

СОДЕРЖАНИЕ

Валеев К. Г. Оптимальное управление и метод точечных отображений	963
Неймарк Ю. И., Фишман Л. З. Структура фазового пространства квазилинейных дифференциальных уравнений с последействиями	974
Хазен Э. М. О стохастических дифференциальных уравнениях в теории условных марковских процессов	978
Андреев Г. А. Статистический анализ и синтез процессов и оптимальных автоматических систем со случайными нагрузками	984
Яшин А. И. Фильтрация марковских процессов при скачкообразном изменении свойств шума в наблюдениях	998
Макарчук М. М. Оптимальная компенсация нелинейных объектов	1003
Брусин В. А. Теорема об аппроксимации динамического оператора и некоторые ее приложения к исследованию в целом нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений в функциональных пространствах	1013
Леонов Н. Н. О режимах работы экстремальных систем шагового типа	1018
Климов В. Г. Динамика системы с нелинейностью типа треугольной петли гистерезиса	1024
Шалфеев В. Д. К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях	1037
Малкина Р. М., Первозванский А. А. Последовательное решающее правило распознавания образов при двоичном задании признаков	1052
Савельев В. П. Об оптимальных по расходу энергии управлениях в нелинейной системе второго порядка	1061
Фалдин Н. В. Достаточные условия оптимальности в одной задаче с ограниченными фазовыми координатами	1067
Громыко В. Д., Санковский Е. А. Анализ динамической точности беспоисковой самонастраивающейся системы с эталонной моделью при случайных воздействиях	1076
Глик А. Л., Каинов В. А. Об одной схеме регулировки коэффициента усиления	1080
Горюнов В. И. О приближенном исследовании расположения корней характеристического полинома	1083
Дорошенко А. Н., Шигин А. Г. Анализ структуры ЦВМ БЭСМ-4 методом многофакторного планирования эксперимента	1087
Преображенский А. В. Определение погрешности линейных интерполяторов	1094
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Корнейчук В.И., Романкевич А. М. Некоторые особенности синтеза m -значных схем при частотном, временном и пространственном разделении информационных сигналов	1100
Рычков С. Н., Фомель Б. М. Динамика криотронного генератора	1101

УДК 62—50 + 517.93

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

К. Г. Валеев

Рассматривается взаимосвязь метода точечных отображений и теории оптимального управления. Для упрощения многие подробности и оговорки опускаются. Предлагается для определенного класса оптимальных задач новый способ решения, заключающийся в специальной замене переменных. В частности, для двумерных задач применяются конформные отображения.

1. ОДНОЗНАЧНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим взаимооднозначное однопараметрическое отображение точек n -мерного пространства X

$$Y, t_0 \rightarrow X, t, \quad (1.1)$$

зависящее лишь от разности значений параметра t , т. е.

$$X = \Phi(Y, t - t_0), \quad \Phi(Y, 0) \equiv Y. \quad (1.2)$$

Перейдем от конечного отображения к бесконечно малому, полагая

$$X = \Delta X = \Phi(X, \Delta t), \quad \Delta X = \Phi(X, \Delta t) - \Phi(X, 0). \quad (1.3)$$

Разделив последнее равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему дифференциальных уравнений, определяющих отображение

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(X, 0). \quad (1.4)$$

Обратно. Если задано бесконечно малое отображение, определяемое системой дифференциальных уравнений (1.4), то, решая ее с начальными значениями t_0 Y , приедем к формулам (1.2).

Однопараметрическое семейство взаимно однозначных отображений образует группу. Качественная теория дифференциальных уравнений изучает свойства этой группы и ее подгрупп.

2. НЕОДНОЗНАЧНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть задано однопараметрическое семейство неоднозначных отображений

$$Y, t_0 \rightarrow \Delta(Y, t - t_0), t, \quad (2.1)$$

зависящее лишь от разности значений параметра t . Считаем, что при $t_0 = 0$ в отображении (2.1) $\Delta(Y, t)$ — некоторое множество. Предполагаем, что однопараметрическое семейство неоднозначных отображений образует полугруппу. Считаем, что выполнено условие

$$\text{diam } \Delta(Y, t) \leq c t, \quad c = \text{const}, \quad \Delta(Y, 0) \equiv Y. \quad (2.2)$$

Символ $\text{diam}\Delta$ обозначает диаметр множества Δ . Для бесконечно малого точечного отображения получим

$$X + \Delta X_k \in \Delta(X, \Delta t_k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta t_k = 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим всевозможные последовательности $\Delta X_k, \Delta t_k$, удовлетворяющие (2.3), для которых существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta X_k}{\Delta t_k} \in M(X). \quad (2.4)$$

Множество значений всех таких пределов обозначим через $M(X)$. Приходим к системе дифференциальных уравнений с неоднозначной правой частью

$$\frac{dX}{dt} \in M(X). \quad (2.5)$$

В практических задачах часто неоднозначность можно определить с помощью дополнительных параметров управлений U :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, U), \quad U \in N(X), \quad (2.6)$$

где множество $N(X)$ значений U определяется системой неравенств. Трудности вызывает обратная задача—построение множества $\Delta(Y, t)$, определяющего конечное неоднозначное отображение. Приведем простые примеры.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \quad |u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1$$

определяет отображение начальной точки (y_1, y_2) при $t_0 = 0$ в квадрат с вершинами в точках $(y_1 \pm t, y_2 \pm t)$ в момент t .

Пример 2. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad t_0 = 0$$

определяет отображение точки (y_1, y_2) в круг с центром в (y_1, y_2) и радиусом $|t|$.

Можно сказать, что множество $\Delta(Y, t)$ образуется в момент t концами траекторий, определяемых системой (2.6), с начальными значениями $X = Y, t = t_0$, когда выбираются всевозможные управлении $U(t) \in N$. Будем называть множество $\Delta(Y, t)$ областью достижимых значений. Траектории, ведущие в граничные точки множества и соответствующие управлению, называются оптимальными.

Отметим, что в первом примере оптимальные траектории определяются не единственным образом, за исключением четырех траекторий, попадающих в вершины квадрата. Во втором примере все оптимальные траектории определяются единственным образом.

По-видимому, один из наиболее существенных вкладов в теорию оптимального управления внесен Гамильтоном [1]. В дальнейшем используются некоторые его идеи, изложенные в монографии [2].

3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Используем метод Гюйгенса [2] (стр. 320) для отыскания границы множества $\Delta(Y, t)$. Возьмем элемент границы: вектор X , определяющий точку на границе, и вектор Ψ , перпендикулярный к поверхности S , ограничивающей Δ . При этом предполагаем, что в точке X к границе можно провести касательную плоскость. Вектор Ψ направлен во внешнюю сторону Δ .

Каждую точку поверхности S в момент t можно принять за исходную для бесконечно малого неоднозначного преобразования, определяемого системой дифференциальных уравнений (2.6)

$$\Delta X = F(X, U) \Delta t. \quad (3.1)$$

Новое положение S в момент $t + \Delta t$ найдется как огибающая множества всех точек, полученных из S с помощью преобразования (3.1). Введем обозначение

$$H(\Psi, X, U) \equiv \Psi F(X, U) \equiv \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(X, U). \quad (3.2)$$

Здесь ψ_i, f_i — проекции векторов Ψ, F .

Чтобы как можно дальше продвинуться в направлении внешней нормали Ψ , потребуем, чтобы проекция вектора F на направление нормали Ψ была наибольшей, т. е. управление U выберем из условия

$$\Psi F(X, U) = \max_{U \in N} \Psi F(X, U). \quad (3.3)$$

Это требование составляет суть принципа максимума, изложенного в [3].

Возьмем точки $X + \delta X$, близкие к X и лежащие в касательной плоскости; при этом

$$\Psi \delta X = 0. \quad (3.4)$$

Пусть за промежуток времени Δt векторы Ψ, X получат приращения $\Delta \Psi, \Delta X$.

В новом положении получим

$$(\Psi + \Delta \Psi) \delta(X + F(X, U) \Delta t) = 0. \quad (3.5)$$

Учитывая (3.4), имеем из (3.5) уравнение

$$\left[\Delta \Psi + \Psi \frac{DF(X, U)}{DX} \Delta t \right] \delta X = 0, \quad (3.6)$$

которое можно удовлетворить, положив

$$\Delta \Psi = -\Psi \frac{DF(X, U)}{DX} \Delta t. \quad (3.7)$$

Разделив уравнения (3.1), (3.7) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему дифференциальных уравнений для проекций векторов X, Ψ :

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(X, U), \quad \frac{d\psi_s}{dt} = -\sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial f_j(X, U)}{\partial x_s}. \quad (3.8)$$

Используя функцию H (3.2), уравнения (3.8) можно записать в канонической форме

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_s}, \quad \frac{d\Psi_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s} \quad (s = 1, \dots, n),$$

$$H(\Psi, X, U) = \max_{U \in N} H(\Psi, X, U). \quad (3.9)$$

Уравнения (3.9), где последнее условие выполнялось в неявном виде, были впервые получены в [1] при решении задачи об отыскании траекторий светового луча, а затем обобщены для более широкого круга задач в [3].

Границу S множества $\Delta(Y, t)$ можем получить параметрически, решая систему (3.9) с начальными условиями

$$t_0 = 0, \quad X = Y, \quad \Psi = \Psi_0, \quad \|\Psi_0\| = 1. \quad (3.10)$$

Отыскивая общее решение, получим граничные точки

$$X = \Phi(\Psi_0, Y, t) \quad (X \in S). \quad (3.11)$$

4. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Следуя Гамильтону [2] (стр. 320), введем понятие характеристической функции $V(Y, X)$, которая определяет время прохождения по оптимальному пути от точки Y к точке X :

$$V(Y, X) = t - t_0. \quad (4.1)$$

Закрепим значения $Y, t_0 = 0, t$. Уравнение (4.1) будет определять границу S области достижимых значений $\Delta(Y, t)$. Поэтому в качестве вектора Ψ можно взять градиент V , т. е.

$$\Psi_s = \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (4.2)$$

Принцип максимума (3.3) примет вид

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(X, U) = \max_{U \in N} \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(X, U). \quad (4.3)$$

Дифференцируя (4.1) по t , получаем уравнение Гамильтона в частных производных для характеристической функции V

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(X, U) = 1. \quad (4.4)$$

Исследование уравнения (4.4), где уравнение U выбирается из условия (4.3), представляет основу метода динамического программирования, развиваемого Беллманом [4, 5] (стр. 24), и эквивалентного принципу максимума для системы вида (2.6).

Уравнение (4.3) определяет уравнение U как нелинейную функцию векторов X , $\text{grad } V$. Поэтому уравнение (4.4) представляет нелинейное уравнение с частными производными первого порядка, не содержащее искомой функции. Обозначим

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} = \psi_s, \quad H(\Psi, X, U) = \sum_{s=1}^n \psi_s f_s(X, U). \quad (4.5)$$

Как указано в [6] (стр. 360), решение уравнения (4.4) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_s}, \quad \frac{d\psi_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_s} \quad (s = 1, \dots, n); \quad (4.6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^n \psi_s \frac{\partial H}{\partial \psi_s} \equiv H. \quad (4.7)$$

Построение полного интеграла V приводит к решению системы (4.6) с учетом (4.3), т. е. к уравнениям (3.9), полученным из принципа максимума.

Обратно. Решение уравнений (3.9) может быть сведено к уравнению Гамильтона [2] (стр. 346), принимающему вид

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(X, U) = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(X, U) = \max_{U \in N} \sum_{s=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial x_s} f_s(X, U).$$

При отыскании полного интеграла V_1 используем то, что в функции H отсутствует явно время t . Полагаем

$$V_1 = -\alpha_1 t + \alpha_1 V \quad (\alpha_1 = \text{const}) \quad (4.9)$$

и приходим к уравнению (4.4) с учетом (4.3). Если полный интеграл V_1 будет найден, то из уравнений

$$\psi_s = \frac{\partial V_1}{\partial x_s}, \quad \beta_s = -\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, \dots, n) \quad (4.10)$$

находим полное решение системы (3.9).

Поэтому не имеет смысла противопоставление метода динамического программирования и принципа максимума.

Отметим, что аналитическая динамика [2] может рассматриваться, как пример решения оптимальных задач. Даже простой перенос известных результатов может дать много нового в теории оптимального управления, особенно в тех случаях, когда удается исключить управление с помощью уравнения (3.3).

5. МЕТОД ЗАМЕН

Система дифференциальных уравнений с управлениями u_i

$$\frac{dx_s}{dt} = f(x_1, \dots, x_n) u_s, \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \leq 1 \quad (s = 1, \dots, n) \quad (5.1)$$

при $n = 3$ описывает распространение света в изотропной, но неоднородной среде со скоростью $f(X)$. Бесконечно малое неоднозначное преобразование

$$\Delta x_s = f(x_1, \dots, x_n) u_s \Delta t \quad (s = 1, \dots, n) \quad (5.2)$$

представляет отображение произвольной точки X в шар с центром в X

и с радиусом $f(X)\Delta t$. Для оптимальных траекторий системы (5.1) интеграл

$$V(A, B) = \int_A^B f^{-1}(x_1, \dots, x_n) ds \quad (5.3)$$

принимает стационарное значение. Если $f = \text{const}$, то оптимальными траекториями становятся прямые. Будем искать замену, переводящую систему (5.1) в систему такого же вида, но к случаю $f = 1$. Полагая

$$z_s = z_s(x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (5.4)$$

найдем уравнения для z_i

$$\frac{dz_s}{dt} = f \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_s}{\partial x_j} u_j. \quad (5.5)$$

Условие постоянства радиуса шара бесконечно малого отображения принимает вид

$$f^2 \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k, j=1}^n \frac{\partial z_s}{\partial x_j} \frac{\partial z_s}{\partial x_k} \right) u_j u_k \leq 1. \quad (5.6)$$

Окончательно приходим к уравнениям в частных производных для функций z_i

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_k} \right)^2 = \frac{1}{f^2}, \quad \sum_{s=1}^n \frac{\partial z_s}{\partial x_k} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} = 0 \\ (k, j = 1, 2, \dots, n; k \neq j). \quad (5.7)$$

Если найдем решение системы (5.7), то сможем найти оптимальные траектории, переводя прямые в пространстве x_i (заменой, обратной (5.4)) в кривые в пространстве x_i .

Рассмотрим случай $n = 2$. Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) u_1, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y) u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad f \geq 0 \quad (5.8)$$

заменой переменных

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \quad (5.9)$$

преобразуется в систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = p_1, \quad \frac{dv}{dt} = p_2, \quad p_1^2 + p_2^2 \leq 1, \quad (5.10)$$

если будут выполнены следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{f^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.11)$$

Возьмем в качестве функций u, v вещественную и мнимую части не-

которой функции $w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ w(z) = u + iv \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (5.12)$$

Уравнения (5.11) при этом примут вид

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{f}. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.13) имеет решение, если функция $\ln f(x, y)$ является гармонической. Отыскивая сопряженную к $\ln f(x, y)$ функцию $\varphi(x, y)$, получим

$$\ln w'(z) = -\ln f(x, y) - i\varphi(x, y), \quad w'(z) \equiv \frac{dw}{dz}.$$

Зная вещественную часть, находим функцию

$$\ln w'(z) = -2\ln f\left(\frac{z+z_0}{2}, \frac{z-z_0}{2i}\right) + \text{const} \\ (z_0 = \text{const}). \quad (5.14)$$

Отсюда отыскиваем функции u, v :

$$u(x, y) + iv(x, y) = \int f^{-2}\left(\frac{z+z_0}{2}, \frac{z-z_0}{2i}\right) dz. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) справедливо для функции $f(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$f(f''_{xx} + f''_{yy}) = (f'_x)^2 + (f'_y)^2. \quad (5.16)$$

Найденное конформное преобразование переводит бесконечно малые окружности с радиусом $f(x, u)\Delta t$ в окружности одинакового радиуса.

Пример 3. Возьмем в качестве $f(x, y)$ функцию e^{-x} . Из формулы (5.15) при $z_0 = 0$ получим

$$w = e^z, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Прямые линии на плоскости w переходят в оптимальные траектории на плоскости z . Пусть ищется оптимальная траектория системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = e^{-x} u_1, \quad \frac{dy}{dt} = e^{-x} u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1,$$

соединяющая точки A, B . Находим соответствующие точки на плоскости w , соединяем их прямой, а затем обратным отображением $z = \ln w$ находим оптимальную траекторию. Отметим, что, если ординаты точек различаются не меньше, чем на π , кратчайшие пути на плоскости w следует рассматривать на римановой поверхности функции $z = \ln w$ [7] (стр. 108), т. е. пути должны проходить через начало координат—точку 0. На рис. 1 указаны оптимальные траектории AB, AC, AD на плоскостях z, w .

Пример 4. Пусть скорость света пропорциональна расстоянию до начала координат. Найдем траектории светового луча. Задача сводится

к отысканию оптимальных траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = fu_1, \quad \frac{dy}{dt} = fu_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad f = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для функции $f(x, y)$ выполнено условие (5.16), поэтому имеем из (5.15)

$$w = \int \frac{dz}{z} = \ln z, \quad z_0 = -1.$$

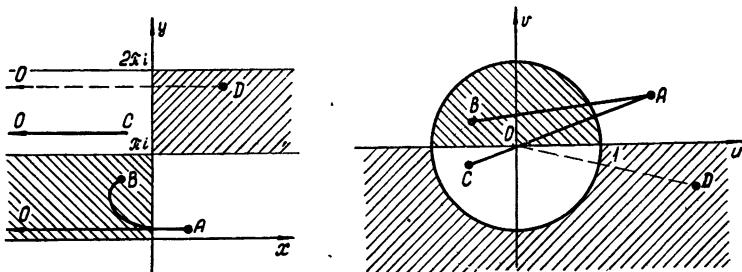


Рис. 1.

Так как функция $\ln z$ многозначна, то точки A, B определяются неоднозначно с точностью до слагаемого $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$). Поэтому существует бесконечное множество оптимальных путей, три из которых изображены на плоскости z (рис. 2). Оптимальные траектории являются логарифмическими спиралями и имеют параметрические уравнения

$$x = \exp(\alpha t + \beta) \cos(\gamma t + \delta), \quad y = \exp(\alpha t + \beta) \sin(\gamma t + \delta).$$

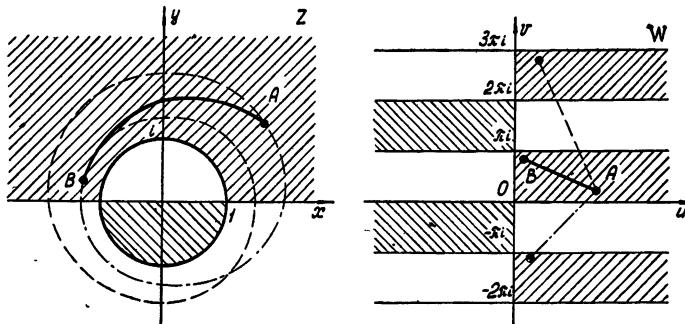


Рис. 2.

Замечание 1. При выводе формулы (5.15) по известной вещественной части $u(x, y)$ сразу находилась аналитическая функция $w(z)$. Из нескольких известных автору способов укажем один, предложенный В. И. Зубовым.

Наряду с аналитической функцией

$$w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (5.17)$$

введем вспомогательную аналитическую функцию

$$w_1(x + iy) = u(x, -y) - iv(x, -y). \quad (5.18)$$

Если условия Коши—Римана (5.12) выполняются для функции $\omega(z)$, то они выполнены и для $w_1(z)$.

Из (5.17), (5.18) находим, заменяя y на $-y$,

$$w(x + iy) + w_1(x - iy) = 2u(x, y).$$

Полагая замены

$x + iy = z$, $x - iy = z_0$, $x = (z + z_0)/2$, $y = (z - z_0)/2i$, $z_0 = \text{const}$, получаем окончательно

$$w(z) = 2u\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) - w_1(z_0). \quad (5.20)$$

Таким образом, по известной вещественной части, не отыскивая мнимой части, можем восстановить саму аналитическую функцию с точностью до некоторой постоянной.

Замечание 2. Другим важным частным случаем, допускающим простое исследование, является случай, когда область достижимых значений $\Delta(Y, t)$ является геометрически подобной некоторой определенной области. Например, для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u_1, \quad \frac{dy}{dt} = u_2, \quad |u_1| + |u_2| \leq 1.$$

Область $\Delta(Y, t)$ является равномерно расширяющимся квадратом, передвигающимся в направлении оси x .

6. СЛУЧАЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^n f_{sk}(x_1, \dots, x_n) u_k, \quad \sum_{k=1}^n u_k^2 \leq 1 \quad (6.1)$$

$$(s = 1, \dots, n).$$

Сделаем замену переменных

$$y_l = y_l(x_1, \dots, x_n), \quad (6.2)$$

введем матрицы G , F :

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.3)$$

Матрица G является матрицей фундаментального тензора [8] (стр. 363) с элементами

$$g_{js} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_l}{\partial x_s}. \quad (6.4)$$

Замена (6.2) приведет систему (6.1) к системе простых уравнений

$$\frac{dy_l}{dt} = p_l \quad (l = 1, \dots, n), \quad p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 \leq 1, \quad (6.5)$$

если будет выполнено условие

$$F'GF = E. \quad (6.6)$$

Здесь F' обозначает транспонированную к F , а E — единичную матрицу. Находим матрицу G :

$$G = (F^{-1})' F^{-1}. \quad (6.7)$$

Если удается найти функции y_i по заданной метрике — коэффициентам g_{js} , то обратным к (6.2) преобразованием получим оптимальные траектории из прямых в пространстве y_1, \dots, y_n . Коэффициенты g_{js} должны соответствовать метрическому тензору, определяющему пространство постоянной кривизны [9] (стр. 516).

Отметим, что в рассмотренном случае системы (6.1), приведшем к задаче вложения риманова пространства R_n с заданной метрикой в евклидово пространство, той же размерности бесконечно малая область неоднозначности является многомерным эллипсоидом.

Если эта задача разрешима, то удается сразу с помощью преобразования (6.2) расправить все оптимальные траектории, а следовательно, решить задачу синтеза. Преобразование (6.2) может быть неоднозначным.

7. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Решение задачи отыскания оптимальных траекторий упрощается, если область неоднозначности мала. Например, случай малой тяги при решении космических задач.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = F_1(X, t) + \mu F_2(X, t, U) \quad (U \in N, X = X_0, t = t_0). \quad (7.1)$$

Разобъем текущее время t на последовательные интервалы моментами t_0, t_1, t_2, \dots . В некоторых случаях эти моменты определяются естественным путем. Например, если решение системы (5.1) при $\mu = 0$ является периодическим с периодом T или правая часть системы (5.1) является T -периодической вектор-функцией времени t , то можно взять $t_k = kT$. Пусть система

$$\frac{dX}{dt} = F_1(X, t) \quad (X = X_k, t = t_k) \quad (7.2)$$

имеет общее решение в форме Коши

$$X = \Phi(t; X_k, t_k) \quad \Phi(t_k, X_k, t_k) = X_k. \quad (7.3)$$

Ищем решение системы (7.1) методом малого параметра. Полагаем

$$X = \Phi(t, X_k, t_k) + \mu Z + \mu^2(\dots). \quad (7.4)$$

Для вектора Z находим систему линейных уравнений

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{DF_1(\Phi, t)}{D\Phi} Z + F_2(\Phi, t, U) \quad (U \in N, Z = 0, t = t_k). \quad (7.5)$$

Она имеет решение при $t = t_{k+1}$:

$$Z = \frac{D\Phi(t_{k+1}, X_k, t_k)}{DX_k} \times \\ \times \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{DX_k}{D\Phi(\tau, X_k, t_k)} F_2(\Phi(\tau, X_k, t_k), \tau, U) d\tau. \quad (7.6)$$

Меняя параметры $U \in N$, получим всевозможные значения вектора Z и придем к системе неоднозначных разностных уравнений вида

$$X_{k+1} = \Phi(t_{k+1}, X_k, t_k) + \mu Z(t_{k+1}, X_k, t_k, U) + \dots \quad (7.7)$$

$(U \in N_1).$

Границу области достижимых значений Z можно получить параметрически, определяя $U(\tau)$ из условия

$$\Psi \frac{DX_k}{D\Phi(\tau, X_k, t_k)} F_2(\Phi(\tau, X_k, t_k), \tau, U(\tau)) = \\ = \max_{U \in N} \Psi \frac{DX_k}{D\Psi(\tau, X_k, t_k)} F_2(\Psi(\tau, X_k, t_k), \tau, U). \quad (7.8)$$

В данной работе не излагаются способы исследования конечных неоднозначных отображений. Отметим лишь, что при выполнении условия

$$\Phi(t_{k+1}, X_k, t_k) \equiv X_k \quad (7.9)$$

для исследования системы (7.7) можно применить асимптотические методы, переходя к вспомогательной системе дифференциальных уравнений с медленным временем [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Hamilton, Trans. R. Irish. Acad., 15, 69 (1828); 16, 4 (1830); 17, 1 (1837).
2. Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, М—Л, 1937.
3. Л. С. Понtryгин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкrelidze, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
4. B. Bellman, Dynamic programming and modern control theory; Тр. международного конгресса математиков, изд. Мир, М., 1968.
5. В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, изд. Наука, М., 1966.
6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
7. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, М., 1961.
8. Н. Е. Ко chin, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. АН СССР, М., 1951.
9. Ж. Фавар, Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, М., 1960.
10. К. Г. Валеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 7, 985 (1968).

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Поступила в редакцию
8 декабря 1968 г.

THE OPTIMAL CONTROL THEORY AND THE POINT MAPPING METHOD

K. G. Valeev

This paper considers the interdependence between the point mappings method and the optimal control theory. To solve optimal problems of a certain class it is suggested that a new method should be applied consisting in a special change of variables. In particular, conformal mappings are used for two-dimensional problems.

УДК 517.91

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЯМИ

Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман

Показывается, что исследование квазилинейных дифференциальных уравнений с последействием сводится к исследованию некоторой системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, для отыскания которых указывается процесс последовательных приближений.

В настоящей работе уточняются и обобщаются результаты предшествующих работ авторов [1]. Показывается, что в фазовом пространстве квазилинейных дифференциальных уравнений с последействием, к которым, в частности, принадлежат квазилинейные дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами, имеется конечномерная глобально устойчивая интегральная поверхность, движение фазовых точек на которой описывается обыкновенными квазилинейными дифференциальными уравнениями. Указывается процесс последовательных приближений, который позволяет найти эти уравнения с любой степенью точности.

Объектом исследования работы являются квазилинейные дифференциальные уравнения с последействием вида

$$\dot{x}(t) = A x(t) + \mu f(x_\tau(t)), \quad (1)$$

где искомое решение $x(t)$ является n -мерной вектор-функцией времени t , A — квадратная матрица, μ — малый параметр, $x_\tau(t)$ обозначает функцию $x(t+s)$, заданную для значений s из промежутка $[-\tau, 0]$, $f(x_\tau(t))$ — функция, значения которой определяются функцией $x_\tau(t)$. Предполагается, что функция f удовлетворяет условию Лифшица с некоторой константой K , так что

$$\|f(x_\tau^1(t)) - f(x_\tau^2(t))\| < K \max_{s \in [-\tau, 0]} \|x^1(t+s) - x^2(t+s)\|. \quad (2)$$

Решения уравнения (1) при сделанном предположении (2) однозначно определяются заданием начальной функции $x_\tau(t_0)$ и могут быть найдены методом последовательных приближений, исходя из записи уравнения (1) в эквивалентной интегральной форме

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \mu \int_{t_0}^t e^{A(t-v)} f(x_\tau(v)) dv. \quad (3)$$

В силу этого в качестве фазового пространства Φ системы (1) можно взять пространство непрерывных на отрезке $[-\tau, 0]$ функций $\varphi(s)$, которые будем обозначать $\varphi_\tau(0)$.

В основе дальнейшего лежит использование общих теорем работы [2], для чего представим пространство Φ в виде прямого произведения пространств U и V , где U — конечномерное пространство всевоз-

можных решений на промежутке $[-\tau, 0]$ вспомогательного обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{u} = Au, \quad (4)$$

а V — пространство непрерывных функций $\varphi(s)$ ($s \in [-\tau, 0]$), обращающихся в нуль при $s = 0$.

При этом каждой точке $\varphi_\tau(0)$ пространства Φ ставится во взаимно однозначное соответствие точки $u_\tau(0)$ и $v_\tau(0)$ пространств U и V , где $u(s)$ — решение уравнения (4), обращающееся в $\varphi(0)$ при $s = 0$, и $v(s) = \varphi(s) - u(s)$.

Уравнение (1) (или, что то же, (3)) определяет в пространстве Φ точечное отображение T_τ , преобразующее точку $x_\tau(0)$ в точку $x_\tau(\tau) = \bar{x}_\tau(0)$. Из (3) непосредственно находим, что

$$\bar{x}(s) = x(\tau + s) = e^{A(\tau+s)} x(0) + \mu \int_0^{\tau+s} e^{A(\tau+s-v)} f(x_\tau(v)) dv. \quad (5)$$

Точке $x_\tau(0)$ соответствуют точки $u_\tau(0)$ и $v_\tau(0)$ пространств U и V , где

$$u(s) = e^{As} x(0), \quad v(s) = x(s) - u(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad (6)$$

$$\bar{v}(s) = \bar{x}(s) - \bar{u}(s).$$

Точке $\bar{x}_\tau(0)$, согласно (5), соответствуют $\bar{u}_\tau(0)$, $\bar{v}_\tau(0)$, для которых

$$\bar{u}(s) = e^{As} \bar{x}(0) = e^{As} [e^{A\tau} x(0) + \mu \int_0^\tau e^{A(\tau-v)} f(x_\tau(v)) dv], \quad (7)$$

в силу этого отображение T_τ в переменных u, v можно записать в виде

$$\bar{u}(s) = e^{A(s+\tau)} u(0) + \mu \int_{-\tau}^0 e^{A(s-v)} f(\bar{u}_\tau(v) + \bar{v}_\tau(v)) dv, \quad (8)$$

$$\bar{v}(s) = \mu \int_0^s e^{A(s-v)} f(\bar{u}_\tau(v) + \bar{v}_\tau(v)) dv.$$

Введем в пространствах U и V нормы, полагая

$$\|u_\tau(s)\| = \max_{0 \leq v \leq \tau} \|u(s-v)\|, \quad \|v_\tau(s)\| = \max_{0 \leq v \leq \tau} \|v(s-v)\|. \quad (9)$$

Покажем теперь, что для отображения T_τ , определяемого интегральными уравнениями (8), выполняются условия теоремы 1 работы [2] о существовании инвариантного многообразия. Из интегральных соотношений (8), в соответствии с определением норм (9) и учитывая предположение (2), находим, что

$$a \|\delta u(0)\| - \mu c N < \|\delta u_\tau(0)\| < b \|\delta u(0)\| + \mu c N, \quad (10)$$

где, a, b и c — некоторые постоянные, причем $0 < a \ll b$ и N — сокращенная запись суммы

$$\|\delta \bar{u}_\tau(0)\| + \|\delta u_\tau(0)\| + \|\delta \bar{v}_\tau(0)\| + \|\delta v_\tau(0)\|.$$

Учитывая, что при некотором $M < +\infty$ $\|\delta u(0)\| \leq \|\delta u_\tau(0)\| < M \|\delta u(0)\|$, из оценок (10) непосредственно приходим к неравенствам

$$\|\delta \bar{v}_\tau(0)\| < \mu q \|\delta v_\tau(0)\| + \mu \alpha \|\delta u_\tau(0)\|, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|\delta\bar{u}_\tau(0)\| &> p \|\delta u_\tau(0)\| - \mu\beta \|\delta v_\tau(0)\|, \\ \|\delta u_\tau(0)\| &< \mu\gamma \|\delta v_\tau(0)\| \quad (\delta u_\tau = 0) \end{aligned}$$

с выполнением при соответствующих K требуемых теоремой 1 условий вида

$$\mu q + \frac{\mu\alpha}{K} + \mu\beta K < p, \quad \mu q + \mu\gamma K < 1. \quad (12)$$

Выполнение неравенств (11) и (12) влечет существование у отображения T_τ инвариантной поверхности σ^*

$$v_\tau(0) = \varphi^*(u_\tau(0)), \quad (13)$$

которая в фазовом пространстве Φ системы (1) представляется как множество точек вида $u_\tau(0) + \varphi^*(u_\tau(0))$ при всевозможных $u_\tau(0)$. Согласно построению, всевозможные $u_\tau(0)$ образуют собой n -мерное пространство функций вида $e^{As}u(0)$. Это означает, что инвариантная поверхность σ^* конечномерна размерности n .

Всякая точка $u_\tau(0), v_\tau(0)$ пространства Φ при применении к ней преобразования T_τ , согласно первому из соотношений (11), асимптотически приближается к поверхности σ^* , причем так, что

$$\|\bar{v}_\tau(0) - \varphi^*(\bar{u}_\tau(0))\| < \mu(\gamma + \gamma K) \|v_\tau(0) - \varphi^*(u_\tau(0))\|, \quad (14)$$

где $\bar{u}_\tau(0), \bar{v}_\tau(0)$ — точка, в которую преобразованием T_τ преобразуется точка $u_\tau(0), v_\tau(0)$. Поверхность σ^* может быть получена с любой степенью точности путем многократных применений отображения T_τ к поверхности $v_\tau(0) = 0$. Если рассматривать поверхность $v_\tau(0) = 0$, как нулевое приближение поверхности σ^* , то первое приближение представится в виде

$$v^1(s) = \mu \int_0^s e^{A(s-v)} f(u_\tau(v)) dv,$$

второе в виде

$$v^2(s) = \mu \int_0^s e^{A(s-v)} f(u_\tau(v) + v^1(v)) dv$$

и т. д.

При этом, как известно, ошибка m -го приближения не превосходит

$$\frac{(\mu q)^m}{1 - \mu q} \|v_\tau^1 - v_\tau^0\|. \quad (15)$$

В предположении, что функция f в правой части уравнения (1) удовлетворяет условию Лифшица, это приводит к оценке вида $M\mu^{m+1} \|u_\tau(0)\|$. Если же предположить, что функция f ограничена, то придем к оценке вида $M\mu^{m+1}$. Нулевым приближением для точек $x_\tau(t)$ инвариантной поверхности σ^* является $e^{At}x(t)$, первым приближением —

$$e^{At}x(t) + \mu \int_0^t e^{A(t-v)} f(e^{Av}x(v)) dv$$

и т. д.

Знание инвариантной поверхности σ^* позволяет указать дифференциальное уравнение, которому подчиняется движение на ней фазовых точек

$$\dot{x} = Ax + \mu f(x_\tau^*(t)), \quad (16)$$

где $x_\tau^*(t) \in \sigma^*$ и означает некоторую функцию $\phi(s, x(t)) (-\tau \leq s \leq 0)$. Беря в качестве $x_\tau^*(t)$ то или иное из найденных нами приближений, найдем соответствующие приближения дифференциальных уравнений на поверхности σ^* .

В нулевом приближении, в частности, под $x_\tau^*(t)$ следует иметь в виду функцию $e^{As} x(t)$. В случае уравнения с запаздыванием это приводит к приближенному уравнению, совпадающему с указанным ранее в работе [1]. При использовании m -го приближения приходим к приближенному дифференциальному уравнению, отклонение правой части которого от точного уравнения не превосходит величину порядка μ^{m+2} , отклонение производной при этом также порядка μ^{m+2} .

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1.-Ю И. Неймарк, Л. З. Фишман, ДАН СССР, 171, № 1, 44 (1966); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1210 (1966); 10, № 11, 1479 (1967).
- 2 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 311 (1967).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 июня 1968 г.

PHASE SPACE STRUCTURE OF QUASI-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AFTER-EFFECTS

*Yu. I. Neimark, L. Z. Fishman

An analysis of quasi-linear differential equations with after-effects is shown to an analysis of a certain set of ordinary quasi-linear differential equations found by a sequential approximations process indicated in the article.

УДК 519.21

О СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Э. М. Хазен

Рассматривается соотношение между стохастическими дифференциальными уравнениями Ито и симметризованными стохастическими уравнениями при выводе этих уравнений предельным переходом от процессов с дискретным временем с шагом Δt при $\Delta t \rightarrow 0$. Показано, что в симметризованные стохастические уравнения для апостериорных вероятностей условных марковских процессов члены порядка $(\Delta t)^2 r^2(t)$ (где $r(t)$ — наблюдаемая реакция) не дают вклада, в отличие от уравнений Ито.

В [1] дается вывод уравнений для апостериорных вероятностей условных марковских процессов путем предельного перехода от дискретного времени при $\Delta t \rightarrow 0$. Проведенное в [1] (гл. 3) построение опирается на теоремы Бернштейна [2, 3] о стохастических дифференциальных уравнениях, теоремы Колмогорова о переходных вероятностях марковских процессов [1, 5] и понятия стохастического интеграла Ито и симметризованного интеграла Стратоновича [4] и связанные с ними стохастические дифференциальные уравнения Ито и симметризованные уравнения [1] (гл. 1). Полученные в [1] (гл. 3) уравнения являются симметризованными стохастическими уравнениями.

Аналогичным образом нетрудно вывести и стохастические уравнения Ито: разница состоит в том, что члены порядка $(dy(t))^2$ (где $dy(t)$ — приращение наблюдаемого винеровского процесса за время dt) в этом случае дают вклад порядка dt в стохастические уравнения для приращений апостериорных вероятностей $d\omega$, а в случае симметризованных уравнений для $d\omega$ эти члены выпадают. Ниже дается подробное разъяснение этого факта (используемого в [1] при получении, например, уравнения (1.19) из (1.16) при $\Delta t \rightarrow 0$ (§ 1, гл. 3)). Изложение в [1] весьма сжато. Проведенное построение позволяет также проиллюстрировать физический смысл тех и других уравнений, возможности их моделирования. Симметризованные уравнения более предпочтительны при моделировании процессов на аналоговых машинах непрерывного действия; стохастические уравнения Ито целесообразно использовать при моделировании на ЦВМ.

1. Проанализируем вывод стохастических дифференциальных уравнений на примере фильтрации марковского процесса $s(t)$ с двумя состояниями 0 и 1 по результатам наблюдения суммы его и «белого шума» $n(t)$ уровня N .

$$Mn(t) n(t+\tau) = N \delta(\tau), \quad r(t) = s(t) + n(t).$$

При дискретном времени с шагом Δt процессы $s(t)$ и $n(t)$ заменим ступенчатыми функциями (с постоянными значениями на интервалах длины Δt). Последовательность значений $(r_k, s_k) = (r(k\Delta t), s(k\Delta t))$

образует двумерную цепь Маркова с плотностью вероятности перехода

$$F(r_{k+1}, s_{k+1} | r_k, s_k) = p(s_{k+1} | s_k) \frac{\exp [-(r_{k+1} - s_{k+1})^2 \Delta t / 2N]}{\sqrt{2\pi N / \Delta t}}, \quad (1)$$

где

$$\| p(s_{k+1} | s_k) \| = \left\| \begin{array}{cc} p(0|0); & p(1|0) \\ p(0|1); & p(1|1) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1-\alpha\Delta t; & \alpha\Delta t \\ \beta\Delta t; & 1-\beta\Delta t \end{array} \right\|.$$

Значения $n_k = n(k\Delta t)$ являются независимыми реализациями гауссовой случайной величины с нулевым средним и дисперсией, равной $N/\Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ ступенчатый случайный процесс $n(t)$ переходит в процесс белого шума.

Условное распределение вероятностей для значения ненаблюдаемой компоненты марковской цепи s_k при условии известных значений r_l ($l = 1, \dots, k$) определяется рекуррентным уравнением [1]

$$w_{ps}(s_{m+1}; m+1) = \frac{\sum_{s_m} F(r_{m+1}; s_{m+1} | r_m; s_m) w_{ps}(s_m; m)}{\sum_{s_{m+1}} \sum_{s_m} F(r_{m+1}; s_{m+1} | r_m; s_m) w_{ps}(s_m; m)}. \quad (2)$$

Для рассматриваемого случая, подставляя на место $F(r_{m+1}; s_{m+1} | r_m; s_m)$ выражение (1), находим (используя разложение $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)$ при малых x):

$$w_{ps}(0; t+\Delta t) = [w_{ps}(0; t) (1-\alpha\Delta t) + w_{ps}(1; t) \beta\Delta t] / C_1(t+\Delta t), \quad (3)$$

где

$$C_1(t+\Delta t) = 1 + (\Delta t/N) w_{ps}(1; t) [r(t+\Delta t) - 1/2] + (\Delta t/N)^2 r^2(t+\Delta t) w_{ps}(1; t)/2 + o(\Delta t).$$

Отсюда следует (так как при малых x $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$)

$$\begin{aligned} w_{ps}(0; t+\Delta t) &= w_{ps}(0; t) - \alpha\Delta t w_{ps}(0; t) + \beta\Delta t w_{ps}(1; t) - \\ &- w_{ps}(0; t) w_{ps}(1; t) \left\{ \frac{\Delta t}{N} \left[r(t+\Delta t) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(\Delta t)^2}{2N^2} r^2(t+\Delta t) \right\} + \\ &+ w_{ps}(0; t) w_{ps}^2(1; t) (\Delta t/N)^2 r^2(t+\Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Величина $(\Delta t)^2 r^2(t+\Delta t)$ здесь является случайной величиной порядка Δt . Математическое ожидание $(\Delta t)^2 r^2(t+\Delta t)$ равно

$$M\{(\Delta t)^2 r^2\} = N \Delta t + o(\Delta t),$$

а дисперсия является величиной порядка $(\Delta t)^2$:

$$D\{(\Delta t)^2 r^2\} = 2(N \Delta t)^2.$$

Поэтому [1] при $\Delta t \rightarrow 0$ вклад в уравнение, даваемый членом $(\Delta t)^2 r^2(t+\Delta t)$, является детерминированным и равным $N \Delta t$.

Уравнение (3) поэтому можно переписать в виде

$$\begin{aligned} w_{ps}(0; t+\Delta t) &= w_{ps}(0; t) - \alpha w_{ps}(0; t) \Delta t + \\ &+ \beta w_{ps}(1; t) \Delta t - w_{ps}(0; t) w_{ps}(1; t) \left\{ \frac{\Delta t}{N} \left[r(t+\Delta t) - \frac{1}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{2N} \right\} + w_{ps}(0; t) w_{ps}^2(1; t) (\Delta t/N) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (4)$$

или в виде уравнения, связывающего приращения процесса $w_{ps}(0; t)$ и процесса $y(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau$;

$$\begin{aligned} dw_{ps}(0; t) &= -\alpha w_{ps}(0; t) dt + \beta w_{ps}(1; t) dt - \\ &- \frac{1}{N} w_{ps}(0; t) w_{ps}(1; t) [dy(t) - w_{ps}(1; t) dt]. \end{aligned} \quad (5)$$

По теореме Бернштейна [1] (гл. 1, § 3), [2, 3] предельный случайный процесс $w_{ps}(0; t)$, определяемый уравнениями (4) или (5) при $\Delta t \rightarrow 0$, является марковским с коэффициентом сноса

$$\begin{aligned} A(w; t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{w_{ps}(0; t + \Delta t) - w_{ps}(0; t) | w_{ps}(0; t) = w\} = \\ &= -\alpha w + \beta(1-w) + \frac{1}{N} w(1-w)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

и коэффициентом локальной диффузии

$$B(w; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{(\Delta w_{ps}(0; t))^2 | w_{ps}(0; t) = w\} = w^2(1-w)^2/N. \quad (7)$$

Коэффициенты (6), (7) совпадают с коэффициентами, входящими в стохастическое уравнение (5). Это свидетельствует о том, что полученное стохастическое уравнение является уравнением Ито. Это ясно также из рекуррентного уравнения (4), так как $\Delta t r(t+\Delta t) = y(t+\Delta t) - y(t)$ и $w_{ps}(0; t)$ представляется в виде предела интегральных сумм, типичных для определения интеграла Ито (см. формулу (4.7), § 4, гл. 1; [1]).

Рекуррентное уравнение (4) удобно для моделирования процесса на ЦВМ: при этом значения $r(t) = s(t) + n(t)$ могут вычисляться при помощи стандартной программы гауссовских независимых случайных чисел, а шаг Δt берется достаточно малым.

Уравнение (5) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dw_{ps}(0; t)}{dt} &= -\alpha w_{ps}(0; t) + \beta w_{ps}(1; t) - \\ &- \frac{1}{N} w_{ps}(0; t) w_{ps}(1; t) [r(t) - w_{ps}(1; t)], \end{aligned} \quad (8)$$

где в наблюдаемую реализацию $r(t)$ входит процесс белого шума $n(t)$. Однако уравнение (8) непригодно для моделирования на аналоговой машине непрерывного действия, где на вход системы (8) вместо обобщенного случайного процесса «белого шума» $n(t)$ подавался бы широкополосный гауссовский шум. Это связано с тем, что значения интеграла Ито, представляющего собой (по определению) решение уравнения (8), существенно связаны с недифференцируемостью винеровского процесса $(1/\sqrt{N}) \int_0^t n(\tau) d\tau$; результат получится совсем другим при подстановке в уравнение (8) процесса с гладкими траекториями и решении его как обыкновенного дифференциального уравнения (при данной гладкой реализации $n(t)$ в правой части). Для того чтобы можно было

заменить $n(t)$ широкополосным гауссовским процессом, надо использовать другое определение стохастических дифференциальных уравнений и интегралов—симметризованные уравнения и интегралы (см. [4], а также гл. 1, § 4, 5 [1]).

Один и тот же диффузионный марковский процесс $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ с непрерывными траекториями, с коэффициентами сноса

$$A_i(\mathbf{x}; t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{x_i(t + \Delta t) - x_i(t) | \mathbf{x}, t\} \quad (9)$$

и коэффициентами диффузии

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \{\Delta x_i \Delta x_j | \mathbf{x}, t\} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\mathbf{x}; t) \sigma_{jk}(\mathbf{x}; t) \quad (10)$$

может быть получен как решение стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i(\mathbf{x}; t) + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\mathbf{x}; t) \xi_k(t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (11)$$

(где $\xi_k(t)$ — независимые процессы белого шума) или как решение стохастических уравнений в симметризованной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{x}; t) + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\mathbf{x}; t) \xi_k(t) \quad (i=1, \dots, n), \quad (12)$$

причем

$$F_i(\mathbf{x}; t) = A_i(\mathbf{x}; t) - \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial \sigma_{ik}(\mathbf{x}; t)}{\partial x_j} \sigma_{jk}(\mathbf{x}; t). \quad (13)$$

Таким образом, симметризованное стохастическое уравнение для $w_{ps}(0; t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_{ps}(0; t)}{dt} &= -\alpha w_{ps}(0; t) + \beta w_{ps}(1; t) - \\ &- \frac{1}{N} w_{ps}(0; t) w_{ps}(1; t) \left[r(t) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) и должно использоваться при моделировании процесса $w_{ps}(0; t)$ на аналоговой машине, так как значения симметризованного интеграла (решения симметризованных стохастических дифференциальных уравнений) устойчивы по отношению к предельному переходу от процессов с гладкими траекториями к винеровскому процессу. Это уравнение дает основу для оптимальной фильтрации процесса $s(t)$ по результатам наблюдения его суммы с широкополосным гауссовским шумом.

Итак, мы вывели вначале стохастическое уравнение Ито для $w_{ps}(0; t)$ и перешли затем к симметризованному стохастическому уравнению, используя известные формулы связи между этими уравнениями (и интегралами).

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (14) непосредственно получается из (3), если отбросить члены, содержащие $(\Delta t)^2 r^2(t + \Delta t)$ (или, что эквивалентно, $(dy(t))^2$), и полученные при этом стохастические уравнения рассматривать как симметризованные. Такое совпаде-

ние и следовало ожидать. Если понимать стохастические уравнения как симметризованные, наблюдаемый процесс $y(t)$ можно заменить некоторым гладким процессом, у которого $(\Delta y(t))^2 = o(\Delta t)$. Указанное совпадение результатов при выводе стохастических уравнений для апостериорных вероятностей условных марковских процессов с пренебрежением членами, содержащими $(\Delta t)^2 r^2$, и при переходе от уравнений Ито к симметризованным уравнениям имеет место во всех случаях, рассмотренных в [1].

2. Рассмотрим условия, гарантирующие такое совпадение результатов, для разностного стохастического уравнения общего вида

$$w(t + \Delta t) = w(t) + \Phi(\Delta y; w; \Delta t), \quad (15)$$

где $y(t)$ — заданный многомерный диффузионный марковский процесс; пусть $M\dot{y}_k(t) = 0$ ($k, l = 1, \dots, m$);

$$M\{\Delta y_k(t) \Delta y_l(t) | y(t) = y\} = b_{kl}(y; t) \Delta t + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ соотношение (15) эквивалентно уравнению

$$\Delta w(t) = F_0(w; t) \Delta t + \sum_{k=1}^m F_k(w; t) \Delta y_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^m F_{kl} \Delta y_k \Delta y_l, \quad (16)$$

где

$$F_k(w; t) = \left[\frac{\partial \Phi(z; w; \Delta t)}{\partial z_k} \right]_{z=0, \Delta t=0},$$

$$F_{kl}(w; t) = \left[\frac{\partial^2 \Phi(z; w; \Delta t)}{\partial z_k \partial z_l} \right]_{z=0, \Delta t=0}.$$

Аналогично предыдущему, при $\Delta t \rightarrow 0$ соотношение (16) определяет диффузионный марковский процесс $w(t)$ (при достаточно юбших условиях регулярности функций $F_k(w)$ и $F_{kl}(w)$; см. [5], [1], гл. 1). Предельный процесс $w(t)$ удовлетворяет стохастическому уравнению Ито

$$dw(t) = F_0(w; t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^m F_{kl}(w; t) b_{kl}(y; t) dt + \sum_{k=1}^m F_k(w) dy_k(t). \quad (17)$$

Уравнению (17) соответствует симметризованное уравнение

$$dw(t) = \sum_{k=1}^m F_k(w; t) dy_k(t) + F_0(w; t) dt + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^m F_{kl}(w; t) b_{kl}(y; t) dt - \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial w} F_l b_{kl}(y; t) dt. \quad (18)$$

Для того, чтобы последнее уравнение совпадало по своей записи с уравнением (16), в котором отброшены члены порядка $(dy(t))^2$, достаточно, чтобы

$$F_{kl}(w; t) = \frac{\partial F_k(w; t)}{\partial w} F_l(w; t).$$

Подобные условия можно использовать при выводе симметризованных стохастических уравнений предельным переходом от процессов с дискретным временем при $\Delta t \rightarrow 0$. В частности, они выполняются при выводе уравнений для условных марковских процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Хазен, Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления, изд. Сов. радио, М., 1968.
2. С. Н. Бернштейн, Стохастические дифференциальные уравнения, Собрание сочинений, 4, изд. Наука, М., 1964.
3. С. Н. Бернштейн, Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений, Собрание сочинений, 4, изд. Наука, М., 1964.
4. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. матем. и мех., № 1, 3 (1964).
5. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

Поступила в редакцию
14 октября 1968 г.

ON STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE THEORY
OF THE CONDITIONAL MARKOVIAN PROCESSES

E. M. Khazen

The paper deals with the relation between the Ito stochastic differential equations and the symmetrized stochastic equations when deriving these equations by a transition to the limit from discrete time processes with step Δt when $\Delta t \rightarrow 0$. It is shown that unlike the Ito equations the terms of $(\Delta t)^{2r^2(t)}$ order (where $r(t)$ is the observed sample) do not provide addition into symmetrized stochastic equations for a posteriori probabilities of the conditional Markovian processes.

УДК 519.2 · 62 — 50

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРОЦЕССОВ И ОПТИМАЛЬНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Г. А. Андреев

Изложена методика аппроксимации экспериментальных осциллирующих и плавно спадающих корреляционных функций, допускающих существование второго и четвертого моментов спектра мощности. С использованием решений уравнений Фредгольма первого и второго рода получено аналитическое выражение для весовой (передаточной) функции статистически оптимальной (по критерию минимума среднеквадратичной ошибки) практически реализуемой динамической системы. Параметры и характеристики реализованной динамической системы, создающей непрерывные нормальные случайные нагрузки, в пределах ошибок измерений совпадают с оптимальными.

Известен ряд задач, требующих исследований как конструкций, так и в целом машин [1]: автомобилей, кораблей, самолетов в условиях случайных нагрузок. Нагрузки целесообразно создавать динамическими автоматическими системами. При этом естественно стремление создать автоматическую систему наилучшей, т. е. оптимальной. Проблема оптимальных систем [2—5] ставит следующие задачи: выбор критерия сравнения систем и представление его в математическом виде; исследование и математическое описание управляющих (полезный сигнал) и возмущающих (помеха) воздействий на систему; обоснование допустимого класса систем и ограничений на характеристики системы; установление экстремума критерия (оптимизация) и отыскание характеристик оптимальной системы; синтез и практическая реализация оптимальной системы. Наиболее гибким способом создания случайных нагрузок является способ, основанный на линейном преобразовании нормального электрического случайного сигнала динамической системой. Для нормального сигнала и помехи при линейном преобразовании сигнала экстремум любого статистического критерия [4, 5] приводит к линейной системе, совпадающей с оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной ошибки. Поскольку критерий среднеквадратичной ошибки имеет достаточно простое и полное математическое описание [2, 4, 5] то его и используем.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Чаще всего встречающиеся на практике случайные воздействия могут быть описаны нормальными плотностями вероятностей. В этом случае исчерпывающей статистической характеристикой является корреляционная функция $\Psi(t, t + \tau)$. В теории усталостной долговечности при случайных нагрузках [6] время до разрушения зависит от величины среднего числа нулевых положительных выбросов в единицу времени N_{10} , т. е. выбросов случайной нагрузки с положительной производной за средний (нулевой) уровень, и величины ν , являющейся параметром плотности вероятности экстремумов случайной нагрузки.

При выводе выражения плотности вероятности экстремумов стационарного нормального случайного процесса параметр ν определяется в виде [7, 8]

$$\nu^2 = 1 - [R''(0)]^2/R'''(0), \quad (1)$$

где $R''(0)$, $R'''(0)$ — соответственно вторая и четвертая производные коэффициента корреляции флюктуаций, $R(\tau) = \Psi(\tau)/\Psi(0)$ по τ при $\tau=0$. В теории усталостной долговечности [6] для определения относительного числа циклов до разрушения необходимо параметр ν выразить через величины N_{10} и среднее число экстремумов (максимумов N_{1+} или минимумов N_{1-}) в единицу времени. Величины N_{10} и N_{1+} для стационарного процесса выражаются [7, 8] соответственно в виде

$$N_{10} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{[-R''(0)]}, \quad N_{1+} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{[R'''(0)]}{[-R''(0)]}}.$$

С использованием этих соотношений выражение (1) представляется в виде $\nu^2 = 1 - N_{10}^2/N_{1+}^2$. По физическому смыслу N_{10} и N_{1+} в среднем обратно пропорциональны интервалам времени между выбросами, поэтому вводят [9] величину $\omega_1 = 2\pi N_{10} = \sqrt{[-R'(0)]}$, являющуюся среднеквадратичной угловой частотой. Величина ω_1 может быть определена из соотношений Хинчина—Винера [2, 8], устанавливающих связь между спектром $G(\omega)$ и коэффициентом корреляции $R(\tau)$. Заметим, что

$$\left[\frac{d^n R(\tau)}{d\tau^n} \right]_{\tau=0} = \int_0^\infty G(\omega) \left[\frac{d^n \cos(\omega\tau)}{d\tau^n} \right]_{\tau=0} d\omega$$

или

$$[R^n(\tau)]_{\tau=0} = \left(\cos \frac{n\pi}{2} \right) \int_0^\infty \omega^n G(\omega) d\omega.$$

Обозначим интеграл

$$\int_0^\infty \omega^n G(\omega) d\omega = M_n. \quad (2)$$

Поскольку $G(\omega)$ представляет спектральную плотность, то, по аналогии с моментами распределения вероятностей, величины M_n назовем моментами спектра. Из соотношения (2) следует, что второй момент $M_2 = -R(0) = \int_0^\infty \omega^2 G(\omega) d\omega$ представляет ω_1^2 , а ω_1 — среднеквадратичную частоту. Параметр ν выражается через моменты спектра в виде

$$\nu^2 = 1 - M_2^2/M_4. \quad (3)$$

Определение среднеквадратичной частоты ω_1 и параметра ν с помощью моментов спектра является единственным возможным в случаях, когда случайный процесс недифференцируем.

Это было проиллюстрировано в [10] при определении среднеквадратичной частоты процесса, имеющего коэффициент корреляции $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ и спектр $G(\omega) = 2\alpha/\pi(\omega^2 + \alpha^2)$. Использование соотношения (2) для определения ω_1^2 процесса, имеющего спектр $\sim 1/\omega^2$, при-

водит к тому, что подынтегральное выражение, как функция частоты ω , не убывает на бесконечности как $1/\omega$, что требуется для интегрируемости спектра [11, 12]. Это приводит к расходимости интеграла (2). Однако если определить ω_1^2 в виде

$$\omega_1^2 = \left\{ \int_0^\infty |i\omega s(i\omega) - [i\omega s(i\omega)]_{\omega=\infty}|^2 d\omega \right\} \times \\ \times \left[\int_0^\infty |s(i\omega)|^2 d\omega \right]^{-1}, \quad (4)$$

то, как можно показать [10], для спектра $G(\omega) = 2\alpha/\pi(\omega^2 + \alpha^2)$ величина $\omega_1^2 = \alpha^2$. При вычислении использовалась факторизация [11], т. е. представление спектра процесса в виде $G(\omega) = s(i\omega)s^*(i\omega) = |s(i\omega)|^2$. Очевидно, что для спектров $G(\omega) \sim 1/\omega^r$ функция $s(i\omega) \sim 1/(i\omega)^r$ и при $r > 1$ у процесса существует вторая производная коэффициента корреляции и член $|i\omega s(i\omega)|_{i\omega=\infty} \sim 1/(i\omega)^{r-1} \rightarrow 0$. В этом случае ω_1^2 совпадает с параметром, определенным через существующую вторую производную коэффициента корреляции. Соотношение (4) может быть обобщено в виде

$$M_{2r} = \left\{ \int_0^\infty |[(i\omega)^r s(i\omega)] - [i\omega s(i\omega)]_{\omega=\infty}|^2 d\omega \right\} \times \\ \times \left[\int_0^\infty G(\omega) d\omega \right]^{-1}$$

на моменты спектра порядка $2r$ при условии, что спектр процесса $G(\omega)$ имеет вид дробно-рациональной функции частоты ω порядка $1/\omega^{2l}$ при $l \geq r$, где $2l = 2n - 2m$. При этом $2n$ — наивысший показатель полинома в числителе, а $2m$ — в знаменателе. Параметр r можно определить таким способом для спектров, зависящих от ω , не слабее чем $1/\omega^4$. Экспериментальные коэффициенты корреляции случайных

воздействий представлены на рис. 1.

Для математического описания экспериментальные коэффициенты корреляции необходимо аппроксимировать подходящим аналитическим выражением. При этом желательно, чтобы выражение было несложное, содержало небольшое число параметров (один—два) и позволяло его последующее использование в фурье-преобразовании для определения аналитического вида спектра, интегрирования спектра (для вычислений моментов спектра) и т. д., а с другой стороны, с удовлетворительной точностью совпадало с формой экспериментальной кривой (при аналоговом измерении) или экспериментальными точками (при дискретном измерении). Для коэффициента корреляции с осцилляциями (точки \times на рис. 1) сформулированным требованиям удовлетворяет аналитическое выражение вида

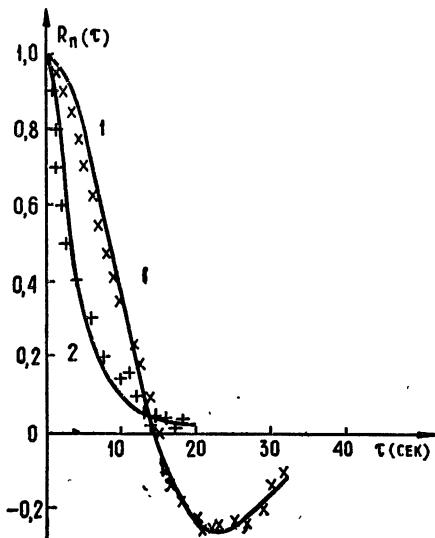


Рис. 1. Коэффициенты автокорреляции случайных воздействий.

рекомендованное требование удовлетворяет аналитическое выражение вида

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos(\beta|\tau|) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right]. \quad (5)$$

Для определения параметров α и β необходимо иметь два уравнения. Эти уравнения целесообразно получить из двух условий в точке τ экстремума коэффициента корреляции $R_- = R(\tau_-)$. Одно уравнение $R'(\tau_-) = 0$, это в случае, если $\sin(\beta|\tau|) = 0$ и, следовательно,

$$\beta = \pi/\tau_- . \quad (6)$$

Второе условие, с использованием (6), получается в виде $R(\tau_-) = -e^{-\alpha\tau_-}$. Поскольку $R(\tau_-) < 0$, то, обозначая $R(\tau_-) = -|R_-|$, после логарифмирования для α получается выражение

$$\alpha = |\ln|R_-||/\tau_- . \quad (7)$$

Для данных, приведенных на рис. 1, т. е. $R_- = -0,25$ и $\tau_- = 22$ сек значения α и β , определенные по соотношениям (6), (7), оказались равными $\alpha = 0,06$ сек $^{-1}$, $\beta = 0,14$ сек $^{-1}$. Кривая 1 (рис. 1) описывается аналитическим выражением (5) при $\alpha = 0,06$ сек $^{-1}$ и $\beta = 0,14$ сек $^{-1}$. Для коэффициентов корреляции без осцилляций (точки + на рис. 1) удобным аналитическим выражением является выражение вида

$$R(\tau) = (ke^{-\alpha|\tau|} - e^{-\alpha k|\tau|})/(k-1) . \quad (8)$$

при $k > 1$. Спектр, соответствующий этому коэффициенту корреляции, имеет вид

$$G(\omega) = \frac{2\omega^2 k (k+1)}{\pi (\omega^2 + \alpha^2) (\omega^2 + \alpha^2 k^2)} . \quad (9)$$

В отличие от соотношения (5) выражение (8) описывает плавно спадающую кривую без пересечений с осью τ . Поэтому для получения двух уравнений использовались следующие условия:

$$\int_0^\infty R(\tau) d\tau = \tau_0, \quad \int_0^\infty \tau R(\tau) d\tau = \tau_0^2.$$

Обозначим соотношение $\tau_0^2/\tau_0^2 = A^2$. Из приведенных выше условий для α и k получаются два уравнения вида

$$\alpha = (k+1)/k\tau_0 \quad (10)$$

и

$$k^2 + \frac{2A^2 - 1}{A^2 - 1} k + 1 = 0. \quad (11)$$

Для экспериментальных значений коэффициента корреляции (точки +), приведенных на рис. 1, величина $\tau_0 = 4,6$ сек, а $A^2 = 0,9$. На основании решений уравнений (10) и (11) величины α и k оказались равными $\alpha = 0,25$ сек $^{-1}$, $k = 7$. Сплошная кривая 2 на рис. 1 соответствует выражению (8) при значениях $\alpha = 0,25$ сек $^{-1}$ и $k = 7$. На рис. 2 приведены спектры для коэффициентов корреляции (1) и (2), представленных на рис. 1.

С использованием соотношений (2) и (3) для спектра (9) и соответствующего коэффициента корреляции (8) среднеквадратичная частота $\omega_1^2 = \alpha^2 k$, а параметр $v = (k+1)/[(k+1)^2 + k]^{1/2}$. При изменении величины k от 1 до 10 параметр v меняется от 0,89 до 0,96. Из приведенного соотношения для v и спектра видно, что параметр v ха-

рактеризует форму спада спектра с ростом ω . При этом чем «медленнее» спадает спектр, тем больше параметр v . При $k \rightarrow \infty$ коэффициент корреляции (8) стремится к линейной экспоненте, а параметр v стремится к единице как и для белого шума, т. е. недифференцируемого случайного процесса. Из приведенного анализа следует, что при рассмотрении автоматической системы со случайными нагрузками для усталостных испытаний целесообразно выбрать сигнал с коэффициентом корреляции вида (8), который позволяет варьировать отдельно средним числом нулевых выбросов в единицу времени $N_{10} = \alpha^2 k / 2\pi$ с помощью параметра α и параметром v (с помощью величины k) имитируемого или воспроизведимого реального случайного процесса.

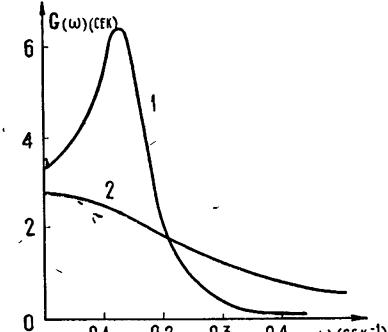


Рис. 2. Спектры мощности, соответствующие коэффициентам автокорреляции, приведенным на рис. 1.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Отыскание экстремума критерия—минимума среднеквадратичной ошибки—и получение тем самым уравнения для динамических характеристик при любых воздействиях на систему как детерминированных, так и случайных существенным образом зависит от ограничений, накладываемых на допустимые системы. Для линейных систем исчерпывающей динамической характеристикой является весовая функция $g(\tau)$ или передаточная функция $\Phi(p)$, являющаяся преобразованием Лапласа по $p = i\omega$ весовой функции [2, 4]. Виды ограничения на весовую функцию вызываются рядом причин. Первая основная причина—это условие физической возможности динамической системы, которое записывается в виде $g(\tau) = 0$ при $\tau \leq 0$. При наличии во входном сигнале наряду со случаем полезным сигналом и детерминированной компоненты, из-за требования равенства нулю систематической (статической) ошибки, обусловленной детерминированной компонентой, и тем самым обеспечения астатизма системы накладываются соответствующие ограничения на моменты весовой функции или производные передаточной функции [2, 4, 5]. Эти условия по аналогии с терминологией математической статистики в теории оценок статистических параметров и характеристик случайных процессов называют условиями несмещенностии. В рассматриваемой задаче детерминированная компонента отсутствует, и если на весовую функцию наложено только ограничение физической возможности системы, то при идеальном преобразовании случного процесса $x(t)$ в случайные нагрузки минимум среднеквадратичной ошибки наступает при условии, если весовая функция удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. В этом случае, если фурье-преобразование ядра представляет дробно-рациональную функцию ω , т. е. имеет спектр вида

$$G(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \omega^2 + \dots + b_m \omega^{2m}}{a_0 + a_1 \omega^2 + \dots + a_n \omega^{2n}} = \frac{M(i\omega)}{N(i\omega)} \frac{M^*(i\omega)}{N^*(i\omega)}. \quad (12)$$

то решение уравнения [2, 5], имеет вид

$$g_{opt}(\theta) = \sum_{j=1}^n B \exp(\lambda_j \theta) + \sum_{j=1}^n E_j \delta^{(j)}(\theta) + \dots \quad (13)$$

$$+ N(p) N^*(p) M^{-1}(p) M^{*-1}(p) [\Psi_x(\theta)],$$

где λ_j — корни характеристического многочлена $M(p)M^*(p) = 0$. Из-за наличия в решении (13) дельта-функций и их производных практическая реализуемость оптимальной весовой функции $g_{\text{opt}}(\tau)$ невозможна. Следовательно, по соображениям практической реализуемости на весовую функцию $g_{\text{opt}}(\tau)$ необходимо помимо условия физической возможности наложить дополнительные ограничения. Если практически реализуемая система должна обеспечить ограниченность только дисперсии, то на весовую функцию должно быть наложено условие ограничения интеграла от квадрата весовой функции. Если требуется ограниченность дисперсии производной случайного процесса на выходе системы при наличии на входе белого шума, то это требует ограничения интеграла от квадрата производной весовой функции и т. д. Решение вариационной задачи на минимум среднеквадратичной ошибки при условии ограничения интеграла от квадрата весовой функции приводит к интегральному уравнению [5] вида

$$\int_0^\infty \Psi_x(\tau - \theta) g_{\text{opt}}(\theta) d\theta + \lambda' g_{\text{opt}}(\tau) = \Psi_x(\tau), \quad (14)$$

которое называют уравнением Фредгольма второго рода, так как в нем в виде свободного члена содержится искомая весовая функция. Ввиду этого обстоятельства решение уравнения (14) не может содержать дельта-функций. При наложении ограничений на квадраты производных весовых функций в уравнение (14) добавляются дополнительные свободные члены с весовой функцией $g_{\text{opt}}(\tau)$ и соответствующими неопределенными множителями Лагранжа λ . Очевидно, что производные весовых функций и моменты передаточных функций связаны аналогичными соотношениями, как производные коэффициентов корреляции и моменты спектра. Из рассмотрения этой аналогии следует, что, если определять оптимальную систему на входные воздействия в виде белого шума, то для обеспечения существования второго и четвертого моментов спектра процесса на выходе оптимальной практически реализуемой системы необходимо наложить ограничения на интеграл от квадрата второй и четвертой производных весовой функций оптимальной системы, что приведет к появлению двух независимых множителей Лагранжа, что не только загромоздит вычисления аналитического выражения оптимальной весовой функции, но и затруднит их разумный выбор при практической реализации. Если оптимальную систему определять по входному воздействию со спектром, допускающим конечные значения второго и четвертого моментов спектра (например, выражение (9)), то для практической реализуемости достаточно, очевидно, условия ограничения дисперсии, а для определения оптимальной системы — использовать решение уравнения (14). Если член с $\lambda'_{\text{opt}}(\theta)$ ввести под знак интеграла, то уравнение (14) принимает вид

$$\int_0^\infty [\Psi_x(\tau - \theta) + \lambda' \delta(\theta - \tau)] g_{\text{opt}}(\theta) d\theta = \Psi_x(\tau). \quad (15)$$

После перехода к коэффициентам корреляции $R_x(\tau)$ уравнение (15) представляется в виде

$$\int_0^\infty [R_x(\tau - \theta) + \lambda_0 \delta(\theta - \tau)] g_{\text{opt}}(\theta) d\theta = R_x(\tau), \quad (16)$$

где $\lambda'/\sigma^2 = \lambda_0$. Для управляющего воздействия со спектром (9) фурье-преобразование ядра имеет вид

$$\frac{M(i\omega) M^*(i\omega)}{N(i\omega) N^*(i\omega)} = \frac{2\alpha^3 k(k+1)}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \alpha^2 k^2)} + \frac{2\lambda_0}{\pi}. \quad (17)$$

Вычисления показали, что действие операторов M и N на выражение (8) для $R_x(\theta)$ приводит к тому, что член $M(p) M^*(p) N^{-1}(p) N^{-1*}(p) \times \times [\Psi_x(\theta)]$ в решении (13) обращается в нуль. Из соотношения (17) следует, что $m = n = 2$ и, следовательно, члены с дельта-функциями из решения (13) исчезают. Итак, для входного воздействия, описываемого соотношением (8), из решения (13) получаем выражение для оптимальной весовой функции в виде

$$g_{\text{opt}}(\theta) = \sum_{j=1}^2 B_j \exp(\lambda_j \theta), \quad (18)$$

где λ_j являются корнями характеристического уравнения

$$M(\lambda) M^*(\lambda) = \lambda^4 - \alpha^2(k^2 + 1)\lambda^2 + \alpha^2 k^2 + \alpha^3 k(k+1)/\lambda_0 = 0. \quad (19)$$

Для обеспечения устойчивости решения (оптимальной системы) необходимо оставить лишь отрицательные значения корней λ_j характеристического уравнения. Уравнение (19) относительно λ^4 является биквадратным, и его корни равны

$$\lambda_{1,2} = -\left\{ \frac{\alpha^2(k^2 - 1)}{2} \pm \left[\frac{\alpha^4(k^2 - 1)^2}{4} - \frac{\alpha^3 k(k+1)}{\lambda_0} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

Знак λ_j учтем в виде $\lambda_j = -\lambda_1; -\lambda_2$ и положим $\lambda_1 > \lambda_2$. Подставим выражение (18) в интегральное уравнение (16) и проинтегрируем его с использованием соотношения (18). В результате интегрирования получим при множителях $e^{-\alpha\tau}$, $e^{-\alpha k\tau}$ соответственно следующие коэффициенты:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{B_j}{\alpha - \lambda_j} + 1 = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{B_j}{\alpha k - \lambda_j} + 1 = 0; \quad (21)$$

$$\left(\frac{\alpha k}{\alpha^2 - \lambda_j^2} - \frac{\alpha k}{\alpha^2 k^2 - \lambda_j^2} + \lambda_0 \right) \exp(-\lambda_j \tau) B_j = 0. \quad (22)$$

Система (21) из двух уравнений позволяет отыскать два неизвестных коэффициента B_j . Уравнение (22) при $B_j \neq 0$ приводит к характеристическому уравнению (19). Из выражений (18), (20) и (21) следует, что при заданных α и k параметры λ_j и B_j оптимальной весовой функции $g_{\text{opt}}(\theta)$ зависят от величины λ_0 неопределенного пока множителя Лагранжа. Для выбора величин λ_0 воспользуемся зависимостью величины среднеквадратичной ошибки $\langle \varepsilon^2 \rangle$ [5] оптимальной системы с весовой функцией $g_{\text{opt}}(\theta)$ от параметров α , k и λ_0 . Структурные скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение [9]. Поскольку в рассматриваемом случае $\langle \varepsilon \rangle = 0$, то $\langle \varepsilon^2 \rangle = \sigma_\varepsilon^2$. Из общего выражения среднеквадратичной ошибки [5] имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} g_H(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\tau - \theta) g_H(\theta) d\theta - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{opt}}(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\tau - \theta) g_H(\tau) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{opt}}(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\tau - \theta) \varphi_{\text{opt}}(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что $\Psi_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau)$ и $g_H(\tau) = \delta(\tau)$, из соотношения (23) получаем выражение для относительной (стандартизованной) дисперсии ошибки на выходе оптимальной системы $\sigma_{\text{opt}}^2 = \sigma_e^2/\sigma_x^2$ в виде

$$\sigma_{\text{opt}}^2 = 1 - 2 \int_0^\infty g_{\text{opt}}(\tau) R_x(\tau) d\tau + \int_0^\infty g_{\text{opt}}(\tau) d\tau \int_0^\infty R_x(\tau - \theta) g_{\text{opt}}(\theta) d\theta. \quad (24)$$

Вычисление интеграла $J = \int_0^\infty R_x(\tau - \theta) g_{\text{opt}}(\theta) d\theta$ для $g_{\text{opt}}(\theta)$, определяемой выражением (8), аналогично вычислениям при интегрировании уравнения (16). Результат вычисления интеграла $\int_0^\infty g_{\text{opt}}(\tau) R_x(\tau) d\tau$ следует из результата вычисления предыдущего интеграла при замене $\tau - \theta$ на τ . После соответствующих вычислений, в процессе которых использовались условия (21) и (22), выражение для дисперсии относительной ошибки представляется в виде

$$\sigma_{\text{opt}}^2 = 1 - \sum_{j=1}^2 \frac{\alpha(k+1) + \lambda_j}{(\alpha + \lambda_j)(\alpha k + \lambda_j)} B_j - \lambda_0 \int_0^\infty g_{\text{opt}}^2(\theta) d\theta. \quad (25)$$

Выражение (18) для $g_{\text{opt}}(\theta)$ допускает интегрирование второго члена в замкнутом виде.

В результате интегрирования соотношение (25) представляется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{opt}}^2 = & 1 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \frac{[\alpha(k+1) + \lambda_1](\lambda_1 - \alpha)(\lambda_1 - \alpha k)}{(\lambda_1 + \alpha)(\lambda_1 + \alpha k)} - \right. \\ & - \frac{[\alpha(k+1) + \lambda_2](\lambda_2 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha k)}{(\lambda_2 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha k)} \Big\} - \\ & - \frac{\lambda_0}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\frac{(\alpha - \lambda_1)^2(\alpha k - \lambda_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(\alpha - \lambda_2)^2(\alpha k - \lambda_2)^2}{\lambda_2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{4(\alpha - \lambda_1)(\alpha k - \lambda_1)(\alpha - \lambda_2)(\alpha k - \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из соотношения (26) следует, что с уменьшением величины λ_0 среднеквадратичная ошибка σ_{opt}^2 уменьшается. С другой стороны, из соотношения (20) видно, что при уменьшении λ_0 может оказаться, что $\alpha^4(k^2 - 1)^2/4$ будет больше $\alpha^3 k(k+1)/\lambda_0$ а это приведет к тому, что λ_j окажутся комплексными, и, следовательно, весовая функция будет иметь осцилляции, а ее фурье-преобразование (оптимальная передаточная функция $\Phi_{\text{opt}}(p)$) содержать колебательные звенья, что существенно усложнит задачу практической реализации. Кроме того, очевидно, что комплексность корней λ_j существенно усложняет как определение величины σ_{opt}^2 , так и параметров оптимальной весовой функции по соотношениям (18) и (21). По этим соображениям желателен выбор λ_0 таким, чтобы корни λ_j были действительными. Это будет при условии

$$\lambda_0 \geq 4/\alpha k(k+1), \quad (27)$$

В этом случае по допускаемой величине ошибки σ_{opt}^2 для заданных α и k определяется величина λ_0 по кривой, типа приведенной на рис. 3.

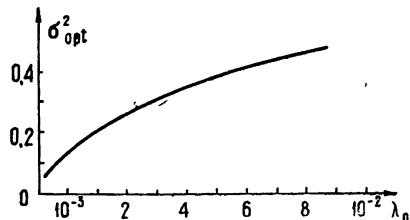


Рис. 3. Зависимость относительной дисперсии ошибки системы как функции множителя Лагранжа λ_0 для значений параметра $\alpha = 40 \text{ сек}^{-1}$ и $k = 10$.

Значения λ_1, λ_2 определяются по соотношению (20) на промежуточном этапе вычислений σ_{opt}^2 . При известных значениях α, k и λ , из системы уравнений (21), решаемых по правилу Крамера [14], следует, что

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{(\alpha - \lambda_1)(\alpha k - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ B_2 &= \frac{(\alpha - \lambda_2)(\alpha k - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \quad (28)$$

На основании выражений (18) и (28) оптимальная весовая функция $g_{\text{opt}}(\theta)$ имеет вид

$$g_{\text{opt}}(\theta) = B_1 \exp(-\lambda_1 \theta) + B_2 \exp(-\lambda_2 \theta), \quad (29)$$

а ее фурье-преобразование—передаточная функция

$$\Phi_{\text{opt}}(p) = \frac{k_0(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (30)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{(\alpha - \lambda_1)(\alpha k - \lambda_1)}{\lambda_1} - \frac{(\alpha - \lambda_2)(\alpha k - \lambda_2)}{\lambda_2} \right];$$

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \quad T_2 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad T_3 = \frac{k_1 T_2 - k_2 T_1}{k_1 - k_2};$$

$$k_1 = \frac{(\alpha - \lambda_1)(\alpha k - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad k_2 = \frac{(\alpha - \lambda_2)(\alpha k - \lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

При наличии помехи на входе, которую обычно считают белым шумом, т. е. имеющей спектр $G_E(\omega) = G_{0E}$, и которая некоррелирована с полезным случайным сигналом, корреляционная функция входного воздействия (14) будет содержать как $\Psi_r(\tau - \theta)$, так и $G_{0E} \delta(\tau - \theta)$. Это означает, что помимо членов с λ_0 в соотношениях (16), (17), (19), (20), (26) появится такой же член с G_{0E} . Если в отсутствие шума предельная точность (т. е. физически возможная система) характеризуется минимальной среднеквадратичной ошибкой $\sigma_{\text{opt}}^2 = 0$, то при наличии шума, как следует из приведенных соотношений, предельная точность ограничивается величиной G_{0E} .

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Общая функциональная схема автоматической системы [3, 4] приведена на рис. 4. Цифрой 1 обозначен источник информации о задаче управления, в нашем случае это формирующий фильтр; 2—устройство

для анализа вводимой информации в систему управления и выработки решения. В рассматриваемом случае это сравнивающее устройство,

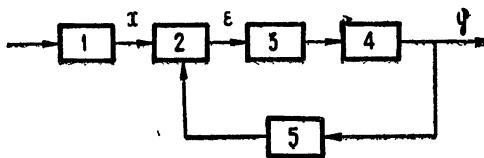


Рис. 4. Общая функциональная схема системы автоматического управления.

создающее сигнал ошибки $\varepsilon = y - x$ (иногда называемой параметром управления [3] или рассогласованием [4]). Цифры 3 и 4 обозначают соответственно исполнительное устройство и объект управления (в дальнейшем будем это называть заданной машинной частью системы). Источник информации о результатах управления обозначен 5. Мы рассматриваем системы с жесткой отрицательной обратной связью [5], поэтому устройства 2 и 3 будут объединены и обозначены (—). Установленная прочность элементов конструкций при случайных нагрузках [6] определяется значением числа циклов до разрушения N_{1n} и в инфразвуковом диапазоне в пределах одной—двух декад является частотно-независимой [6]. В связи с этим для ускорения испытаний целесообразно работать на частотах в 100—150 раз превышающих частоты процессов в натурных условиях, а параметр ν сохранять в соответствии с экспериментальными данными. Для экспериментальных данных, приведенных на рис. 1, величины $\alpha = 40 \text{ сек}^{-1}$ и $k = 10$ удовлетворяют изложенному выше. Для этих данных $\sigma_{\alpha, k}^2 = 10\%$. Такая точность в практике работы оказывается достаточной. Полагая, что полоса частот $\Delta\omega$ приближенно обратно пропорциональна интервалу корреляции τ_0 , то, как следует из (10), $\Delta\omega \sim \alpha k / (k + 1) \approx 40 \text{ сек}^{-1}$. Случайный сигнал с равномерным спектром G_0 в полосе несколько шире $\Delta\omega$ обеспечивается генератором нормального шума инфразвукового диапазона [17]. Вид и параметры передаточной функции $\Phi(p)$ линейного формирующего фильтра 1 (рис. 4) для синтеза случайного сигнала со спектром $G(\omega)$ (9) определяются следующим образом. Известно, что спектр $G(\omega)$ на выходе линейной системы с передаточной функцией $\Phi(p)$ определяется спектром входного сигнала G_0 в виде $G(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 G_0$. Из этого следует, что

$$|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{G(\omega)}{G_0} = \frac{2}{\pi G_0} \frac{k(k+1)}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha^2 k^2 + \omega^2)}. \quad (31)$$

Поскольку $|\Phi(i\omega)|^2$ представляет четный многочлен ω с действительными коэффициентами, то на основании следствия основной теоремы алгебры [14] его корни попарно комплексно-сопряженные, следовательно, соотношение (31) может быть факторизовано [12], т. е. представлено в виде произведения $|\Phi(i\omega)|^2 = s(i\omega)s^*(i\omega)$ двух комплексно-сопряженных функций: $s(i\omega)$, аналитической в нижней полуплоскости, и $s^*(i\omega)$, аналитической в верхней полуплоскости. Из выражения (31) видно, что корни полинома знаменателя $\omega_1 = i\alpha$ и $\omega_2 = i\alpha k$ расположены в верхней полуплоскости относительно вещественной оси ω , следовательно, функция $s(i\omega)$ имеет вид

$$s(i\omega) = \left[\frac{2k(k+1)}{\pi G_0} \right]^{1/2} \frac{1}{(i\omega + \alpha)(i\omega + \alpha k)}. \quad (32)$$

Так как функция $s(i\omega) = \Phi(p)$ является аналитической и ограниченной в нижней полуплоскости (или в правой полуплоскости комплексной переменной p), то $\Phi(p)$ является передаточной функцией устойчивой линейной системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Передаточная функция (32) реализуется с помощью операционного усилителя по известной схеме [18].

Для создания случайных нагрузок из электрического сигнала со спектром, примыкающим к нулевой частоте, в качестве исполнительного устройства удобно использовать электрогидравлический следящий привод, преимущества и конструктивные особенности которого описаны в литературе. Структурная схема разомкнутой системы [19, 20] исполнительного устройства приведена на рис. 5, где $\Phi_{\text{эм}}(p)$ — передаточная

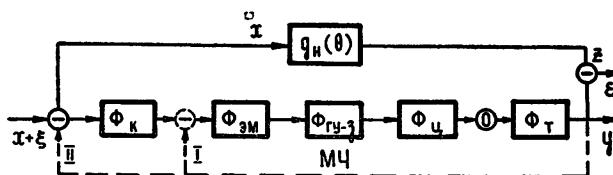


Рис. 5. Структурная схема динамической системы со случайными нагрузками.

функция электромеханического преобразователя, $\Phi_{\text{ГУ-3}}(p)$ — передаточная функция гидроусилителя с золотником, $\Phi_{\text{Ч}}(p)$ — передаточная функция силового цилиндра с образцом элемента конструкции (0), $\Phi_{\text{Т}}$ — передаточная функция тензометрической аппаратуры типа ТА-5 [21].

На рис. 6 приведена нагрузочная статическая характеристика, а на рис. 7 крестиками нанесены значения амплитудной характеристики

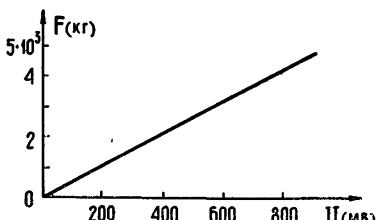


Рис. 6. Статическая характеристика электрогидравлического следящего привода.

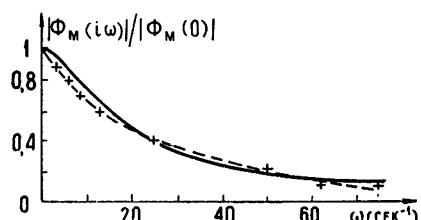


Рис. 7. Амплитудная частотная характеристика машинной части системы и модуль передаточной функции апериодического звена с $T_m = 0,1 \text{ сек}^{-1}$, $k_m = 1$.

модуля передаточной функции $\Phi_m(p)$ разомкнутой системы электрогидравлического привода (заданной машинной части системы). Сплошная линия — аппроксимирующая кривая

$$|\Phi_m(i\omega)| = 1/(T_m^2 \omega^2 + 1)^{1/2}, \quad (33)$$

соответствующая инерционному (апериодическому) звену первого порядка с параметром $k_m = 1$ и $T_m = 0,1 \text{ сек}$. Если автоматическую систему получать из разомкнутой системы (машинной части) охватом отрицательной жесткой обратной связью (пунктир I на рис. 4), то можно показать [15], что в рассматриваемом случае замкнутая система будет иметь постоянную времени $T_m/2 \approx 0,05 \text{ сек}$. Ясно, что сигнал с полюсом $\Delta\omega = 40 \text{ сек}^{-1}$ на выходе такой системы будет сильно искажен. Для устранения искажений перед машинной частью системы необходимо

поставить корректирующее устройство, соответствующее оптимальной передаточной функции $\Phi_{\text{opt}}(p)$. С использованием структурных преобразований [4] для передаточной функции корректирующего устройства $\Phi_k(p)$ (соответствующей оптимальной передаточной функции $\Phi_{\text{opt}}(p)$) и передаточной функции заданной машинной части получается выражение

$$\Phi_k(p) = \frac{\Phi_{\text{opt}}(p)}{[1 - \Phi_{\text{opt}}(p)]\Phi_m(p)}. \quad (34)$$

На основании соотношений (30), (33) и (34)

$$\Phi_k(p) = \frac{k_a(T_{\text{opt}}p + 1)(T_m p + 1)}{T^2 p^2 + 2TL + 1}.$$

Однако это выражение для $\alpha = 40 \text{ сек}^{-1}$ и $k = 10$ можно упростить без существенной потери качества.

На рис. 8 представлена оптимальная весовая функция $g_{\text{opt}}(\theta)$

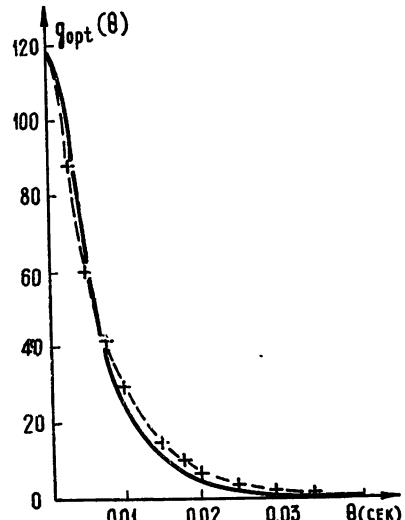


Рис. 8. Графики оптимальной и аппроксимированной аналитическим выражением $g(\theta) = (k_a/T_a) \exp(-\theta/T_a)$ весовых функций системы.

(сплошная линия), полученная из соотношений (20), (27), (28) и (29) для $\alpha = 40 \text{ сек}^{-1}$ и $k = 10$. Штрих-пунктирная кривая соответствует аппроксимирующей функции $g_a(\theta) = (k_a/T_a) \exp(-\theta/T_a)$ для параметров $k_a = 0,84$, $T_a = 0,007 \text{ сек}$, а соответствующая $g_a(\theta)$ передаточная функция $\Phi_a(p)$ имеет вид

$$\Phi_a(p) = k_a/(T_a p + 1). \quad (35)$$

Если теперь подставить выражение (35) в соотношение (34), то

$$\Phi_k(p) = k_a(T_m p + 1) \left[(1 - k_a) \left(\frac{T_a}{1 - k_a} p + 1 \right) \right]^{-1}. \quad (36)$$

Из сопоставления соотношений (34) и (37) следует, что с помощью аппроксимации весовой функции существенно упрощается структура корректирующего устройства, тем самым достигается экономия операционных усилителей при практической реализации. Передаточная функция (36) реализуется по известной схеме [18]. Сравнивающее устройство было выполнено на операционном усилителе УУ-2 по обычной схеме вычитания [18]. Из сопоставления постоянных времени $T_a = 7 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ $T_m/2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ сек}$ видны преимущества оптимизации

системы. На рис. 9 приведены осциллограммы сигнала $x(t)$ на выходе формирующего фильтра, на выходе системы $y(t)$ и ошибки слежения

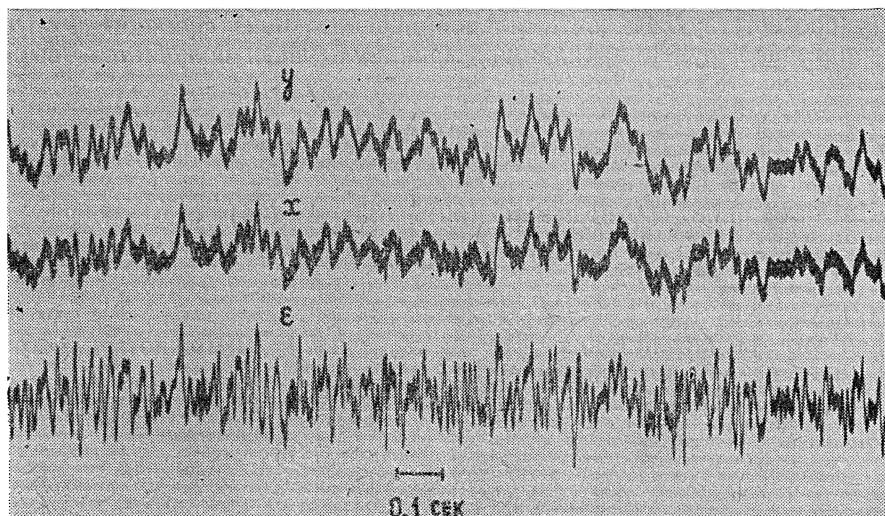


Рис. 9. Осциллограммы случайного входного сигнала $x(t)$, выходного $y(t)$ и увеличенной в 12 раз ошибки слежения $\epsilon(t)$.

(t). Скорость записи $25 \text{ мм} \cdot \text{сек}^{-1}$, при этом коэффициент усиления при записи $\epsilon(t)$ был равен 12 по сравнению с записями процесса $x(t)$ и $y(t)$. Величины σ_x^2 , σ_y^2 , σ_ϵ^2 , а также N_{10} и N_{1+} определялись с помощью специально разработанного на элементах аналоговой вычислительной техники анализатора выбросов случайного процесса (АВСП) с относительной среднеквадратичной ошибкой 5 %. Экспериментальные значения статистических параметров согласуются с теоретическими.

Автор благодарит В. А. Зверева за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Случайные колебания, под ред. С. Кренделл, изд. Мир, М., 1967.
2. В. В. Соловьевников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.
3. А. А. Фельдбаум, Основы теории оптимальных автоматических систем, изд. Наука, М., 1966.
4. Основы автоматического управления, под ред. В. С. Пугачева, Физматгиз, М., 1963.
5. Теория автоматического регулирования, книга 2, Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования, под ред. В. В. Соловьёвникова, изд. Машиностроение, М 1967
6. Г. А. Андреев, И. Д. Гиц, Изв. высш. уч. зав. — Машиностроение, № 3. 59 (1968).
7. С. О. Райс, сб. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ч. 2, ИЛ, М., 1953.
8. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
9. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1123 (1967).
10. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
11. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике теории связи и оптике, Физматгиз, М., 1962.
12. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, изд. Наука, М., 1967.
13. Л. Я. Цлаф, Вариационное исчисление и интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1966.

- 14 А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, М., 1962.
- 15 Н. Т. Кузовков, Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах, Оборонгиз, М., 1960.
- 16 А. И. Гудков, П. С Лешаков, Л. Г. Райков, Внешние нагрузки и прочность летательных аппаратов, Оборонгиз, М., 1963.
- 17 Г. А. Андреев, Л. К. Кязева, Приборы и техника эксперимента, № 5, 121 (1962).
- 18 Б. Я. Коган, Электронные моделирующие устройства, Физматгиз, М., 1963.
- 19 Н. С. Гамынин, Основы следящего гидравлического привода, Оборонгиз, М., 1962.
- 20 В. А. Хохлов, Электрогидравлический следящий привод, изд. Наука, М., 1966.
- 21 А. В. Кантор, Аппаратура и методы измерений при испытаниях ракет, Оборонгиз, М., 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1968 г.

STATISTIC ANALYSIS AND SYNTHESIS OF PROCESSES
AND OPTIMAL AUTOMATIC SYSTEMS WITH STOCHASTIC LOADS

G. A. Andreyev

The paper treats the approximation technique for experimental oscillating and smoothly falling correlation functions permitting the second and the fourth power spectrum moments existence. Using first and second kind Fredholm equations an analytic expression for weighting (transmitting) function of a statistically optimal (as to the mean-square error minimum criterion) feasible dynamic system is obtained. The parameters and characteristics of the dynamic system being built for generation of continuous normal stochastic loads are coinciding with the optimal ones in the limits of metering errors.

УДК 519.21

ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ ИЗМЕНЕНИИ СВОЙСТВ ШУМА В НАБЛЮДЕНИЯХ

A. И. Яшин

Исследуется нелинейная фильтрация марковских диффузионных процессов. На примере иллюстрируется вывод уравнений для условных симминвариантов исследуемых компонент.

При разработке современных систем автоматического управления возникает необходимость исследования способов обработки и использования поступающей информации. Часто обработка заключается в выделении полезного сигнала, наблюдаемого на фоне помех (задача фильтрации).

При этом фильтрующая система должна быть возможно более простой конструктивно и в то же время обеспечивать приемлемую точность оценок. Наиболее употребительны в настоящее время линейные фильтрующие системы.

Среди методов, позволяющих синтезировать линейные фильтры, следует выделить классический, заключающийся в решении уравнения Винера — Хопфа (см., например, [1]), и метод дифференциальных уравнений, с помощью которого получаются уравнения для оптимальных в среднеквадратичном оценок полезного сигнала [2, 3]. Последний оказывается удобным в практическом отношении, так как уравнения для оценок задают структуру фильтра.

Важно отметить, что линейные фильтры являются оптимальными лишь для гауссовых процессов, поэтому, если входной сигнал негауссов, правомерной оказывается задача построения нелинейного фильтра, вырабатывающего необходимые оценки.

В настоящей работе предлагается способ получения приближенных оценок в одной задаче нелинейной фильтрации.

Исследуемый процесс Θ_{2t} совершает эволюцию в соответствии с уравнением

$$d\Theta_{2t} = -\alpha_2 \Theta_{2t} dt + \sigma_1 dW_{1t}. \quad (1)$$

Процесс Θ_{3t} является помехой, появляющейся в наблюдениях в случайные интервалы времени.

Введем процесс Θ_{1t} , равный 1, если помеха Θ_{3t} присутствует в наблюдениях, в противном случае — 0. Будем считать, что процесс Θ_1 является скачкообразным марковским процессом с двумя состояниями 0 и 1 и матрицей интенсивностей переходов $\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$. Предположим далее, что эволюция процесса Θ_{3t} происходит лишь при Θ_{1t} , равном 1. Этому случаю соответствует, например, стохастическое уравнение для Θ_{3t}

$$d\Theta_{3t} = -\Theta_{1t} \alpha_3 \Theta_{3t} dt + \Theta_{1t} \sigma_2 dW_{2t}. \quad (2)$$

Пусть в наблюдениях кроме помехи Θ_{3t} присутствует постоянно

действующая помеха типа «белый шум». Наблюдаемый процесс будет иметь вид

$$d\xi_t = (\Theta_{2t} + \Theta_{1t}, \Theta_{3t}) dt + \sigma_3 dW_{3t}, \quad (3)$$

где W_{1t} , W_{2t} , W_{3t} — независимые винеровские процессы.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям за компонентой ξ_t на отрезке времени $[0, t]$ судить о величине процесса Θ_{2t} в момент времени t . Для оценки точности фильтрации будет использоваться среднеквадратичный критерий. Известно (см., например, [4]), что в этом случае оптимальной оценкой будет апостериорное математическое ожидание процесса Θ_{2t} при условии, что фиксирована реализация $\xi_0^t = \xi_\tau$ ($0 < \tau \leq t$).

Легко видеть, что компоненты Θ_{1t} , Θ_{2t} , Θ_{3t} , ξ_t образуют четырехмерный марковский процесс с одной наблюдаемой компонентой.

Применяя методы, развивающиеся в работах [5–7], можно получить следующее уравнение для апостериорной плотности вероятности значений ненаблюдаемых компонент*:

$$\begin{aligned} dp(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t) = & \sum_i q_{ij} p(i, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t) dt + \\ & + \alpha_3 j \frac{\partial}{\partial \Theta_3} (\Theta_3 p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t)) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta_2^2} (\sigma_1^2 p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t)) dt + \\ & + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \Theta_2} \Theta_2 p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta_3^2} (j \sigma_2^2 p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t)) dt + \\ & + p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t) \frac{d\xi_t - (m_2 + jm_3) dt}{\sigma_3^2} [(\Theta_2 - m_2) + (\Theta_3 - m_3) j]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь функция $p(j, \Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t) = \frac{\partial^2}{\partial \Theta_2 \partial \Theta_3} p(\Theta_{1t}=j; \Theta_{2t} \leq \Theta_2, \Theta_{3t} \leq \Theta_3 | \xi_0^t)$ является условной вероятностью по компоненте Θ_{1t} и плотностью вероятности по компонентам Θ_{2t} и Θ_{3t} ; матрица

$$\| q_{ij} \| = \begin{vmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix},$$

$m_{2t} = M\{\Theta_{2t} | \xi_0^t\}$, $m_{3t} = M\{\Theta_{3t} | \xi_0^t\}$ — условные математические ожидания значений компонент Θ_{2t} и Θ_{3t} . Усредняя это уравнение по компонентам Θ_{2t} и Θ_{3t} , получим

$$\begin{aligned} d\pi_j(t) = & \sum_i q_{ij} \pi_i(t) dt - \pi_j(t) \frac{(m_{2j} - m_2) + (m_{3j} - m_3) j}{\sigma_3^2} \times \\ & \times [d\xi_t - (m_2 + jm_3) dt], \end{aligned} \quad (5)$$

где $\pi_j(t)$ — апостериорная вероятность того, что значение процесса $\Theta_{1t} = j$ при условии наблюдения реализации $\xi_0^t = \xi_\tau$ ($0 < \tau \leq t$)

$$m_{2j}(t) = M(\Theta_{2t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j), \quad m_{3j}(t) = M(\Theta_{3t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j)$$

— условные математические ожидания при фиксированных значениях

* Вывод (4) здесь не приводится ввиду громоздкости выкладок. С методикой получения подобных выражений для апостериорной плотности вероятности можно ознакомиться, например, в [7].

реализации ξ_0^t и процесса $\Theta_{1t} = j$. Для получения выражений для оценок m_{2j} и m_{3j} потребуется плотность

$$p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t, j) = \frac{\partial}{\partial \Theta_2} p(\Theta_{2t} < \Theta_2, \Theta_{3t} < \Theta_3 | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j),$$

которую можно получить, используя уравнения (4) и (5). При этом

$$p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j) = \frac{p(j, \Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t)}{\pi_j(t)}. \quad (6)$$

Рассматривая $p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j)$ как функцию $p(j, \Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t)$ и $\pi_j(t)$ вида (6) и дифференцируя (6), по формуле Ито, аналогично [8], получим следующее выражение для искомой плотности:

$$\begin{aligned} dp(\Theta_2, \Theta_3 | j \xi_0^t) = & \sum_i q_{ij} \frac{\pi_i(t)}{\pi_j(t)} \{ p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = i) - \\ & - p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \Theta_{1t} = j \xi_0^t) \} dt - a_2 \frac{\partial}{\partial \Theta_2} (\Theta_2 p(\Theta_2, \Theta_3 | j \xi_0^t)) - \\ & - a_3 j \frac{\partial}{\partial \Theta_3} (\Theta_2 p(\Theta_2, \Theta_3 | \xi_0^t, j)) + p(\Theta_2, \Theta_3 | j \xi_0^t) \times \\ & \times \frac{(\Theta_2 - m_{2j}) + j(\Theta_3 - m_{3j})}{\sigma_3^2} [d\xi_t - (m_{2j} + jm_{3j}) dt]. \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь этим выражением, можно получить уравнение для характеристической функции соответствующей плотности $p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \Theta_{1t} = j, \xi_0^t)^*$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} d\varphi_j(z_1, z_2) = & \sum_k q_{kj} (\varphi_k - \varphi_j) \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - d_2 z_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_1} dt - \\ & - a_3 j z_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_2} dt + \frac{1}{2} \sigma_1^2 (iz_1)^2 \varphi_j dt + j(iz_2)^2 \varphi_j \sigma_2^2 dt + \end{aligned} \quad (8a)$$

$$+ \left[\left((-i) \frac{\partial}{\partial z_1} \varphi_j - \lambda_{2j}^1 \right) + j \left(-i \frac{\partial}{\partial z_2} \varphi_j - \lambda_{3j}^1 \right) \right] [d\xi_t - (\lambda_{2j}^1 + j\lambda_{3j}^1) dt],$$

где

$$\lambda_{lj}^k = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_{l-1}^k} \ln \varphi_j(z_1, z_2) \Big|_{z_1=z_2=0} \quad (8b)$$

— условные семиинварианты k -го порядка величин Θ_l , $\varphi_j(z_1, z_2)$ — характеристическая функция условного распределения $p(\Theta_{2t}, \Theta_{3t} | \xi_0^t, j)$. В частности,

$$\lambda_{2j}^1 = M \{ \Theta_{2t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j \},$$

$$\lambda_{3j}^1 = M \{ \Theta_{3t} | \xi_0^t, \Theta_{1t} = j \}.$$

* Уравнение для характеристической функции можно получить, записав (7) в интегральной форме, интегрируя обе части полученного равенства по Θ_{2t} и Θ_{3t} с функцией $\exp(iz_1 \Theta_{2t} + iz_2 \Theta_{3t})$ и вновь дифференцируя по времени.

Для получения уравнений условных семиинвариантов запишем уравнения для логарифма характеристической функции

$$\psi_j(z_1, z_2) = \ln \varphi_j(z_1, z_2).$$

Применим формулу стохастического дифференцирования Ито (см., например, [4]) к функции $\psi_j = \ln \varphi_j$. Получим аналогично [9],

$$\begin{aligned} d\psi_j(z_1, z_2) &= \sum_k q_{kj} \{ \exp [\psi_k(z_1, z_2) - \psi_j(z_1, z_2)] - 1 \} \times \\ &\quad \times \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - z_1 \alpha_2 \frac{\partial \psi_j}{\partial z_1} dt - z_2 j \alpha_3 \frac{\partial \psi_j}{\partial z_2} dt - \frac{1}{2} z_1^2 \sigma_1^2 dt + \\ &+ \frac{1}{2} z_2^2 j \sigma_2^2 dt + \frac{1}{2\sigma_3^2} \left[\left((-i) \frac{\partial}{\partial z_1} \psi_j - \lambda_{2j}^1 \right) + j \left((-i) \frac{\partial}{\partial z_2} \psi_j - \lambda_{3j}^1 \right) \right]^2 dt + \\ &+ \left[\left((-i) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_1} - \lambda_{2j}^1 \right) + j \left((-i) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_2} - \lambda_{3j}^1 \right) \right] [d\xi_t - (\lambda_{2j}^1 + j \lambda_{3j}^1) dt]. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения для условных семиинвариантов, характеризующих условное распределение двух ненаблюдаемых компонент, можно получить, записав (9) в интегральной форме и произведя дифференцирование по z_1 и z_2 соответствующее число раз (см. (8)) в точке $z_1 = z_2 = 0$.

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получим систему стохастических уравнений для условных семиинвариантов. Эта система оказывается, вообще говоря, бесконечной; для практической реализации полученных алгоритмов необходимо ограничиться лишь конечным числом членов.

Для простоты ограничимся системой уравнений для первых двух семиинвариантов, полагая остальные равными нулю:

$$\begin{aligned} d\lambda_{2j}^1 &= \sum_k q_{kj} (\lambda_{2k}^1 - \lambda_{2j}^1) \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - \alpha_2 \lambda_{2j}^1 dt + \\ &+ \frac{\lambda_{2j}^2 + j \lambda_{23j}^2}{\sigma_3^2} [d\xi_t - (\lambda_{2j}^1 + j \lambda_{3j}^1) dt], \\ d\lambda_{3j}^1 &= \sum_k q_{kj} (\lambda_{3k}^1 - \lambda_{3j}^1) \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - j \alpha_3 \lambda_{3j}^1 dt + \\ &+ \frac{\lambda_{23j}^2 + j \lambda_{3j}^2}{\sigma_3^2} (d\xi_t - \lambda_{2j}^1 dt - j \lambda_{3j}^1 dt), \\ d\lambda_{2j}^2 &= \sum_k q_{kj} [\lambda_{2k}^2 - \lambda_{2j}^2 + (\lambda_{2k}^1 - \lambda_{2j}^1)^2] \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - \\ &- 2\alpha_2 \lambda_{2j}^2 dt + \sigma_1^2 dt - \frac{1}{\sigma_3^2} (\lambda_{2j}^2 + j \lambda_{23j}^2)^2 dt, \\ d\lambda_{3j}^2 &= \sum_k q_{kj} [\lambda_{3k}^2 - \lambda_{3j}^2 + (\lambda_{3k}^1 - \lambda_{3j}^1)^2] \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - 2j \alpha_3 \lambda_{3j}^2 dt + \\ &+ \sigma_2^2 dt - \frac{1}{\sigma_3^2} (\lambda_{23j}^2 + j \lambda_{3j}^2)^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\lambda_{23j}^2 = & \sum_k q_{kj} [\lambda_{23k}^2 - \lambda_{23j}^2 + (\lambda_{2k}^1 - \lambda_{2j}^1)(\lambda_{3k}^1 - \lambda_{3j}^1)] \times \\
 & \times \frac{\pi_k(t)}{\pi_j(t)} dt - (\sigma_2 \lambda_{23j}^2 + j \alpha_3 \lambda_{23j}) dt - \\
 & - \frac{1}{\sigma_3^2} (\lambda_{2j}^2 + j \lambda_{23j}^2) (\lambda_{23j}^2 - j \lambda_{3j}^{21}) dt.
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения дают приближение решения поставленной задачи. В случае, если полученная точность оценок оказывается недостаточной, необходимо выписывать уравнения для семиинвариантов более высокого порядка, используя для этого формулу (8б) и уравнения (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Беттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.
2. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления, изд. МГУ, 1966.
3. R. E. Kalman, R. S. Bucy, Trans. ASME, 83, 101 (1961).
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, изд. Наука, М., 1965.
5. А. Н. Ширяев, Теория вероятностей и ее применения, 9, 1, 200 (1966).
6. Г. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Тр. МИАН, 104, 135 (1968).
7. А. Н. Ширяев, Проблемы передачи информации, 2, вып. 3, 3 (1966).
8. А. И. Яшин, Автоматика и телемеханика, № 12, 25 (1968).
9. М. Л. Дашевский, Г. Ш. Липцер, Автоматика и телемеханика, № 6, 63 (1967).

Московский институт автоматики и телемеханики

Поступила в редакцию
27 декабря 1968 г.

MARKOVIAN PROCESSES FILTRATION UNDER JUMP-VARIATION OF NOISE PROPERTIES IN OBSERVATION

A. I. Yashin

Non-linear filtration of Markovian diffusion processes is studied. An example is given to illustrate the derivation of equations for conditional semi-invariants of the components under study.

УДК 519.213

ОПТИМАЛЬНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

M. M. Макарчук

Предлагается метод определения характеристик нелинейного компенсатора, с помощью которого выходной сигнал компенсируемой системы приближается к выходному сигналу «желаемой» системы на основе критерия общего вида при различных входных воздействиях. Компенсатор, представляемый первоначально в виде «черного ящика», выбирается из класса систем, имеющих конечные в любой момент времени значения математических ожиданий квадратов выходных сигналов, когда на входы их подан «белый шум».

ВВЕДЕНИЕ

Задача точной компенсации систем, имеющих устойчивые обращения, решается в работе [1]. Но в иных случаях применение этих же методов может дать лишь приближенную компенсацию, что отмечается и в [1]. При этом естественно возникает задача подбора оптимального (в силу назначаемого критерия) компенсатора.

В том случае, когда подлежащая компенсации система осуществляет лишь тождественное (выход равен входу) преобразование входного сигнала, задача компенсации, по существу, становится задачей приближения случайных функций, которая для весьма общих критериев решена в [2].

В настоящей работе предполагается, используя критерии общего вида, показать идею отыскания параметров оптимальных компенсаторов систем, возможно, и не имеющих устойчивых обращений.

Выбор компенсаторов в виде оптимальных «черных ящиков» (т. е. без предварительного задания их структуры) производится на основании результатов работы [3], где решается задача как анализа, так и синтеза любой заранее неизвестной устойчивой стационарной системы. В [3] показано, что при подаче на вход такой системы «белого шума» ее выходной сигнал $r(t)$ в любой момент времени t может быть представлен разложением

$$r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i(t) \quad (c_i = \text{const}) \quad (1)$$

по некоторой ортонормированной системе случайных функций $f_i(t)$:

$$\overline{f_i(t) f_j(t)} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (2)$$

При этом для выходного сигнала этой системы должно выполняться неравенство

$$\overline{r^2(t)} = \text{const} < \infty.$$

Конкретный вид функций $f_i(t)$ приводится, например, в работе [4], где получено выражение выходного сигнала системы

$$r(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a_0=0}^{\infty} \sum_{a_1=0}^{\infty} \dots \sum_{a_n=0}^{\infty} c_{a_0, a_1, \dots, a_n} H_{a_0}(A_0) H_{a_1}(A_1) \dots H_{a_n}(A_n),$$

через полиномы Эрмита $H(A)$ от функционалов

$$A_j(t) = \int_{-\infty}^t V(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right) L_j(t-\tau) d\tau \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где $V(\tau)$ — выходной «белый шум», а $L_j(t-\tau)$ — полиномы Ляггера. Определение корреляционных коэффициентов при этом производится как

$$c_{a_0, a_1, \dots, a_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(t) H_{a_0}(A_0) H_{a_1}(A_1) \dots H_{a_n}(A_n) dt. \quad (4)$$

Конечно, как это отмечается и в [3], вместо H и L могут быть выбраны любые другие полные ортонормированные системы функций.

В работе [5] показано, что коэффициенты c_{a_0, a_1, \dots, a_n} для нестационарных систем являются уже не постоянными величинами, а функциями времени $c_{a_0, a_1, \dots, a_n}(t)$. Если при этом они могут быть представлены рядами Фурье*

$$c_{a_0, a_1, \dots, a_n}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{a_0, a_1, \dots, a_n}^k \exp(j\omega_k t),$$

$$\omega_k = 2\pi k / t_{a_0, a_1, \dots, a_n}, \quad j = \sqrt{-1},$$

где t_{a_0, a_1, \dots, a_n} — период $c_{a_0, a_1, \dots, a_n}(t)$, то их спектр $c_{a_0, a_1, \dots, a_n}^k$ может быть определен как**

$$c_{a_0, a_1, \dots, a_n}^k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(t) \exp(-j\omega_k t) H_{a_0}(A_0) \dots H_{a_n}(A_n) dt. \quad (5)$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть некоторая заданная («желаемая») система характеризуется оператором $G(\tau)$, преобразующим «белый шум» $V(\tau)$ в некоторую совокупность случайных процессов

$$x(\tau) = G[\tau; V(\eta)],$$

где

$$-\infty < \eta \leq \tau. \quad (1.1)$$

С помощью компенсатора, имеющего оператор $R(\tau)$, требуется приблизить к $x(\tau)$ совокупность выходных сигналов $z(\tau)$ компенсируемой системы с оператором $B(\tau)$:

$$z(\tau) = B[\tau; y(\eta)],$$

$$y(\tau) = R[\tau; V(\eta)],$$

* Или рядами других ортонормированных периодических функций.

** Формальный вывод этого выражения приведен также в [7].

где η изменяется в пределах (1.1) таким образом, чтобы величина математического ожидания некоторого заданного функционала

$$I(t) = I[t; x(\tau); z(\tau)],$$

где

$$-\infty < \tau \leq t < \infty, \quad (1.2)$$

принимала экстремальное значение

$$I[t; x(\tau); z(\tau)] = \text{extremum.} \quad (1.3)$$

При этом для любой верхней границы ξ в (1.2) ($\xi \leq t$) должны выполняться условия

$$\overline{R^2[\xi; V(\eta)]} < \infty, \quad (1.4)$$

$$\overline{I^2(\xi)} < \infty. \quad (R(\tau) = 1). \quad (1.5)$$

Примечание. Условие (1.5) дает возможность представить $I(\xi)$ как выходной сигнал некоторой системы с входом $V(\xi)$, в виде разложения, аналогичного (1.1), что и осуществляется в дальнейшем.

2. ПОЛУЧЕНИЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОМПЕНСАЦИИ

Для сокращения записи в дальнейшем удобно, упорядочивая каким-либо образом совокупность индексов $k, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, ввести следующие обозначения:

$$\sqrt{2} \cos(\omega_k \tau) H_{a_0}[A_0(\tau)] \dots H_{a_n}[A_n(\tau)] = \Phi_{v_1}(\tau), \quad (2.1)$$

$$\sqrt{2} \sin(\omega_k \tau) H_{a_0}[A_0(\tau)] \dots H_{a_n}[A_n(\tau)] = \Phi_{v_2}(\tau) \quad (v_1, v_2 = 0, 1, 2, \dots),$$

где τ изменяется в пределах (1.2). В дальнейшем v_1 и v_2 не различаются и обозначаются просто v .

Как (4), так и (5) получены на основании эргодической теоремы, применимой и к каждому члену ряда, представляющего выходной сигнал $r(t)$, т. е. (с учетом (2))

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{t_1} \Phi_v(\tau) \Phi_\mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & (v = \mu) \\ 0 & (v \neq \mu) \end{cases}. \quad (2.2)$$

Таким образом, система функций $\Phi_v(\tau, \alpha)$, вычисленная (согласно (3) и (2.1) на основе почти любой фиксированной на интервале (1.2) реализации $V_\alpha(\tau)$ «белого шума», ортонормирована. Кроме того, для почти любой из этих реализаций она и полна, а потому может быть использована вместо полиномов Ляггера $L(\tau)$ в (3). В частности, по ней может быть разложена с коэффициентами

$$A_v(\tau, \alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T+t}} \int_{-T}^t V_\alpha[\eta - (t-\tau)] \Phi_v(\eta, \alpha) d\eta \quad (2.3)$$

и сама «образующая» реализация $V_\alpha(\tau)$.

В разделе Приложение показано, что величина $A_v(\tau, \alpha)$ при фиксированных v и α является случайной нормально распределенной и не зависит от подобных же величин, вычисленных при других v . Это позволяет использовать $A_v(\tau, \alpha)$ при анализе систем. В частности, с уче-

том (1.5) величина $I(\xi, \alpha)$, рассматриваемая как выходной сигнал некоторой устойчивой системы, имеющей на входе $V_\alpha(\xi)$, может быть представлена рядом

$$I(\xi, \alpha) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v(\alpha) \Psi_v(\xi, \alpha)$$

ортонормированных в среднем функций $\Psi_v(\xi, \alpha)$, образованных согласно (2.1) и (2.3). При этом

$$c_v(\alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+t} \int_{-T}^t I(\xi, \alpha) \Psi_v(\xi, \alpha) d\xi. \quad (2.4)$$

Необходимо отметить, что в реальных расчетах интервал $(T+t)$ всегда конечен, так же как и входной сигнал $V(\eta)$ имеет некоторый конечный интервал корреляции Δt . Поэтому вместо бесконечного числа t «точных» значений $c_v(\alpha)$ может быть получено лишь около $N = (T+t)/\Delta$ приближенных $\tilde{c}_v(\alpha)$ значений их, т. е. неизбежно ограничиваются знанием лишь модели системы с выходным сигналом

$$\tilde{I}(\xi, \alpha) = \sum_{v=0}^N \tilde{c}_v(\alpha) \Psi_v(\xi, \alpha). \quad (2.5)$$

Предположим, что коэффициенты $\tilde{c}_v(\alpha)$ были получены при $R(\tau) \equiv 1$, т. е. при компенсаторе, совершающем лишь тождественное преобразование входного сигнала (выход равен входу). Пусть теперь $R(\tau) \neq 1$. Тогда с учетом (1.4) выходной сигнал компенсатора $y(\tau, \alpha)$ может быть представлен как

$$y(\tau, \alpha) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v \Phi_v(\tau, \alpha), \quad (2.6)$$

где b_v — коэффициенты компенсатора, оптимальные значения которых необходимо отыскать. Рассматривая $y(\tau, \alpha)$ как входной сигнал синтезируемой с помощью коэффициентов $\tilde{c}_v(\alpha)$ системы (2.5), для $\xi = t$ можно найти

$$\tilde{I}(t, \alpha) = \sum_{v=0}^N \tilde{c}_v(\alpha) \Psi_v [A_\mu(t, \alpha)] \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$A_\mu(t, \alpha) = \left[b_\mu + \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \beta_{\lambda\mu}(\alpha) \right] \sqrt{T+t},$$

$$\beta_{\lambda\mu}(\alpha) = \frac{1}{T+t} \int_{-T}^t \Phi_\lambda(\tau, \alpha) \Phi_\mu(\tau, \alpha) d\tau,$$

$$\beta_{\mu\mu}(\alpha) = \frac{1}{T+t} \int_{-T}^t \Phi_\mu^2(\tau, \alpha) d\tau - 1,$$
(2.7)

Выбирая при этом такой масштаб времени, чтобы $T + t = 1$, и разлагая функции $\Psi_v(A_\mu)$ с учетом их аналитичности в многомерный ряд Тейлора около точки с координатами b_μ ($\mu = 0, 1, 2 \dots$), можно получить

$$\tilde{I}(t, \alpha) = \sum_{v=0}^N \tilde{c}_v(\alpha) \left[\Psi_v(b_\mu) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\partial \Psi_v}{\partial A_\mu} \Big|_{A_\mu = b_\mu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \beta_{\lambda\mu} + \dots \right],$$

где многоточием обозначены члены ряда Тейлора более высокого порядка, нежели первый.

Усредняя $\tilde{I}(t, \alpha)$ по совокупности входных реализаций $V(\eta)$ «белого шума», можно найти $\overline{\tilde{I}}(t, \alpha)$ как функцию неизвестных параметров b_μ :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{I}}(t, \alpha) &= \sum_{v=0}^N \overline{\tilde{c}_v(\alpha)} \Psi_v(b_\mu) + \\ &+ \sum_{v=0}^N \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \overline{[\tilde{c}_v(\alpha) \beta_{\lambda\mu}(\alpha)]} b_\lambda \frac{\partial \Psi_v}{\partial A_\mu} \Big|_{A_\mu = b_\mu} + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, если найдены $\overline{\tilde{c}_v(\alpha)}$, $\overline{[\tilde{c}_v(\alpha) \beta_{\lambda\mu}(\alpha)]}$ и т. д., то задачу нахождения оптимального компенсатора можно свести, отождествляя $\overline{\tilde{I}}(t, \alpha)$ с $\overline{I}(t, \alpha)$ и принимая во внимание (1.3), к задаче нахождения в (2.8) коэффициентов b_μ^* , доставляющих экстремум функции $\overline{\tilde{I}}(t, \alpha)$. После этого на основании (2.6) может быть проведен и синтез компенсатора.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Сопоставляя (2.7) с (2.2), можно заметить, что с ростом интервала $(T + t)$ каждое $\beta_{\lambda\mu}(\alpha)$ неограниченно уменьшается при почти любом α . Сопоставляя (2.7), (2.2) и (3), можно обнаружить, что то же самое происходит и с любым произведением степеней различных коэффициентов корреляции $\beta_{\lambda\mu}(\alpha)$. Поскольку $\tilde{c}_v(\alpha)$ почти всегда ограниченные величины, то можно полагать, что все величины в (2.8), содержащие $\beta_{\lambda\mu}(\alpha)$, при достаточно большом интервале $(T + t)$ и таком масштабе времени, что $T + t = 1$, становятся принебрежимо малыми. Тогда для поиска «оптимальных с некоторой точностью» коэффициентов b_μ^* может быть использовано вместо (2.8) выражение

$$\overline{\tilde{I}}(t, \alpha) \simeq \sum_{v=0}^N \overline{\tilde{c}_v(\alpha)} \Phi_v(b_\mu). \quad (3.1)$$

При этом точность определения b_μ^* с увеличением $T + t$ возрастает.

Практически все функции Φ_v из (3.1) суть функции конечного числа переменных. Поэтому задача поиска экстремума может быть решена обычными методами математического программирования [6]. Кроме того, всегда можно условиться считать ненулевыми лишь конеч-

ное число некоторых b_μ , определяя таким образом оптимальный компенсатор заданной сложности. Отметим, что в [1] аналогичная задача не решена даже для случая систем, имеющих устойчивые обращения.

Более обоснованно вопрос о выборе конечного числа «наилучших» b_μ можно решить, используя идею из [7] об «основных» коэффициентах системы, т. е. рассматривая лишь те b_μ , модуль которых превосходит заданное число $\epsilon > 0$.

Рассматриваемая задача допускает некоторое обобщение в своей постановке. А именно, абстрактный «белый шум» $V(\tau)$ на входе может быть заменен некоторой конкретной совокупностью случайных процессов $s(\tau)$, если известно преобразование с оператором $W(\tau)$, которое переводит $s(\tau)$ в «белый шум»:

$$V(\tau) = W[\tau; s(\eta)]. \quad (3.2)$$

Иногда заранее неизвестный оператор $W(\tau)$ может быть найден на основе известных свойств совокупности $s(\tau)$ (см., например, § 97 [2]).

С учетом (3.2) новая постановка задачи может быть сведена к старой, но с новым оператором «желаемой» системы: $G(\tau) W^-(\tau)$, где W^- — оператор, обратный W . Найденные коэффициенты b_μ будут при этом характеризовать не искомый оператор $R(\tau)$, а оператор $R(\tau) W^-(\tau)$. Искомый оператор оптимального компенсатора получится, очевидно, путем последовательного соединения этих операторов: $[R(\tau) W^-(\tau)] W(\tau)$. При этом предполагается, что введение операторов W и W^- не нарушает условия (1.5) и условия (1.4), которое выглядит в этом случае следующим образом:

$$\overline{R^2}[\xi; W^-[V(\eta)] < \infty.$$

В заключение можно отметить, что правило определения коэффициентов $c_v(\alpha)$ по существу совпадает с процедурой анализа «черного ящика». Поэтому в данном случае (в отличие от [1]) для нахождения оптимального компенсатора не требуется предварительных сведений о заданном и «желаемом» операторах; не требуется предварительных сведений даже о виде критерия компенсации, кроме соблюдения (1.5) и предположения о возможности определения $c_v(\alpha)$ согласно (2.4).

Для решения поставленной задачи достаточно иметь лишь синхронную запись* (или серию таких записей) входа $s(\xi)$ и выхода $I(\xi)$ рассматриваемой системы или то же самое для каждого оператора $\hat{G}(\xi)$, $B(\xi)$ и $I(\xi)$ в отдельности.

4. ОБ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОГО КОМПЕНСАТОРА

Рассматриваемый алгоритм можно подразделить на две основные части: 1) определение средних значений $c_v(\alpha)$ в (3.1); 2) нахождение экстремума (3.1).

Поскольку пункт 2) обсуждался в разделе 3, подробнее будет рассмотрена лишь первая часть алгоритма.

Ввиду большого количества сложных нелинейных зависимостей выполнение расчетов по ней может осуществляться, очевидно, лишь на современных ЦВМ. Значения случайной последовательности, имитирующей входной «белый шум», при этом могут задаваться лишь в отдельных точках оси времени t , следующих через некоторый обычно постоянный интервал Δt . Это обстоятельство совместно с конечной протяженностью $(T + t)$ любой реализации, принятой для вычислений, ограничивает количество определяемых коэффициентов $c_v(\alpha)$ числом $N = (T + t)/\Delta t$.

* Или иметь возможность снять ее с объекта.

N коэффициентов $\psi(\alpha)$ может быть найдено из системы линейных алгебраических уравнений, образованной из равенства (2.5), рассматриваемого в N разных моментов времени. Вследствие обычно больших значений N решение этой системы можно получить лишь каким-либо из итерационных методов.

Коэффициентами этой системы уравнений служат функции $\Psi_v(\xi, \alpha)$, образуемые согласно (2.1):

$$\Psi_v(\xi, \alpha) = \sqrt{2} \begin{cases} \cos(\omega_i \xi) \\ \sin(\omega_i \xi) \end{cases} H_{\alpha_0}(A_0) H_{\alpha_1}(A_1) \dots H_{\alpha_n}(A_n), \quad (4.1)$$

где A_μ определяются согласно (2.3). Выбор N функций $\Psi_v(\xi, \alpha)$ из всей бесконечной их совокупности производится, исходя из наилучшего описания свойств системы, которую они призваны представлять. Но если о системе никаких предварительных сведений нет, то при выборе $\Psi_v(\xi, \alpha)$ может быть использован какой-нибудь простой принцип, например,

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots \leq n.$$

Функции $\Psi_v(\xi, \alpha)$ всегда зависят лишь от $m \leq N$ каких-либо $A_\mu(\xi, \alpha)$ с фиксированными индексами μ , полученных из условия, что лишь m коэффициентов b_μ компенсатора с этими же индексами могут быть отличными от нуля.

Ясно, что числа N, n, m и k — число рассматриваемых ω_i в (4.1) — связаны функциональной зависимостью, которую при необходимости нетрудно получить.

О выборе m функций $\Phi_v(\tau, \alpha)$, представляющих выходной сигнал $y(\tau)$ искомого компенсатора, можно сказать то же самое, что и по поводу выбора $\Psi_v(\xi, \alpha)$. Они все будут зависеть лишь от конечного числа $p \leq m$ каких-либо $A_j(\tau, \alpha)$, определяемых согласно (3). При этом, используя известную рекуррентную зависимость

$$\frac{dL_{j+1}(x)}{dx} = (j+1) \left[L_j(x) - \frac{dL_j(x)}{dx} \right]$$

для полиномов $L_j(x)$, для вычисления различных $A_j(\tau)$ может быть получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0(\tau)}{d\tau} &= -V(\tau) - \frac{1}{2} A_0(\tau), \\ \frac{dA_j(\tau)}{d\tau} &= (-1)^{j+1} V(\tau) - \frac{1}{2} A_j(\tau) + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k} A_k(\tau) \quad (4.2) \\ (j &= 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Для ускорения вычислений удобно запоминать наиболее часто вычисляемые величины, насколько это позволяет объем запоминающих устройств ЦВМ. Наиболее часто вычисляются по (4.2) функции $A_j(\tau)$, затем различные $H_i(A_j)$, затем $\Phi_v(\tau)$, затем вычисляемые по (2.3) функции $A_\mu(\tau)$ и, наконец, вычисляемые лишь один раз для каждого этапа процесса итерации функции $\Psi_v(\xi)$. Легко видеть, что для хранения всех значений A_j требуется pN ячеек памяти, всех $\Phi_v(\tau)$ — около mN , а для $\Psi_v(\xi)$ — уже N^2 ячеек.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Совокупность величин $A_v(\tau, \alpha)$ для почти любого фиксированного α и любого v распределена по нормальному закону.

Действительно, из (2.3) следует, что фиксированная для каждого α функция Φ_v «свертывается» при изменении τ с различными бесконечными участками реализации $V_\alpha(\eta)$ «белого шума». Кроме того, Φ_v включена в систему ортонормированных с весом $(1/T)_{T \rightarrow \infty}$ функций. Поэтому распределение совокупности $A_v(\tau, \alpha)$, рассматриваемой как предел полученных при конечных T соответствующих совокупностей $\tilde{A}_v(\tau, \alpha)$, ничем по существу не отличается от распределения совокупности $A_j(\tau)$ из (3), которое, согласно, например, [3], является нормальным с единичной дисперсией. При этом

$$[A_v(\alpha)]^{n_v} = \begin{cases} 0 & (n_v - \text{нечетное}) \\ (n_v - 1)!! & (n_v - \text{четное}) \end{cases} . \quad (\text{П.1})$$

Для доказательства независимости случайных величин $A_v(\alpha)$ с различными v найдем

$$B_{vp}(\alpha) = \overline{[A_v(\alpha)]^{n_v}} [A_p(\alpha)]^{n_p} . \quad (\text{П.2})$$

Для этого рассмотрим произведение

$$Z_{vp}(\tau, \alpha) = [\tilde{A}_v(\tau, \alpha)]^{n_v} [A_p(\tau, \alpha)]^{n_p} ,$$

где \tilde{A} получены из (2.3) при конечном T . Поэтому при нахождении

$$\overline{Z_{vp}(\alpha)} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1}^t Z_{vp}(\tau, \alpha) d\tau \quad (\text{П.3})$$

можно воспользоваться эргодической теоремой. При некотором конечном T_1 рассмотрим выражение, фигурирующее под знаком предела в правой части предыдущего выражения. Меняя порядок интегрирования, можно записать

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1}^t Z_{vp}(\tau, \alpha) d\tau = \frac{1}{T^{(n_v + n_p)/2}} \int_{-T}^t \int_{-T}^t \varphi_\alpha(\eta_{v_i}, \eta_{p_j}) \times$$

$\underbrace{(n_v + n_p)}_{\text{раз}}$

$$(\text{П.4})$$

$$\times \prod_{i=1}^{n_v} \Phi_{v_i}(\eta_{v_i}) d\eta_{v_i} \prod_{j=1}^{n_p} \Phi_{p_j}(\eta_{p_j}) d\eta_{p_j} ,$$

где

$$\varphi_\alpha(\eta_{v_i}, \eta_{p_j}) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1}^t \prod_{i=1}^{n_v} V_\alpha[\eta_{v_i} - (t - \tau)] \prod_{j=1}^{n_p} V_\alpha[\eta_{p_j} - (t - \tau)] d\tau ,$$

а Π — знак произведения.

Будем полагать, что V_α распределено по нормальному закону. Тогда $\varphi_\alpha \rightarrow 0$ при $T_1 \rightarrow \infty$, если $(n_v + n_p)$ нечетное. В противном случае предел φ_α может быть представлен некоторой суммой, каждый член которой является произведением $(n_v + n_p)/2$ δ -функций от разностей, образованных парами различных аргументов η , а число членов суммы

$(n_v + n_\mu - 1)!!$ равно числу различных способов разбиения $(n_v + n_\mu)$ аргументов η на такие пары*.

Таким образом, при нечетном $(n_v + n_\mu)$ правая часть (П.3) равна нулю, а при четном—некоторой функции $\chi_\alpha(T)$, которая с учетом (П.4) и свойств δ -функций получается из φ_α путем замены δ -функций на величины

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^t \Phi_v^2(\eta) d\eta, \quad \frac{1}{T} \int_{-T}^t \Phi_\mu^2(\eta) d\eta \quad \text{или} \quad \frac{1}{T} \int_{-T}^t \Phi_v(\eta) \Phi_\mu(\eta) d\eta$$

в зависимости от того, принадлежат ли оба аргумента соответствующей δ -функции какой-либо одной (η_{v_i} или η_{μ_j}) или разным группам аргументов. С увеличением T первые два из этих выражений на основании (2.2) стремятся к единице, а последнее—к нулю. Поэтому в сумме χ_α остаются лишь те (равные единице) члены, которым в φ_α соответствуют произведения δ -функций, каждая из которых зависит от разности аргументов из одинаковой группы (η_{v_i} или η_{μ_j}). Очевидно, что при нечетных n_v и n_μ в χ_α не может остаться ненулевых членов. Если же n_v и n_μ четные, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \chi_\alpha(T) = (n_v - 1)!! (n_\mu - 1)!!$$

Из всего этого следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{Z_{v\mu}(\alpha)} = \begin{cases} (n_v - 1)!! (n_\mu - 1)!! & (n_v \text{ и } n_\mu \text{ — четные}) \\ 0 & (\text{хотя бы одно нечетное}) \end{cases}$$

С другой стороны, по определению

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{Z_{v\mu}(\alpha)} = B_{v\mu}(\alpha),$$

а потому

$$B_{v\mu}(\alpha) = \begin{cases} (n_v - 1)!! (n_\mu - 1)!! & (n_v \text{ и } n_\mu \text{ — четные}) \\ 0 & (\text{хотя бы одно нечетное}) \end{cases}$$

Сопоставляя последнее выражение с (П.1) и (П.2), убеждаемся, что при любых v , μ , n_v , n_μ и почти любых α можно записать

$$\overline{[A_v(\alpha)]^{n_v} [A_\mu(\alpha)]^{n_\mu}} = \overline{[A_v(\alpha)]^{n_v}} \overline{[A_\mu(\alpha)]^{n_\mu}},$$

что и доказывает независимость любых $A_\alpha(\alpha)$ друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Ван-Трисс, Синтез оптимальных нелинейных систем управления, изд. Мир, М., 1964.
- В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.
- Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
- Приспособливающиеся автоматические системы, сб. статей под ред. Э. Мишкина и Л. Брауна, ИЛ, М., 1963, гл. 8.
- М. М. Макарчук, Доклад на I Всесоюзном симпозиуме по применению статистических методов в технической кибернетике, М., 1967.
- Д. Б. Юдин, Техническая кибернетика, № 1, 3 (1965) и № 1, 3 (1966).
- М. М. Макарчук, Техническая кибернетика, № 3, 176 (1967).

Поступила в редакцию
16 мая 1968 г.

* Так, например, для $n_v + n_\mu = 4$

$\varphi_\alpha = \delta(\eta_1 - \eta_2) \delta(\eta_3 - \eta_4) + \delta(\eta_1 - \eta_3) \delta(\eta_2 - \eta_4) + \delta(\eta_1 - \eta_4) \delta(\eta_2 - \eta_3).$

OPTIMAL COMPENSATION OF NON-LINEAR OBJECTS

M. M. Makarchuk

Technique is proposed for finding characteristics of a non-linear compensator with the aid of which the output signal of compensated system with different input disturbances tends to the "desired" system output signal on the basis of the Bayes criterion. The compensator, initially represented as a "black box", is sampled among systems, having finite values of mathematical expectations of signal squares, when inputs are entered by "white noise".

УДК 517.948

**ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОГО
ОПЕРАТОРА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
К ИССЛЕДОВАНИЮ В ЦЕЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ
НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

B. A. Брусин

Доказывается теорема, дающая новые возможности для исследования нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений в функциональных пространствах. Рассматривается, в частности, проблема существования и абсолютной устойчивости почти периодического решения.

В настоящей работе формулируется теорема об аппроксимации непрерывным функционалом динамического оператора [1], действующего в функциональном пространстве. В применении к одному классу нелинейных неавтономных систем, играющему важную роль в теории управления, эта теорема позволяет установить, например, эффективные достаточные условия существования и устойчивости в целом вынужденного почти периодического режима и, в частности, распространить соответствующую теорему работы [2] на бесконечномерный случай.

В статье обсуждается также возможность применения указанной теоремы к уравнениям в частных производных.

1. Сводка обозначений. Φ , H — линейные нормированные пространства; $\|z\|_{\Phi}$ — норма элемента $z \in \Phi$; $\|h\|_H$ — норма элемента $h \in H$; $Z_{t_0, T}$ ($t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $T > 0$) — линейное пространство непрерывных отображений $[t_0, t_0 + T] \rightarrow \Phi$; $F_{t_0, T}$ — линейное пространство кусочно-непрерывных отображений $[t_0, t_0 + T] \rightarrow H$; F — линейное пространство функций с областью значений в H , кусочно-непрерывных на всей вещественной оси; Δ_{λ} — отображение $F \rightarrow F$: $\{\Delta_{\lambda} f\}(t) = f(t+\lambda)$; $P_{t_0, T}$ — отображение $F \rightarrow F_{t_0, T}$: $\{P_{t_0, T} f\}(t) = f(t)$.

Обозначения нормированных пространств функций от t :

$$C_{t_0, T}(Z) = \{z(t), z(t) \in Z_{t_0, T}, \|z\|_{t_0, T} = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|z(t)\|_{\Phi}\},$$

$$C_{t_0, T}(F) = \{f(t), f(t) \in F_{t_0, T}, \|f\|_{t_0, T} = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|f(t)\|_H\},$$

$$C(F) = \{f(t), f(t) \in F, \|f\| = \sup_t \|f(t)\|_H\},$$

$$K_{t_0, T}(Z) = \{z(t), z(t) \in Z_{t_0, T}, \|z\|_{t_0, T, K}\}.$$

Предполагается, что норма в $K_{t_0, T}(Z)$ есть непрерывный функционал от $\|z(t)\|_{\Phi}$, т. е. $\|z\|_{t_0, T, K} = \sigma(\|z(t)\|_{\Phi}, t \in [t_0, t_0+T])$. При этом требуется выполнение неравенства $\sigma(\|z(t)\|_{\Phi}) \leq \sigma(\|\bar{z}(t)\|_{\Phi})$, если $\|z(t)\|_{\Phi} \leq \|\bar{z}(t)\|_{\Phi}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$. Примеры норм пространства

$$K_{t_0, \infty}: \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|z(t)\|_{\Phi}^2 dt; \|z\|_{t_0, \infty}:$$

$$S_{t_0, T}(F) = \{f(t), f(t) \in F_{t_0, T}, \|f\|_{t_0, T, s}\}.$$

Предполагается, что норма пространства $S_{t_0, T}(F)$ удовлетворяет условиям, аналогичным тем, которые предполагались для нормы пространства $K_{t_0, T}$.

2. Формулировка результатов. Рассматривается однопараметрическое семейство операторов $\{\Psi_\tau, \tau > 0\}; \Psi_\tau$ есть отображение $\Phi \times F_{0, \tau} \rightarrow \Phi$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) отображение Ψ_τ , рассматриваемое как отображение нормированных пространств $\Phi \times C_{0, \tau}(F) \rightarrow \Phi$, непрерывно при любом $\tau > 0$;

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+0} \Psi_\tau(z_0, P_{0, \tau} f) = z_0, f \in F;$$

в) при любых $\tau > 0$, $z_0 \in \Phi$ и $f \in F$ определяемая семейством операторов $\{\Psi_\tau, \tau > 0\}$ функция $z(t) \in F_{0, \infty}$: $z(t) = \Psi_\tau(z_0, P_{0, \tau}(f))$ непрерывна на $[0, \infty]$;

г) обозначим через θ и 0 нулевые элементы пространств Φ и F соответственно; тогда при любом $\tau > 0$, $t_0 \in (-\infty, \infty)$

$$\Psi_\tau(\theta, P_{t_0, \tau}(0)) \equiv \theta;$$

д) для любых $\tau_1, \tau_2 > 0$, $z_0 \in \Phi$, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ и $f \in F$ справедливо равенство

$$\Psi_{\tau_1 + \tau_2}(z_0, P_{t_0, \tau_1 + \tau_2}(f)) = \Psi_{\tau_1}(\Psi_{\tau_2}(z_0, P_{t_0, \tau_2}(f)), P_{t_0 + \tau_2, \tau_1}(f)).$$

Определение 1. Траекторией $z(t; t_0, z_0, f)$ $t \geq t_0$, $z_0 \in \Phi$, $f \in F$, порождаемой семейством операторов ($\Psi_\tau, \tau > 0$), будем называть функцию $z(t) \in C_{t_0, \infty}(Z)$, удовлетворяющую при любом $t > t_0$ уравнению

$$z(t) = \Psi_{t-t_0}(z_0, P_{t_0, t-t_0}(f)).$$

Теорема (об аппроксимации оператора $\Psi_\tau(\theta, P_{0, \tau} f)$). Предположим, что траектории динамической системы (1) удовлетворяют следующим условиям.

1) Для любого $r > 0$ существует число $R = R(r) > 0$, такое, что из $\|f\|_{t_0, \infty, s} \leq r$ следует

$$\|z(t; t_0, \theta, f)\|_{t_0, \infty, K} \leq R(r)$$

для любой $f(t) \in F$.

2) Существуют непрерывные на $[0, \infty)$ функции $\alpha(t)$ и $\chi(t)$, удовлетворяющие условиям: $\alpha(t)$ при $t \rightarrow \infty$, монотонно убывая, стремится к нулю, $\chi(t)$ не убывает и $\chi(0) = 0$; и такие, что при любых $f \in F$, $z_0, z_1 \in \Phi$ и $t_0 \in (-\infty, +\infty)$

$$\|z(t; t_0, z_0, f) - z(t; t_0, z_1, f)\|_\Phi \leq \alpha(t - t_0) \chi(\|z_0 - z_1\|_\Phi).$$

Тогда для любых $r > 0$, $\varepsilon > 0$ существует такое $T(\varepsilon, r) > 0$ и непрерывный оператор $\Omega_T(C_{0, T}(F) \rightarrow \Phi)$, что при любом $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ и $f(t) \in C(F)$, $\|f\| \leq r$ будет справедливо неравенство

$$\|z(t; t_0, \theta, f) - \Omega_T(P_{t_0, T} \Delta_{t-T-t_0}(f))\|_{t_0+T, \infty, K} \leq \varepsilon. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать только усиленный вариант теоремы 1, когда $K_{t_0, T} \equiv C_{t_0, T}(Z)$, $S_{t_0, T} \equiv C_{t_0, T}(F)$.

Пусть $\tilde{f}(t)$ — произвольная функция из $C(F)$. Тогда каждой бесконечной в обе стороны последовательности действительных чисел $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$ будет соответствовать бесконечная в обе стороны по-

ледовательность точечных преобразований $\{\Gamma_i\}$ ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$) пространства Φ в себя, определенных по формуле

$$\Gamma_i z = \Psi_{\tau_{i+1} - \tau_i}(z, P_{\tau_i, \tau_{i+1} - \tau_i}(\tilde{f})).$$

В силу условия 2 теоремы 1 для любого $q \in (0, 1)$ можно найти такое число $\omega(q) > 0$, что для последовательности $\{\tau_i\}$, такой, что $\inf_i (\tau_{i+1} - \tau_i) \geq \omega(q)$, каждое точечное преобразование Γ_i из соответствующей последовательности $\{\Gamma_i\}$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия, не превосходящим это число q .

Из условий 1) и 2) теоремы 1 вытекает также, что в этом случае существует ограниченное замкнутое подмножество $D \subset \Phi$, такое, что из $z \in D$ следует $\Gamma_i z \in D$ ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$). Но тогда согласно результатам работы [3] будет существовать непрерывная функция $\tilde{z}(t, \tilde{f}) \in C(Z)$ такая, что для любого $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ $\tilde{z}(t, \tilde{f}) = \Psi_{t-t_0}(\tilde{z}(t_0, \tilde{f}), P_{t_0, t-t_0}(\tilde{f}))$, при $t > t_0$. Теорема 1 позволяет утверждать следующее.

Теорема 2. Отображение $\Pi: (f \in C(F) \rightarrow \tilde{z}(t, f) \in C(Z))$ непрерывно.

Следствие. Образом почти периодической в пространстве $C(F)$ функции [4] при отображении Π будет почти периодическая в пространстве $C(Z)$ функция*.

3. Выполнимость условий теоремы 1 в усиленном варианте для одного класса нелинейных динамических систем. Рассмотрим динамическую систему, описывающуюся дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dt} - Az - Nz = f(t) \quad (t > t_0, t_0 \in (-\infty, +\infty)), \quad (3)$$

где $z, f \in \Phi$, Φ — гильбертово пространство; A — линейный, N — нелинейный операторы, $\Phi \rightarrow \Phi$, причем $N\theta = \theta$ и $\text{Sup}_z \|Nz\|_\Phi = L < \infty$. Предположения относительно существования, единственности и непрерывной зависимости от правой части решений уравнения (3), удовлетворяющих начальным условиям $z(t_0) = z_0$, приводят к частному случаю динамической системы (1).

Пусть A — ограниченный оператор. В этом случае для большего класса нелинейных операторов N (описание этого класса для случая, когда Φ — конечномерное евклидово пространство, дано в работе [5]) можно сформулировать требования к оператору A , из которых будут вытекать условия 1), 2) теоремы 1.

Например, если нелинейный оператор N удовлетворяет условию

$$0 < \operatorname{Re} \langle N(z_1) - N(z_2), z_1 - z_2 \rangle_\Phi \leq h \|z_1 - z_2\|_\Phi^2$$

для всех $z_1, z_2 \in \Phi$, где $h > 0$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$ — скалярное произведение в Φ , то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Достаточными условиями выполнимости условий 1) и 2) теоремы 1 для системы (3), (4) являются следующие условия:

а) спектр оператора A лежит в левой полуплоскости комплексного переменного, причем находится на положительном расстоянии от мнимой оси;

* То, что Π -образом Ω -периодической функции будет Ω -периодическая функция, непосредственно следует уже из условий 1); 2) теоремы 1 (обеспечивающих и само существование отображения Π).

б) существует число $\delta > 0$, такое, что при всех λ , $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$\left\langle \left\{ \frac{1}{2} [R(\lambda, A) + R^*(\lambda, A)] - \left(\frac{1}{h} + \delta \right) I \right\} (N(z_1) - N(z_2)), N(z_1) - N(z_2) \right\rangle_{\Phi} \leq 0,$$

где $R(\lambda, A)$ — резольвента оператора A , I — единичный оператор, а через $R^*(\lambda, A)$ обозначен оператор, сопряженный оператору $R(\lambda, A)$ [4]; функция $\alpha(t)$ в условии 2 в этом случае представляет собой константу, умноженную на экспоненту с отрицательным показателем.

A — неограниченный (замкнутый) оператор. Трудности, возникающие в этом случае, связаны по существу с тем, что не существует представление решений уравнения (3) в виде

$$z(t) = e^{At} z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} (N(\tau)) + f(\tau)) d\tau,$$

ибо операция e^{At} не определена. Однако, исходя из общей теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [6], можно доказать следующий результат.

Теорема 4. Пусть

1) $D(A)$ — область определения оператора A всюду плотна в Φ ;

2) задача Коши для однородного уравнения $\frac{dy}{dt} = Ay$, $y(0) = y_0$ корректна на $D(A)$ [6];

3) при любом $T > 0$

$$\int_0^T \operatorname{Re} \langle Ay(t), y(t) \rangle_{\Phi} dt \leq -\varepsilon \int_0^T \|y(t)\|_{\Phi}^2 dt, \quad (4)$$

$y(t) \in D(A)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует полугруппа линейных операторов $\{U(t), t \geq 0\}$, такая, что $\|U(t)\|_{\Phi \rightarrow \Phi} \leq e^{-\varepsilon t}$; решение $z(t; z_0, f)$ уравнения (1) представимо в виде

$$z(t) = U(t) z_0 + \int_0^t U(t-\tau) (N(z(\tau)) + f(\tau)) d\tau.$$

Из теоремы 4 следует, в частности, что

$$\|z(t; \theta, f)\|_{\Phi} \leq \varepsilon^{-1} \sup_t (\|Nz(t)\|_{\Phi} + \|f(t)\|_{\Phi}).$$

Для конкретных задач представление решения уравнения (3) может быть получено с помощью интегральных преобразований (см., например, примеры из [7, 8]), а для задачи Коши для уравнений в частных производных также и путем нахождения фундаментального решения [7].

Найдению достаточных условий выполнимости условия 2) теоремы 1 посвящена работа автора [9]. В этой работе рассмотрен класс квазилинейных гиперболических и параболических систем с нелинейными краевыми условиями достаточно общего вида. Достаточным критерием выполнимости условия 2) теоремы 1, как это видно из [9], является условие (4) этой работы. В этой же работе приводится также

ряд конкретных примеров, для которых условия (4) принимают удобную для практического применения форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, ДАН СССР, 127, № 5, 961 (1959).
2. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, 25, № 7, 1017 (1964).
3. Ю. И. Неймарк, Тр. II съезда по механике, 2, изд. Наука, М., 1965.
4. К. Морен, Методы гильбертова пространства, изд. Мир, М., 1965.
5. В. А. Якубович, Вестник ЛГУ, 2, № 7 (1967).
6. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, ГИФМЛ, М., 1967.
7. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
8. Ю. И. Неймарк, Ю. И. Городецкий, Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 6, 967 (1959).
9. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 381 (1959).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 ноября 1968 г.

A DYNAMIC OPERATOR APPROXIMATION THEOREM AND SOME APPLICATIONS OF IT TO AN INVESTIGATION OF GENERALLY NON-LINEAR NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FUNCTIONAL SPACES

V. A. Broosin

A theorem is proved yielding new possibilities in studying non-linear non-autonomous differential equations in functional spaces and among other things a problem of existence and absolute stability of a quasi-periodic decision is considered.

УДК 62—506.1

О РЕЖИМАХ РАБОТЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ШАГОВОГО ТИПА

H. N. Леонов

Рассматривается шаговая экстремальная система с объектом первого порядка, в котором инерционное звено предшествует нелинейному безынерционному звену. Изучается качество работы системы в зависимости от величины порога нечувствительности оптимизатора по входному сигналу. Установлено негативное влияние на качество работы системы таких групп шагов, в которых направление изменения входа объекта управления изменяется от шага к шагу.

1. В статье исследуются стационарные режимы работы экстремальных систем шагового типа с объектом, обладающим инерционностью первого порядка (рис. 1).

В работе [1] обнаружена одна особенность в поведении экстремальных систем шагового типа с постоянной скоростью поиска с объектами, обладающими инерционностью не ниже второго порядка, приводящая

к ухудшению качества работы этих систем. Она связана с наличием в системе таких групп шагов, в которых направление изменения входа объекта управления изменяется от шага к шагу. Эта особенность подобна особенности, обнаруженной в экстремальных системах автоколебательного типа [2, 5] с объектами, обладающими инерционностью не ниже второго порядка. Однако, как установлено ниже, в отличие от экстремальных систем автоколебательного типа в шаговых экстремальных системах наблюдается и для объектов с инерционностью первого порядка.

Рис. 1.

системах подобное явление

для объектов с инерционностью первого порядка.

2. Уравнения движения обычной экстремальной системы шагового типа с объектом первого порядка могут быть записаны следующим образом:

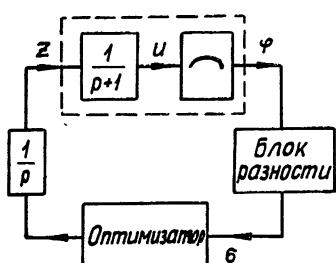
$$\varphi = -u^2, \quad \dot{u} + u = z,$$

$$\dot{z} = \begin{cases} \eta_n & (\text{если } n\tau < t < n\tau + t_1) \\ 0 & (\text{если } n\tau + t_1 < t < n\tau + \tau), \end{cases} \quad (1)$$

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \eta_n & (\text{если } \sigma_n > -\Delta) \\ -\eta_n & (\text{если } \sigma_n \leq -\Delta) \end{cases}, \quad \sigma_n = \varphi(n\tau + \tau) - \varphi(n\tau),$$

η_0 постоянно на интервале $(0, t_1)$ и равно либо $+1$, либо -1 ; здесь $t_1 \leq \tau$.

Рассмотрим некоторые черты поведения этой системы с помощью анализа ее фазового пространства.



Система (1) имеет трехмерное фазовое пространство $\Phi(t, u, v \equiv \dot{u})$, образованное пространствами Φ_{+1} , Φ_{-1} и Φ_0 , такими, что в них z равно $+1$, -1 , 0 соответственно. При $n\tau < t < n\tau + t_1$ ($n = 0, 1, \dots$) пространство Φ образовано пространствами Φ_{+1} , Φ_{-1} , а при $n\tau + t_1 < t < n\tau + \tau$ ($n = 0, 1, \dots$) пространство Φ представляет собой пространство Φ_0 .

В переменных u, v уравнения движения системы описываются равенствами

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ v + \dot{v} &= \begin{cases} \eta_n & (\text{если } n\tau < t < n\tau + t_1) \\ 0 & (\text{если } n\tau + t_1 < t < n\tau + \tau) \end{cases}, \\ \eta_{n+1} &= \begin{cases} \eta_n & (\text{если } \sigma_n > -\Delta) \\ -\eta_n & (\text{если } \sigma_n \leq -\Delta) \end{cases}, \quad \sigma_n = u_n^2 - u_{n+1}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_n = u(n\tau)$.

Фазовые траектории системы (2) в пространстве Φ_η (т. е. Φ_{+1} или Φ_{-1}) описываются равенствами

$$v = \eta_n + Ae^{-t}, \quad u + v = \eta_n t + B, \quad (3)$$

а в пространстве Φ_0 равенствами

$$u + v = \text{const}, \quad v = Ce^{-t}. \quad (4)$$

Траектории пространств Φ_{+1} , Φ_0 в проекции на плоскость uv изображены на рис. 2 а, б соответственно.

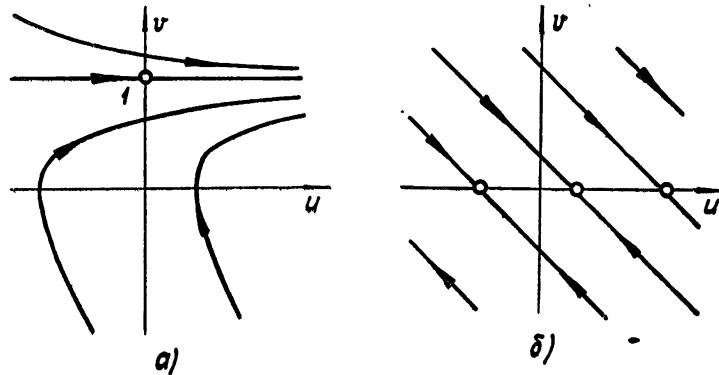


Рис. 2.

Все движения в исследуемой системе разбиваются на движения по шагам. При этом каждый участок фазовой траектории, соответствующийциальному шагу, состоит из отрезка траектории пространства Φ_η и отрезка траектории пространства Φ_0 . Если u_n , v_n — координаты фазовой точки в начале n -го шага, а u_{n+1} , v_{n+1} — в его конце, то из (3), (4) получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (1 - e^{-\tau}) v_n - \eta_n (1 - e^{-t_1}) e^{-t_2} + \eta_n t_1, \\ v_{n+1} &= e^{-\tau} v_n + \eta_n (1 - e^{-t_1}) e^{-t_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $t_2 = \tau - t_1$. Согласно (5),

$$\begin{aligned} \sigma_n &= [2u_{n+1} - (e^\tau - 1)v_{n+1} + (e^{t_1} - 1 - t_1)\eta_{n+1}] [(e^{t_1} - 1 - t_1)\eta_{n+1} - \\ &\quad - (e^\tau - 1)v_{n+1}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет выделить в фазовом пространстве системы (2) области изменения направления движения. Если обозначить через P_η область плоскости uv , для которой

$$(e^\tau - 1)v - (e^{t_1} - 1 - t_1)\eta - \frac{\Delta}{(e^{t_1} - 1 - t_1)\eta - (e^\tau - 1)v} \begin{cases} \geq 2u & (u > 0) \\ \leq 2u & (u < 0) \end{cases}, \quad (7)$$

то нетрудно убедиться в том, что $\sigma_n \leq -\Delta$, если $(u_{n+1}, v_{n+1}) \in P_{\eta_n}$. В том случае, когда $(u_{n+1}, v_{n+1}) \notin P_{\eta_n}$, направление движения не изменяется и $\eta_{n+1} = \eta_n$. Если же $(u_{n+1}, v_{n+1}) \in P_{\eta_n}$, то направление движения изменяется и $\eta_{n+1} = -\eta_n$. Область P_{+1} является областью изменения знака η с (+) на (-), а область P_{-1} с (-) на (+). На рис. 3 изображена область P_{+1} . Область P_{-1} симметрична ей относительно точки $(0, 0)$.

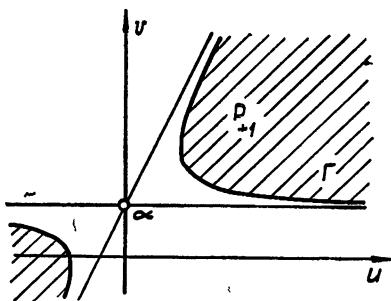


Рис. 3. $\alpha = (e^{t_1} - 1 - t_1)(e^\tau - 1)^{-1}$.

Характер стационарных движений системы (1) зависит от значений параметров t_1, t_2, Δ этой системы. Как следует из работ [1, 6], в общем случае стационарные движения шаговых экстремальных систем можно разбить на три типа. В основе такой классификации движений лежит тот факт, что каждое движение в шаговых экстремальных системах образовано группами шагов двух видов. Группой шагов первого вида называется такая группа следующих друг за другом шагов,

друг за другом шагов,

в которой для каждого шага направление изменения входа объекта управления одинаково, т. е. одинаковы величины η_n . Группой шагов второго вида называется такая группа следующих друг за другом шагов, для которой направление изменения входа объекта изменяется от шага к шагу.

Стационарные движения, образованные только группами шагов первого вида, принято называть простыми движениями; они относятся к первому типу стационарных движений. Стационарные движения, образованные как группами первого вида, так и группами второго вида, принято называть сложными движениями. Те из них, для которых любые две соседние группы первого вида, разделенные группой второго вида, имеют различные направления изменения входа объекта управления, относятся ко второму типу стационарных движений. К третьему типу стационарных движений относятся те сложные движения, в которых существуют хотя бы две соседние группы первого вида, разделенные группой второго вида, в которых изменение входа объекта управления происходит в одном и том же направлении.

Возможность существования стационарных режимов третьего типа в экстремальных системах и является той особенностью, о которой шла речь во введении. В [1] установлено, что это специфическая черта высоконинерционных систем. Однако в настоящей работе обнаружено, что режимы третьего типа могут существовать и в системе (1), содержащей объект первого порядка.

Для выяснения условий существования таких режимов в системе (1) рассмотрим порядок движения фазовой точки вдоль стационарной траектории в плоскости uv . Обозначим части областей P_{+1} , P_{-1} , принадлежащие полуплоскости $u > 0$, соответственно P_{+1}^+ , P_{-1}^+ . При движении по участку траектории, соответствующему группе шагов

первого вида, в сторону увеличения входа управления фазовая точка попадает в область P_{+1}^+ . После этого вход объекта управления начинает уменьшаться. Если параметры системы принадлежат области существования лишь простых движений, то в конце очередного шага фазовая точка не принадлежит сумме областей $P_{+1}^+ \cup P_{-1}^+$. Если же параметры системы принадлежат области существования сложных движений, то фазовая точка продолжает движение по участку траектории, соответствующему группе шагов второго вида, поочередно попадая в конце соответствующих шагов то в область P_{-1}^+ , то в область P_{+1}^+ .

Из определения стационарных движений второго и третьего типов следует, что любое движение второго типа содержит группы шагов второго вида только с четным количеством шагов, а движение третьего типа должно содержать по крайней мере одну группу второго вида с нечетным количеством шагов (рис. 4). На этом рисунке точки—после-

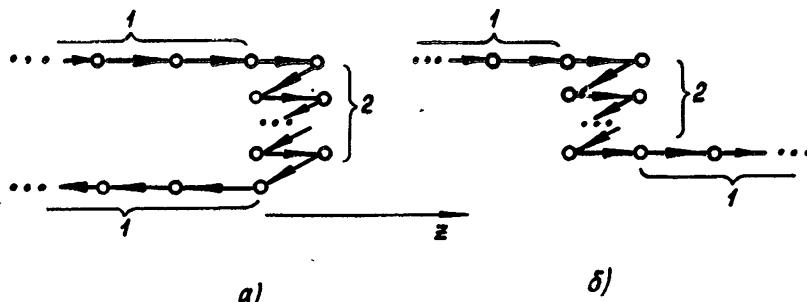


Рис. 4. 1—группа шагов первого вида, 2—группа шагов второго вида.
На рис. а) схематически изображена часть сложного движения, на рис. б) часть движения третьего типа.

довательные состояния входа объекта управления в конце каждого шага, а стрелки указывают изменение состояний входа объекта в результате каждого шага.

Можно показать, что любая группа второго вида содержит четное количество шагов, если фазовая точка из любого положения в области P_{-1}^+ приходит через один шаг (при увеличении входа объекта) в область P_{+1}^+ . Если же фазовая точка приходит в область P_{+1}^+ в результате одного шага в сторону увеличения входа объекта не из любого положения в области P_{-1}^+ , то появляется возможность существования групп второго вида с нечетным числом шагов, т. е. возможность существования стационарных движений третьего типа. Действительно, в этом случае возможно движение фазовой точки из области P_{+1}^+ в сторону увеличения входа объекта управления не менее, чем в течение двух шагов подряд.

Обозначим граничные линии областей P_{+1}^+ , P_{-1}^+ через Γ и Γ_1 соответственно, а линию, полученную перемещением каждой точки линии Γ_1 по траекториям пространства Φ_{+1} , на один шаг, через Γ_2 . Можно показать, что существуют группы второго вида с нечетным числом шагов, если линии Γ и Γ_2 имеют точки пересечения.

Уравнение линии Γ , как следует из (7), имеет вид

$$2u = (e^\tau - 1)v - e^{\ell_1} + 1 + t_1 - \frac{\Delta}{e^{\ell_1} - 1 - t_1 - (e^\tau - 1)v}, \quad (8)$$

а уравнение линии Γ_2 получаем из (5), (7);

$$2u = (e^{\tau} - 1)(e^{\tau} + 2)v + e^{\tau+t_1} + t_1 + e^{\tau} + \Delta + \frac{(e^{\tau} - 1)e^{\tau}v + 2e^{t_1} - 2 - t_1 + e^{\tau} - e^{\tau+t_1}}{(e^{\tau} - 1)e^{\tau}v + 2e^{t_1} - 2 - t_1 + e^{\tau} - e^{\tau+t_1}}, \quad (9)$$

Из (8), (9) получаем уравнение для точек пересечения линий Γ, Γ_2 :

$$f_1(v) = \Delta f_2(v), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(v) &= (e^{2\tau} - 1)v + e^{\tau} + e^{\tau+t_1} + e^{t_1} - 1, \\ f_2(v) &= [(e^{\tau} - 1)v - e^{t_1} + 1 + t_1]^{-1} - \\ &- [(e^{\tau} - 1)e^{\tau}v + 2e^{t_1} - 2 - t_1 + e^{\tau} - e^{\tau+t_1}]^{-1}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что все стационарные движения системы (1) принадлежат полосе $|v| < 1$. Далее, линия Γ расположена в полуплоскости $v > \alpha$ (рис. 3). Следовательно, нас должны интересовать условия существования точек пересечения линий Γ, Γ_2 , т. е. условия существования действительных корней уравнения (10), удовлетворяющих условию $\alpha < v < 1$. Соответствующие вычисления показывают, что $f_2(\alpha) = -\infty$, $f_2(1) > 0$, $f'_2(1) < 0$ (рис. 5). Теперь очевидно

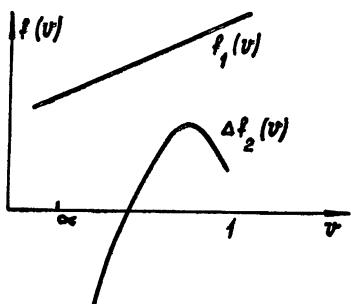


Рис. 5.

существование такого $\Delta_0(t_1, \tau)$, что при $\Delta > \Delta_0(t, \tau)$ существуют две точки пересечения линий Γ, Γ_2 , принадлежащие полосе $\alpha < v < 1$. Значение $\Delta_0(t_1, \tau)$ параметра Δ определяется из условия контакта линий $f_1(v), \Delta f_2(v)$:

$$f_1(v) = \Delta f_2(v), \quad f'_1(v) = \Delta f'_2(v). \quad (11)$$

Таким образом, установлено, что в области $\Delta > \Delta_0(t_1, \tau)$ пространства параметров системы (1) возможно в принципе существование стационарных движений третьего типа.

3. Полученные выше результаты не позволяют определить, существуют ли в действительности в системе (1) стационарные движения третьего типа, так как они не дают возможности найти области существования таких движений, а дают только необходимые условия их существования. Аналитическое отыскание областей существования стационарных движений третьего типа, исходя из целей проведения настоящей работы, слишком трудоемко (представление о его трудоемкости можно получить по работе [6], содержащей аналогичные исследования). Поэтому для проверки полученных выше результатов о возможности существования в системе (1) стационарных движений третьего типа было проведено экспериментальное изучение системы (1) на аналоговой машине.

Исследование аналоговой модели системы (1) показало, что в этой системе действительно существуют стационарные движения третьего типа. Их осциллограммы представлены на рис. 6 а, б. Горизонтальная ось—ось u , вертикальная— v .

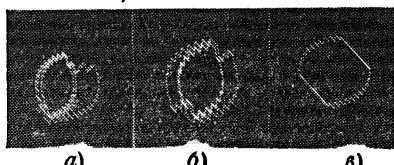


Рис. 6.

4. При работе системы (1) в режиме третьего типа качество процесса слежения за экстремальным значением выхода объекта управления ухудшается в силу наличия повторных групп движений в сторону от экстремума. Один из способов улучшения качества работы шаговой экстремальной системы, рассмотренный в [1], применим и в системе (1). Он заключается в прекращении изменения входа объекта управления, если информация об изменении выхода объекта свидетельствует об удалении выхода объекта от своего экстремального значения (т. е., если $\sigma_n < -\Delta$), и запоминании направления предшествующего изменения входа объекта. После того, как наступит неравенство $\sigma_{n_i} > -\Delta$, вход объекта вновь начинает изменяться в сторону, противоположную запомненной (рис. 6 в).

5. Изучение системы (1) показало, что описанное выше отрицательное явление, связанное с существованием в системе групп шагов второго вида, имеет место в области $\Delta > \Delta_0(t_1, \tau)$ т. е. в области «больших» значений параметра Δ . Увеличение этого параметра может быть вызвано, по крайней мере, двумя причинами. Первой причиной может служить борьба с помехами высокой интенсивности за счет соответствующего увеличения порога Δ . Вторая причина диктуется внутренними свойствами самой системы—наилучшее качество процесса слежения в соответствующей разностной системе ($t_1 = \tau$) достигается в области «больших» значений параметра Δ [6].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Н. Леонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика (в печати).
- 2 Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 799 (1966).
- 3 Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, 3, 393 (1967).
- 4 Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 405 (1967).
- 5 Н. Н. Леонов, Уч. записки НИИ ПМК и ф-та ВМК ГГУ, Горький, 1967.
- 6 Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 3, 341 (1969).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 декабря 1968 г.

ON OPERATION MODES OF STEP-TYPE EXTREME SYSTEMS

N. N. Lyeonov

The paper considers a step-type extreme system with a first order object where an inertial link precedes a non-linear inertialess one. The system operation quality is studied as a function of the optimizer non-sensitivity threshold to the input signal. It is found that system operation quality is negatively affected by steps groups in which the input change direction of the controlled object changes from step to step.

УДК 531.391

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ТИПА ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

В. Г. Климов

Методом точечных преобразований с применением теории бифуркаций решается задача о вынужденных колебаниях в системе с нелинейностью типа несимметричной треугольной петли гистерезиса. Исследованы возможные типы периодических движений и условия нарушения их существования, произведено разбиение пространства параметров на области существования различных режимов, построены амплитудные характеристики, изучено прохождение системы через резонанс.

Демпфирующие свойства динамических систем, включающих резьбовые соединения и прокладки, описываются нелинейностью типа треугольной петли гистерезиса [1, 2].

В настоящей работе рассматривается динамическая модель с нелинейностью типа несимметричной треугольной петли гистерезиса. Отметим, что такая модель позволяет изучить режимы движения с отрывом колеблющейся массы от упругого основания, возможные в реальных конструкциях. Задача решается методом точечных преобразований с применением теории бифуркаций. В результате изучения особенностей фазового пространства устанавливаются все возможные случаи нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа сшиваемых участков фазовых траекторий, образующих траекторию периодического движения (*C*-бифуркациями), а также особые случаи *C*-бифуркаций. На основе результатов качественного анализа с помощью ЭВМ производится разбиение пространства параметров на области существования различных периодических движений, строятся амплитудные характеристики и изучается прохождение системы через резонанс.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим динамическую систему, представляющую собой тело массой m , помещенное на упругое основание и подверженное действию вынуждающей силы $A \sin(\Omega t)$.

Пусть упругие свойства основания описываются гистерезисной характеристикой $F(x)$ типа треугольника (рис. 1), свойственной системам, включающим резьбовые соединения и прокладки [1].

Приняв за начало отсчета недеформированное состояние юпоры, получим уравнения движения модели в виде

$$m \ddot{x} + F(x) = A \sin(\Omega t) + P. \quad (1)$$

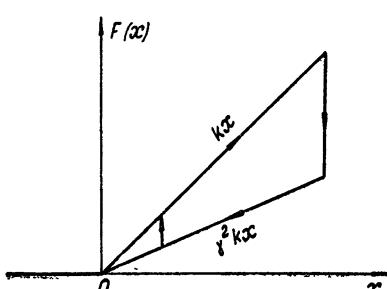


Рис. 1.

В системе возможны четыре типа движений, соответствующие разным участкам $F(x)$:

- сжатие; $F = kx$, $x > 0$, $\dot{x} > 0$;
- растяжение; $F = \gamma^2 kx$, $x > 0$, $\dot{x} < 0$;
- движение с отрывом от основания; $F = 0$, $x < 0$;
- остановка; $\gamma^2 kx \leq F \leq kx$, $x = \text{const}$.

Система обладает демпфирующими свойствами, поскольку реакция основания при растяжении меньше, чем при сжатии.

Преобразуем уравнение (1), введя новые переменные $\tau = \sqrt{m/k}t$, $x = Ay/k$ и положив $\omega = \Omega \sqrt{m/k}$, $\beta = P/A$. Получим кусочно-линейное уравнение

$$\ddot{y} + f(y) = \sin(\omega t) + \beta. \quad (2)$$

Соответственно четырем типам движений трехмерное фазовое пространство системы (y, \dot{y}, t) разделяется на четыре области G_1, G_2, G_3, G_s , поведение фазовых траекторий в которых описывается уравнением (2) при соответствующих значениях $f(y)$, а на границах этих областей определяется условием непрерывности траекторий.

- В области $G_1(y > 0, \dot{y} > 0)$ уравнение (2) имеет вид

$$\ddot{y} + y = \sin(\omega t) + \beta. \quad (2a)$$

К указанной области относится также граничная поверхность Π_1 , с которой фазовые траектории уходят в G_1 , а именно, полуплоскость $y = 0$, $\dot{y} > 0$ и участок полуплоскости

$$y \geq 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = \sin(\omega t) + \beta - y > 0$$

с частью граничной кривой

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{\dot{y}} = \omega \cos(\omega t) > 0$$

и точкой

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{\dot{y}} = -\omega^2 \sin(\omega t) > 0.$$

- В области $G_2(y > 0, \dot{y} < 0)$ уравнение (2) имеет вид

$$\ddot{y} + \gamma^2 y = \sin(\omega t) + \beta. \quad (2b)$$

К этой области относится также граничная поверхность Π_2 , с которой фазовые траектории уходят в G_2 , а именно, участок полуплоскости

$$y > 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = \sin(\omega t) + \beta - \gamma^2 y < 0$$

с частью граничной кривой

$$\ddot{y} = 0, \quad \ddot{\dot{y}} = \omega \cos(\omega t) < 0$$

и точкой

$$\ddot{y} = \ddot{\dot{y}} = 0, \quad \ddot{\ddot{y}} = -\omega^2 \sin(\omega t) < 0.$$

- В области $G_3(y < 0)$ уравнение (2) имеет вид

$$\ddot{y} = \sin(\omega t) + \beta. \quad (2b)$$

К этой области относится также граничная полуплоскость Π_3 ($y = 0, \dot{y} < 0$).

г) В области скользящего движения G_s ($\dot{y} = 0, 0 < \sin(\omega t) + \beta < \frac{\sin(\omega t) + \beta}{\gamma^2}$) фазовые траектории описываются уравнением

$$y = \text{const.} \quad (2g)$$

Границей этой области Π_s , покидая которую фазовые точки уходят в G_s , является пластина

$$y > 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \sin(\omega t) + \beta < y < \frac{\sin(\omega t) + \beta}{\gamma^2}$$

и участки ограничивающих пластинку кривых

$$\ddot{y} = 0, \quad y = \sin(\omega t) + \beta, \quad \ddot{y} = \omega \cos(\omega t) < 0$$

и

$$y = \frac{\sin(\omega t) + \beta}{\gamma^2}, \quad \ddot{y} = \omega \cos(\omega t) > 0,$$

а также точки

$$\ddot{y} = \ddot{y} = 0, \quad y = \sin(\omega t) + \beta, \quad \ddot{y} = -\omega^2 \sin(\omega t) < 0$$

и

$$y = \frac{\sin(\omega t) + \beta}{\gamma^2}, \quad \ddot{y} = -\omega^2 \sin(\omega t) > 0.$$

Внутри пластиинки Π_s есть область непрерывного скользящего движения при $\beta + 1 < y < (\beta - 1)/\gamma^2$.

Будем рассматривать любое движение в изучаемой кусочно-линейной системе как некоторую последовательность простейших точечных отображений конфигураций Π_i ($i = 1, 2, 3, s$) фазового пространства друг в друга или самих в себя. Тогда в фазовом пространстве возможны следующие точечные отображения:

$$T_{11}, T_{12}, T_{1s}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{2s}, T_{31}, T_{s1}, T_{s2}, T_{ss}.$$

Обозначим каждый участок фазовой траектории двузначным числом ij , совпадающим с индексом соответствующего ему преобразования T_{ij} , и опишем прохождение фазовой точки по траектории некоторой последовательностью двузначных чисел [3] (рис. 2). При этом числа

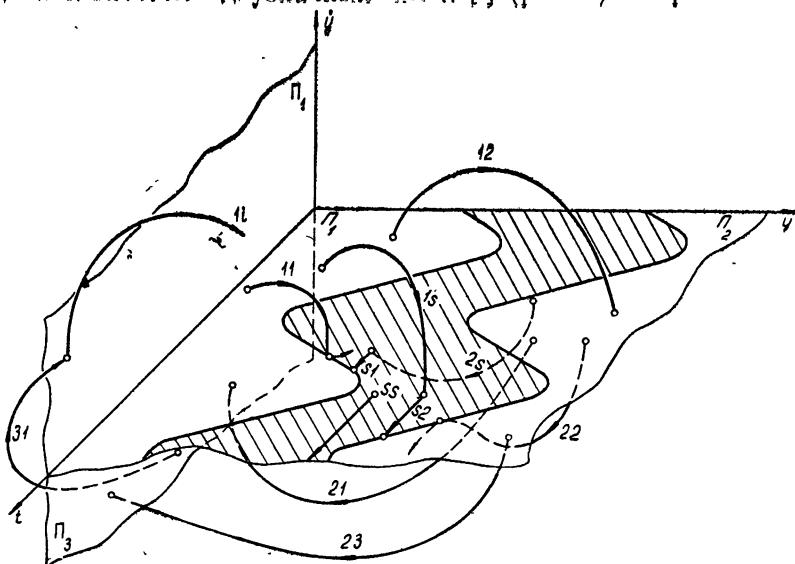


Рис. 2.

1 2, 1s, 2 1, 2s, 2 3, 3 1, s1 и s2 описывают участки фазовых траекторий, отображающие конфигурации Π_i , друг в друга, а числа 11, 22, ss — участки траекторий, отображающие соответствующие конфигурации сами в себя. Таким образом, любое движение системы, состоящее из вышеперечисленных участков фазовых траекторий, может быть описано последовательностью двузначных чисел, в которой за числом ij может следовать лишь jk .

2. ПРОСТЕЙШЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ БЕЗОТРЫВНОЕ ДВИЖЕНИЕ 2.1.2.

Рассмотрим простейшее периодическое безотрывное движение, описываемое преобразованиями T_{21}, T_{12} . Аналитическое выражение преобразований получается путем решения соответствующих уравнений (2) при начальных условиях, взятых на поверхности переключения Π_2 и Π_1 . Преобразование T_{21} описывается уравнением (2б) при начальных условиях, взятых на поверхности Π_2 , т. е. при

$$t = t_0, \quad y = x_+, \quad \dot{y} = 0.$$

Движение происходит в области G_2 и описывается уравнениями

$$\begin{aligned} y_{II} &= \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \cos[\gamma(t - t_0)] - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma(\gamma^2 - \omega^2)} \sin[\gamma(t - t_0)] + \\ &\quad + \frac{\sin(\omega t)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{\beta}{\gamma^2}, \\ \dot{y}_{II} &= -\gamma \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \sin[\gamma(t - t_0)] - \\ &\quad - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \cos[\gamma(t - t_0)] + \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

При $t = t_1$ изображающая точка попадает на поверхность переключения Π_1 , и движение происходит в области G_1 при начальных условиях $t = t_1, y = x_-$ и $\dot{y} = 0$ согласно уравнениям

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \cos(t - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \sin(t - t_1) + \\ &\quad + \frac{\sin(\omega t)}{1 - \omega^2} + \beta, \\ \dot{y}_1 &= - \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \sin(t - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \cos(t - t_1) + \\ &\quad + \frac{\omega \cos(\omega t)}{1 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать периодическое движение с частотой вынуждающей силы. Условия периодичности движения таковы:

$$y_{II}(t_1) = x_-, \quad \dot{y}_{II}(t_1) = \dot{y}_1(t_2) = 0, \quad y_1(t_2) = x_+, \quad \omega(t_2 - t_0) = 2\pi. \quad (5)$$

Система уравнений (3) — (5) определяет координаты неподвижной точки (x_+, x_-, t_0, t_1) преобразований T_{21}, T_{12} в зависимости от параметров (ω, γ, β).

Составив уравнение в вариациях и положив $\delta y_1 = z\delta x_+$ и $\delta t_2 = z\delta t_0$, получим характеристический полином относительно вариаций δx_+ , δx_- , δt_0 , δt_1 в виде

$$\begin{aligned} \chi(z) = & z^2 \{ (x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)) [y^2 x_- - \beta - \sin(\omega t_1)] \} + \\ & + z \{ \cos[\gamma(t_1 - t_0)] \cos(t_2 - t_1) \{ -[x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)] [y^2 x_- - \\ & - \beta - \sin(\omega t_1)] - [\gamma^2 x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)] [x_- - \beta - \sin(\omega t_1)] \} + \\ & + \sin[\gamma(t_1 - t_0)] \sin(t_2 - t_1) \{ \gamma^{-1} [\gamma^2 x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)] [y^2 x_- - \\ & - \beta - \sin(\omega t_1)] + \gamma [x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)] [x_- - \beta - \sin(\omega t_1)] \} \} + \\ & + [\gamma^2 x_+ - \beta - \sin(\omega t_0)] [x_- - \beta - \sin(\omega t_1)] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Исследование устойчивости сводится к анализу распределения корней характеристического полинома $\chi(z) = 0$ относительно единичного круга. Периодический безотрывный режим 2.1.1.2. устойчив, если корни характеристического полинома лежат внутри круга единичного радиуса. Уравнения для границ устойчивости N_+ , N_- и N_φ получаются, если положить в (6) $z = 1$, $z = -1$ и $z = e^{i\varphi}$ соответственно и добавить уравнения (3)–(5) для определения координат неподвижной точки.

Отметим особенность характеристического уравнения.

При $\gamma = 1$ характеристический полином $\chi(z) = z^2 - 2z \cos(2\pi/\omega) + 1 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня, модуль которых равен 1. Таким образом, прямая $\gamma = 1$ на плоскости (γ, ω) является границей N_φ . В точках $\omega = 1/k$ и $\omega = 2/(2k + 1)$ этой границы $\chi(z) = 0$ имеет кратные корни $z = 1$ и $z = -1$. Для решения вопроса, не являются ли эти точки узлами пересечения кривой N_φ с границами N_+ и N_- соответственно, положим $\gamma = 1 + \varepsilon$ и линеаризуем уравнения (3)–(6) при $\varepsilon \ll 1$. Оказалось, что при $\varepsilon < 0$ всюду в рамках режима 1.2.2.1. выполняются условия устойчивости, а при $\varepsilon > 0$ появляются корни $|z| > 1$. Таким образом, можно утверждать, что кривые N_+ и N_- не пересекаются с границей N_φ . Численный анализ системы трансцендентных уравнений (3)–(6) при $z = 1$ и $z = -1$, проведенный при помощи ЭВМ, не обнаружил точек, принадлежащих граничным кривым N_+ и N_- .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ С-БИФУРКАЦИЙ. УРАВНЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа сшиваемых участков фазовых траекторий, можно формально описать некоторыми неориентированными подстановками, если соответствующее изменение хода фазовых траекторий не вызывает нарушения непрерывности точечного отображения. Бифуркация $ij, jk \leftrightarrow ik$ возможна, если участки траекторий ij и jk реализуются в фазовом пространстве и имеются участки границы конфигураций Π_j и Π_k , принадлежащие Π_k [⁴].

В изучаемой нами системе для случая $\beta > 1$ возможны следующие С-бифуркации:

$$\begin{array}{lll} 1.2.2s. \leftrightarrow 1s. & 2.1.1s. \leftrightarrow 2s. & s1.1s. \leftrightarrow ss. \\ 1s.s1. \leftrightarrow 11. & 2s.s1. \leftrightarrow 21. & s2.2s. \leftrightarrow ss. \\ 1s.s2. \leftrightarrow 12. & 2s.s2. \leftrightarrow 22. & 23.31. \leftrightarrow 21. \end{array}$$

Перейдем к их анализу. При написании уравнений бифуркационных поверхностей бифуркационную фазовую траекторию будем рас-

сматривать как граничный случай перехода от менее сложного периодического режима к более сложному.

а) Бифуркации $C_1(1.2.2s \leftrightarrow 1s.)$ соответствует попадание фазовой траектории при движении в области G_1 на границу между Π_2 и Π_s . Уравнение бифуркационной границы получим из условия существования такого t^* , что

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = [\sin(\omega t^*) + \beta]/\gamma^2. \quad (7)$$

Поскольку данная бифуркация может иметь место лишь при наличии сложного режима со скольжением типа $1.2.2s.s2.2j.$, то соответствующая бифуркационная кривая не может ограничивать область существования простейшего периодического движения (рис. 3 а).

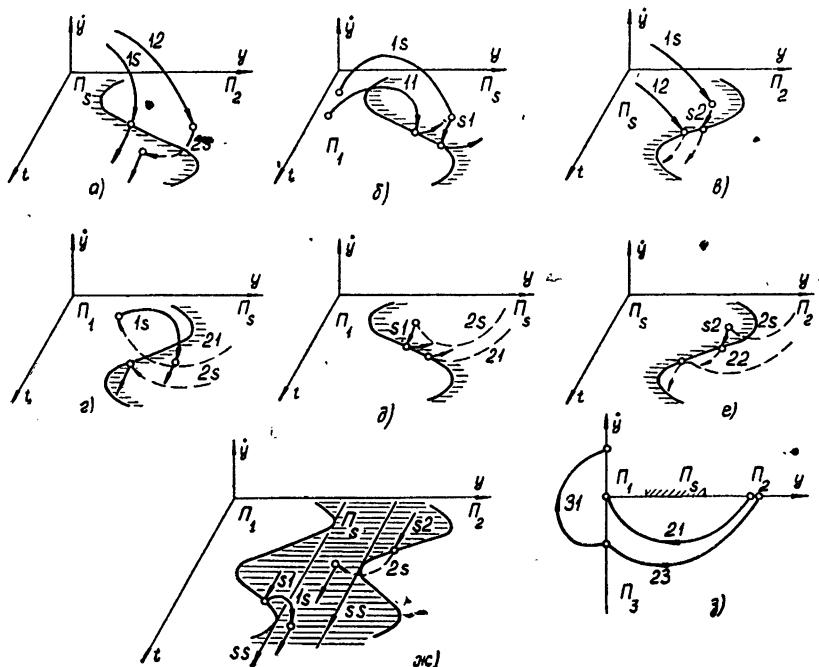


Рис. 3.

б) Бифуркация $C_2(1s.s1 \leftrightarrow 1.1.)$ имеет место в случае появления участка скольжения $s1$, т. е. при касании фазовой траекторией границы между Π_1 и Π_s (рис. 3 б). Уравнение бифуркационной границы получим из условия, что при $t = t^*$

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = \sin(\omega t^*) + \beta. \quad (8)$$

Для простейшего периодического движения данная бифуркация описывается уравнениями

$$y(t^*) = \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \cos(t^* - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \sin(t^* - t_1) + \\ + \frac{\sin(\omega t^*)}{1 - \omega^2} + \beta = y^*,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t^*) = & - \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \sin(t^* - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \cos(t^* - t_1) + \\ & + \frac{\omega \cos(\omega t^*)}{1 - \omega^2} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$y^* = \sin(\omega t^*) + \beta, \quad t_1 \leq t^* \leq t_2.$$

в) Бифуркация C_3 ($1s.s2 \leftrightarrow 1.2$) соответствует появление участка скользящего движения $s2$, в случае попадания фазовой траектории на границу между Π_2 и Π_s (рис. 3 в). Это означает, что существует такое t^* , при котором

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = [\sin(\omega t^*) + \beta]/\gamma^2. \quad (10)$$

Для режима 1.2.2.1. $t^* = t_2$ и уравнение (10) принимает вид

$$\begin{aligned} y(t_2) = & \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \cos(t_2 - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \sin(t_2 - t_1) - \\ & - \frac{\sin(\omega t_2)}{1 - \omega^2} + \beta = x_+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_2) = & - \left[x_- - \beta - \frac{\sin(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \right] \sin(t_2 - t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1 - \omega^2} \cos(t_2 - t_1) + \\ & + \frac{\omega \cos(\omega t_2)}{1 - \omega^2} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$x_+ = [\sin(\omega t_2) + \beta]/\gamma^2.$$

г) Бифуркация C_4 ($2.1.1s \leftrightarrow 2s$) возможна при попадании фазовой траектории на границу между Π_1 и Π_s при движении в области G_2 . Бифуркация возможна лишь для траекторий, включающей участок скользящего движения. Уравнение бифуркационной границы получим из условия существования такого t^* , при котором

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = \sin(\omega t^*) + \beta. \quad (12)$$

Данная бифуркация, подобно C_1 , может реализоваться лишь при наличии сложного режима со скольжением и не является граничной для режима 1.2.2.1. (рис. 3 г).

д) Бифуркация C_5 ($2s.s1 \leftrightarrow 21$) соответствует появлению участка скользящего движения $s1$ при попадании фазовой траектории при движении в области G_2 на границу между Π_1 и Π_s (рис. 3 д). Это значит, что существует такое t^* , что

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = \sin(\omega t^*) + \beta. \quad (13)$$

Для режима 1.2.2.1. $t^* = t_1$ и уравнения (13) принимают вид

$$\begin{aligned} y(t_1) = & \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \cos[\gamma(t_1 - t_0)] - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma(\gamma^2 - \omega^2)} \times \\ & \times \sin[\gamma(t_1 - t_0)] + \frac{\sin(\omega t_1)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{\beta}{\gamma^2} = x_- = \sin(\omega t_1) + \beta, \\ \dot{y}(t_1) = & -\gamma \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \sin[\gamma(t_1 - t_0)] - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \times \\ & \times \cos[\gamma(t_1 - t_0)] + \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{\gamma^2 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

е) Бифуркация $C_6(2s.s2 \leftrightarrow 22.)$ имеет место в случае появления участка скользящего движения $s2$ при касании фазовой траекторией границы между Π_2 и Π_s при движении в области G_2 (рис. 3е). Уравнение бифуркационной границы получим из условия, что существует такое t^* , при котором

$$\dot{y}(t^*) = \ddot{y}(t^*) = 0, \quad y(t^*) = [\sin(\omega t^*) + \beta]/\gamma^2. \quad (15)$$

Для режима 1 2.2 1 $t_0 \leq t^* \leq t_1$ и уравнение (15) имеет вид

$$\begin{aligned} y(t^*) &= \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \cos[\gamma(t^* - t_0)] - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma(\gamma^2 - \omega^2)} \times \\ &\quad \times \sin[\gamma(t^* - t_0)] + \frac{\sin(\omega t^*)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{\beta}{\gamma^2} = y^* = \frac{\sin(\omega t^*) + \beta}{\gamma^2}, \\ \dot{y}(t^*) &= -\gamma \left[x_+ - \frac{\beta}{\gamma^2} - \frac{\sin(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \right] \sin[\gamma(t^* - t_0)] - \frac{\omega \cos(\omega t_0)}{\gamma^2 - \omega^2} \times \\ &\quad \times \cos[\gamma(t^* - t_0)] + \frac{\omega \cos(\omega t^*)}{\gamma^2 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

ж) Бифуркация $C_7(s1.1s. \leftrightarrow ss.)$ и $C_8(s2 2s. \leftrightarrow ss.)$ соответствует непрерывное скользящее движение при $y = 1 + \beta$ и $y = (\beta - 1)/\gamma^2$ соответственно. Они могут иметь место лишь для сложных режимов со скольжением (рис. 3ж).

з) Бифуркации $C_9(23.31. \leftrightarrow 21.)$ соответствует появление или исчезновение участка движения с отрывом (рис. 3з). Это значит, что существует такое t^* , при котором

$$y(t^*) = \dot{y}(t^*) = 0. \quad (17)$$

Для режима 1 2.2 1.

$$t^* = t_1, \quad y^* = x_- = 0. \quad (18)$$

Для построения каждой бифуркационной границы необходимо решить соответствующую систему трансцендентных уравнений, включающую в себя уравнения для определения координат неподвижной точки и одно из дополнительных условий (7) — (18).

4. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ОСОБЫХ С-БИФУРКАЦИЙ

Построение бифуркационных поверхностей значительно облегчается, если известны точки их пересечения. Простейшие случаи особых С-бифуркаций соответствуют такому пересечению бифуркационных поверхностей в пространстве параметров, когда они не могут быть продолжены за линию пересечения. Дополнительные связи на параметры системы сводятся в этом случае к одновременному выполнению дополнительных условий для «пересекающихся» бифуркаций, что требует обращения в нуль производных более высокого порядка. При конкретном исследовании динамической системы тип особой бифуркации легко определяется по знаку первой отличной от нуля производной от функции $y(t)$ или по известному типу периодического движения в особом случае.

В изучаемой нами системе логически возможны следующие пересечения бифуркационных поверхностей:

$$\begin{array}{ll}
 C_1C_6 \rightarrow (1.2.2s.s2.) & C_5C_7 \rightarrow (2s.s1.1s.) \\
 C_2C_7 \rightarrow (1s.s1.1s.) & C_6C_8 \rightarrow (2s.s2.2s.) \\
 C_3C_8 \rightarrow (1s.s2.2s.) & C_7C_3 \rightarrow (s1.1s.s2.) \\
 C_4C_2 \rightarrow (2.1.1s.s1.) & C_8C_5 \rightarrow (s2.2s.s1.) \\
 C_1C_5 \rightarrow (1.2.2s.s1.) & C_4C_3 \rightarrow (2.1.1s.s2.)
 \end{array}$$

Исследование условий существования особых C -бифуркаций и рассмотрение поведения фазовых траекторий в особых случаях показывает, что случаю а) C_1C_6 соответствует попадание фазовой траектории на границу Π_2 в точку $y^* = (\beta + 1)/\gamma^2$ при $t^* = (2k\pi + \pi/2)/\omega$ (рис. 4 а); б) C_2C_7 — попадание фазовой траектории на границу Π_s в точку

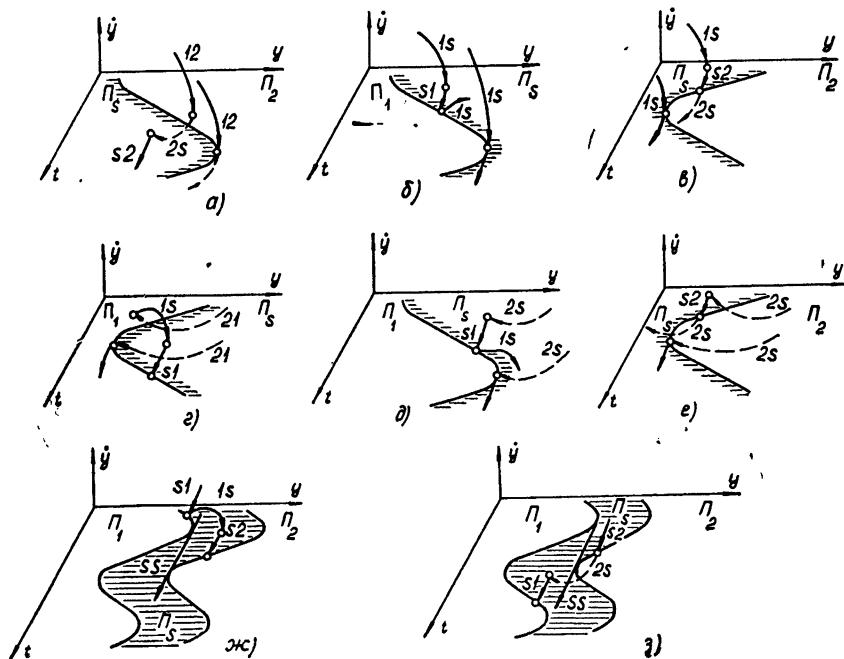


Рис. 4.

$y^* = \beta + 1$ при $t^* = (2k\pi + \pi/2)/\omega$ при движении в области G_1 (рис. 4 б); в) C_3C_8 — попадание фазовой траектории на границу Π_s в точку $y^* = (\beta - 1)/\gamma^2$ при $t^* = (2k\pi + 3\pi/2)/\omega$ из области G_1 (рис. 4 в); г) C_4C_2 — попадание фазовой траектории на границу Π_1 в точку $y^* = \beta - 1$ при $t^* = (2k\pi + 3\pi/2)/\omega$ из области G_2 (рис. 4 г); д) C_5C_7 — попадание фазовой траектории на границу Π_s в точку $y^* = \beta + 1$ при $t^* = (2k\pi + \pi/2)/\omega$ при движении в области G_2 (рис. 4 д); е) C_6C_8 — попадание фазовой траектории из области G_2 на границу Π_s в точку $y^* = (\beta - 1)/\gamma^2$ при $t^* = (2k\pi + 3\pi/2)/\omega$ (рис. 4 е), а ж) пересечениям C_7C_3 и C_8C_5 соответствует попадание фазовой траектории на пластинку непрерывного скользящего движения при $y^* = \beta + 1 = (\beta - 1)/\gamma^2$ (рис. 4 ж и рис. 4 з).

Особые случаи пересечения C_1C_5 и C_4C_3 имеют место лишь в вырожденном случае $\gamma = 1$.

Таким образом, в рассматриваемой нами системе логически могут иметь место все перечисленные случаи особых C -бифуркаций. Для исследуемого периодического режима 12.21. существуют бифуркации C_2 , C_3 , C_5 , C_6 и C_9 , описываемые уравнениями (9), (11), (14), (16) и (18) соответственно. Как видно из рассмотрения особых случаев, перечис-

ленные бифуркационные границы не имеют между собой особых точек пересечения. Однако все они, кроме C_9 , пересекаются с границей устойчивости N_φ при $\omega=0$, поскольку для N_φ $x_+ = \beta + |1/(1-\omega^2)|$, а $x_- = \beta - |1/(1-\omega^2)|$ при $\omega \neq 0$ и $x_+ = x_- = \beta$ при $\omega = 0$. Этот случай является особым, так как мы рассматриваем нелинейную динамическую систему с характеристикой треугольной петли гистерезиса $\gamma \neq 1$. Бифуркационная кривая C_9 пересекается с границей N_φ в точках $\omega = \pm\sqrt{1 \pm 1/\beta}$. Данные точки пересечения, полученные аналитическим путем, можно использовать как исходные при построении бифуркационных кривых с помощью ЭВМ.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ И ПОСТРОЕНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ

Предварительный качественный анализ возможных типов C -бифуркаций (возможных типов периодических движений) и условий их пересечения позволяет провести разбиение пространства параметров системы на области существования различных (не только простых) периодических режимов моделированием уравнений движения на ЭВМ с последующим анализом типа движения и контролем его сходимости. В районах ожидаемого пересечения бифуркационных кривых, а также вблизи границ смены режима анализ проводился с повышенной точностью.

Результаты исследования поведения системы при различных значениях параметров γ^2 и ω при фиксированном $\beta = 5$ приведены на рис. 5. Область существования и устойчивости простейшего безотрыв-

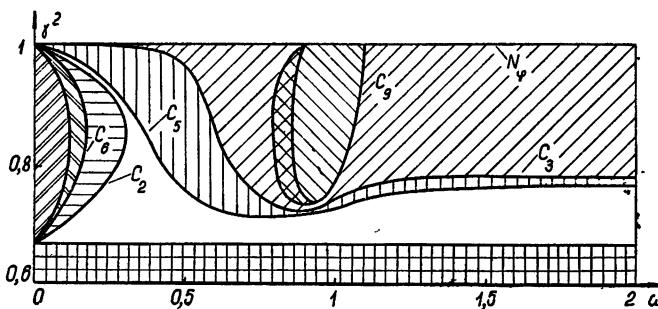


Рис. 5.

ного периодического режима 1.2.2.1. ограниченна кривыми N_φ ($\gamma = 1$), C_3 и C_9 . Во всей области имеет место устойчивый периодический режим с периодом вынуждающей силы, который на границе C_9 сменяется режимом движения с отрывом (1.2.2.3.3.1.), причем имеет место расщепление кривой C_9 на кривые C'_9 и C''_9 . В области, заключенной между ними, имеют место два режима (1.2.2.1. либо 1.2.2.3.3.1.), и тип режима зависит от начальных условий.

На границе C_3 режим 1.2.2.1. сменяется режимом со скольжением 1s.s2.2.1. при $y(t) > \beta$. Численный анализ показал, что режимов со скольжением при малых $y(t)$, без скольжения при больших $y(t)$ не существует. Физически это объясняется тем, что в области больших $y(t)$ демпфирующие свойства системы проявляются сильнее, ибо нелинейность имеет вид треугольника.

При переходе через кривую C_5 режим 1s.s2.2.1. сменяется режимом 1s.s2.2s.s1. (скольжение с обеих сторон), который в свою оче-

редь сменяется режимом $1s.s1.1s.s2.2s.s1.$ на границе C_2 . Если проследить за сменой режимов при фиксированном γ^2 , то можно отметить, что с уменьшением ω режим при переходе через бифуркационные границы непрерывно усложняется, причем имеет место закономерность появления сначала дополнительного скольжения при $y(t) > \beta$, а затем при $y(t) < \beta$. При $\gamma^2 < (\beta - 1)/(\beta + 1)$ для любых ω наблюдается непрерывное скользящее движение.

Для контроля построения C -границ с помощью моделирования уравнения движения на ЭВМ было проведено аналитическое построение кривой C_9 путем решения описывающей ее системы трансцендентных уравнений. Расхождение в обоих случаях не превышало 5%.

Исследование пространства параметров (γ, ω) при различных β показало, что качественно картина расположения областей с различными режимами сохраняется, с ростом β область движений с отрывом сужается, а область непрерывного скольжения ss расширяется. При $\beta \geq 1$ появляются движения со скольжением и отрывом, не наблюдаемые при $\beta = 5$. Все полученные результаты хорошо согласуются с выводами качественного анализа.

6. АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПРОХОЖДЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

При проектировании реальных динамических конструкций юсобый интерес представляют резонансные свойства системы.

Для построения амплитудно-частотных характеристик решим систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) на ЦВМ методом Рунге-Кутта при следующих начальных условиях: $y(t_0) = (\beta + 2)/\gamma^2$, $\dot{y}(t_0) = 0$, $f(y) = \gamma^2 y$.

В процессе решения контролировалась его сходимость и попутно определялся тип совершающегося системой движения. Шаг интегрирования был выбран равным $h = 2\pi/100 \omega$. Процесс считался установленным, если амплитуда колебаний A^i и длительность i -го цикла τ_i отличались от соответствующих величин предыдущего цикла не более чем на $\epsilon = 10^{-2}$.

На рис. 6 приведены результаты, полученные для случая $\beta = 5$. Их анализ показывает, что все амплитудные характеристики имеют максимум в районе $\omega = 0,8$, а резонансные свойства проявляются наиболее сильно в области совершения системой колебаний с отрывом, когда амплитуда вынужденных колебаний значительно превосходит амплитуду вынуждающей силы и динамический коэффициент превышает 10.

Амплитудные характеристики имеют гистерезисный характер, обусловленный наличием двух типов периодических движений в области, заключенной между бифуркационными кривыми C_9 и C'_9 . Наряду с амплитудно-частотными характеристиками представляет практический интерес изучение поведения динамической системы с нелинейностью типа треугольной петли гистерезиса под воздействием вынуждающей силы, частота которой меняется по линейному закону $\omega = \alpha t$. Подобно тому, как это сделано, например, в работе [5], решим систему нелинейных дифференциальных уравнений (2) при нулевых начальных условиях, подставив в правую часть выражение $\sin(\alpha t^2)$. В процессе решения запоминались и анализировались максимальное $X^i = y(\tau_i)_{\max}$ и минимальное $x^i = y(\tau_i)_{\min}$ отклонения системы от положения равновесия. Резонансные свойства системы при каждом значении параметров характеризовались величинами A_{\max} , X_{\max} и X_{\min} , выборка которых прекращалась при выполнении одного из условий: а) $y(t)$ стало больше Y^* ; б) время решения T превысило некоторое заданное

T^* ; в) ни одно из N последующих значений X^l не превысило X_{\max} , A^l не превысило A_{\max} , а x^l не стало меньше X_{\min} .

При решении принималось $N = 20$, $Y^* = 25$ и $T^* = 5000$.

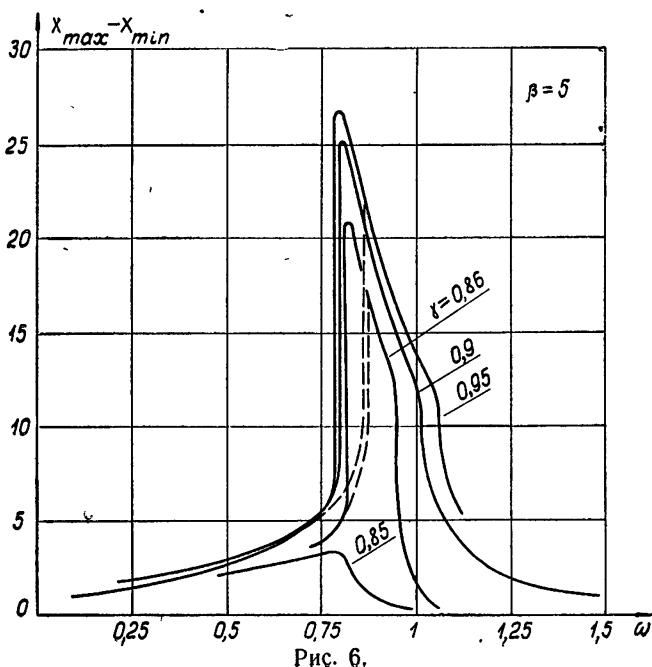


Рис. 6.

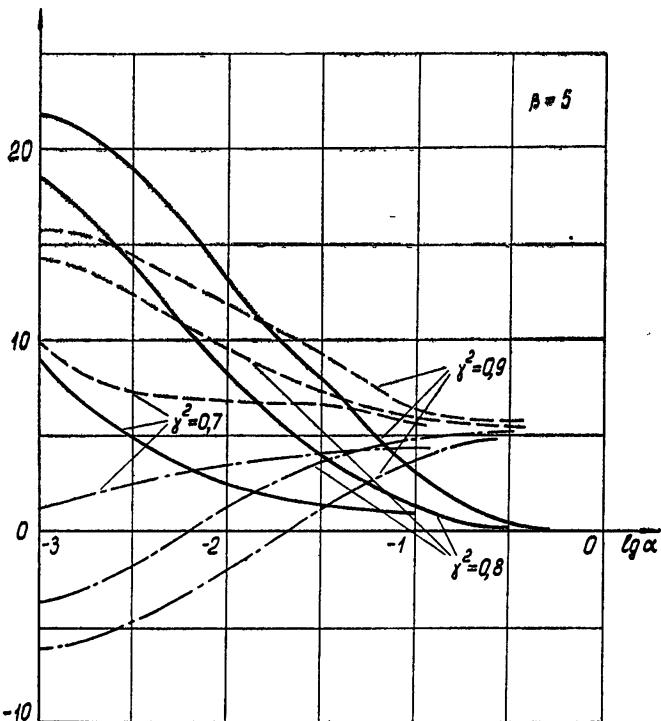


Рис. 7.

Резонансные характеристики системы в виде зависимостей $A_{\max}(\lg \alpha)$ (сплошные линии), $X_{\max}(\lg \alpha)$ (пунктирные линии) и $X_{\min}(\lg \alpha)$ (штрих-пунктирные линии) при разных значениях γ^2 приведены на рис. 7.

Анализ полученных результатов показывает, что при малых скоростях изменения частоты α и малых γ^2 отклонения системы от положения равновесия велики и являются опасными для конструкции. С ростом α колебания уменьшаются и параметр γ^2 оказывает меньшее влияние. Следовательно, даже при больших γ^2 , т. е. при малом поглощении энергии в системе, при достаточно большой скорости изменения частоты α можно добиться случая, чтобы максимальное отклонение системы от положения равновесия не превышало допустимой для конструкции величины.

Аналогичная картина имеет место в системах с нелинейностью типа 'полигональной' петли гистерезиса [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Пановко, сб. Динамика машин, Машгиз, М., 1963, стр. 209.
2. В. Б. Шилин, сб. Колебания упруго-фрикционных систем, Рига, 1964.
3. Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 2, 358 (1964).
4. М. И. Фейгин, Всесоюзный межвузовский симпозиум по прикладной математике и кибернетике, тезисы докладов, Горький, 1967.
5. В. Г. Климов, Машиноведение, № 1, 17 (1969).

Горьковский институт инженеров
водного транспорта

Поступила в редакцию
11 октября 1968 г.

DYNAMICS OF A SYSTEM WITH NON-LINEARITY OF A TRIANGULAR HYSTERESIS TYPE

V. G. Klimov

By point transformation technique using the bifurcation theory a solution is obtained for the problem of forced oscillations in a system with non-linearity of non-symmetrical triangular hysteresis type. The possible types of periodic motions and the conditions excluding their existence are studied. The parameter space is decomposed into different regions of modes existence, amplitude responses are constructed and the system's passage through resonance is examined.

УДК 531.391.3/4 + 621.396.6 078 6

**К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ
С ОДИНАКОВЫМИ ИНТЕГРИРУЮЩИМИ ФИЛЬТРАМИ
В ФАЗОВОЙ И ЧАСТОТНОЙ ЦЕПЯХ**

В. Д. Шалфеев

Рассматривается динамика системы частотно-фазовой автоподстройки с интегрирующими фильтрами в фазовом и частотном кольцах при нелинейных характеристиках фазового и частотного дискриминаторов в случае, когда постоянные времени фильтров равны. Задача приводит к качественному изучению на цилиндрической фазовой поверхности нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Изучаются режимы работы системы и бифуркции, определяющие их изменение. Даны графики полосы захвата для наиболее реальных областей параметров. Изучаются особенности системы автоподстройки при наличии падающего участка характеристики частотного детектора.

1. Для увеличения полосы захвата системы фазовой автоподстройки частоты при сохранении высокой помехоустойчивости возможно использование дополнительной частотной цепи управления, т. е. применение совместной системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1-4].

Уравнение системы ЧФАП при некоторой идеализации можно записать в виде [1, 2]

$$p\varphi + \Omega K_1(p) F(\varphi) + \Omega_1 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где φ — разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ ($p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициенты передачи фильтров низких частот в фазовой и частотной цепях управления соответственно, $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ — характеристики фазового (ФД) и частотного (ЧД) детекторов, нормированные на единицу, Ω , Ω_1 , $\delta\omega$ — параметры системы (Ω и Ω_1 — максимальные расстройки, вырабатываемые в фазовой и частотной цепях управления соответственно, $\delta\omega$ — начальная расстройка).

Уравнение (1) в случае фильтров, приводящих к дифференциальному уравнению не выше 2 порядка при полиномальной характеристике ФД и линейной характеристике ЧД, рассмотрено в [1]. Некоторые данные о системе ЧФАП с нелинейной характеристикой ЧД содержатся в [2]. В предположении интегрирующих фильтров $K_1(p) = (T_1 p + 1)^{-1}$, $K_2(p) = (T_2(p) + 1)^{-1}$ и нелинейных характеристик фазового и частотного детекторов $F(\varphi) = \sin \varphi$, $\Phi(p\varphi) = 2\beta_1 p\varphi [1 + (\beta_1 p\varphi)^2]^{-1}$ (β_1^{-1} — расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе ЧД максимально) [3] уравнение (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{T_1 T_2}{\Omega} \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + \left[\frac{T_1 + T_2}{\Omega} + \frac{\Omega_1}{\Omega} T_1 \beta_1 \Phi_y(y) \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \\ & + \left(\frac{1}{\Omega} + T_2 \cos \varphi \right) \frac{d \varphi}{dt} + \sin \varphi + \frac{\Omega_1}{\Omega} \Phi(y) = \frac{\delta\omega}{\Omega}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $y = \beta_1 \frac{d\varphi}{dt}$. Уравнение (2) впервые исследовалось в [3] для случая малых постоянных времени T_2 в частотном кольце. В [4] изучен случай малой постоянной времени T_1 в фазовом кольце. В настоящей работе рассматривается случай равных постоянных времени $T_1 = T_2 \equiv T$ фильтров в фазовом и частотном кольцах (без ограничения на их малость).

Переходя к безразмерному времени $\tau = t \sqrt{\Omega T^{-1}}$ и параметрам $\gamma = \delta\omega \Omega^{-1}$, $b = \Omega_1 \Omega^{-1}$, $\lambda = (\sqrt{\Omega T})^{-1}$, $\beta = \beta_1 \Omega$ и вводя новые переменные η и ξ , вместо (2) можно записать систему

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \eta, \\ \dot{\eta} + \lambda\eta + b\Phi(\eta) + \sin\varphi - \gamma &= \xi, \\ \dot{\xi} &= -\lambda\xi.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь и ниже $\Phi(\eta) = 2\beta\eta[1 + (\beta\lambda\eta)^2]^{-1}$. Без ограничения общности рассмотрения все параметры системы (3) считаем положительными. Последнее уравнение системы (3) не зависит от переменных φ и η . С ростом времени координата ξ стремится к стационарному нулевому значению, следовательно, система (3) имеет устойчивую интегральную поверхность $\xi = 0$, на которой справедливы уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \eta \equiv P(\varphi, \eta), \\ \dot{\eta} &= \gamma - \lambda\eta - \sin\varphi - b\Phi(\eta) \equiv Q(\varphi, \eta).\end{aligned}\quad (4)$$

Будем рассматривать систему (4). За фазовое пространство системы (4) в силу периодичности правых частей по φ может быть принята поверхность цилиндра φ, η . Цилиндр рассматриваем развернутым на часть плоскости $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Разбиение цилиндрической фазовой поверхности на траектории определяют [5] состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы. Физическая интерпретация особых траекторий в системе (4) аналогична [6].

Изучению системы уравнений (4) при $b = 0$ посвящена обширная литература [5, 7–11]. Исследованы особые траектории и их бифуркации. Установлено [5, 7], что при $b = 0$ в системе (4) не может быть циклов первого рода; для значений параметров $\gamma = \gamma_0^*(\lambda)$ имеет место бифуркация, соответствующая появлению петли сепаратрисы седла второго рода. При прохождении с увеличением γ ($\lambda = \text{const}$) через значение параметра $\gamma = \gamma_0^*(\lambda)$ в системе появляется единственный устойчивый предельный цикл второго рода. Достаточно точные оценки кривой $\gamma = \gamma_0^*(\lambda)$ даны в работах [7–11]. Ниже изучается изменение качественной структуры системы (4) с ростом параметра b .

Полное качественное исследование системы (4), в силу ее нелинейности, является сложным. В настоящей работе при исследовании системы (4) главное внимание уделяется изучению двух, необходимых для практики, вопросов: определению величины полосы захвата для наиболее реальных областей параметров (с этой целью изучается разбиение фазовой поверхности на траектории для значений параметров, принадлежащих областям I и IV пространства γ, β, b , введенным ниже) и выяснению некоторых особенностей системы, связанных с наличием падающего участка характеристики ЧД.

Для изучения используются известные приемы качественного анализа [5, 12, 13], облегчающие исследование системы: рассматриваются

расположение изоклинов и поведение траекторий в областях между ними, поворот векторного поля, критерий Бендикусона—Дюлака на цилиндре, а также определение качественной структуры грубой системы с помощью приближенных методов [13, 14].

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего сведения о расположении главных изоклинов системы (4). Изоклиной вертикальных наклонов является ось $\eta = 0$. Уравнение изоклины горизонтальных наклонов системы (4) имеет вид

$$\gamma - \lambda\eta - b\Phi(\eta) - \sin\varphi = 0. \quad (5)$$

В точках пересечения с линиями $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$, $\eta = \eta_3$, $\eta = \eta_4$, где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\beta\lambda)^{-1} [b\beta - 1 + \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}, \quad \eta_2 = -\eta_1; \\ \eta_3 &= (\beta\lambda)^{-1} [b\beta - 1 - \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}, \quad \eta_4 = -\eta_3, \end{aligned} \quad (6)$$

кривая (5) имеет вертикальную касательную. В (6) выражения для $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ действительны при $b\beta > 4$. Область пространства параметров γ, β, b , удовлетворяющую неравенству $b\beta < 4$, обозначим I. Для точек пространства параметров, лежащих в этой области, изоклина (5) однозначна по координате η (рис. 1). Часть пространства γ, β, b , удовлетворяющая условию $b\beta > 4$, разделяется на две области (рис. 2):

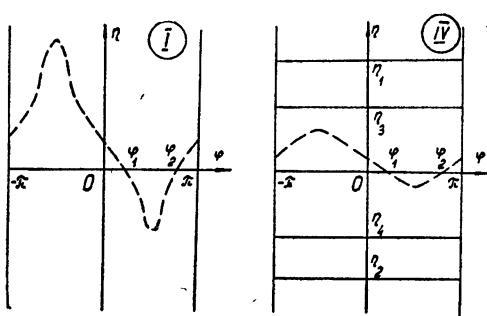


Рис. 1.

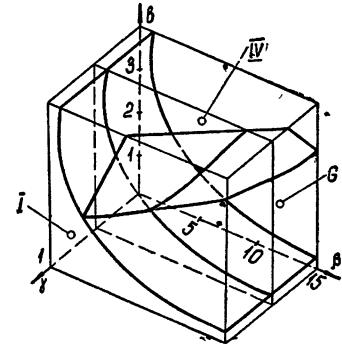


Рис. 2.

область IV (нумерация областей аналогична принятой в [3]), для точек которой изоклина (5) также однозначна по η и целиком расположена в части фазовой поверхности $\eta_4 < \eta < \eta_3$ (рис. 1), и область G, для точек которой изоклина (5) неоднозначна по координате η (при $\gamma < 1$). Область G разделяется, аналогично [3], на несколько областей, для точек которых изоклина (5) имеет различное число пересечений с прямыми (6). Уравнения поверхностей, разделяющих пространство γ, β, b на области с различным расположением изоклины (5), и их сечения имеются в [3]. На рис. 2 поверхности, разделяющие область G, не указаны. Из расположения кривой (5) следует, что для всех областей пространства γ, β, b при $\gamma < 1$ существуют две точки пересечения этой кривой с осью $\eta = 0$. Общие точки двух главных изоклинов определяют состояния равновесия системы.

2. Состояния равновесия. Система (4) имеет при $\gamma < 1$ два состояния равновесия, координаты которых зависят только от параметра γ и определяются равенствами

$$\varphi_1 = \arcsin \gamma, \quad \eta_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma, \quad \eta_2 = 0,$$

Характер состояний равновесия определяется по корням соответствующих характеристических уравнений [5]. Состояние равновесия (φ_1, η_1) является устойчивым узлом или фокусом (узел при $\delta \equiv \lambda^2(1 + 2b\beta)^2 - 4\sqrt{1 - \gamma^2} > 0$, фокус при $\delta < 0$). Состояние равновесия (φ_2, η_2) всегда седло. Заметим, что область пространства параметров, для точек которой состояние равновесия (φ_1, η_1) является устойчивым узлом, увеличена в рассматриваемом случае по сравнению со случаем малых постоянных времени в частотном кольце [3] за счет уменьшения области пространства параметров, для точек которой состояние равновесия (φ_1, η_1) — устойчивый фокус.

При значении параметра $\gamma = 1$ узел (φ_1, η_1) и седло (φ_2, η_2) сливаются, образуя сложную особую точку типа седло-узел. При $\gamma > 1$ система (4) не имеет состояний равновесия.

3. Сепаратрисы седел и их бифуркации. Направления $x_{1,2}$ касательных к сепаратрисам в седле (φ_2, η_2) определяются равенствами

$$x_{1,2} = -\frac{\lambda(1+2b\beta)}{2} \pm \left[\frac{\lambda^2(1+2b\beta)^2}{4} + \sqrt{1-\gamma^2} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

С ростом параметра b (остальные параметры фиксированы) касательные к сепаратрисам в седле поворачиваются по часовой стрелке, поскольку

$$\frac{\partial x_{1,2}}{\partial b} = -\lambda\beta(1 \mp \rho) < 0, \quad (8)$$

$$\rho \equiv \lambda(1+2b\beta) [\lambda^2(1+2b\beta)^2 + 4\sqrt{1-\gamma^2}]^{-1/2} < 1.$$

Векторное поле системы (4) на всем фазовом цилиндре с увеличением параметра b (остальные параметры фиксированы) также поворачивается по часовой стрелке в силу выполнения неравенства

$$\frac{\frac{\partial d\eta}{d\varphi}}{\partial b} = -\frac{1}{\eta}\Phi(\eta) < 0. \quad (9)$$

На основании свойств (8), (9) заключаем, что, если в системе (4) при $b = 0$ бифуркация, соответствующая петле сепаратрисы седла второго рода, имеет место при значении параметра $\gamma = \gamma_0^*(\lambda)$, при $b > 0$ ($\lambda = \text{const}$) этой бифуркации* соответствует большее значение параметра $\gamma = \gamma^*(\lambda) > \gamma_0^*(\lambda)$.

Расположение сепаратрис и оценки бифуркационных значений параметров, соответствующих петле сепаратрисы седла второго рода, для системы (4) при $b > 0$ устанавливаются численными методами с помощью приближенного построения сепаратрис на ЭВМ. Выбирается сетка фиксированных значений параметров γ, λ, β . При заданных значениях $\gamma = \gamma_0, \lambda = \lambda_0, \beta = \beta_0$ устанавливается существование такого значения $b = b_1$, при котором сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ выше, чем сепаратриса S_2 (рис. 3в), и такого значения $b = b_2$, при котором сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ ниже, чем сепаратриса

* Как известно, полоса захвата системы ФАП, описываемой системой (4), при $b = 0$ определяется бифуркацией петли сепаратрисы седла второго рода. Вследствие этого и выполнения неравенства (9) ясно, что добавление частотного кольца ($b > 0$ в (4)) в систему ФАП в принципе не может привести к уменьшению полосы захвата

S_2 (рис. 3 а). Учитывая свойство (9) поворота векторного поля системы (4) с изменением параметра b , устанавливаем, что при переходе от значения $b = b_1$ к значению $b = b_2$ система (4) обязательно и притом единственный раз проходит через бифуркационное значение $b_1 < b = b^* < b_2$, при котором сепаратриса $S_1(S_2)$ идет из седла в седло

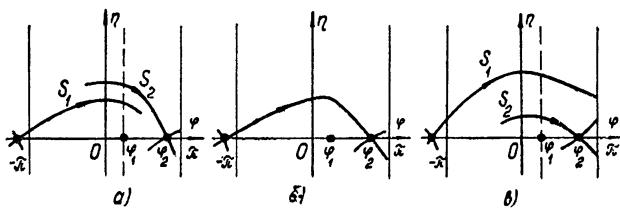


Рис. 3.

(рис. 3 б), охватываюая фазовый цилиндр (петля сепаратрисы седла второго рода). Бифуркационное значение параметра $b = b^*$ определяется приближенно с помощью построения численными методами на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем [13, 14].

Значения параметров, принадлежащие I и IV областям пространства γ, β, b (рис. 2), наиболее интересны* для изучения эффекта расширения полосы захвата, который получается при добавлении частотного кольца в систему ФАП. Для этих областей бифуркационные кривые, соответствующие петле сепаратрисы седла второго рода, представлены на рис. 4 в координатах $(\gamma, \Omega T = \lambda^{-2})$ при различных фиксированных значениях b и β . Сплошными линиями проведены кривые для $b = 0,5$ и $b = 10$, а пунктирными линиями—для $b = 3$ и $b = 50$. Штрихпунктирной линией проведена кривая для случая $b = 0$ (частотное кольцо отсутствует).

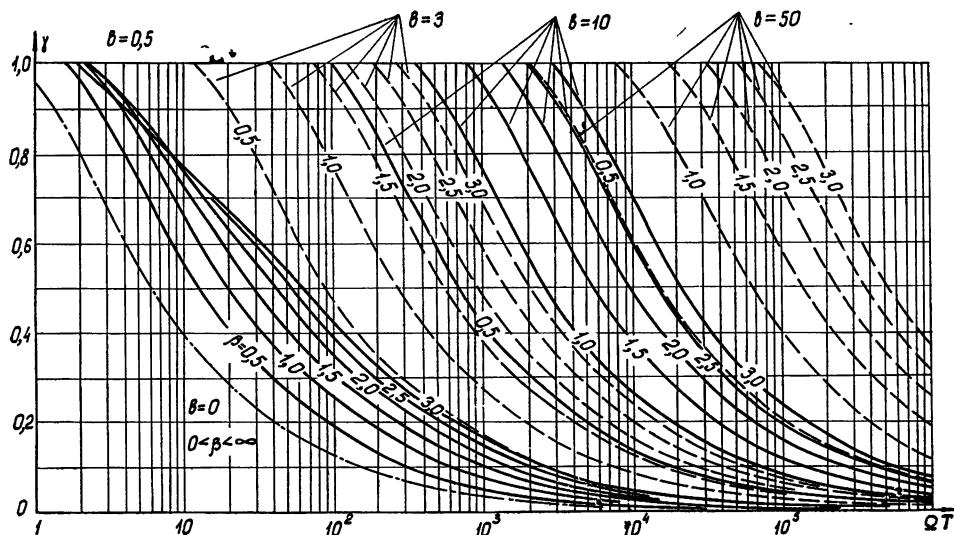


Рис. 4.

* Областям I и IV принадлежат значения параметров γ, β, b , при которых для изучения предельных циклов второго рода и бифуркаций сепаратрис (а следовательно, и полосы захвата) достаточно рассмотреть только возрастающий участок характеристики ЧД [3].

Сравнение расположения полученных кривых в зависимости от параметра β показывает, что с увеличением параметра β бифуркационное значение параметра γ , соответствующее петле сепаратрисы седла второго рода, увеличивается (при фиксированных значениях параметров b и ΩT). Однако, начиная с некоторой величины $\beta = \bar{\beta}$, при дальнейшем увеличении этого параметра бифуркационное значение параметра γ уменьшается (см. кривые $b = 0,5$). Отметим, что при линейной аппроксимации характеристики ЧД [1] это явление не имеет места*.

Определим характер бифуркации при прохождении через петлю сепаратрисы седла второго рода. Устойчивость петли сепаратрисы определяется знаком седловой величины [5, 15, 16]. Седловая величина s для седла (φ_2, η_2) системы (4) при рассматриваемых положительных значениях параметров отрицательна, т. е.

$$s = -\lambda(1 + 2b\beta) < 0, \quad (10)$$

и, следовательно, петля сепаратрисы седла второго рода устойчива. Выполнение неравенства (10) означает [5, 15, 16], что от петли сепаратрисы седла второго рода возможно рождение единственного устойчивого предельного цикла второго рода.

4. Предельные циклы. Известно [5, 7], что система (4) при $b = 0$ не может иметь замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр и пересекающих ось $\eta = 0$; замкнутые траектории, охватывающие цилиндр, если они существуют, лежат целиком в области $\eta > 0$. Аналогично тому, как это сделано в [5], устанавливается справедливость этого утверждения для системы (4) и при $b > 0$, $\beta \geq 0$.

Для решения вопроса о возможности существования предельных циклов применим критерий Бендиксона на цилиндре [5, 12]. Для системы (4) выражение Бендиксона имеет вид

$$B = \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} = -\lambda \left[1 + \frac{b}{\lambda} \Phi'(\eta) \right]. \quad (11)$$

Для значений параметров, принадлежащих области I пространства параметров γ, β, b (рис. 2), выражение B не меняет знак на всей фазовой поверхности, и, следовательно, система (4) для точек этой области не имеет предельных циклов первого рода на всем фазовом цилиндре и может иметь единственный предельный цикл второго рода в области $\eta > 0$ фазового цилиндра. Для остальных областей пространства параметров γ, β, b выражение B изменяет знак на прямых $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2, \eta = \eta_3, \eta = \eta_4$, определяемых равенствами (6). Принимая это во внимание, а также расположение изоклин (рис. 1), заключаем, что для точек области IV пространства параметров γ, β, b система (4) не имеет предельных циклов первого рода, целиком расположенных в области $\eta_4 < \eta < \eta_3$ фазовой поверхности, и может иметь единственный предельный цикл второго рода в области $0 < \eta_5 < \eta_3$ фазовой поверхности. В других областях фазовой поверхности предельных циклов второго рода нет. В области G (рис. 2) пространства параметров γ, β, b система (4) не имеет предельных циклов первого рода, целиком лежащих в области $\eta_4 < \eta < \eta_3$ фазовой поверхности, и может иметь по одному предельному циклу второго рода, целиком лежащему в областях $0 < \eta < \eta_3, \eta_3 < \eta < \eta_1, \eta > \eta_1$ фазовой поверхности.

Устойчивость предельного цикла определяется знаком стационарного

* Впервые существование этого явления при кусочно-линейной характеристике ЧД и полигональной характеристике ФД было отмечено в [2].

от нуля характеристического показателя [5]. Для цикла системы (4) $\varphi = \varphi^*(\tau)$, $\eta = \eta^*(\tau)$ периода τ_0 характеристический показатель определяется равенством

$$h_s = - \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \lambda \left[1 + \frac{b}{\lambda} \Phi'_{\eta}(\eta^*) \right] d\tau. \quad (12)$$

Если цикл расположен целиком в области $0 < \eta < \eta_3$ или области $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности, где подынтегральное выражение в (12) положительно, то он устойчив ($h_s < 0$), если цикл целиком расположен в области $\eta_3 < \eta < \eta_1$, где подынтегральное выражение в (12) отрицательно, то он неустойчив ($h_s > 0$). Таким образом, для значений параметров, принадлежащих областям I и IV пространства параметров γ, β, b , предельный цикл второго рода (если он существует) устойчив. Для точек, лежащих в области G пространства параметров γ, β, b , предельные циклы второго рода, целиком лежащие в областях $0 < \eta < \eta_3$ и $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности, (если они существуют), устойчивы, а в области $\eta_3 < \eta < \eta_1$ фазовой поверхности предельный цикл второго рода, (если он существует) неустойчив.

Проследим за изменением расположения предельных циклов системы (4) при непрерывном изменении параметров γ и b . В силу выполнения равенства

$$\frac{\partial \frac{d\eta}{d\varphi}}{\partial \gamma} = \frac{1}{\eta} \quad (13)$$

поворот векторного поля системы (4) с увеличением параметра γ при постоянных значениях других параметров происходит против часовой стрелки в области фазовой поверхности $\eta > 0$ и по часовой стрелке в области $\eta < 0$. Принимая во внимание соотношения (9) и (13), устанавливаем, что при уменьшении параметра γ (β, λ, b постоянные) или увеличении параметра b (γ, λ, β постоянные) устойчивые предельные циклы, (если они существуют) опускаются на фазовом цилиндре, т. е. их ординаты удовлетворяют неравенствам $\eta_{\gamma_3} < \eta_{\gamma_1}$ ($\gamma_3 < \gamma_1$) и $\eta_{b_2} < \eta_{b_1}$ ($b_2 > b_1$), а неустойчивый предельный цикл поднимается, т. е. его ординаты удовлетворяют неравенствам $\eta_{\gamma_1} > \eta_{\gamma_3}$ и $\eta_{b_1} > \eta_{b_2}$.

Для доказательства существования у системы (4) при некоторых условиях на параметры предельного цикла второго рода достаточно [5] установить существование при этих условиях двух решений $\eta = \eta_1(\varphi)$ и $\eta = \eta_2(\varphi)$, для которых справедливы неравенства

$$\eta_1(\varphi + 2\pi) \leq \eta_1(\varphi), \quad (14)$$

$$\eta_2(\varphi + 2\pi) \geq \eta_2(\varphi). \quad (15)$$

В силу того, что ординаты изоклины горизонтальных наклонов (5) при всех значениях параметров ограничены некоторой величиной η_{\max} , неравенство (14) выполняется для всех траекторий, проходящих в области $\eta > \eta_{\max}$ фазовой поверхности. Для областей I и IV пространства параметров γ, β, b траектории, для которых выполняется неравенство (15), существуют в силу установленного выше расположения сепараторов S_1 и S_2 (рис. 3в) при значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\gamma^*(\Omega T, b, \beta) < \gamma < 1$. Следовательно, для областей I и IV при значениях параметров $\gamma^* < \gamma < 1$ система (4) имеет на фазовой поверхности предельный цикл второго рода, единственный и устойчивый, как показано выше. При $\gamma > 1$ для точек областей I и IV прост-

ранства параметров γ, β, b изоклина горизонтальных наклонов целиком расположена в положительной полуплоскости $\eta > 0$, не пересекаясь с изоклиной вертикальных наклонов. Следовательно, при этих значениях параметров существует хотя бы одна траектория, удовлетворяющая неравенству (15). Стало быть, при $\gamma > 1$ для точек областей I и IV пространства параметров γ, β, b в системе (4) всегда существует единственный устойчивый предельный цикл второго рода.

5. Приведем некоторые сведения о предельных циклах системы (4) и их бифуркациях, имеющих место только для значений параметров, принадлежащих области G пространства γ, β, b . Для точек этой области при $\gamma < 1$ (раздел 1) изоклина горизонтальных наклонов (5) неоднозначна по координате η вследствие наличия падающего участка характеристики ЧД. Изучение предельных циклов для точек, принадлежащих этой области, позволит выяснить некоторые особенности работы системы, связанные с наличием падающего участка характеристики ЧД. Ниже установлено, что в отличие от случая $b = 0$ в системе (4) при $b > 0$ в области G существуют значения параметров γ, β, b , для которых единственность предельного цикла второго рода не имеет места. Действительно, как следует из анализа кривой (5), при $\gamma > 1$ для значений параметров, удовлетворяющих неравенству $1 + \lambda\eta_1 + b\Phi(\eta_1) < \gamma < -1 + \lambda\eta_3 + b\Phi(\eta_3)$ (где η_1 и η_3 определяются равенствами (6)), изоклина горизонтальных наклонов имеет три ветви L_1, L_2, L_3 , расположенные соответственно в областях $0 < \eta < \eta_3$, $\eta_3 < \eta < \eta_1$, $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности (на рис. 5 ветви изоклины даны пунктиром). Следовательно, исходя из знаков производных $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и $\frac{d\eta}{d\tau}$ в областях фазовой поверхности между ветвями L_1, L_2, L_3 изоклины горизонтальных наклонов и изоклины вертикальных наклонов и принимая во внимание вышеизложенное о предельных циклах, устанавливаем, что при этих значениях параметров система (4) имеет три предельных цикла второго рода, из которых два, расположенные соответственно в областях $0 < \eta < \eta_3$ и $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности, устойчивы, а третий, расположенный целиком в области $\eta_3 < \eta < \eta_1$ фазовой поверхности, неустойчив (рис. 5). Устойчивый предельный цикл, расположенный на фазовой поверхности выше неустойчивого, будем называть верхним, а расположенный ниже — нижним.

При $\gamma < 1$ для точек области G пространства параметров γ, β, b также установлено существование таких значений параметров, при которых система (4) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл второго рода, и значений параметров, при которых система (4) имеет по крайней мере три предельных цикла второго рода (два устойчивых и один неустойчивый, расположенный между устойчивыми). Это обнаружено численными методами с помощью приближенного построения на ЭВМ траекторий системы (4), удовлетворяющих неравенствам (14) и (15). Учитывая характер изменения расположения предельных циклов на фазовой поверхности при непрерывном изменении параметров b или γ , можно ожидать существования в области G пространства параметров γ, β, b таких значений параметров, при которых система (4) может иметь на фазовой поверхности двойной (полустойчивый) предельный цикл второго рода. Изучение возможности появления двойных циклов представляет значительный интерес, так как бифуркация, соот-

ветствующая появлению двойного цикла, может определять в пространстве параметров (при некоторых условиях) границу области захвата*.

6. Рассмотрим вопрос о возможности существования двойных циклов второго рода. Для изучения таких бифуркаций рассмотрим сначала возможность появления предельных циклов второго рода в системе (4) в случаях, близких к консервативным. Формулы для отыскания предельных циклов систем, близких к нелинейным консервативным системам, даны в [19]. Такие формулы для циклов, охватывающих фазовый цилиндр, насколько известно автору, получены Н. С. Бочаровой и применялись при рассмотрении конкретных задач на фазовом цилиндре в работах [20–22].

В системе (4) вместо параметров β и b введем в рассмотрение параметры M и N с помощью следующих соотношений: $b\lambda^{-1} = M$, $(\beta\lambda)^{-1} = N$. Будем изучать бифуркации в зависимости от отношения λ/γ при фиксированных $M, N > 0$ от замкнутых кривых консервативной системы, которая имеет место при $\lambda = \gamma = 0$. Введем малый параметр** μ , полагая $\gamma = \mu$, $\lambda = k\mu$. При этом систему (4) можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \eta = \frac{\partial H(\varphi, \eta)}{\partial \eta} + \mu p(\varphi, \eta),$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\sin \varphi + \mu \left[1 - k \left(1 + \frac{2MN}{N^2 + \eta^2} \right) \eta \right] = -\frac{\partial H(\varphi, \eta)}{\partial \varphi} + \mu q(\varphi, \eta), \quad (16)$$

где

$$H(\varphi, \eta) \equiv \frac{\eta^2}{2} - \cos \varphi = h,$$

$$p(\varphi, \eta) = 0,$$

$$q(\varphi, \eta) = \left[1 - k \left(1 + \frac{2MN}{N^2 + \eta^2} \right) \eta \right].$$

При $\mu = 0$, система (16) является консервативной. Разбиение фазового цилиндра на траектории для этого случая дано в [5]. Константы h , соответствующие замкнутым кривым консервативной системы, от которых при малых $\mu \neq 0$ рождаются предельные циклы второго рода [12, 20–23], удовлетворяют уравнению

$$\Psi(h) \equiv \int [q(\varphi, \eta) d\varphi - p(\varphi, \eta) d\eta] = 0. \quad (17)$$

Криволинейный интеграл берется по замкнутому контуру кривой консервативной системы. Устойчивость возникающего от замкнутой кривой $h = h_0$ предельного цикла определяется знаком $\Psi'_h(h_0)$ (цикл устойчив, если $\Psi'_h(h_0) < 0$, и неустойчив, если $\Psi'_h(h_0) > 0$). Следовательно, задача сводится к определению корней функции $\Psi(h)$ и знака $\Psi'_h(h)$ для этих корней.

* Известно [17, 18], что в системе ФАП с широко применяемым пропорционально-интегрирующим фильтром полоса захвата определяется не только бифуркацией, связанной с петлей сепаратрисы седла, но и бифуркацией, связанной с появлением двойного цикла второго рода.

** Изучение бифуркаций особых траекторий от замкнутых кривых консервативной системы в зависимости от отношения ($k = \lambda/\mu$) малых параметров λ, μ впервые проведено Баутином [21].

Уравнение (17) для системы (16) имеет вид

$$\Psi(h) \equiv 2 \int_0^\pi \left(1 - k \frac{2MN}{N^2 + \eta^2} \eta \right) d\varphi - 2 \int_0^\pi k \eta d\varphi = 0, \quad (18)$$

где η определяется уравнением $H(\varphi, \eta) = h$ для $h > 1$. Выражение для функции $\Psi(h)$ после некоторых преобразований можно записать через эллиптические интегралы [24] в виде

$$\Psi(h) = 2\pi - \frac{8k}{e} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - 4MNke \left[K\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - \frac{N^2 e^2}{4 + N^2 e^2} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, e\right) \right], \quad (19)$$

где

$$e = 2(2h + 2)^{-1/2},$$

$$n = -4e^2(4 + N^2 e^2)^{-1},$$

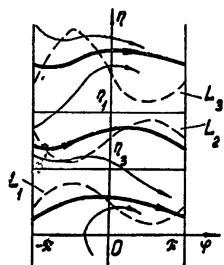


Рис. 5.

$K\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \int_0^1 \frac{dy}{[(1-y^2)(1-e^2y^2)]^{1/2}}$ — полный эллиптический интеграл

первого рода, $E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = \int_0^1 \frac{(1-e^2y^2)^{1/2}}{(1-y^2)^{1/2}} dy$ — полный эллиптический

интеграл второго рода, $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, e\right) = \int_0^1 \frac{dy}{[(1-y^2)(1-e^2y^2)]^{1/2}(1+ny^2)}$ —

— полный эллиптический интеграл третьего рода.

Для изучения характера кривой $\Psi(h)$ воспользуемся результатами работы [22]. В этой работе для уравнения синхронной машины с асинхронной характеристикой исследуется функция $\Psi_1(h)$, выражение для которой совпадает с выражением для $\Psi(h)$, если в (18) опустить член

$\Psi_2(h) = -2 \int_0^\pi k \eta d\varphi$ (в (19) это означает отсутствие членов, в который

входит эллиптический интеграл второго рода). Установлено, что функция $\Psi_1(h)$ для рассматриваемых значений $h > 1$ имеет один экстремум (минимум). При $h \rightarrow \infty$ $\Psi_1(h) \rightarrow 2\pi$. В плоскости (Ψ_1, h) кривые $\Psi_1 = \Psi_1(h, k)$ для $k \neq 0$ образуют семейство непересекающихся кривых, непрерывно зависящих от параметра k . С ростом k кривые сдвигаются вниз. Функция $\Psi_2(y)$ в (18) есть функция отрицательная, неограниченно убывающая при $h \rightarrow \infty$. Поэтому добавление функции $\Psi_2(h)$ к $\Psi_1(h)$ приводит либо к появлению еще одного экстремума, (кроме минимума появляется максимум), либо к исчезновению экстремумов вообще у функции $\Psi(h) = \Psi_1(h) + \Psi_2(h)$.

Значения функции $\Psi(h)$ для различных h при некоторых фиксированных значениях параметров M, N, k просчитаны по формуле (19) с помощью ЭВМ. На рис. 6 в плоскости (Ψ, h) представлены кривые $\Psi(h)$ для нескольких значений параметра k , просчитанные при $N = 1$ соответственно для $M = 10$ (пунктирной линией), $M = 7$ (сплошной линией), $M = 1$ (штрихпунктирной линией) (значения k даны на ри-

сунках). При $M = 10$ и $M = 7$ функция $\Psi(h)$ имеет максимум и минимум, а при $M = 1$ экстремумов нет. Из анализа расположения кривых следует, что в обоих случаях $M = 10$ и $M = 7$ система (16) при малых значениях k имеет один устойчивый предельный цикл второго рода (верхний). При увеличении k появляется полуустойчивый предельный цикл второго рода, распадающийся на устойчивый (нижний) и неустой-

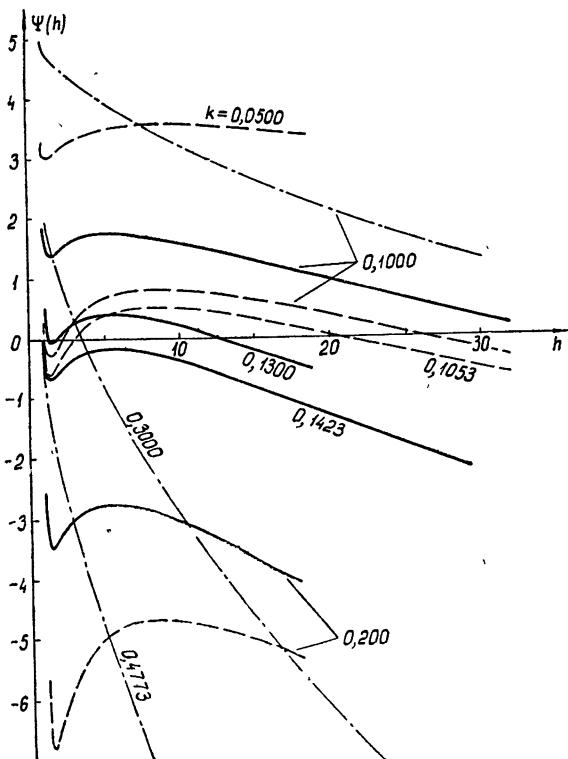


Рис. 6.

чивый предельные циклы второго рода. При дальнейшем увеличении k в случае $M = 10$ нижний устойчивый предельный цикл второго рода «влипает» в петлю сепаратрисы седла второго рода, а затем неустойчивый предельный цикл сливаются с верхним устойчивым, образуя двойной цикл второго рода, тогда как в случае $M = 7$ при дальнейшем увеличении k вначале происходит бифуркация, соответствующая слиянию неустойчивого предельного цикла с верхним устойчивым, а затем бифуркация, соответствующая «влипанию» нижнего устойчивого предельного цикла второго рода в петлю сепаратрисы седла второго рода. В случае $M = 1$ при малых k имеется один устойчивый предельный цикл второго рода, который при увеличении k «влипает» в петлю сепаратрисы седла второго рода. При больших k в рассмотренных случаях система (16) не имеет предельных циклов второго рода.

Возвращаясь к прежним параметрам заключаем, что в окрестности оси β пространства $\gamma, \beta, b, \lambda$ системы (4) при достаточно больших значениях β могут проходить по крайней мере три бифуркационные поверхности: одна из них соответствует петле сепаратрисы седла второго рода, две других—двойным циклам второго рода.

Рассмотрим другой случай $\varepsilon = (\Omega T)^{-1} \ll 1$, когда* система (4) также близка к консервативной и от замкнутых кривых консервативной системы также может родиться три предельных цикла второго рода. С помощью замены $\tau = \lambda^{-1} t$, $\eta = \lambda \bar{\eta}$ систему (4) можно привести к виду

$$\dot{\varphi} = \bar{\eta} = \frac{\partial H_1}{\partial \eta} + \varepsilon p_1(\varphi, \bar{\eta}),$$

$$\dot{\bar{\eta}} = \varepsilon \left[\gamma - \bar{\eta} - b \frac{2\beta \bar{\eta}}{1 + (\beta \bar{\eta})^2} - \sin \varphi \right] = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \varepsilon q_1(\varphi, \bar{\eta}), \quad (20)$$

где

$$H_1 \equiv \frac{\bar{\eta}^2}{2} = h_1, \quad p_1(\varphi, \bar{\eta}) = 0,$$

$$q_1(\varphi, \bar{\eta}) = \gamma - \bar{\eta} - b \frac{2\beta \bar{\eta}}{1 + (\beta \bar{\eta})^2} - \sin \varphi.$$

При $\varepsilon = 0$ система (20) консервативная. Уравнение, определяющее константы h_1 , соответствующие замкнутым кривым второго рода консервативной системы, от которых при малых $\varepsilon \neq 0$ рождаются предельные циклы второго рода, имеет вид

$$\Psi(h_1) \equiv 2\pi \{ \gamma - \bar{\eta} - 2b\beta\bar{\eta}[1 + (\beta\bar{\eta})^2]^{-1} \} = 0, \quad (21)$$

где $\bar{\eta}$ определяется уравнением $H_1 \equiv \bar{\eta}^2/2 = h_1$ для $h_1 > 0$. Исследование корней уравнения (21) позволило сделать следующие выводы о бифуркациях в системе (20). При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \gamma < 1$, $0 < b\beta \equiv \alpha < 4$, система (20) при $\varepsilon \neq 0$ имеет один устойчивый предельный цикл второго рода. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $4 < \alpha < \infty$, $0 < \gamma < \gamma^*$ и $4 < \alpha < \infty$, $\gamma^{**} < \gamma < 1$, система (20) также имеет один устойчивый предельный цикл второго рода. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $4 < \alpha < \infty$, $\gamma^* < \gamma < \gamma^{**}$, существуют два устойчивых и один неустойчивый, расположенный между устойчивыми, предельные циклы второго рода.

Уравнения

$$\gamma = \gamma^* \equiv \beta^{-1} [\alpha - 1 + \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}]^{1/2} [3\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}] [\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}]^{-1}, \quad (22)$$

$$\gamma = \gamma^{**} \equiv \beta^{-1} [\alpha - 1 - \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}]^{1/2} [3\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}] [\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}]^{-1} \quad (23)$$

определяют бифуркационные значения параметров, соответствующие наличию в системе (20) двойного цикла второго рода. Таким образом, в рассмотренных случаях, когда система (4) близка к консервативной, установлено наличие бифуркации, соответствующей появлению двойного цикла.

Без предположения о близости системы (4) к консервативной для значений параметров, принадлежащих области G пространства γ, β, b , применение методов качественного интегрирования с помощью ЭВМ близких грубых систем [13, 14] позволило установить существование бифуркаций, соответствующих появлению петли сепаратрисы седла второго рода и двойных циклов. Для примера на рис. 7 представлены бифуркационные кривые, полученные для некоторого интервала значений параметра ΩT с помощью счета на ЭВМ в случаях $b = 0,5$, $\beta = 15$ (просчитанные точки отмечены крестиками) и $b = 0,5$, $\beta = 50$ (точки

* Такие значения параметров интересны практически, этот случай рассматривается обычно как асимптотический.

отмечены кружочками). Кривые, соответствующие петле сепаратрисы седла второго рода, даны пунктирной линией и обозначены буквой П, а кривые, соответствующие двойным циклам,—сплошной и обозначены буквами D_1 и D_2 . Бифуркационные значения, соответствующие двойным циклам D_1 и D_2 , просчитанные при больших значениях параметра

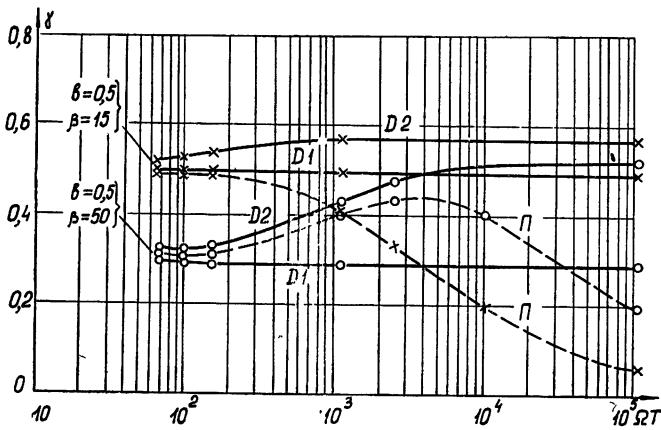


Рис. 7.

ра ΩT (рис. 7), практически совпадают со значениями, получающимися из формул (22) и (23). В случае $b = 0,5$, $\beta = 15$ расположение фазовых траекторий системы (4), имеющее место при различных значениях параметра γ (для любого фиксированного ΩT из просчитанного интервала), дано на рис. 8. (На рис. 8 и 9 буквами п, д, а, б обозначены петля, двойной цикл, устойчивый цикл, неустойчивый цикл соответственно.) В случае $b = 0,5$, $\beta = 50$ расположение фазовых траекторий системы (4) для любого фиксированного значения ΩT из просчитанно-

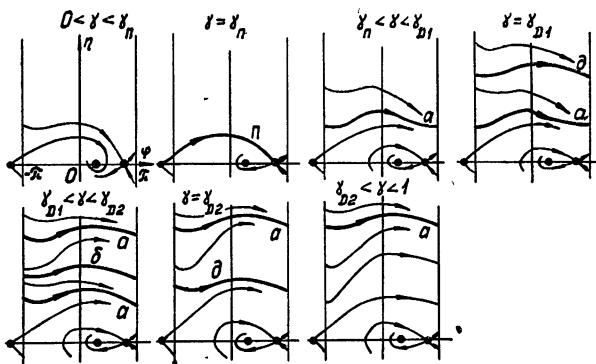


Рис. 8.

го интервала, большего значения ΩT^* , при котором пересекаются бифуркационные кривые D_1 и Π (рис. 7), такое же, как на рис. 8, а для фиксированного значения $\Omega T < (\Omega T)^*$ дано на рис. 9. Бифуркационные кривые, устанавливающие расположение бифуркационных поверхностей для других значений параметров, принадлежащих области G , в настоящей работе не даны.

7. Полоса захвата. Область начальных расстроек, в которой при любых начальных условиях в системе устанавливается режим синхронизма, есть полоса захвата системы автоподстройки. В рассматривае-

мой системе для значений параметров, принадлежащих I и IV областям пространства γ, β, b , потеря синхронизма и установление асинхронного режима биений возможны лишь при появлении на фазовом цилиндре предельного цикла второго рода. Как установлено выше, для этих областей пространства γ, β, b появление предельного цикла возможно

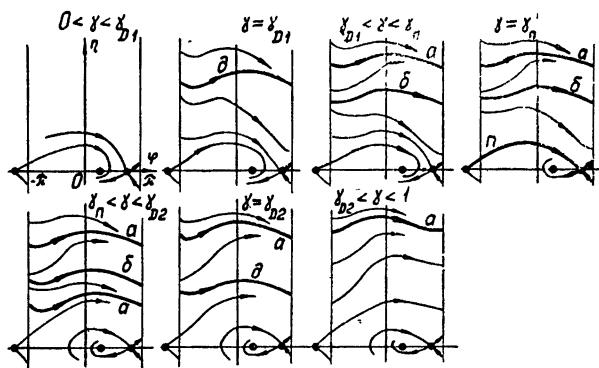


Рис. 9.

лишь от петли сепаратрисы седла второго рода. Следовательно, для указанных областей полоса захвата системы полностью определяется бифуркацией, связанной с петлей сепаратрисы седла второго рода. Поэтому бифуркационные кривые, данные на рис. 4, являются в рассматриваемой задаче графиками зависимости полосы захвата от параметров системы. Для области G пространства параметров γ, β, b это не имеет места. Здесь полоса захвата определяется не только бифуркацией, связанной с петлей сепаратрисы седла второго рода, но и бифуркацией, соответствующей появлению двойного цикла второго рода. Для этой области графики зависимости полосы захвата от параметров полностью в работе не даны. Приведенные для некоторых значений параметров графики бифуркационных кривых (рис. 7) служат иллюстрацией того, что для области G полоса захвата может определяться бифуркационной кривой D_1 .

Проведенные исследования дают возможность сделать некоторые выводы о влиянии дополнительного частотного кольца на динамику системы фазовой автоподстройки. Полоса захвата системы ЧФАП шире, чем в соответствующей системе ФАП, причем в рассматриваемом случае равных постоянных времени фильтров в фазовой и частотной цепях управления увеличение полосы захвата больше, чем в случае малой постоянной времени фильтра в частотном кольце [3]. Добавление частотного кольца в систему ФАП приводит к увеличению области параметров (соответствующей состоянию равновесия типа узел), для которой процесс установления синхронизма происходит с большим затуханием. В рассматриваемом случае это увеличение больше, чем в случае малых постоянных времени фильтра в частотном кольце. Наличие падающего участка характеристики ЧД приводит к особенностям рассматриваемой системы ЧФАП, отличающей ее от соответствующей системы ФАП. Здесь полоса захвата для некоторой области параметров может определяться не только бифуркацией, связанной с петлей сепаратрисы седла второго рода, но и бифуркацией, соответствующей появлению двойного цикла.

Автор глубоко благодарен Л. Н. Белюстиной, под руководством которой выполнена работа, К. Г. Кивелевой, выполнившей счет на ЭВМ БЭСМ-3М и В. Н. Белых за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. В. Капранов, Научн. докл. высш. шк — Радиотехника и электроника, № 2, 162 (1958).
- 2 М. В. Капранов, Диссертация, МЭИ, 1957.
- 3 Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 383 (1968)
- 4 В. П. Пономаренко, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 11, 1694 (1968)
- 5 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959
- 6 Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
- 7 Т. Tricomi, Ann. della R. Scuola Norm. Superiore di Pisa, 2, № 2 (1933).
- 8 L. Atnegio, Ann. Mat. pura Appl., 30, № 4, 75 (1949).
- 9 C. Bohm, Ann. Mat. pura Appl., 35, № 4 (1953).
- 10 G. Seifert, Zs. f. angewandte Math. und Physik, 3, 407 (1952).
- 11 A. Giger, Zs. f. angewandte Math und Physik, 7, 121 (1956).
- 12 Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 2, 118 (1958).
- 13 Е. А. Андронова — Леонович, Л. Н. Белюстина, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям, изд. АН УССР, Киев, 1963
- 14 Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 4, 638 (1959).
- 15 Е. А. Леонович, ДАН СССР, 78, 641 (1951).
- 16 А. А. Андронов, Е. А. Леонович, Маг. сб., 48, (90), 335 (1959).
- 17 Н. А. Губарь, ПММ, 25, № 6, 1011 (1961).
- 18 Л. Н. Белюстина, Всесоюзный симпозиум по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применением, тезисы доклад., Самарканд, 1964.
- 19 Л. С. Понtryagin, ЖЭТФ, 4, 9 (1934).
- 20 С. П. Власов, Уч. зап. ГГУ, вып. 12 (1939).
- 21 Н. Н. Баутин, Уч. зап. ГГУ, вып. 13, (1947).
- 22 Л. Н. Белюстина, Р. А. Чеснокова, Уч. зап., Прикл. мат. и киб., Горький, 1967.
- 23 А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Фордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
- 24 И. М. Градштейн и И. С. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производствений, Физматгиз, М., 1963.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июня 1968 г.

TO THE RESEARCH OF NON-LINEAR SYSTEM OF FREQUENCY PHASE-FREQUENCY AUTOMATIC CONTROL WITH IDENTICAL INTEGRATING FILTERS IN PHASE AND FREQUENCY CIRCUITS

V. D. Shalfeev

The paper deals with system dynamics of frequency phase-frequency automatic control with integrating filters in phase and frequency loops under non-linear responses of phase and frequency discriminators in case of equal filter time constants. The problem leads to a qualitative investigation of a non-linear second order differential equation on a cylindrical phase surface. Operating modes of the system and bifurcations determining their change are studied. Entrainment band graphs for most probable parameter regions are given. The paper considers specific features of automatic control system having a falling region in a frequency-sensitive detector response.

УДК 621.391.193

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО
РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ ПРИ ДВОИЧНОМ ЗАДАНИИ
ПРИЗНАКОВ**

P. M. Малкина, A. A. Первозванский

Предлагается процедура построения и применения решающего правила, состоящего из последовательности элементарных линейных правил. Для оптимальной реализации каждого этапа предлагается решать задачу целочисленного программирования. Излагается ряд эвристических схем, позволяющих просто получить приближенное решение. Описываются результаты применения этих схем к одной задаче медицинской диагностики.

1. Основная идея построения последовательного правила для непрерывного случая дана в [1]. Имеется совокупность объектов, определенных как точки P_j в m -мерном пространстве признаков. Для каждого из объектов известно, к какому классу (A или B) он принадлежит. Определяется построение системы гиперплоскостей, позволяющее выделить области, в которых находятся точки только из A и только из B .

Построение ведется последовательно. На первом этапе строится гиперплоскость, так делящая пространство на две части, чтобы в одной из них располагались только точки из A , и притом возможно большее их число. На втором этапе рассматриваются все точки, кроме выделенных из A на первом этапе, и строится гиперплоскость, позволяющая выделить возможно большее число точек, принадлежащих B , из остающейся совокупности. Далее процедура повторяется циклически до полного разделения обучающей последовательности или до момента, когда число невыделенных (неклассифицированных) точек остается достаточно малым.

При распознавании объектов, принадлежность которых заранее неизвестна, производится последовательный контроль на попадание классифицируемой точки в одно из выделенных при построении множеств.

Пусть выделяемое на этапе k множество задается неравенством

$$\Phi_k(P) \geq 0. \quad (1)$$

Тогда для классифицируемой точки P_j проводится цепочка сравнений. Вычисляется $\Phi_1(P_j)$.

Если $\Phi_1(P_j) \geq 0$, то $P_j \in A$, если нет, то вычисляется $\Phi_2(P_j)$. Если $\Phi_2(P_j) \geq 0$, то $P_j \in B$, если нет, то вычисляется $\Phi_3(P_j)$. Основную трудность представляет построение правил, позволяющих на каждом этапе производить выделение наибольшего числа точек. Такое построение приводит к необходимости решения трудоемкой задачи частично целочисленного программирования.

Для практического применения к задачам диагностики важен случай, когда признаки заданы дискретно, в особенности двоично, т. е. по схеме есть — нет, 1 и 0. При этом удобно и коэффициенты решающего

правила разыскивать в двоичной форме, позволяя им принимать только значения 0 или 1. Тогда утверждения решающего правила приобретают легко усвояемый и интерпретируемый практиком-диагностом смысл; например, если присутствуют признаки с номерами 1, 5, 11 то $P \in A^*$.

Основной целью данной работы является рассмотрение этого случая с целью выявления приемлемых в вычислительном отношении схем и проверки эффективности методики на конкретных задачах диагностики.

2. Поскольку характер задач, решаемых на любом этапе построения последовательного правила, одинаков, рассмотрим подробнее только одну из таких задач, опуская индекс этапа и подразумевая под разделяемыми точечными множествами A и B подмножества исходных множеств, оставшиеся невыделенными на предшествующих этапах. Чтобы не фиксировать, точки какого именно множества, A или B , выделяются на рассматриваемом этапе, будем говорить об отделении максимального числа точек из I от точек из II, потребовав, чтобы

$$\Delta P_j - \lambda_0 < 0 \quad (\text{для всех } j \in \text{II}),$$

$$\Delta P_j - \lambda_0 \geq 0 \quad (\text{для максимального числа } j \in \text{I}).$$

Здесь Δ — матрица-строка $(1 \times m)$ с компонентами λ_i , принимающими значения либо 0, либо 1, а λ_0 — целое число. Эту задачу сведем к задаче целочисленного программирования по общей схеме, описанной в [2]. Для любой точки P_j ($j \in \text{I}$) верна одна из двух альтернатив: либо $\Delta P_j - \lambda_0 \geq 0$, либо $-m < \Delta P_j - \lambda_0 < 0$.

Минимизируя число альтернатив второго типа, приходим к задаче

$$\min \sum_{j \in \text{I}} z_j \quad (2)$$

при условиях

- a) $\Delta P_j - \lambda_0 \geq -z_j m \quad (j \in \text{I});$
- б) $\Delta P_j - \lambda_0 \leq -1 \quad (j \in \text{II});$
- в) $\lambda_i, z_j = (0, 1), \lambda_0$ — целое;
- г) $\sum_{i=1}^m \lambda_i - \lambda_0 \geq 0.$

Условие г) гарантирует невозможность вырожденного решения $\lambda=0$: при $\lambda=0$ условие г) требует $\lambda_0=0$, но при этом не удовлетворяется условие б).

На данном этапе возможен случай, когда ни одна точка из выбранного множества не отделяется, например, выбрано II, совпадающее с B , и все точки из B имеют координаты, не меньшие, чем у любой точки из A . Тогда, каково бы ни было решающее правило, оно не фиксируется, и осуществляется переход к следующему этапу, где II уже совпадает с A .

Решение задачи целочисленного программирования вида (2) практически возможно (см., например [2-4]), но достаточно трудоемко (напомним, что для наших целей необходимо решать последовательность таких задач). Вместе с тем возможно построение простых приближенных схем полуэвристического типа, использующих специфику задач распознавания и дающих практически удовлетворительные результаты. Использование приближенных схем разумно и потому, что сама идея построения последовательного правила по существу не требует реше-

* Возможно, эффективным окажется и троичное задание коэффициентов $(1, 0, -1)$, когда присутствие одного из признаков компенсирует присутствие другого, или кодирование исходных признаков по схеме $(1, -1)$, когда в правиле окажется более существенным само отсутствие проявления признака.

ния экстремальных задач: каждое элементарное правило должно быть таким, чтобы отделять достаточно много точек, а не обязательно наибольшее возможное количество. Отступление от экстремальности может привести лишь к росту числа этапов, что, естественно, нежелательно, но в некоторых пределах допустимо.

3. Для наведения на эвристическую схему осуществим предварительное формальное преобразование задачи (2).

Запишем ограничения а), б) в виде равенств

$$\Delta P_j - \lambda_0 + z_j m - \alpha_j = 0 \quad (j \in I),$$

$$\lambda_0 = \Delta P_j + 1 + \beta_j \quad (j \in II),$$

где α_j, β_j — целые неотрицательные числа, откуда находим

$$z_j = -\frac{1}{m} \left[\Delta P_j - \alpha_j - \frac{1}{n_{II}} \sum_{j \in II} (\Delta P_j + \beta_j + 1) \right] \quad (j \in I)$$

(через n_I, n_{II} обозначим число точек в I и II соответственно). Подставляя эти результаты в (2), приходим к следующей формулировке:

$$\max \left(\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i - \frac{1}{n_I} \sum_{j \in I} \alpha_j - \frac{1}{n_{II}} \sum_{j \in II} \beta_j \right) \quad (3)$$

при условиях

$$\Delta P_j - \lambda_0 + z_j m - \alpha_j = 0 \quad (j \in I),$$

$$\Delta P_j - \lambda_0 + 1 + \beta_j = 0 \quad (j \in II),$$

$$\lambda_i, z_j = (0, 1),$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \lambda_0 \quad (\alpha_j, \beta_j \geq 0; \quad \lambda_0, \alpha_j, \beta_j — целые).$$

Здесь

$$a_i = a_{iI} - a_{iII} = \frac{1}{n_I} \sum_{j \in I} P_{ij} - \frac{1}{n_{II}} \sum_{j \in II} P_{ij}. \quad (4)$$

Величинам a_{iI}, a_{iII} может быть дана разумная трактовка: они характеризуют относительную частоту появления признака в классах I и II. Можно условно сказать также, что $|a_i|$ характеризует информативность признака i по отношению к задаче разделения.

Такое понимание коэффициентов a_i прежде всего позволяет предположить, что для грубого разделения может оказаться полезным простейшее правило вида

$$\sum_{i=1}^m a_i P_{ij} \geq 0 \quad (j \in A); \quad \sum_{i=1}^m a_i P_{ii} < 0 \quad (j \in B). \quad (5)$$

Впрочем, чисто геометрически a_{iI}, a_{iII} задают координаты средних точек (центров) каждого из множеств, а вектор с компонентами a_i определяет направление от центра класса I к центру класса II.

Следовательно, правило соответствует обычному способу проведения разделяющей гиперплоскости так, чтобы она имела своей нормалью отрезок, соединяющий средние точки.

Можно предложить и другой элементарный подход. Положим $\lambda_i = \lambda_i^* = 1$, если $a_i > 0$, и $\lambda_i = \lambda_i^* = 0$, если $a_i \leq 0$. Тогда первое слагаемое в целевой функции (3) достигает абсолютного максимума. Выполнения ограничений при этом можно добиться выбором λ_0 . Если задать $\lambda_0 = \lambda_0^* = \max_{j \in II} (\Lambda^* P_j + 1)$, то все $\beta_j = \lambda_0^* - (\Lambda^* P_j + 1) \geq 0$, причем при выбранном $\Lambda = \Lambda^*$ такое значение λ_0^* , очевидно, обеспечивает наименьшее значение $\sum_{j \in II} \beta_j$. Наконец, ограничения $a_j \geq 0$ приведут к автоматическому выбору $z_j = z_j^* = 1$, если $\Lambda^* P_j - \lambda_0^* \geq 0$, $z_j = z_j^* = 0$, если $\Lambda^* P_j - \lambda_0^* < 0$, что непосредственно определит значение функции цели. При этом в правило входят только признаки, для которых $a_i > 0$.

Более эффективным оказался вариант этой идеи, использующий последовательное опробование ввода признаков, начиная с признака, отвечающего наибольшему значению a_i или $|a_i|$.

Если пробный ввод очередного признака уменьшает число ошибок, то он сохраняется в правиле, т. е. соответствующее λ_i полагается равным 1. Если же уменьшения нет, то принимается $\lambda_i = 0$ и аналогичным образом опробывается следующий признак. Дадим формальное описание ряда алгоритмических схем, основанных на описанном эвристическом приеме.

Расположим величины a_i , определяемые по (4), в порядке убывания:

$$a_{11} \geq a_{12} \geq \dots \geq a_{1l} \geq \dots \geq a_{im}.$$

Построим итеративную схему для определения вектора Λ , начиная с нулевого приближения $\Lambda_0 = 0$. Пусть на итерации l найдено $\Lambda = \Lambda_l$. Тогда подсчитывается число $n_{1,l}$ точек $j \in I$, таких, что

$$\Lambda_l P_j \geq \lambda_{0,l},$$

где

$$\lambda_{0,l} = d_{11,l} + 1, \quad d_{11,l} = \max_{j \in II} \Lambda_l P_j. \quad (6)$$

Следующее приближение строится по схеме

$$\Lambda_{l+1} = \Lambda_l + \begin{cases} e_l & (n_{1,l} > n_{1,l-1}) \\ 0 & (n_{1,l} \leq n_{1,l-1}) \end{cases}, \quad (7)$$

где e_l — строка, в которой все элементы равны нулю, за исключением элемента с номером $i = i_l$, равного единице.

Изложенная элементарная m -шаговая процедура, естественно, не может, вообще говоря, давать решение экстремальной задачи, но практически достаточно эффективна. Отметим, что она всегда приводит к некоторому допустимому плану задачи (2). Более того, зачастую целесообразно не осуществлять всю процедуру, а останавливаться, как только окажется, что $n_{1,l} > n_{1,l-1} > 0$, это дает некоторую экономию в списании элементарного правила, поскольку число признаков, которые в него входят, становится меньшим. Естественно, что общая длина последовательного правила (число этапов) при таком упрощении, вообще говоря, возрастает. В целях той же экономии можно использовать и другие упрощенные приемы. Например, если для всех точек одного из множеств (I) значения некоторого признака одинаковы, а в другом (II) по этому признаку есть различия, то для составления элементарного правила, позволяющего отделить какое-то число точек II, достаточно использовать только этот признак,

Приведем далее иллюстративный числовой пример.

Обучающая последовательность состоит из 12 точек P_j . Первые 6 принадлежат к A , вторые — к B (табл. 1).

Таблица 1

A (I)						B (II)											
i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	a_1	a	i	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	a_{II}	
1	0	0	0	0	0	1	1/6	-1/6	1	0	1	0	0	0	1	2/6	
2	0	1	0	0	1	1	3/6	1/6	2	1	0	1	0	0	0	2/6	
3	1	0	1	0	1	1	4/6	3/6	3	0	0	1	0	0	0	1/6	
4	0	0	0	0	0	1	1/6	-4/6	4	1	0	1	1	1	1	5/6	
5	0	0	1	0	1	1	3/6	0	5	0	1	0	0	1	1	3/6	

Приступая к проведению первого этапа, будем считать, что A совпадает с I, а B с II. Тогда, учитывая результаты подсчетов, приведенных в табл. 1, располагаем величины a_i в порядке убывания:

$$a_3 > a_2 > a_5 > a_1 > a_4.$$

Результаты итераций сведены в табл. 2 (первый этап). Там же приведены окончательные результаты по построению элементарных правил на последующих этапах (см. также рис. 1).

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	λ_0	I
A	1 этап	0	1	1	0	1	A
A	2 этап	1	0	0	1	0	B

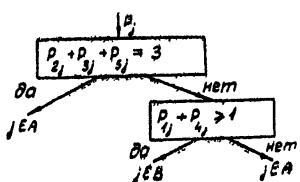


Рис. 1.

В табл. 3 показаны результаты, полученные при использовании на каждом этапе укороченных правил (см. также рис. 2).

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	λ_0	I
A	1 этап	0	1	1	0	1	A
A	2 этап	0	0	0	1	0	B
A	3 этап	1	0	0	0	0	B

Описанная процедура, впрочем, как и основная формулировка, обладает некоторой негибкостью, поскольку она использует априорный выбор множества, точки которого надо выделять на каждом этапе.

В силу этого в принципе (как уже указывалось) нет гарантии выделения на каждом этапе хотя бы одной точки. От этого недостатка свободна следующая модификация указанной выше итеративной процедуры. Опишем схему $(l+1)$ -й итерации, осуществляющей в том случае, если ни на одной из предшествующих итераций решающее правило данного этапа (индекс этапа для простоты опускается) построено не было.

Пусть в результате итерации l найден вектор Λ_l и множества A_l , B_l , содержащие $n_{A,l}$, $n_{B,l}$ точек соответственно, такие, что

$$\begin{aligned} d_{A,l} &= \Lambda_l P_j = d_{A,l} \quad (\text{для всех } j \in A_l), \\ d_{B,l} &= \Lambda_l P_j = d_{B,l} \quad (\text{для всех } j \in B_l), \end{aligned}$$

причем $d_{A,l} = d_{B,l}$. Тогда находятся величины

$$a_{l+1} = \frac{1}{n_{A,l}} \sum_{j \in A_l} P_{ij} - \frac{1}{n_{B,l}} \sum_{j \in B_l} P_{ij}$$

для $i \in T_l$, где T_l — множество индексов i , таких, что

$$\lambda_{l+1} = 1.$$

Определяем

$$a_{l+1} = \max |a_{l+1}|.$$

Обозначим t_{l+1} один из индексов i , на которых достигается этот максимум, и примем в качестве следующего приближения вектор (матрицу-строку) Λ_{l+1} , все компоненты которого равны нулю, за исключением компонент с индексами

$$i \in T_l \cup t_{l+1},$$

равных единице. Найдем

$$d_{A,l+1} = \max_{i \in A_l} d_{l+1} = \max_{i \in A_l} \Lambda_{l+1} P_j,$$

$$d_{B,l+1} = \max_{i \in B_l} d_{l+1} = \max_{i \in B_l} \Lambda_{l+1} P_j.$$

При этом возможен один из трех вариантов: 1) $d_{A,l+1} = d_{B,l+1}$; 2) $d_{A,l+1} > d_{B,l+1}$; 3) $d_{A,l+1} < d_{B,l+1}$. В случае 1) переходим к следующей итерации по описанной схеме. В случае 2) располагаем величины a_i ($i \in T_l \cup t_{l+1}$) в порядке убывания:

$$a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots$$

и корректируем решающее правило в соответствии с основной схемой, выделяя наибольшее число точек из A . В случае 3) также применяем основную схему, но для выделения точек из B .

Отметим, что процедура начинается с $\Lambda_0 = 0$, так что $A_0 = A$, $B_0 = B$, $d_{A,0} = d_{B,0} = 0$. Ясно также, что в отличие от основной схемы в данной модификации не обусловливается заранее, точки какого класса (A или B) подлежат выделению на текущем этапе построения последовательного решающего правила. Большая гибкость процедуры обеспечена

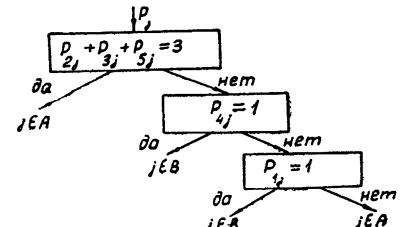


Рис. 2.

чивае построение элементарного правила, позволяющего выделить хотя бы одну точку из того или другого класса (это очевидно при естественном предположении, что в A и B нет одинаковых точек).

Практически оказалось целесообразным применять упрощенную схему построения элементарного правила: как только на какой-либо итерации i окажется, что $d_{A,i} > d_{B,i}$, строится правило: $j \in A$, если $\Lambda_i P_j \geq d_{B,i} + 1$, и аналогично, при выполнении условия $d_{A,i} < d_{B,i}$, строится правило $j \in B$, если $\Lambda_i P_j \geq d_{A,i} + 1$. При этом также гарантируется выделение хотя бы одной точки, но достигается некоторая экономия описания в указанном выше смысле.

Для иллюстрации в табл. 4, 5 приведены результаты построения последовательного правила по модифицированной схеме (в основном

Таблица 4

i	1	2	3	4	5	λ_0	I
Δ	1 этап	1	0	1	1	0	3
	2 этап	1	0	0	1	0	A

Таблица 5

i	1	2	3	4	5	λ_0	I
Δ	1 этап	1	0	1	1	0	3
	2 этап	0	0	0	1	0	B
	3 этап	1	0	0	0	0	B

и укороченном вариантах соответственно). В качестве исходного материала была использована числовая последовательность, записанная в табл. 1.

Отметим далее, что для сокращения длины последовательного правила в целом (уменьшения числа этапов) целесообразно допускать ошибки и на обучающей последовательности при применении любого из описанных вариантов итеративных схем. При этом грубость правила (допустимый процент ошибок) разумно повышать при переходе от этапа к этапу, поскольку ясно, что при распознавании основную роль играют начальные этапы последовательного правила.

Методика «загрубления» для всех модификаций в принципе одна и та же. Она сводится к тому, что вместо исчисления максимума величин d , по всему множеству II (которое, по первоначально принятому предположению, должно было располагаться целиком по одну сторону строящейся гиперплоскости) определяется максимум по всем точкам из II, за исключением заданного числа наиболее удаленных (имеющих наибольшие d). Тем самым не учитывается ряд одиночных выбросов.

4. Вышеописанный алгоритм использовался при решении задачи из области медицинской диагностики: распознавание острого инфекционного гепатита и механической желтухи на почве новообразований (рак печени, поджелудочной железы, желчного пузыря) на основании клинических признаков.

Дифференциация этих заболеваний чрезвычайно сложна: по статистике О. А. Дунаевского, врач-специалист на основании клинических признаков в 44% случаев принимает рак за гепатит и 9% ставит диагноз рак, когда в действительности у больного гепатит. Ошибка диагноза

при наличии в действительности рака опаснее, чем ошибочный диагноз гепатита. На настоящем этапе развития медицины при диагнозе рак больной может быть извлечен при своевременном оперативном вмешательстве, перед которым диагноз непременно должен уточняться на основании биохимических данных крови. В настоящее время соответствующий анализ крови, на основании данных которого с высокой достоверностью дифференцируются рак и гепатит, производится лишь в клиниках некоторых крупных городов. При диагнозе гепатит больные остаются на излечении в инфекционных отделениях местных больниц, где зачастую невозможно установление диагноза по биохимическим данным.

При составлении решающего правила использовались особо сложные для диагноза случаи (у лиц старше 50 лет).

Выбор симптомов и их градаций (всего 20 двоичных признаков) и сбор всего клинического материала (167 случаев рака, 165 случаев гепатита) осуществлен О. А. Дунаевским. Обучающая последовательность составила 139 случаев рака и 140 случаев гепатита. Результаты на обучающей и экзаменационной последовательности оказались схожими.

Правило, насчитывающее 18 этапов, позволило уменьшить число ошибок на раке до 1 (меньше 1%), число ошибок на гепатите составило 10%; 22% случаев не классифицируются (сомнительные).

Уменьшение числа этапов правила до 14 (с непременной классификацией всех случаев) обеспечило 14,5% ошибочных диагнозов при наличии рака, число ошибок при наличии гепатита — 22%.

Правило, отделяющее точки только одного класса на каждом этапе, оказывается неприемлемо длинным: 27 этапов позволили правильно распознать лишь 63,6% случаев рака, 55,5% случаев гепатита, 39,9% случаев от всей обучающей последовательности оказались нераспознанными.

Словесное выражение полученного правила привычно для врачей-диагностов (формулируем два первых этапа): если наблюдается сильный зуд кожи и увеличение желчного пузыря, то диагноз — рак. Если сочетание вышеприведенных симптомов отсутствует, но наблюдаются суставные боли и умеренный зуд, то диагноз — гепатит.

На том же клиническом материале проверялись другие математические методы диагноза. Линейное решающее правило по формуле (5) обеспечило 10,6% ошибок на гепатите и 20% ошибок на раке (средний процент ошибок 15,3%). Метод многомерного последовательного анализа Вальда позволил получить 16,5% ошибок при наличии рака и 4,8% ошибок при наличии гепатита, общее число сомнительных случаев составило 18% [5].

В заключение отметим, что предложенный алгоритм не требует трудоемких вычислений и может быть осуществлен вручную (для построения правила и его проверки для задачи рак — гепатит потребовалось несколько часов).

Последнее обстоятельство весьма существенно для коррекции решающего правила при накоплении обучающей последовательности и некотором варьировании характера дифференцируемых явлений.

Коррекция решающего правила может быть произведена следующим образом. Пусть при использовании решающего правила неоднократно наблюдаются ошибки в k -м этапе. Выписываем все точки, выделенные на k -м этапе при составлении решающего правила, и все вновь записанные ошибочно распознанные точки. Проводим процедуру построения решающего правила по описанному выше алгоритму для выписанных точек. Полученное элементарное решающее правило включается в решающее правило, где оно должно предшествовать k -му этапу.

Авторы благодарят О. А. Дунаевского и А. А. Генкина за предоставление клинического материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Малкина, А. А. Первозванский, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4 (в печати).
2. Д. Хедли, Нелинейное и динамическое программирование, изд. Мир, М., 1967.
3. И. И. Пятецкий-Шапиро, В. А. Волконский, Л. В. Левина, А. О. Поманский, ДАН СССР, **169**, № 6, 1289 (1966).
4. Ю.Ю. Финкельштейн, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 39 (1968).
5. А. А. Генкин, О. А. Дунаевский, Сб. статей под редакцией Гублера Е. В., Кибернетика в медицине, Л., 1968.

Ленинградский политехнический
институт

Поступила в редакцию
9 июля 1968 г.

A CONSECUTIVE DECISION RULE OF PATTERN-RECOGNITION UNDER BINARY-ASSIGNED SYMPTOMS

R. M. Malkina, A. A. Pervozvansky

A procedure to deduce and to apply a decision rule consisting of an elementary linear rule sequence is proposed. For each stage implementation to be optimal it is suggested that an integer programming problem should be solved. A number of heuristic schemes are set forth making it possible to obtain an approximate decision in a simple way. Results of applying these schemes to one problem of medical diagnosis are described.

УДК 62—505.3

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАСХОДУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЯХ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

B. P. Савельев

Решается задача оптимального управления нелинейной системой второго порядка достаточно общего вида. Строятся определенным образом траектории и непосредственно доказывается их экстремальность.

В работе решается задача оптимального управления нелинейной системой второго порядка

$$\dot{x} = \varphi(y), \quad \dot{y} = u - \omega(x, y), \quad (1)$$

заданной в полуплоскости $y \geq 0$. Управляющая переменная u может принимать значения в промежутке $[m(x, y), M(x, y)]$, где функции $m(x, y)$ и $M(x, y)$ считаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, причем $m(x, y) < 0$, $M(x, y) > 0$. Дважды непрерывно дифференцируемые функции $\varphi(y)$ и $\omega(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, & \varphi'(y) &> 0, & \varphi''(y) &\leq 0, \\ \omega_y'(x, y) &> 0, & \omega_{yy}(x, y) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Кусочно-непрерывную функцию $u(x)$ ($x_0 \leq x \leq x_k$) будем называть допустимым управлением, если непрерывное решение $y(x)$ (соответствующая интегральная кривая) дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u(x) - \omega(x, y)}{\varphi(y)} \quad (3)$$

является допустимой траекторией, что означает, что это решение определено на отрезке $[x_0, x_k]$ и удовлетворяет условиям 1) $y(x_0) = y_0$, $y(x_k) = y_k$; 2) $y(x) > 0$ для всех $x \in [x_0, x_k]$, за исключением разве лишь конечного числа точек x_i , в которых $y(x_i) = 0$, причем эти точки не являются особыми для дифференциального уравнения (2); 3) $m(x, y(x)) \leq u(x) \leq M(x, y(x))$ для всех $x \in [x_0, x_k]$. Нетрудно видеть, что каждому допустимому управлению $u(x)$ соответствует согласно (2) единственная допустимая траектория $y(x)$ и наоборот. Зададим на множестве Y допустимых траекторий два функционала—время $T[y(x)]$ перевода фазовой точки из начального положения (x_0, y_0) в конечное (x_k, y_k) и расход энергии $E[y(x)]$:

$$T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_k} \frac{dx}{\varphi(y(x))}, \quad E[y(x)] = \int_{x_0}^{x_k} |u(x)| dx, \quad (4)$$

а также функционал $F[y(x)] = T[y(x)] + kE[y(x)]$, где k — положительная постоянная.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы среди всех допустимых траекторий $y(x) \in Y$ найти оптимальную, которая доставляет функционалу $F[y(x)]$ абсолютный минимум. Аналогичные задачи для системы (1) частного вида решались автором в работе [5], и также в [6, 7]. Подобные же задачи с позиций принципа максимума [1], но без доказательств существования оптимального управления, были рассмотрены для конкретных систем второго порядка в работах [2–4]. В настоящей работе непосредственно указывается способ построения оптимальной траектории системы (1).

Метод решения задачи, предложенный в [5], состоит в последовательном выделении из множества Y такого подмножества допустимых траекторий, которое содержит оптимальную траекторию и на котором исследование функционала $F[y(x)]$ сводится к изучению свойств функции одного переменного. Первый шаг на пути применения этого метода состоит в выделении подмножества \tilde{Y} ($\tilde{Y} \subset Y$) допустимых траекторий $\tilde{y}(x)$, которым соответствует управление $\tilde{u}(x)$ следующей структуры: $\tilde{u}(x) \geq 0$ (при $x_0 \leq x < \tilde{x}$), $\tilde{u}(x) = m(x, \tilde{y}(x))$ (при $\tilde{x} \leq x \leq x_k$). В работе [5] показано, как для любой допустимой траектории $y(x)$, если она содержит несколько кусков, соответствующих управлению $u(x) < 0$, можно построить допустимую траекторию $\tilde{y}(x)$ ($\tilde{y}(x) \geq y(x)$) указанного выше вида, после чего непосредственным подсчетом можно убедиться, что $F[\tilde{y}(x)] < F[y(x)]$.

Для функционала $E[\tilde{y}(x)]$ можно путем интегрирования уравнения (3) на отрезке $[x_0, x_k]$ получить формулу

$$E[\tilde{y}(x)] = \int_{x_0}^{x_k} \omega(x, \tilde{y}(x)) dx + \int_{y_0}^{y_k} \varphi(y) dy - 2 \int_x^{x_k} m(x, \tilde{y}(x)) dx. \quad (5)$$

Основанием для следующего сокращения множества допустимых траекторий служит соотношение

$$\min_{\tilde{y}(x) \in \tilde{Y}} F[\tilde{y}(x)] = \min_T \{ \min_{\tilde{y}(x) \in \tilde{Y}_T} F[\tilde{y}(x)] \}, \quad (6)$$

которое позволяет искать оптимальную траекторию в подмножестве \tilde{Y} ($\tilde{Y} \subset \tilde{Y}$) допустимых траекторий $\tilde{y}_T(x)$, оптимальных в классах \tilde{Y}_T . Каждый из классов \tilde{Y}_T состоит из допустимых траекторий $\tilde{y}(x)$, доставляющих функционалу $T[\tilde{y}(x)]$ фиксированное значение T , поэтому оптимальной в классе \tilde{Y}_T является та траектория, которая сообщает минимальное в классе \tilde{Y}_T значение функционалу $E[\tilde{y}(x)]$. Для выяснения структуры оптимальных в классах \tilde{Y}_T траекторий оказывается целесообразным выделить некоторые решения дифференциального уравнения (3). Именно, решение уравнения (3) (и соответствующую интегральную кривую), вдоль которой выполнено соотношение $u = M(x, y)$, обозначим $y = y_M(x; \bar{x}, \bar{y})$, если $y_M(\bar{x}; \bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$; аналогичный смысл имеют обозначения $y = y_0(x; \bar{x}, \bar{y})$ ($u = 0$ и $y_0(\bar{x}; \bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$).

и $y = y_m(x; \bar{x}, \bar{y})$ ($u = m(x, y)$ и $y_m(\bar{x}; \bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$). Предположим, что решение $y = y_M(x; x_0, y_0)$ определено на всем отрезке $[x_0, x_k]$. В зависимости от поведения интегральных кривых $y_0(x; x_0, y_0)$ и $y_M(x; x_k, y_k)$ возможны два случая: или эти кривые пересекаются в некоторой точке, или, как это

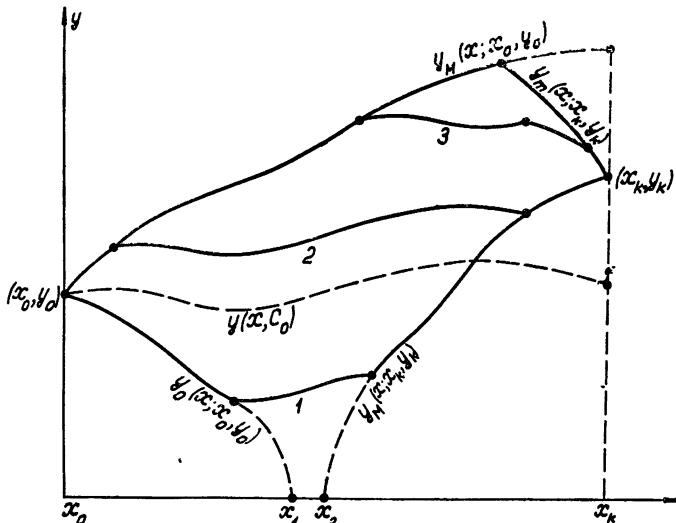


Рис. 1.

изображено на рис. 1, они не достигают друг друга, т. е. $y_0(x_1; x_0, y_0) = 0$, $y_M(x_2; x_k, y_k) = 0$ и $x_1 < x_2$. Для определенности рассмотрим второй случай и назовем областью D замкнутую областью, ограниченную интегральными кривыми $y_M(x; x_0, y_0)$, $y_0(x; x_0, y_0)$, $y_m(x; x_k, y_k)$, $y_M(x; x_k, y_k)$ и прямой $y = 0$. Как видно из рис. 1, интегральные кривые $y_M(x; x_0, y_0)$ и $y_m(x; x_k, y_k)$, пересекаясь, образуют допустимую траекторию $y = y_{\min}(x)$, которая доставляет функционалу $T[y(x)]$ значение $T_{\min} = \min_{y(x) \in Y} T[y(x)]$. Действительно, так как в силу уравнения (3) величина $\frac{dy}{dx}$.

монотонно возрастающая по $u \in [m(x, y), M(x, y)]$, то любая другая допустимая траектория $y(x) \in Y$ удовлетворяет неравенству $y(x) \leq y_{\min}(x)$ а потому $T[y(x)] > T[y_{\min}(x)]$.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения (3), вдоль которых выполняется соотношение $u = v(x, y)$, где функция $v(x, y)$ определена следующим образом:

$$v(x, y) = - \frac{\varphi^2(y) \varphi'(y) \omega''_{xy}(x, y)}{\varphi(y) \varphi'(y) \omega''_{yx}(x, y) + [2(\varphi'(y))^2 - \varphi(y) \varphi''(y)] \omega'_y(x, y)} + \omega(x, y). \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае уравнение (3) имеет общий интеграл

$$\frac{\varphi^2(y) \omega'_y(x, y)}{\varphi'(y)} = C, \quad (8)$$

который при $C > 0$ определяет на отрезке $x_0 \leq x \leq x_k$ общее решение $y = y(x, C)$, причем $y(x, C) > 0$.

Функция $y(x, C)$ в силу условий (2) является непрерывной, монотонно возрастающей по параметру C для $C > 0$, кроме того, $\lim_{C \rightarrow 0} y(x, C) = 0$ равномерно по $x \in [x_0, x_k]$ и интегральные кривые $y(x, C)$ сплошь заполняют область D . Будем далее предполагать, что в области D выполнены неравенства $0 < v(x, y) < M(x, y)$, которые означают, во-первых, что интегральные кривые $y(x, C)$ могут входить в состав допустимых траекторий $\tilde{y}(x) \in \tilde{Y}$, и, во-вторых, что интегральные кривые $y_0(x; x, y)$ пересекают сверху вниз интегральные кривые $y(x, C)$ (если $y_0(x^*; x, y) = y(x^*, C)$, то $(y_0(x; x, y))' > y'(x, C)$ при $x < x^*$, $y_0(x; x, y) < y(x, C)$ при $x > x^*$), а интегральные кривые $y_M(x; x, y)$ пересекают снизу вверх интегральные кривые $y(x, C)$. Пусть $y(x, C_0)$ и $y(x, C_k)$ — те из интегральных кривых $y(x, C)$, которые проходят соответственно через начальную точку (x_0, y_0) и конечную точку (x_k, y_k) и пусть для определенности $C_k > C_0$, т. е. $y(x, C_k) > y(x, C_0)$. Тогда для любого T ($T \geq T_{\min}$) можно построить допустимую траекторию $\tilde{y}(x) \in \tilde{Y}_T$, которая в зависимости от конкретного значения T имеет вид траектории 1, 2 или 3 (рис. 1). Траекторию 1 образуют, пересекаясь, интегральные кривые $y_0(x; x_0, y_0)$, $y(x, C)$ при $C \leq C_0$ и $y_M(x; x_k, y_k)$; траекторию 2 образуют, пересекаясь, интегральные кривые $y_M(x; x_0, y_0)$, $y(x, C)$ при $C_0 < C \leq C_k$ и $y_M(x; x_k, y_k)$; траекторию 3 образуют, пересекаясь, интегральные кривые $y_M(x; x_0, y_0)$, $y(x, C)$ при $C > C_k$, $y_0(x; x, y)$ и $y_M(x; x_k, y_k)$. Более того, указанные траектории являются оптимальными в соответствующих классах \tilde{Y}_T . Докажем это утверждение для первой из указанных выше траекторий, которую обозначим $\tilde{y}_1(x)$, для оставшихся двух доказательство проводится аналогично.

Поскольку в выражении (5) для значения функционала $E[y_1(x)]$ последнее слагаемое будет отсутствовать, то для доказательства оптимальности в классе \tilde{Y}_T траектории $\tilde{y}_1(x)$ достаточно доказать, что для любой другой допустимой траектории $\tilde{y}(x) \in \tilde{Y}_T$ выполняется неравенство

$$\int_{x_0}^{x_k} \omega(x, \tilde{y}_1(x)) dx < \int_{x_0}^{x_k} \omega(x, \tilde{y}(x)) dx. \quad (9)$$

Из указанных выше свойств интегральных кривых $y_0(x; x_0, y_0)$, $y(x, C)$ и $y_M(x; x_k, y_k)$ и свойств траектории $\tilde{y}(x)$, как допустимой траектории из множества \tilde{Y} , следует, что неравенство $\tilde{y}(x) < \tilde{y}_1(x)$ может выполняться лишь в тех точках x , в которых $\tilde{y}_1(x) = y(x, C)$, если же $\tilde{y}(x) \geq \tilde{y}_1(x)$, то $\tilde{y}_1(x) \geq y(x, C)$. Так как $\varphi''(y) \leq 0$ и $\omega''_{yy}(x, y) \geq 0$, то в каждой точке $x \in [x_0, x_k]$ будут выполняться неравенства $\varphi(\tilde{y}(x)) - \varphi(\tilde{y}_1(x)) \leq \varphi'_y(\tilde{y}_1(x)) [\tilde{y}(x) - \tilde{y}_1(x)]$, $\omega(x, \tilde{y}(x)) - \omega(x, \tilde{y}_1(x)) \geq \omega'_y(x, \tilde{y}_1(x)) \times [\tilde{y}(x) - \tilde{y}_1(x)]$. Интегрируя второе неравенство и учитывая первое, полу-

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_0}^{x_k} [\omega(x, \tilde{y}(x)) - \omega(x, \tilde{y}_1(x))] dx \geq \int_{x_0}^{x_k} \omega'_y(x, y_1(x)) \frac{\varphi(\tilde{y}(x)) - \tilde{\varphi}(y_1(x))}{\varphi'_y(\tilde{y}_1(x))} dx = \\
 & = \int_{x_0}^{x_k} \frac{\omega'_y(x, \tilde{y}_1(x)) \varphi(\tilde{y}(x)) \varphi(\tilde{y}_1(x))}{\varphi'_y(\tilde{y}_1(x))} \left[\frac{1}{\varphi(\tilde{y}_1(x))} - \frac{1}{\varphi(\tilde{y}(x))} \right] dx > \\
 & > \int_{x_0}^{x_k} \frac{\omega'_y(x, y(x, C)) \varphi^2(y(x, C))}{\varphi'_y(y(x, C))} \left[\frac{1}{\varphi(\tilde{y}_1(x))} - \frac{1}{\varphi(\tilde{y}(x))} \right] dx = \\
 & = \int_{x_0}^{x_k} C \left[\frac{1}{\varphi(\tilde{y}_1(x))} - \frac{1}{\varphi(\tilde{y}(x))} \right] dx = 0,
 \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Таким образом, множество \tilde{Y} экстремальных траекторий $\tilde{y}_T(x)$ состоит из траекторий указанных трех типов. Исследование функционала $F[y(x)]$ на множестве \tilde{Y} свелось к рассмотрению на полуинтервале $T_{\min} \leq T < +\infty$ функции $F(T) = T + kE(T)$, где $E(T) = E[\tilde{y}_T(x)]$. Аналогично тому, как это сделано в [5], можно установить, что функция $E(T)$ — непрерывная, монотонно убывающая и ограниченная снизу: $E(T) \geq 0$. А это означает, что функция $F(T)$ достигает своего наименьшего значения при некотором конечном значении T^* , и этот абсолютный минимум функционалу $F[y(x)]$ доставляет траектория $\tilde{y}_{T^*}(x)$, оптимальная в классе \tilde{Y}_{T^*} .

В заключение автор выражает благодарность Ю. И. Неймарку за оказанную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
- M. Athans, M. D. Salop, IEEE Trans. Ant. Control, 9, № 4, 360 (1964).
- B. F. Womack, D. E. Mackay, IEEE Trans. Ant. Control, 11, № 2, 307 (1966).
- Bongiorno Joseph J., IEEE Trans. Ant. Control, 12, № 3, 249 (1967).
- В. П. Савельев, сб. Прикладная математика и кибернетика, Горький, 1967, стр. 100.
- В. П. Савельев, сб. Тезисы докладов Всесоюзного межвузовского симпозиума по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967, стр. 114.
- В. П. Савельев, Тр. Всесоюзного межвузовского симпозиума по прикладной математике и кибернетике, изд. Наука, М. (в печати).

ON OPTIMAL IN ENERGY-CONSUMPTION CONTROLS FOR SECOND ORDER NON-LINEAR SYSTEM

V. P. Saveljev

A solution is given to the problem of optimal control of some general second order non-linear system. Trajectories are constructed in a certain way and their extremality is directly proved.

УДК 62 — 505.3

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ФАЗОВЫМИ КООРДИНАТАМИ

H. B. Фалдин

Приводятся простые достаточные условия абсолютного минимума в одной частной задаче на быстродействие при нерегулярных ограничениях на фазовые координаты. На примере иллюстрируется применение этих условий к синтезу оптимального управления.

Рассматривается объект, переходные процессы в котором описываются линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Это уравнение представим в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \quad \frac{dx_n}{dt} = u - a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n,$$

где u — управляющий параметр. Будем считать, что заданы ограничения

$$|u| \leq A, \quad (2)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i x_i \right| \leq D, \quad (3)$$

где b_i и D — константы.

Рассмотрим задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (1) из некоторого начального положения $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ в начало координат.

Если в условии (3) $b_n = 0$, то любая траектория, лежащая на границе, не удовлетворяет введенным в [1] условиям регулярности. Мы будем называть соответствующее ограничение нерегулярным. Предположим, далее, что $b_{n-1} \neq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $b_{n-1} = 1$.

Ограничение

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i \right| \leq D \quad (4)$$

выделяет в фазовом пространстве системы (1) некоторую область B . Граница этой области задается уравнением

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i - c = 0, \quad (5)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор, $c = \pm D$. Очевидно, для всякой траектории, которая целиком лежит на границе (5), справедливо равенство

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_{i+1} = 0. \quad (6)$$

Движение по границе области B , как следует из (1) и (5), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, \\ \vdots &\quad \vdots & \vdots &\quad \vdots \\ \dot{x}_{n-3} &= x_{n-2}, & & \\ \dot{x}_{n-2} &= c - b_1 x_1 - b_2 x_2 - \dots - b_{n-2} x_{n-2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Присоединим к уравнениям (7) уравнение

$$\dot{x}_0 = 1, \quad (8)$$

Введем векторы

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n), \\ x_* &= (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Уравнения (7) и (8) можно записать в векторной форме

$$\dot{x}_* = f^*(x_*, c),$$

где

$$f^* = (f_0^*, f_1^*, \dots, f_{n-2}^*), \quad f_0^* = 1, \quad f_1^* = x_2, \dots.$$

Введем вспомогательную вектор-функцию $\psi^*(t) = (\psi_0^*(t), \dots, \psi_{n-2}^*(t))$, определяемую уравнением

$$\frac{d\psi^*}{dt} = - \frac{\partial H(\psi^*, x_*, c)}{\partial x_*}, \quad (9)$$

где

$$H(\psi^*, x_*, c) = (\psi^*, f^*) = \sum_{l=1}^{n-2} \psi_l^* f_l(x_*, c). \quad (10)$$

Будем говорить, что траектория $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), целиком лежащая на границе (5) области B , удовлетворяет условиям оптимальности, если существует такая ненулевая вектор-функция $\psi^*(t)$, что при $t_0 \leq t \leq t_1$

$$H(\psi^*(t), x_*(t), c) = \underset{|W| < D}{\text{Sup}} H(\psi^*(t), x^*(t), W) \equiv 0. \quad (11)$$

Так как для линейных быстродействий принцип максимума (теорема 1 [1]) является одновременно и достаточным условием, то условие (11) гарантирует оптимальность участка траектории, целиком лежащего на границе области B .

Пусть $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ в начало координат, а $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория. Будем считать, что траекторию $x(t)$ можно разбить на конечное число участков, каждый из которых либо целиком лежит на границе области B , либо принадлежит (за исключением, быть может, своих концов) открытому ядру области B .

Участок оптимальной траектории, целиком лежащий в открытом ядре области B , должен удовлетворять, очевидно, теореме 1 [1].

Пусть $t = T$ — момент стыка (точка стыка) отдельных участков оптимальной траектории. Условимся считать, что в точке стыка T выполняется условие скачка, если

$$\begin{aligned} \psi_s^*(T) &= \psi_s(T) + \frac{\partial}{\partial x_s} [\rho_1 \Phi_1(x(T)) + \rho_2 \Phi_2(x(T))] \\ &\quad (s = 0, 1, \dots, n - 2), \\ \psi_s(T) + \frac{\partial}{\partial x_s} &[\rho_1 \Phi_1(x(T)) + \rho_2 \Phi_2(x(T))] = 0 \\ &\quad (s = n - 1, n), \\ \frac{d}{dT} &[\rho_1 \Phi_1(x(T)) + \rho_2 \Phi_2(x(T))] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Если $x(T)$ — единственная точка, лежащая на границе области B , так что в окрестности точки T , исключая саму точку T , траектория $x(t)$ принадлежит открытому ядру области B , условие скачка определим равенствами

$$\begin{aligned} \psi_s(T + 0) &= \psi_s(T - 0) + \frac{\partial}{\partial x_s} [\rho_1 \Phi_1(x(T)) + \rho_2 \Phi_2(x(T))] \\ &\quad (s = 0, 1, \dots, n), \\ \frac{d}{dT} &[\rho_1 \Phi_1(x(T)) + \rho_2 \Phi_2(x(T))] = 0 \\ &\quad (\rho_1, c \geq 0). \end{aligned} \tag{13}$$

В условиях (12) и (13) $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$ — вектор-функция, определяемая теоремой 1 [1], ρ_1, ρ_2 — некоторые (произвольные) числа.

Будем далее предполагать, что

$$\frac{d}{dT} \Phi_2(x(T)) = b_1 x_3(T) + \dots + b_{n-2} x_n(T) + \dot{x}_n(T) \neq 0. \tag{14}$$

Теорема 1. Пусть управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$, $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = 0$) в открытом ядре области B удовлетворяют теореме 1 [1], на границе области B — условиям оптимальности (11), а в точках стыка — условиям скачка (12) или (13). Тогда на траектории $x(t)$ функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

принимает наименьшее значение.

Теорема 2. Пусть $x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ — траектория, удовлетворяющая условиям теоремы 1, а $x^{**}(t)$ — любая другая оптимальная траектория. Тогда

$$x^{**}(t) \equiv x^*(t).$$

Доказательство теоремы 1 и 2 дается в Приложении.

Замечание. Пусть область B представляет собой выпуклый многогранник, определяемый неравенствами

$$|b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + \dots + b_n^i x_n| \leq D^i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

где для каждого i либо $b_n^i \neq 0$, либо $b_{n-1}^i \neq 0$.

Рассмотрим траекторию $x(t) \in B$, которая при каждом переходе с одной ограничивающей плоскости на другую имеет участок, принадлежащий открытому ядру области B . Если траектория $x(t)$ удовлетворяет в открытом ядре области B теореме 1 [1], на границе области B теореме 22 [1], или условиям оптимальности (11) (в зависимости от регулярности или нерегулярности), а в точках стыка условиям скачка в соответствии с теоремой 24 [1], либо в форме (12) или (13), то такая траектория является оптимальной в смысле быстродействия.

Доказательство этого утверждения следует из анализа доказательств теоремы 1 и [2].

Пример. Проиллюстрируем применение достаточных условий оптимальности к синтезу оптимального управления.

Рассмотрим систему уравнений в ошибках

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -u. \quad (15)$$

Пусть заданы ограничения

$$|x_2| \leq D_1, \quad (16)$$

$$|x_3| \leq D_2, \quad (17)$$

$$|u| \leq A. \quad (18)$$

Выпишем уравнения границы области B :

$$x_2 - D_1 = 0, \quad (19a)$$

$$x_2 + D_1 = 0, \quad (19b)$$

$$x_3 - D_2 = 0, \quad (20a)$$

$$-x_3 - D_2 = 0. \quad (20b)$$

Отметим, что ограничение (17) является регулярным, ограничение (16) нерегулярным.

Для отыскания оптимального управления воспользуемся достаточными условиями (см. замечание).

Составим функции

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 - \psi_3 u, \quad (21)$$

$$H(\psi^*, x^*, c) = \psi_0^* + \psi_1^* c. \quad (22)$$

Вектор-функции $\psi(t)$ и $\psi^*(t)$ определяются уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2; \quad (23)$$

$$\frac{d\psi_0^*}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1^*}{dt} = 0. \quad (24)$$

Система (23) справедлива не только в открытом ядре области B , но и на границах (20a) и (20b),

Из условия максимума функций (21) и (22) находим

$$u = -A \operatorname{sgn} \psi_3(t), \quad (25)$$

$$c = D \operatorname{sgn} \psi_1(t). \quad (26)$$

Уравнение (25) определяет оптимальное управление в открытом ядре области B . На границе области B , как легко видеть, управление

$$u(t) \equiv 0. \quad (27)$$

Из (25) и (27) следует, что синтез оптимального управления сводится к нахождению в фазовом пространстве системы (15) геометрического места точек, в которых происходит переключение управляющего параметра u , т. е. к построению поверхности переключения.

Введем обратное время $\tau = t_1 - t$, где t_1 — время, соответствующее окончанию процесса управления ($x(t_1) = 0$). Рассмотрим исходящую из начала координат траекторию $x(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$, на которой $x_3(\tau)$ имеет вид ломаной линии $0EFMNL$ (рис. 1). При этом считаем, что траектория $x(\tau)$ при $\tau_3 \leq \tau \leq \tau_4$ лежит на прямой

$$x_2 = D_1, \quad x_3 = 0 \quad (28)$$

(движение по границе (19 а) возможно лишь по прямой (28)).

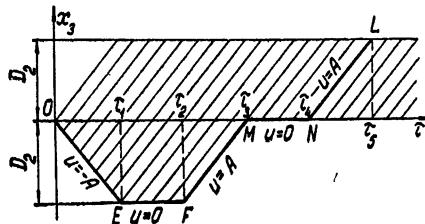


Рис. 1.

Положим в условии скачка, соответствующем моменту τ_1 (см. теоремы 22, 24, 25 [1]), $u = 0$. Условие скачка для точки $\tau = \tau_2$, записанное применительно к обратному времени τ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_3(\tau_2 + 0) &= \psi_3(\tau_2 - 0) + \mu, \quad \psi_i(\tau_2 + 0) = \psi_i(\tau_2 - 0) \\ (i &= 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (29)$$

где μ — произвольное число. Выпишем условие скачка для точек $\tau = \tau_3$, $\tau = \tau_4$:

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau_3) &= \psi_0^*(\tau_3), \quad \psi_1(\tau_3) = \psi_1^*(\tau_3), \\ \psi_2(\tau_3) + \rho_1^+ &= 0, \quad \psi_3(\tau_3) + \rho_2^+ = 0, \quad \rho_2^+ = 0; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau_4) &= \psi_0^*(\tau_4), \quad \psi_1(\tau_4) = \psi_1^*(\tau_4), \\ \psi_2(\tau_4) + \rho_1^- &= 0, \quad \psi_3(\tau_4) + \rho_2^- = 0, \quad \rho_2^- = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из уравнений

$$H(\psi(\tau_1 - 0), \quad x(\tau_1), \quad u(\tau_1 - 0)) = H(\psi(\tau_1 + 0), \quad x(\tau_1), \quad u(\tau_1 + 0)),$$

$$H(\psi(\tau_2 - 0), \quad x(\tau_2), \quad u(\tau_2 - 0)) = H(\psi(\tau_2 + 0), \quad x(\tau_2), \quad u(\tau_2 + 0))$$

и условий (30) и (31) находим

$$\psi_3(\tau_1 - 0) = \psi_3(\tau_2 + 0) = \psi_3(\tau_3) = \psi_3(\tau_4) = 0. \quad (32)$$

Отметим, что условие (см. теорему 22 [1])

$$\frac{d\lambda}{dt} \leq 0$$

на границе (20б) эквивалентно неравенству

$$\psi_2(\tau) \leq 0. \quad (33)$$

Покажем, что можно подобрать таким образом начальный вектор $\Psi_0 = (\psi_{00}, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}) = \Psi(\tau = 0)$ и числа $\mu, \rho_1^+, \rho_1^-, \rho_2^+, \rho_2^-$, что траектория $x(\tau)$, соответствующая ломаной линии $0EFMNL$ и вектор-функции $\Psi(\tau)$ и $\Psi'(\tau)$, определяемые в соответствии с уравнениями (23) и (24), будут удовлетворять всем условиям оптимальности.

Положим $\psi_{00} = -1$. Выберем ψ_{30} так, чтобы удовлетворялось условие

$$H(\Psi(0), x(0), u(0)) = -1 - \psi_{30} u = 0.$$

Оставшиеся начальные условия ψ_{10}, ψ_{20} и μ найдем из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \psi_3(\tau_1 - 0) &= \psi_{10} \frac{\tau_1^2}{2} + \psi_{20} \tau_1 + \frac{1}{A} = 0, \\ \psi_3(\tau_2 + 0) &= \psi_{10} \frac{\tau_2^2}{2} + \psi_{20} \tau_2 + \mu + \frac{1}{A} = 0, \\ \psi_3(\tau_3) &= \psi_{10} \frac{\tau_3^2}{2} + \psi_{20} \tau_3 + \mu + \frac{1}{A} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Неоднородные уравнения (34) имеют решение, так как определитель системы

$$\Delta = \frac{\tau_1 \tau_2}{2} (\tau_3 - \tau_1) - \frac{\tau_1 \tau_2}{2} (\tau_2 - \tau_1) > 0.$$

Числа $\rho_1^+, \rho_2^+, \rho_2^-$ определяются равенствами

$$\rho_1^+ = -\psi_2(\tau_3), \quad \rho_2^+ = \rho_2^- = 0.$$

Число ρ_1^- должно быть выбрано так, чтобы при $\tau > \tau_4$

$$\psi_3(\tau) < 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что выбранные указанным выше способом начальный вектор Ψ_0 и числа $\mu, \rho_1^+, \rho_1^-, \rho_2^+, \rho_2^-$ гарантируют выполнение условий (25), (26), (29)–(33). Таким образом, мы доказали, что траектория $x(\tau)$ оптимальна.

Более того, оказывается начальный вектор Ψ_0 и числа $\mu, \rho_1^+, \rho_1^-, \dots$ можно подобрать так, что для любого $\tau' (0 \leq \tau' \leq \tau_5)$ при $\tau \leq \tau'$ траектория $x(\tau)$, соответствующая ломаной линии $0EFM\dots$, — оптимальна, а $\psi_3(\tau') = 0$. Если $\tau_2 < \tau' \leq \tau_3$, вектор Ψ_0 и число μ определяются уравнениями (34), в которых время τ_3 следует заменить на τ' . Если же $\tau_4 < \tau' \leq \tau_5$, вектор Ψ_0 и число μ также определяются системой уравнений (34). Равенство $\psi_3(\tau') = 0$ обеспечивается соответствующим подбором числа ρ_1^- . Из (25) тогда следует, что траектория $x(\tau)$ не только оптимальна, но и принадлежит поверхности переключения.

Сделанное выше утверждение справедливо для всего семейства ломанных линий, изображенных на рис. 1. Совершенно аналогично доказывается, что траектории, антисимметричные рассмотренным выше, также принадлежат поверхности переключения.

На рис. 2 представлены проекции образующих поверхность переключения траекторий на плоскость $x_1 = 0$. Штриховкой выделена область неуправляемости, т. е. совокупность точек, из которых в силу ограничений (16)–(18) нельзя достигнуть начала координат.

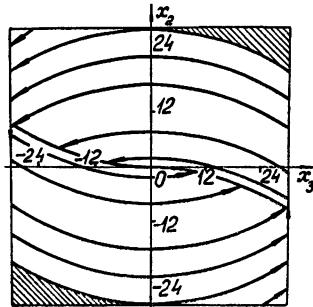


Рис. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ траекторию, удовлетворяющую условию теоремы 1, а через $x(t)$ — любую допустимую траекторию, соединяющую точки x^0 и 0. Положим для определенности, что имеется один участок $T_1 \leq t \leq T_2$, на котором траектория $x^*(t)$ лежит на границе области B .

Примем на границе области B за вектор $\psi(t)$ вектор $(\psi^*(t), 0, 0)$ и запишем равенство

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \psi_i (x_i^* - x_i) = \sum_{i=0}^n \dot{\psi}_i (x_i^* - x_i) + \sum_{i=0}^n \psi_i (\dot{x}_i^* - \dot{x}_i). \quad (35)$$

Принимая во внимание уравнения (1), (7), (9), уравнение [1]

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x},$$

условие скачка (12) и определяя производные в точках разрыва вектора ψ через дельта-функции, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \psi_i (x_i^* - x_i) = \alpha \psi_n (u^* - u) - \psi_{n-1}(T_1) (y^*(T_1) - y(T_1)) \times \quad (36)$$

$$\times \delta(t - T_1) + \beta \psi_{n-2}^*(y^* - y) + \psi_{n-1}(T_2) (y^*(T_2) - y(T_2)) \delta(t - T_2),$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } (t_0 \leq t \leq T_1, T_2 \leq t \leq t_1), \\ 0 & \text{при } (T_1 < t < T_2) \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } (t_0 \leq t \leq T_1, T_2 \leq t \leq t_1), \\ 1 & \text{при } (T_1 < t < T_2) \end{cases}$$

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{n-2} x_{n-2} + x_{n-1}.$$

Из теоремы 1 [1] и условия (11) следует

$$\psi_n (u^* - u) \geq 0, \quad (37)$$

$$\psi_{n-2}^* (y^* - y) \geq 0, \quad (38)$$

Причем знак равенства имеет место (за исключением, быть может, конечного числа точек) только при $u^* = u$ и $y^* = y$.

Покажем, что

$$\begin{aligned} -\psi_{n-1}(T_1)(y^*(T_1) - y(T_1)) &\geq 0, \\ \psi_{n-1}(T_2)(y^*(T_2) - y(T_2)) &\geq 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Предположим, что при $T_1 < t \leq T_2$ траектория $x^*(t)$ принадлежит той из плоскостей (5), на которой $c = D$. Из условия, что $x^*(t)$ при $t < T_1$ и $t > T_2$ принадлежит открытому ядру области B , и условия (14) следует

$$\ddot{y}(T_1 - 0) < 0, \quad (40)$$

$$\ddot{y}(T_2 + 0) < 0. \quad (41)$$

Из последнего уравнения системы (1) и условия (14) находим

$$\begin{aligned} u^*(T_1 - 0) &= a_0 x_1^*(T_1) + a_1 x_2^*(T_1) + (a_2 - b_1) x_3^*(T_1) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} - b_{n-2}) x_n^*(T_1) + l_1, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u^*(T_2 + 0) &= a_0 x_1^*(T_2) + a_1 x_2^*(T_2) + (a_2 - b_1) x_3^*(T_2) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} - b_{n-1}) x_n^*(T_2) + l_2, \end{aligned}$$

где

$$l_1 = \ddot{y}(T_1 - 0), \quad l_2 = \ddot{y}(T_2 + 0).$$

Сравнивая уравнения (42) с уравнениями

$$\begin{aligned} u^*(T_1 + 0) &= a_0 x_1^*(T_1) + a_1 x_2^*(T_1) + (a_2 - b_1) x_3^*(T_1) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} - b_{n-2}) x_n^*(T_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^*(T_2 - 0) &= a_0 x_1^*(T_2) + a_1 x_2^*(T_2) + (a_2 - b_1) x_3^*(T_2) + \dots + \\ &+ (a_{n-1} - b_{n-2}) x_n^*(T_2), \end{aligned}$$

получаем

$$u^*(T_1 - 0) < u^*(T_1 + 0), \quad u^*(T_2 + 0) < u^*(T_2 - 0). \quad (43)$$

Но условия (43), учитывая, что

$$|u^*(T_1 - 0)| = |u^*(T_2 + 0)| = A,$$

возможны лишь при

$$u^*(T_1 - 0) = u^*(T_2 + 0) = -A. \quad (44)$$

Из (44), принимая во внимание, что в открытом ядре области B

$$u^*(t) = A \operatorname{sgn} \psi_n(t),$$

находим, что существуют два таких интервала $(T_1 - \varepsilon, T_1)$ и $(T_2, T_2 + \varepsilon)$, в каждом из которых функция $\psi_n(t)$ монотонна и удовлетворяет неравенству

$$\psi_n(t) < 0.$$

Так как в соответствии с условиями скачка (12)

$$\psi_n(T_1) = \psi_n(T_2) = 0,$$

то в интервале $(T_1 - \varepsilon, T_1)$ функция $\psi_n(t)$ возрастает, а в интервале

$(T_2, T_2 + \epsilon)$ убывает. Принимая во внимание уравнения, определяющие вектор-функцию $\psi(t)$, находим

$$\begin{aligned}\psi_{n-1}(T_1 - 0) &\leqslant 0, \\ \psi_{n-1}(T_2 + 0) &\geqslant 0.\end{aligned}\tag{45}$$

Из (45), учитывая, что

$$\dot{y}^*(T_1) - y(T_1) \geqslant 0, \quad y^*(T_2) - y(T_2) \geqslant 0,$$

и получаем условия (39).

Условия (39) для случая, когда траектория $x^*(t)$ при $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ лежит на той из плоскостей (5), которой соответствует $c = -D$, доказываются аналогично.

Таким образом, установлено, что каждое из слагаемых в правой части равенства (36) неотрицательно.

Если $x(T)$ —единственная точка, лежащая на границе области B , т. е. траектория $x(t)$ касается границы области B в точке T , то равенство (36) заменяется равенством

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \psi_i(x_i^* - x_i) = \psi_n(u^* - u) + \rho_1(y^*(T) - y(T)) \delta(t - T). \tag{46}$$

В соответствии с теоремой 1 [1] и условиями (13) каждое слагаемое в правой части равенства (46) неотрицательно.

Обозначим через τ момент времени, в который траектория $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ проходит через начало координат. Покажем, что $\tau \geqslant t_1$. Предположим противное и будем считать $u(t) = 0$ при $t > \tau$. Тогда, как следует из уравнений (1), $x(t) \equiv 0$ при $t \geqslant \tau$. Проинтегрируем равенство (36) или (46) в пределах от t_0 до t_1 . Учитывая, что $x_i^*(t_0) = x_i(t_0)$, $x_i^*(t_1) = x_i(t_1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $x_0^* = x_0$, $\psi_0(t) = \text{const}$, получим при $x^*(t) \not\equiv x(t)$, что $0 = a > 0$. Полученное противоречие доказывает недопустимость предположения о том, что $\tau < t_1$.

Доказательство теоремы 2. По теореме 1

$$x^*(t_1) = x^{**}(t_1) = 0.$$

Заменяя в равенстве (36) или (46) $x(t)$ на $x^{**}(t)$, $u(t)$ на $u^{**}(t)$ и интегрируя его в пределах от t_0 до t_1 , приходим при $x^{**}(t) \not\equiv x(t)$ к противоречию $0 = a > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понtryагин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Михленко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
2. Н. В. Фалдин, Автоматика и телемеханика, № 1, 23 (1967).

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 декабря 1968 г.

OPTIMALITY SUFFICIENT CONDITIONS IN A PROBLEM WITH LIMITED PHASE COORDINATES

N. V. Faldin

The article presents simple sufficient conditions for absolute minimum in a particular problem of quick-response when limitations for phase coordinates are not regular. An example is given to illustrate these conditions as applied to an optimal control synthesis.

УДК 62 — 506

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ БЕСПОИСКОВОЙ САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В. Д. Громыко, Е. А. Санковский

Приводится статистическое исследование беспоисковой самонастраивающейся системы с эталонной моделью, включающей в своем составе регулятор с перестраниваемыми параметрами и логическое устройство. Метод основан на представлении совокупности указанных элементов как многомерной нелинейности и применении статистической линеаризации. Описанная методика может быть использована для анализа динамической точности систем управления с перестраниваемыми параметрами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрению принципов построения беспоисковых самонастраивающихся систем (СНС) с эталонной моделью и исследованию их динамических свойств при детерминированных входных сигналах посвящено много работ [1, 2].

В настоящей статье рассматривается методика статистического анализа СНС, основанная на статистической линеаризации нелинейностей с несколькими входами. Структурная схема беспоисковой СНС с моделью приведена на рис. 1. Перестройка коэффициента усиления производится в зависимости от величины сигнала рассогласования координат объекта и эталона.

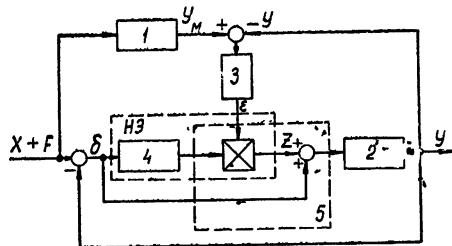


Рис. 1. 1—эталонная модель, 2—объект управления, 3—цепь самонастройки, 4—логическое устройство, 5—регулятор.

При решении задачи предполагается, что: 1) параметры объекта управления изменяются медленно и система может рассматриваться как квазистационарная; 2) на вход системы поступает аддитивная смесь детерминированного полезного сигнала и шума с нормальным законом распределения.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Беспоисковую СНС с моделью (рис. 1), имеющую в своем составе логическое устройство в виде квадратора и регулятор с множительным устройством, при статистическом исследовании можно рассматривать как систему, содержащую многомерный безынерционный элемент (НЭ) и использовать метод статистической линеаризации И. Е. Казакова [3].

Представим входные сигналы нелинейного элемента δ и ε в виде суммы математического ожидания и случайной составляющей:

$$\delta = m_\delta + \dot{\delta}, \quad \varepsilon = m_\varepsilon + \dot{\varepsilon}.$$

Выходной сигнал НЭ в этом случае имеет вид

$$z(\delta, \varepsilon) = \delta^2 \varepsilon = (m_\delta + \dot{\delta})^2 (m_\varepsilon + \dot{\varepsilon}) = m_\delta^2 m_\varepsilon + 2m_\delta m_\varepsilon \dot{\delta} + \\ + m_\varepsilon \dot{\delta}^2 + m_\delta^2 \dot{\varepsilon} + 2m_\delta \dot{\delta} \dot{\varepsilon} + \dot{\delta}^2 \dot{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

а математическое ожидание

$$\overline{z(\delta, \varepsilon)} = \overline{m_\delta^2 m_\varepsilon} + \overline{2m_\delta m_\varepsilon \dot{\delta}} + \overline{m_\varepsilon \dot{\delta}^2} + \overline{m_\delta^2 \dot{\varepsilon}} + \overline{2m_\delta \dot{\delta} \dot{\varepsilon}} + \overline{\dot{\delta}^2 \dot{\varepsilon}}, \quad (2.2)$$

Определим среднее значение произведения сигналов $\dot{\delta}^2$ и $\dot{\varepsilon}$:

$$\overline{\dot{\delta}^2 \dot{\varepsilon}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}^2 \dot{\varepsilon} f(\delta, \varepsilon) d\delta d\varepsilon, \quad (2.3)$$

где

$$f(\delta, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\varepsilon\sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\dot{\delta}^2}{\sigma_\delta^2} - \frac{2r\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}{\sigma_\delta\sigma_\varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \right]$$

— двумерный нормальный закон распределения переменных [4].

Интегрируя выражение (2.3), получим

$$\overline{\dot{\delta}^2 \dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi\sigma_\delta\sigma_\varepsilon\sqrt{1-r^2}} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon} \dot{\delta}^2 \exp \left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\dot{\delta}^2}{\sigma_\delta^2} - \frac{2r\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}{\sigma_\delta\sigma_\varepsilon} + \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \right] d\delta d\varepsilon = 0. \quad (2.4)$$

Так как средние значения произведений

$$\overline{2m_\delta m_\varepsilon \dot{\delta}} = 0, \quad \overline{m_\delta^2 \dot{\varepsilon}} = 0,$$

то выражение (2.2) будет равно

$$\overline{z(\delta, \varepsilon)} = \overline{m_\delta^2 m_\varepsilon} + \overline{m_\varepsilon \dot{\delta}^2} + \overline{2m_\delta \dot{\delta} \dot{\varepsilon}} \quad (2.5)$$

или

$$\overline{z(\delta, \varepsilon)} = z_0(m_\delta, m_\varepsilon, \sigma_\delta, \sigma_\varepsilon, \sigma_{\delta\varepsilon}) = m_\delta^2 m_\varepsilon + m_\varepsilon \sigma_\delta^2 + 2m_\delta \sigma_{\delta\varepsilon}^2, \quad (2.6)$$

где $\sigma_\delta^2 = \overline{\dot{\delta}^2}$ — дисперсия сигнала $\dot{\delta}$; $\sigma_{\delta\varepsilon}^2 = \overline{\dot{\delta} \dot{\varepsilon}}$ — взаимная дисперсия сигналов $\dot{\delta}$ и $\dot{\varepsilon}$.

Статистические коэффициенты преобразования по случайным составляющим сигналов δ и ε определяются как частные производные [3]:

$$k_1 = \frac{\partial z_0}{\partial m_\delta} = 2m_\delta m_\varepsilon + 2\sigma_{\delta\varepsilon}^2, \quad (2.7)$$

$$k_2 = \frac{\partial z_0}{\partial m_\varepsilon} = m_\delta^2 + \sigma_\delta^2. \quad (2.8)$$

Тогда структурную схему линеаризованной системы с учетом (2.7) и (2.8) можно представить рис. 2. Для определения динамической и флюктуационной ошибок системы в установившемся режиме необходимо составить дополнительные уравнения:

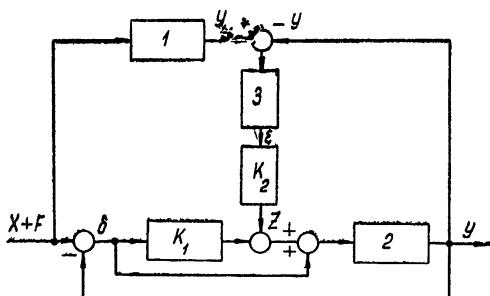


Рис. 2. 1 — эталонная модель, 2—объект управления, 3—цепь самонастройки, k_1, k_2 —коэффициенты статистической линеаризации.

а) для дисперсии

$$\sigma_{\delta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) |K_{F\delta}(j\omega)|^2 d\omega, \quad (2.9)$$

б) для взаимной дисперсии

$$\sigma_{\delta\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} [S_F(\omega) K_{F\delta}(-j\omega) K_{F\varepsilon}(j\omega)] d\omega, \quad (2.10)$$

где $S_F(\omega)$ — спектральная плотность помехи; $K_{F\delta}(j\omega) = \delta(j\omega)/F(j\omega)$ и $K_{F\varepsilon}(j\omega) = \varepsilon(j\omega)/F(j\omega)$ — частотные характеристики системы от точки приложения воздействия F до соответствующих точек СНС;

в) для математических ожиданий

при нулевом порядке астатизма системы по цепи самонастройки

$$\begin{aligned} m_\delta &= m_x - m_y, \\ (m_\delta + z_0) K(p) \Big|_{p=0} &= m_y, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$m_x K_m(p) K_{ch}(p) \Big|_{p=0} - m_y K_{ch}(p) \Big|_{p=0} = m_z,$$

где $K_m(p)$, $K(p)$, $K_{ch}(p)$ — передаточные характеристики модели, объекта и цепи самонастройки;

При порядке астатизма, отличном от нуля,

$$\begin{aligned} m_\delta &= m_x - m_y = 0, \\ m_\delta + z_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Совместное решение полученной системы уравнений (2.6)–(2.11) или (2.6)–(2.10) и (2.12) позволяет решить задачу статистического анализа СНС с моделью.

Рассмотренная методика справедлива и в случае, когда в качестве устройства используется модульный элемент.

Для примера определим флюктуационную ошибку в системе (рис. 1) при следующих условиях: $x = 0$, а передаточные характеристики модели, объекта и цепи самонастройки известны:

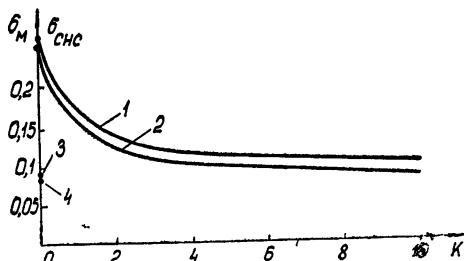
$$K_m(p) = 1/(1 + p), \quad K(p) = 10/p, \quad K_{ch}(p) = K;$$

входным воздействием является стационарный сигнал, полученный в результате прохождения «белого» шума интенсивностью

$N = 0,0145 \text{ в}^2 \cdot \text{сек}$ с нулевым математическим ожиданием через формирующий фильтр с $K_{\Phi}(p) = 1/(1 + 0,0035 p)$.

На рис. 3 приведена зависимость среднеквадратического значения ошибки на выходе системы σ_{CHC} от коэффициента преобразования цепи настройки K .

Рис. 3. 1—экспериментальное значение σ_{CHC} , 2—расчетное значение σ_{CHC} , 3—экспериментальное значение σ_m , 4—расчетное значение σ_m .



С целью оценки точности рассматриваемого метода проведено экспериментальное исследование СНС на аналоговой вычислительной машине. Расхождение результатов расчета и моделирования при принятых условиях не превышает 12%.

Соотношение между коэффициентами статистической линеаризации по случайным составляющим и их зависимость от коэффициента усиления K цепи самонастройки приведены на рис. 4.

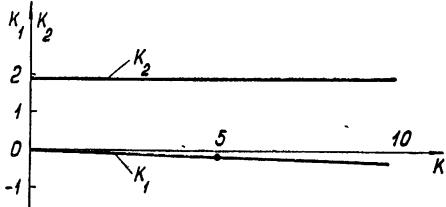


Рис. 4. Расчетные значения коэффициентов статистической линеаризации.

1) Рассматриваемый метод позволяет с достаточной степенью точности определять ошибки в беспойковой СНС с моделью при воздействии на вход системы полезного сигнала и шума.

2) С увеличением полосы пропускания цепи настройки значения флюктуационных ошибок на выходе системы и модели все больше совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

- И. Н. Крутова, В. Ю. Рутковский, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 2 (1964).
- С. Д. Земляков, В. Ю. Рутковский, Автоматика и телемеханика, № 6, 88 (1967).
- И. Е. Казаков, Автоматика и телемеханика, 26, № 3, 463 (1965).
- Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, изд. Наука, М., 1964.

Поступила в редакцию
16 мая 1968 г.

A DYNAMIC ACCURACY ANALYSIS OF A SEARCHLESS SELF-TUNING SYSTEM WITH A STANDARD MODEL UNDER STOCHASTIC DISTURBANCES

V. D. Gromyko, E. A. Sankovsky

The article deals with a statistic investigation of a searchless self-tuning system with a standard model incorporating a regulator with adjustable parameters and a logic device. The method is based on representing the complex of the mentioned elements as multidimensional nonlinearity and on using statistic linearisation. The method described can be applied to when analysing dynamic accuracy of control systems with adjustable parameters.

УДК 62—506.1

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РЕГУЛИРОВКИ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ

А. Л. Глик, В. А. Каинов

Предлагается транзисторная схема регулировки коэффициента усиления в самонастраивающихся системах.

Во многих случаях системы автоматического управления работают при изменяющихся эксплуатационных параметрах (например, у летательных аппаратов изменяется скорость полета по траектории, аэродинамическая нагрузка и т. д.). Для сохранения устойчивости обычной системы автоматического регулирования во всем диапазоне изменения эксплуатационных параметров необходимо выбрать коэффициент K_y усиления усилителя в определенных пределах. В связи с этим ухудшается динамика системы на отдельных этапах ее работы—понижается ее быстродействие. (Ухудшение динамики вызывается занижением коэффициента усиления из-за необходимости обеспечения устойчивости системы в течение всего времени ее работы.) Улучшить динамику можно путем применения системы, автоматически подстраивающей коэффициент усиления K_y .

В последнее время применение таких систем получило широкое распространение. Изменения коэффициента усиления можно достичь различными способами: 1) вращением регулятора потенциометра усиления; 2) изменением напряжения смещения на управляющей сетке лампы усилителя; 3) изменением входного сопротивления транзистора или прямого динамического сопротивления полупроводникового диода [1]; 4) изменением режима по постоянному току или глубины обратной связи по переменному току [2] и др.

В работе [1] указывается, что наиболее перспективно применение в качестве регулируемых элементов четырехполюсников с управляемым электрическим путем коэффициентом передачи, в частности, Г-образного делителя, в последовательное плечо которого включено активное сопротивление, а в параллельное — транзистор. При этом транзистор включался по схеме с общей базой. Можно в качестве управляемых элементов вместо транзисторов использовать полупроводниковые диоды.

В настоящей работе применена схема регулирования коэффициента усиления каскада на транзисторах.

Рассматриваемая схема способна обеспечивать K_y , величина которого меньше или равна некоторому значению K_{yo} (максимальному значению коэффициента усиления).

Структурная схема устройства, осуществляющего подстройку коэффициента K_y , приведена на рис. 1, где А — регулирующий элемент, В — анализирующее устройство.

В предлагаемой схеме регулирование коэффициента усиления осуществляется шунтированием входа одного из каскадов по переменному току. В качестве регулируемого элемента использован транзистор

типа П-105, П-106, включенный по схеме с общим эмиттером (рис. 2). При этом транзистор меняет динамическое сопротивление коллектор-

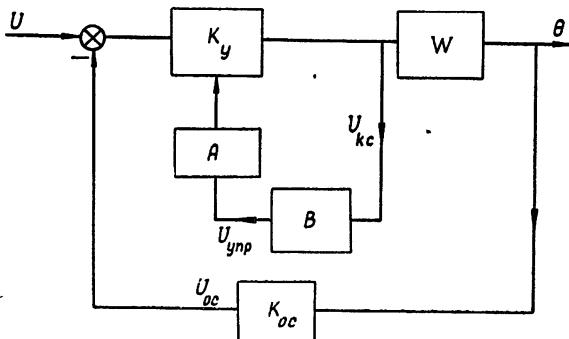


Рис. 1. U —входное напряжение; $U_{\text{упр}}$ —управляющее напряжение, подаваемое на регулирующий элемент; $U_{k\text{с}}$ —входной сигнал в контур самонастройки; θ —регулируемая величина, U_{oc} —напряжение обратной связи, K_{oc} —коэффициент обратной связи контура.

эмиттер в зависимости от величины тока базы. При отсутствии напряжения на базе или его положительной полярности сопротивление коллектор-эмиттер составляет несколько мегом. При отрицательном

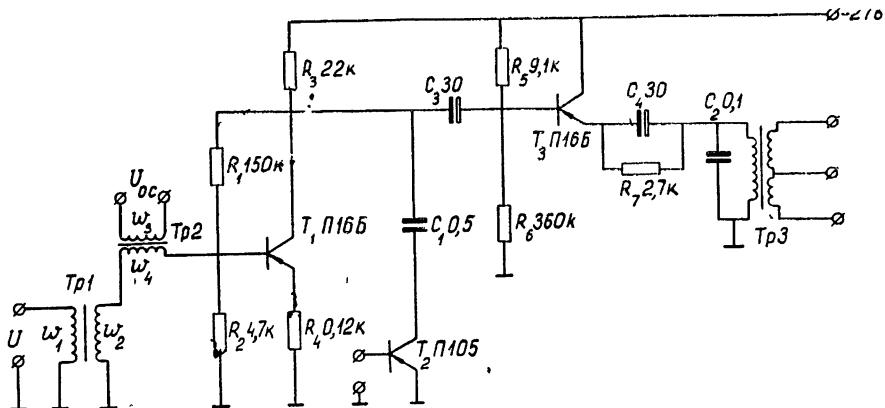


Рис. 2. T_1 , $w_1 : w_2 = 5 : 1$. T_2 , $w_3 : w_4 = 5 : 1$.

напряжении на базе это сопротивление уменьшается, уровень сигнала на выходе второго каскада уменьшается, что приводит к понижению коэффициента усиления усилителя.

Крутизна регулировочной характеристики (зависимость коэффициента усиления от величины напряжения, приложенного к переходу база-эмиттер) зависит от величины переменного напряжения на коллекторе. Она особенно велика при сигнале в несколько милливольт. Использование в этом случае такой схемы особенно эффективно, а вносимые искажения минимальны. Усилитель напряжения собран на транзисторах и состоит из каскада, выполненного по схеме с общим эмиттером, и каскада — эмиттерного повторителя. Примененная схема регулирования и используемый регулируемый элемент предполагают высокое входное сопротивление шунтируемого каскада, что обусловило включение регулируемого элемента перед эмиттерным повторителем.

Зависимость коэффициента усиления усилителя от величины управляющего сигнала на базе регулируемого транзистора приведена на рис. 3 (амплитуда входного сигнала в усилитель составляет 50 мв).

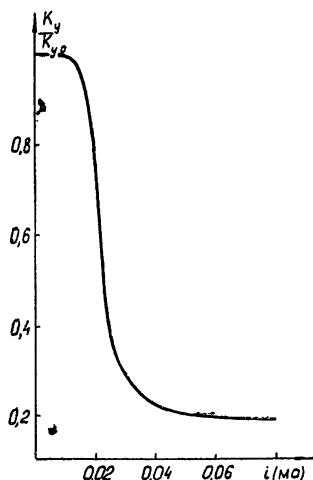


Рис. 3.

Работа самонастраивающейся системы с таким усилителем проверена в лабораторных условиях. Самонастраивающаяся система оказалась работоспособной и обеспечила хорошую динамику контура регулирования.

Рассмотренный принцип подстройки коэффициента усиления не усложняет существенно усилительно-преобразовательную аппаратуру.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. М. Махонин, В. А. Соболев, Радиотехника, 22, № 6, 70 (1967).
- В. В. Кубзеев, В. Н. Шишмаков, Каскады радиоприемников на транзисторах, Госэнергоиздат, М., 1960.
- Л. Я. Ильинский, В. М. Фисенко, Приборы и системы управления, № 3, 17 (1968).
- Н. К. Чертков, В. Л. Брюханов, Н. М. Шиколенко, Приборы и системы управления, № 7, 19 (1968).

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 декабря 1968 г.

A GAIN CONTROL CIRCUIT

A. L. Glik, V. A. Kainov

A transistor circuit to control gain in adaptive systems is proposed.

УДК 62 — 503.4

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

B. I. Горюнов

Доказывается теорема, при выполнении условий которой корни двух полиномов с действительными и взаимно близкими соответствующими коэффициентами одинаково расположены относительно единичного круга.

В настоящей работе решается следующая задача: пусть

$$Q_n(z) = b_0^0 z^n + b_1^0 z^{n-1} + \dots + b_{n-1}^0 z + b_n^0 \quad (1)$$

— произвольный полином n -й степени с действительными коэффициентами и пусть задан полином n -й степени

$$P_n(z) = a_0^0 z^n + a_1^0 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}^0 z + a_n^0, \quad (2)$$

коэффициенты которого действительны и удовлетворяют соотношениям

$$|a_k^0 - b_k^0| \leq \epsilon_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где величина ϵ_0 характеризует взаимную близость соответствующих коэффициентов полиномов $Q_n(z)$ и $P_n(z)$.

Требуется установить расположение корней полинома $Q_n(z)$ относительно единичного круга, если для полинома $P_n(z)$ таковое известно.

Решение этой задачи представляет интерес при численном построении в пространстве параметров динамической системы областей, соответствующих однаковому расположению корней характеристического полинома относительно единичного круга [1—5] и для случая $n = 2$ приведено в работе [6].

1. Пусть полином $P_n(z)$ не имеет корней, лежащих на единичной окружности. Тогда для нахождения расположения его корней относительно единичного круга можно применить алгебраический критерий устойчивости в удобной для конкретных вычислений форме [2]. В соответствии с изложенной в [2] методикой, для этого необходимо составить n таблиц из коэффициентов полинома, j -я из которых имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_0^j & a_1^j & \dots & a_k^j & \dots & a_{n-1}^j \\ a_{n-1}^j & a_{n-2}^j & \dots & a_{n-j-k}^j & \dots & a_0^j \end{array} \right\}, \quad (4)$$

а полная система таблиц получается при последовательном изменении j от нуля до $n - 1$. Элементы $(j + 1)$ -й таблицы получаются из элементов j -й таблицы с помощью одной из формул: при $|a_0^j| < |a_{n-1}^j|$,

$$a_k^{j+1} = a_{k+1}^j - (a_0^j/a_{n-1}^j) a_{n-1-k-1}^j \quad (k = 0, 1, \dots, n - j - 1), \quad (5)$$

при $|a_{n-1}^j| < |a_0^j|$

$$a_k^{j+1} = a_k^j - (a_{n-1}^j/a_0^j) a_{n-j-k}^j \quad (k = 0, 1, \dots, n - j - 1). \quad (6)$$

Оцениваемый при переходе от j -й к $(j+1)$ -й таблице корень полинома $P_n(z)$ при $|a_0^j| < |a_{n-j}^j|$ лежит вне, а при $|a_{n-j}^j| < |a_0^j|$ — внутри единичного круга.

В силу исходного предположения при этой процедуре все величины таблиц окажутся конечными и величина

$$M_j = \max_{k=0, 1, \dots, n-j} |a_k^j| \quad (7)$$

будет ограниченной.

2. Предполагая аналогично, что полином $Q_n(z)$ также не имеет корней, лежащих на единичной окружности, построим для него таблицы указанного критерия устойчивости. Тогда j -я таблица для полинома $Q_n(z)$ принимает вид таблицы (4) с заменой a на b . Формулы для нахождения величин элементов $(j+1)$ -й таблицы из величин элементов j -й таблицы для полинома $Q_n(z)$ получаются из формул (5), (6) также заменой a на b .

Тогда, если

$$\max_{k=0, 1, \dots, n-j} |a_k^j - b_k^j| \leq \varepsilon_j \quad (8)$$

и величина ε_j , характеризующая взаимную близость соответствующих элементов j -х таблиц для полиномов $Q_n(z)$ и $P_n(z)$, удовлетворяет соотношению

$$2\varepsilon_j < ||a_0^j| - |a_{n-j}^j||, \quad (9)$$

то переход от j -й к $(j+1)$ -й таблице для полиномов $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ будет осуществляться по однотипным формулам (5) или (6).

Справедливость этого утверждения следует из соотношений (8), (9), поскольку в этом случае

$$|a_k^j - \varepsilon_j| \leq |b_k^j| \leq |a_k^j| + \varepsilon_j \quad (10)$$

и, следовательно, при $|a_0^j| < |a_{n-j}^j|$ выполняется неравенство

$$|b_0^j| - |b_{n-j}^j| \leq |a_0^j| + |a_0^j - b_0^j| - |a_{n-j}^j| + |a_{n-j}^j - b_{n-j}^j| \leq \\ \leq |a_0^j| - |a_{n-j}^j| + 2\varepsilon_j < 0, \quad (11)$$

а при $|a_{n-j}^j| < |a_0^j|$

$$|b_{n-j}^j| - |b_0^j| \leq |a_{n-j}^j| - |a_0^j| + 2\varepsilon_j < 0. \quad (12)$$

Для проверки выполнения условия (9) при различных j необходимо знать формулу связи величины ε_{j+1} с величинами ε_j . Поскольку вычисления, с помощью которых находится эта связь, при $|a_0^j| < |a_{n-j}^j|$ и $|a_{n-j}^j| < |a_0^j|$ аналогичны, ограничимся рассмотрением первого случая.

Используя формулу (5) и однотипную формулу для полинома $Q_n(z)$, имеем

$$|a_k^{j+1} - b_k^{j+1}| \leq |a_{k+1}^j - b_{k+1}^j| + \\ + \frac{|a_0^j a_{n-j-k-1}^j b_{n-j}^j - b_0^j b_{n-j-k-1}^j a_{n-j}^j|}{|a_{n-j}^j| |b_{n-j}^j|}. \quad (13)$$

Для числителя дроби в правой части неравенства (13), в силу выполнения условия (9), имеет место оценка

$$\begin{aligned}
 & |a_0^j a_{n-j-k-1}^j b_{n-j}^j - b_0^j b_{n-j-k-1}^j a_{n-j}^j| = |a_0^j a_{n-j-k-1}^j \times \\
 & \times (b_{n-j}^j - a_{n-j}^j) + (b_0^j - a_0^j + a_0^j) a_{n-j}^j (a_{n-j-k-1}^j - b_{n-j-k-1}^j) + \quad (14) \\
 & + a_{n-j-k-1}^j a_{n-j}^j (a_0^j - b_0^j)| \leq [(|a_0^j| + |a_{n-j}^j|) M_j + \\
 & + |a_{n-j}^j| (|a_0^j| + \varepsilon_j)] \varepsilon_j.
 \end{aligned}$$

Для величины $|b_{n-j}^j|$ имеется оценка снизу, так как с учетом соотношений (8), (9)

$$|b_{n-j}^j| \geq |a_{n-j}^j| - |a_{n-j}^j - b_{n-j}^j| \geq |a_{n-j}^j| - \varepsilon_j > 0, \quad (15)$$

Следовательно, в рассматриваемом нами случае $|a_0^j| < |a_{n-j}^j|$ в качестве величины ε_{j+1} можно взять величину

$$\bar{\varepsilon}_{j+1} = \left[1 + \frac{(|a_0^j| + |a_{n-j}^j|) M_j + |a_{n-j}^j| (|a_0^j| + \varepsilon_j)}{|a_{n-j}^j| (|a_{n-j}^j| - \varepsilon_j)} \right] \varepsilon_j. \quad (16)$$

Проводя аналогичные оценки для случая $|a_0^j| > |a_{n-j}^j|$ и объединяя получающийся результат с предыдущим, получаем для величины ε_{j+1} , характеризующей близость соответствующих элементов $(j+1)$ -х таблиц для полиномов $Q_n(z)$ и $P_n(z)$, выражение

$$\varepsilon_{j+1} = \left[1 + \frac{(\alpha_j + \beta_j) M_j + \beta_j (\alpha_j + \varepsilon_j)}{\beta_j (\beta_j - \varepsilon_j)} \right] \varepsilon_j, \quad (17)$$

где

$$\alpha_j = \min \{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\}, \quad (18)$$

$$\beta_j = \max \{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\}. \quad (19)$$

Если в силу достаточной малости ε_0 соотношение (9) будет выполняться для $j = 0, 1, \dots, n-1$, то это будет означать, что переходы от предыдущей таблицы к последующей для полиномов $Q_n(z)$ и $P_n(z)$ будут совершаться по однотипным формулам (5) или (6). Но это, в свою очередь, будет означать, что число корней полинома $Q_n(z)$ внутри и вне единичного круга соответственно такое же, как у полинома $P_n(z)$.

Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема. Пусть полином $P_n(z)$ не имеет корней, лежащих на единичной окружности, и удовлетворяются соотношения

$$\varepsilon_j < \beta_j - \alpha_j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (20)$$

где $\varepsilon_j, \beta_j, \alpha_j$ задаются формулами (17)–(19).

Тогда полином $Q_n(z)$ имеет столько же корней вне и внутри единичного круга, сколько и полином $P_n(z)$.

Рассмотрим в качестве примера полином

$$P_4(z) = z^4 + z^3 - 2z + 3, \quad (21)$$

все корни которого лежат вне единичного круга [2].

Проверку выполнения условий теоремы можно сделать наглядной, если воспользоваться приведенными для полинома (21) в работе [2] таблицами и расположить необходимые для проверки выполнения условий теоремы величины в следующем порядке:

j	β_j	α_j	M_j	$0,5(\beta_j - \alpha_j)$	ϵ_j^1	ϵ_j^2
0	3,00	1,00	3,00	1,00	0,001	0,010
1	2,66	1,66	2,66	0,50	0,003	0,027
2	1,68	1,40	2,33	0,14	0,011	0,091
3	0,49	0,38	0,49	0,055	0,039	0,401

Из приведенной таблицы видно, что если величина $\epsilon_0 = \epsilon_0^1 = 0,001$, условия теоремы выполняются и, следовательно, корни любого полинома, коэффициенты которого отличаются от соответствующих коэффициентов полинома (21) на величину не большую $\pm 0,001$, лежат вне единичного круга.

Если величина $\epsilon_0 = \epsilon_0^2 = 0,01$, то, как следует из таблицы, при $j = 3$ $\epsilon_3^2 > 0,5(\beta_3 - \alpha_3)$ и, следовательно, в этом случае условия теоремы не выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА. Л., 1949.
2. Ю. И. Неймарк, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 242.
3. Е. А. Иконников, Н. Н. Бутин, Тр. Горьковского ин-та инж. водного тр-та, 3, 195 (1936).
4. Р. Ольденбург, Г. Сарториус, Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, М., 1949, стр. 230.
5. М. И. Фейгин, ПММ, 32, 118 (1968).
6. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, 3, 425 (1969).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 ноября 1968 г.

ON AN APPROXIMATE INVESTIGATION OF CHARACTERISTIC POLYNOMIAL ROOTS ARRANGEMENT

V. I. Goryunov

A theorem is proved under met conditions of which the roots of two polynomials with real and mutually close corresponding coefficients are similarly positioned with respect to a unit circle.

УДК 681.14

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ЦВМ БЭСМ-4 МЕТОДОМ МНОГОФАКТОРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

A. Н. Дорошенко, А. Г. Шигин

Рассматриваются вопросы применения методов планирования экспериментов к исследованию и оптимизации структуры ЦВМ на их программных моделях. Даются принципы составления программных моделей структуры БЭСМ-4 на языке блок-диаграмм. Модифицированные варианты организации цикла ЦВМ БЭСМ-4 получены в результате изменения следующих параметров: время выполнения операции в АУ, время обращения к оперативной памяти, количество команд, одновременно обрабатываемых за цикл работы машины, разделение оперативной памяти по младшим разрядам. В результате проведения полного факторного эксперимента получены уравнения регрессии, по которым определяется влияние каждого из указанных параметров и их взаимодействий на быстродействие ЦВМ. Оптимизация структуры ЦВМ БЭСМ-4 проводилась по методу крутого восхождения.

Цифровые вычислительные машины являются сложными многопараметрическими системами массового обслуживания. Однако применение классических методов массового обслуживания для решения задач анализа и оптимизации структуры вычислительной машины и процессов, происходящих в ней, из-за сложности функционирования устройств, многообразия параметров и некоторых других особенностей связано с большими трудностями. Поэтому для решения этой задачи целесообразно использовать подход [1], связанный с применением методов планирования экспериментов [2] для исследования и оптимизации структуры ЦВМ, заданной программной моделью с помощью специального языка моделирования сложных систем переработки информации.

Такой подход к анализу сложных вычислительных машин позволяет повысить эффективность моделирования при выявлении из множества параметров наиболее существенных и дает возможность оптимизировать исследуемую структуру по заданному критерию.

В данной работе рассмотрены некоторые вопросы применения методов многофакторного анализа для изучения отношения «структуре ЦВМ — алгоритм решаемой задачи» с помощью программного моделирования. В качестве примера исследуется организация вычислительного процесса ЦВМ БЭСМ-4 на уровне взаимодействия устройств, описанного с помощью языка моделирования типа блок-диаграмм [3].

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ЦИКЛОВ РАБОТЫ ЦВМ БЭСМ-4

При анализе ЦВМ БЭСМ-4 на уровне устройств цикл работы машины состоит из следующих этапов (рис. 1)*: 1) выборка i -й команды из оперативной памяти (ВК); 2) анализ типа команды, подготовка и выполнение i -й команды (для команд условной и безусловной переда-

* На рис. 1, 3, 4, 5, 6 даны временные диаграммы выполнения команд программы в ЦВМ БЭСМ-4. Числами указаны последовательности выполнения команд.

чи управления) или выборка операндов (ВО), количество операндов изменяется от 0 до двух (для вычислительных команд); 3) выполнение операции в арифметическом устройстве (АУ) и выборка следующей ($i + 1$)-й команды; 4) отсылка результата, полученного при выполнении i -й команды, в оперативную память (ОР).

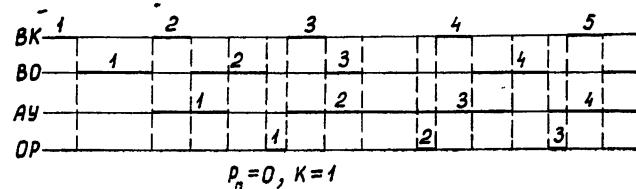


Рис. 1.

Каждому этапу цикла работы машины и состоянию оборудования может быть поставлен соответствующий индикатор модели X . Например, X_1 — индикатор, определяющий возможность выборки команды из оперативной памяти, X_2 — индикатор состояния арифметического устройства и т. п.

Процедура выполнения цикла работы ЦВМ БЭСМ-4, описанная на языке блок-диаграмм, представлена на рис. 2 и реализована с помощью универсальной моделирующей программы УМП-1 [3].

Программное моделирование работы ЦВМ БЭСМ-4 при выполнении некоторого набора вычислительных задач (табл. 1) показало, что загрузка основных устройств ЦВМ далеко не полная. Так, в зависимости от состава команд, реализующих исследуемый алгоритм задачи, использование арифметического устройства колеблется в пределах 40—50%, а оперативной памяти — 55—65% (табл. 2).

Таблица 1
Состав операций в процентах для исследуемых вычислительных задач,
реализованных на ЦВМ М-20

Номер задачи	Время выполнения операции (мсек)							Команды передачи управления	
		до 36	до 40	до 50	до 90	до 120	до 220	условная передача управления	Безусловная передача управления
1	16	16	24	6	22	0	7	9	
2	7	14	32	10	17	0	7	14	
3	26	6	27	3	30	1	0	7	
4	23	15	20	7	21	0	10	4	
5	17	28	16	2	21	0	4	12	
6	24	17	18	8	17	0	5	11	
7	16	19	33	1	15	0	8	8	
8	23	7	32	3	17	2	3	8	
Средние значения по всем восьми задачам	19	15	25	5	20	1	6	9	

С целью увеличения быстродействия работы машины рассмотрим различные варианты организации цикла ЦВМ БЭСМ-4. Все изменения цикла работы машины проводятся с учетом минимальных затрат на дополнительное оборудование и перестройку реальной структуры. В качестве исследуемых параметров выбраны следующие: τ_{AU} — средняя скорость выполнения операции в арифметическом устройстве; $\tau_{\text{оп}}$ — время обращения к оперативной памяти; K — количество команд, одно-

временно обрабатываемых в одном цикле работы машины; P_n — количество секций оперативной памяти.

Будем рассматривать вариант структуры машины при разделении оперативной памяти на две секции ($P_n = 0$ или $P_n = 1$), так как разделение ее на большее число секций приводит к необходимости существенного изменения структуры машины.

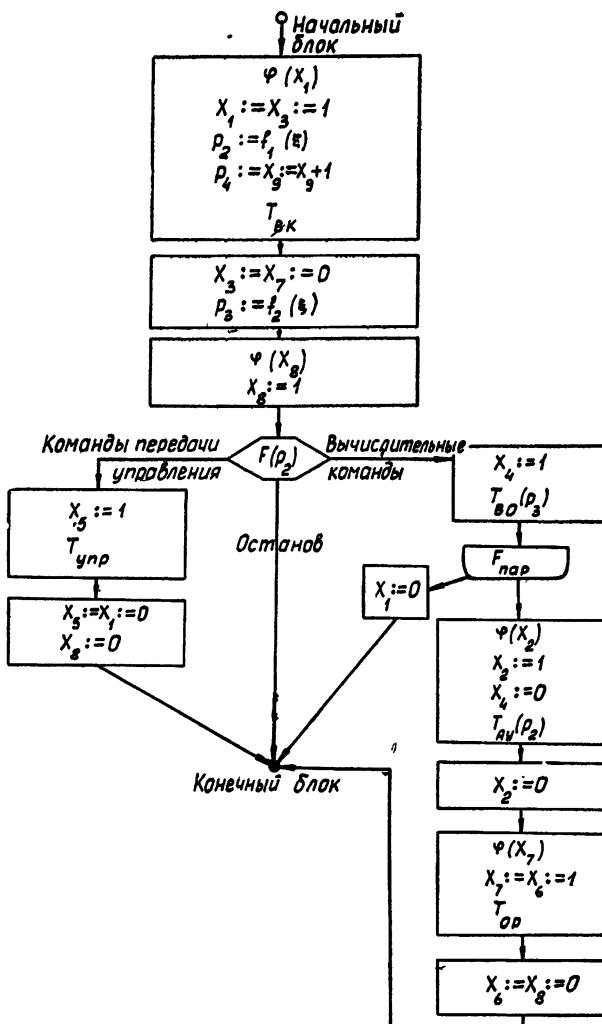


Рис. 2. Описание модели функционирования ЦВМ БЭСМ-4 на языке блок-диаграмм:

X_i — индикаторы; $X_i|_{t=0} = 0$, $i = \overline{1, 9}$;

p_j — параметры информационного элемента; $j = \overline{1, 4}$;

$f(\xi)$ — функция от случайной переменной ξ ;

T_k , $T(p_j)$ — функции, определяющие величины задержки перемещения информационных элементов в модели.

На повышение быстродействия ЦВМ при неизменной системе элементов, на которой эта машина осуществлена, в основном влияет не изменение отдельных параметров устройств, а выбор правильного соотношения ряда параметров с учетом класса реализуемых задач.

Анализ и обработка всех экспериментов по выбору оптимальных параметров машины проводится методом полного факторного эксперимента [2] для двух уровней варьирования в соответствии с планом типа 2^n для случая $n \leq 4$, где n — количество варьируемых параметров.

Таблица 2

Результаты моделирования работы ЦВМ БЭСМ-4 при выполнении тестовых вычислительных задач

Номер задачи	Время моделирования* (относительные единицы)	Время работы устройств (относительные единицы)		Среднее быстродействие машины ($\text{операция} \times \text{сек}^{-1}$)	Загрузка устройств (%)	
		арифметическое устройство	оперативная память		арифметическое устройство	оперативная память
1	6516	2690	4026	15350	41,3	61,8
5	5658	2780	3590	17700	49,1	63,4
Средние значения по восьми задачам	5961	2725	3489	16800	45,6	58,5

* Для каждой задачи количество команд программы принималось одинаковым.

Временная диаграмма организации циклов при $P_n = 1$ для $K = 4$ приведена на рис. 3, для $K = 2$ — на рис. 4. При $P_n = 0$ и $K = 4$ — на рис. 5, а для $K = 2$ — на рис. 6.

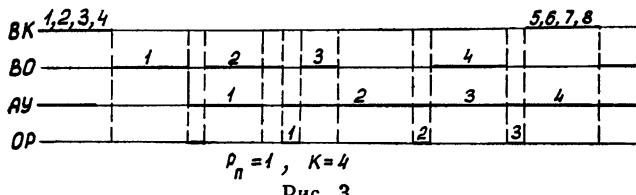


Рис. 3.

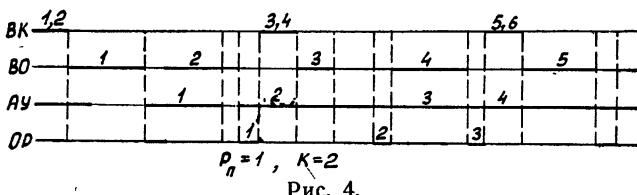


Рис. 4.

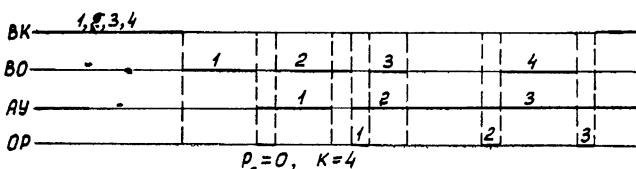


Рис. 5.

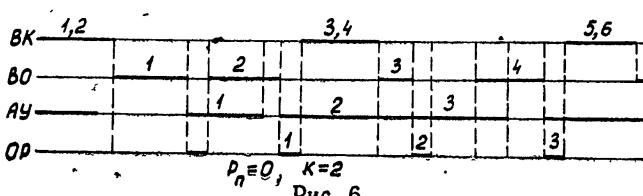


Рис. 6.

Однократная выборка в начале цикла работы машины группы K команд из оперативной памяти требует введения в схему дополнительно по крайней мере ($K-1$) регистров команд. При $P_n = 0$ время обращения к оперативной памяти увеличивается в два раза за счет последовательной выборки команд. Кроме того, целесообразно сделать плавающий цикл выполнения команд. Последующее сравнение исследуемых вариантов проводится с вариантом, в котором также предусмотрел плавающий цикл.

Следует отметить, что в исследуемых вариантах цикла работы результат операции отсылается в оперативную память только после подготовки к выполнению в арифметическом устройстве следующей за ней операции и может совмещаться по времени с работой арифметического устройства.

Исходные данные, отображающие последовательность команд программы, реализующей задачи на исследуемой ЦВМ, в модели задаются случайной последовательностью кодов. Закон распределения этих кодов, генерируемых подпрограммой случайных чисел, устанавливается на основе предварительной оценки процентного состава команд по операциям в программе и по числу операторов (от 0 до двух) в команде программы.

При исследовании характеристик вариантов структуры ЦВМ БЭСМ-4 использовалась базовая модель, из которой путем простых перестроек создавались варианты структур. Исследовались следующие варианты организации цикла: с одновременной обработкой двух и четырех команд для моноблочной и секционной оперативной памяти.

Использование языка блок-диаграммы позволяет сравнительно просто изменять параметры отдельных блоков и порядок их сочленения в исследуемых структурах. Это свойство языка использовано при реализации базовой модели и ее перестройки. Схема перестройки модели описывается с помощью системы операционных блоков. Значения параметров, по которым проходит перестройка модели, определяются матрицей планирования эксперимента.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Анализ вариантов организации структур ЦВМ БЭСМ-4 был проведен для вычислительных задач с составом операций по длительности, указанным в табл. 1.

Количество варьируемых параметров менялось от двух до четырех с расширением области исследования поверхности отклика согласно планам полного факторного эксперимента.

В качестве критерия оптимизации было принято быстродействие ЦВМ, определяемое как отношение общего числа операций к полному времени моделирования:

$$B = \sum K_v / T_m. \quad (1)$$

Область варьирования параметров τ_{Ay} , τ_{Op} , K образуется за счет изменения первых двух параметров на 10% от их базовых значений, а количество команд K , одновременно обрабатываемых в одном цикле, — от двух до четырех. Тогда математическое описание быстродействия, полученное по результатам реализации плана эксперимента в заданной области, для $P_n = 0$ имеет вид

$$B_1 = 20,4 - 0,86 \tau_{Ay} - 0,92 \tau_{Op} - 0,094 K + 0,131 \tau_{Ay} \tau_{Op} + 0,125 \tau_{Ay} K - 0,106 \tau_{Op} K - 0,031 \tau_{Ay} \tau_{Op} K, \quad (2)$$

для $P_n = 1$:

$$\begin{aligned} B_2 = 22,6 - 1,17 \tau_{Ay} - 0,8 \tau_{Op} - 0,125 K + \\ + 0,1 \tau_{Ay} \tau_{Op} - 0,025 \tau_{Ay} K. \end{aligned} \quad (3)$$

Анализ уравнений показывает, что 1) изменение параметра K вблизи его базового значения ($K = 3$) несущественно, а знак коэффициента при K указывает на нецелесообразность дальнейшего увеличения числа совмещений команд в цикле; 2) взаимодействия названных параметров на быстродействие машины также не оказывают существенного влияния, т. е. поверхность отклика может быть с достаточной степенью точности описана линейными приближениями

$$B = \begin{cases} 20,4 - 0,86 \tau_{Ay} - 0,92 \tau_{Op} & (\text{если } P_n = 0) \\ 22,6 - 1,17 \tau_{Ay} - 0,8 \tau_{Op} & (\text{если } P_n = 1) \end{cases}. \quad (4)$$

Дальнейшее исследование поверхности отклика проводится в области десятипроцентного изменения параметров τ_{Ay} и τ_{Op} для $K = 3$, $P_n = 1$:

$$B_3 = 22,9 - 1,15 \tau_{Ay} - 0,8 \tau_{Op} + 0,1 \tau_{Ay} \tau_{Op}. \quad (5)$$

Из полученного методом полного факторного анализа уравнения (5) очевидно, что параметр τ_{Ay} оказывается более существенным для повышения быстродействия машины БЭСМ-4. Так, например, уменьшение параметра τ_{Ay} на 20% приводит к увеличению быстродействия более чем на 10%, в то время как аналогичное уменьшение параметра τ_{Op} увеличивает быстродействие только на 6%. Взаимодействием параметров в данной исследуемой области базовых значений пренебрегаем.

Применяя метод крутого восхождения для поиска почти стационарной области значений B , получим на следующем шаге описание поверхности отклика в виде

$$B_4 = 26,75 - 1,5 \tau_{Ay} - 1,15 \tau_{Op} + 0,1 \tau_{Ay} \tau_{Op}. \quad (6)$$

Сравнение уравнений (5) и (6) показывает, что закономерность влияния τ_{Ay} и τ_{Op} на быстродействие остается прежним, т. е. можно говорить, что исследование проводится в области хорошо согласованных временных характеристик арифметического и запоминающего устройств.

Однако следующий шаг по поверхности отклика показал, что более критическим становится параметр τ_{Op} , т. е. значимость вклада в быстродействие ЦВМ увеличивается:

$$B_5 = 31,5 - 0,9 \tau_{Ay} - 1,43 \tau_{Op} + 0,52 \tau_{Ay} \tau_{Op}. \quad (7)$$

Учитывая, что уменьшение значений параметров τ_{Ay} и τ_{Op} в реальной схеме связано с затратами на перестройку схемы и с повышением требований к оборудованию, ограничимся быстродействием, полученным в соответствии с вариантом, описанным уравнением (6).

Итак, проведенные исследования программной модели ЦВМ БЭСМ-4 с помощью методов полного факторного эксперимента позволяют сделать вывод, что оптимальными параметрами структуры являются значения $P_n = 1$, $K = 3$. Это означает, что при разделении оперативной памяти на две секции и обработке в одном цикле одновременно

трех команд быстродействие машины может возрасти в среднем на 30% относительно существующего быстродействий.

Результаты настоящей работы показали эффективность применения методов планирования экспериментов при исследовании объектов и процессов преобразования на их моделях.

Методы планирования экспериментов позволяют: 1) получить оценки влияния любого параметра и их взаимодействий на характеристики проектируемых систем; 2) выделить из большого числа параметров существенные; 3) повысить эффективность эксперимента на программной модели и получить в определенном смысле улучшенную структуру проектируемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Дорошенко, А. Г. Шигин, Доклады V Межвузовской конференции по физическому и математическому моделированию, МЭИ, М., 1968.
2. В. В. Налимов, Н. А. Чернова, Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, изд. Наука, М., 1965.
3. А. Н. Дорошенко, А. Г. Шигин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 11, 1747 (1968).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
14 июня 1968 г.

ANALYSIS OF BESM-4 DIGITAL COMPUTER STRUCTURE BY THE METHOD OF EXPERIMENT POLYFACTORIAL PLANNING

A. N. Doroshenko, A. G. Shigin

The problems of application of experiment planning methods to the analysis and the optimization of computer structure on the program models are considered. The principles of program model compilation of BESM-4 structure in terms of block-diagram language are given. Modified variants of BESM-4 cycle arrangement are obtained by changing the following parameters: operation time in the arithmetic unit, access time of the main memory, the number of instructions simultaneously processed per cycle, division of main memory by junior bits. On carrying out a full factorial experiment regression equations are obtained. These equations determine the influence of each of the mentioned parameters and of their interactions upon digital computer speed. The BESM-4 structure was optimized by the steep ascent method.

УДК 681.142.644.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРПОЛЯТОРОВ

A. B. Преображенский

Определяется погрешность цифровых линейных интерполяторов, в которых числа представлены в системе счисления с основанием p .

В цифровых системах программного управления применяется устройство линейного интерполятора, вырабатывающее последовательность импульсов, количество которых за определенное время—период интерполяции T —равно заданному числу B .

Погрешность интерполятора δ определяется как разность между количеством выработанных за время t импульсов и величиной Bt/T , где $0 \leq t \leq T$. В идеальном случае при равномерном следовании вырабатываемых устройством импульсов погрешность интерполятора определяется только дискретностью и равна $1/2$. В реальных устройствах из-за неравномерности следования импульсов погрешность может стать довольно большой. Так, например, погрешность двоичного линейного интерполятора, полученная в работах [1, 2], равна приблизительно $n/6 + 7/18$, где n — число разрядов интерполируемого числа.

В данной работе определяется погрешность линейных интерполяторов, выполненных по блок-схеме рис. 1, числа в которых представлены в системе счисления с основанием p : $B = \sum_{i=1}^n b_i p^{i-1}$.

Импульсы с частотой следования $f = p^n/T$ подаются на последовательно включенные устройства деления числа входных импульсов на p . Устройство деления пропускает каждый p -й входной импульс на следующее устройство, а все остальные — на устройство умножения на b_i . Устройство умножения пропускает на выход b_i импульсов из каждого ($p - 1$) поступивших. Совпадение импульсов в разных разрядах невозможно, и выход интерполятора образован объединением выходов устройств умножения.

Погрешность интерполятора в любой момент времени t (время измеряется дискретно в периодах следования импульсов частоты f) можно рассматривать как сумму погрешностей в отдельных разрядах:

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t).$$

Выбор устройством умножения b_i импульсов из каждого $p - 1$ вход-

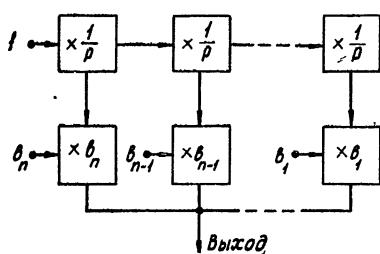


Рис. 1.

ных при $p > 2$ неоднозначен. Будем считать, что во всех разрядах на периоде интерполяции T каждому b_i соответствуют одни и те же номера пропускаемых на выход импульсов j_m ($1 \leq j_m \leq p-1$). В этом случае расположение импульсов на выходе i -го разряда, а следовательно, и погрешность δ_i , будет повторяться с периодом T/p^{i-1} . Если число B представлено в смешанной системе счисления, то период

повторения δ_i равен $T / \prod_{k=1}^{i-1} p_k$. На рис. 2 дан вид δ_i на одном перио-

де повторения. За это время на вход устройства деления i -го разряда приходит p импульсов, импульсы с номерами j_1, j_2, \dots, j_{b_i} приходят на выход устройства умножения, при этом величина погрешности δ_i меняется скачком на одну единицу. При $t = 0$ и $t = T / \prod_{k=1}^{i-1} p_k$ погрешность $\delta_i = 0$, в интервалах между скачками δ_i представляет собой прямую линию с наклоном $-B/T$.

Погрешность δ_i на одном периоде повторения можно представить как сумму p_i отрезков, каждый из которых характеризуется тремя числами: a, k, Δ ; проекция его на ось t равна $T / \prod_{k=1}^{i-1} p_k$. Один та-

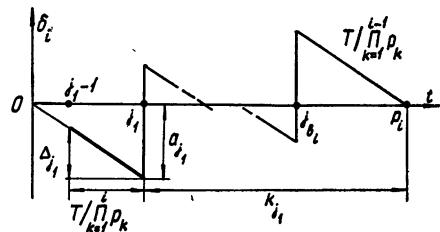


Рис. 2.

кой отрезок выделен на рис. 2. Его параметры: $a = b_i j_m / p_i - (m-1)$, $k = p_i - j_m$, $\Delta = b_i / p_i$, где $m = 1, 2, \dots, b_i$.

Для определения $\delta_i(t)$ необходимо определить параметры тех отрезков δ_i , на которые попадает точка t , и вычислить $\sum_{i=1}^n \delta_i(t)$ (рис. 3).

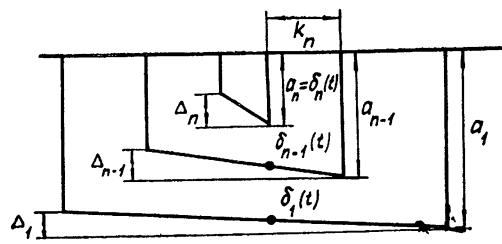


Рис. 3.

D_i, A_i (рис. 4). Тогда, если при любом i $a, k, \Delta \neq 0$, т. е. все $b_i \neq 0$ и $\delta < 0$,

$$A_{i+1} = a_{i+1} + A_i - \frac{D_i}{p_{i+1}} k_{i+1}, \quad D_{i+1} = \Delta_{i+1} + \frac{D_i}{p_{i+1}}. \quad (1)$$

Так как $A_1 = a_1$, $D_1 = \Delta_1$, $A_n = |\delta|$, получаем

$$|\delta(t)| = a_1 - \left[\frac{\Delta_1 k_2}{p_2} + \frac{\Delta_1 k_3}{p_3 p_2} + \dots + \frac{\Delta_1 k_n}{p_n \dots p_2} \right] + a_2 - \left[\frac{\Delta_2 k_3}{p_3} + \dots + \frac{\Delta_2 k_n}{p_n \dots p_3} \right] + \dots + a_i - \left[\frac{\Delta_i k_{i+1}}{p_{i+1}} + \dots + \frac{\Delta_i k_n}{p_n \dots p_{i+1}} \right] \quad (2)$$

Погрешность максимальна в момент скачка δ_n , причем если $\delta < 0$, то при вычислении ее максимальной величины нужно брать $\delta_n = a_n$ (до скачка), а если $\delta > 0$, то $\delta_n = a_n - 1$ (после скачка).

Пусть отрезок $\sum_{k=1}^i \delta_k$, на

который попадает точка t ,

характеризуется параметрами

$$+ \frac{\Delta_i k_n}{p_n \dots p_{i+1}} \Big] + \dots + a_{n-1} - \frac{\Delta_{n-1} k_n}{p_n} + a_n.$$

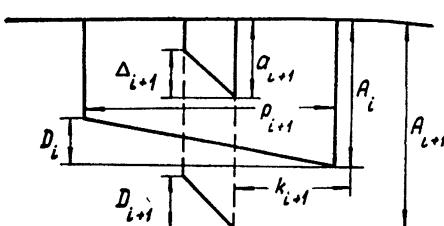


Рис. 4.

Необходимо определить те n троек чисел a, k, Δ , подстановка которых в (2) дает $\delta_{\max} = \max |\delta(t)|$. Пользоваться при вычислениях точной формулой (2) практически невозможно из-за сложности, поэтому, отбросив те слагаемые, у которых в знаменателе стоит произведение величин оснований, воспользуемся завышенной оценкой погрешности:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i < \sum_{i=1}^n a_i - \frac{\Delta_{i-1} k_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n C_{i-1, i} \quad (\Delta_0 = 0). \quad (3)$$

Графически C как функция Δ представляет прямую, отсекающую отрезок a_i на оси C и $a_i p_i / k_i$ на оси Δ (рис. 5). Будем рассматривать случай $p = \text{const}$. Каждой тройке чисел a_i, k_i, Δ_i поставим в соответствие точку $\Delta = \Delta_i$ на прямой $C(\Delta)$ и дадим ей номер i ; $C_{i-1, i}$ будем называть величиной перехода $(i-1, i)$.

Так как для получения максимальных переходов необходимо, чтобы a_i и $a_i p_i / k_i$ были как можно больше, а Δ_{i-1} как можно меньше, можно резко сократить число точек, которые необходимо перебрать при поиске δ_{\max} . Для этого при построении $C(\Delta)$ а) отбросим прямые, лежащие полностью ниже какой-то j -й прямой и имеющие $\Delta > \Delta_j$; б) из одинаковых прямых будем брать ту, у которой Δ минимально.

Выше предполагалось, что все $b_i \neq 0$ и $\delta < 0$. Если $b_{i+1} = 0$, то соотношения (1) заменяются на

$$A_{i+1} = A_i, \quad D_{i+1} = D_i/p, \quad A_{i+2} = a_{i+2} + A_i - D_i k_{i+2} / p^2. \quad (4)$$

В этом случае величина перехода равна

$$\frac{A_{i+2} - A_{i+1}}{2} = \frac{1}{2} \left(a_{i+2} - \frac{D_i k_{i+2}}{p^2} \right) < \frac{\max a}{2}.$$

Вычисление δ_{\max} для различных p показывает, что при $p > 2$ средняя величина перехода при δ_{\max} больше, чем $a_i/2$, т. е. максимальная погрешность достигается при всех $b_i \neq 0$.

Можно показать, что, если номера j_m расположены симметрично относительно $p/2$, каждой отрицательной погрешности соответствует такая же положительная и наоборот—каждой положительной—отрицательная. Если расположение j_m несимметрично, то каждой отрицательной погрешности соответствует такая же положительная для распределения импульсов, при котором $j_{m'} = p - j_m$, а каждой положительной—отрицательная. Следовательно, достаточно вычислить мак-

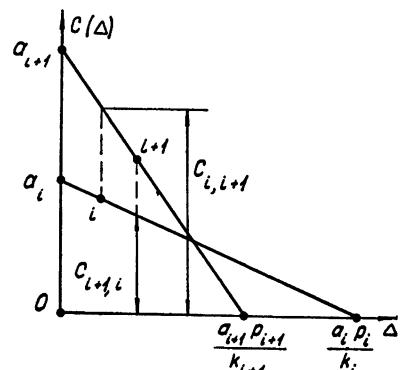


Рис. 5.

симальную величину $\delta < 0$, но при несимметричном расположении j_m относительно $p/2$ набор рассматриваемых точек (a, k, Δ) необходимо дополнить набором, получаемым при $j_{m'} = p - j_m$.

Если n больше числа отобранных для перебора по условиям а) и б) точек, то точки в последовательности, дающей максимальную погрешность, должны повторяться. Сначала вычислим среднюю величину перехода при последовательностях вида $i-j-i$, а затем проверим, можно ли ее увеличить, добавляя в переходы $i-j$ и $j-i$ промежуточные точки. Таким образом, мы найдем последовательность точек, которая дает максимальную среднюю величину перехода. Затем определим последовательности точек, дающих максимальную погрешность при $n = 1, 2$ и т. д. до тех пор, пока в последовательности не начнут появляться точки, дающие максимальную среднюю величину перехода. Если целое число последовательностей с максимальным переходом не укладывается в n , то, возможно, придется определить отдельно последние точки последовательности.

Аналогичным образом можно определить δ_{\max} при смешанной системе счисления, когда p непостоянно. Для этого необходимо построить $C(\Delta)$ для каждого p , а переход от точек с одним значением p к точкам с другим значением p производить в соответствии с чередованием p в коде числа B .

Проведем вычисление δ_{\max} для $p = 10$, определив при этом набор номеров j_m , при котором δ_{\max} минимальна. Зададим набор номеров, обеспечивающий минимальную величину параметра α :

$$b = 1 \quad j = \underline{5}^{\underline{1}}_1,$$

$$b = 2 \quad j = \underline{2}^{\underline{0},4}_{0,5}, \quad \underline{8}^{\underline{0},6}_3_2,$$

$$b = 3 \quad j = \underline{2}^{\underline{0},6}_{0,75}, \quad \underline{5}^{\underline{0},5}_1, \quad \underline{8}^{\underline{0},4}_2,$$

$$b = 4 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},4}_{0,45}, \quad \underline{4}^{\underline{0},6}_1, \quad \underline{6}^{\underline{0},4}_1, \quad \underline{9}^{\underline{0},6}_6_3,$$

$$b = 5 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},5}_{0,55}, \quad \underline{3}^{\underline{0},5}_{0,715}, \quad \underline{5}^{\underline{0},5}_1, \quad \underline{7}^{\underline{0},5}_{1,67}, \quad \underline{9}^{\underline{0},5}_5,$$

$$b = 6 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},6}_{0,77}, \quad \underline{3}^{\underline{0},8}_{1,14} \underline{4}_4, \quad \underline{4}^{\underline{0},4}_{0,7}, \quad \underline{6}^{\underline{0},6}_{1,5}, \quad \underline{7}^{\underline{0},2}_{0,66}, \quad \underline{9}^{\underline{0},4}_4,$$

$$b = 7 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},7}_{0,78}, \quad \underline{2}^{\underline{0},4}_{0,5}, \quad \underline{4}^{\underline{0},8}_{1,33} \underline{5}_5, \quad \underline{5}^{\underline{0},5}_1, \quad \underline{6}^{\underline{0},2}_{0,5}, \quad \underline{8}^{\underline{0},6}_3, \quad \underline{9}^{\underline{0},3}_3,$$

$$b = 8 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},8}_{0,89}, \quad \underline{2}^{\underline{0},6}_{0,75}, \quad \underline{3}^{\underline{0},4}_{0,57}, \quad \underline{4}^{\underline{0},2}_{0,33}, \quad \underline{6}^{\underline{0},8}_2 \underline{6}_6, \quad \underline{7}^{\underline{0},6}_2, \quad \underline{8}^{\underline{0},4}_2, \quad \underline{9}^{\underline{0},2}_2,$$

$$b = 9 \quad j = \underline{1}^{\underline{0},9}_7, \quad \underline{2}^{\underline{0},8}_1, \quad \underline{3}^{\underline{0},7}_1, \quad \underline{4}^{\underline{0},6}_1, \quad \underline{5}^{\underline{0},5}_1, \quad \underline{6}^{\underline{0},4}_1, \quad \underline{7}^{\underline{0},3}_1, \quad \underline{8}^{\underline{0},2}_1, \quad \underline{9}^{\underline{0},1}_1.$$

Около каждого j проставлены соответствующие величины a — вверху и ap/k — внизу. Те точки, которые не отбрасываются по условиям а), б), подчеркнуты и пронумерованы от 1 до 7. Для них построен график $C(\Delta)$ на рис. 6.

Из рис. 6 следует, что повторение точки 2 или 3 дает величину перехода 0,56. Максимальная средняя величина перехода, вычисленная вышеописанным способом, получается при повторении точек 2—6—3 и равна 0,587. Таким образом, для уменьшения δ_{\max} нужно именить j_m

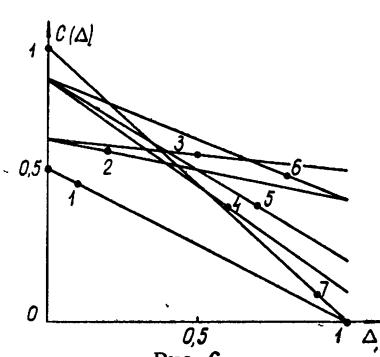


Рис. 6.

для $b = 2$ и $b = 4$ так, чтобы уменьшить ap/k , по возможности не увеличивая a . Единственный возможный вариант: при $b = 2$ $j = 3_{0,86}^{0,6}$, $7_{1,33}^{0,4}$; при $b = 4$ $j = 2_{1}^{0,8}$, $4_{1}^{0,6}$, $6_{1}^{0,4}$, $8_{1}^{0,2}$.

Отобразив по условиям а) и б) точки для нового распределения импульсов и проведя все необходимые вычисления, получим максимальную среднюю величину перехода 0,51 при повторении точек 9—1—9 или 6—8—6, где точка 9 соответствует $j = 2$ при $b = 4$, точка 8— $j = 9$ при $b = 5$. При $n = 1$ $\delta_{\max} = 0,9$ для точки 7; при $n = 2$ $\delta_{\max} = 1,44$ для точек 9,6; при $n = 3$ $\delta_{\max} = 1,86$ для точек 9—6—8.

Таким образом, при $n \geq 4$ δ_{\max} получается при последовательности точек 9—6—8—6—...

$$\delta_{\max} = 0,51n + 0,33 \quad (\text{при } n - \text{нечетных}),$$

$$\delta_{\max} = 0,51n + 0,42 \quad (\text{при } n - \text{четных}).$$

При последовательности точек $l - i - j - i - \dots$ формула (2) принимает вид (для нечетных n)

$$\begin{aligned} \delta = n & \left[\frac{a_i + a_j}{2} - \frac{\Delta_i k_j}{2p} - \frac{\Delta_j k_i}{2p(1-1/p)^2} - \left(\frac{\Delta_i k_i}{2p^2} + \frac{\Delta_j k_j}{2p^2} \right) \times \right. \\ & \times \frac{1}{1-1/p^2} - \frac{\Delta_i k_j}{2p^3(1-1/p^2)} \Big] + a_l - \frac{a_i + a_j}{2} - \frac{\Delta_i k_i}{p(1-1/p^2)} + \\ & + \frac{\Delta_i k_j}{2p} - \frac{\Delta_i k_j}{p^2(1-1/p^2)} + \left(\frac{\Delta_i k_j}{2p^3} + \frac{\Delta_j k_i}{2p} + \frac{\Delta_i k_i}{2p^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Delta_j k_j}{2p^2} \right) \frac{2}{1-1/p^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-1/p^2} \right). \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление по формуле (5) дает $\delta_{\max} = 0,495n + 0,345$, таким образом точное значение δ_{\max} отличается от завышенной оценки при $p = 10$ незначительно.

В дальнейшем будем проводить сравнение интерполяторов по точности только по величине коэффициента при n в выражении δ_{\max} .

Было проведено определение наилучших наборов j_m и вычисление соответствующей им δ_{\max} для $p = 3, 4, 5, 6, 8, 12$ и 16 . Полученные результаты представлены на рис. 7, где число разрядов при основании p пересчитано на соответствующее ему число двоичных разрядов n_2 . Проводить вычисление δ_{\max} при наилучших j_m для больших p не имеет смысла, так как всегда можно выбрать j_m так, что любое $a < 1$, тогда $\delta_{\max} < n = n_2 / \log_2 p$ и при больших p может стать очень малой.

Наиболее простая конструкция устройства умножения может получиться в тех случаях, когда каждый разряд b_i представлен кодом с постоянным весом и каждый разряд кода независимо от других пропускает на выход импульсы с одними и теми же номерами.

Определим минимальную δ_{\max} для этого случая при $p = 10$, воспользовавшись тем, что, если не выполняется одно из указанных ниже условий,

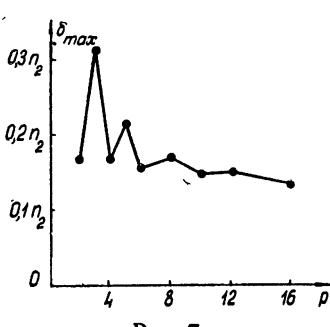


Рис. 7.

- 1) $b = 2 \quad j = 3, 7$ или $2, 8,$
 - 2) $b = 3 \quad j = 2, 5, 8,$
 - 3) $b = 4 \quad j = 1, 4, 6, 9$ или $2, 4, 6, 8,$
 - 4) $b = 5 \quad j = 1, 3, 5, 7, 9$ или $2, 3, 5, 7, 8$ или $2, 4, 5, 6, 8;$
 - 5) $b = 6 \quad j = 1, 3, 4, 6, 7, 9,$
 - 6) $b = 7 \quad j = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9,$
 - 7) $b = 8 \quad j = 1 - 3, 5 - 9$ или $1 - 4, 6 - 9$ или $1 - 5, 7 - 9,$
- $\delta_{\max} \geqslant 0,67n.$

Можно показать, что для всех кодов, кроме 2421 и 3321, из 17 существующих

5 2 1 1	2 4 2 1	4 3 2 1	4 4 2 1
4 3 1 1	5 2 2 1	5 3 2 1	5 4 2 1
5 3 1 1	6 2 2 1	6 3 2 1	6 4 2 1
6 3 1 1	3 3 2 1	7 3 2 1	7 4 2 1
8 4 2 1			

невозможно выполнить одновременно указанные условия.

Например, в коде 8421 $3 = 2 + 1; 7 = 4 + 2 + 1$, следовательно, по условиям 2) и 6) необходимо, чтобы $j = 5$ при $b = 1, j = 1, 4, 6, 9$ при $b = 4$. Тогда $j = 1, 4, 5, 6, 9$ при $b = 5 = 4 + 1$, что противоречит условию 4).

Для кодов 2421 и 3321 можно указать только по одному набору j_m , удовлетворяющему условиям 1)—7) с погрешностью $\delta_{\max} = 0,67 n$. Такую же погрешность дает конструкция интерполятора, предлагаемая в работе [3].

Таким образом, при использовании устройства умножения, в котором b_i представлено в двоично-десятичном коде и каждый разряд независимо от других управляет прохождением импульсов, в лучшем случае может быть получена $\delta_{\max} = 0,67 n$, т. е. на 20% больше, чем при $p = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Карабский, Автоматика и телемеханика, 20, 748 (1959).
2. А. А. Воронов, А. Р. Гарбузов, Б. Л. Ермилов, М. Б. Игнатьев, Г. Г. Корнитецко, Г. Н. Соколов, Ян Си-зен, Цифровые аналоги для систем автоматического управления, изд. АН СССР, Л., 1960.
3. В. Т. Зусман, И. А. Вульфсон, Станки и инструмент, 9, 3 (1960).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 марта 1968 г.

ON FINDING A LINEAR INTERPOLATOR ERROR

A. V. Preobrazensky

The article deals with finding errors of digital linear interpolators where numbers are represented in a p -number base numeration.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.391.24

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА m -ЗНАЧНЫХ СХЕМ ПРИ ЧАСТОТНОМ, ВРЕМЕННОМ И ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАЗДЕЛЕНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

B. I. Корнейчук, A. M. Романкевич

К настоящему времени для реализации m -значных переключательных функций чаще других привлекаются фазо-импульсный, частотно-гармонический и пространственный принципы представления информационных сигналов [1]. Указанные принципы отличаются от многих других тем, что позволяют реализовать теоретико-множественные операции. Это связано с возможностью наличия в одной точке схемы нескольких информационных сигналов одновременно [3].

Рассмотрим систему функций, позволяющую реализовать произвольную m -значную функцию с учетом указанных особенностей. Кроме констант, она включает в себя следующие функции.

$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X^Y = \begin{cases} Y & (X \neq \Theta) \\ \Theta & (X = \Theta) \end{cases},$$

где $X, Y, \dots \in E_m$, E_m — множество всех подмножеств множества $E_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, Θ — пустое множество [3].

Любая m -значная функция в рассматриваемом случае имеет несколько канонических форм представления (см., например, [6]), что позволяет выбрать ту форму, которая включает в себя наименьшее число операций, наиболее трудно реализуемых при том или ином принципе представления информации. Известно соотношение разложения:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{l=0}^{m-1} (x \cap l)f(l, x_2, \dots, x_n) \quad (x \in E_m).$$

Система позволяет производить минимизацию m -значных переключательных функций. Отыскание простых импликант (определения аналогичны данным в [4]) основывается на следующем соотношении склеивания:

$$\bigcup_{l=0}^{m-1} P(x \cap l)^\sigma = P^\sigma,$$

где P — произвольное выражение, $\sigma \in E_m$.

Добавление к системе любой одноместной функции

$$\varphi(x) = (x \cap 0)^{C_0} \cup (x \cap 1)^{C_1} \cup \dots \cup [x \cap (m-1)]^{C_{m-1}} \quad (x, C_i \in E_m)$$

позволяет производить дальнейшие упрощения согласно соотношению

$$\bigcup_{l=0}^{m-1} P^{(x \cap l)C_l} = P^{\varphi(x)}.$$

Если включить в систему все одноместные функции, то, очевидно, любая m -значная переключательная схема может быть весьма существенно упрощена в предположении, что произвольная одноместная функция реализуется не сложнее функций объединения и пересечения, что как раз характерно для пространственного принципа.

Описываемая система позволяет упрощать реализацию m -значных симметричных функций. Соотношение, проведенное в [5], может быть успешно использовано при реа-

низации двуместных симметричных функций. Обобщенное на n -значный случай, оно выглядит следующим образом:

$$\varphi(\{\alpha\}) = \prod_{i=1}^n [\alpha_i \sqcap (\bigcup_{j=1}^n x_j)]^\sigma,$$

где $\{\alpha\}$ — множество всех различных наборов, которые получаются из набора α при всевозможных перестановках компонент $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ этого набора; $\varphi(\{\alpha\})$ — функция, принимающая значение $\sigma \in E_m$ на всех наборах, входящих в $\{\alpha\}$, и значение Θ — на остальных; $m > n$; $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \dots \neq \alpha_n$.

Приведенное соотношение может быть использовано для упрощения не только симметричных функций, но и функций, принимающих одно и то же значение на некоторой совокупности симметричных наборов $\{\alpha\}$.

Рассматриваемая система функций может быть расширена включением любых двуместных m -значных функций, что может оказаться полезным при упрощении схем.

Например, добавление к системе функций $\min(x, y)$ и $x = m - 1 - y$ дает возможность относительно просто реализовать функцию переноса при сложении. Для этого достаточно построить схему, реализующую функцию

$$\{x \sqcap [\min(x, y)]\}^0,$$

выход которой подключается ко входу многоустойчивого элемента, предварительно установленного в состояние 1.

В заключение отметим, что описанная система функций наряду с отмеченными достоинствами имеет преимущества перед другими системами m -значных функций в простоте реализации элементов [2, 5], в частности, при фазоб-импульсном и пространственном принципах представления информации они могут быть построены на основе двоичных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Многозначные элементы и структуры, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. В. И. Корнейчук, А. М. Романкевич, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 147 (1967).
3. В. И. Корнейчук, А. М. Романкевич, сб. Многозначные элементы и структуры, изд. Сов. радио, М., 1966, стр. 99.
4. А. М. Романкевич, Кибернетика, № 4, 38 (1965).
5. В. И. Корнейчук, А. М. Романкевич, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 423 (1967).
6. В. И. Корнейчук, Тр. Вопросы теории ЭЦММ, изд. ИК АН УССР, Киев, № 1, 1969.

Киевский политехнический
институт

Поступила в редакцию
6 августа 1968 г.

УДК 531.3 : 621.3

ДИНАМИКА КРИОТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

С. Н. Рычков, Б. М. Фомель

В работах [1-3] приведены схемы колышевых криотронных генераторов, предназначенных для измерения тока и времени переходных процессов в сверхпроводящих цепях, а также температуры жидкого гелия в криостатах. Отсутствие в указанных работах достаточно строгой теории генератора, с одной стороны, и уникальность генератора как измерительного прибора для сверхпроводящих цепей, с другой, явились причинами, побудившими авторов предпринять исследование динамики криотронного генератора. При этом были использованы метод точечных преобразований и моделирование на АВМ.

Дифференциальные уравнения генератора с учетом обозначенений на рис. 1 имеют следующий вид:

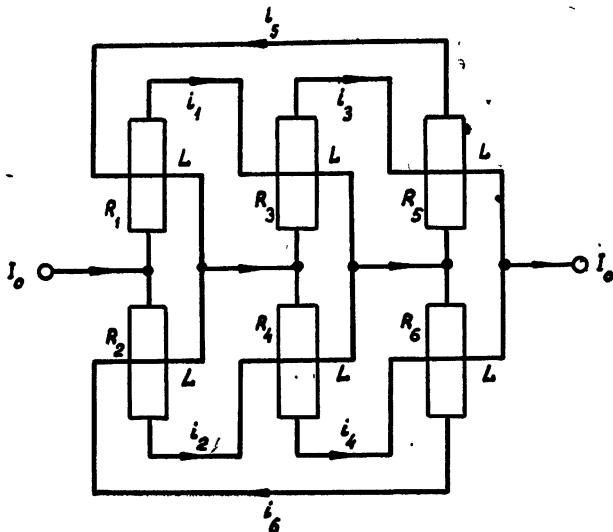


Рис. 1.

$$2L \frac{di_1}{dt} = (I_0 - i_1) R_2 (I_0 - i_5) - i_1 R_1 (i_5),$$

$$2L \frac{di_3}{dt} = (I_0 - i_3) R_4 (I_0 - i_1) - i_3 R_3 (i_1), \quad (1)$$

$$2L \frac{di_5}{dt} = (I_0 - i_5) R_6 (I_0 - i_3) - i_5 R_5 (i_3),$$

где

$$R_j(i_c) = \begin{cases} 0 & \text{(при } i_c < I_{kp}) \\ R & \text{(при } i_c \geq I_{kp}) \end{cases}$$

I_c — ток сетки j -го криотрона, I_{kp} — критическое значение тока сетки, R — сопротивление вентиля в нормальном (несверхпроводящем) состоянии, L — индуктивность сетки криотрона, I_0 — ток питания генератора, $j = 1, 2, \dots, 6$.

Каждый из токов схемы, изменяясь в пределах от 0 до I_0 , проходит через два критических для состояния криотронов значения. I_{kp} и $I_0 - I_{kp}$. Таким образом, каждая из координатных осей системы (1) разбита на 3 части, а все трехмерное фазовое пространство — на 3^3 параллелепипедов, внутри которых функции R_j принимают одно из двух возможных значений.

Пространственный предельный цикл отыскивается с помощью точечных преобразований плоских граней, причем симметричность системы позволяет сократить вдвое число последовательных преобразований.

Результирующая функция последования имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{(G-1)^2(u-G/2) + G(G-1)(v+G/2)}{(G-1)^2 - G(G-1)(u-G/2) - G^2(v+G/2)} + \frac{G}{2}, \\ \bar{v} &= \frac{(G-1)^2(v+G/2)}{(G-1)^2 - G(G-1)(u-G/2) - G^2(v+G/2)} + \frac{G}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где (u, v) — координаты исходной точки, (\bar{u}, \bar{v}) — координаты последующей точки. $G = I_0/I_{kp}$.

Функция последования (2) имеет единственную устойчивую неподвижную точку, координаты которой находятся непосредственно из (2), а устойчивость следует из того, что оба корня характеристического полинома по модулю меньше единицы. Параметры устойчивого предельного цикла (его проекция на плоскость i_1, i_5 изображена на рис. 2) приводят к следующим формулам для периода и амплитуды автоколебаний генератора:

$$T = \frac{12L}{R} \ln \frac{\sqrt{1 + 4(G-1)} + 1}{2(G-1)}, \quad A = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 4(G-1)} + 1 - G]. \quad (3)$$

Функция последования (2) и формулы (3) получены при $G < 2$. Аналогичным образом функция госследования и формулы для периода и амплитуды могут быть получены при $G \geq 2$, но в последнем случае они имеют более громоздкий вид и поэтому не приводятся.

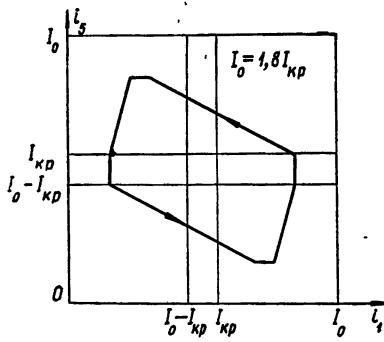


Рис. 2.

Система (1) моделировалась на аналоговой вычислительной машине типа МИБ, при этом функции вентильного сопротивления усложнялись введением внутренней обратной связи [4]

$$R_j(i_c, i_b) = \begin{cases} 0 & (\text{при } i_c + \alpha i_b < I_{kp}) \\ R & (\text{при } i_c + \alpha i_b \geq I_{kp}) \end{cases}$$

где i_b — вентильный ток, i_c — сеточный ток, $\alpha = \left| 1 \right| \frac{di_b}{di_c} \Big|_{i_c=I_{kp}}$ — коэффициент внутренней обратной связи.

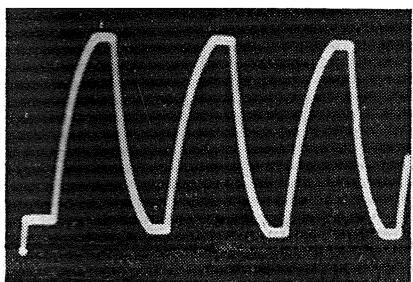


Рис. 3.

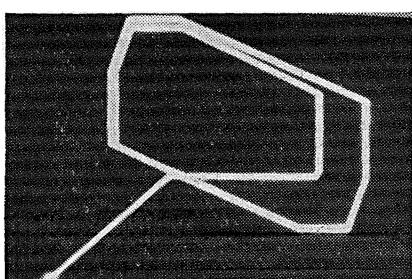


Рис. 4.

внутренней обратной связи, учитывающей влияние магнитного поля вентиля на переключение криотрона.

На рис. 3 приведена осциллограмма автоколебаний тока $i_1 = i_1(t)$, а на рис. 4 — проекция пространственного предельного цикла на плоскость токов i_1, i_5 .

Наиболее существенные результаты проведенного исследования представлены на рис. 5, где изображена зависимость частоты автоколебаний генератора f от параметра $G = I_0/I_{kp}$.

Экспериментальная кривая из работы [3] имеет такой же характер. Подтверждается также вывод работ [1, 2] о том, что внутренняя обратная связь в криотронах значительно увеличивает частоту генератора.

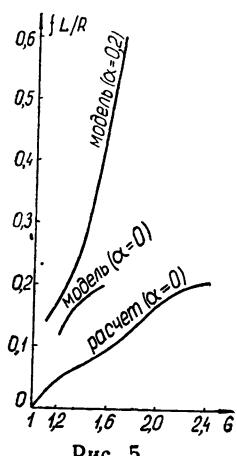


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. R. Smallman, A. E. Slade, M. L. Cohen, Proc. IRE, № 9, 1575 (1960).
2. M. L. Cohen, Proc. IRE, № 1, 435 (1961).
3. Я. С. Кан, В. А. Рахубовский, ПТЭ, № 1, 221 (1966).
4. Б. М. Фомель, Вычислительные системы, вып. 26, изд. Наука, Новосибирск, 1967.

Институт математики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
12 ноября 1968 г.