ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 533.951

ВЛИЯНИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ СЛАБОИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Ф. Баимбетов, Н. Л. Цинцадзе

Исследовано влияние нарастающих ионно-звуковых колебаний на электропроводность слабоионизированной плазмы. Показано, что при $t > \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{v_{T_e}}{v_0} \frac{1}{\nu_{en}}$ электропроводность плазмы заметно уменьшается.

В работах [1–5] было показано, что в полностью ионизированной плазме собственные колебания существенно влияют на явления переноса. Это связано с тем, что наличие колебаний приводит к увеличению эффективной частоты столкновений. В первой группе работ [1, 2] исследовалось влияние установившихся колебаний на явления переноса, при этом распределение интенсивности турбулентных пульсаций (колебаний) предполагалось заданным. Во второй группе работ [3–5] эти вопросы рассматривались в квазилинейном приближении. Во всех этих работах было рассмотрено влияние низкочастотных колебаний на явления переноса в магнитоактивной полностью ионизированной плазме.

Известно, что в слабоионизированной плазме, помещенной в сильное электрическое поле, возникают нарастающие во времени ионно-звуковые колебания, частота и инкремент которых равны [6]

$$\omega_k = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2 r_d^2}}, \quad \delta_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{L_e}}{\omega_{L_i}}\right)^2 \frac{\omega_k^3 \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0}{k^4 v_{T_e}^4} \nu_{en}.$$

Эти выражения получены в предположении $kv_{T_i} \ll \omega_k \ll kv_{T_e} \ll \nu_{en}$. Здесь ω_{L_e} и ω_{L_i} — ленгмюровская частота электронов и ионов, v_{T_e} и v_{T_i} — тепловая скорость электронов и ионов соответственно, ν_{en} — частота столкновений электронов с нейтралами, которые предполагаются невозмущенными; столкновениями электронов с ионами пренебрегаем, что справедливо при достаточно низкой степени ионизации.

Представляет определенный интерес исследование влияния колебаний на электропроводность слабоионизированной плазмы в квазилинейном приближении.

1. Запишем кинетическое уравнение для электронов с модельным интегралом столкновений Батнагара—Гросса—Крука [7]:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{e}{m}(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E})\frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{v}} = -\sum_\beta \frac{n_\beta}{\sigma_{e\beta}}(f_e - n_e\Phi_{e\beta}), \tag{1.1}$$

$\Phi_{e\beta} = \left(\frac{m}{2\pi T_{e\beta}}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2T_{e\beta}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\beta)^2\right]$ — распределение Максвелла с приведенной температурой $T_{e\beta} = (m_\beta T_e + mT_\beta)/(m + m_\beta)$, $\tau_{e\beta}$ — постоянные величины, имеющие смысл эффективных времен столкновений, E_0 — внешнее электрическое поле, E — поле волны.

При сделанных во введении предположениях относительно столкновений электронов с ионами и нейтралами уравнение (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v\frac{\partial f_e}{\partial r} - \frac{e}{m}(E_0 + E)\frac{\partial f_e}{\partial v} = -\nu_{en}\left(f_e - \frac{n_e}{N_e}\cdot F_e^M\right). \tag{1.2}$$

Здесь F_e^M — обычное распределение Максвелла, а N_e — равновесная концентрация электронов.

Представляя функцию распределения в виде $f_e = F_e + \tilde{f}_e$, путем усреднения (1.2) получим два уравнения:

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} - \frac{e}{m}E_0\frac{\partial F_e}{\partial v} = \frac{e}{m}\left\langle E\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial v}\right\rangle - \nu_{en}(F_e - F_e^M); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial t} + v\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial r} - \frac{e}{m}E_0\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial v} = \frac{e}{m}E\frac{\partial F_e}{\partial v} - \nu_{en}\left(\tilde{f}_e - \frac{\tilde{n}_e}{N_e}F_e^M\right). \tag{1.4}$$

В этих уравнениях, переходя от v к w по формуле $v = w + v_0$, имеем

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} = \frac{e}{m}\left\langle E\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial w}\right\rangle - \nu_{en}(F_e - F_e^M); \tag{1.3a}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial t} + (w + v_0)\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial r} = \frac{e}{m}E\frac{\partial F_e}{\partial w} - \nu_{en}\left(\tilde{f}_e - \frac{\tilde{n}_e}{N_e}F_e^M\right), \tag{1.4a}$$

где v_0 — направленная скорость электронов. Так как время нарастания волн много больше времени столкновения электрона с нейтралами, v_0 можно считать постоянной и равной $-eE_0/m\nu_{en}$. В (1.3) и (1.3 а) $\mathrm{St}_{ew} = \frac{e}{m}\left\langle E\frac{\partial \tilde{f}_e}{\partial w}\right\rangle$ — член, учитывающий взаимодействие электронов с колебаниями.

Перейдем к фурье-компонентам E и $\tilde{f}_e$ по формулам

$$\begin{aligned} E &= \int dk E_k \exp\left[ikr - i\int_0^t \omega_k'(t')\,dt'\right], \\ \tilde{f}_e &= \int dk \tilde{f}_{ek} \exp\left[ikr - i\int_0^t \omega_k'(t')\,dt'\right], \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\omega_k' = \omega_k + i\delta_k$. Тогда

$$\mathrm{St}_{ew} = \frac{e}{m}\frac{V}{(2\pi)^3}\mathrm{Re}\int dk\frac{E_k}{k}k\frac{\partial \tilde{f}_{ek}}{\partial w}e^{2\delta_k t}. \tag{1.6}$$

Воспользовавшись (1.5), из (1.4) получим

$$\tilde{f}_{ek} = i\frac{e}{m}\frac{E_k}{k}\frac{k\dfrac{\partial F_e}{\partial w}}{\omega_k - k(w + v_0) + i\nu_{en}} - \frac{e\nu_{en}}{mN_e}\frac{E_k}{k}\times$$

$$\times \frac{F_e^M}{\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0) + i\nu_{en}} \int d\boldsymbol{w} \frac{\boldsymbol{k}\dfrac{\partial F_e}{\partial \boldsymbol{w}}}{\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0) + i\nu_{en}} \times \tag{1.7}$$

$$\times \left[1 - i\frac{\nu_{en}}{N_e} \int d\boldsymbol{w} \frac{F_e^M}{\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0) + i\nu_{en}}\right]^{-1}.$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и принимая $|E_k|^2 = |E_k(0)|^2\, e^{2\delta_k t}$, имеем

$$\mathrm{St}_{ew} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{e^2\nu_{en}}{m^2} \int d\boldsymbol{k} \frac{|E_k(0)|^2}{k^2} e^{2\delta_k t}\, \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}} \times$$

$$\times \frac{\boldsymbol{k}\dfrac{\partial F_e}{\partial \boldsymbol{w}}}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2} - \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{e^2\nu_{en}}{m^2 N_e} \int d\boldsymbol{k} \frac{|E_k(0)|^2}{k^2} e^{2\delta_k t}\, \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}} \times \tag{1.8}$$

$$\times \left\{ \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \frac{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]\, F_e^M}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \frac{\nu_{en} F_e^M}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2} \right\},$$

где

$$a = \int d\boldsymbol{w} \frac{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]\, \boldsymbol{k}\dfrac{\partial F_e}{\partial \boldsymbol{w}}}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2},$$

$$b = \nu_{en} \int \frac{d\boldsymbol{w}\, \boldsymbol{k}\dfrac{\partial F_e}{\partial \boldsymbol{w}}}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2},$$

$$c = 1 - \frac{\nu_{en}^2}{N_e} \int \frac{d\boldsymbol{w}\, F_e^M}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2},$$

$$d = \frac{\nu_{en}}{N_e} \int d\boldsymbol{w} \frac{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]\, F_e^M}{[\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_0)]^2 + \nu_{en}^2}.$$

В формуле (1.8) $|E_k(0)|^2$ есть квадрат флуктуации электрического поля с заданным $\boldsymbol{k}$ при $t = 0$, поэтому $|E_k(0)|^2 = 8\pi T_e/V$.

Далее, разлагая St_{ew} по степеням малой величины $|\omega_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_0)|\nu_{en}^{-1}$ и ограничиваясь первым членом разложения, дающим вклад в электропроводность, находим

$$\mathrm{St}_{ew} = \frac{e^2 T_e}{m^2\pi^2\nu_{en}} \int d\boldsymbol{k} \frac{e^{2\delta_k t}}{k}\, \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}}\, \boldsymbol{k} \frac{\partial F_e}{\partial \boldsymbol{w}} + \frac{e^2 T_e}{m^2\pi^2\nu_{en}} \times$$

$$\times \int d\boldsymbol{k} \frac{e^{2\delta_k t}}{k^2} \frac{k^2}{v_{T_e}^2} \left[1 - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{w})^2}{k^2 v_{T_e}^2}\right] F_e^M - \frac{e^2 T_e}{m^2\pi^2\nu_{en}} \times \tag{1.9}$$

$$\times \int d\boldsymbol{k} \frac{e^{2\delta_k t}}{k^2} \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}\,\nu_{en}^2\, \boldsymbol{k}\boldsymbol{w}}{k^2 v_{T_e}^4} F_e^M.$$

Подставляя (1.9) в (1.3) и принимая во внимание цилиндрическую симметрию колебаний, обусловленную наличием достаточно сильного внешнего поля, положим $k_x \simeq k_y$. Для F_e получим уравнение

$$\frac{\partial F_e}{\partial \tau} = -F_e + a_\perp(\tau)\left(\frac{\partial^2 F_e}{\partial s_x^2} + \frac{\partial^2 F_e}{\partial s_y^2}\right) + a_\parallel(\tau)\frac{\partial^2 F_e}{\partial s_z^2} +$$
$$+ [1 + a(\tau) + 4a_\perp(\tau)(s_x^2 + s_y^2) - 4a_\parallel(\tau)s_z^2 - \tag{1.10}$$
$$- b(\tau)s_z] F_e^M,$$

где

$$a(\tau) = \frac{\eta}{v_{T_e}^2}\int d\boldsymbol{k}\, e^{2\delta_{\boldsymbol{k}} t}, \quad a_\perp(\tau) = \frac{\eta}{2v_{T_e}^2}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{k_x^2}{\boldsymbol{k}^2}\, e^{2\delta_{\boldsymbol{k}} t},$$

$$a_\parallel(\tau) = \frac{\eta}{2v_{T_e}^2}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{k_z^2}{\boldsymbol{k}^2}\, e^{2\delta_{\boldsymbol{k}} t}, \quad b(\tau) = \frac{\sqrt{2}\eta}{v_{T_e}^2}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_0 k_z \nu_{en}^2}{k^4 v_{T_e}^3}\, e^{2\delta_{\boldsymbol{k}} t},$$

$$\tau = \nu_{en} t, \qquad \eta = e^2 T_e / m^2 \pi^2 \nu_{en}^2,$$

$\boldsymbol{s} = (m/2T_e)^{1/2}\boldsymbol{w}$ — безразмерная скорость.

Вводя функцию $\Psi = F_e - F_e^M$, уравнение (1.10) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\Psi + a_\perp(\tau)\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s_x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s_y^2}\right) + a_\parallel(\tau)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s_z^2} - b(\tau) s_z F_e^M. \tag{1.11}$$

2. Уравнение (1.10) легко решается методом Фурье. Представляя $\Psi(\boldsymbol{s}, \tau)$ в виде интеграла Фурье, т. е. $\Psi(\boldsymbol{s}, \tau) = \int \Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)\, e^{i\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{s}}\, d\boldsymbol{\nu}$, из (1.11) для $\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)$ получим

$$\frac{\partial \Psi_{\boldsymbol{\nu}}}{\partial \tau} = -[1 + a_\perp(\tau)(\nu_x^2 + \nu_y^2) + a_\parallel(\tau)\nu_z^2]\Psi_{\boldsymbol{\nu}} - \tag{2.1}$$
$$- \frac{b(\tau)}{(2\pi)^3}\int s_z F_e^M e^{-i\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{s}}\, d\boldsymbol{s},$$

$\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau)$ должны удовлетворять начальному условию $\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(0) = 0$.

Решение (2.1) определяет

$$\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\tau) = \left(\frac{m}{2T_e}\right)^{3/2}\frac{e^{-\tau}}{(2\pi)^3}\int_0^\tau \frac{i\nu_z}{2}\, e^{\tau'}\, b(\tau') \times \tag{2.2}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\nu_x^2 + \nu_y^2}{4}\, b_\perp(\tau, \tau') - \frac{\nu_z^2}{4}\, b_\parallel(\tau, \tau')\right] d\tau'.$$

Совершая обратный переход к $\Psi(\boldsymbol{s}, \tau)$, имеем

$$\Psi(\boldsymbol{s}, \tau) = -N_e\left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-\tau}\int_0^\tau d\tau'\,\frac{b(\tau')\, e^{\tau'}\, s_z}{b_\perp(\tau, \tau')\, b_\parallel^{3/2}(\tau, \tau')} \times \tag{2.3}$$
$$\times \exp\left[-\frac{s_x^2 + s_y^2}{b_\perp(\tau, \tau')} - \frac{s_z^2}{b_\parallel(\tau, \tau')}\right],$$

где

$$b_{\perp}(\tau, \tau') = 1 + 4\int\limits_{\tau'}^{\tau} a_{-}(\tau'')\,d\tau'', \qquad b_{\|}(\tau, \tau') = 1 + 4\int\limits_{\tau'}^{\tau} a_{\|}(\tau'')\,d\tau''.$$

Используя определение функции Ψ, для F_e получим

$$F_e = F_e^M - N_e\left(\frac{m}{2\pi T_e}\right)^{3/2} e^{-\tau}\int\limits_0^{\tau} d\tau' \frac{b(\tau')\,e^{\tau'}s_z}{b_{\perp}(\tau, \tau')\,b_{\|}^{3/2}(\tau, \tau')}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{s_x^2+s_y^2}{b_{\perp}(\tau, \tau')}-\frac{s_z^2}{b_{\|}(\tau, \tau')}\right], \tag{2.4}$$

которое дает следующее выражение для тока:

$$j_z = \frac{e^2N_e}{m\nu_{en}}E_0 + \frac{1}{2}eN_e\left(\frac{2T_e}{m}\right)^{1/2}e^{-\tau}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\tau} d\tau'\,e^{\tau'}\,b(\tau'). \tag{2.5}$$

Подстановка в (2.5) $b(\tau)$ и интегрирование по τ' и $\boldsymbol{k}$ определяет электропроводности

$$\sigma = \sigma_0\left[1 - 4\frac{e^2/r_d}{mv_{T_e}^2/2}\left(\frac{e^{\gamma\tau}}{\gamma\tau} - \frac{2e^{\gamma\tau}}{\gamma^2\tau^2} + \frac{2e^{\gamma\tau}}{\gamma^3\tau^3} - \frac{2}{\gamma^3\tau^3} - \frac{e^{-\tau}}{3}\right)\right], \tag{2.6}$$

где $\sigma_0 = \dfrac{e^2N_e}{m\nu_{en}}$, $\gamma = \left(\dfrac{m}{M}\right)^{1/2}\dfrac{v_0}{v_{T_e}}$, M — масса иона.

Рассмотрим три возможных случая:

1) $$\gamma\tau = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\frac{v_0}{v_{T_e}}\nu_{en}t \ll 1 \qquad (\tau = \nu_{en}t \ll 1),$$
$$\sigma = \sigma_0\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{e^2/r_d}{mv_{T_e}^2/2}\,\nu_{en}t\right); \tag{2.7}$$

2) $$\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\frac{v_0}{v_{T_e}}\nu_{en}t \ll 1 \qquad (\nu_{en}t > 1),$$
$$\sigma = \sigma_0\left(1 - \frac{4}{3}\,\frac{e^2/r_d}{mv_{T_e}^2/2}\right); \tag{2.8}$$

3) $$\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\frac{v_0}{v_{T_e}}\nu_{en}t > 1 \qquad (\nu_{en}t \gg 1),$$
$$\sigma = \sigma_0\left(1 - 4\frac{e^2/r_d}{mv_{T_e}^2/2}\,\frac{e^{\gamma\tau}}{\gamma\tau}\right). \tag{2.9}$$

В первом и во втором случаях влияние колебаний на электропроводность незначительно, так как для тех времен, при которых выполняются условия 1) и 2), уровень колебаний такой же, как и уровень тепловых шумов. В последнем случае, как видно из (2.9), при

$t > \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{v_{T_e}}{v_0} \frac{1}{\nu_{en}}$ наличие колебаний приводит к заметному уменьшению электропроводности плазмы.

Следует отметить, что выражения (2.6) и (2.9) справедливы при $t < t_0$, где t_0 — момент времени, когда σ обращается в нуль. Если воспользоваться данными работы [8] ($T_e \sim 2 \cdot 10^4$°K, $n_e \sim 10^{10}$ $см^{-3}$), то из (2.6) получим $t_0 \simeq 12 \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{v_{T_e}}{v_0} \frac{1}{\nu_{en}}$. Нетрудно заметить, что при $t \sim t_0$ плотность энергии плазменных колебаний становится больше тепловой энергии электронов, поэтому при таких временах мы выходим за рамки применимости квазилинейной теории.

В заключение авторы благодарят А. А. Рухадзе за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1 В И Петвиашвили, Р. Р. Рамазашвили, Н Л Цинцадзе, Ядерный синтез, **5**, 315 (1965)
2. R. Ramazashvili, N Tsintsadze, Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion Res., **1**, Vienna, 1966, p. 451.
3 Д. В Шапиро, ЖТФ, **31**, 522 (1961)
4. Д. В Шапиро, Изв. высш уч зав. — Радиофизика, **4**, 867 (1961).
5. O. Buneman, Phys Rev., **115**, 503 (1959).
6. Б. Милич, А. А Рухадзе, ЖТФ, **38**, 229 (1968)
7. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M Krook, Phys. Rev., **94**, 511 (1954).
8. А А. Зайцев, Б. Милич, А А Рухадзе, ЖТФ, **37**, вып. 9 (1967).

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию
13 ноября 1967 г

THE EFFECT OF ION-SOUND OSCILLATIONS ON A WEAKLY-IONIZED PLASMA

F. Baimbetov, N. L. Tsintsadze

The effect of increasing ion-sound oscillations on the electric conductivity of the weakly ionized plasma is investigated. It is shown that at $t > \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{v_{T_e}}{v_0} \frac{1}{\nu_{en}}$ the electric conductivity of plasma is noticeably decreased.