

УДК 533.951

## О СТРУКТУРЕ СОЛИТОНОВ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В. В. Зайцев

Рассмотрена структура солитонов (удиненных волн), распространяющихся в бесстолкновительной плазме перпендикулярно магнитному полю при произвольном значении параметра  $\alpha_e = H_0^2/4\pi m_e n_0 c^2$ , удовлетворяющего лишь условию  $v_{T_e}^2/c^2 \ll \alpha_e$ . Учитывается разделение зарядов во фронте солитонов и возможная релятивистская скорость распространения последних. В лабораторной системе координат, где невозмущенная плазма неподвижна, зависимость ширины солитонов от  $\alpha_e$  имеет немонотонный характер. Вначале ширина волн возрастает с ростом  $\alpha_e$  от минимального значения  $c/\omega_{L_e}$  при  $\alpha_e \ll 1$  до максимального  $c/2\omega_{L_i}$  при  $\alpha_e = m_i/m_e$ , а затем начинает уменьшаться из-за релятивистского сокращения. При  $\alpha_e \geq m_i/m_e$  основную роль в формировании фронта солитонов играют дисперсионные эффекты, обусловленные ионами. Получен критерий неустойчивости солитонов относительно возбуждения внутри фронта плазменных колебаний.

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию уединенных волн (солитонов) связан прежде всего с тем, что они в ряде случаев являются основной структурной характеристикой бесстолкновительных ударных волн в плазме. Если, например, в разреженной плазме существует достаточно сильное магнитное поле, то в ней могут распространяться ударные волны с шириной фронта значительно меньшей длины свободного пробега, которые представляют собой последовательность уединенных волн с постепенно уменьшающейся амплитудой [1]. При определенных условиях уединенные и бесстолкновительные ударные волны являются источниками интенсивного нетеплового радиоизлучения [2–4] и могут играть важную роль в ускорении частиц и в аномальном нагреве электронов в плазме [5]. Поэтому нахождение основных параметров уединенных волн в широком интервале значений концентрации плазмы и напряженности магнитного поля является полезным для многих задач астрофизики и радиоастрономии.

Нелинейные волны в бесстолкновительной плазме в пренебрежении тепловым движением частиц (одночастотное приближение) рассматривались во многих работах (см., например, [6–10]). Тверской [6] исследовал структуру одномерных нелинейных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в нерелятивистском приближении и в предположении квазинейтральности плазмы. В аналогичном приближении Адлам и Аллен [7], а также Сагдеев [8], получили решения для волн типа симметричных одиночных импульсов (удиненных волн), распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Эффект нарушения квазинейтральности во фронте уединенных волн в нерелятивистском приближении был рассмотрен Сагдеевым [9] для случая перпендикулярного распространения. Структура уединенных волн, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю в приближении квазинейтральности и пренебрежении релятивизмом была исследована Кэл-

логом [10]. Взаимодействие уединенных волн друг с другом рассматривалось Березиным и Карпманом [11].

В настоящей работе исследуется структура уединенных волн в разреженной и достаточно холодной ( $n_0 \times T_e \ll H_0^2/4\pi$ ) плазме, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Как показано в [7-9], дисперсионные эффекты, препятствующие опрокидыванию фронта волны и определяющие характерный пространственный масштаб последней, зависят в этом случае от величины параметра.

$$\alpha_e = \frac{H_0^2}{4\pi m_e n_0 c^2}, \quad (1)$$

равного отношению плотности энергии невозмущенного магнитного поля к плотности энергии покоя электронного газа. Здесь  $H_0$  и  $n_0$  — напряженность магнитного поля и концентрация ионов (равная концентрации электронов) перед фронтом волны,  $m_e$  — масса покоя электрона,  $c$  — скорость света. При этом в [7-9] были рассмотрены два предельных случая:  $\alpha_e \ll 1$  и  $1 \ll \alpha_e \ll m_i/m_e$ .

В первом из них дисперсионные эффекты обусловлены инерцией электронов и характерным масштабом импульса является величина [7, 8]  $c/\omega_{L_e}$  ( $\omega_{L_e} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$  — ленгмюровская частота электронов).

Во втором случае дисперсионные эффекты связаны с нарушением квазинейтральности внутри фронта волны, а соответствующий масштаб равен [9]  $H_0/4\pi e n_0$  ( $e$  — заряд иона, совпадающий по величине с зарядом электрона). С другой стороны, в астрофизических условиях пределы изменения параметра  $\alpha_e$  значительно шире, нежели рассмотрено в [7-9]. В частности, например, в ионосфере Юпитера [12]  $\alpha_e \gtrsim 1$ . В области солнечных пятен параметр  $\alpha_e$  может достигать величины порядка  $m_i/m_e$ , при которой уединенные и ударные волны становятся релятивистскими. По-видимому, в атмосферах некоторых звезд и квазаров с достаточно сильными магнитными полями возможен также случай  $\alpha_e \gg m_i/m_e$ , когда влияние релятивистских эффектов становится определяющим.

В настоящей работе рассмотрена структура уединенных волн при произвольном значении параметра  $\alpha_e$ , удовлетворяющего лишь условию  $v_{T_e}^2/c^2 \ll \alpha_e$  ( $v_{T_e}$  — тепловая скорость электронов). В этом случае для описания бесстолкновительной плазмы можно пренебречь давлением и воспользоваться одночастичным приближением для электронов и ионов. Предполагается, что уединенные волны распространяются перпендикулярно магнитному полю. Учитывается нарушение квазинейтральности внутри фронта волны, которое становится существенным при  $\alpha_e > 1$ . Скорость распространения волны предполагается произвольной, в том числе и релятивистской. Однако скорости электронов и ионов внутри фронта волны, пропорциональные возмущению магнитного поля в волне ( $H_{\max} - H_0$ )  $H_0$  ( $H_{\max}$  — амплитуда магнитного поля), считаются малыми, поэтому в случае релятивистских скоростей распространения результаты работы применимы лишь для достаточно слабых уединенных волн.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Выберем лабораторную систему координат с осью  $x$ , совпадающей с направлением распространения уединенной волны, и осью  $z$ , направленной по магнитному полю  $\mathbf{H}$  (рис. 1). Если волна стационарна, все величины в данной системе координат будут зависеть только от пере-

менной  $\xi = x - u_0 t$  (где  $u_0$  — скорость распространения волны,  $t$  — время), так что  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Поэтому полную произвольную по времени в уравнениях движения можно выразить через производную по  $\xi$  следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \rightarrow (v_x - u_0) \frac{d}{d\xi}. \quad (1.1)$$

В пренебрежении столкновениями и газовым давлением ( $n_0 \ll H_0^2/4\pi$ ) уравнения движения для электронов и ионов с учетом (1.1) запишутся в виде

$$(u_e - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_e u_e}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = -eE_x - \frac{e}{c} v_e H; \quad (1.2)$$

$$(u_i - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_i v_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = -eE_y + \frac{e}{c} u_i H; \quad (1.3)$$

$$(u_i - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_i u_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = eE_x + \frac{e}{c} v_i H; \quad (1.4)$$

$$(u_i - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_i v_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = eE_y - \frac{e}{c} u_i H, \quad (1.5)$$

где  $u_{i,e}$ ,  $v_{i,e}$  — проекции полных скоростей  $v_{i,e}$  электронов и ионов на оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $\beta_{i,e}^2 = (u_{i,e}^2 + v_{i,e}^2)/c^2$ ,  $H \equiv H_z$ ,  $m_{i,e}$  — масса частицы в собственной системе координат, где данная частица покойится.

В уединенной волне должны выполняться следующие граничные условия при  $\xi \rightarrow \pm \infty$ :

$$\begin{aligned} u_{i,e} &= 0, & v_{i,e} &= 0, & n_{i,e} &= n_0, \\ H &= H_0, & E_x &= 0, & E_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Учитывая первые три условия (1.6), получим из уравнений непрерывности для электронов и ионов соотношения

$$n_i = \frac{n_0 u_0}{u_0 - u_i} \sqrt{1 - \beta_i^2}, \quad n_e = \frac{n_0 u_0}{u_0 - u_e} \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (1.7)$$

Здесь  $n_e$ ,  $n_i$  — концентрации электронов и ионов в собственных системах координат.

В уравнениях электромагнитного поля

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} \left( \frac{n_i v_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} - \frac{n_e v_e}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

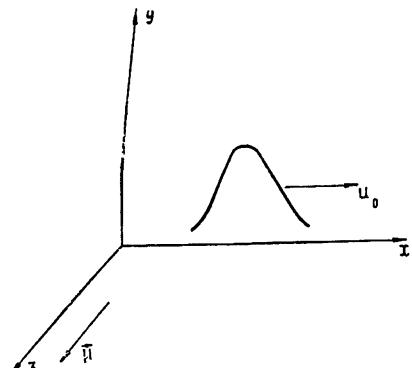


Рис. 1. Лабораторная система координат.

вообще говоря, нельзя пренебречь током смещения, роль которого становится существенной в случае релятивистских уединенных волн. Спроектируем (1.8), (1.9) на оси координат и учтем граничные условия для  $H, E_x, E_y$  (необходимо при этом иметь в виду, что  $H_y, H_x, E_z = 0$ ). В результате находим

$$(1 - \beta_0^2) \frac{dH}{d\xi} = -\frac{4\pi e}{c} \left( \frac{n_i v_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \frac{n_e v_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \right); \quad (1.10)$$

$$\frac{dE_x}{d\xi} = 4\pi e \left( \frac{n_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \frac{n_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \right); \quad (1.11)$$

$$E_y = \frac{u_0}{c} (H - H_0), \quad (1.12)$$

где  $\beta_0^2 = u_0^2/c^2$  и, кроме того, учтено, что согласно соотношениям (1.7)

$$\frac{1}{u_0} \left( \frac{n_i u_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \frac{n_e u_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \right) = \frac{n_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \frac{n_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}}. \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.2)–(1.7), (1.10)–(1.12) можно получить законы сохранения импульса и энергии частиц и поля, которые в конечном итоге позволяют уменьшить порядок уравнения, описывающего структуру уединенной волны. Разделим уравнения (1.2) и (1.4) соответственно на  $(u_e - u_0)$  и  $(u_i - u_0)$  и сложим:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{m_e u_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} \right) = \frac{e E_x}{u_0 - u_e} - \frac{e E_x}{u_0 - u_i} + \frac{e}{c} \left( \frac{v_e H}{u_0 - u_e} - \frac{v_i H}{u_0 - u_i} \right). \quad (1.14)$$

Далее с помощью (1.7), (1.10), (1.11) убеждаемся в справедливости соотношений

$$\frac{e}{u_0 - u_e} - \frac{e}{u_0 - u_i} = -\frac{1}{4\pi n_0 u_0} \frac{dE_x}{d\xi}, \quad \frac{e}{c} \left( \frac{v_e}{u_0 - u_e} - \frac{v_i}{u_0 - u_i} \right) = \frac{1 - \beta_0^2}{4\pi n_0 u_0} \frac{dH}{d\xi}, \quad (1.15)$$

позволяющих проинтегрировать (1.14) по  $\xi$ . С учетом граничных условий (1.6) получаем закон сохранения импульса вдоль оси  $x$ :

$$\frac{m_e u_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = (1 - \beta_0^2) \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 u_0} - \frac{E_x^2}{8\pi n_0 u_0}. \quad (1.16)$$

Производя аналогичные преобразования для уравнений (1.3), (1.5), имеем закон сохранения импульса вдоль оси  $y$ :

$$\frac{m_e v_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \frac{H_0 E_x}{4\pi n_0 c}. \quad (1.17)$$

Из формул релятивистской механики [13] следует, что для изменения полной энергии частицы

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.18)$$

справедливо уравнение

$$\frac{d \varepsilon}{dt} = v \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.19)$$

которое можно записать в виде

$$(u_{l,e} - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_{l,e} c^2}{\sqrt{1-\beta_{l,e}^2}} = v_{l,e} (u_{l,e} - u_0) \frac{d}{d\xi} \frac{m_{l,e} v_{l,e}}{\sqrt{1-\beta_{l,e}^2}}. \quad (1.20)$$

Далее из (1.2)–(1.5) следуют соотношения

$$u_e \frac{d}{d\xi} \frac{m_e u_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + u_i \frac{d}{d\xi} \frac{m_i u_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \\ = \frac{eu_e E_x}{u_0 - u_e} - \frac{eu_i E_x}{u_0 - u_i} + \frac{e}{c} \left( \frac{u_e v_e H}{u_0 - u_e} - \frac{u_i v_i H}{u_0 - u_i} \right); \quad (1.21)$$

$$v_e \frac{d}{d\xi} \frac{m_e v_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + v_i \frac{d}{d\xi} \frac{m_i v_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \\ = \frac{ev_e E_y}{u_0 - u_e} - \frac{ev_i E_y}{u_0 - u_i} - \frac{e}{c} \left( \frac{u_e v_e H}{u_0 - u_e} - \frac{u_i v_i H}{u_0 - u_i} \right). \quad (1.22)$$

Складывая (1.21), (1.22) и принимая во внимание (1.15) и (1.20), получим уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{m_l c^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \right) = - \frac{E_x}{4\pi n_0} \frac{dE_x}{d\xi} + (1 - \beta_0^2) \frac{H - H_0}{4\pi n_0} \frac{dH}{d\xi}, \quad (1.23)$$

которое легко интегрируется:

$$\frac{m_l c^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = - \frac{E_x^2}{8\pi n_0} + (1 - \beta_0^2) \frac{H^2 - 2HH_0}{8\pi n_0} + \text{const}. \quad (1.24)$$

В формуле (1.24) константа интегрирования определяется из граничных условий (1.6):

$$\text{const} = m_l c^2 + m_e c^2 + (1 - \beta_0^2) \frac{H_0^2}{8\pi n_0}. \quad (1.25)$$

В результате закон сохранения энергии принимает следующий вид:

$$m_l c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - 1 \right) + m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} - 1 \right) = - \frac{E_x^2}{8\pi n_0} + (1 - \beta_0^2) \frac{(H - H_0)^2}{8\pi n_0}. \quad (1.26)$$

Разумеется, соотношения (1.16), (1.17) и (1.26) можно было бы получить более формально, приравняв нулю дивергенцию четырехмерного тензора энергии–импульса частиц и электромагнитного поля. Мы, однако, не приводим соответствующий вывод из-за его меньшей наглядности.

## 2. СТРУКТУРА УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

В случае уединенных волн достаточно малой интенсивности, которые мы здесь рассматрим, значение  $\beta_{i,e}^2$  не превышает  $(H_{\max} - H_0)^2/H_0^2 \ll 1$ . Поэтому в уравнениях (1.2)–(1.5), (1.16), (1.17), (1.26) можно ограничиться первыми неисчезающими членами разложения по  $\beta_{i,e}^2 \ll 1$ . С другой стороны, отношение  $\beta_0^2 = u_0^2/c^2$  даже при малых  $\beta_{i,e}^2$  может быть порядка единицы, поэтому в общем случае его необходимо учитывать.

Пренебрегая в уравнениях (1.2), (1.4) членами порядка  $m_e/m_i$  по сравнению с единицей можно выразить скорость дрейфа электронов  $v_e$  через  $E_x$  и  $H$ :

$$v_e = -c \frac{E_x}{H}. \quad (2.1)$$

Поскольку  $u_i \sim u_e$ , из формулы (1.16) с указанной степенью точности определяется  $u_i$ :

$$u_i = (1 - \beta_0^2) \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_0 u_0} - \frac{E_x^2}{8\pi m_i n_0 u_0}. \quad (2.2)$$

Далее из уравнения (1.17) с помощью (2.1) находим скорость дрейфа ионов:

$$v_i = \left( \frac{m_e}{m_i} + \frac{H_0 H}{4\pi n_0 m_i c^2} \right) c \frac{E_x}{H}. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3), вообще говоря, нельзя пренебречь членом  $m_e/m_i$  по сравнению с  $H_0 H / 4\pi m_i n_0 c^2$ , так как в общем случае последнее отношение может быть значительно меньшим единицы.

Закон сохранения энергии при  $\beta_{i,e}^2 \ll 1$  записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} m_i (u_i^2 + v_i^2) + \frac{1}{2} m_e (u_e^2 + v_e^2) = -\frac{E_x^2}{8\pi n_0} + (1 - \beta_0^2) \frac{(H - H_0)^2}{8\pi n_0}. \quad (2.4)$$

Здесь можно не учитывать слагаемое  $m_e u_e^2$ , поскольку  $m_e u_e^2 \ll m_i u_i^2$ .

Исключая из (2.4)  $v_e$ ,  $u_i$ ,  $v_i$  с помощью (2.1)–(2.3), получим уравнение для  $E_x$  как функции  $H$ :

$$E_x^4 + 2\varphi(H) E_x^2 + \psi(H) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\varphi(H) = -(1 - \beta_0^2) (H^2 - H_0^2) + 2\beta_0^2 H_0^2 + 8\pi m_i n_0 u_0^2 \left( 1 + \frac{4\pi n_0 m_e c^2}{H^2} \right); \quad (2.6)$$

$$\psi(H) = (1 - \beta_0^2)^2 (H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi m_i n_0 u_0^2 (1 - \beta_0^2) (H - H_0)^2. \quad (2.7)$$

Граничным условиям задачи удовлетворяет лишь один корень уравнения (2.5), а именно

$$E_x^2 = -\varphi(H) + \sqrt{\varphi^2(H) - \psi(H)}. \quad (2.8)$$

Уравнение уединенной волны легко теперь получить из (1.4), подставляя  $u_i$ ,  $v_i$ , выраженные с помощью соотношений (2.2), (2.3), (2.8) через магнитное поле. В результате находим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left[ \left( 1 - \frac{\beta_0^2}{\beta_0^2} \right) \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_0 u_0^2} - \frac{-\varphi(H) + \sqrt{\varphi^2(H) - \psi(H)}}{8\pi m_i n_0 u_0^2} - 1 \right]^2 = \\ = \pm \frac{e}{m_i u_0^2} \left( 1 + \frac{H_0 H}{4\pi m_i n_0 c^2} \right) [-\varphi(H) + \sqrt{\varphi^2(H) - \psi(H)}]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) характеризует одиночный импульс сжатия магнитного поля (уединенную волну сжатия), распространяющийся перпендикулярно магнитному полю. На вершине уединенной волны производная  $\frac{dH}{d\xi}$  меняет знак, а магнитное поле достигает максимального значения. Связь между амплитудой магнитного поля  $H$  в уединенной волне и скоростью распространения  $u_0$  можно получить из условия обращения в нуль производной  $\frac{dH}{d\xi}$  на гребне волны. Легко убедиться, что это условие сводится к уравнению  $E_x^2(H_{\max}) = 0$ , из которого следует

$$\frac{u_0^2}{c^2} = \left[ 1 + \frac{16\pi m_i n_0 c^2}{(H_{\max} + H_0)^2} \right]^{-1}. \quad (2.10)$$

В случае нерелятивистских уединенных волн ( $H_0^2/4\pi m_i n_0 c^2 \ll 1$ ) из (2.10) находим известное соотношение [1]

$$u_0 = \frac{H_{\max} + H_0}{\sqrt{16\pi m_i n_0}}. \quad (2.11)$$

Если же уединенная волна является релятивистской ( $H_0^2/4\pi m_i n_0 c^2 \gg 1$ ), тогда

$$u_0 = c \left[ 1 - \frac{16\pi m_i n_0 c^2}{(H_{\max} + H_0)^2} \right]^{1/2}. \quad (2.12)$$

При  $H_{\max} \rightarrow H_0$  (2.12) совпадает с формулой, полученной ранее Коврижным [14] для скорости распространения релятивистских ударных волн малой интенсивности.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2.9). Пусть  $H_0^2/4\pi m_i n_0 c^2 \ll 1$ , т. е. дисперсионные эффекты, ограничивающие рост крутизны фронта, обусловлены инерцией электронов. Тогда уравнение (2.9) принимает вид [1, 7, 8]

$$\frac{dH}{d\xi} = \pm \frac{\omega_L e}{c} (H - H_0) \left[ \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_0 u_0^2} - 1 \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi m_i n_0 u_0^2} \right]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Ширина уединенной волны, как это видно из (2.13), равна в этом случае  $c/\omega_L e$ .

Если  $1 \ll H_0^2/4\pi m_i n_0 c^2 \ll m_i/m_e$ , из (2.9) следует уравнение, полученное ранее в работе [9]:

$$\frac{dH}{d\xi} = \pm \frac{4\pi e n_0}{H_0} \left\{ (H^2 - H_0^2) + 8\pi m_i n_0 u_0^2 \left[ \sqrt{1 - \frac{H_0(H - H_0)}{2\pi m_i n_0 u_0^2}} - 1 \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.14)$$

Дисперсионные эффекты обусловлены здесь нарушением квазиней-

тральнойности внутри фронта волны, а характерный масштаб волны равен  $H_0/4\pi e n_0$ .

Рассмотрим, наконец, случай уединенных волн с релятивистской скоростью распространения  $v_{i,e}$  ( $H_0^2/4\pi m_e n_0 c^2 \gg m_i/m_e$ ). Как следует из (2.9), уравнение профиля уединенной волны имеет тогда следующий вид:

$$\frac{dH}{d\xi} = \pm \frac{\omega_{L_i}}{c \sqrt{1 - \beta_0^2}} \frac{H - H_0}{[(H^2 - H_0^2)/8\pi m_i n_0 c^2] (1 - \beta_0^2/\beta_0^2 - 1)} \times \times \left[ 1 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi m_i n_0 c^2} \frac{1 - \beta_0^2}{\beta_0^2} \right]^{1/2}, \quad (2.15)$$

где  $\omega_{L_i} = (4\pi e^2 n_0 / m_i)^{1/2}$  — ленгмюровская частота ионов. Ширина уединенной волны  $\delta$  определяется в этом приближении характерной длиной ионной дисперсии  $c/\omega_{L_i}$  и равна

$$\delta = \frac{c}{\omega_{L_i}} \sqrt{1 - \beta_0^2} \approx \frac{c}{\omega_{L_i}} \left( \frac{4\pi m_i n_0 c^2}{H_0^2} \right)^{1/2} \left( \frac{u_0^2}{c^2} \rightarrow 1 \right). \quad (2.16)$$

Несмотря на то, что уравнения (2.14), (2.15) не справедливы при достаточно больших амплитудах\*, из них формально следует, что решение существует лишь при  $H_{\max} < 3H_0$ . Поскольку это условие является строгим для уравнения (2.13), можно думать, что оно отражает суть дела и в последних двух случаях. Физически указанное условие очевидно [8]. Оно связано с тем, что при больших амплитудах ионы, набегающие на горб потенциала в уединенной волне, не могут перевалить через него и отражаются. В результате движение становится многопотоковым и уже не описывается в рамках уравнений (1.2) — (1.5).

Чтобы получить зависимость ширины фронта  $\delta(n_0, H_0)$  от концентрации плазмы и напряженности магнитного поля для произвольных значений параметра  $\alpha_e = H_0^2/4\pi m_e n_0 c^2$ , перейдем в уравнении (2.9) к пределу  $H_{\max} \rightarrow H_0$ . В результате (2.9) приводится к уравнению

$$\frac{dH}{d\xi} = \pm \frac{(H - H_0)}{\delta(n_0, H_0)} \frac{(H_{\max} - H)^{1/2}}{\sqrt{H_0}}, \quad (2.17)$$

допускающему простое аналитическое решение:

$$H = H_0 \left\{ 1 + \frac{H_{\max} - H_0}{H_0} \operatorname{sch}^2 \left[ \sqrt{\frac{H_{\max} - H_0}{H_0}} \frac{\xi}{2\delta(n_0, H_0)} \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Здесь

$$\delta(n_0, H_0) = \frac{H_0}{4\pi e n_0} \frac{(1 + \alpha_e^{-1} + \alpha_e m_e/m_i)^{1/2}}{1 + \alpha_e m_e/m_i} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_e = \frac{H_0^2}{4\pi n_0 m_e c^2}.$$

\* В этом случае скорости  $v_{i,e}$  могут иметь значения, близкие к скорости света  $c$ , и разложение фактора  $\sqrt{1 - \beta_{i,e}^2}$  в ряд является грубым приближением (см. более подробно раздел 4).

Учитывая, что на основании (2.10) при  $H_{\max} \rightarrow H_0$

$$1 - \frac{u_0^2}{c^2} \simeq \frac{1}{1 + \alpha_e m_e / m_i}, \quad (2.20)$$

получим следующую формулу для ширины уединенной волны:

$$\delta(n_0, H_0) = \frac{c}{\omega_{L_e}} \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi n_0 m_e c^2} \frac{(1 + 4\pi n_0 m_e c^2 / H_0^2 + H_0^2 / 4\pi n_0 m_i c^2)^{1/2}}{(1 + H_0^2 / 4\pi n_0 m_i c^2)^{3/2}}}. \quad (2.21)$$

Из нее в различных предельных случаях получаются значения  $\delta$ , приведенные выше.

Ширина уединенных волн, как это видно из (2.21), меняется немонотонно при изменении параметра  $\alpha_e$ . Вначале  $\delta(n_0, H_0)$  возрастает с ростом  $\alpha_e$  от минимального значения  $c/\omega_{L_e}$  при  $\alpha_e \ll 1$  до максимального  $c/2\omega_{L_i}$  при  $\alpha_e = m_i/m_e$ , затем начинает уменьшаться из-за релятивистского сокращения. Зависимость ширины фронта от  $\alpha_e$  приведена на рис. 2. Здесь же в качестве примера указаны объекты, в которых

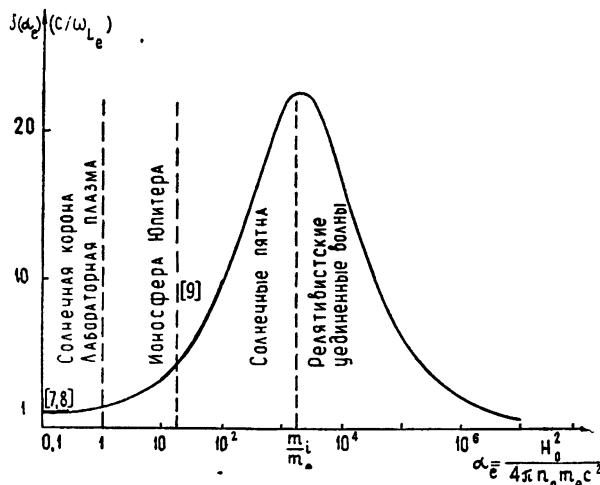


Рис. 2. Ширина бесстолкновительной уединенной волны в лабораторной системе координат.

реализуются соответствующие значения  $H_0^2 / 4\pi n_0 m_e c^2$ . Жирной линией на рис. 2 представлены результаты работ [7-9]. Таким образом, если при  $\alpha_e \ll 1$  основную роль в формировании фронта уединенных волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, играет электронная дисперсия, то в случае больших полей или достаточно малых концентраций плазмы, когда  $H_0^2 / 4\pi n_0 m_e c^2 \sim m_i/m_e$ , определяющей является дисперсия ионов. При  $\alpha_e \gg m_i/m_e$  важную роль начинают играть релятивистские эффекты, приводящие к сокращению характерного масштаба уединенных волн.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТА

Относительный дрейф электронов и ионов (ток) во фронте уединенной волны приводит к тому, что при амплитудах, превышающих некоторое критическое значение, фронт волны становится неустойчивым относительно возбуждения в нем плазменных колебаний. Разви-

вающаяся неустойчивость является причиной радиоизлучения ударных волн, аномального нагрева плазмы и ускорения частиц внутри фронта.

Относительную скорость дрейфа электронов и ионов

$$v_{dp} = v_i - v_e \quad (3.1)$$

легко найти с помощью уравнений (2.1), (2.3), подставив в них  $E_x(H)$  из (2.8). Если амплитуда волны достаточно мала, так что  $(H_{\max} - H_0)/H_0 \ll 1$ , скорость дрейфа достигает максимального значения  $v_{dp}^*$  в сечении фронта, где магнитное поле равно

$$H^* = H_0 + \frac{2}{3} (H_{\max} - H_0). \quad (3.2)$$

При этом

$$v_{dp}^* = \frac{2c}{3\sqrt{3}} \frac{(1 + \alpha_e m_e/m_i)^{1/2}}{(1 + \alpha_e^{-1} + \alpha_e m_e/m_i)^{1/2}} \left( \frac{H_{\max} - H_0}{H_0} \right)^{3/2}. \quad (3.3)$$

Неустойчивость во фронте волны возникает, когда  $v_{dp}^*$  превышает тепловую скорость электронов  $v_{T_e} = (kT_e/m_e)^{1/2}$ . Это имеет место при условии

$$\frac{H_{\max} - H_0}{H_0} > \frac{3}{2} \left[ \frac{2kT_e}{m_e c^2} \frac{1 + \alpha_e^{-1} + \alpha_e m_e/m_i}{1 + \alpha_e m_e/m_i} \right]^{1/3}. \quad (3.4)$$

В случае нерелятивистских уединенных волн, когда  $\alpha_e \ll m_i/m_e$ , удобно ввести число Маха  $M$ , равное отношению скорости уединенной волны  $u_0$  к альфеновской скорости  $v_A = H_0/\sqrt{4\pi n_0 m_i}$ . Критерий неустойчивости принимает тогда следующий вид (см. формулу (2.11)):

$$M > M^* = 1 + \frac{3}{4} \left[ \frac{2kT_e (H_0^2 + 4\pi n_0 m_e c^2)}{H_0^2 m_e c^2} \right]^{1/3}. \quad (3.5)$$

В частности, если  $H_0^2 \ll 4\pi n_0 m_e c^2$ , критическое число Маха равно

$$M^* = 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{8\pi n_0 k T_e}{H_0^2} \right)^{1/3}. \quad (3.6)$$

Заметим, что второе слагаемое в (3.6) в два раза превышает аналогичную величину, фигурирующую в критерии неустойчивости Сагдеева [1].

#### 4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ $v_{i,e}^2 \ll 1$

При исследовании структуры уединенных волн в разделе 2 мы считали, что уединенная волна, распространяясь в плазме даже с релятивистской скоростью, создает в ней нерелятивистские возмущения. Иными словами, мы считали, что даже в случае  $u_0^2/c^2 \rightarrow 1$  величины  $u_{i,e}^2/c^2$  и  $v_{i,e}^2/c^2$  остаются малыми по сравнению с единицей. Поскольку  $u_{i,e}$  и  $v_{i,e}$  пропорциональны возмущению магнитного поля в волне  $(H_{\max} - H_0)/H_0$ , ясно, что указанное приближение накладывает определенные ограничения на амплитуды уединенных волн. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Проекция  $u_i$  скорости ионов на ось  $x$  достигает максимального значения на гребне волны, где электрическое поле обращается в нуль (см. формулу (2.2)).

$$u_i^{\max} = (1 - \beta_0^2) \frac{H_{\max}^2 - H_0^2}{8\pi m_i n_0 u_0}. \quad (4.1)$$

Выражая в (4.1)  $(1 - \beta_0^2)$ , а также  $u_0$ , через  $H_{\max}$  с помощью соотношения (2.10) получим

$$\left(\frac{u_i^{\max}}{c}\right)^2 = 4 \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(H_{\max} + H_0)^2} \left[ 1 + \frac{16\pi m_i n_0 c^2}{(H_{\max} + H_0)^2} \right]^{-1}. \quad (4.2)$$

При нерелятивистских скоростях распространения, когда  $\alpha_e \ll m_i/m_e$  ( $16\pi m_i n_0 c^2/(H_{\max} + H_0)^2 \gg 1$ ), имеем

$$\left(\frac{u_i^{\max}}{c}\right)^2 \simeq 4 \frac{m_e}{m_i} \alpha_e \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(H_{\max} + H_0)^2}, \quad (4.3)$$

и условие  $(u_i^{\max}/c)^2 \ll 1$  остается справедливым даже при достаточно больших амплитудах магнитного поля в волне ( $H_{\max} \lesssim 3H_0$ , см. раздел 2). Если же скорость распространения волны  $u_0$  близка к скорости света  $c$ , т. е.  $\alpha_e \gg m_i/m_e$  ( $16\pi m_i n_0 c^2/(H_{\max} + H_0)^2 \ll 1$ ), тогда

$$\left(\frac{u_i^{\max}}{c}\right)^2 \simeq 4 \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(H_{\max} + H_0)^2}, \quad (4.4)$$

и условие  $(u_i^{\max}/c)^2 \ll 1$  выполняется только в случае слабых уединенных волн:

$$4 \frac{(H_{\max} - H_0)^2}{(H_{\max} + H_0)^2} \ll 1. \quad (4.5)$$

Поскольку  $u_e \sim u_i$ , все сказанное остается справедливым также и для проекции  $u_e$  скорости электронов на ось  $x$ .

Как указывалось в разделе 3, скорости дрейфа электронов и ионов в случае слабых уединенных волн достигают максимальных значений в сечении фронта, где  $H = H_0 + 2(H_{\max} - H_0)/3$ . Эти значения соответственно равны

$$\left(\frac{v_e^{\max}}{c}\right)^2 \simeq \frac{4}{27} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3 (1 + \alpha_e^{-1} + \alpha_e m_e/m_i) (1 + \alpha_e m_e/m_i)}; \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{v_i^{\max}}{c}\right)^2 \simeq \frac{4}{27} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \frac{(1 + \alpha_e)^2 (H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3 (1 + \alpha_e^{-1} + \alpha_e m_e/m_i) (1 + \alpha_e m_e/m_i)}. \quad (4.7)$$

Если  $\alpha_e \ll 1$  ( $H_0^2/4\pi n_0 m_e c^2 \ll 1$ ), тогда

$$\left(\frac{v_e^{\max}}{c}\right)^2 \simeq \frac{4}{27} \frac{H_0^2}{4\pi n_0 m_e c^2} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}; \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{v_i^{\max}}{c}\right)^2 \simeq \frac{4}{27} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \frac{H_0^2}{4\pi n_0 m_e c^2} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}. \quad (4.9)$$

Из формул (4.8), (4.9) видно, что в этом предельном случае скорости дрейфа во фронте волны много меньше скорости света.

Если же  $1 \ll \alpha_e \ll m_i/m_e$ , из формул (4.6), (4.7) получим

$$\left(\frac{v_e^{\max}}{c}\right)^2 \approx \frac{4}{27} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}; \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{v_i^{\max}}{c}\right)^2 \approx \frac{4}{27} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \alpha_e^2 \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}. \quad (4.11)$$

В этом предельном случае скорость дрейфа ионов много меньше с вплоть до амплитуд, при которых наступает опрокидывание фронта ( $H_{\max} \lesssim 3H_0$ ), тогда как скорость дрейфа электронов может быть порядка  $c$  при достаточно больших амплитудах волн; критерий применимости используемого в разделе 3 приближения  $(v_e^{\max}/c)^2 \ll 1$  имеет тогда вид

$$\frac{4}{27} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3} \ll 1. \quad (4.12)$$

Рассмотрим, наконец, случай  $\alpha_e \gg m_i/m_e$ , когда скорость распространения волны  $u_0$  является релятивистской. Из (4.6), (4.7) следует, что при  $\alpha_e \gg m_i/m_e$

$$\left(\frac{v_e^{\max}}{c}\right)^2 \approx \frac{4}{27} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2 \frac{1}{\alpha_e^2} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}; \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{v_i^{\max}}{c}\right)^2 \approx \frac{4}{27} \frac{(H_{\max} - H_0)^3}{H_0^3}. \quad (4.14)$$

В этом приближении  $(v_e^{\max}/c)^2 \ll 1$ , а скорость дрейфа ионов много меньше скорости света при условии (4.12).

В заключение автор благодарит С. А. Каплана и В. Ю. Трахтенберга за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, сб Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, М., 1964, стр. 20.
2. С. Б. Пикельнер, М. А. Гинцбург, Астрон. ж., 40, 842 (1962).
3. В. В. Зайцев, Астрон. ж., 42, 740 (1965).
4. В. В. Зайцев, С. А. Каплан, Астрофизика, 2, 169 (1966).
5. М. А. Gintzburg, J. Geophys. Res., 72, 2749 (1967).
6. Б. А. Тверской, ЖЭТФ, 42, 833 (1962).
7. J. Adlam, J. Allen, Phil. Mag., 3, 448 (1958).
8. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
9. Р. З. Сагдеев, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 384.
10. Р. J. Kellogg, Phys. Fluids, 7, 1555 (1964).
11. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 51, 1557 (1966).
12. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
13. Л. Д. Ландау, Е. Л. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
14. Л. М. Kovrijnykh, ЖЭТФ, 39, 1042 (1960).

## ON SOLITARY WAVE STRUCTURE IN A RAREFIED PLASMA

V. V. Zaitsev

The author considers the structure of solitary waves propagating in a collisionless plasma perpendicular to the magnetic field at an arbitrary value of the parameter  $\alpha_e = H_0^2/4\pi m_e n_0 c^2$  satisfying only the condition  $v_{T_e}^2/c^2 \ll \alpha_e$ . The separation of charges in solitary wave front and a possible relativistic velocity of their propagation are taken into account. In the laboratory coordinate system, where the unperturbed plasma is immovable, the dependence of the solitary wave width on  $\alpha_e$  is of the nonmonotonic character. At first, the wave width is increased with the growth of  $\alpha_e$  from the minimum value  $c/\omega_{L_e}$  at  $\alpha_e \ll 1$  up to the maximum value  $c/2\omega_{L_i}$  at  $\alpha_e = m_i/m_e$  and then it decreases because of the relativistic shortening. With  $\alpha_e \geq m_i/m_e$  the dispersion effects caused by ions play the main part in formation of solitary wave front. The criteria of solitary wave instability relative to excitation inside the front of plasma oscillations has been obtained.