуществлялась связь с ОБЦВ. Длина зоны дрейфа и элементов связи были одинаковы и составляли 50 мм. В качестве замедляющей структуры в элементах связи использовалась плоская спираль, осуществляющая связь нулевой гармоники системы

с ОБЦВ пучка в полосе частот 1000—2000  $M\text{гц}$  и обеспечивающая замедление в диапазоне порядка 10. Сигнал от генератора высокой частоты подавался на вход 1-го элемента связи и снимался с выхода второго элемента связи (рис. 1 б). Развязка по высокой частоте между каскадами в рабочем диапазоне частот составляла более 40 дБ.

Исследования поведения фазы на выходе прибора в зависимости от электрических параметров режима работы проводились по методике, описанной в [8, 9]. Входной сигнал через направленный ответвитель (рис. 2) подавался на вход исследуемого фазовращателя  $\varphi_x$  и одновременно через аттенюатор А—на измерительную линию. На другой вход измерительной линии подавался сигнал, прошедший через исследуемый фазовращатель  $\varphi_x$ . При этом в линии устанавливалась стоячая волна, минимум которой фиксировался. При изменении электрических параметров фазовращателя  $\varphi_x$  и, следовательно, выходной фазы наблюдалось смещение минимума стоячей волны в линии на величину  $\Delta\chi_{\text{л}}$ . Абсолютное изменение фазы можно рассчитать по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{720^\circ \Delta\chi_{\text{л}}}{\lambda_0}, \quad (11)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в линии.

На рис. 3, 4 приведены теоретические и экспериментальные зависимости изменения выходной фазы от напряженности электрического

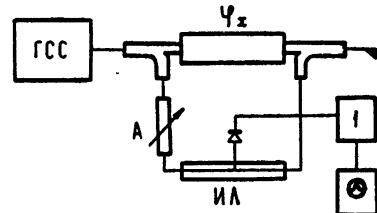


Рис. 2. Схема измерения фазы на выходе линии передачи.

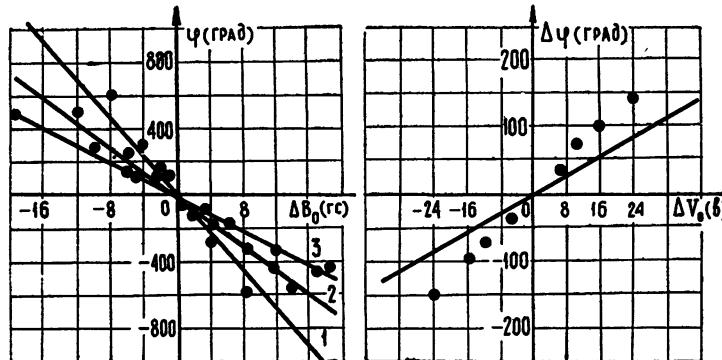


Рис. 3. Зависимость абсолютного изменения выходной фазы от магнитного поля (— эксперимент, — теория,  $f = 1455 M\text{гц}$ ):

1.  $B_0 = 537 \text{ Гс}, V_{0\text{др}} = 100 \text{ в};$
2.  $B_0 = 544 \text{ Гс}, V_{0\text{др}} = 160 \text{ в};$
3.  $B_0 = 559 \text{ Гс}, V_{0\text{др}} = 250 \text{ в}.$

Рис. 4. Зависимость абсолютного изменения выходной фазы от электрического поля (— эксперимент, — теория,  $f = 1455 M\text{гц}, B_0 = 537 \text{ Гс}, V_{0\text{др}} = 100 \text{ в}.$ )

и магнитного полей. Как видим, крутизна перестройки фазовращателя по магнитному полю много больше крутизны перестройки по электрическому полю и возрастает с приближением к циклотронному резонансу. В проведенных экспериментах была зафиксирована фазовая чувствительность по магнитному полю около  $80 \text{ град}\cdot\text{гаусс}^{-1}$ , что значительно превышает известные результаты, полученные на ЛБВО-фазовращателе

[8]. Фазовая чувствительность по электрическому полю была на порядок ниже и составляла  $8 \text{ град} \cdot \text{вольт}^{-1}$ .

Можно показать, что величина изменения крутизны перестройки фазовращателя по магнитному полю при отклонении от циклотронного резонанса ( $\omega \approx \omega_m$ ) характеризуется параметром

$$\frac{d\varphi_0}{\varphi_0} / \frac{dB_0}{B_0} = \frac{1 - 2\omega_m/\omega}{1 - \omega_m/\omega}, \quad (12)$$

где  $E_0 = \text{const}$  как для взаимодействия с прямой, так и обратной БЦВ. Как видим, крутизна перестройки по магнитному полю с приближением к циклотронному резонансу растет, и при  $\omega \rightarrow \omega_m$  малым изменениям  $B_0$  соответствуют значительные изменения выходной фазы. Это свойство фазовращателя на БЦВ может быть использовано для создания высокочувствительных датчиков отклонения магнитного поля от номинального значения.

На рис. 5 представлены экспериментальные зависимости коэффици-

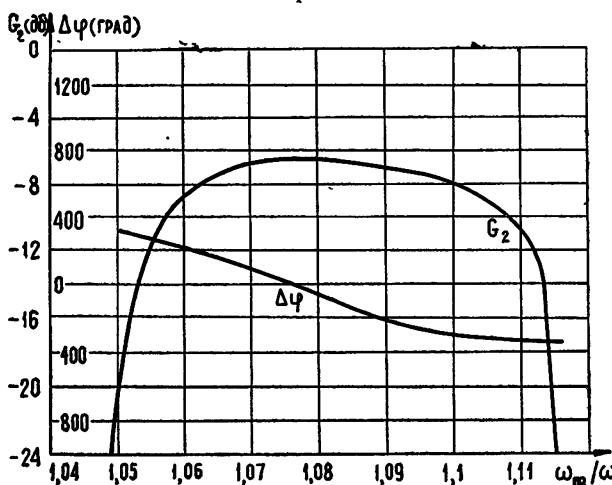


Рис. 5. Экспериментальные зависимости коэффициента передачи и выходной фазы от величины магнитного поля ( $B_0 = 618 \text{ гс}$ ,  $V_{\text{одр}} = V_0 = V_{0_s} = 250 \text{ в}$ ).

ента передачи и абсолютного изменения фазы от величины магнитного поля для одного из режимов работы фазовращателя. Как видим, изменение фазы на выходе в полосе  $\omega_m/\omega = 1,055 \div 1,105$  практически происходит без изменения амплитуды выходного сигнала и составляет  $3,18 \pi$  ( $570^\circ$ ). При этом магнитное поле изменяется на  $2,5\%$  от опорного значения  $B_0 = 618 \text{ гс}$ .

Проведенные эксперименты показали, что исследуемые схемы фазовращателей могут оказаться полезными для различных применений в технике СВЧ.

Наряду с исследованием фазовращателя было проведено экспериментальное исследование линии задержки на БЦВ. Исследуемые схемы здесь были такими же, как и на рис. 1 а, б. Во входной элемент связи вводился высокочастотный сигнал, модулированный прямоугольными импульсами длительностью 5 мксек с частотой повторения около 5000 гц. С выхода второго элемента связи наведенный сигнал снимался на синхроскоп 25-И, куда одновременно подавался сигнал от генератора. Оценка времени задержки проводилась непосредственно по смещению переднего фронта импульса, прошедшего через линию задержки, относительно

импульса, поступающего на регистрирующий прибор от сигнал-генератора. На рис. 6 показаны осциллограммы входного и выходного импульсов

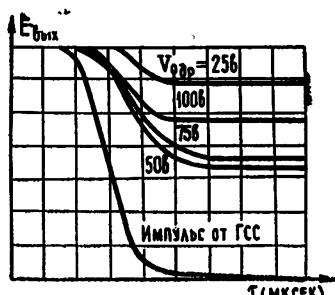


Рис. 6. Осциллограммы переднего фронта входного и выходного импульсов для различных напряжений дрейфа в линии задержки (импульс отрицательной полярности, масштаб сетки по горизонтали 0,2 мксек);  $B_0 = 549$  гс,  $V_0 = V_{\text{др}} = 29$  в,  $V_{\text{осн}} = -8$  в,  $I_0 = 150$  мка,  $f = 1490$  Гц.

сов для различных напряжений дрейфа. Горизонтальные масштабные метки регистрирующего прибора, отстоящие друг от друга на 0,2 мксек, позволяли оценивать время задержки с точностью до 0,05 мксек. На рис. 7 показаны зависимости времени задержки импульса в схеме

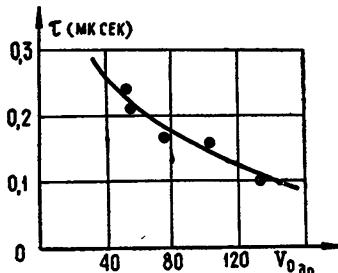


Рис. 7. Зависимость времени задержки от напряжения дрейфа (— эксперимент, — теория);  $V_0 = V_{\text{др}} = 40$  в.

рис. 1б, рассчитанные по формуле (10) и полученные экспериментально, от напряжения на дрейфе. Как видим, при длине зоны дрейфа 50 мм оказывается возможным довольно легко получать значительные (в отличие от приборов типа О) задержки сигнала. В проведенных экспериментах при напряжении луча около 0,25 в время задержки составляло 0,3 мксек (или  $0,06 \text{ мксек} \cdot \text{см}^{-1}$ ). Для сравнения приведем результаты экспериментального исследования аналогичного прибора типа О, описанного в [6]. Длина зоны дрейфа составляла 400 мм. При напряжении дрейфа около 40 в максимальное время задержки было

0,21 мксек (или  $0,0053 \text{ мксек} \cdot \text{см}^{-1}$ ). При оптимальном взаимодействии в элементах связи в [6] напряжение последних значительно превышало напряжение на дрейфе (взаимодействие на волнах пространственного заряда). Линии задержки на БЦВ, работающие в режиме, близком к циклотронному резонансу, лишены этого недостатка.

Проведенные эксперименты показали, что наилучшая передача мощности сигнала во второй элемент связи наблюдается при напряжении дрейфа, несколько превышающем напряжение на элементах связи (на рис. 6  $V_{\text{др}} = 50$  в,  $V_0 = V_{\text{др}} = 29$  в). С уменьшением напряжения дрейфа от оптимального значения передача ухудшается; этот факт отмечался и в [5]. Сейчас еще нет объяснения этому эффекту в приборах с циклотронным взаимодействием, и, видимо, последующие экспериментальные и теоретические исследования позволят выяснить причины этого явления и способы его устранения.

В заключение можно отметить, что линии передачи типа М на быстрых циклотронных волнах пучка обладают известным преимуществом перед подобными схемами О-типа. Для осуществления связи с БЦВ в скрещенных полях оказывается возможным применять замедляющие системы обычного типа. При этом ширина магнитного зазора может быть сделана очень малой. В схемах со скрещенными полями оказывается возможным проводить достаточно протяженные электронные потоки при потенциалах луча, составляющих сотни доли вольта.

По сравнению с линиями задержки типа М на волнах пространственного заряда работа на БЦВ позволяет сохранять скорость пучка

постоянной по длине прибора, что исключает появление искажений за счет неоднородностей электрических полей в переходных областях. Взаимодействие с БЦВ в режимах ( $\omega \approx \omega_m$ ) осуществляется в структурах с малыми замедлениями, что может оказаться полезным при переходе в коротковолновый диапазон.

Использование нерезонансных элементов связи при условии совпадения групповых скоростей волн в линии и БЦВ позволяет значительно расширить полосу передачи. При совпадении фазовых скоростей указанных волн возможна электрическая перестройка прибора по частоте в полосе пропускания структуры.

Как показывает сопоставление теоретических и экспериментальных результатов, развитая в [1, 3, 4] линейная теория циклотронных лучевых приборов типа М оказывается вполне пригодной для оценки основных свойств исследуемых систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Гурзо, М. Н. Куликов, В. С. Стальмаков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1236 (1968).
2. J. W. Kluver, Proc. IRE, 50, № 12, 2513 (1962).
3. Д. В. Соколов, Д. И. Трубецков, сб. Вопросы электроники сверхвысоких частот, изд. СГУ, вып. 3, 55 (1967).
4. В. В. Гурзо, Д. В. Соколов, В. С. Стальмаков, Д. И. Трубецков, Тезисы докладов V межвузовской конференции по электронике СВЧ, Саратов, 1966.
5. G. Kantowicz, Tube à retard réglable électroniquement avec coupleur cyclotron à champs croisés a progression d'onde, 5 congrès internat. Tubes pour Hyperfréquences, Paris, 1964, p. 102.
6. Ю. И. Левин, Э. А. Семенов, сб. Вопросы электроники сверхвысоких частот, изд. СГУ, вып. 3, 140 (1967).
7. J. W. Kluver, IEEE Trans., ED-11, № 5, 205 (1964).
8. B. P. Israelsen, R. W. Haegel, Proc. IRE, 50, № 4, 514 (1962).
9. И. М. Гранкин, В. А. Ищенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 8, № 1, 72 (1965).

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
9 сентября 1968 г.

#### M-TYPE ELECTRON TRANSMISSION LINE ON RAPID CYCLOTRON WAVES OF THE BEAM AS AN ELEMENT OF CONTROLLING UHF SIGNALS

V. V. Gurzo, M. N. Kulikov, V. S. Stal'makarov

The M-type transmission line on rapid cyclotron waves operating as a phase inverter and transmission line is theoretically and experimentally investigated. It is shown that these devices possess a high phase sensitivity to the change of the magnetic field in the regime close to the cyclotron resonance. The absolute phase sensitivity obtained amounted to about 80 grad·gauss<sup>-1</sup>. The investigation of the slow-wave system showed a possibility of obtaining a considerable (up to 0.3 sec) delay time of a signal in the circuits with backward interaction.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 539.1 : 538.56

### КВАДРУПОЛЬНОЕ СПИНОВОЕ ЭХО В СЛУЧАЕ ШИРОКИХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ

*B. С. Гречишкін, Е. М. Шишкин*

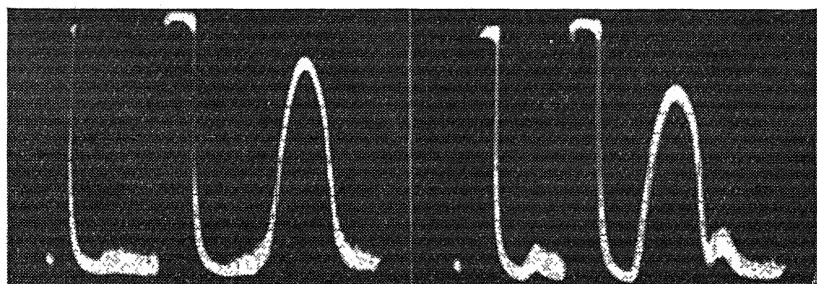
Если кристалл не содержит дефектов в решетке, то удается наблюдать очень узкие линии ЯКР, ширина которых не превышает нескольких килогерц. Наблюдение сигналов спинового эха от узких линий имеет большое значение для измерений времен релаксации [1].

С другой стороны, при внедрении в решетку кристалла примесей ширина линии ЯКР может стать настолько большой, что технически трудно будет удовлетворить условию  $\gamma H_1 > \Delta H$ , где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение ядра,  $H_1$  — амплитуда радиочастотного поля в импульсе,  $\Delta H$  — ширина линии поглощения.

Теория квадрупольного спинового эха для  $\gamma H_1 < \Delta H$  может быть построена по аналогии с ЯМР [2].

Для ядер, частота которых далека от резонанса, параметр  $b \sim \Delta\omega$ , поэтому выражение для сигнала эха будет содержать член вида  $\cos [\Delta\omega (t_4 - t_2 - t)]$ , где  $\Delta\omega = -(1/2)bt_1 \cos\theta$  при  $\alpha\gamma H_1 t_1 = \alpha\gamma H_1 t_3 < 1$ ;  $\cos\theta = \Delta\omega/b$ ,  $b^2 = \beta^2 + \Delta\omega^2$ ,  $\beta = \alpha\gamma H_1$ ,  $\Delta\omega$  — расстройка между частотой заполнения импульсов и частотой ЯКР;  $t_2$  — интервал времени между первым и вторым импульсами,  $t_4$  — текущее время после 2-го импульса;  $\alpha$  — матричный элемент оператора  $\hat{I}_x$ . Отсюда видно, что максимум сигнала эха сдвинут относительно обычного положения при  $t_4 = t_2$  (для узких линий) на величину порядка  $t_1/2$ .

Эксперимент выполнялся на стандартной установке квадрупольного спинового эха. Использовался модулятор с накопительным конденсатором, что позволяет легко изменять амплитуду генерируемых импульсов. При увеличении мощности генератора, когда величина напряжения на накопительном конденсаторе изменялась от 400 в до 5 кв, амплитуда сигнала спинового эха вначале увеличивается, проходит через максимум, а затем падает. При этом эхо изменяет свою форму и смещается (рис. 1). Обнаруживается также сложная форма сигнала (рис. 2).



a)

б)

Рис. 1. Квадрупольное спиновое эхо ядер  $\text{Bi}^{209}$  в  $\text{BiCl}_3$  при  $300^\circ\text{K}$ . Частота поглощения  $51,7 \text{ MГц}$  (переход  $5/2 \rightarrow 7/2$ ),  $\Delta H \approx 40 \text{ кГц}$ ,  $\gamma H_1 \approx 9 \text{ кГц}$ ,  $t_1 = t_3 = 10 \text{ мксек}$ .

а) Сигнал спинового эха в момент времени  $t_2 + \frac{1}{2}t_1$  ( $\alpha\gamma H_1 t_1 < 1$ ). б) Сигнал спинового эха в момент времени  $t_2$  ( $\alpha\gamma H_1 t_1 > 1$ ).

дается при  $\Delta\omega=0$ . Причем можно обнаружить периодические изменения интенсивности, формы и положения сигнала спинового эха при увеличении  $\alpha\gamma H_1 t_1$ . Ничего подобного не удается наблюдать в случае узких линий поглощения. Если же  $\gamma H_1 < \Delta H$  и  $\alpha\gamma H_1 t_1 = 4\pi$ , то удается наблюдать сигнал эха, состоящий из 3-х пиков.

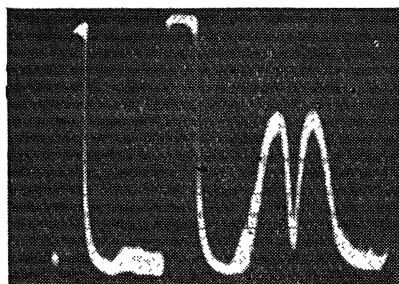


Рис. 2. Квадрупольное спиновое эхо ядер  $\text{Bi}^{209}$  в  $\text{BiCl}_3$  при  $\gamma H_1 < \Delta H$ . Мощность генератора высокой частоты уменьшена примерно на 2 дБ по сравнению с условиями на рис. 1б.

Таким образом, при  $\gamma H_1 < \Delta H$  форма сигнала эха является функцией мощности генератора и длительности импульсов.

Если  $\alpha\gamma H_1 t_1 > 1$ , то форма сигнала эха усложняется (рис. 2). Расчет был сделан для  $J = 9/2$  (переход  $5/2 \rightarrow 7/2$ ) при  $t_1 = t_3$  и  $\beta t_1 = 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ . Аналогичные расчеты могут быть сделаны для других ядерных спинов и переходов. Наблюдается согласие между теорией и экспериментом. Эксперимент при  $\gamma H_1 < \Delta H$  был выполнен для ядер  $\text{Cl}^{35}, \text{Sb}^{121}, \text{Sb}^{123}, \text{J}^{127}$  и  $\text{Bi}^{209}$  в ряде соединений.

Отметим, что при больших углах поворота  $\alpha\gamma H_1 t_1 \gg 1$  удалось наблюдать краевое спиновое эхо после 1-го одиночного импульса [2], которое ранее в ЯКР никем не наблюдалось. При больших углах поворота в случае широких линий ЯКР появляется также сигнал эха при  $t_4 = 2t_2$ , где  $t_4$  отсчитывается от конца 2-го импульса. Этот ложный сигнал эха обусловлен редубликацией сигнала эха за счет комбинации его со вторым импульсом.

Таким образом, наблюдение спинового эха от широких линий ЯКР имеет свою специфику, которую необходимо учитывать при частотном прохождении широких линий ЯКР в импульсных методах. В частности, необходима существенная дополнительная задержка строб-импульса в интеграторе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Bloom, E. L. Hahn, B. Herzog, Phys. Rev., 97, № 6, 1699 (1955).
2. A. L. Bloom, Phys. Rev., 98, № 4, 1105 (1955).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию  
30 декабря 1968 г.

УДК 539.1 : 538.56

#### ОБ ЭФФЕКТЕ БЛОХА — ЗИГЕРТА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЯДЕР

Б. Ф. Алексеев

Известно [1], что в присутствии переменного магнитного поля с амплитудой  $H_k$  и частотой  $\omega_k$ , поляризованного по кругу, частота ядерного магнитного резонанса (ЯМР) смещается относительно ларморовой на величину

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 H_k^2}{2(1-k)H_0^2}, \quad (1)$$

где  $H_0$  — внешнее постоянное магнитное поле,  $\omega_0 = \gamma_n H_0$ ,  $\gamma_n$  — гиromагнитное отношение ядер,  $k = \omega_k / \omega_0$ .

Рассматриваемый сдвиг частоты (эффект Блоха—Зигерта), наиболее заметный в слабых магнитных полях и при  $|1-k| \ll 1$ , неоднократно [2, 3] наблюдался экспериментально. При динамической поляризации ядер (ДПЯ) [4]  $H_k$  и  $\omega_k$  имеют смысл амплитуды  $H_{1e}$  и частоты  $\omega_e$  высокочастотного магнитного поля, насыщающего электронный парамагнитный резонанс (ЭПР). Для насыщения ЭПР обычно используется линейно поляризованное переменное магнитное поле  $2H_{1e} \cos(\omega_e t)$ , которое разлагается на две компоненты, поляризованные по кругу и врачающиеся в противоположных направлениях. Результирующий сдвиг частоты ЯМР при этом может быть получен из (1) суммированием двух элементарных сдвигов, соответствующих  $k_1 = +k$  и  $k_2 = -k$ . Учитывая, что при ДПЯ  $k = \omega_e / \omega_0 = \gamma_e / \gamma_n \gg 1$  ( $\gamma_e$  — гиromагнитное отношение электронов\*), имеем

$$\Delta\omega \simeq \frac{H_{1e}^2 \gamma_n^3}{H_0^2 \gamma_e^2}. \quad (2)$$

В водных растворах  $Mn^{++}$  [5] для насыщения ЭПР необходимо поле  $H_{1e} \geq 10$  э. Используя в выражении (2) в качестве гиromагнитных отношений соответствующие величины для протона и свободного электрона ( $\gamma_n = 7 \cdot 10^4$  сек<sup>-1</sup>·э<sup>-1</sup>,  $\gamma_e = 17,6 \cdot 10^6$  сек<sup>-1</sup>·э<sup>-1</sup>), получаем, что в поле  $H_0 \sim 10$  э  $\Delta\omega$  составляет  $\sim 0,63$  сек<sup>-1</sup> ( $\sim 0,1$  гц). При поляризации ядер в поле Земли  $H_0 \sim 0,5$  э и при  $H_{1e} \sim 3$  э  $\Delta\omega$  составляет  $\sim 1,15$  сек<sup>-1</sup> ( $\sim 0,18$  гц). В полях  $H_0 \sim 50$  э  $\Delta\omega$ , согласно (2),  $\sim 0,01$  сек<sup>-1</sup>.

Определяемый выражением (2) сдвиг частоты ЯМР является статическим и формально может быть пересчитан в статическое изменение ядерного гиromагнитного отношения:

$$\frac{\Delta\gamma_n}{\gamma_n} \simeq \frac{H_{1e}^2 \gamma_n^2}{H_0^2 \gamma_e^2}. \quad (3)$$

Известно [6], что точность абсолютных ядерно-резонансных прецессионных магнитометров и гирокомпасов возрастает с увеличением ядерной поляризации и принципиально ограничена точностью, с которой определено  $\gamma_n$ . Так, для протонов воды  $\gamma_n$  измерено с точностью  $0,8 \cdot 10^{-5}$ . Количественные оценки по формуле (3) показывают, что изменения гиromагнитного отношения вследствие эффекта Блоха—Зигерта при ДПЯ могут превышать величину  $0,8 \cdot 10^{-5}$ . Следовательно, при использовании динамически поляризованных ядер для точных магнитных или гирокомpassических абсолютных измерений к факторам [7], обусловливающим непостоянство гиromагнитного отношения, надо добавить и рассматриваемый эффект.

Если амплитуда  $H_{1e}$  поля, насыщающего ЭПР, нестабильна, то появляется флуктуационный сдвиг частоты ЯМР, для величины которого из (2) в приближении малой нестабильности поля  $H_{1e}$  получаем выражение

$$\delta(\Delta\omega) \simeq 2 \frac{H_{1e} \gamma_n^3}{H_0^2 \gamma_e^2} \delta H_{1e}. \quad (4)$$

Учитывая (2), соотношение (4) можно представить в виде

$$\frac{\delta(\Delta\omega)}{\Delta\omega} \simeq 2 \frac{\delta H_{1e}}{H_{1e}}. \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет определить необходимую амплитудную стабильность генератора, используемого для насыщения ЭПР. Флуктуационные сдвиги (4) частоты ЯМР не будут влиять на точность абсолютных измерений, если, как следует из (5), амплитудная стабильность поля  $H_{1e}$  удовлетворяет условию

$$\frac{\delta H_{1e}}{H_{1e}} \leq 0,1 \frac{\Omega_{min}}{\Delta\omega}, \quad (6)$$

где  $\Omega_{min}$  — абсолютная погрешность измерительного устройства, определяемая всеми другими факторами.

\* С учетом начального расщепления электронных уровней вместо  $\gamma_e$  надо использовать «эффективное» гиromагнитное отношение  $\gamma_e^*$ , определяемое как  $\omega_e / H_0$ .

Современные прецессионные магнитометры позволяют измерять магнитные поля с точностью  $\sim 10^{-6}$  э, чему соответствует  $\Omega_{\min} \sim 0,03 \text{ сек}^{-1}$ . Если для  $\Delta\omega$  принять значение  $\sim 1 \text{ сек}^{-1}$ , то  $\delta H_{1e}/H_{1e}$  должно быть лучше, чем  $10^{-3}$ . По теоретическим оценкам [8] чувствительность ядерных гироскопов может составлять  $\Omega_{\min} \sim 10^{-6} \dots 10^{-8} \text{ сек}^{-1}$ . Требования к стабильности поля  $H_{1e}$  в этом случае значительно возрастают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Леше, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
2. A. Lösche, Ann. Phys., **20**, 178 (1957).
3. A. Carreri, G. Brescia, E. Grossetti, Ann. Phys., **19**, 205 (1967).
4. Г. Р. Хуцишвили, УФН, **71**, 9 (1960).
5. R. S. Codrington, N. Bloembergen, J. Chem. Phys., **29**, 600 (1958).
6. В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Тр. УПИ, **111**, 63 (1961).
7. А. А. Кокин, Г. В. Скроцкий, Геофизическое приборостроение, вып. 6, 22 (1960).
8. J. Holahan, Space Aeronautics, **5**, 120 (1959).

Ленинградский электротехнический  
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию  
8 января 1969 г.