

УДК 621.375

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ДВУХЧАСТОТНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

*А. Н. Малахов, А. А. Мальцев*

Рассмотрены естественные флуктуации в асинхронном двухчастотном генераторе вблизи стационарного бигармонического режима. Найдены спектральные характеристики амплитудных и частотных флуктуаций. Определена корреляция между флуктуациями различных мод автоколебания.

В настоящее время в связи с интенсивным развитием теоретических и прикладных исследований лазеров усиливается интерес к многомодовым генераторам [1, 2]. Одним из важных и интересных аспектов их теории является вопрос о флуктуациях в таких генераторах и, в частности, вопрос о статистической зависимости флуктуаций разных мод. Одним из простейших подходов к анализу этой задачи является рассмотрение флуктуаций в многочастотных генераторах с сосредоточенными параметрами, которые допускают существование устойчивых полигармонических колебаний. Динамика этих автоколебательных систем (в асинхронном режиме) исследована в целом ряде работ (см., например, [3-7]). Вместе с тем вопросы о флуктуациях в таких автогенераторах нигде не рассматривались.

Настоящая статья посвящена теоретическому анализу естественных флуктуаций двухчастотного автогенератора и рассмотрению корреляций между флуктуациями мод.

### 1. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХЧАСТОТНОГО ГЕНЕРАТОРА

В общем случае двухчастотный генератор можно описать в нормальных координатах следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_1^2 u_1 &= F_1(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_2^2 u_2 &= F_2(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) + \omega_2^2 E_2(t); \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $u_1, u_2$  — нормальные координаты,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — нормальные частоты,  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  — случайные ЭДС, представляющие естественные шумы,  $F_1(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)$  и  $F_2(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)$  — малые функции, включающие потери и нелинейности системы.

Поскольку правые части системы (1) достаточно малы, ее решение ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cos \psi_1, \quad \dot{u}_1 = -\omega_1 R_1 \sin \psi_1, \quad \psi_1 = \omega_1 t + \vartheta_1, \\ u_2 &= R_2 \cos \psi_2, \quad \dot{u}_2 = -\omega_2 R_2 \sin \psi_2, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \vartheta_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Нормальные колебания  $u_1(t), u_2(t)$ , записанные в виде (2), где  $R_1 = |R_1(t)|$ ,  $R_2 = |R_2(t)|$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_1(t)$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_2(t)$  — новые переменные, будем для краткости называть модами.

Двухчастотный генератор может, вообще говоря, работать в различных режимах. Возможен, например, синхронный режим, при котором на полные фазы мод  $\psi_1, \psi_2$  накладывается (нелинейностями схемы) определенная связь, например, вида  $r\psi_1 \pm s\psi_2 = \text{const}$  ( $r, s$  — целые числа), приводящая к определенному соотношению установившихся частот и фаз.

При асинхронном режиме (рассмотрением которого мы и ограничимся в настоящей статье) между полными фазами мод  $\psi_1, \psi_2$  не существует каких-либо взаимосвязей и установившиеся значения частот и фаз не зависят друг от друга.

Этот режим может быть реализован, например, тогда, когда в полосы колебательных контуров мод не попадает ни одна из возможных комбинационных частот  $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ . Последнее в свою очередь требует малости указанных полос (малости потерь) и в то же время накладывает ограничения на высшую степень нелинейности функций  $F_1$  и  $F_2$ , которая определяет максимально возможные значения чисел  $m, n$ .

Будем считать эти условия выполненными. В этом случае проводимый ниже анализ будет заведомо корректен для амплитуд  $R_1(t), R_2(t)$  и фаз  $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$ , медленных по сравнению с  $\cos(\omega_{\min} t)$ , где  $\omega_{\min} = \min(|\omega_1 - \omega_{mn}|, |\omega_2 - \omega_{mn}|)$ . Это означает, что спектры амплитудных и частотных флуктуаций следует рассматривать лишь в полосе, много меньшей  $\omega_{\min}$ .

Используя метод усреднения [8], из (1) нетрудно найти следующие укороченные уравнения для переменных  $R_1, R_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_1(R_1, R_2) - \frac{\omega_1}{2} a_{1s}, \\ \dot{R}_2 &= -\frac{1}{2\omega_2} \Phi_2(R_1, R_2) - \frac{\omega_2}{2} a_{2s}, \\ \dot{\vartheta}_1 &= -\frac{1}{2\omega_1 R_1} \Psi_1(R_1, R_2) - \frac{\omega_1}{2R_1} a_{1c}, \\ \dot{\vartheta}_2 &= -\frac{1}{2\omega_2 R_2} \Psi_2(R_1, R_2) - \frac{\omega_2}{2R_2} a_{2c}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\Phi_{1,2}(R_1, R_2) = \frac{1}{2\pi^2} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{1,2}(R_1 \cos \psi_1, R_2 \cos \psi_2, -R_1 \omega_1 \sin \psi_1, -R_2 \omega_2 \sin \psi_2) \sin \psi_{1,2} d\psi_1 d\psi_2, \tag{4}$$

$$\Psi_{1,2}(R_1, R_2) = \frac{1}{2\pi^2} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{1,2}(R_1 \cos \psi_1, R_2 \cos \psi_2, -R_1 \omega_1 \sin \psi_1, -R_2 \omega_2 \sin \psi_2) \cos \psi_{1,2} d\psi_1 d\psi_2.$$

Случайные функции  $a_{1s}, a_{2s}, a_{1c}, a_{2c}$  равны [9]

$$a_{is} = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t E_i(\xi) \sin \psi_i(\xi) d\xi, \quad a_{ic} = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t E_i(\xi) \cos \psi_i(\xi) d\xi, \tag{5}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\min}} \quad (i = 1, 2).$$

Предположим, что система (3) в отсутствие шумов допускает существование бигармонического режима, обладающего стационарными амплитудами  $R_{0_1}$ ,  $R_{0_2}$ , с поправками на частоты  $\Delta\omega_1$  и  $\Delta\omega_2$ .

Эти стационарные значения определяются уравнениями

$$\Phi_1(R_{0_1}, R_{0_2}) = 0, \quad \Phi_2(R_{0_1}, R_{0_2}) = 0, \\ \Delta\omega_1 = -\frac{1}{2\omega_1 R_{0_1}} \Psi_1(R_{0_1}, R_{0_2}), \quad \Delta\omega_2 = -\frac{1}{2\omega_2 R_{0_2}} \Psi_2(R_{0_1}, R_{0_2}). \quad (6)$$

Установившиеся частоты колебаний равны  $\omega_{0_1} = \omega_1 + \Delta\omega_1$ ,  $\omega_{0_2} = \omega_2 + \Delta\omega_2$ .

Наличие шумов в генераторе приводит к тому, что амплитуды и фазы мод испытывают флуктуации  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ .

$$R_1 = R_{0_1} [1 + \alpha_1(t)], \quad R_2 = R_{0_2} [1 + \alpha_2(t)], \\ \psi_1 = \omega_{0_1} t + \varphi_1(t), \quad \psi_2 = \omega_{0_2} t + \varphi_2(t). \quad (7)$$

Если стационарное бигармоническое состояние устойчиво, то в силу малости  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  амплитудные флуктуации  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  также можно считать достаточно малыми,  $\langle \alpha_{1,2}^2 \rangle \ll 1$  (знак  $\langle \dots \rangle$  означает статистическое усреднение). Кроме того, вследствие медленного изменения фаз  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  на интервалах  $(t-T, t)$  в выражении (5) эти фазы можно считать постоянными. Подставляя теперь (7) в (3), учитывая (6) и малость амплитудных флуктуаций, нетрудно получить следующие уравнения для флуктуаций амплитуд и фаз:

$$\dot{\alpha}_1 = -p_{1_1} \alpha_1 - p_{1_2} \alpha_2 + \frac{\omega_1}{2R_{0_1}} (e_{\perp 1} \cos \varphi_1 - e_{\parallel 1} \sin \varphi_1), \\ \dot{\alpha}_2 = -p_{2_1} \alpha_1 - p_{2_2} \alpha_2 + \frac{\omega_2}{2R_{0_2}} (e_{\perp 2} \cos \varphi_2 - e_{\parallel 2} \sin \varphi_2), \\ \dot{\varphi}_1 = -q_{1_1} \alpha_1 - q_{1_2} \alpha_2 - \frac{\omega_1}{2R_{0_1}} (e_{\parallel 1} \cos \varphi_1 + e_{\perp 1} \sin \varphi_1), \\ \dot{\varphi}_2 = -q_{2_1} \alpha_1 - q_{2_2} \alpha_2 - \frac{\omega_2}{2R_{0_2}} (e_{\parallel 2} \cos \varphi_2 + e_{\perp 2} \sin \varphi_2). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$$p_{ij} = \frac{R_{0_j}}{2\omega_i R_{0_i}} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial R_j} \right)_0, \quad q_{ij} = \frac{R_{0_j}}{2\omega_i} \left[ \frac{\partial (\Psi_i / R_i)}{\partial R_j} \right]_0 \quad (i, j = 1, 2).$$

Индекс 0 у производных означает, что значение производной взято при  $R_1 = R_{0_1}$ ,  $R_2 = R_{0_2}$ . Случайные функции  $e_{\parallel 1}$ ,  $e_{\parallel 2}$ ,  $e_{\perp 1}$ ,  $e_{\perp 2}$  равны

$$e_{\parallel i} = \frac{2}{T} \int_{t-T}^t E_i(\xi) \cos \omega_{0_i} \xi d\xi, \quad e_{\perp i} = -\frac{2}{T} \int_{t-T}^t E_i(\xi) \sin \omega_{0_i} \xi d\xi \quad (9)$$

$$(i = 1, 2).$$

Функции  $e_{\parallel 1}$ ,  $e_{\parallel 2}$ ,  $e_{\perp 1}$ ,  $e_{\perp 2}$  можно считать дельта-коррелированными взаимно независимыми случайными воздействиями [9], несмотря

на то, что  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  в общем случае могут содержать одинаковые члены и быть статистически зависимыми.

Устойчивость стационарных амплитуд  $R_{0_1}$ ,  $R_{0_2}$  накладывает на  $p_{ij}$  следующие условия, которые мы считаем выполненными:

$$p_{11} + p_{22} \equiv 2\delta > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \equiv \Omega_0^2 > 0. \quad (10)$$

## 2. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ДВУХЧАСТОТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Пользуясь методом статистической эквивалентности [10], уравнения (8) заменяем на эквивалентные им:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 + f_1(t), \\ \dot{\alpha}_2 &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 + f_2(t), \\ \dot{\varphi}_1 &= -q_{11}\alpha_1 - q_{12}\alpha_2 - f_3(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= -q_{21}\alpha_1 - q_{22}\alpha_2 - f_4(t), \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{\omega_1}{2R_{0_1}} e_{\perp 1}, & f_2(t) &= \frac{\omega_2}{2R_{0_2}} e_{\perp 2}, \\ f_3(t) &= \frac{\omega_1}{2R_{0_1}} e_{\parallel 1}, & f_4(t) &= \frac{\omega_2}{2R_{0_2}} e_{\parallel 2}. \end{aligned}$$

Спектральные плотности дельта-коррелированных статистически независимых функций  $f_1, f_2, f_3, f_4$  могут быть найдены из (9):

$$\begin{aligned} S_{f_1} = S_{f_3} &= \frac{\omega_1^2}{2R_{0_1}^2} S_{E_1}(\omega_{0_1}) \equiv \frac{D_1}{2\pi}, \\ S_{f_2} = S_{f_4} &= \frac{\omega_2^2}{2R_{0_2}^2} S_{E_2}(\omega_{0_2}) \equiv \frac{D_2}{2\pi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $S_{E_1}(\omega_{0_1})$  и  $S_{E_2}(\omega_{0_2})$  — значения спектральных плотностей случайных функций  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  на установившихся частотах  $\omega_{0_1}$  и  $\omega_{0_2}$ .

Из первых двух уравнений (11) определяются спектральные плотности амплитудных флуктуаций:

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(\Omega^2 + p_{22}^2) D_1 + p_{12}^2 D_2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \\ S_{\alpha_2}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(\Omega^2 + p_{11}^2) D_2 + p_{21}^2 D_1}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \\ S_{\alpha_1 \alpha_2}^0(\Omega) &= \frac{-1}{2\pi} \frac{p_{21} p_{22} D_1 + p_{12} p_{11} D_2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \\ S_{\alpha_1 \alpha_2}^1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega(p_{12} D_2 - p_{21} D_1)}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $S_{\alpha_1, \alpha_2}^0$  и  $S_{\alpha_1, \alpha_2}^1$  — соответственно четная и нечетная части совместной спектральной плотности.

Из (13) нетрудно вычислить значения дисперсий амплитудных флуктуаций

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1^2 \rangle &= \frac{1}{4\delta} \left( D_1 + \frac{p_{22}^2}{\Omega_0^2} D_1 + \frac{p_{12}^2}{\Omega_0^2} D_2 \right), \\ \langle \alpha_2^2 \rangle &= \frac{1}{4\delta} \left( D_2 + \frac{p_{22}^2}{\Omega_0^2} D_2 + \frac{p_{21}^2}{\Omega_0^2} D_1 \right), \end{aligned}$$

которые, как предполагалось выше, должны быть много меньше единицы. Отсюда легко получить необходимые условия малости естественных шумов (малость  $D_1$  и  $D_2$ ). Из двух последних уравнений системы (11) определяются спектральные плотности флуктуаций частот  $\nu_1 = \dot{\varphi}$  и  $\nu_2 = \dot{\psi}$ :

$$\begin{aligned} S_{\nu_1}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} D_1 + q_{11}^2 S_{\alpha_1}(\Omega) + q_{12}^2 S_{\alpha_2}(\Omega) + 2q_{11}q_{12} S_{\alpha_1, \alpha_2}^0(\Omega), \\ S_{\nu_2}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} D_2 + q_{21}^2 S_{\alpha_1}(\Omega) + q_{22}^2 S_{\alpha_2}(\Omega) + 2q_{21}q_{22} S_{\alpha_1, \alpha_2}^0(\Omega). \end{aligned} \quad (14)$$

Будем называть бигармонический автогенератор изохронным, если изменения амплитуд обеих мод не влияют на их частоты. Другими словами, бигармонический генератор мы считаем изохронным, если  $q_{ij} \equiv 0$ . Для такого генератора вместо (14) получаем

$$S_{\nu_1}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi}, \quad S_{\nu_2}(\Omega) = \frac{D_2}{2\pi}. \quad (15)$$

Итак, для изохронного бигармонического генератора частотные флуктуации являются дельта-коррелированными и независимыми, с различными значениями спектральных плотностей (не зависящих от частоты).

Естественное уширение спектральных линий обеих мод генератора определяется известными выражениями

$$\Delta\Omega_1 = \pi^2 S_{\nu_1}(0), \quad \Delta\Omega_2 = \pi^2 S_{\nu_2}(0). \quad (16)$$

Таким образом, *разные* моды изохронного бигармонического генератора имеют *разную* ширину спектральной линии. Это обстоятельство связано, очевидно, с тем, что рассматривался асинхронный генератор, у которого моды взаимодействуют (на нелинейности) только через амплитуды, но не фазы (см. (3)). Таким образом, если и имеется корреляция между флуктуациями различных мод у изохронного генератора, то она может быть только у амплитудных флуктуаций, к более подробному рассмотрению которых мы и перейдем.

В общем случае флуктуации амплитуд описываются первой парой уравнений (11). Очевидно, что из-за статистической независимости  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  коррелированность амплитудных флуктуаций разных мод обязана только ненулевым значениям  $p_{12}$ ,  $p_{21}$ . Вместе с тем значения  $p_{ij}$  определяют спектры амплитудных флуктуаций и фазовые траектории вблизи состояний равновесия (на плоскости переменных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ).

Поэтому представляет интерес, исходя из возможных картин фазовых траекторий, выяснить и картины спектров амплитудных флуктуаций и их коррелированность.

Поскольку устойчивые значения амплитудных отклонений (в отсутствие флуктуаций) равны  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ , то устойчивым состоянием равновесия на плоскости  $\alpha_1, \alpha_2$  является начало координат (точка  $O$  на рис. 1). При этом точка  $O$  может быть или устойчивым узлом, или устойчивым фокусом, что определяется значениями коэффициентов  $p_{ij}$  (удовлетворяющих, как указывалось выше, условиям (10)).

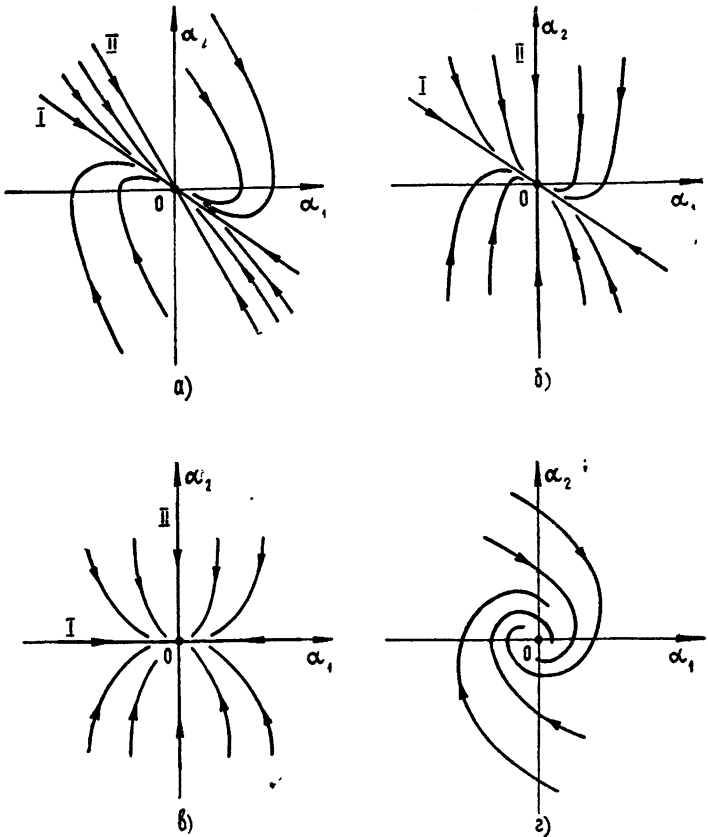


Рис. 1.

1) Пусть коэффициенты  $p_{ij}$  таковы, что  $\delta^2 > \Omega_0^2$ . На фазовой плоскости этому условию соответствует устойчивый узел. Знаменатель в правых частях формул (13) в этом случае целесообразно записать по-другому:

$$(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 = (\Omega^2 + \Omega_1^2)(\Omega^2 + \Omega_2^2),$$

где

$$\Omega_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2} > 0, \quad \Omega_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2} > 0.$$

Отсюда следует монотонность спектральных плотностей амплитудных флуктуаций, спадающих при возрастании  $\Omega$ . Ширина спектра амплитудных флуктуаций равна примерно

$$\pi \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} = \pi \frac{\Omega_0^2}{2\delta} < \pi \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} (\Omega_1 + \Omega_2).$$

Фазовые траектории около рассматриваемого устойчивого узла в зависимости от значений коэффициентов  $p_{12}$ ,  $p_{21}$  имеют различный вид, что в общем случае соответствует разной коррелированности амплитудных флуктуаций.

Рассмотрим три частных случая.

а)  $p_{12}$ ,  $p_{21} \neq 0$ . Фазовая картина представлена на рис. 1 а. Среди фазовых траекторий существуют две прямые I и II, не совпадающие с осями. Это приводит к тому, что при статистическом усреднении (по начальным условиям) появляется взаимная корреляция между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

б) Один из коэффициентов, например,  $p_{12}$  равен нулю, другой отличен от нуля. В этом случае одна из прямых совпадает с осью  $\alpha_2$  (рис. 1 б) и, следовательно, при статистическом усреднении флуктуации амплитуды  $\alpha_2$  не влияют на  $\alpha_1$ , хотя обратное влияние сохраняется.

в)  $p_{12} = p_{21} = 0$ . Как видно из картины фазовой плоскости (рис. 1 в), вышеуказанные прямые совпадают с осями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Флуктуации  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  становятся статистически независимыми, их спектральные плотности принимают такой же вид, как и для двух независимых одночастотных генераторов:

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi(p_{11}^2 + \Omega^2)},$$

$$S_{\alpha_2}(\Omega) = \frac{D_2}{2\pi(p_{22}^2 + \Omega^2)}.$$

2) Пусть коэффициенты  $p_{ij}$  таковы, что  $\Omega_0^2 > \delta^2$  (при этом, как можно видеть, должно быть  $p_{12} p_{21} < 0$ ). В этом случае имеется устойчивый фокус (рис. 1 г). Среди фазовых траекторий не существует прямых, поэтому всегда есть взаимная корреляция между флуктуациями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Спектральные плотности амплитудных флуктуаций имеют при этом максимум шириной  $\propto \delta$  вблизи частоты  $\Omega_0$ .

Рассмотрим теперь спектр автоколебаний генератора. Двухчастотный генератор имеет, очевидно, две спектральные линии, соответствующие двум модам: первую на частоте  $\omega_{01}$ , вторую на частоте  $\omega_{02}$ . Форма спектральной линии каждого колебания в общем случае не симметрична и поэтому ее можно представить как

$$W_i(\Omega) = W_i^0(\Omega) + W_i^1(\Omega),$$

где  $W_i^0(\Omega)$ ,  $W_i^1(\Omega)$  — четная и нечетная компоненты спектральной линии. Частота  $\Omega$  отсчитывается соответственно от  $\omega_{0i}$ . Компоненты спектральных линий, согласно [11], определяются следующими формулами:

$$W_i^0(\Omega) = \frac{R_{0i}^2}{2} \left\{ \frac{S_{v_i}(0)}{[\pi S_{v_i}(0)]^2 + \Omega^2} + \frac{S_{v_i}(\Omega) - S_{v_i}(0)}{\Omega^2} + S_{\alpha_i}(\Omega) \right\}, \quad (17)$$

$$W_i^1(\Omega) = \frac{R_{0i}^2}{2} \left\{ \frac{2S_{\alpha_i v_i}^0(0)\Omega}{[\pi S_{v_i}(0)]^2 + \Omega^2} + 2 \frac{S_{\alpha_i v_i}^0(\Omega) - S_{\alpha_i v_i}^0(0)}{\Omega} \right\},$$

где  $S_{\alpha_i v_i}^0$  — четная часть совместной спектральной плотности флуктуаций амплитуды и частоты, найденная из уравнений (11) и равная

$$S_{\alpha_1 v_1}^0(\Omega) = q_{11} S_{\alpha_1}(\Omega) + q_{12} S_{\alpha_1 \alpha_2}^0(\Omega),$$

$$S_{\alpha_2 v_2}^0(\Omega) = q_{22} S_{\alpha_2}(\Omega) + q_{21} S_{\alpha_1 \alpha_2}^0(\Omega), \quad (18)$$

Подставляя (13) и (14) в (17) и (18), можно определить формы спектральных линий мод в самом общем случае. Из-за громоздкости полученных выражений мы их приводить не будем. Укажем только, что спектры мод состоят из почти симметричных узкополосных пиков шириной (16) и несимметричных широкополосных пьедесталов.

В случае изохронного генератора амплитудные и частотные флуктуации являются независимыми, вследствие чего формы спектральных линий мод становятся симметричными и имеют вид

$$W_i(\Omega) = W_i^0(\Omega) = \frac{R_{0i}^2}{2} \left[ \frac{D_i/2\pi}{D_i^2/4 + \Omega^2} + S_{oi}(\Omega) \right] \quad (19)$$

$$(i = 1, 2).$$

Первое слагаемое здесь представляет собой обычную естественную форму спектральной линии—пик резонансной формы, второе слагаемое образует пьедестал линии. На основании вышеизложенного очевидно, что форма пьедестала сильно связана с видом устойчивого состояния равновесия системы. Так, в случае устойчивого узла спектральные линии мод будут иметь центральные пики и монотонно спадающие пьедесталы (рис. 2 а), в то время как для устойчивого фокуса пьедесталы будут обладать двумя максимумами на расстоянии  $\pm \Omega_0$  от центральной части мод (рис. 2 б).

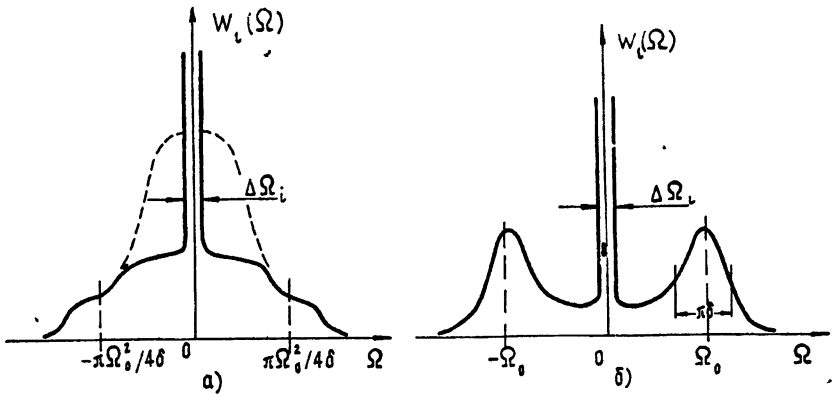


Рис. 2.

### 3. КОНКРЕТНАЯ СХЕМА ДВУХЧАСТОТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Проиллюстрируем полученные результаты на примере простейшего двухчастотного генератора (рис. 3). Естественные шумы в этой схеме представлены дробовым шумом лампы  $i_{r,2}(t)$  и тепловыми ЭДС сопротивлений потерь контуров  $\mathcal{E}_1(t)$  и  $\mathcal{E}_2(t)$ . Остальные обозначения ясны из рисунка. Как можно показать на основании [4], для получения в этой схеме стационарных бигармонических колебаний необходима аппроксимация характеристики лампы полиномом не ниже пятой степени. Поэтому полагаем

$$I_a = s_0 u_c + \frac{1}{3} s_2 u_c^3 - \frac{1}{5} s_4 u_c^5 \quad (s_0, s_2, s_4 > 0).$$

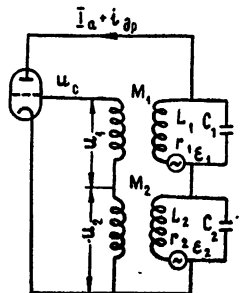


Рис. 3.



В рассматриваемой схеме нормальные частоты будут совпадать с парциальными частотами контуров (нет связи между контурами):

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

За переменные  $u_1$  и  $u_2$  берем напряжения, развиваемые в цепях обратной связи. При этом  $u_c = u_1 + u_2$ . В уравнениях движения (1) случайные ЭДС имеют вид

$$\begin{aligned} E_1(t) &= M_1 \left( \frac{di_{\text{ап}}}{dt} + C_1 \frac{d^2 \mathcal{E}_1}{dt^2} \right), \\ E_2(t) &= M_2 \left( \frac{di_{\text{ап}}}{dt} + C_2 \frac{d^2 \mathcal{E}_2}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Нелинейные функции (4) равны

$$\begin{aligned} \Phi_1(R_1, R_2) &= \frac{1}{8} \omega_1^3 M_1 R_1 \left[ s_4 (R_1^4 + 6R_1^2 R_2^2 + 3R_2^4) - 2s_2 (R_1^2 + 2R_2^2) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \left( s_0 - \frac{r_1 C_1}{M_1} \right) \right], \\ \Phi_2(R_1, R_2) &= \frac{1}{8} \omega_2^3 M_2 R_2 \left[ s_4 (R_2^4 + 6R_1^2 R_2^2 + 3R_1^4) - 2s_2 (R_2^2 + 2R_1^2) - \right. \\ &\quad \left. - 8 \left( s_0 - \frac{r_2 C_2}{M_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Psi_1(R_1, R_2) \equiv \Psi_2(R_1, R_2) \equiv 0.$$

Таким образом, рассматриваемый генератор является изохронным.

Исследование плоскости квадратов амплитуд показывает (см., например, [4]), что условия устойчивости бигармонического режима будут иметь место, если точки  $x^0 = R_{0_1}^2$  и  $y^0 = R_{0_2}^2$  находятся внутри эллипса ( $x = R_1^2$ ,  $y = R_2^2$ ):

$$\begin{aligned} 6x^2 + 8xy + 6y^2 - 8\beta x - 8\beta y + 3\beta^2 &= 0, \\ \beta &= s_2/s_4. \end{aligned}$$

Этот эллипс обозначен пунктиром на фазовой плоскости рассматриваемого генератора (рис. 4). Нетрудно показать, что устойчивое бигармоническое состояние (точка  $A$ ) всегда будет узлом.

Амплитуды стационарных колебаний и коэффициенты  $p_{ij}$  особенно легко находятся в симметричном случае, когда оба колебания имеют одинаковые коэффициенты возбуждения  $M_1 s_0 / r_1 C_1 = M_2 s_0 / r_2 C_2$ , а следовательно, как видно из (21), и одинаковые стационарные амплитуды

$$R_{0_1}^2 = R_{0_2}^2 = 0,3\beta (1 \pm \sqrt{1 + \gamma}) \equiv R_0^2,$$

где

$$\gamma = \frac{80 s_4}{9s_2^2} \left( s_0 - \frac{r_1 C_1}{M_1} \right) = \frac{80 s_4}{9s_2^2} \left( s_0 - \frac{r_2 C_2}{M_2} \right).$$

Коэффициенты  $p_{ij}$  равны:

$$\begin{aligned} \frac{p_{11}}{g_1} = \frac{p_{22}}{g_2} &= 6\gamma + 7\sqrt{1+\gamma} + 7, \\ \frac{p_{12}}{g_1} = \frac{p_{21}}{g_2} &= 9\gamma + 8\sqrt{1+\gamma} + 8, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$g_1 = \frac{3}{200} \frac{s_2^2}{s_4} \omega_1^2 M_1, \quad g_2 = \frac{3}{200} \frac{s_2^2}{s_4} \omega_2^2 M_2.$$

Используя выражения (22) и (10), находим

$$\delta = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) (6\gamma + 7\sqrt{1+\gamma} + 7), \tag{23}$$

$$\Omega_0^2 = -15 g_1 g_2 (3\gamma^2 + 4\gamma\sqrt{1+\gamma} + 5\gamma + 2\sqrt{1+\gamma} + 2)$$

и условие устойчивости, которое для симметричного случая принимает вид

$$-1 < \gamma < -5/9. \tag{24}$$

При этом амплитуда устойчивых автоколебаний изменяется в пределах

$$0,3\beta < R_0^2 < 0,5\beta.$$

Из картины фазовой плоскости (рис. 4) видно, что устойчивые бигармонические колебания рассмотренного конкретного генератора не могут возбудиться из состояния покоя, а могут быть получены при подходящих начальных условиях\*.

Как известно, спектральные плотности дробовых и тепловых шумов равны

$$\begin{aligned} S_{I_{др}} &= \frac{1}{2\pi} e I_0 \Gamma^2, \\ S_{\mathcal{E}_i} &= \frac{1}{\pi} k T r_i, \end{aligned}$$

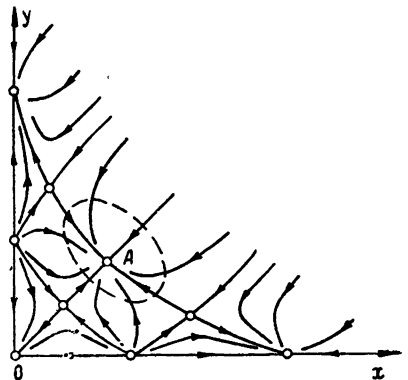


Рис. 4.

где  $e$  — заряд электрона,  $I_0$  — средний анодный ток,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\Gamma^2$  — коэффициент депрессии дробового шума. Используя (12), (15) и (20), нетрудно найти теперь спектральную плотность частотных флуктуаций, а следовательно, и ширину спектральной линии (16) каждой моды:

\* В ряде работ [5-7] приводятся другие, видоизмененные схемы двухчастотных автогенераторов, в которых уже возможно самовозбуждение бигармонического режима.

$$\Delta\Omega_i = \frac{\pi\omega_i^2}{4R_0^2(s_0R_{0e_i})^2} (2kTr_i + eI_0\Gamma^2r_iR_{0e_i})$$

$$(i = 1, 2).$$

Здесь  $R_{0e_1}$  и  $R_{0e_2}$  — резонансные сопротивления первого и второго контуров. Как видно отсюда, разная ширина спектральных линий мод связана с разными частотами мод и с разными потерями контуров.

Формы спектральных линий соответствуют рис. 2 а. При изменении  $\gamma$  в области устойчивости (24) пики спектральных линий мод практически не меняются, а пьедесталы претерпевают существенные изменения. Так, при приближении  $\gamma$  к границам области сильно возрастает дисперсия амплитудных флуктуаций из-за возрастания низкочастотной части пьедестала (шпунктир на рис. 2 а).

В общем случае амплитудные флуктуации мод коррелированы, однако вблизи одной из границ устойчивости существует точка ( $\gamma = -80/81$ ), в которой коэффициенты  $p_{12}$  и  $p_{21}$  обращаются в нуль. При таком значении  $\gamma$  у обеих мод становятся статистически независимыми не только флуктуации частоты, но и амплитудные флуктуации. Такой «некогерентный режим» представляет безусловный интерес для тех приемных систем, в которых взаимодействие мод генератора требует определенного учета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Луговой, Радиотехника и электроника, 6, 1700 (1961).
2. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).
3. А. Г. Майер, Уч. зап. ГГУ, вып. 2, 3 (1935).
4. В. В. Анисимов, Вестник МГУ, сер. физ., № 1, 137 (1956).
5. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 6, 1993 (1959).
6. А. А. Магазаник, Радиотехника и электроника, 4, 1103 (1959).
7. M. I. Dismann, W. A. Edson, Proc. IRE, 46, 895 (1958).
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
9. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 495 (1963).
10. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 710 (1964).
11. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 885 (1967).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
17 апреля 1968 г.

#### INTRINSIC FLUCTUATIONS IN TWO-FREQUENCY AUTO-GENERATOR

*A. N. Malakhov, A. A. Mal'tsev*

The natural fluctuations in an asynchronous two-frequency oscillator near the stationary biharmonic regime are considered. The spectral characteristics of the amplitude and frequency fluctuations have been found. The correlation between fluctuations of different auto-oscillation modes is determined.