ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 538.574.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ ТЕЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. Г. Рамм

Предложены некоторые новые методы решения задач о рассеянии волн на малых телах в случаях большой и малой диэлектрической проницаемости, а также на металлических телах

В разнообразных задачах физики, геофизики, коллоидной химии, радиоизмерений возникает необходимость вычислить характеристику рассеяния электромагнитных волн на телах, характерный размер которых a мал по сравнению с длиной волны λ_0 падающего поля. В литературе [1–4] поставленная задача подробно разобрана в случае, когда рассеивающее тело является сферой. При этом во многих работах используется точное решение задачи дифракции на сфере [3, 5]. В ряде работ [1, 2] используется представление характеристики рассеяния в виде дипольного электрического и магнитного излучений.

В настоящее время вычислены электрический и магнитный дипольные моменты эллипсоида, шара и диска на основе решения статических задач [1], а также найдено приближенное значение дипольного момента цилиндра длиной $2l$ и радиуса a при $l \gg a$ [1, 6].

В данной работе приведены некоторые новые выражения для характеристики рассеяния на малых телах произвольной формы, причем в полученные формулы входят лишь известные величины (вектор падающего поля, коэффициент, определяемый геометрией тела, диэлектрическая и магнитная проницаемости ε, μ и проводимость σ тела, диэлектрическая и магнитная проницаемости ε_0, μ_0 среды). В дальнейшем будут рассмотрены следующие случаи:

1) $|\varepsilon'| = \left|\varepsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}\right| \gg 1, \qquad \lambda_0 \gg a, \quad \delta \gg a, \quad \delta = \sqrt{\dfrac{2}{|\varepsilon'|\mu\omega^2}};$

2) $|\varepsilon'| \gg 1, \quad \lambda_0 \gg a, \quad \delta \ll a;$

3) $\left|\dfrac{\varepsilon' - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right| \ll 1, \qquad \left|\dfrac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right| \ll 1.$

Здесь δ — глубина проникновения поля в тело, $\delta \sim \lambda$, где $\lambda = \lambda_0/\sqrt{|\varepsilon'\mu|}$ — длина волны в теле. При произвольных соотношениях между δ и a вряд ли можно рассчитывать на получение пригодных формул даже в случае $\lambda_0 \gg a$, $|\varepsilon'| \gg 1$. Отметим, что метод, с помощью которого будет рассмотрен случай 3), изложен, например, в [3, 4]. В отличие от работ [3, 4] мы доказываем сходимость и даем оценку погрешности.

В работе дан сходящийся со скоростью геометрической прогрессии метод решения основных статических задач. С помощью этого метода дипольные электрический и магнитный моменты могут быть вычисле-

ны для тел произвольной формы принципиально с любой точностью. Этот результат излагается во второй части работы.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

1. Будем исходить из строгой постановки задачи дифракции в электродинамике. Однородное малое тело D с поверхностью Γ и постоянными ε, μ, σ помещено в однородную бесконечную среду с постоянными ε_0, μ_0, $\sigma_0=0$. Поле возбуждается заданными сторонними токами $\boldsymbol{j}_{\text{ст}}$, которые сосредоточены вне тела. Зависимость полей от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E} \qquad (\text{внутри } D),\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = i\omega\mu_0\boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_{\text{ст}} \qquad (\text{вне } D). \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ на поверхности Γ мы не выписываем, считая их известными.

Если $\sigma=\infty$ (это возможно лишь в случае 2)), то уравнения (1) следует рассматривать лишь вне D, при этом на поверхности $[\boldsymbol{nE}]|_\Gamma = 0$.

Рассмотрим вначале случай 1), когда размеры тела значительно меньше длины волны в этом теле. Обозначим через $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ поля, которые порождаются токами $\boldsymbol{j}_{\text{ст}}$ в том случае, когда тело D отсутствует (т. е. $\varepsilon'=\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $\sigma=0$). Эти поля, как известно, вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{j}_{\text{ст}}); \tag{2}$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_0, \tag{3}$$

где

$$\boldsymbol{A}_0 = \int \Psi(x, y)\,\boldsymbol{j}_{\text{ст}}(y)\,dy, \qquad \Psi \equiv \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \qquad k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0. \tag{4}$$

Здесь интеграл берется по области, занятой сторонними токами. Решение задачи 1) может быть записано в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1. \tag{5}$$

По теореме эквивалентности

$$\boldsymbol{E}_1 = i\omega\mu_0\boldsymbol{A} - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \operatorname{rot}\boldsymbol{F}; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{F} - \frac{1}{i\omega\mu_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{-i\omega\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \tag{7}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \int_\Gamma \Psi(x, s)\,[\boldsymbol{nH}_1]\,ds, \qquad \boldsymbol{F} = -\int_\Gamma \Psi(x, s)\,[\boldsymbol{nE}_1]\,ds, \tag{8}$$

$\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ, ds — элемент площади поверхности.

2. При выполнении условий 1) кажется естественным следующий путь решения поставленной задачи вычисления характеристики рассеяния. Полагаем $[\boldsymbol{nE}_1]|_\Gamma = -[\boldsymbol{nE}_0]|_\Gamma$, так как $|\varepsilon'|\gg 1$, и $[\boldsymbol{nH}_1]|_\Gamma = 0$ в силу того, что $\delta \gg a$. Подставляем эти значения в формулы (6) и (8) и вычисляем характеристику рассеяния по формуле

$$f_E(x^0) = \lim_{|x|\to\infty} |x|\, e^{-ik|x|} E_1(|x|, x^0), \qquad x^0 = \frac{x}{|x|}. \tag{9}$$

Однако такой путь неверен. В этом можно убедиться, например, приняв во внимание, что полученная указанным способом характеристика рассеяния дает неправильное значение модуля дипольного момента и, следовательно, сечения рассеяния в случае, когда D — шар. Поэтому указанные выше приближения для $[nE_1]$ и $[nH_1]$ являются слишком грубыми.

Для вычисления характеристики рассеяния в предположении 1), позволяющем пренебречь магнитным дипольным излучением, воспользуемся известной формулой

$$f_E = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}[x^0[Px^0]], \qquad P = \int_\Gamma s\,\sigma(s)\,ds, \tag{10}$$

где P — дипольный момент проводника D, внесенного в электрическое постоянное поле $E_0 = E_0(y_0)$, y_0 — точка, в которой находится тело D, $\sigma(s)$ — поверхностная плотность заряда. (Положение тела можно характеризовать одной точкой, так как $a \ll \lambda_0$.) Формула (10) верна в предположении $a \ll \lambda_0$, $a \ll \delta$. Если $a \ll \lambda_0$, но $\delta \ll a$, то в правую часть (10) надо добавить член, соответствующий магнитному дипольному излучению. Формула (10) сводит задачу к вычислению дипольного момента проводника D в постоянном электростатическом поле E_0. Дипольный момент вычислен лишь для эллипсоидов, включая предельные случаи диска и тонкой иглы (см. [1]).

Чтобы пользоваться величиной, зависящей лишь от формы тела D, но не от поля E_0, введем тензор поляризуемости α_{ij} с помощью формулы

$$P_i = \alpha_{ij} V E_{0j}, \tag{11}$$

V — объем тела D. По повторяющимся индексам здесь и всюду ниже надо суммировать.

Для проводящего шара, например, $\alpha_{ij} = 3\delta_{ij}$, где δ_{ij} — единичный тензор (в абсолютной системе единиц $\alpha_{ij} = 3\delta_{ij}/4\pi$), для диэлектрического шара $\alpha_{ij} = 3(\varepsilon-1)\delta_{ij}/(\varepsilon+2)$.

Для вычисления тензора поляризуемости в случае проводника произвольной формы используем доказанное ниже (см. раздел 2) утверждение: плотность зарядов σ, индуцированных на поверхности Γ проводника, может быть определена с помощью сходящегося итерационного процесса [12]

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \qquad \sigma_0 = 2(E_0 n_s), \qquad \sigma_{n+1} = -A\sigma_n + 2(E_0 n_s), \tag{12}$$

где оператор A определен равенством (30) (см. ниже).

Возьмем в качестве приближения для σ величину σ_1. Получим

$$P_i = \int_\Gamma \sigma(s)\, s_i\, ds = \int_\Gamma ds s_i \left[2E_{0j} n_j(s) - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s}\frac{1}{2\pi r_{st}} 2E_{0j} n_j(t) dt\right] = \alpha_{ij} V E_{0j},$$

$$r_{st} = |s - t|.$$

Здесь s_i — декартовы координаты точки s, $n_j(t)$ — проекции нормали в точке t на декартовы оси,

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V}\left[2\int_\Gamma s_i\, n_j(s)\, ds - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma s_i\, n_j(t) \frac{\partial}{\partial n_s}\frac{1}{r_{st}}\, ds dt\right].$$

Используя формулу Остроградского—Гаусса, можем записать

$$\int_\Gamma s_i\, n_j(s)\, ds = \int_D \frac{\partial y_i}{\partial y_j}\, dy = \delta_{ij} V,$$

$$\int_\Gamma dt n_j(t) \int_\Gamma s_i \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{r_{st}}\, ds = \int_\Gamma dt n_j(t) \Big(\int_\Gamma \frac{\partial s_i}{\partial n_s} \frac{1}{r_{st}}\, ds -$$

$$- 2\pi t_i \Big) = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{n_i(s)\, n_j(t)}{r_{st}}\, ds\, dt - 2\pi V \delta_{ij}.$$

Следовательно*,

$$\alpha_{ij} = 4\delta_{ij} - \frac{1}{\pi V} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{n_i(s)\, n_j(t)}{r_{st}}\, ds dt = 4\delta_{ij} + \frac{1}{\pi V} \int_D dz \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \int_D \frac{dy}{r_{zy}}. \tag{13}$$

Формула (13) дает приближенное значение тензора поляризуемости проводника произвольной формы. Погрешность этой формулы, согласно результатам раздела 2, не больше чем $|\lambda_1/\lambda_2|^2$. Например, для случая, когда поверхность Γ — сфера радиуса a, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_1/\lambda_2|^2 = 1/9$. Это проверяется и непосредственным подсчетом по формуле (13), который для сферы приводит к результату $\alpha_{ij} = 8\delta_{ij}/3$. При проведении счета удобно использовать значение интеграла $\int\limits_{|y|\leqslant a} \frac{dy}{r_{zy}} = 2\pi(a^2 - |z|^2/3)$, $|z| \leqslant a$. Точное значение тензора в этом случае известно и равно $\alpha_{ij} = 3\delta_{ij}$, а погрешность — 1/9. Формулы (10), (11), (13) решают поставленную задачу в предположении 1).

3. Если выполнены условия 2), то магнитное дипольное излучение надо учитывать. В этом случае характеристика рассеяния может быть вычислена по формуле (32) раздела 2, в которую следует подставить электрический момент $\boldsymbol{P}$, вычисленный по формулам (11), (13), и магнитный момент $\boldsymbol{M}$, который вычисляется следующим образом (аналогично изложенному в п. 2):

$$M_i = \beta_{ij} V H_{0j}; \tag{14а}$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{\pi V} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{n_i(s)\, n_j(t)}{r_{st}}\, ds dt = \frac{1}{\pi V} \int_D dz \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \int_D \frac{dy}{r_{zy}}. \tag{14б}$$

Формулы (11), (13), (14), (32) решают поставленную задачу в предположении 2). При получении (14б) было использовано следующее приближение для плотности магнитных зарядов:

$$\sigma = \sigma_1 = -2(\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{n}) - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{2\pi r_{st}} [2(\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{n}_t)]\, dt,$$

---

* Аналогично выводится формула для n-го приближения:

$$\alpha_{ij}^{(n)} = 2(n+1)\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (n-k+1) L_k, \quad \text{где } L_k = \frac{1}{2^{k-1} \pi^k V} \times$$

$$\times \int_\Gamma \int_\Gamma ds d\xi\, n_i(s)\, n_j(\xi) \underbrace{\int_\Gamma \ldots \int_\Gamma}_{k-1} \Big(\frac{\partial}{\partial n_{t_{k-1}}} \frac{1}{r_{\xi t_{k-1}}} \Big) \times$$

$$\times \Big(\frac{\partial}{\partial n_{t_{k-2}}} \frac{1}{r_{t_{k-1} t_{k-2}}} \Big) \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial n_{t_1}} \frac{1}{r_{t_2 t_1}} \Big) \frac{1}{r_{t_1 s}}\, dt_1 \ldots dt_{k-1}.$$

вытекающее из (31). В остальном вычисления совпадают с приведенными при выводе формулы (13).

Магнитный момент, вычисленный нами,—это момент, наводимый в сверхпроводнике D, помещенном в магнитостатическое однородное поле $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}_0(y_0)$. Для сферы радиуса a вычисления по формуле (14) приводят к значению $\beta_{ij} = -(4/3)\,\delta_{ij}$, точное значение тензора β_{ij} в этом случае равно $\beta_{ij} = -(3/2)\,\delta_{ij}$.

Отметим, наконец, следующее. Вычисление характеристики рассеяния на металлическом теле сводится к нахождению токов $[\boldsymbol{nH}]|_\Gamma$ на поверхности Γ этого тела. Если $a \ll \lambda_0$, то хорошим приближением для токов является равенство

$$\boldsymbol{j} = [\boldsymbol{nH}]|_\Gamma \simeq [\boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{H}}]|_\Gamma, \tag{15}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ — магнитное поле вокруг сверхпроводника D, внесенного в статическое магнитное поле $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}_0(y_0)$ (см. [1], стр. 242).

Итерационный алгоритм вычисления поля $\widetilde{\boldsymbol{H}}$, сходящийся не медленнее геометрической прогрессии, построен в разделе 2. Правильное значение магнитного момента $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma [\boldsymbol{sj}]\,ds$ получаем с помощью аппроксимации (15) (например, в случае шара это легко проверить, используя известное значение $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ [1], стр. 246). Однако электрический момент получается при этом, вообще говоря, неверным (см. Приложение 3).

4. Рассматривая случай 3), заметим, что теперь мы имеем дело с малыми возмущениями свойств среды в объеме тела. Различные варианты рассмотрения подобных случаев имеются в литературе [3, 4]. Здесь предлагается способ, основанный на приведении задачи к интегро-дифференциальным уравнениям с малым параметром, причем дается оценка погрешности приближенного решения, отсутствующая в литературе. Для получения этих уравнений напишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= i\omega\mu_0 \boldsymbol{H} + i\omega(\mu-\mu_0)\,\eta_D(x)\,\boldsymbol{H}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_{\text{ст}} - i\omega(\varepsilon'-\varepsilon_0)\,\eta_D(x)\,\boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\eta_D(x) = \begin{cases} 0 & (x \,\overline{\subset}\, D) \\ 1 & (x \subset D) \end{cases}$. Введем обозначения $\boldsymbol{j}_{\text{м}} = -i\omega(\mu-\mu_0)\eta_D \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}_{\text{э}} = -i\omega(\varepsilon'-\varepsilon_0)\,\eta_D\,\boldsymbol{E}$. Написанные эквивалентные электрический и магнитный токи порождают потенциалы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= -i\omega(\varepsilon'-\varepsilon_0)\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,\boldsymbol{E}(y)\,dy, \\ \boldsymbol{F} &= -i\omega(\mu-\mu_0)\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{|x-y|}\,\boldsymbol{H}(y)\,dy. \end{aligned} \tag{17}$$

Векторы $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\boldsymbol{j}_{\text{э}} - \operatorname{rot}\boldsymbol{F}; \tag{18}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{-i\omega\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \frac{1}{i\omega\mu_0}\boldsymbol{j}_{\text{м}} + \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{19}$$

Отсюда интегро-дифференциальные уравнения имеют вид

$$E(x) = E_0(x) + \frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,\mathrm{rot\,rot}\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,E(y)\,dy -$$
$$-\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,\eta_D(x)\,E(x) + i\,\omega(\mu-\mu_0)\,\mathrm{rot}\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,H(y)\,dy; \tag{20а}$$

$$H(x) = H_0(x) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\,\mathrm{rot\,rot}\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,H(y)\,dy -$$
$$-\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\,\eta_D(x)\,H(x) - i\,\omega(\varepsilon'-\varepsilon_0)\,\mathrm{rot}\int\limits_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}\,E(y)\,dy. \tag{20б}$$

Как показано в Приложении 1, эти уравнения можно решать методом итераций; этот метод сходится, если величина

$$\Delta \equiv \left|\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\right| + \left|\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right| + \omega k_0 a(|\mu-\mu_0|+|\varepsilon'-\varepsilon_0|) + k_0^2 a^2\left(\left|\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\right| + \left|\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right|\right) \tag{21}$$

достаточно мала по сравнению с единицей. В данной работе мы ограничимся нулевым приближением.

Из (20) с помощью вычислений, аналогичных уже встречавшимся, получаем выражение для характеристики рассеяния в виде

$$f_E = -\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,k_0^2\left[x^0\left[x^0\times\frac{1}{4\pi}\int\limits_D \exp[-ik_0(x^0y)]\,E(y)\,dy\right]\right] +$$
$$+\,\omega(\mu-\mu_0)\,k_0\left[x^0\times\frac{1}{4\pi}\int\limits_D \exp[-ik_0(x^0y)]\,H(y)\,dy\right].$$

В первом приближении можно положить $E = E_0$, $H = H_0$. В результате получим

$$f_E = -\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\,k_0^2 g[x^0[x^0E_0]] + \omega(\mu-\mu_0)\,k_0 g[x^0H_0], \tag{22}$$

где g определено формулой $g = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \exp[-ik_0(x^0y)]\,dy$*.

Оценим погрешность приближенного равенства $E = E_0$, решая уравнение (20) методом последовательных приближений, причем в роли малых параметров выступают стоящие перед интегралами множители.

Можно убедиться (см. Приложение 1) в том, что сумма трех последних слагаемых в правой части уравнений (20 а) и (20 б) есть ограниченный оператор в пространстве L_2 ($\mathscr{E}_3$, $1/(1+|x|^\gamma)$) вектор-функций E или H ($\gamma > 0$ — произвольное число, $\mathscr{E}_3$ — все трехмерное пространство), причем норма этого оператора в указанном пространстве мала: она имеет порядок величины Δ, определенный формулой (21). Эта величина и является погрешностью приближенного равенства $E = E_0$. Величина μ обычно считается вещественной.

---

* Для шара радиуса a величина $g = a^3\,\frac{\sin(ka) - ka\cos(ka)}{(ka)^3}$. Для цилиндра длиной $2L$ радиуса a $g = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin(kL\cos\theta)}{k\cos\theta}\,\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}$, где θ — угол между осью цилиндра и ортом x^0.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРО- И МАГНИТОСТАТИКИ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Для того, чтобы использовать формулу (15), надо знать поле $\widetilde{H}$. Это поле является решением магнитостатической задачи о внесении сверхпроводника (тела D) в статическое внешнее поле H_0, которая ставится следующим образом. Требуется найти решение системы, равное

$$\widetilde{H} = H_0 + H_1, \tag{23}$$

удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{rot} H_1 = 0, \tag{24}$$

$$\operatorname{div} H_1 = 0 \tag{25}$$

вне D.

Поле H_1 удовлетворяет условию излучения на бесконечности, а поле $H_0 = H_0(r_0)$ определено в п. 3. Граничное условие на поверхности Г сверхпроводящего тела D имеет вид [1]

$$\widetilde{H}_n = 0, \tag{26}$$

где $\widetilde{H}_n$ — нормальная составляющая поля на поверхности Г. Отметим, что задача о сверхпроводнике в статическом магнитном поле формально эквивалентна задаче электростатики в случае, когда диэлектрическая постоянная тела равна нулю (см. [1], стр. 222).

Для решения поставленной задачи введем скалярный потенциал так, что

$$H_1 = -\nabla\varphi_1, \qquad H_0 = -\nabla\varphi_0, \qquad \varphi_0 = -(H_0 r), \tag{27}$$

где r — радиус-вектор. Тогда

$$\Delta\varphi_1 = 0 \qquad (\text{вне } D), \qquad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{\Gamma} = -\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{\Gamma}, \tag{28}$$

n — направление внешней нормали к поверхности Г. Введем потенциал простого слоя магнитных зарядов:

$$\varphi_1 = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(s)}{4\pi|x-s|}\, ds. \tag{29}$$

Тогда, как известно, функция σ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\sigma(s_0) = A\sigma + 2\frac{\partial\varphi_0}{\partial n_{s_0}}, \qquad A\sigma \equiv \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \frac{1}{2\pi|s_0-s|}\,\sigma\, ds. \tag{30}$$

Можно доказать (см. Приложение 2), что уравнение (30) однозначно разрешимо сходящимся со скоростью геометрической прогрессии методом итераций по схеме [12]

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \qquad \sigma_0 = 2\frac{\partial\varphi_0}{\partial n_{s_0}}, \qquad \sigma_{n+1} = A\sigma_n + 2\frac{\partial\varphi_0}{\partial n_{s_0}}. \tag{31}$$

Знаменатель прогрессии $q = |\lambda_1/\lambda_2|$, где $\lambda_1 = -1$ и λ_2 — первые два характеристических числа вполне непрерывного оператора A ($\lambda_n A\Phi_n = \Phi_n$), расположенные в порядке возрастания. Если Г — сфера, то $\lambda_2 = 3$.

Формулы (3), (4), (23), (27), (29), (31) позволяют вычислить $\widetilde{H}$ принципиально с любой точностью. Порядок вычислений следующий. а) По формулам (3) и (4) находим поле $H_0(r)$, которое вычисляем

в точке r_0, характеризующей положение тела D. б) Полагая $\frac{\partial \varphi_0}{\partial n_{s_0}} = (H_0 n_{s_0})$, определяем σ с помощью метода (31), сходимость которого гарантируется. в) По формуле (29) вычисляем φ_1. г) Находим $\widetilde{H}$ по формулам (23), (27).

Замечание. Изложенный итерационный метод позволяет решать две основные задачи электростатики (и магнитостатики):

1) находить распределение зарядов, наведенных на идеально проводящем теле произвольной формы, внесенном в заданное электростатическое поле*;

2) определять электростатическое распределение заряда на поверхности проводника, которому сообщен суммарный заряд q.

В частности, зная решение этих двух задач, можно вычислять электростатическую емкость проводника произвольной формы, а также его дипольный момент в электростатическом внешнем поле. Кроме того, зная функцию $\sigma(s)$, можно найти наведенный полем H_0 магнитный момент.

Сделанные замечания представляют интерес и в отношении рассматриваемой задачи вычисления характеристики рассеяния, так как. зная наведенные полем E_0, H_0 электрический P и магнитный M моменты тела D, можно вычислить характеристику рассеяния на этом теле по формулам ([1], стр. 380)

$$f_E = \frac{k_0^2}{4\pi}\left\{-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[x^0 M] + \frac{1}{\varepsilon_0}[x_0[P x^0]]\right\}; \tag{32}$$

$$f_H = \frac{k_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}[x^0 P] + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[x^0[M x^0]]\right\}. \tag{33}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Покажем, что норма трех последних слагаемых в правой части уравнения (20), рассматриваемых как операторы в пространстве $L_2(\mathscr{E}_3, 1/(1+|x|^{1+\gamma}))$, имеет порядок величины Δ, определенной формулой (21). Напомним, что норма в указанном пространстве и в $L_2(D)$ определяется так:

$$\|E\|^2 = \int \frac{|E|^2\,dx}{1+|x|^{1+\gamma}}, \qquad \|E\|_{L_2(D)} = \int_D |E|^2\,dx. \tag{П.1}$$

Интеграл без обозначения области интегрирования берется по всему пространству. Оценки интегральных операторов в уравнениях (20 а) и (20 б) проводятся одинаково. Ясно, что

$$\left\|\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\eta_D E\right\| \leqslant \left|\frac{\varepsilon'-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right| \|E\|. \tag{П.2}$$

Далее,

$$\omega|\mu-\mu_0|\left\|\operatorname{rot}\int_D \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{4\pi|x-y|}H(y)\,dy\right\| \leqslant \omega|\mu-\mu_0|\,k_0 \times$$

$$\times\left\|\int_D \frac{|H(y)|}{4\pi|x-y|}dy\right\| + \omega|\mu-\mu_0| \times$$

* Для электростатической задачи уравнение имеет вид $\sigma = -A\sigma - 2\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}$.

$$\times\left\|\int\limits_D \frac{|H(y)|}{4\pi|x-y|^2}dy\right\| \leqslant \text{const}\times\omega\,|\mu-\mu_0|\,k_0\left\|\left[\int\limits_D \frac{dy}{16\pi^2|x-y|^2}\right]^{1/2}\right\|\times \tag{П.3}$$

$$\times\,\|H\|_{L_2(D)} \leqslant \text{const}\times\omega\,|\mu-\mu_0|\,k_0 a\,\|H\|.$$

Аналогичная оценка с заменой $\mu\to\varepsilon'$, $\mu_0\to\varepsilon_0$ верна для соответствующего члена формулы (20 б). Если заметить, что при $|x-y|\to 0$

$$D_x^2\frac{\exp(ik_0|x-y|)}{|x-y|}=D_x^2\frac{1}{|x-y|}+D_x^2\frac{\exp(ik_0|x-y|)^{-1}}{|x-y|}=D_x^2\frac{1}{|x-y|}+ \tag{П.4}$$

$$+\,O\left(\frac{k_0^2}{|x-y|}\right);$$

$$\int\limits_D \frac{dy}{|x-y|}=O(a^2), \tag{П.5}$$

и оценить вторые производные интеграла типа потенциала на основании известного неравенства [9]

$$\left\|D_x^2\int\limits_D \frac{E(y)}{|x-y|}dy\right\| \leqslant C\,\|E\|, \tag{П.6}$$

где D_x — производная по x, C — постоянная, зависящая от области D, но не зависящая от параметров ε', k_0, μ, σ, то мы придем к требуемому утверждению.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем предложение общего характера, из которого, как частный случай, следует утверждение, лежашее в основе рассуждений раздела 2.

Теорема. Пусть A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H, λ_n — его характеристические числа, упорядоченные в порядке возрастания модуля ($\lambda_n A\,\Phi_n=\Phi_n$, $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots$). Если собственное подпространство оператора A, отвечающее характеристическому числу λ_1, совпадает с корневым подпространством оператора A, отвечающим этому же числу (это значит, что ранг числа λ_1 равен 1 ([9], стр. 454)), и если f — произвольный элемент, принадлежащий $G_1^\perp$, где $G_1^\perp$ — ортогональное дополнение в H к подпространству G_1 нулей оператора $I-\bar\lambda_1 A^*$, то уравнение

$$\varphi-\lambda_1 A\varphi=f \tag{П.7}$$

разрешимо; решение определяется однозначно, если потребовать, чтобы $\varphi\subset G_1^\perp$. В подпространстве $G_1^\perp$ решение уравнения (П. 7) может быть получено методом итераций:

$$\varphi_{n+1}=\lambda_1 A\varphi_n+f,\qquad \varphi_0=\Phi_0, \tag{П.8}$$

где Φ_0 — произвольный элемент $G_1^\perp$. Решение не зависит от Φ_0. Процесс (П. 8) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q=|\lambda_1/\lambda_2|$*.

Доказательство. Подпространство $G_1^\perp=R(I-\lambda_1 A)$ инвариантно относительно оператора A. Если $f\subset G_1^\perp$, то решение уравнения

* Из доказательства, приведенного ниже, вытекает, что утверждение теоремы сохранит силу, если в формулах (П.7), (П.8) заменить λ_1 любым числом μ, таким, что $|\mu|\simeq|\lambda_1|$.

(П. 7) существует. В $G_1^{\perp}$ решение уравнения (П. 7) единственно. В самом деле, если $\varphi \subset G_1^{\perp}$, то найдется элемент $\Phi \subset H$, такой, что $\varphi = (I-\lambda_1 A)\Phi$. Пусть $(I-\lambda_1 A)\varphi = (I-\lambda_1 A)^2 \Phi = 0$ Так как собственное и корневое подпространства, отвечающие числу λ_1, по условию теоремы совпадают, то из последнего равенства вытекает, что $(I-\lambda_1 A)\Phi = 0$ [9]. Следовательно, $\varphi = 0$, и единственность решения уравнения (П. 7) в $G_1^{\perp}$ доказана.

Чтобы доказать сходимость процесса (П. 8) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = |\lambda_1/\lambda_2|$ и независимость решения от Φ_0, достаточно [9] проверить, что в круге $|\lambda| \leqslant |\lambda_2|$ у оператора A, рассматриваемого в $G_1^{\perp}$, нет характеристических чисел. Но если бы такие числа были, они должны были бы совпадать с λ_1. Но λ_1 не есть характеристическое число оператора A в $G_1^{\perp}$, так как выше доказано, что однородное уравнение (П.7) не имеет ненулевого решения в $G_1^{\perp}$. Теорема доказана.

Утверждение, приведенное в разделе 2, вытекает из теоремы непосредственно. В самом деле, оператор A, определенный равенством (30), вполне непрерывен в $H = L_2(\Gamma)$. Из теории потенциала известно, что его характеристические числа по модулю не меньше единицы $\lambda_1 = -1$); подпространство $G_1^{\perp}$ состоит из всех функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} \varphi \, ds = 0; \tag{П.9}$$

уравнение $\sigma = -A\sigma$ не имеет ненулевого решения, удовлетворяющего условию (П. 9). Все эти факты доказаны, например, в [11].

Для применения теоремы к уравнению (30) достаточно заметить, что функция $f \equiv 2\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n_s}$ удовлетворяет условию (П. 9), так как φ_0 — гармоническая функция.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Здесь дан краткий вывод формулы (32), основанный на макроскопических уравнениях Максвелла (в отличие от вывода, приведенного в [1]), и сделано существенное, на наш взгляд, замечание относительно применимости формулы (15).

Рассматривается квазистационарное поле, для которого $k_0 a \ll 1$, где a — наибольший размер области, занятой токами. Преобразуем формулу для векторного потенциала в дальней зоне $|x| \to \infty$, $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}/|x|$, сохранив члены первого порядка по $k_0 a$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{4\pi}\int_D \boldsymbol{j}(y)\frac{\exp(ik_0|x-y|)}{|x-y|}\,dy = \frac{\exp(ik_0|x|)}{4\pi|x|}\times \\ &\times \int_D \boldsymbol{j}(y)\exp[-ik_0(\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{y})]\,dy = \\ &= \frac{\exp(ik_0|x|)}{4\pi|x|}\left[\int_D \boldsymbol{j}(y)dy - ik_0\int_D (\boldsymbol{x}^0\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{j}(y)\,dy\right] = \\ &= \frac{\exp(ik_0|x|)}{4\pi|x|}\left(-i\omega\boldsymbol{P} - ik_0[\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^0]\right). \end{aligned} \tag{П.10}$$

Здесь

$$P = \int_D y\,\rho(y)\,dy, \qquad \rho = \frac{\operatorname{div} j}{i\omega}, \qquad M = \frac{1}{2}\int_D [yj(y)]dy. \tag{П.11}$$

В самом деле, используя формулу Гаусса—Остроградского и равенство $j_n|_\Gamma = 0$, где n — внешняя нормаль к поверхности Γ, получаем

$$\begin{aligned} -i\omega P &= -i\omega\int_D y\,\rho(y)\,dy = -\int_D y \operatorname{div} j\,dy = \\ &= -\int_\Gamma y j_n\,ds + \int_D j(y)\,dy = \int_D j(y)\,dy. \end{aligned} \tag{П.12}$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_D (x^0 y)\,j(y)\,dy &= \int_D \left\{\frac{1}{2}[[yj]\,x^0] + \frac{1}{2}j(x^0 y) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}y(x^0 j)\right\} dy = [Mx^0] + \frac{1}{2}\int_D \{j(x^0 y) + y(x^0 j)\}\,dy = [Mx^0]. \end{aligned} \tag{П.13}$$

Последнее следует из того, что, как нетрудно проверить, имеет место равенство

$$\int_D \{j(x^0 y) + y(x^0 j)\}\,dy \simeq \int_\Gamma y j_n(y, x^0)\,ds = 0,$$

если $j_n|_\Gamma = 0$, $k_0 a \ll 1$.

Так как $E = -(1/i\omega\varepsilon_0)\operatorname{rot}\operatorname{rot} A$ в области, свободной от токов, в частности, в дальней зоне, то из формулы (П. 10) вытекает формула (32) ($E \sim \exp(ik_0|x|\,|x|^{-1} f_E$)

$$\begin{aligned} f_E &= -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}[ik_0 x^0\,[ik_0 x^0\,(-i\omega P - ik_0\,[Mx^0])]] = \\ &= \frac{k_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}[x^0[Px^0]] + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[Mx^0]\right\}. \end{aligned} \tag{П.14}$$

Здесь было учтено, что получить ротор от выражения (П. 10) равносильно векторному умножению на $ik_0 x^0$, если удерживать лишь члены порядка $O(1/|x|)$ при $|x| \to \infty$.

Если область D стягивается к поверхности Γ, то формулы (П.10), (П.14) сохраняют силу, если положить

$$P = \int_\Gamma s\,\sigma(s)\,ds, \qquad M = \frac{1}{2}\int_\Gamma [sj(s)]\,ds. \tag{П.15}$$

Существенно иметь в виду следующее. Из формулы (П.12) вытекает, что

$$\int_\Gamma j(s)\,ds = -i\omega P.$$

Если в формулу $A = \int_\Gamma \frac{\exp(ik|x-s|)}{4\pi|x-s|}[nH]ds$, верную для случая, когда D — металлическое тело, подставить вместо $j = [nH]$ выражение (15), то при вычислении значения потенциала в дальней зоне будет потерян член, описывающий электрическое дипольное излучение.

Покажем, как это происходит на примере металлического шара, для которого известно поле $\widetilde{H}$ [1]:

$$\widetilde{H} = -\frac{a^3}{2r^3}\{3n(nH_0) - H_0\} + H_0,$$
$$[n\widetilde{H}]|_\Gamma = \frac{3}{2}[nH_0]|_\Gamma . \qquad (\text{П}.16)$$

В этом случае

$$-i\omega P = \frac{3}{2}\int_\Gamma [nH_0]\,ds = -\frac{3}{2}\left[H_0\int_\Gamma n\,ds\right] = 0,$$

так как $\int_\Gamma n\,ds = 0$. Следовательно, $P = 0$, что неверно.

Итак, при вычислении магнитного дипольного момента аппроксимация (15) допустима, при вычислении электрического дипольного момента — нет.

В заключение приведем формулу для вычисления тензора поляризуемости диэлектрического тела D с постоянной ε_i, помещенного в среду с постоянной ε_e, в электростатическом однородном внешнем поле. Эта формула получается вполне аналогично формуле (13) п. 2 и имеет вид

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}(2\varepsilon + 2\varepsilon^2) - \frac{\varepsilon^2}{\pi V}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{n_i(s)\,n_j(t)}{r_{st}}\,ds\,dt,$$
$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_i - \varepsilon_e)/(\varepsilon_i + \varepsilon_e). \qquad (\text{П}.17)$$

Погрешность этой формулы — $|\varepsilon/\lambda_2|^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959
2 Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960
3 К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, М., 1951.
4 Я. И. Френкель, Электродинамика, ОНТИ, М., 1936
5 Г. Ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
6 Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 32, № 10, 1165 (1962).
7 А. Г. Рамм, Изв. высш. уч. зав. — Математика, № 5, 124 (1965)
8. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, ИЛ, М., 1964
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
10 И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, изд. Наука, М., 1965.
11 Э. Гурса, Курс математического анализа, 3, ч. 2, ОНТИ, М., 1934.
12. А. Г. Рамм, ДАН СССР, 186, № 1, 62 (1969).

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию 27 июня 1968 г.

CALCULATION OF THE CHARACTERISTIC OF SCATTERING ELECTROMAGNETIC WAVES ON SMALL BODIES OF AN ARBITRARY FORM

A. G. Ramm

Some new methods are proposed to solve the problem of scattering on small bodies in the cases of large and small permittivities, as well as on metal bodies.