

УДК 621.372.8

ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ В ВИДЕ ВОЛНОВОДОВ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

*С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин,
Г. Г. Рогачева*

Как следует из теоретических расчетов и экспериментальных результатов, в резонаторах, образованных расширениями слабонерегулярных волноводов, путем соответствующего подбора их профиля может быть достигнута весьма эффективная селекция типов колебаний и, кроме того, может быть реализована заданная продольная структура высокочастотного поля основной моды.

Как известно ([1], гл. V), селективность (степень разрежения спектра собственных частот) открытых резонаторов, представляющих собой отрезки слабонерегулярных волноводов, зависит от их профиля. Например, бочкообразные резонаторы обладают, вообще говоря, более высокой степенью дискриминации мод, чем цилиндрические. Весьма эффективная селекция типов колебаний может быть достигнута и при использовании резонаторов с профилем, описанным в [2]. Примером таких систем, в частности, является расширение волновода, имеющее конечную длину. В настоящей статье обсуждаются некоторые аспекты теории и расчета резонаторов последнего типа.

1. Электромагнитное поле в слабонерегулярном волноводе (рис. 1) представляет собой набор волн, каждая из которых в данном сечении близка по структуре к волне соответствующего регулярного волновода (волновода сравнения), причем функция $f_s(z)$, описывающая продоль-

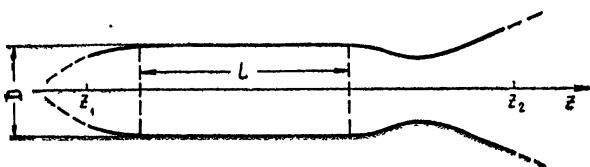


Рис. 1. Открытый резонатор, образованный расширением слабонерегулярного волновода.

ное распределение z -компоненты электрического (для E -волны) или магнитного (для H -волны) поля, удовлетворяет уравнению неоднородной струны [3]*:

$$\frac{d^2f_s}{dz^2} + h_s^2(\omega, z)f_s = 0, \quad (1)$$

* Этот метод, в определенном смысле, можно рассматривать как дополнительный к методу интегральных уравнений, используемому в теории квазиоптических систем [1]. В отличие от последнего он применим и к расчету систем с поперечными (относительно z -направления) размерами порядка λ и оказывается, как правило, более эффективным при исследовании квазиоптических резонаторов с большими параметрами Френеля.

где $h_s^2 = (\omega/c)^2 - x_s^2(z)$; ω — частота поля, зависящего от времени по закону $e^{i\omega t}$; c — скорость света; x_s — поперечное волновое число в волноводе сравнения; под s в дальнейшем будет подразумеваться совокупность трех или — для двумерной модели — двух индексов, характеризующих данную моду резонатора. Уравнение (1) эквивалентно уравнению, описывающему электромагнитную волну в волноводе с идеально проводящими цилиндрическими стенками, который заполнен средой с диэлектрической проницаемостью, зависящей только от z .

Собственным типам колебаний резонатора соответствуют решения уравнения (1), удовлетворяющие при $|z| \rightarrow \infty$ условиям излучения. Условия излучения могут быть наложены на поле и непосредственно вблизи резонатора (рис. 1) в точках $z = z_1$ и $z = z_2$, если известен входной импеданс для системы при $z < z_1$ и $z > z_2$, в частности, если везде при $z < z_1$ и $z > z_2$ сечения волновода значительно отличаются от критического, т. е.

$$|\operatorname{Re} h_s^2| \gg |\operatorname{Im} h_s^2|, \quad (2)$$

а его профиль меняется достаточно плавно:

$$\left| \frac{dh_s}{dz} \right| \ll |h_s^2|. \quad (3)$$

Ограничения (2) и (3) позволяют записать решение уравнения (1) в адиабатическом приближении

$$f_s = \frac{C_1}{\sqrt{h_s}} e^{i \int h_s dz} + \frac{C_2}{\sqrt{h_s}} e^{-i \int h_s dz} \quad (4)$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные). Если при этом сечение волновода больше критического ($\operatorname{Re} h_s^2 > 0$), поле в нем представляет собой волну, распространяющуюся от резонатора, в противоположном случае ($\operatorname{Re} h_s^2 < 0$) поле по мере удаления от резонатора экспоненциально убывает; соответственно один из коэффициентов C_1 или C_2 равен нулю и функция $f_s(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left[\frac{df_s}{dz} - ihs f_s \right]_{z=z_1} = 0; \quad (5)$$

$$\left[\frac{df_s}{dz} + ihs f_s \right]_{z=z_2} = 0, \quad (6)$$

причем $\operatorname{Re} h_s > 0$, если $\operatorname{Re} h_s^2 > 0$, и $\operatorname{Im} h_s < 0$, если $\operatorname{Re} h_s^2 < 0$.

Коэффициенты $ihs(\omega, z)$, входящие в граничные условия (5), (6), являются в общем случае комплексными функциями частоты, собственные колебания открытого резонатора оказываются затухающими ($\operatorname{Im} \omega \geq 0$); при этом добротность моды, как правило, тем ниже, чем более сложной («многогорбой») является ее продольная структура. Селективные свойства резонатора будем характеризовать относительной величиной разности собственных частот основной (с наибольшим продольным размером неоднородности поля) и близких к ней «паразитных» мод, а также отношением добротностей этих мод.

2. В принятом приближении в резонаторах, представляющих собой волноводы переменного сечения, может быть достигнута сколь угодно высокая степень подавления мод, отличающихся от основной только зависимостью от z . Действительно, уравнение (1) совпадает по виду

с уравнением Шредингера для частицы в потенциальном поле $V(z) \sim \kappa_s^2(z)$. Известно ([4], § 23), что, если потенциальный рельеф $V(z)$ представляет собой яму конечной глубины (рис. 2 в), уравнение (1) имеет конечное число дискретных действительных собственных значений, остальные решения принадлежат непрерывному спектру; по мере уменьшения глубины ямы число функций дискретного спектра сокращается и может быть доведено до единицы [4]. Рельефу $V(z)$, изображеному на рис. 2 в, соответствует резонатор, образованный расширением регулярного волновода (рис. 2 а), функциям дискретного спектра соответствуют моды с бесконечной добротностью*.

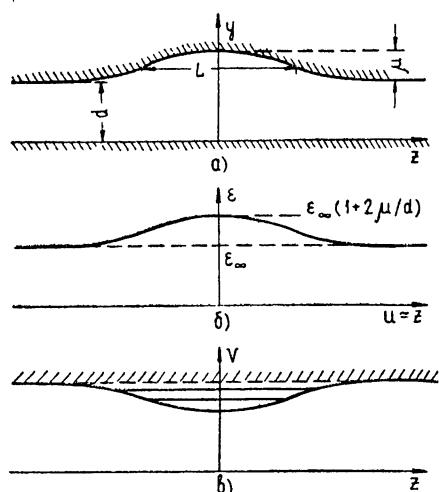


Рис. 2. Резонатор в виде отрезка нерегулярного волновода (а), соответствующее распределение диэлектрической проницаемости (б) и эквивалентный профиль потенциальной ямы для частицы (в).

$\mu \ll 1$). В таком резонаторе $\kappa_s^2 = \kappa_{s0}^2 [1 - 2(\mu/d) \operatorname{ch}^{-2}(z/L)]$, $\kappa_{s0} = p\pi/d$ ($p = 1, 2, 3, \dots$). Поля мод дискретного спектра локализованы по координате z :

$$f_s(z) = (\operatorname{ch} \zeta)^{q-N_0} U_s(\zeta) \quad (q = 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Здесь

$$\zeta = z/L, \quad N_0 = [2(\mu/d) \kappa_{s0}^2 L^2 + (1/4)]^{1/2} + (1/2),$$

$$U_s(\zeta) = F[1 - q, 2N_0 - q, N_0 - q + 1, (1 + e^{-2\zeta})^{-1}]$$

— гипергеометрическая функция. Число N собственных частот резонатора

$$\omega_s = c [\kappa_{s0}^2 + (\gamma_s/L)^2]^{1/2}, \quad (8)$$

принадлежащих дискретному спектру, ограничено:

$$N < N_0.$$

При

$$(\mu/d) \kappa_{s0}^2 L^2 < 1 \quad (9)$$

мода с $q = 1$ ($f_s = \operatorname{ch}^{1-N_0} \zeta$) является единственной модой дискретного спектра.

* В том же приближении в резонаторах конечной длины (например, цилиндрических и бочкообразных) достаточно сильное разрежение спектра собственных частот достигается при конечной добротности основной моды.

3. Предыдущие рассуждения были основаны на использовании уравнения (1), лишь приближенно описывающего электромагнитные поля в слабонерегулярном волноводе. В более высоком по параметру нерегулярности приближении имеет место связь между локализованными полями и бегущими волнами, принадлежащими непрерывному спектру; в результате добротности мод дискретного спектра оказываются конечными.

Вернемся к предыдущему примеру, ограничившись для определенности рассмотрением мод, имеющих единственную отличную от нуля компоненту электрического поля E , перпендикулярную плоскости (u , v). Заменой переменных

$$W = Z + (\mu/d) \operatorname{th}(Z/L), \\ W = u + iv, \quad Z = z + iy$$

преобразуем контур резонатора, на поверхности которого выполняется условие $E = 0$, в две параллельные прямые $v = 0$ и $v = d$ на плоскости (u , v). Волновое уравнение $\Delta E + k^2 E = 0$, будучи преобразованным к переменным u , v :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + k^2 \left| \frac{\partial Z}{\partial W} \right|^2 E = 0, \quad (10)$$

описывает электромагнитное поле в пространстве между двумя металлическими плоскостями, заполненным средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \left| \frac{dZ}{dW} \right|^2$.

В пренебрежении членами второго порядка малости по параметру d/L , что соответствует первому приближению теории слабонерегулярных волноводов [3], $\left| \frac{dZ}{dW} \right|^2$ зависит только от u (рис. 2 б), и решения (10) могут быть найдены методом разделения переменных:

$$E = f_s(u) \sin(x_{s0}v). \quad (11)$$

Здесь функции $f_s(u)$ с точностью до обозначения аргумента удовлетворяют уравнению (1) и для мод дискретного спектра определяются формулой (7). Поле (11) можно рассматривать как стоячую волну, образованную суперпозицией бегущих встречных волн, канализируемых в $\pm v$ -направлениях бесконечным по v диэлектрическим слоем с $\epsilon(v)$. Однако с точки зрения точного волнового уравнения (10) диэлектрическая проницаемость такого слоя зависит также и от v , причем является периодической функцией v . Если ее период d превышает $\lambda/2 = \pi c/\omega_s$ (т. е. при $p > 1$), часть энергии поля, найденного в первом приближении, излучается в $\pm u$ -направлениях посредством волн, соответствующих тем волнам непрерывного спектра в волноводе, для которых регулярная часть волновода не является закритической. Если по отношению к этим волнам нерегулярностью волновода можно пренебречь, т. е.

$$(\mu/d) p \ll 1,$$

то решению уравнения (10) с индексом $q = 1$ во втором порядке метода последовательных приближений соответствует комплексное собственное значение k_s^2 с мнимой частью

$$\operatorname{Im} k_s^2 = \operatorname{Re} k_s^2 \sum_{p'=1}^{p-1} C_{pp'}^2,$$

где

$$C_{pp'} = \frac{\mu k_s x_{pp'}^{1/2} d^2}{L^{3/2}} \frac{96 pp'}{(p^2 - p'^2)^2} \left[\frac{x_{pp'}^2 L^2 + (N_0 + 1)^2}{(N_0 + 1)(N_0 + 2)} - \frac{2}{3} \right] \times \\ \times \frac{\Gamma^{1/2}(2N_0 - 2)}{\Gamma(N_0 + 1) \Gamma(N_0 - 1)} \left| \Gamma \left[\frac{1}{2} (N_0 + 1 + ix_{pp'}, L) \right] \right|^2,$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, $x_{pp'} = \sqrt{k_s^2 - \pi^2 p'^2 / d^2}$.

Учитывая, что $\Gamma[(1/2)(N_0 + 1 + ix_{pp'}, L)] \sim \exp(-\pi x_{pp'} L/4)$, для добротности основной моды резонатора $Q = \operatorname{Re} k_s^2 / \operatorname{Im} k_s^2$ получаем оценку $Q \sim (\lambda^2 d / \mu^2 L) \exp[\pi^2(2p)^{1/2} (L/d)]$. Как видно из приведенного примера, в резонаторах, представляющих собой отрезки нерегулярных волноводов достаточно гладкого профиля, затухание собственных колебаний, связанное с переизлучением энергии в бегущие волны, может быть в принципе сколь угодно малым, и, следовательно, в таких системах может быть достигнута весьма эффективная селекция мод.

4. Описанный принцип может быть использован для разрежения спектра мод и в резонаторах конечной длины, что иллюстрируется результатами численного расчета* резонаторов в виде аксиально-симметричных труб различного профиля (рис. 3, 4).

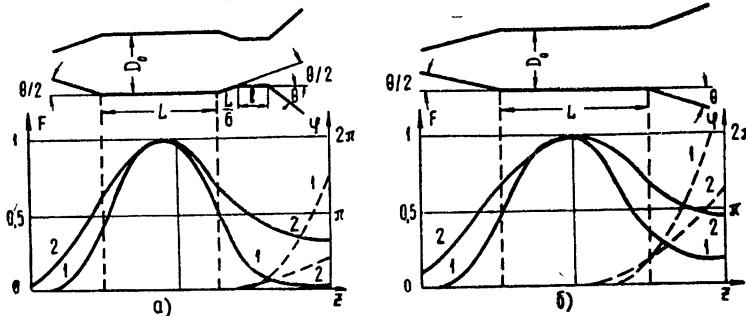


Рис. 3. Продольная структура поля $f_s(z) = Fe^{-i\phi}$ (F — сплошная линия, ϕ — пунктир) основной моды резонатора для значений параметров:
а) 1. $\xi = 36$, $l/L = 0$; 2. $\xi = 19$, $l/L = 0,23$; б) 1. $\xi = 36$; 2. $\xi = 6,6$.

* Приближенные аналитические методы применимы к расчету резонаторов лишь достаточно простого профиля. В частности, если резонатор представляет собой отрезок регулярного волновода, ограниченный в обоих концах сравнительно короткими нерегулярными участками (скакок диаметра [6], переход, эквивалентный диэлектрическому слою Эпштейна [7, 5], и т. п.), создающими отражение волн с коэффициентами $R_{1,2}(\omega) \approx -1$, то добротность низших типов колебаний резонатора определяется формулой $Q_s = \omega_s L / v_{rp} [1 - |R_1(\omega_s) R_2(\omega_s)|]$, где $v_{rp} = \pi q^2 c^2 / \omega_s L$ — групповая скорость волн, образующих поле резонатора, $\omega_s = \omega_{kp} (1 + q^2 \lambda_{kp}^2 / 8L^2)$, остальные обозначения те же, что в (13) и (14).

Расчет колебаний высокодобротного резонатора может быть произведен также путем «шивания» поля $f_s^0(z)$, найденного в пренебрежении дифракционными потерями, с удовлетворяющим условиям излучения (5), (6) полем сопряженного с резонатором расширяющегося волновода (метод, аналогичный описанному в [4], § 77). Если точка сопряжения z_0 находится в закритическом сечении, где оба поля удовлетворяют ограничению (3), добротность

$$Q = (\omega_s/c)^2 |f_s^0(z_0)|^{-2} |h_s(z_0)|^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_s^0|^2 dz \right]^{-1} \exp \left(2 \int_{z_0}^{z_{kp}} |h_s| dz \right).$$

Здесь z_{kp} — координата критического сечения во внешнем волноводе: $h_s(z_{kp}) = 0$.

Собственные частоты резонатора находились следующим образом. Уравнение (1) интегрировалось с граничным условием (5) в сечении $z = z_1$ при некоторой частоте ω , известной из приближенных расчетов. На основании найденного решения в сечении $z = z_2$ вычислялся параметр «невязки» $M = \left| \frac{df_s}{dz} + ih_s f_s \right|^2 \Big|_{z=z_2}$. Затем частота ω изменялась таким образом, чтобы минимизировать величину M . Поиск комплексных собственных значений ω производился методом градиентного спуска [8]*.

В соответствии с основным ограничением, обеспечивающим применимость уравнения (1), длина резонатора L должна быть достаточно большой, благодаря чему собственные частоты низших типов колебаний резонатора оказываются близкими к критическим частотам его цилиндрической части.

$$\omega_{kp} = 2\pi c/\lambda_{kp} = 2v_{mp}c/D_0. \quad (12)$$

Здесь D_0 — диаметр резонатора, v_{mp} — корень уравнения $J_m(v_{mp}) = 0$ (для E -мод) или $J'_m(v_{mp}) = 0$ (для H -мод), $J_m(x)$ — функция Бесселя.

Собственные частоты резонаторов, изображенных на рис. 3, являются функциями параметра нерегулярности трубы.

$$\xi = v_{mp}^2 (L/D_0)^3 \theta,$$

отношения L/λ_{kp} , а также (для резонаторов, изображенных на рис. 3 а) относительной длины l/L сужения, предназначенного для повышения селективности резонаторов.

Параметры δ'_1 и δ''_1 (пунктирная и сплошная кривые на рис. 4 а), найденные из решения уравнения (1) с условиями излучения (5), определяют собственную частоту

$$\omega_1 = [1 + \delta'_1(\lambda_{kp}/L)^2] \omega_{kp} \quad (13)$$

и добротность

$$Q_1 = (2\delta''_1)^{-1}(L/\lambda_{kp})^2 \quad (14)$$

основного (с продольным индексом $q = 1$) типа колебаний. Продольная структура поля основной моды изображена на рис. 3.

Параметры $\delta'_2 - \delta'_1$ и $\delta''_2 - \delta''_1$ (пунктирная и сплошная кривые на рис. 4 б) характеризуют селективные свойства резонатора: относительную разность резонансных частот для мод с $q = 1$ и $q = 2$

$$(\omega_2 - \omega_1)/\omega_{kp} = (\lambda/L)^2 (\delta'_2 - \delta'_1) \quad (15)$$

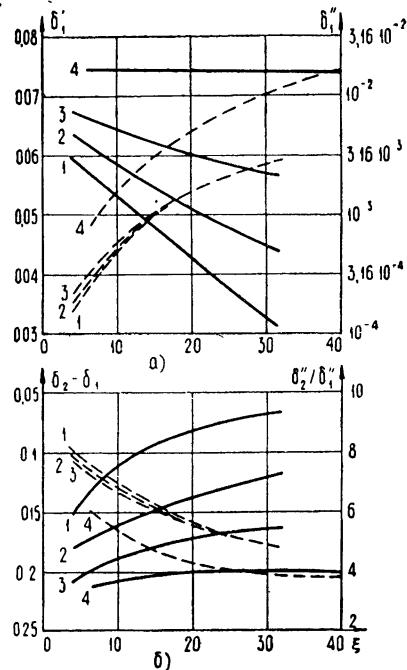


Рис. 4. Спектр резонаторов, изображенных на рис. 3а (1. $l/L=0,23$; 2. $l/L=0,115$; 3. $l/L=0$) и на рис. 3б (кривая 4).

* Собственную частоту и добротность данной моды резонатора можно также определить из резонансной кривой, полученной путем интегрирования уравнения (1) при действительных значениях частоты ω .

и отношение добротностей этих мод

$$Q_1/Q_2 = \delta''_2 / \delta''_1. \quad (16)$$

Приведенные данные позволяют находить для данного резонатора добротности мод с разной поперечной структурой поля.

Как видно из рис. 4 б, наиболее быстрое падение добротностей с увеличением продольного индекса q имеет место для собственных типов колебаний резонаторов, в которых поле основной моды «заперто» достаточно длинными регулярными сужениями, что согласуется с соображениями, изложенным в начале статьи. Наоборот, селективность резонаторов, изображенных на рис. 3 б, относительно невысока; в пределе при $\xi \rightarrow \infty$ величины добротностей, найденные численным интегрированием уравнения (1), стремятся к асимптотическим значениям ([1], § 78).

$$Q_s = \frac{8}{\beta_0 \sqrt{3}} \left(\frac{L}{\lambda_{kp}} \right)^2 \frac{(2\xi)^{1/3}}{q^2} \quad (\beta_0 = 1,37)$$

и убывают пропорционально q^{-2} , как и в цилиндрических резонаторах ([1], гл. V).

5. Уравнение (1) может быть, очевидно, использовано не только для отыскания собственных типов колебаний в резонаторе заданного профиля, но и при решении обратной задачи: для подбора конфигурации резонатора, поле одной из мод которого имеет заданную продольную структуру.

Однако функция $f_s(z)$ не может быть задана в произвольном виде, она должна быть достаточно плавной, непрерывной вместе со своими первой и второй* производными, удовлетворять условиям излучения

$$f_s f_s'' \rightarrow \pm (f'_s)^2 \quad (z \rightarrow \pm \infty), \quad (5a)$$

которые эквивалентны (5), (6); кроме того, $\text{Im}(f_s''/f_s)$ должна быть постоянной величиной. Так, например, для

$$f_s(z) = \begin{cases} v(\alpha_2) v(\alpha_1 - \beta_1 z) & (z < 0) \\ v(\alpha_1) v(\alpha_2 + \beta_2 z) & (z > 0) \end{cases}, \quad (17)$$

где $v(x)$ — функция Эйри [9], указанные условия приобретают вид

$$\alpha_1 \beta_1^2 = \alpha_2 \beta_2^2; \quad (18)$$

$$\beta_1 \frac{v'(\alpha_1)}{v(\alpha_1)} = -\beta_2 \frac{v'(\alpha_2)}{v(\alpha_2)}. \quad (19)$$

На основании (18) и (19) можно выразить постоянные α_1 и α_2 через отношение коэффициентов β_1 и β_2 ; функция $\alpha_1(\beta_1/\beta_2)$ приведена на рис. 5; зависимость $\alpha_2(\beta_1/\beta_2)$ может быть найдена с использованием (18). Поле, описываемое функцией (17), существует, в частности, в аксиально-симметричном резонаторе, образованном сочленением двух конусов**:

* Непрерывность $f_s''(z)$ исключает скачкообразные изменения сечения резонатора, приводящие к сильному переизлучению высокочастотной мощности в паразитные бегущие волны; в аксиально-симметричном резонаторе это условие может быть нарушено, если основная мода имеет радиальный индекс $p = 1$, а волны с тем же азимутальным индексом и $p > 1$ являются нераспространяющимися.

** Аналогичная задача рассматривалась в [10].

$$D - D_0 = \frac{D_0^3}{8v_{mp}^2} \begin{cases} \beta_1^3 z & (z < 0) \\ -\beta_2^3 z & (z > 0) \end{cases} \quad (20)$$

Здесь $D(z)$ — диаметр трубы, $D_0 = D(0)$; частота колебаний

$$\omega = \frac{2v_{mp}c}{D_0} + \frac{D_0 c}{4v_{mp}} \alpha_1 \beta_1^2.$$

Добротность колебаний в такой идеализированной системе является, естественно, бесконечной, однако продольная структура поля оказывается близкой к найденной численными методами структуре поля высокодобротных мод в сходном по профилю резонаторе с дифракционными потерями высокочастотной мощности (сравните кривые 1 и 1' на рис. 6 б); заметное отличие в конфигурации поля, рассчитанной разными методами, наблюдается лишь для низкодобротных мод (кривые 2 и 2' на рис. 6 б). Спектр резонатора, изображенного на рис. 6, приведен на рис. 7.

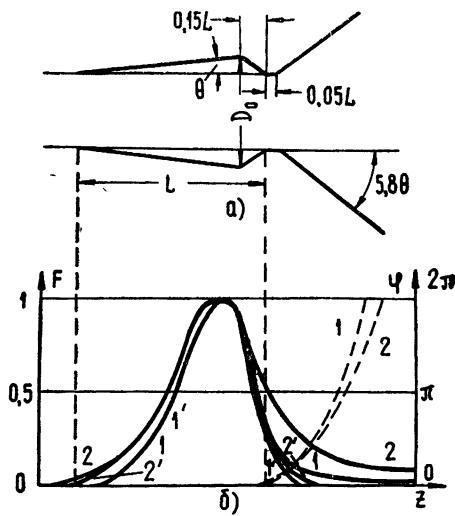


Рис. 6. Продольная структура поля $f_s(z) = Fe^{-i\varphi}$ (F — сплошная линия, φ — пунктир) основной моды резонатора, найденная численным методом (кривые 1 и 2) и на основании соотношений (17) — (20) (кривые 1' и 2') при значениях параметра ξ : 1. и 1'. $\xi=12$; 2. и 2'. $\xi=7$.

6. Результаты экспериментов, проведенных в диапазоне миллиметровых волн с несколькими аксиально-симметричными резонаторами длиной $L = (5 \div 10)\lambda$, в которых возбуждались моды H_{01q} , H_{02q} и H_{03q} , находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими расчетами. Отличие экспериментально найденных значений добротно-

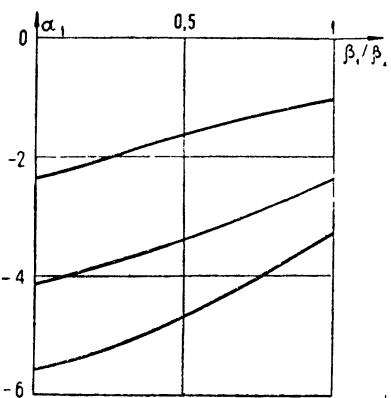


Рис. 5. Решение системы уравнений (18) и (19).

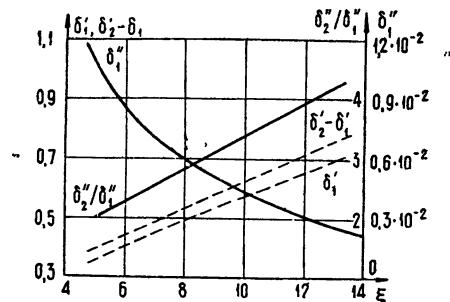


Рис. 7. Спектр резонатора, изображенного на рис. 6.

стей от рассчитанных теоретически, как правило, не превышало 30% и могло быть отнесено за счет неточностей изготавления резонаторов; измеренная структура высокочастотного поля качественно совпадала с расчетной.

Авторы признательны А. В. Гапонову и В. И. Таланову за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966
2. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 11, 943 (1966)
3. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
5. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1960, гл. 12, § 3.
6. А. Т. Фиалковский, ЖТФ, 36, 1101 (1966).
7. P. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci. Amer., 16, 627 (1930).
8. В. Л. Загускин, Справочник по численным методам решения уравнений, Физматгиз, М., 1960.
9. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М—Л., 1946.
10. G. Toraldo di Francia, Appl. Optics, 4, 1267 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 июня 1968 г.

IRREGULAR WAVEGUIDES AS OPEN RESONATORS

S. N. Vlasov, G. M. Zhislina, I. M. Orlova, M. I. Petelin, G. G. Rogacheva

It follows from theoretical calculations and experimental results that in resonators formed by widening of weakly-irregular waveguides by means of the corresponding choice of their profile there may be achieved an effective selection of modes. Besides, a prescribed longitudinal structure of the high-frequency field of the main mode may be realized.