

УДК 538.574.7

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ ВОЛНА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. И. Ланин

Исследуется волна интерференционного типа, возникающая в результате многократных отражений от гладкого неоднородного тела

Пусть некоторая выпуклая гладкая поверхность S является границей областей Ω_1 и Ω_2 , и скорости распространения волн в этих областях соответственно равны $c_1 = \text{const}$ и $c_2(x, y, z)$. В области Ω_1 помещен точечный источник (x_0, y_0, z_0) , излучающий стационарную волну $e^{-i\omega t}$. Предполагается, что $c_{20}(x, y, z) > c_1$ ($c_{20}(x, y, z)$ — значение скорости c_2 на поверхности S) и что $c_2(x, y, z)$ возрастает при удалении от поверхности S . В этом случае волны от источника, приходящие на поверхность S под углами ψ , близкими к углу полного отражения ψ_0 ($\psi \leq \psi_0$), преломляются в область Ω_2 распространяясь в Ω_2 вблизи поверхности S . Неоднократно отражаясь в области Ω_2 от S и вторично преломляясь при каждом отражении в область Ω_1 , волны с близкими оптическими путями интерферируют друг с другом, образуя в Ω_1 головную волну

Принято считать, что две волны интерферируют между собой, если разность их оптических путей Δ не превосходит длину волны λ ($\Delta \leq \lambda$). Если же $\Delta > \lambda$, то волны могут быть рассмотрены порознь с помощью, например, геометрических соображений. Известно [1], что криволинейные лучи в области Ω_2 , формирующие в Ω_1 головную волну интерференционного типа, распространяются в области Ω_2 вблизи поверхности S в слое толщиной порядка $\omega^{-2/3}$.

Описанная интерференционная волна в плоском случае изучена в [2]. Предложенная в [2] схема позволяет получить значение волнового поля в виде асимптотического ряда по степеням $\omega^{-1/3}$. В данной работе получено нулевое приближение ($\omega \rightarrow \infty$) для интерференционной волны в трехмерном случае.

1. Пусть волновые поля Ω_j ($j = 1, 2$) описываются соответственно функциями $U_j(x, y, z)$. Функции U_j должны быть решениями уравнений

$$\Delta U_1 + \omega^2 U_1 / c_1^2 = -\delta(M - M_0) \quad (M, M_0 \in \Omega_1); \quad (1a)$$

$$\Delta U_2 + \omega^2 U_2 / c_2^2(M) = 0 \quad (M \in \Omega_2) \quad (1b)$$

и удовлетворять условиям сопряжения

$$U_1|_S = U_2|_S, \quad \frac{1}{x_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} \Big|_S = \frac{1}{x_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} \Big|_S, \quad (2)$$

а также принципу предельного поглощения. В формулах (1a), (1b), (2) M, M_0 — точки расположения источника и наблюдателя, $\delta(M - M_0)$ —

функция Дирака, x_1, x_2 — постоянные, смысл которых определяется типом рассматриваемой задачи.

Для вывода формулы, описывающей интерференционную волну, необходимо прежде всего найти асимптотику решений однородных уравнений (1 а), (1 б).

Пусть лучи от источника, приходящие на поверхность S под углом полного отражения ψ_0 , встречаются с поверхностью вдоль некоторой гладкой кривой L_0 (расстояния по лучам от источника до кривой L_0 предполагаются равными друг другу). Распространяясь по поверхности, эти лучи образуют на S систему лучей. Будем считать, что вообще поле экстремалей функционала геометрической оптики

$$T = \int \frac{ds}{c_{20}(x, y, z)} \quad (ds \text{ — элемент длины дуги на поверхности } S)$$

совпадает с лучами на S . Примем экстремали функционала T за координатные линии $\alpha = \text{const}$, трансверсальные кривые — за координатные линии $\tau = \text{const}$ (рис. 1). Тогда положение точки $p \in S$ может быть описано координатами α, τ . Координату τ точки p будем отсчитывать от начальной трансверсальной кривой L_0 , за которую примем кривую

$$L_0 \left(\tau = \int_{p_0}^p \frac{ds}{c_{20}(x, y, z)}, \text{ где } p_0 \in L_0 \right).$$

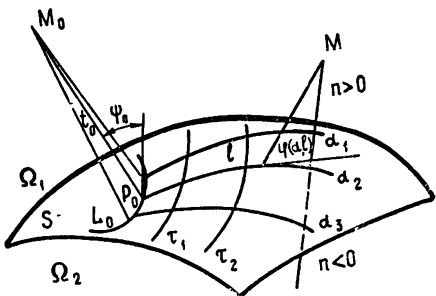


Рис. 1.

Точки области Ω_2 будем характеризовать координатами α, τ и координатой n , где n — нормаль к поверхности S ($n < 0, M \in \Omega_2$) (рис. 1). В координатах α, τ, n для элемента длины ds имеем

$$ds^2 = G_{ij} dq_i dq_j$$

$$(i, j = 1, 2, 3; q_1 \equiv \alpha, q_2 \equiv \tau, q_3 \equiv n),$$

где

$$G_{\alpha\alpha}(\alpha, \tau, n) = r_\alpha^2(\alpha, \tau) - 2nL + O(\omega^{-4/3}),$$

$$G_{\tau\tau}(\alpha, \tau, n) = r_\tau^2(\alpha, \tau) - 2nN + O(\omega^{-4/3}),$$

$$G_{\alpha\tau}(\alpha, \tau, n) = G_{\tau\alpha}(\alpha, \tau, n) = -2nM,$$

$$G_{\alpha n}(\alpha, \tau, n) = G_{n\alpha}(\alpha, \tau, n) = G_{\tau n}(\alpha, \tau, n) = G_{n\tau}(\alpha, \tau, n) = 0$$

($r = r(\alpha, \tau)$ — параметрическое задание поверхности S ; L, N, M — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S). Уравнение (1 б) в координатах α, τ, n запишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{G} G^{ij} \frac{\partial U_2}{\partial q_j} \right) + \frac{\omega^2}{c_{20}^2(\alpha, \tau, n)} U_2 = 0, \quad (3)$$

где $G = \det \| G_{ij} \|$, а G^{ij} — элементы матрицы $\| G^{ij} \| = \| G_{ij} \|^{-1}$.

Полагая

$$U_2(\alpha, \tau, n) = e^{i\omega\tau} V(\alpha, \tau, n, \omega), \quad (4)$$

подставим (4) в (3). Выпишем главные члены уравнения (3), т. е. получим параболическое уравнение для функции V . Предварительно выясним порядок соответствующих производных $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, 3$). Это

можно сделать, например, путем анализа решения задачи дифракции на шаре, в которой переменные разделяются. Анализ точного решения показывает, что при $\omega \rightarrow \infty$ производные $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ имеют следующие порядки по ω :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} \sim O(1), \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} \sim O(\omega^{1/3}), \quad \frac{\partial V}{\partial n} \sim O(\omega^{2/3}). \quad (5)$$

Поскольку мы интересуемся интерференционной волной, распространяющейся в области Ω_2 в полосе порядка $n \sim O(\omega^{-2/3})$, разложим функции $G(\alpha, \tau, n)$, $G^{ij}(\alpha, \tau, n)$ ($i, j = 1, 2, 3$) и $c_2^{-2}(\alpha, \tau, n)$ в уравнении (3) в ряды по степеням n . Сохраняя в (3) члены порядка $O(\omega^{4/3})$ и $O(\omega)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{2i\omega}{c_{20}^2(\alpha, \tau, 0)} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{i\omega}{J(\alpha, \tau, 0)c_{20}(\alpha, \tau, 0)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{J(\alpha, \tau, 0)}{c_{20}(\alpha, \tau, 0)} \right] V + \\ + \frac{\omega^2 n}{c_{20}^2(\alpha, \tau, 0)} \frac{2}{P(\alpha, \tau)} V = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При выводе уравнения (6) мы воспользовались следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} G^{\tau\tau}(\alpha, \tau, 0) &= c_{20}^{-2}(\alpha, \tau, 0), \\ G(\alpha, \tau, 0) &= c^2(\alpha, \tau, 0) J^2(\alpha, \tau, 0), \end{aligned}$$

где $J(\alpha, \tau, 0)$ — расходимость лучевой трубки на поверхности S . Величина $P(\alpha, \tau)$ в (6) играет роль эффективного радиуса кривизны кривых τ на поверхности S и связана с переменным радиусом кривизны $\rho(\alpha, \tau)$ этих кривых формулой

$$\frac{1}{P(\alpha, \tau)} = \frac{1}{\rho(\alpha, \tau)} - \frac{1}{c_{20}(\alpha, \tau)} \frac{\partial c_2(\alpha, \tau, n)}{\partial n} \Big|_{n=0}. \quad (7)$$

В силу сделанных предположений о выпуклости поверхности S и возрастании $c_2(\alpha, \tau, n)$ при уменьшении n эффективный радиус кривизны $P(\alpha, \tau) > 0$. Отметим, что для дальнейшего существенно лишь, что $P(\alpha, \tau) > 0$. Таким образом, при больших значениях градиента $-\frac{\partial c_2}{\partial n}$ поверхность S может быть вогнутой ($\rho(\alpha, \tau) < 0$), а при малых положительных $\rho(\alpha, \tau)$ может быть также и $-\frac{\partial c_2}{\partial n} < 0$.

Рассмотрим уравнение (6), в котором отсутствуют производные по координате α . Первые два слагаемых уравнения и его последний член имеют порядок $O(\omega^{4/3})$, третье слагаемое уравнения порядка $O(\omega)$. Отметим также, что при определении функции U_2 принимается во внимание следующее условие: в начальной точке p_0 фаза волны должна быть равна нулю, а амплитуда волны нормирована на единицу. Переменные в (6) не разделяются, однако уравнение может быть преобразовано к виду, допускающему разделение переменных [3]. Не останавливаясь на подробностях, опишем лишь схему преобразований. Перейдем в уравнении (6) от дифференцирования по τ к дифференцированию по длине луча s $\left(\frac{d}{d\tau} = c_{20}(\alpha, \tau) \frac{d}{ds} \right)$ и произведем подстановку вида $V = J^{-1/2} V_1$. В уравнении для V_1 введем переменную

$$\nu = 2^{1/3} \frac{\omega^{2/3}}{c_{20}^{2/3}(\alpha, s) P^{1/3}(\alpha, s)} n \quad (8)$$

($\nu \rightarrow \text{const}$ при $\omega \rightarrow \infty$) и положим $V_1 = \exp [i \nu^2 \omega^{-1/3} \varphi(\alpha, s)] V_2$. Выберем функцию $\varphi(\alpha, s)$ равной

$$\varphi(\alpha, s) = \frac{1}{2c_{20}(\alpha, s)} \left\{ \frac{d}{ds} [\ln (c_{20}^{2/3}(\alpha, s) P(\alpha, s))] \right\} \left(\frac{c_{20}^2 P}{2} \right)^{2/3}.$$

Тогда для V_2 получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial \nu^2} + \nu V_2 + \omega^{-1/3} \frac{i}{c_{20}(\alpha, s)} \left[\frac{c_{20}^2(\alpha, s) P(\alpha, s)}{2} \right]^{2/3} \left[2 \frac{\partial V_2}{\partial s} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{d}{ds} \ln \left(\frac{P}{c_{20}} \right) V_2 \right] = 0. \quad (9)$$

Интегрируя (9) и переходя снова к $U_2(\alpha, \tau, n)$, получим

$$U_2(\alpha, s, \nu) = A(\alpha, s) e^{i\Phi(\alpha, s)} \omega [\zeta - \nu + \omega^{-1/3} \zeta_1 + O(\omega^{-2/3})], \quad (10)$$

где

$$A(\alpha, s) = J^{-1/2}(\alpha, s) \left[\frac{c_{20}(\alpha, s) P(\alpha, 0)}{c_{20}(\alpha, 0) P(\alpha, s)} \right]^{1/6}, \\ \Phi(\alpha, s) = \omega \int_0^s c_{20}^{-1}(\alpha, x) dx + \omega^{1/3} \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{\zeta}{c_{20}^{1/3}(\alpha, x) P^{2/3}(\alpha, x)} dx + \\ + \frac{1}{2^{1/3}} \int_0^s \frac{\zeta_1}{c_{20}^{1/3}(\alpha, x) P^{2/3}(\alpha, x)} dx + O(\omega^{-1/3}).$$

Здесь ω — функция Эйри, ζ, ζ_1 — постоянные, определяемые из граничных условий.

2. Обратимся теперь к вычислению волнового поля в области Ω_1 . Для точек области Ω_1 введем координаты α, l , ортогональные на поверхности S , и координату

$$\xi = t + \int_0^l \cos [\varphi(\alpha, x)] dx,$$

где t — длина луча, идущего от поверхности S в точку наблюдения, $\varphi(\alpha, l)$ — угол, образованный этим лучом с касательной к координатной линии $\alpha = \text{const}$ на поверхности в точке отрыва луча от S (рис. 1).

Пусть связь декартовых координат x, y, z и криволинейных координат α, l, ξ задана соотношением

$$X = r(\alpha, l) + t^0(\alpha, l) t, \quad t = \xi - \int_0^l \cos [\varphi(\alpha, x)] dx,$$

$r = r(\alpha, l)$ — параметрическое задание поверхности S , $t^0(\alpha, l)$ — единичный вектор, направленный вдоль луча t . Вычислив $dx^2 = G_{ij} dq_i dq_j$, будем иметь элементы

$${}_j G_i (i, j = 1, 2, 3; q_1 \equiv \alpha, q_2 \equiv l, q_3 \equiv \xi),$$

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\alpha}(\alpha, l, \xi) &= X_\alpha^2, & G_{ll}(\alpha, l, \xi) &= X_l^2, \\
 G_{\alpha l}(\alpha, l, \xi) &= G_{l\alpha}(\alpha, l, \xi) = X_\alpha X_l, \\
 G_{l\xi}(\alpha, l, \xi) &= G_{\xi l}(\alpha, l, \xi) = X_l X_\xi = 0, \\
 G_{\alpha\xi}(\alpha, l, \xi) &= G_{\xi\alpha}(\alpha, l, \xi) = X_\alpha X_\xi = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Найдем главное приближение функции u_1 , удовлетворяющей однородному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{G} G^{ij} \frac{\partial u_1}{\partial q_j} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} u_1 = 0,
 \tag{12}$$

где функции G^{ij} — элементы матрицы $\|G^{ij}\| = \|G_{ij}\|^{-1}$, а G_{ij} определены формулой (11). Запишем функцию u_1 в виде аналога лучевого ряда:

$$u_1 = [A_0(\alpha, l, \xi) + \omega^{-1/3} A_1(\alpha, l, \xi) + \dots] \exp \left[i \frac{\omega}{c_1} \xi + i \sigma(\alpha, l) \omega^{1/3} \right].
 \tag{13}$$

Такое представление функции $u_1(\alpha, l, \xi)$ объясняется необходимостью найти ее связь через граничные условия (2) с решением $U_2(\alpha, \tau, n)$ описывающим волновое поле в Ω_2 вблизи поверхности S .

Подставим (13) в (12) и приравняем коэффициенты при различных степенях $\omega^{1/3}$. Для $A_0(\alpha, l, \xi), A_1(\alpha, l, \xi), \dots$ получим систему рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial A_0}{\partial \xi} \sqrt{G} + A_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{G} &= 0, \\
 2 \frac{\partial A_1}{\partial \xi} \sqrt{G} + A_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{G} &= -ic_1 \frac{A_0}{\sqrt{G}} \left[G_{ll} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2G_{\alpha l} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial l} + G_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial l} \right)^2 \right], \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Поскольку мы интересуемся главным приближением u_1 , проинтегрируем лишь уравнение для $A_0(\alpha, l, \xi)$. Получим

$$A_0(\alpha, l, \xi) = f_0(\alpha, l) [G(\alpha, l, \xi)]^{-1/4},$$

где

$$G(\alpha, l, \xi) = X_\alpha^2 X_l^2 - (X_l X_\alpha)^2,$$

а функция $f_0(\alpha, l)$, так же как и функция $\sigma(\alpha, l)$ в (13), определяется из граничных условий. Таким образом,

$$u_1(\alpha, l, \xi) = \frac{f_0(\alpha, l)}{\sqrt[4]{G(\alpha, l, \xi)}} \{ 1 + O(\omega^{-1/3}) \} \exp \left[i \frac{\omega}{c_1} \xi + i \sigma(\alpha, l) \omega^{1/3} \right].
 \tag{14}$$

На поверхности S функции u_1 и U_2 должны удовлетворять граничным условиям (2). В переменных α, l, ξ и α, s, ν (ν определено в (8)) условия (2) запишутся в виде

$$U_1 \Big|_{\xi = \int_0^l \cos [\varphi(\alpha, x)] dx} = U_2 \Big|_{\nu=0},$$

$$\frac{1}{x_1} \left\{ \sin [\varphi(\alpha, l)] \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{\cos [\varphi(\alpha, l)]}{\sin [\varphi(\alpha, l)]} \frac{\partial U_1}{\partial l} \right\} \Big|_{\xi=0}^l = \int_0^l \cos [\varphi(\alpha, x)] dx =$$

$$= \frac{1}{x_2} \omega^{2/3} \frac{2^{1/3}}{c_{20}^{2/3}(\alpha, s) P^{1/3}(\alpha, s)} \frac{\partial U_2}{\partial v} \Big|_{v=0}. \quad (15)$$

Подставим в (15) значения u_1 и U_2 (выражения (10) и (14)). Получим систему двух однородных уравнений, определитель Δ которой приравняем нулю. Из условия $\Delta=0$ следует, что $W(\zeta)=0$, т. е. $\zeta = \zeta_p$ ($p=1, 2, 3, \dots$) — нули функции Эйри, и

$$\zeta_1 = i 2^{1/3} \frac{x_1 c_1}{x_2 \sin [\varphi(\alpha, l)]} \frac{1}{c_{20}^{2/3}(\alpha, l) P^{1/3}(\alpha, l)}. \quad (16)$$

Так как $\Delta=0$, рассматриваем лишь первое уравнение системы. Приравняв в этом уравнении коэффициенты при различных степенях $\omega^{-1/3}$, для $\cos [\varphi(\alpha, l)]$, $\sigma(\alpha, l)$, $f_0(\alpha, l)$ с учетом (16), получаем

$$\sigma(\alpha, l) = \frac{\zeta_p}{2^{1/3}} \int_0^l \frac{dx}{c_{20}^{1/3}(\alpha, x) P^{2/3}(\alpha, x)},$$

$$f_0(\alpha, l) = i \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/3} \frac{\sqrt[4]{G(\alpha, l, 0)}}{\sin [\varphi(\alpha, l)]} \frac{x_1}{x_2} \frac{c_1 \varpi'(\zeta_p)}{c_{20}^{1/2}(\alpha, l) P^{1/2}(\alpha, l)} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{J(\alpha, l)}} \left[\frac{P(\alpha, 0)}{c_{20}(\alpha, 0)} \right]^{1/6} \exp \left\{ - \frac{x_1 c_1}{x_2} \int_0^l \frac{dx}{\sin [\varphi(\alpha, x)] c_{20}(\alpha, x) P(\alpha, x)} \right\},$$

$$\cos [\varphi(\alpha, l)] = \frac{c_1}{c_{20}(\alpha, l)}.$$

Используя значения этих функций, окончательно для волнового поля u_1 в области Ω_1 находим

$$u_1 = \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/3} B_p \Phi_0(\alpha, l, t) [1 + O(\omega^{-1/3})] \exp \left\{ i\omega \left[\int_0^l \frac{dx}{c_{20}(\alpha, x)} + \frac{t}{c_1} \right] + i\gamma(\alpha, l) \zeta_p \right\}, \quad (17)$$

где B_p — постоянная,

$$\Phi_0(\alpha, l, t) = \frac{x_1 c_1}{x_2} \sqrt[4]{\frac{G(\alpha, l, 0)}{G(\alpha, l, t)}} J^{-1/2}(\alpha, l) \times$$

$$\times \frac{[c_{20}(\alpha, l) P(\alpha, l)]^{-1/2}}{\sin [\varphi(\alpha, l)]} \exp \left\{ - \frac{x_1 c_1}{x_2} \int_0^l \frac{dx}{\sin [\varphi(\alpha, x)] P(\alpha, x) c_{20}(\alpha, x)} \right\},$$

$$\gamma(\alpha, l) = \left(\frac{\omega}{2} \right)^{1/3} \int_0^l \frac{dx}{c_{20}^{1/3}(\alpha, x) P^{2/3}(\alpha, x)}.$$

Ниже с помощью функции u_1 мы определим значение U_1 в области Ω_1 , соответствующее полю сосредоточенного источника. Отметим, что

выражение (17) для функций u_1 аналогично функциям u_1 , построенным в [2] для плоского случая. Отличие состоит лишь в том, что вместо функции $F_0(l, t)$ (формула (1.17) в [2]) в трехмерном случае получена функция $\Phi_0(\alpha, l, t)$, содержащая геометрические расходимости лучевых трубок на поверхности S и вне ее.

3 Дальнейший вывод формулы для интерференционной волны в трехмерном случае в точности совпадает с вычислением такой волны в плоском случае [2]. Поэтому мы приведем лишь основные промежуточные выражения и окончательный результат.

Функция U_1 , описывающая в Ω_1 поле точечного источника, составленная из функций (17) в виде контурного интеграла, равна

$$U_1(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0) = \left(\frac{2}{\omega}\right)^{1/3} \Phi_0(\alpha, l, t) \exp \left\{ i\omega \left[\int_0^l \frac{dx}{c_{20}(\alpha, x)} + \frac{t}{c_1} \right] \right\} \times \\ \times \int_L B(\zeta) \{1 + O(\omega^{-1/3})\} \exp [i\gamma(\alpha, l)\zeta] d\zeta \quad (18)$$

($\alpha_0 \equiv \alpha, 0, t_0$ — координаты источника). Из принципа взаимности, которому должно удовлетворять волновое поле U_1 , а также из сравнения функции U_1 с известным решением интерференционной задачи для двух однородных сред [4] заключаем, что функцию $B(\zeta)$ в (18) следует полсжить равной

$$B(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\omega}\right)^{2/3} \frac{x_1}{x_2} \frac{\Phi_0(\alpha_0, 0, t_0)}{v(\zeta)\omega_2(\zeta)} \exp \left(i \frac{\omega}{c_1} t_0 \right) \{1 + O(\omega^{-1/3})\},$$

а контур выбрать проходящим через точку $\zeta = 0$ по прямой $\infty \exp(4\pi i/3), \infty \exp(i\pi/3)$. Функции Эйри $v(\zeta), \omega_2(\zeta)$ определены формулами

$$v(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left(\zeta z - \frac{z^3}{3} \right) dz, \quad \omega_2(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty \exp(2\pi i/3)}^\infty \exp \left(\zeta z - \frac{z^3}{3} \right) dz.$$

Представляя далее функцию U_1 в виде волн геометрической оптики s_m , совершивших m отражений от границы в неоднородной среде и суммарной интерференционной волны S_M , получим

$$U_1(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0) + S_M(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0).$$

Волны геометрической оптики s_m ($0 \leq m \leq M-1$), пути которых в области Ω_2 близко расположены к поверхности S , вычисляются по методу перевала, если число M выбрать удовлетворяющим условию

$$\frac{\gamma(\alpha, l)}{2\sqrt{3}} - 1 < M \leq \frac{\gamma(\alpha, l)}{2\sqrt{3}}. \quad (19)$$

В результате для s_m имеет место формула

$$s_m(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0) \simeq \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega} \frac{x_2}{x_1} \Phi_0(\alpha, l, t) \Phi_0(\alpha_0, 0, t_0) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\gamma^{3/2}(\alpha, l)}{(m+1)^2} \exp(i\pi m/2) \exp\left\{i\omega \left[\frac{t_0}{c_1} + \int_0^l \frac{dx}{c_{20}(\alpha, x)} + \frac{t}{c_1}\right]\right\} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\gamma^3(\alpha, l)}{12(m+1)}\right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Интеграл S_M , описывающий головную интерференционную волну, при значениях M , указанных в (19), выражается через специальную функцию

$$G_M(\gamma) = \int_L \left[\frac{\omega_1(\zeta)}{\omega_2(\zeta)}\right]^M \frac{\exp(i\gamma\zeta)}{v(\zeta)\omega_2(\zeta)} d\zeta,$$

где $\omega_1(\zeta) = 2iv(\zeta) + \omega_2(\zeta)$. Функция $G_M(\gamma)$ протабулирована, таблицы ее приведены в работе [5].

Окончательная формула для вычисления интерференционной волны S_M имеет вид

$$\begin{aligned} S_M(\alpha, l, t, \alpha_0, 0, t_0) &= \frac{1}{2\pi\omega} \frac{x_2}{x_1} \Phi_0(\alpha, l, t) \Phi_0(\alpha_0, 0, t_0) \times \\ &\times \exp\left\{i\omega \left[\frac{t_0}{c_1} + \int_0^l \frac{dx}{c_{20}(\alpha, x)} + \frac{t}{c_1}\right]\right\} G_M(\gamma) \{1 + O(\omega^{-1/3})\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим еще, что функции $\Phi_0(\alpha, l, t)$ и $\Phi_0(\alpha_0, 0, t_0)$, входящие в (20), (21), содержат геометрические расходимости лучевых трубок, соответствующих лучам, исходящим из источника, лучам, распространяющимся на поверхности S , а также лучам, идущим с поверхности S в точку наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Булдырев, сб. Проблемы математической физики, вып. 2, изд. ЛГУ, 1967.
2. В. С. Булдырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 699 (1967).
3. В. М. Бабич, В. Ф. Лазуткин, сб. Проблемы математической физики, вып. 2, изд. ЛГУ, 1967.
4. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, ЖВММФ, 6, № 1, 90 (1966)
5. А. И. Ланин, сб. Записки научных семинаров, Лен. отд. матем. института им. В. А. Стеклова, АН СССР, 9 (1968).

Ленинградское отделение математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
10 сентября 1968 г.

INTERFERENCE WAVE IN THE PROBLEM OF DIFFRACTION ON INHOMOGENEOUS BODY WITH ARBITRARY BOUNDARIES

A. I. Lanin

The interference wave occurring as a result of multiple reflections from a smooth inhomogeneous body is investigated.