ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 621.372

О ДИСПЕРСИИ УГЛА ПРИХОДА ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СРЕДЕ СО СЛАБЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Кляцкин

На основе геометро-оптического приближения в уравнении для дисперсии угла прихода световой волны получен параметр, который описывает условия применимости метода плавных возмущений для распространения волны в турбулентной среде.

В работе [1] было проведено сопоставление экспериментально измеренных значений среднеквадратичной величины флуктуаций угла прихода света в турбулентной атмосфере с вычисленными теоретически на основе метода плавных возмущений. Это сопоставление показало, что для больших расстояний между источником и точкой наблюдения (когда флуктуации уровня амплитуды уже не описываются методом плавных возмущений) дисперсия угла прихода световой волны удовлетворительно описывается выражением, вычисленным из метода плавных возмущений. В работе [2] разработан аппарат, позволяющий вычислять средние значения степеней величины χ—уровня амплитуды—в области, где флуктуации χ уже не описываются методом плавных возмущений. Существенным предположением в [2] является возможность замены полной фазы S световой волны на величину S^0, определенную методом плавных возмущений. В настоящей работе на основе геометро-оптического приближения путем частичного суммирования ряда для $\sigma^2_{\nabla_\perp S}$ — дисперсии угла прихода—получен параметр, который описывает условия применимости метода плавных возмущений для распространения световой волны в турбулентной атмосфере.

В случае малых флуктуаций направления распространения световой волны, в геометро-оптическом приближении фаза волны удовлетворяет уравнению [2]

$$k\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}(\nabla_\perp S)^2=k^2/2\varepsilon, \tag{1}$$

где ε— отклонение флуктуаций диэлектрической проницаемости от среднего значения, т. е. $\langle\varepsilon\rangle=0$, а $\langle\varepsilon^2\rangle\ll 1$. Выполняя усреднение в (1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle S(x)\rangle=-\frac{1}{2k}\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x). \tag{2}$$

Будем считать, что поле ε—гауссово, однородно и изотропно в плоскости $x=\mathrm{const}$. Уравнение для S является нелинейным уравнением, и если мы будем развивать теорию возмущений по ε, то возникает большое число ветвящихся диаграмм, аналогичных диаграммам, рассмотренным Уайлдом [3]. Уравнение (1) можно записать как интеграл по траектории, аналогично случаю уровня амплитуды [2], а именно

$$
\begin{gathered}
S(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon\,[\xi,\ \boldsymbol{R}^S(x,\ \xi;\ \rho)]\, d\xi, \\
\boldsymbol{R}^S(x,\ \xi;\ \rho) = \rho - \frac{1}{2k} \int_\xi^x \nabla_\perp S\,[\eta,\ \boldsymbol{R}^S(x,\ \eta;\ \rho)]\, d\eta.
\end{gathered} \tag{3}
$$

В отличие от уравнения для χ, (3) представляет собой систему уравнений для функций S и $\boldsymbol{R}^S$. Это отличие естественным образом связано с нелинейностью уравнения для S. Характерной чертой (3) является то, что переносится по траектории случайная величина $\varepsilon(x, \rho)$.

Будем решать (3) путем последовательных приближений, полагая

$$
\begin{gathered}
S^n(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon\,[\xi,\ \boldsymbol{R}_n^S(x,\ \xi;\ \rho)\,]\, d\xi, \\
\boldsymbol{R}_n^S(x,\ \xi;\ \rho) = \rho - \frac{1}{2k} \int_\xi^x \nabla_\perp S^{n-1}\,[\eta,\ \boldsymbol{R}_n^S(x,\ \eta;\ \rho)]\, d\eta \\
(n = 1,\ 2,\ \ldots),
\end{gathered} \tag{4}
$$

где $\boldsymbol{R}_0^S = \rho$, $S^0(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon(\xi, \rho)\, d\xi$ соответствуют методу плавных возмущений. Мы будем рассматривать только первое приближение, для которого (индекс 1 опускаем)

$$
\begin{gathered}
S(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon\,[\xi,\ \boldsymbol{R}^S(x,\ \xi;\ \rho)]\, d\xi, \\
\boldsymbol{R}^S(x,\ \xi;\ \rho) = \rho - \frac{1}{2k} \int_\xi^x \nabla_\perp S^0\,[\eta,\ \boldsymbol{R}^S(x,\ \eta;\ \rho)]\, d\eta.
\end{gathered} \tag{4a}
$$

Уравнение для траектории в (4 а), если мы заменим $2k$ на k, совпадает с уравнением траектории для χ. Поэтому мы можем воспользоваться результатами работы [2], взяв линейное приближение для $\boldsymbol{R}$ и усредняя отдельно переносимые величины ε (локальные) и траектории (интегральные).

В этом случае для дисперсии $\nabla_\perp S$ получаем выражение

$$
\begin{gathered}
\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x) = \frac{k^2}{4} \iint_0^x d\xi_1\, d\xi_2 \int dp\,p^2\, \Phi_p^\varepsilon(\xi_1 - \xi_2) \times \\
\times \left\langle \exp\left[\frac{1}{2k} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \int dq\,(pq)\, S_q^0(\eta)\right] \right\rangle.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Отметим, что если бы мы развивали теорию возмущений по ε, то выражение (5) представляло бы собой сумму некоторых диаграмм точного решения

Выполняя усреднение в (5) и используя выражения для $\Phi_p^{S^0}(\xi_1, \xi_2)$ из [2], мы можем переписать (5) в виде

$$\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x) = \pi k^2 \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^\infty dp p^3 \Phi_p^\varepsilon(\xi_1 - \xi_2) \times \times \exp\left[-\frac{3}{2}\frac{p^2}{\varkappa_m^2}\sigma_0^2\frac{(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1+2\xi_2)}{x^3}\right], \tag{6}$$

где σ_0^2 — дисперсия уровня амплитуды в методе плавных возмущений. Учитывая, что при всех σ_0 в интеграле (6) основной вклад дает окрестность линии $\xi_1 \simeq \xi_2$, мы можем заменить область интегрирования на полуполосу. Вводя вместо $\Phi_p^\varepsilon(\eta)$ трехмерный спектр поля диэлектрической проницаемости по формуле

$$\Phi_p^\varepsilon(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p^\varepsilon(q)\exp(iq\eta)\,dq,$$

вместо (6) получим

$$\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x) = 2k^2\pi x^2 \int_0^\infty d\xi \int_0^1 d\eta \iint_0^\infty dp\,dq p^3 \Phi_p^\varepsilon(q)\cos(qx\xi) \times \times \exp\left(-\frac{9}{2}\sigma_0^2\frac{p^2}{\varkappa_m^2}\xi^2\eta\right). \tag{7}$$

Для трехмерного спектра поля ε возьмем выражение [4]

$$\Phi_p^\varepsilon(q) = AC_\varepsilon^2(p^2+q^2)^{-11/6}\exp[-(p^2+q^2)/\varkappa_m^2]\,. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), после интегрирования получаем

$$\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x) = 2k^2\mu\, e^{4/\mu^2}\left[1-\Phi\left(\frac{2}{\mu}\right)\right], \tag{9}$$

где $\mu^2 = 72\dfrac{\sigma_0^2}{x^2\varkappa_m^2}$, а $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}dt$ — интеграл вероятности.

В случае $\mu \ll 2$ $(\sigma_0^2 \ll x^2\varkappa_m^2/18)$

$$\sigma^2_{\nabla_\perp S}(x) \simeq k^2\mu^2, \tag{10}$$

что соответствует методу плавных возмущений.

Из выражения (9) видно, что в случае фазы параметром, характеризующим отклонение решения от соответствующей величины, найденной при помощи метода плавных возмущений, является μ^2. Условие применимости этого метода для расчета фазы можно записать в виде

$$\sigma_0^2 \ll \frac{x^2\varkappa_m^2}{18} \sim \left(\frac{x}{l_0}\right)^2, \tag{11}$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Так как $x/l_0 \gg 1$, то условие (11) допускает большие значения σ_0^2. Таким образом, величиной S^0, найденной методом плавных возмущений, можно пользоваться и в области сильных флуктуаций амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1 А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 1, 66, (1968).
2 В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, **55**, № 2 (8) (1968).
3 H. W. Wyld, Ann. Phys., **14**, 141 (1961).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд Наука, 1967.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
15 августа 1968 г.

ON DISPERSION OF THE ANGLE OF ARRIVAL OF A PLANE LIGHT WAVE PROPAGATING IN A MEDIUM WITH RANDOM WEAK INHOMOGENEITIES

V. I. Klyatskin

The parameter, describing the applicability conditions of the smooth perturbation method in determining of wave propagation in a turbulent medium, is obtained on the basis of the geometrical-optics approximation in the equation for the dispersion of the angle of arrival of a light wave.