ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 538.311

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЗА ФРОНТОМ ИОНИЗАЦИИ, ДВИЖУЩИМСЯ СО СКОРОСТЬЮ СВЕТА

В. В. Борисов

Получены соотношения, связывающие поперечные электромагнитные поля и скорость частиц за фронтом ионизации, движущимся со скоростью света. Рассмотрены продольные электрические колебания, найдены период колебаний, амплитуда и т. д.

После прохождения импульса жесткого излучения в результате процессов фотоионизации или комптоновского рассеяния возникает ионизированная область. Электромагнитные поля определяются в ней значениями скоростей и плотности заряженных частиц в момент их образования, длительностью импульса излучения и электромагнитными полями источников, расположенных вне плазмы. Граница ионизированной области при этом движется со скоростью света c. Простая задача, точное решение которой удается построить, имеет место в плоском случае, если считать импульс излучения бесконечно тонким, а скорость частиц и их плотность на фронте ионизации, а также величины полей вне плазмы не зависящими от времени и координат.

1. Пусть вдоль оси x декартовой системы координат, в ее положительном направлении, движется со скоростью света бесконечно тонкий импульс ионизирующего излучения — фронт ионизации. На фронте образуются заряженные частицы — ионы, движением которых пренебрегаем, и электроны, скорость которых v_0 направлена по оси x. Плазму за фронтом будем считать бесстолкновительной и полностью ионизированной. Постоянные и однородные внешние поля, магнитное и электрическое, вектор индукции и вектор напряженности которых соответственно равны $\boldsymbol{B}_0$ и $\boldsymbol{E}_0$, ортогональны друг другу и направлению распространения импульса излучения. Совместим координатные оси y и z с направлениями векторов $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$. В качестве исходных уравнений рассматриваемой задачи воспользуемся системой уравнений Максвелла, уравнением сохранения числа частиц и уравнением движения для электронов. Ищем решение, зависящее только от комбинации $\tau = t - x/c$ (τ — время, отсчитываемое с момента прихода фронта ионизации в точку наблюдения). Используя связь производных $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \tau}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial \tau}$, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial E_y}{\partial \tau} = \frac{\partial B_z}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial \tau} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + 4\pi e n v_y,$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} n v_x = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial \tau} + 4\pi e n v_x = 0,$$

$$\left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{vm}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = e\left\{E + \frac{1}{c}[vB]\right\},$$

где n — плотность электронов; E, B — вектор напряженности электрического и вектор индукции магнитного полей; v — вектор скорости в ионизированной области, т. е. при $\tau > 0$; e, m — заряд и масса электрона. В момент образования заряженных частиц

$$n = n_0, \quad v_y = 0, \quad v_x = v_{x0}, \quad \tau = 0. \tag{2}$$

Поля вне ионизированной области, т. е. при $\tau = -0$,

$$E_x = 0, \quad B_z = B_{z0}, \quad E_y = E_{y0}. \tag{2a}$$

Из первых двух уравнений системы (1) получим

$$\begin{gathered} B_z - E_y = B_{z0} - E_{y0}, \\ e n v_y = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

т. е. $v_y = 0$.

Таким образом, частицы обладают только продольной компонентой скорости. Остальные уравнения при условии $v_y = 0$, которое является следствием системы уравнений Максвелла при движении границы со скоростью света, примут вид

$$\begin{gathered} n = n_0(1 - v_{x0}/c)/(1 - v_x/c), \\ \frac{\partial E_x}{\partial \tau} = -4\pi e n v_x, \\ \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} = \frac{e}{m} E_x, \\ E_y - \frac{v_x}{c} B_z = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Для плотности частиц, их скорости и продольной компоненты электрического поля имеем независимую систему уравнений, найдя решение которой, определим поперечные электромагнитные поля из соотношений

$$B_z = \frac{B_{z0} - E_{y0}}{1 - v_x/c}, \quad E_y = \frac{(v_x/c)(B_{z0} - E_{y0})}{1 - v_x/c}. \tag{5}$$

Из первых трех уравнений системы (4) легко получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{v_x^2}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} - \frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} v_x = -\frac{1}{8\pi n_0 m (1 - v_{x0}/c)} \frac{\partial}{\partial \tau} E_x^2,$$

интегрируя которое, найдем связь продольной компоненты электрического поля и скорости частиц в виде

$$\frac{E_x^2}{\alpha^2\mathscr{E}_0}+\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0}=1,\qquad \alpha^2=8\pi n_0\left(1-\frac{v_{x0}}{c}\right), \tag{6}$$

$\mathscr{E}=mc^2/\sqrt{1-(v_x/c)^2}$ — полная энергия частицы в плазме.

Постоянная интегрирования $\mathscr{E}_0=mc^2/\sqrt{1-(v_{x0}/c)^2}$ определяется из условий (2) и равна полной энергии электрона в момент его образования, E_x^2/α^2 — энергия продольного электрического поля в объеме, равном $[n(1-v_x/c)]^{-1}$. Так как каждое слагаемое в правой части выражения (6) больше нуля, то скорость электронов в плазме не больше ее значения на фронте ионизирующего излучения, а максимальное значение энергии продольных колебаний электрического поля в объеме $[n(1-v_x/c)]^{-1}$ не превышает кинетической энергии частицы в момент образования. Квадрат максимального значения амплитуды продольного поля в двух предельных случаях $v_{x0}\to 0$ и $v_{x0}\to c$ стремится к нулю.

2. Величина продольной компоненты электрического поля меняется в ионизированной области в зависимости от времени, отсчитываемого с момента прихода фронта в точку наблюдения. Используя два первых уравнения системы (4) и (6), получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\alpha^2 c\,\frac{\left[1-\left(1-\beta_0^2\right)\left(1-E_x^2/\alpha^2\mathscr{E}_0\right)^{-2}\right]^{1/2}}{1-\left[1-\left(1-\beta_0^2\right)\left(1-E_x^2/\alpha^2\mathscr{E}_0\right)^{-2}\right]^{1/2}},$$

$$\beta_0=v_{x0}/c,$$

откуда

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(1-\beta_0)^{3/4}(1+\beta_0)^{1/4}\tau=-\frac{E_x}{\alpha\mathscr{E}_0^{1/2}}+\int\limits_0^{\frac{E_x}{\alpha\mathscr{E}_0^{1/2}}}\frac{du}{\left[1-\left(1-\beta_0^2\right)\left(1-u^2\right)^{-2}\right]^{1/2}}, \tag{7}$$

$\omega_0=(4\pi n_0e^2/m)^{1/2}$ — частота плазменных колебаний.

Интеграл, входящий в (7), приводится к комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода, в результате получаем

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\,\frac{(1-\beta_0)^{3/4}(1+\beta_0)^{1/4}}{\left[1-\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}}\tau=-\sin\varphi-\frac{\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}}{\beta_0}F(\varphi,k)+ \\ +\left[\frac{1+\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}}{1-\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}}\right]^{1/2}E(\varphi,k). \tag{8}$$

Здесь $F(\varphi,k)$ и $E(\varphi,k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно,

$$\varphi=\arcsin\frac{E_x}{\alpha\mathscr{E}_0^{1/2}\left[1-\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}},\qquad k=\left[\frac{1-\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}}{1+\left(1-\beta_0^2\right)^{1/2}}\right]^{1/2}$$

— амплитуда и модуль интеграла, причем $0\leqslant k<1$.

При малых скоростях заряженных частиц в момент их образования $k\ll 1$. Разложив $F(\varphi,k)$ и $E(\varphi,k)$ в ряд по степеням k^{2n} $(n=0,1,2,\dots)$, получим [1]

$$\omega_0\tau\simeq\beta_0\arcsin\varphi+\varphi.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка β_0, находим

$$E_x\simeq\sqrt{4\pi mn_0}\,v_{x0}\sin(\omega_0\tau), \\ v_x\simeq v_{x0}\cos(\omega_0\tau), \tag{9}$$

Таким образом, при малых начальных скоростях заряженных частиц в плазме за фронтом ионизации возникают продольные колебания, частота которых равна ω_0. Условие линеаризации рассматриваемой задачи $v_{x0} \ll c$.

3. Полученное решение (7) позволяет определить некоторые свойства продольной компоненты вектора электрического поля при больших скоростях электронов.

Используя известные функциональные соотношения [1]

$$F(n\pi \pm \varphi,\ k) = 2nK(k) \pm F(\varphi,\ k),$$

$$E(n\pi \pm \varphi,\ k) = 2nE(k) \pm E(\varphi,\ k),$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, из (8) получим выражение для периода продольных колебаний

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\omega_0}\,\frac{[1-(1-\beta_0^2)^{1/2}]^{1/2}}{(1-\beta_0)^{3/4}(1+\beta_0)^{1/4}}\left\{\left[\frac{1+(1-\beta_0^2)^{1/2}}{1-(1-\beta_0^2)^{1/2}}\right]^{1/2} E(k) - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\beta_0^2)^{1/2}}{\beta_0}\,K(k)\right\}.$$

При больших скоростях заряженных частиц ($\beta_0 \to 1$), используя разложение в ряд полных эллиптических интегралов по степеням $k' = (1-k^2)^{1/2}$ — дополнительного модуля, находим

$$T \simeq \frac{4\sqrt[4]{2}}{\omega_0}\,\frac{1}{(1-\beta_0)^{3/4}} \qquad (\beta_0 \to 1).$$

Таким образом, в релятивистском случае период продольных колебаний стремится к бесконечности как $(1-\beta_0)^{-3/4}$ при возрастании скорости электронов на фронте ионизации.

При малых скоростях ($\beta_0 \to 0$)

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{5}{16}\,\beta_0^2\right).$$

Время τ_0, при котором достигается максимальное значение амплитуды продольных электрических колебаний, найдем, положив в (8) $\varphi = \pi/2$:

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}\,\frac{[1-(1-\beta_0^2)^{1/2}]^{1/2}}{(1-\beta_0)^{3/4}(1+\beta_0)^{1/4}} \times$$

$$\times\left\{-1 - \frac{(1-\beta_0^2)^{1/2}}{\beta_0}\,K(k) + \left[\frac{1+(1+\beta_0^2)^{1/2}}{1-(1-\beta_0^2)^{1/2}}\right]^{1/2} E(k)\right\}.$$

Разложив полные эллиптические интегралы в ряды по степеням k и k', получим

$$\tau_0 \simeq \pi/2\omega_0, \qquad \beta_0 \ll 1,$$

$$\tau_0 \simeq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\,\frac{(1-\beta_0)^{1/4}}{\omega_0}, \qquad \beta_0 \to 1.$$

Итак, с увеличением скорости частиц положение максимума смещается к началу полупериода.

Определим «толщину» импульса продольных колебаний электрического поля $\Delta\tau$ как отношение

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} E_x d\tau / E_{x0}.$$

Интеграл вычисляется между двумя ближайшими нулями E_x, причем $\Delta p = e\int_{\tau_1}^{\tau_2} E_x d\tau$ есть приращение импульса частиц за этот интервал времени; E_{x0} — максимальное значение продольной компоненты электрического поля, в двух предельных случаях малых и больших скоростей квадрат его равен

$$E_{x0}^2 \simeq 4\pi n_0 mc^2\beta_0^2 \qquad (\beta_0 \ll 1),$$

$$E_{x0}^2 \simeq \frac{4}{\sqrt{2}} n_0 mc^2 \sqrt{1-\beta_0} \qquad (\beta_0 \sim 1).$$

Наибольшее значение E_{x0} достигает при $\beta_0 \simeq 0{,}863$.

Используя первые два уравнения системы (4) и связь E_x и v_x через (6), перейдем к интегрированию по E_x, тогда

$$\Delta p = \frac{2}{\alpha^2}\int_{E_x(\tau_1)}^{E_x(\tau_2)} E_x \left\{1 - \left[1 - \frac{1-\beta_0^2}{(1 - E_x^2/\alpha^2\mathscr{E}_0)^2}\right]^{-1/2}\right\} dE_x,$$

откуда

$$\Delta p = 2mc\frac{\beta_0}{(1-\beta_0^2)^{1/2}},$$

а «толщина» импульса

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}\frac{\beta_0}{(1-\beta_0^2)^{1/2}}\frac{1}{[1-(1-\beta_0^2)^{1/2}]^{1/2}}\left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right)^{1/4}.$$

При $\beta_0 \to 0$ $\Delta\tau \simeq 2/\omega_0$, а в релятивистском случае ($\beta_0 \simeq 1$)

$$\Delta\tau \simeq \frac{1}{\sqrt[4]{2}\,\omega_0}\frac{1}{(1-\beta_0)^{3/4}}$$

и стремится к бесконечности при $\beta_0 \to 1$ по такому же закону, что и период колебаний за фронтом ионизации.

4. Поперечные электромагнитные поля за фронтом ионизации определяются по формулам (5) через известную скорость электронов. При известной зависимости от времени для продольной компоненты электрического поля скорость электронов v_x может быть найдена с помощью (6). Очевидно, что v_x — периодическая функция времени, отсчитываемого с момента прихода фронта ионизирующего излучения в точку наблюдения, и период ее совпадает с периодом колебаний продольного электрического поля. Максимальное значение скорости электронов равно v_{x0} — скорости частиц в момент их образования.

При малых по сравнению со скоростью света скоростях, т. е. при $\beta_0 \ll 1$

$$B_z \simeq (B_{0z} - E_{0y})(1 + v_x/c),$$
$$E_y \simeq (B_{0z} - E_{0y})(v_x/c),$$

и слагаемые поперечных полей за фронтом ионизации, меняющиеся во времени, не превосходят $\beta_0(B_{0z} - E_{0y})$. В случае больших скоростей ($\beta_0 \simeq 1$) поперечные компоненты электромагнитных полей возрастают как $(1 - \beta_0)^{-1}$, причем при $\beta_0 \to 1$ их максимальные значения становятся равными и стремятся к бесконечности (5).

Таким образом, решение самосогласованной задачи приводит к поперечным полям, временная зависимость которых определяется начальными скоростями частиц и частотой плазменных колебаний в плазме. Внешние поперечные поля определяют только амплитуду электромагнитных колебаний за фронтом ионизации. Если вне ионизированной области выполняется условие $E_{0y} = B_{0z}$, то E_y- и B_z-компоненты полей в плазме равны нулю и за фронтом ионизации существуют только продольные электрические поля.

5. Предположение об ортогональности внешних полей друг другу не является обязательным при построении решения рассматриваемой задачи. Действительно, пусть угол между векторами $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ произволен, но как $\boldsymbol{E}_0$, так и $\boldsymbol{B}_0$ ортогональны направлению распространения ионизирующего излучения. Разложим векторы $\boldsymbol{B}_0$ и $\boldsymbol{E}_0$ на компоненты B_{0y}, B_{0z} и E_{0y}, E_{0z}. Из системы уравнений Максвелла для компонент B_y и E_z получим

$$v_{0z} = 0, \quad E_z + B_y = E_{0z} + B_{0y},$$

а из уравнения движения для электронов

$$E_z + \frac{v_x}{c} B_y = 0,$$

откуда

$$B_y = \frac{E_{0z} + B_{0y}}{1 - v_x/c},$$
$$E_z = -\frac{(v_x/c)(E_{0z} + B_{0y})}{1 - v_x/c}.$$

Для компонент E_y и B_z полученные ранее выражения (5) сохраняются.

Продольная компонента магнитного поля вне ионизированной области B_{x0} в плоской задаче не влияет на колебания за фронтом ионизации и, как непосредственно следует из системы уравнений Максвелла, $B_x = B_{x0}$.

Наличие внешнего продольного электрического поля E^1_{x0} усложняет анализ колебаний. Так, при малых скоростях частиц ($v_{x0} \ll c$) поперечные колебания за фронтом определяются формулами (5), (9), где скорость электронов в плазме равна

$$v_x \simeq v_{x0} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{e}{m} \frac{E^1_{x0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau).$$

В заключение автор благодарит В. Н. Красильникова за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, изд. АН СССР, М, 1941.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
13 августа 1968 г.

ELECTROMAGNETIC FIELDS BEHIND IONIZATION FRONT MOVING WITH THE LIGHT VELOCITY

V. V. Borisov

The relationships, connecting the transverse electromagnetic fields and the velocity of particles behind the ionization front moving with the light velocity, are derived. The longitudinal electric oscillations are considered. The period of oscillations, the amplitude, etc. have been found.