ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1969*

УДК 533.95

О ФЛУКТУАЦИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ВНЕ ЦИЛИНДРА РАЗРЕЖЕННОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

В. В. Арсенин, А. Д. Селидовкин

Получено простое выражение для среднеквадратичной величины флуктуации электрического потенциала на частотах, близких к циклотронной частоте ионов, вне цилиндра разреженной замагниченной плазмы с неравновесным распределением ионов в предположении, что граница плазмы резкая и радиус цилиндра много больше среднего ларморовского радиуса ионов и много меньше расстояния от оси до точки наблюдения. Найденное выражение для флуктуации потенциала может быть использовано при оценке интенсивности тепловых шумов вне плазмы.

1. В работе рассматриваются флуктуации электрического потенциала вне длинного цилиндра бесстолкновительной плазмы, помещенного в однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Необходимость оценки тепловых шумов вне плазмы возникает, например, при идентификации неустойчивостей в экспериментах, в которых о состоянии плазмы судят по интенсивности колебаний электромагнитного поля, регистрируемых датчиками, расположенными снаружи от нее. При этом важно знать, начиная с какого уровня эти колебания действительно являются проявлением неустойчивости.

Вычисления проводятся для области частот, близких к ионной циклотронной $\omega_i = eH/m_i c$. Поскольку вблизи этой частоты диэлектрическая проницаемость плазмы имеет особенность, при определении флуктуирующих полей необходимо даже для разреженной плазмы учитывать коллективные эффекты. При этом существенна пространственная дисперсия, причем в задаче о колебаниях ограниченной системы появляется дополнительное усложнение, связанное с неоднородностью среды. В общем случае уравнение электростатических колебаний цилиндра плазмы является интегро-дифференциальным и практически не поддается решению. Значительное упрощение происходит в случае, когда радиус цилиндра много больше среднего ларморовского радиуса ионов и точка наблюдения отстоит достаточно далеко от оси. При этом основной вклад во флуктуации вносят длинноволновые возмущения, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка для первой гармоники $\omega \simeq \omega_i$ (см. п. 4).

Обрезание коротковолновой части спектра приводит также к существенному отличию частотной характеристики тепловых шумов в точках, расположенных на больших расстояниях от плазмы, от соответствующей функции для случая бесконечной однородной системы, рассмотренного ранее рядом авторов (см., например, [1] и цитированные там работы). Формулами, полученными для однородной системы, можно пользоваться для грубой (без учета квантования поперечного волнового числа) оценки флуктуаций внутри цилиндра.

2. Для определенности будем вычислять величину $I = \langle \varphi(\boldsymbol{R}, \omega)\varphi^*(\boldsymbol{R}, \omega')\rangle$, где $\varphi(\boldsymbol{R}, \omega)$ — фурье-компоненты электрического

потенциала вне разреженной ($4\pi e^2 n/m_i \ll \omega_i^2$, n — плотность) плазмы радиуса a с осью, направленной вдоль внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$, и угловые скобки означают усреднение по статистическому распределению. В общем случае функция распределения F_s частиц s-сорта ($s = e, i$) представляет собой произведение трех функций интегралов движения:

$$F_s = n_0 f_{\parallel s}(v_\parallel) f_{\perp s}(\boldsymbol{v}_\perp)\, Q_s(r_л), \tag{1}$$

где n_0 — плотность на оси, Q_s — функции распределения ларморовских центров (связанные условием нейтральности плазмы $\sum\limits_s e_s \int F_s d\boldsymbol{v}=0$); распределения по продольным и поперечным скоростям нормированы на единицу: $\int f_\parallel dv_\parallel = 1$, $\int f_\perp d\boldsymbol{v}_\perp = 1$. Для максимального упрощения мы будем считать электроны холодными.

Потенциал $\varphi(\boldsymbol{r}, \omega)$ определяется из уравнения [1]

$$\Delta\varphi + 4\pi\rho(\varphi) = -4\pi\rho_0, \tag{2}$$

где

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \sum_j e_j\, \delta\,[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j(t)]\, dt \tag{3}$$

— фурье-компонента микроплотности зарядов независимо движущихся в поле $\boldsymbol{H}$ частиц плазмы (суммирование производится по всем частицам), а $\rho(\varphi)$ — плотность заряда, наводимого в результате их коллективного (самосогласованного) взаимодействия. Если $\varphi = \psi(r)\exp(im\theta + ikz)$, θ — азимутальный угол, $z \parallel \boldsymbol{H}$, то электронная часть $\rho(\varphi)$ равна

$$\rho_e = \frac{\omega_{0e}^2 N k^2}{4\pi\omega^2}\, \psi \exp(im\theta + ikz), \tag{4}$$

где $\omega_{0e} = (4\pi e^2 n_0/m_e)^{1/2}$ — электронная ленгмюровская частота, $N = n/n_0$. Ионная часть $\rho(\varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_i = \frac{\omega_{0i}^2}{4\pi} \int\limits_0^\infty \varkappa J_m(\varkappa r) \int\limits_0^\infty \lambda \int\limits_0^\infty v_\perp dv_\perp \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \Bigg\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_{1p} J_p\left(\frac{\varkappa v_\perp}{\omega_i}\right) \times \\ \times J_p\left(\frac{\lambda v_\perp}{\omega_i}\right) \frac{1}{v_\perp} \frac{df_\perp}{dv_\perp} f_\parallel - \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_{1p} \Bigg[(\omega - kv_\parallel) \frac{1}{v_\perp} \frac{df_\perp}{dv_\perp} f_\parallel + \\ + k \frac{df_\parallel}{dv_\parallel} f_\perp \Bigg] \left[J_p\left(\frac{\varkappa v_\perp}{\omega_i}\right) J_p\left(\frac{\lambda v_\perp}{\omega_i}\right) (\omega - p\omega_i - kv_\parallel)^{-1} \right] - \\ - \sum_{p=-\infty}^{\infty} G_{2p} \frac{(m+p)}{\omega_i} f_\perp f_\parallel \left[J_p\left(\frac{\varkappa v_\perp}{\omega_i}\right) J_p\left(\frac{\lambda v_\perp}{\omega_i}\right) (\omega - p\omega_i - kv_\parallel)^{-1} \right] \Bigg\} \psi(\lambda) d\lambda\, d\varkappa. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\omega_{0i} = (4\pi e^2 n_0/m_i)^{1/2}$ — ленгмюровская частота ионов,

$$G_{1p} = \int\limits_0^\infty Q_i(r)\, J_{m+p}(\varkappa r)\, J_{m+p}(\lambda r)\, r\, dr,$$

$$G_{2p} = \int\limits_0^\infty \frac{1}{r} \frac{dQ_i}{dr} J_{m+p}(\varkappa r)\, J_{m+p}(\lambda r)\, r\, dr,$$

$\psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty \psi(r)\, J_m(\lambda r)\, r\, dr$ — изображение Фурье—Бесселя от потенциала $\psi(r)$. (Для максвелловских функций (2) с $T_\parallel = T_\perp$ выражение для ρ_i получено в [2], обобщение на случай распределения (1) не представляет труда.)

В дальнейшем мы будем предполагать, что средний ларморовский радиус ионов $\langle v_\perp/\omega_i\rangle$ много меньше радиуса цилиндра a, и в соответствии с этим членами с G_{2p} в (5) пренебрежем.

3. Без учета взаимодействия между частицами $(\rho(\varphi) \ll |\Delta\varphi|)$ и эффектов запаздывания $(\omega^2 R^2/c^2 \ll 1)$ потенциал $\varphi(\boldsymbol{R}, \omega)$ равен сумме кулоновских потенциалов независимо движущихся частиц:

$$\varphi(\boldsymbol{R}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} \sum_j e_j\, |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_j(t)|^{-1}\, dt. \tag{6}$$

Выберем $Q_i(r_л)$ в виде

$$Q_i(r_л) = \begin{cases} 1 & (r_л < a) \\ 0 & (r_л > a) \end{cases} \tag{7}$$

(цилиндр с резкой границей). Тогда непосредственное вычисление (6) в первом порядке по $\langle v_\perp\rangle^2/\omega_i^2 a^2$ для точек, достаточно удаленных от цилиндра

$$R \gg a; \tag{8}$$

$$R \gg \frac{v_{\parallel i}}{\omega_i} \tag{9}$$

($v_{\parallel i}$ — средняя продольная скорость ионов), дает в интересующей нас области частот $\omega \simeq \omega_i$ следующее выражение для I*:

$$I_{|\omega| \simeq \omega_i} = 2\pi n_0 e^2\, \delta(\omega - \omega')\, \frac{a^2 \langle v_\perp^2\rangle}{\omega_i^2}\, (\omega - \omega_i)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\parallel K_1^2\left(\left|\frac{\omega - \omega_i}{v_\parallel}\right| R\right) \frac{dv_\parallel}{|v_\parallel|^3}. \tag{10}$$

Здесь K_1 — функция Макдональда. Если отказаться от предположения $R \gg a$, то надо заменить в (10) величину $K_1^2\left(\left|\frac{\omega - \omega_i}{v_\parallel}\right| R\right)$ на $\frac{1}{\pi a^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^a K_1^2\left(\left|\frac{\omega - \omega_i}{v_\parallel}\right| R'\right) d\chi\, r\, dr$, где $R'^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\chi$. Условие (9) позволило опустить в выражении для I член от нулевой циклотронной гармоники как экспоненциально малый $\left(\text{содержащий } K_0^2\left(\frac{\omega_i}{|v_\parallel|} R\right)\right)$.

Формулу (10) можно также получить, если сначала перейти к фурье-представлению $\varphi(\boldsymbol{k}_\perp, \omega)$ по координате $\boldsymbol{r}_\perp$ и считать $k_\perp a \ll 1$. Отсюда видно, что при $R \gg a$ основной вклад в искомую величину дает длинноволновая часть потенциала. Это является следствием дипольного разложения и справедливо также и в случае, когда существенны коллективные эффекты.

4. Учтем теперь коллективные эффекты, т. е. член $4\pi\rho(\varphi)$ в уравнении (2). В случаях, когда ионное распределение неравновесное

---

* Так как знак ω по существу не важен, в (10) считается, что $\omega > 0$, и соответственно введен множитель 2.

и возможна циклотронная неустойчивость, будем считать, что плотность плазмы ниже порога возникновения неустойчивости (например, для анизотропного максвелловского распределения должно быть $\omega_{0e}^2 < (1/2)\,\omega_i^2$ [3]).

Чтобы найти уравнение, описывающее с учетом коллективных взаимодействий длинноволновую часть потенциала $\psi(r, \omega)$ с частотой, близкой к циклотронной, оставим в (5) в сумме по p только члены $p = \pm 1$ и представим приближенно $J_1\left(\frac{\varkappa v_\perp}{\omega_i}\right) \simeq \frac{\varkappa v_\perp}{2\omega_i}$, $J_1\left(\frac{\lambda v_\perp}{\omega_i}\right) \simeq \frac{\lambda v_\perp}{2\omega_i}$. Воспользовавшись при интегрировании по $\varkappa$, λ соотношениями типа

$$\lambda J_{m+1}(\lambda r) = \frac{m J_m(\lambda r)}{r} - \frac{\partial}{\partial r} J_m(\lambda r),$$

$$\int\limits_0^\infty \lambda J_m(\lambda r)\, J_m(\lambda r')\, d\lambda = \delta(r - r')/r,$$

получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}\psi - k^2\left(1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}N\right)\psi - \frac{\omega_{0i}^2}{4\omega_i^2}\int\limits_0^\infty v_\perp^3\, dv_\perp \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \left[(\omega - k v_\parallel)\frac{1}{v_\perp}\frac{df_\perp}{dv_\perp} f_\parallel + k\frac{df_\parallel}{dv_\parallel} f_\perp\right] \times \\ \times \left\{\left[\frac{m^2}{r^2}N\psi + \frac{m}{r}\frac{dN}{dr}\psi - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rN\frac{d\psi}{dr}\right)\right](\omega - \omega_i - k v_\parallel)^{-1} + \right. \\ \left. + \left[\frac{m^2}{r^2}N\psi - \frac{m}{r}\frac{dN}{dr}\psi - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rN\frac{d\psi}{dr}\right)\right](\omega + \omega_i - k v_\parallel)^{-1}\right\} = -4\pi\bar{\rho}_0,\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\bar{\rho}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-im\theta - ikz)\, \rho_0\, d\theta\, dz.$$

Для распределения (7) решением (11) будет ($\omega \simeq \omega_i$, $R > a$)

$$\begin{gathered}\psi_m = \left[4\pi K_{|m|}(kR)\int\limits_0^a \bar{\rho}_0\, I_{|m|}(\gamma r')\, r' dr'\right]\left[(1+\alpha)\,\gamma a\, K_{|m|}(ka)\, I'_{|m|}(\gamma a) - \right. \\ \left. - ka K'_{|m|}(ka)\, I_{|m|}(\gamma a) - m\alpha K_{|m|}(ka)\, I_{|m|}(\gamma a)\right]^{-1},\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma^2 = k^2(1 - \omega_{0e}^2/\omega^2)\,(1+\alpha)^{-1}, \\ \alpha = \frac{\omega_{0i}^2}{4\omega_i^2}\int dv_\perp\, v_\perp^2 \int dv_\parallel \left[(\omega - k v_\parallel)\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial F_i}{\partial v_\perp} + k\frac{\partial F_i}{\partial v_\parallel}\right]\frac{1}{\omega - \omega_i - k v_\parallel},\end{gathered} \tag{13}$$

$I_{|m|}$ — функции Бесселя мнимого аргумента, $K_{|m|}$ — функции Макдональда, штрих означает дифференцирование по всему аргументу.

Предположим, как и в п. 3, что $R \gg a$. Как видно из (12), основной вклад в потенциал вносят значения k, для которых $kR \lesssim 1$ и, следовательно, заведомо $ka \ll 1$. Пусть также $|\gamma| a \ll 1$. Тогда можно представить цилиндрические функции от аргументов ka и γa в (12) первыми членами степенных разложений:

$$\psi_m(\boldsymbol{k}, \omega, R) = \left[8\pi K_{|m|}(kR) \int\limits_0^a \frac{r'}{|m|!}\left(\frac{kr'}{2}\right)^{|m|} \bar{\rho}_0 dr'\right]\left(2+\alpha-\frac{m}{|m|}\alpha\right)^{-1}. \quad (14)$$

При $\gamma=k$, $\alpha=0$ (14) должно переходить в соответствующее выражение для случая независимых частиц. Поэтому, с точностью до членов второго порядка по $v_\perp/\omega_i a$,

$$4\pi K_{m|}(kR)\int\limits_0^a \frac{r'}{|m|!}\left(\frac{kr'}{2}\right)^{|m|}\bar{\rho}_0 dr' \underset{ka\ll 1}{=\!=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_j \frac{e_j \exp(i\omega t-ikz-im\theta)dtdzd\theta}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_j(t)|} =$$

$$= \frac{\delta_{m,-1}}{\sqrt{2\pi}}\sum_j \frac{e_j v_{\perp j}}{\omega_i|v_{\parallel j}|}\,\delta\left(\frac{\omega-\omega_i}{v_{\parallel j}}-k\right)\exp\left[-i\,\frac{z_{0j}(\omega-\omega_i)}{v_{\parallel j}}\right]\times \quad (15)$$

$$\times\frac{\partial}{\partial R}K_0\left(\left|\frac{\omega-\omega_i}{v_{\parallel j}}\right|R\right)\exp(i\Phi_{0j}).$$

Здесь z_{0j} и Φ_{0j} — начальные значения координаты z и фазы циклотронного вращения частицы j, суммирование проводится по всем ионам.

Осуществляя обратное преобразование Фурье по z и θ, получим для интересующей нас величины $I=2\langle\varphi(\boldsymbol{R}, \omega)\,\varphi^*(\boldsymbol{R}, \omega')\rangle_{\omega\simeq\omega_i}$:

$$I = 2\pi n_0 e^2\delta(\omega-\omega')\,a^2\langle v_\perp^2\rangle\,\frac{(\omega-\omega_i)^2}{\omega_i^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[K_1^2\left(\left|\frac{\omega-\omega_i}{v_\parallel}\right|R\right)f_\parallel\, dv_\parallel\right]\times$$

$$\times\left(|v_\parallel|^3\,|1+\alpha|^2_{k=(\omega-\omega_i)/v_\parallel}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Выражение (16) отличается от формулы (10) для случая невзаимодействующих частиц («идеальной» плазмы) фактором $|1+\alpha|^{-2}$ в интеграле по $v_\parallel$. Равенство

$$1+\alpha=0 \quad (17)$$

служит, как нетрудно убедиться, дисперсионным уравнением для поверхностных ($\varphi\simeq r/a$, $r<a$) волн с $|\gamma|a\ll 1$. Поскольку плотность плазмы считается ниже порога циклотронной неустойчивости, так что собственные колебания являются затухающими, то уравнение (17) при действительных ω не удовлетворяется, и флуктуации имеют конечную величину. Неравенство $|\alpha|\ll 1$ является (вместе с $T/e^2\gg n^{1/3}$) условием идеальности плазмы в рассматриваемой задаче.

5. В общем случае произвольной функции $f_\parallel$ интегрирование в (16) провести не удается. Приведем пример распределения, для которого можно проследить, по крайней мере качественно, влияние коллективных эффектов. Пусть в плазме, кроме ответственной за флуктуации горячей ионной компоненты плотности n, имеется холодная ионная компонента с плотностью $n_1\gg n$. Тогда, в пренебрежении малым ($\sim n/n_1$) вкладом в α от горячей компоненты, $\alpha=-\omega_{1i}^2/2\omega_i(\omega-\omega_i)$, где

$$\omega_{1i}^2 = 4\pi e^2 n_1/m_i,$$

и

$$I = I_{\text{ид}}(\omega-\omega_i)^2\left(\omega-\omega_i-\frac{\omega_{1i}^2}{2\omega_i}\right)^{-2}, \quad (18)$$

где $I_{\text{ид}}$ дается формулой (10). При $\omega = \omega_i + \omega_{1i}^2/2\omega_i \equiv \Omega$ выражение (18) обращается в бесконечность; однако с учетом мнимой части вклада в α от горячих ионов (он существенен при $|\omega - \Omega| \lesssim \omega_{0i}^2/\omega_i$) величина I ограничена. Например, для максвелловского распределения горячих ионов $\max|1+\alpha|^{-2} \sim (n_1/n)^2$.

Если в качестве функций распределения по скоростям в (16) выбрать максвелловские (с $T_\perp \neq T_\parallel$), то можно показать, что для «почти идеальной» плазмы, когда

$$\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel} + \frac{\omega_i}{|\omega-\omega_i|}\right)\left[\frac{4\omega_i^2}{\omega_{0i}^2} - \left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right]^{-1} \ll 1, \tag{19}$$

$$I = I_{\text{ид}}\left[1 - \frac{\omega_{0i}^2}{4\omega_i^2}\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right]^{-2}. \tag{20}$$

Если выполняется неравенство, обратное (19), для частот, достаточно близких к ионной циклотронной,

$$I_{\omega\to\omega_i} = I_{\text{ид}\ \omega\to\omega_i}\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\omega_{0i}^2}{4\omega_i^2}\left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)\right]^{-2}. \tag{21}$$

При $\omega \simeq \Omega_1 \equiv \omega_i(1 - \omega_{0i}^2/4\omega_i^2)^{-1}$ основной вклад в I дают коллективные эффекты. При этом

$$I_{\omega\to\Omega_1+0} = 16\pi n_0 e^2 \delta(\omega-\omega')\frac{a^2\langle v_\perp^2\rangle\omega_i}{R^2\omega_{0i}^3}\left(\frac{m_i}{T_\parallel}\right)^{1/2} \times \left(1 - \frac{\omega_{0i}^2}{4\omega_i^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel} + \frac{\omega_i}{\omega-\omega_i}\right)^{-1/2}\left(\frac{\omega-\Omega_1}{\omega-\omega_i}\right)^{-1/2}. \tag{22}$$

При $\omega \to \Omega_1 - 0$ величина I остается конечной.

Благодарим В. И. Когана за обсуждение и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М, 1963.
2. В. В. Арсенин, ЖТФ, 37, 607 (1967).
3. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, В. И. Пистунович, Ядерный синтез, 3, 30 (1963).

Поступила в редакцию
5 мая 1968 г.

ON FLUCTUATIONS OF ELECTRIC POTENTIAL OUTSIDE THE CYLINDER OF RAREFIED MAGNETIZED PLASMA

V. V. Arsenin, A. D. Selidovkin

A simple expression is derived for the mean square value of fluctuations of the electric potential at the frequencies close to the cyclotron frequency of ions outside the cylinder of rarefied magnetized plasma with nonequilibrium ion distribution. In this case the plasma boundary is asumed to be sharp and the radius of the cylinder to be much greater than the mean Larmor radius of ions and much less than the distance from the axis to the observation point. The expression found may be used for estimating the intensity of thermal noises outside the plasma.