

УДК 621 372 413 : 621.372 3

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ ПЛОСКОГО РЕЗОНАТОРА, СОДЕРЖАЩЕГО ДИФРАКЦИОННУЮ РЕШЕТКУ

Л. Н. Литвиненко, А. М. Радин, В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов

Рассмотрено возбуждение электромагнитных колебаний в резонансной системе, образованной периодической отражательной дифракционной решеткой и параллельным ей идеально проводящим экраном. Источником возбуждения служит электронный пучок, который пропускается вдоль решетки, перпендикулярно ее штрихам. Самоогласованное решение найдено в приближении малого сигнала, при решении краевой электродинамической задачи используются точные граничные условия. Исследованы собственные режимы холодной системы и определены резонансные условия при наличии пучка с учетом обратного влияния поля на пучок. Проводится приближенное рассмотрение возбуждения электронным пучком открытого резонатора, у которого одно из зеркал выполнено в виде дифракционной решетки

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим возбуждение электронным пучком плоского резонатора с дифракционной решеткой (рис. 1). Экран и решетка предполагаются идеально проводящими и бесконечными по осям Ox и Oy , пучок занимает область пространства $h \leq z \leq h + a$; вся система однородна вдоль оси Ox . Интерес к излучению такой структуры определяется, с одной стороны, близостью ее к системам, лежащим в основе конструкции ЛБВ, плоского магнетрона, открытого резонатора с одним из зеркал в виде решетки, который возбуждается электронным пучком, движущимся вблизи решетки, и т. п., а с другой стороны, тем, что электромагнитные колебания в таком резонаторе поддаются достаточно точному математическому анализу.

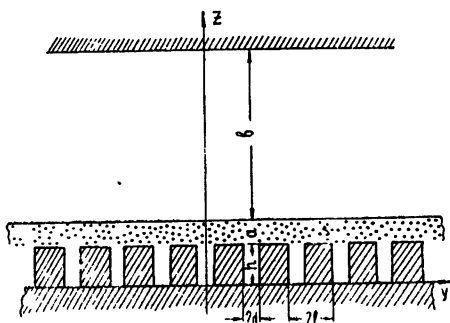


Рис. 1.

Нас будет в дальнейшем интересовать случай возникновения излучения, уходящего от дифракционной решетки в виде плоских волн (дифракционное излучение). Дифракционное излучение в приближении заданного тока исследуется в работах [1, 2]. Здесь мы решаем

самосогласованную задачу и поэтому ищем решения неоднородного волнового уравнения для потенциала Герца Π

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -4\pi P, \quad (1)$$

когда плотность заряда в пучке ρ , скорость электронов \mathbf{v} и плотность тока $\mathbf{I} = \rho \mathbf{v}$, определяющие поляризационный потенциал $\mathbf{F} = \int \mathbf{I} dt$ в правой части уравнения (1), удовлетворяют уравнению непрерывности и уравнению движения

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{E} — напряженность электрического поля, e , m — соответственно заряд и масса электрона. Искомое решение должно также удовлетворять граничным условиям: тангенциальная к проводящим поверхностям компонента поля \mathbf{E} обращается на них в нуль, а поле внутри системы всюду непрерывно. \mathbf{E} , \mathbf{H} связаны с Π известными соотношениями

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (3)$$

Будем решать уравнение (1) совместно с уравнениями (2) в приближении теории малого сигнала [3], считая движение электронов одномерным, $\mathbf{v} = jv$. Полагая амплитуды высокочастотных полей малыми, а плотность электронов в пучке $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ и их скорость $v = v_0 + \tilde{v}$ мало отличающимися от средних значений ρ_0 и v_0 соответственно ($\tilde{\rho} \ll \rho_0$, $\tilde{v} \ll v_0$), запишем для плотности тока $\mathbf{I} = j\mathbf{I} = j\rho v$ приближенное выражение $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \tilde{\mathbf{I}} \simeq \rho_0 v_0 + \rho_0 \tilde{v} + \tilde{\rho} v_0$. Постоянная составляющая плотности заряда при этом предполагается скомпенсированной. Переменные составляющие потенциала Герца $\Pi = j\Pi$, плотности заряда пучка $\tilde{\rho}$ и скорости электронов \tilde{v} будем искать в виде

$$\Pi = e^{-i\omega t} \begin{cases} e^{ikay} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n(z) e^{i\pi n \frac{y}{l}} & (z > h) \\ e^{ikn2Nl} \sum_{m=0}^{\infty} \Pi_m(z) \cos \frac{\pi m}{2d} (y+d+2Nl) & (z < h) \end{cases}, \quad (4)$$

$$|y + 2Nl| < d,$$

$$\tilde{\rho} = e^{i(kay - \omega t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_n(z) e^{i\pi n \frac{y}{l}},$$

$$\mathbf{v} = e^{i(kay - \omega t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_n(z) e^{i\pi n \frac{y}{l}}.$$

Здесь ω — частота колебаний, $k = \omega/c$, $\alpha = \alpha' - i\alpha''$ — искомая безразмерная постоянная распространения, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер ячейки решетки.

Приближенное выражение для $\tilde{\mathbf{I}} \simeq \rho_0 \tilde{v} + \tilde{\rho} v_0$ позволяет линейри-

довать уравнение (1), а с помощью уравнений (2) можно выразить компоненты Фурье поляризованного потенциала через потенциал Герца. В итоге уравнение (1) при отыскании его решения в виде (4) сводится к однородным уравнениям для неизвестных функций $\Pi_n(z)$ и $\Pi_m(z)$:

$$-\frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial z^2} + k^2 \xi_n^2 \xi_n^2 \Pi_n = 0, \quad -\frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z^2} + k^2 \gamma_m^2 \Pi_m = 0, \quad (5)$$

где

$$\xi_n = \sqrt{1 - \sigma_n^2}, \quad \sigma_n = \alpha + n/\alpha, \quad \alpha = kl/\pi = \omega l/\pi c,$$

$$\xi_n^2 = 1 \text{ (для } 0 < z - h - a < b), \quad \xi_n \equiv \varepsilon_n = \sqrt{1 - \Omega_n^2} \text{ (для } 0 < z - h < a),$$

$$\Omega_n = \frac{\omega_p}{\omega} \frac{1}{1 - \beta \sigma_n}, \quad \omega_p^2 = 4\pi \frac{e}{m} \rho_0, \quad \alpha_p = \frac{\omega_p l}{\pi c}, \quad (6)$$

$$\gamma_m = \sqrt{1 - m^2(2x\theta)^{-2}}, \quad \beta = v_0/c, \quad \theta = d/l, \quad \delta = h/l.$$

При выборе ветви корня $\sqrt{A + B} = C + D$, следует руководствоваться правилом: если $A > 0$, $B < 0$, то $C > 0$, $D < 0$, а в остальных случаях $D > 0$.

Решения уравнений (5) запишем в виде

$$\Pi_n(z) = \frac{c^2}{\omega^2 \xi_n} \left[\begin{array}{l} A_n e^{-ik\xi_n a} e^{ik\xi_n \xi_n(z-h)} + B_n e^{ik\xi_n b} e^{-ik\xi_n \xi_n(z-h-a)} \\ a_n \qquad \qquad \qquad b_n \end{array} \right]; \quad (7)$$

$$\Pi_m(z) = \frac{2ic^2}{\omega^2 \gamma_m} C_m \sin(k\gamma_m z) \quad (z < h), \quad (8)$$

где A_n , a_n , B_n , b_n , C_m — произвольные константы. В формулах (7) следует брать верхние множители в области $0 < z - h - a < b$, а нижние — в области $0 < z - h < a$. Константы $c^2/\omega^2 \xi_n$, $2ic^2/\omega^2 \gamma_m$, $e^{\pm ik\xi_n \xi_n h}$, $e^{\pm ik\xi_n \xi_n a}$, $e^{\pm ik\xi_n \xi_n b}$ введены для удобства последующих выкладок.

Компоненты векторов \mathbf{H} , \mathbf{E} можно вычислить по формулам (3), воспользовавшись выражениями (4), (7), (8); представим их с точностью до множителя $e^{-i\omega t}$ в виде

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\begin{array}{l} A_n e^{-ik\xi_n a} e^{\pm ik\xi_n \xi_n(z-h)} - B_n e^{ik\xi_n b} e^{-ik\xi_n \xi_n(z-h-a)} \\ a_n \qquad \qquad \qquad b_n \end{array} \right] \xi_n e^{ik\alpha_n y} \quad (0 < z - h - a < b), \quad (9)$$

$$H_x = 2e^{i2kaNl} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(k\gamma_m z) \cos \frac{\pi m}{2d} (y + d + 2Nl) \quad (z < h),$$

$$E_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad H_y = H_z = E_x = 0.$$

Легко убедиться, что при такой записи полей автоматически удовлетворяются граничные условия в канавках решетки ($z < h$, $|y + 2Nl| < d$). Подчинение поля граничным условиям на зеркале $z = h + a + b$ и на границе раздела пучок—вакуум $z = h + a$ позволяет установить связь между неизвестными коэффициентами Фурье.

$$\begin{aligned}
 A_n e^{ik\zeta_n b} + B_n &= 0, \\
 A_n + B_n e^{ik\zeta_n b} &= a_n e^{ik\zeta_n \varepsilon_n a} + b_n, \\
 A_n - B_n e^{ik\zeta_n b} &= (a_n e^{ik\zeta_n \varepsilon_n a} - b) \varepsilon_n.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Удовлетворение (9) граничным условиям на поверхности решетки приводит к системе функциональных уравнений, которую мы запишем, воспользовавшись полученными соотношениями (10) и положив $N = 0$, как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \zeta_n R_n e^{ik\alpha_n y} = \begin{cases} 0 & (d < |y| < l) \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \gamma_m \sin(k\gamma_m h) \cos \frac{\pi m}{2d} (y+d) & (|y| < d) \end{cases}, \tag{11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_m \cos(k\gamma_m h) \cos \frac{\pi m}{2d} (y+d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{ik\alpha_n y} \quad (|y| < d),$$

где

$$\begin{aligned}
 X_n &= B_n [\varepsilon_n \sin(p_n b) \sin(q_n a) - \cos(p_n b) \cos(q_n a)], \\
 R_n &= \frac{\varepsilon_n \sin(p_n b) \cos(q_n a) + \cos(p_n b) \sin(q_n a)}{\varepsilon_n [\sin(p_n b) \sin(q_n a) - \cos(p_n b) \cos(q_n a)]}, \\
 p_n &= k \zeta_n, \quad q_n = k \zeta_n \varepsilon_n.
 \end{aligned}$$

Решение системы функциональных уравнений (11) можно получить методом, изложенным в работе [4]. Опуская промежуточные выкладки, запишем решение (11) в виде бесконечной системы линейных уравнений

$$X_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s P_{ns} = 0, \tag{12}$$

где

$$P_{ns} = P_{ns}^{(0)} + P_{ns}^{(1)}, \quad P_{ns}^{(0)} = \theta \frac{\operatorname{tg}(\pi \chi \delta)}{\zeta_n R_n} S_{0n} S_{0s},$$

$$P_{ns}^{(1)} = \theta^2 \frac{4\chi\alpha_n}{\zeta_n R_n} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{(2\chi\theta)^2 - m^2} \operatorname{tg}(\pi \chi \delta) \left[1 - \left(\frac{m}{2\chi\theta} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\alpha_s S_{mn} S_{ms}}{(2\chi\theta\sigma_n + m)(2\chi\theta\alpha_s + m)},$$

$$S_{mn} = \frac{\sin(\pi/2)(2\chi\theta\alpha_n - m)}{(\pi/2)(2\chi\theta\alpha_n - m)}, \quad S_{ms} = \frac{\sin(\pi\theta\chi\alpha_n)}{\pi\theta\chi\alpha_n},$$

$$\delta = h/l.$$

Комплексная постоянная распространения σ находится из условий равенства нулю детерминанта системы уравнений (12), при этом никаких ограничений на геометрические параметры системы $l, d, h; a, b$ и частоту ω не накладывается.

Важным частным случаем является такой колебательный режим, когда в канавках дифракционной решетки может распространяться без затухания вдоль оси z только одна волноводная волна. Этому соот-

ветствует условие $x\theta < 1/2$. Если при этом наложить еще дополнительное ограничение $\theta^2 \ll 1$, то система уравнений (12) преобразуется к виду

$$X_n^{(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s^{(0)} P_{ns}^{(0)} = 0, \quad (13)$$

где $X_n^{(0)} = X_n - X_n^{(1)}$. Поправочные члены $X_n^{(1)}$ удовлетворяют неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$X_n^{(1)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s^{(1)} P_{ns} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_s^{(0)} P_{ns}^{(1)}.$$

Можно показать, что величины $X_n^{(0)}$ имеют порядок θ , а $X_n^{(1)}$ — порядок θ^3 . Таким образом, при условии $\theta^2 \ll 1$ можно считать $X_n \approx X_n^{(0)}$ и вместо решения сложной исходной системы уравнений (12) исследовать более простую систему (13). Дисперсионное уравнение, которое получается из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений (13), имеет следующий сравнительно простой вид:

$$1 - \theta \operatorname{tg}(\pi x \delta) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{S_{0s}^2}{\zeta_s R_s} = 0. \quad (14)$$

2. СОБСТВЕННЫЕ РЕЖИМЫ РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ

Корни дисперсионного уравнения удобно находить методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения удобно выбрать корни уравнения для собственных режимов резонансной системы, в которой пучок отсутствует. Этот предельный переход в уравнениях (14) можно осуществить, положив $a = 0$ или $\omega_p = 0$.

Пусть $a = 0$, тогда величина b будет определять расстояние между поверхностью решетки $z = h$ и экраном. Дисперсионное уравнение «холодной» системы имеет вид*

$$1 + \theta \operatorname{tg}(\pi x \delta) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{S_{0s}^2}{\zeta_s \operatorname{tg}(p_s b)} = 0. \quad (15)$$

Для некоторых частных случаев удается получить решение трансцендентного уравнения (15) в явной форме. Обозначим

$$x\alpha = n_0 + \mu, \quad \mu = \nu - i x \alpha'', \quad (15a)$$

n_0 — ближайшее целое число к $x\alpha$, $\nu = x\alpha' - n_0$, $|\mu| < 1/2$, а также введем новый индекс суммирования $n = s + n_0$. Заметим, что при малых θ

$$\frac{\sin^2(\pi \theta \mu)}{(\pi \theta \mu)^2} = 1 + O(\theta^2), \quad \frac{\sin^2(\pi \theta) (1 \pm \mu)}{[\pi \theta (1 \pm \mu)]^2} = 1 + O(\theta^2), \quad (16)$$

* Дисперсионное уравнение (15) было получено ранее в [3] в предположении, что поле в области канавки остается постоянным, а высшими пространственными гармониками при решении граничной задачи можно пренебречь. Здесь уравнение (15) является частным случаем строгого решения (12); оно получено разложением коэффициентов при неизвестных и самих величин X_n по степеням параметра θ , когда слагаемыми порядка θ^n ($n \geq 2$) пренебрегались. При этом определяются границы применимости уравнения (15), что не удавалось сделать раньше.

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sin^2(\pi\theta)(n+\mu)}{[\pi\theta(n+\mu)]^2 |n+\mu|} = -2 \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} + O(1).$$

Существенно, что уравнение (15) не зависит от знака μ , а при отсутствии пучка $\alpha'' = 0$ и $\mu = \nu$.

Выясним физический смысл величины ν . Фазовая скорость в направлении оси Oy для пространственной гармонике с индексом n для поля (9) равна

$$v_{\Phi n} = \frac{x}{\kappa\alpha + n} c.$$

Коэффициент $\kappa/(\kappa\alpha + n)$ определяет величину замедления этой волны по сравнению со скоростью света. Напомним, что $\kappa\alpha = n_0 + \nu$. Для волны с индексом $n = -n_0$ в области $\kappa < |\nu|$ это замедление минимально и равно κ/ν . Таким образом, для поверхностных волн параметр ν характеризует замедление самой быстрой из всех медленных волн. В области $|\nu| < \kappa$ гармоника с индексом $n = -n_0$ является незатухающей и параметр ν/κ определяет составляющую ее волнового вектора в направлении оси Oy .

Можно считать заданными величины $\theta, \delta, \Delta = (a+b)/l, \kappa, n_0$, тогда решение дисперсионного уравнения сводится к отысканию величины ν . Рассмотрим несколько частных случаев, для которых это решение удается получить в явном виде.

1) $\pi\Delta \sqrt{\nu^2 - \kappa^2} > 1$. В этом случае уравнение (15) можно упростить:

$$\frac{1}{\kappa\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - \kappa^2}} - 2 \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}. \quad (17)$$

Теперь оно эквивалентно дисперсионному уравнению для медленных режимов гребенки, рассмотренному, например, в работах [6, 7]. Влияние экрана в этом случае несущественно. Корни уравнения (17) есть

$$|\nu| \approx \left\{ \kappa^2 + \left[\frac{\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)}{1 + 2\kappa\theta |\operatorname{tg}(\pi\kappa\delta) + \ln \sin(\pi\theta/2)|} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Отметим, что изменение параметра δ на величину, кратную $1/\kappa$, условия резонанса не изменяет.

2) $\pi \sqrt{\nu^2 - \kappa^2} < 1/\Delta < \pi \sqrt{(1 - |\nu|)^2 - \kappa^2}$. Эти условия означают близость значений ν к κ (т. е. к точке скольжения), а расстояние Δ до экрана таково, что пренебречь им нельзя. В этом случае дисперсионное уравнение (15) имеет вид

$$\frac{1}{\theta\kappa \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)} = \frac{\pi}{3} \Delta + \frac{1}{\pi\Delta(\nu^2 - \kappa^2)} - 2 \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}, \quad (19)$$

а его решение

$$|\nu| = \left\{ \kappa^2 + \frac{\kappa\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)}{\pi\Delta \{1 - \kappa\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta) [(\pi/3)\Delta - 2 \ln \sin(\pi\theta/2)]\}} \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

Здесь физический смысл имеют те значения ν , которые удовлетворяют условию $\kappa < |\nu| < 0,5$.

3) Рассмотрим собственный режим быстрых волн, когда $|\nu| < \kappa < 1 - |\nu|$. В этом случае незатухающей в направлении оси Oz будет

единственная гармоника с индексом $n = -n_0$. Дисперсионное уравнение (15) можно записать в более простом виде

$$\operatorname{ctg}(\pi x \delta) = - \frac{x \theta \operatorname{ctg}(\pi \Delta) \sqrt{x^2 - v^2}}{\sqrt{x^2 - v^2}} - 2x \theta \ln \sin \frac{\pi \theta}{2}. \quad (21)$$

Если $\pi \Delta \sqrt{x^2 - v^2}$ не близко к $M\pi$ ($M = 1, 2, \dots$), а $x^2 - v^2$ — к нулю (т. е. окрестность точки скольжения исключается), то при малых значениях θ правая часть уравнения (21) мала. В этом случае приближенная формула для корней уравнения (21)*

$$x = \frac{2N + 1}{2\delta} \left\{ 1 - \frac{2\theta \operatorname{ctg} \left\{ \pi (\Delta/2\delta) [(2N + 1)^2 - 4\delta^2 v^2]^{1/2} \right\}}{\pi [(2N + 1)^2 - 4\delta^2 v^2]^{1/2}} - \frac{2\theta}{\pi \delta} \ln \sin \frac{\pi \theta}{2} \right\}^{-1}. \quad (22)$$

Здесь N — целое число, удовлетворяющее неравенству $(2\delta|v| - 1)/2 < N < [2\delta(1 - |v|) - 1]/2$.

Нетрудно убедиться, что корни (22) связаны с резонансом поля в канавках решетки. Действительно, поскольку величина в квадратных скобках порядка единицы, то $x \simeq (1/\delta)(N + 1/2)$, что равносильно $h = (\lambda/4)(2N + 1)$. Степень близости высоты щели h к этим значениям определяется вторым слагаемым в фигурных скобках в (22), который может быть больше и меньше единицы в зависимости от параметров $\theta, \delta, \Delta, v$.

4) Вблизи точки скольжения ($x = v$) резонанс может достигаться, если величина $\pi \Delta [1/v\theta \operatorname{tg}(\pi v\delta) + 2 \ln \sin(\pi\theta/2)]$ по модулю велика и отрицательна. Приближенные значения корней уравнения (21) в этом случае равны

$$x = \left\{ v^2 - \left[\frac{\pi \Delta}{v\theta \operatorname{tg}(\pi v\delta)} - 2\Delta \pi \ln \sin \frac{\pi \theta}{2} \right]^{-1/2} \right\}. \quad (23)$$

5) Важным представляется случай, когда величина $\Delta \sqrt{x^2 - v^2}$ близка к M (M — целое число). Корни этого вида связаны с резонансами в полости между решеткой и экраном ($0 < z - h < a + b$). Будем считать большой по модулю следующую величину

$$\frac{\sqrt{x^2 - v^2}}{x\theta} \left[2x\theta \ln \sin \frac{\pi \theta}{2} + \operatorname{ctg}(\pi x \delta) \right]$$

(случай ее малости равносильен уже рассмотренным выше), тогда корни уравнения (21) таковы

$$x = \frac{\sqrt{N^2 - v^2 \Delta^2}}{\Delta} - \theta \left(2\pi \theta \frac{N^2}{N^2 - v^2 \Delta^2} \ln \sin \frac{\pi \theta}{2} + \frac{\pi \Delta N^2}{N^2 - v^2 \Delta^2} \operatorname{ctg} \frac{\pi \delta}{2\Delta} \sqrt{N^2 - v^2 \Delta^2} \right)^{-1}, \quad (24)$$

где N — целое число, определяемое из условия $\Delta \sqrt{x^2 - v^2} \simeq N$ при $|v| < x < 1 - |v|$. Как видно, поправка к значению корня уравнения $\Delta \sqrt{x^2 - v^2} = 0$, которая обуславливается наличием канавок, убывает с уменьшением θ .

Таким образом, рассмотрены собственные режимы медленных и быстрых волн в резонансной системе. Примечательной особенностью

* При рассмотрении быстрых волн более удобно задаваться параметрами $\theta, \delta, \Delta, n_0$ и v , а из дисперсионного уравнения находить величину x .

режимов медленных волн, которые определяются условиями (18) и (20), является то, что нерелятивистский электронный поток, движущийся со скоростью $\beta \leq x/(n+x)$, может возбуждать волны, распространяющиеся вдоль решетки со скоростью сколь угодно близкой к c . Полученные резонансные условия для быстрых волн (22) — (24) определяют три качественно различных собственных режима: первый связан с резонансами волн в канавках гребенки; второй — с распространением вдоль решетки незатухающей пространственной гармоникой со скоростью, близкой к скорости света; третий — с резонансами волн в полости между решеткой и зеркалом.

На рис. 2 приведена зависимость x от $x\alpha$, полученная путем решения на ЭВМ исходного уравнения (15) для фиксированных параметров θ , δ , Δ . Значения x , найденные по приближенным формулам, с графической точностью совпадают с точными, полученными на ЭВМ. Параметр α равен тангенсу угла между осью ординат x и лучом $x\alpha = n_0 + \nu$, проходящим через точку $(x\alpha)_0 = n_0 + \nu_0$ на рассматриваемой дисперсионной кривой (на рис. 2 этот луч проведен пунктиром).

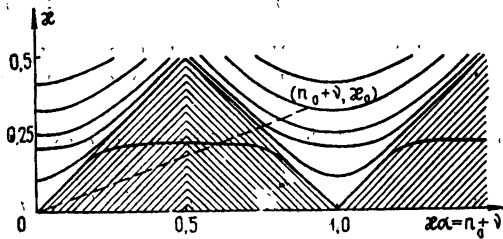


Рис. 2.

3. ВОЗБУЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ РЕЖИМОВ В РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Полученные выше решения дисперсионного уравнения (15) могут служить хорошим начальным приближением при решении уравнения (14) для системы с электронным пучком. Здесь мы подробно остановимся на исследовании собственного режима, близкого к определяемому формулой (24), и приближенно рассмотрим электромагнитные колебания в системе с конечными поперечными размерами зеркал.

Ограничимся частным случаем

$$\frac{x_p}{\beta} \ll 1, \quad \frac{|\mu|^2}{x} \ll 1, \quad x < \frac{1}{2}, \quad \Delta = \frac{a+b}{l} \gg 1, \quad \tau = \frac{a}{l} \gg 1. \quad (25)$$

Будем искать величину μ (связь ее с постоянной распространения α определяется соотношением (15)), при условии, что $x_p/\beta |\mu| > 1$. Как видно из формул (9), для электромагнитного поля внутри пучка, в этом случае нулевая пространственная гармоника тока может распространяться от одной границы пучка ($z = h$) до другой ($z = h + a$) без заметного изменения ее амплитуды даже при довольно больших значениях толщины пучка. Это означает, что при таких условиях дифракционное излучение будет генерировать весь пучок, а не только его область вблизи решетки, которая определяется экспоненциальным множителем $\exp[-2\pi(a/\beta\lambda)\sqrt{1-\beta^2}]$. Комплексная величина μ для резонатора с электронным пучком, которая определяет аналогичный условию (24) резонансный режим, находится путем решения дисперсионного уравнения (14) в следующем виде:

$$\mu(m) \equiv \nu - i\mu'' = x_p \tau (\beta m \pi - x_p \tau) \times \quad (26)$$

$$\times \left\{ (\beta m \pi - \kappa_p \tau)^2 + \beta \tau \left[2 \left(1 + \ln \sin \frac{\pi \theta}{2} \right) + \frac{1}{x} \operatorname{ctg}(\pi x \delta) \right] + i \frac{\operatorname{ctg}(\pi x \delta)}{\theta} \right\}^{-1},$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, $\tau = a/l$ — безразмерная толщина пучка. Формула (26) пригодна для отыскания величин $|\mu| < \kappa_p/\beta$.

Рассмотренная выше бесконечная периодическая структура с электронным пучком может служить моделью открытого резонатора с конечными зеркалами, одно из которых выполнено в виде отражательной дифракционной решетки. Электромагнитное поле, возбуждаемое в таком открытом резонаторе электронным пучком, можно найти из выражения для поля (9) бесконечной структуры, а также формул для комплексной величины $\alpha = (1/x) [\kappa/\beta + \mu(m)]$, если пользоваться некоторыми эвристическими соображениями.

Для значений $x < 1/2$ в области пространства $z > a + h$ между зеркалом и решеткой может существовать только одна незатухающая гармоника поля с индексом $n = -n_0$, где n_0 — ближайшее к κ/β целое число (т. е. $|\nu| < 1/2$, $\nu = \kappa/\beta - n_0$). Если при этом $\operatorname{Re} \left(\frac{x}{\beta} + \mu \right) x^{-2} \ll 1$, то эта гармоника будет распространяться под малым углом относительно нормали к решетке. Это означает, что поле будет медленно изменяться вдоль оси Oy .

Действительно при $z > a + h$ поле близко к следующему:

$$H = i A \operatorname{ch} \frac{\mu''}{x} \kappa y \operatorname{ch} \frac{\nu \mu''}{2x} \kappa z_1 \cos(\kappa z_1) \frac{\cos\left(\frac{\nu}{x}\right) \kappa y}{\sin\left(\frac{\nu}{x}\right) \kappa y}, \quad (27)$$

где A — некоторая константа, $z_1 = z - h - a - b$. Потребуем, чтобы на концах интервала $|y| < L$ (L — произвольная величина) поле H_x обращалось в нуль. Это приводит к условию $\nu/x = p \cdot \kappa L$, где $p = 1, 2, \dots$, причем четные p соответствуют в (27) $\sin(x \nu) \kappa y$, а нечетные — $\cos(\nu/x) \kappa y$. В окрестности точек $y = \pm L$ поле H , а следовательно, и ток $I = -j H_x$ близки к нулю; причем, чем меньше число p , определяющее количество полупериодов поля H вдоль оси Oy в области $|y| < L$, тем в большей окрестности точек $y = \pm L$ эти токи малы. Следовательно, если удалить части структуры, лежащие вне интервала $|y| < L$, то колебания с малыми значениями индекса p этого практически «не заметят», поскольку наводимые ими токи в окрестности появившихся краев структуры, будут малы и переизлучение от краев будет слабым. Для больших индексов p токи в окрестностях краев решетки будут увеличиваться, что приведет к значительному краевому излучению и связанным с ним дифракционным потерям.

Таким образом, в открытом резонаторе с одним из зеркал в виде дифракционной решетки электронный пучок будет возбуждать электромагнитное поле, мало отличающееся от (27) для высокочастотных типов колебаний. В этом случае величины ν/x определяются по формуле (26), причем следует брать только те значения μ , для которых удовлетворяется условие

$$\frac{\nu}{x} \simeq \frac{p}{\kappa L} \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Можно также записать приближенную формулу для добротности такого открытого резонатора, воспользовавшись физическими соображениями, высказанными в работе [8]. Если R_z — энергетический коэффициент отражения от плоского зеркала, а R_p — от решетки, то доб-

ротность открытого резонатора с шириной зеркал L и расстоянием между ними $l\Delta$ имеет вид

$$Q = 4\pi \frac{\chi\Delta}{1 - R_s R_p + (\nu/\chi)(l\Delta/L)}. \quad (29)$$

Заметим, что при отсутствии омических потерь в зеркале и решетке $R_s = R_p = 1$, и добротность определяется только слагаемым в знаменателе, связанным с дифракционными потерями. На практике, однако, для основных типов колебаний (которым соответствуют минимальные значения индекса p) уменьшение добротности за счет дифракционных потерь пренебрежимо мало.

Если добротность резонатора известна, то легко определить условие генерации

$$\mu'' > \frac{\nu}{2Q} = \frac{\nu}{\chi} \frac{1}{8\pi\Delta} \left(1 - R_s R_p + \frac{\nu}{\chi} \frac{l\Delta}{L} \right). \quad (30)$$

Явное выражение для μ'' через χ_p дает возможность определить пусковой ток из условия $\mu'' = \nu/2Q$ в виде

$$I_0 = \sqrt{2\eta} U_0^{3/2} S_0 \frac{p}{8\pi L^2 Q_n^2} \times \\ \times \left\{ \left[\beta^2 m^2 \pi^2 + 2\beta\tau + \beta\tau \ln \sin \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\beta\tau}{\chi} \operatorname{ctg}(\pi\chi\Delta) \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg}^2(\pi\chi\delta)}{\chi^2 \theta^2} \left[\beta^2 \tau m \pi \frac{\operatorname{ctg}(\pi\chi\delta)}{\chi\theta} \right]^{-1} \right\}^2 \\ (m = 1, 2, \dots), \quad (31)$$

где η — отношение заряда электрона к его массе, Q_n — добротность нагруженного резонатора, S_0 — поперечное сечение пучка, U_0 — ускоряющее напряжение, I_0 — полный ток пучка.

Если электронный пучок возбуждает в резонаторе колебания, близкие колебаниям холодной системы, удовлетворяющим дисперсионному уравнению (21), то множитель в фигурных скобках можно упростить:

$$\left\{ \left[\beta^2 m^2 \pi^2 + 2\beta\tau \frac{\operatorname{ctg}(\pi\chi\delta)}{\chi\theta} \right]^2 + \frac{\operatorname{ctg}^2(\pi\chi\delta)}{\chi^2 \theta^2} \left[\beta^2 \tau m \pi \frac{\operatorname{ctg}(\pi\chi\delta)}{\chi\theta} \right]^{-1} \right\}^2.$$

Минимальные пусковые токи, как видно, существуют при условии

$$\frac{\operatorname{ctg}(\pi\chi\delta)}{\chi\theta} = \beta^2 m^2 \pi^2 + 2\beta\tau$$

($m = \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер волны пространственного заряда в пучке). Следовательно,

$$I_0 = \sqrt{2\eta} U_0^{3/2} S_0 \frac{p}{8\pi L^2 Q^2} \frac{(\beta^2 m^2 \pi^2 + 2\tau)^2}{\beta^2 \tau^2 m^2 \pi^2}. \quad (32)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалова, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1233 (1965).
2. В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 588 (1968).

- 3 В М Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
- 4 В Г Сологуб, Межведомств репр сб Радиотехника, вып 4 (1967)
- 5 В Г. Сологуб, В П. Шестопапов, Г Г Половников, ЖТФ, 37, вып 4, 666 (1967)
- 6 Л А Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд Сов радио, М., 1955
- 7 Л Н Дерюгин, Докторская диссертация, МЭИ, М., 1967
- 8 Н Г. Басов, О Н Крохин, Ю М Попов, УФН, 72, № 2, 161 (1960)

Харьковский институт радиоэлектроники
АН УССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1968г

EXCITATION OF PLANE RESONATOR, CONTAINING THE DIFFRACTION ARRAY, BY AN ELECTRON BEAM

L. N. Litvinenko, A. M. Radin, V. G. Sologub, O. A. Tret'yakov, V P Shestopalov

The authors consider the excitation of electromagnetic oscillations in a resonance system formed by periodic reflecting diffraction array and perfectly conducting screen parallel to it. As a source of excitation serves an electron beam which is transmitted along the array perpendicular to its grooves. A self-consistent solution has been found in the approximation of a weak signal theory. The exact boundary conditions are used in solving the boundary electrodynamics problem. The self regimes of a cold system have been investigated and the resonance conditions in the presence of the beam are determined with taking into account the back effect of the field on the beam. An approximate consideration is given on the excitation, by an electron beam, of the open resonator one of the mirrors of which has the form of diffraction array.