ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1969*

УДК 535.31

КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин

Методом геометрической оптики исследовано распространение волн в сильно поглощающих анизотропных средах, а также распространение неоднородных волн в анизотропных средах без поглощения. Записано формальное решение уравнения эйконала с использованием комплексных лучей, которые определены так же, как и в изотропной среде. Предложен удобный способ нахождения решения системы транспонированных уравнений нулевого приближения в общем случае. Это решение использовано для написания условия совместности уравнений первого приближения, из которого найдена амплитуда поля при помощи интегрирования по комплексным лучам. Обсуждается вопрос о направлении вектора Пойнтинга и о скорости распространения неоднородных волн в непоглощающей среде. В качестве примера применения изложенной теории рассмотрена задача о поперечном распространении необыкновенной волны в плоско-слоистой среде с сильным поглощением.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Распространение монохроматических электромагнитных волн ($e^{i\omega t}$) описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = ik_0\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -ik_0\boldsymbol{H}, \tag{1}$$

где $k_0 \equiv \omega/c$, а $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, \omega)$ — тензор диэлектрической проницаемости среды, который может быть представлен в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой частей:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\text{э}}_{\alpha\beta} + \varepsilon^{\text{a}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon^{*}_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^{*}_{\beta\alpha}\right), \\ \left(\varepsilon^{\text{э}}_{\alpha\beta}\right)^{*} = \varepsilon^{\text{э}}_{\beta\alpha}, \quad \left(\varepsilon^{\text{a}}_{\alpha\beta}\right)^{*} = -\varepsilon^{\text{a}}_{\beta\alpha} \qquad (\alpha, \beta = x, y, z).\end{gathered} \tag{2}$$

В опубликованных до настоящего времени работах (см., например, монографии [1−3] и статьи [4−11]) приближение геометрической оптики для уравнений (1) строилось в предположении, что анизотропная среда является непоглощающей или слабо поглощающей, т. е. антиэрмитова часть тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ считалась равной нулю или малой по сравнению с эрмитовой. В данной работе мы откажемся от этого ограничения и рассмотрим волны в сильно поглощающей среде, в которой $|\varepsilon^{\text{a}}_{\alpha\beta}| \sim |\varepsilon^{\text{э}}_{\alpha\beta}|$. В этом случае необходимо пользоваться аппаратом комплексной геометрической оптики, которая опирается на понятие комплексных лучей (см. [12] и цитированную там литературу). Изложенная ниже теория пригодна и для описания неоднородных волн в непоглощающей анизотропной среде, в частности, для описания экспоненциально затухающих волн в области каустической тени.

Отыскивая решение уравнений (1) методом геометрической оптики, представим, как это обычно делается, векторы E и H в виде асимптотических рядов по степеням $1/k_0$:

$$E=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{E^{(m)}}{(ik_0)^m}e^{ik_0\varphi},\quad H=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H^{(m)}}{(ik_0)^m}e^{ik_0\varphi}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях k_0, получаем для амплитуд поля m-го приближения систему уравнений последовательных приближений

$$\begin{aligned} p\times H^{(m)}-\hat{\varepsilon}E^{(m)}&=-\operatorname{rot}H^{(m-1)},\\ p\times E^{(m)}+H^{(m)}&=-\operatorname{rot}E^{(m-1)}, \end{aligned}\tag{4}$$

где $p\equiv\nabla\varphi$ (здесь принято, что величины с индексом $m<0$ тождественно равны нулю).

Для последующего рассмотрения удобно исключить из системы уравнений (4) вектор магнитного поля $H^{(m)}$, перейдя от системы шести уравнений для $E_\alpha^{(m)}$ и $H_\alpha^{(m)}$ к системе трех уравнений для $E_\alpha^{(m)}$

$$(p^2\delta_{\alpha\beta}-p_\alpha p_\beta-\varepsilon_{\alpha\beta})\,E_\beta^{(m)}=(p\times\operatorname{rot}E^{(m-1)}-\operatorname{rot}H^{(m-1)})_\alpha\equiv X_\alpha^{(m-1)}, \tag{5}$$

при этом

$$H^{(m)}=-p\times E^{(m)}+\operatorname{rot}E^{(m-1)}. \tag{6}$$

2. УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ ЛУЧИ

Из условия существования нетривиального решения системы уравнений нулевого приближения

$$A_{\alpha\beta}E_\beta^{(0)}\equiv(p^2\delta_{\alpha\beta}-p_\alpha p_\beta-\varepsilon_{\alpha\beta})\,E_\beta^{(0)}=0 \tag{7}$$

получаем уравнение эйконала (или, что то же, «локальное» дисперсионное уравнение [9—11]) для комплексной фазы φ

$$g(r,\,p)\equiv\det\|A_{\alpha\beta}\|=\det\|p^2\delta_{\alpha\beta}-p_\alpha p_\beta-\varepsilon_{\alpha\beta}\|=0,\qquad p_\alpha\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{8}$$

Несмотря на то, что в случае сильно поглощающей анизотропной среды, а также в случае неоднородных волн, в непоглощающей анизотропной среде фаза φ является комплексной величиной, решение уравнения эйконала (8) можно искать обычными методами, в частности, методом разделения переменных [13, 14] (если это допускается свойствами среды и граничными условиями) или методом характеристик в гамильтоновой форме.

Разумеется, характеристики (лучи), отвечающие уравнению (8) с комплексным p_α и $\varepsilon_{\alpha\beta}$, также комплексны. Уравнения для них выводятся таким же путем, как и уравнения вещественных лучей в непоглощающей среде, а именно

$$\frac{\partial r}{d\tau}=\frac{\partial g}{\partial p},\quad\frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial g}{\partial r}, \tag{9}$$

при этом комплексная фаза φ выражается интегралом

$$\varphi=\varphi_0+\int_0^\tau p\frac{\partial g}{\partial r}\,d\tau, \tag{10}$$

где $\varphi_0 = \varphi_0(\xi, \eta)$ — начальная комплексная фаза на исходной поверхности S, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(\xi, \eta)$.

Интегрирование в (10) ведется вдоль комплексной траектории $\boldsymbol{r}(\tau) = \boldsymbol{R}(\xi, \eta, \tau)$, $\boldsymbol{p}(\tau) = \boldsymbol{P}(\xi, \eta, \tau)$, определяемой из (9) при начальных условиях $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0(\xi, \eta)$, $\boldsymbol{p}(0) = \nabla\varphi_0(\xi, \eta)$. Как и в случае изотропной среды [12], траектория $\boldsymbol{r}(\tau) = \boldsymbol{R}(\xi, \eta, \tau)$, проходящая через рассматриваемую вещественную точку пространства с радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, выходит из комплексной точки $\boldsymbol{r}_0(\xi, \eta)$ на исходной поверхности S. Параметры ξ и η, а также комплексная «длина» луча находятся путем решения системы трех уравнений $x = X(\xi, \eta, \tau)$, $y = Y(\xi, \eta, \tau)$, $z = Z(\xi, \eta, \tau)$ относительно ξ, η и τ.

В рассматриваемую точку пространства могут прийти несколько комплексных лучей со своими значениями фазы. В силу экспоненциального характера изменения поля, описываемого множителем $e^{-k_0 \operatorname{Im}\varphi}$, при конкретных расчетах часть лучей можно исключить из рассмотрения, оставив только те, у которых ослабление $e^{-k_0 \operatorname{Im}\varphi}$ меньше, чем у других. В отличие от изотропной среды при заданном распределении начальной фазы на поверхности S уравнения (9) дают два семейства лучей, отвечающих двум типам нормальных волн (допустим, обыкновенной и необыкновенной волнам). Эти волны, вообще говоря, взаимодействуют друг с другом, однако, в случае «плавно» неоднородных сред и при условии, что коэффициенты преломления двух волн заметно различаются между собой, взаимодействием нормальных волн можно пренебречь. Ниже при вычислении амплитуды поля мы будем рассматривать только какой-либо один тип колебаний.

3. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОНИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для написания условия совместности уравнений первого приближения, из которого находится амплитуда поля, необходимо знать решение системы уравнений, транспонированной по отношению к системе (7). В рассматриваемой задаче, когда тензор $A_{\alpha\beta}$, определяемый уравнениями (7), содержит как эрмитову, так и антиэрмитову компоненты,

$$A_{\alpha\beta} = A^{э}_{\alpha\beta} + A^{а}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + A^{*}_{\beta\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} - A^{*}_{\beta\alpha}\right), \qquad (11)$$

$$\left(A^{э}_{\alpha\beta}\right)^{*} = A^{э}_{\beta\alpha}, \qquad \left(A^{а}_{\alpha\beta}\right)^{*} = -A^{а}_{\beta\alpha},$$

решение транспонированной системы $\widetilde{E}^{(0)}_{\alpha}$ выражается непосредственно через решение системы (7), как это имеет место в случае непоглощающей среды [9–11].

Для того, чтобы найти $\widetilde{E}^{(0)}_{\alpha}$, мы прибегаем к следующему искусственному приему. Запишем вектор $\boldsymbol{E}^{(0)}$ в виде

$$\boldsymbol{E}^{(0)} = \Phi\boldsymbol{f} = \Phi(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2), \qquad (12)$$

где Φ — неопределенный пока комплексный множитель, $\boldsymbol{f}$ — комплексный вектор поляризации для рассматриваемого типа волн, удовлетворяющий системе уравнений (7), а $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ — комплексные векторы, полученные разбиением $\boldsymbol{f}$ на две части по следующему правилу: компоненты тензора $A^{а}_{\alpha\beta}$ и $A^{э}_{\alpha\beta}$ входят в $\boldsymbol{f}_2$ в первой степени, а к $\boldsymbol{f}_1$ отнесены все величины, содержащие билинейные комбинации вида $A^{а}_{\alpha} A^{а}_{\gamma\delta}$ и $A^{э}_{\alpha\beta} A^{э}_{\gamma\delta}$.

В качестве f возьмем вектор с компонентами

$$
\begin{aligned}
f_x &= A_{xy}A_{yz} - A_{xz}A_{yy}, \\
f_y &= A_{yx}A_{xz} - A_{yz}A_{xx}, \\
f_z &= A_{xx}A_{yy} - A_{xy}A_{yx}
\end{aligned} \tag{13}
$$

(все другие решения, удовлетворяющие системе (7), отличаются от (13) постоянным множителем). В отличие от [9, 10] мы не будем нормировать вектор f на единицу при помощи соотношения $(ff^*) = 1$ или каким-либо иным способом. Проводя разбиение (13) в соответствии с указанным выше правилом, для компонент векторов f_1 и f_2 получаем следующие выражения*:

$$
\begin{aligned}
f_{1x} &= A^{э}_{xy}A^{э}_{yz} + A^{а}_{xy}A^{а}_{yz} - A^{э}_{xz}A^{э}_{yy} + A^{а}_{xz}A^{а}_{yy}, \\
f_{2x} &= A^{э}_{xy}A^{а}_{yz} + A^{а}_{xy}A^{э}_{yz} - A^{э}_{xz}A^{а}_{yy} - A^{а}_{xz}A^{э}_{yy}, \\
f_{1y} &= A^{э}_{yx}A^{э}_{xz} + A^{а}_{yx}A^{а}_{xz} - A^{э}_{yz}A^{э}_{xx} + A^{а}_{yz}A^{а}_{xx}, \\
f_{2y} &= A^{э}_{yx}A^{а}_{xz} + A^{а}_{yx}A^{э}_{xz} - A^{э}_{yz}A^{а}_{xx} - A^{а}_{yz}A^{э}_{xx}, \\
f_{1z} &= A^{э}_{xx}A^{э}_{yy} + A^{а}_{xx}A^{а}_{yy} - A^{э}_{xy}A^{э}_{yx} - A^{а}_{xy}A^{а}_{yx}, \\
f_{2z} &= A^{э}_{xx}A^{а}_{yy} + A^{а}_{xx}A^{э}_{yy} - A^{э}_{xy}A^{а}_{yx} - A^{а}_{xy}A^{э}_{yx}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Явные выражения для $A^{э}_{\alpha\beta}$ и $A^{а}_{\alpha\beta}$ таковы:

$$
\begin{aligned}
A^{э}_{\alpha\beta} &= \left(p_1^2 - p_2^2\right)\delta_{\alpha\beta} - \left(p_{1\alpha}p_{1\beta} - p_{2\alpha}p_{2\beta}\right) - \varepsilon^{э}_{\alpha\beta}, \\
A^{а}_{\alpha\beta} &= 2p_1p_2\delta_{\alpha\beta} - \left(p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{2\alpha}p_{1\beta}\right) - \varepsilon^{а}_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Здесь p_1 и p_2 — вещественная и мнимая части комплексного вектора $\nabla\varphi = p = p_1 + ip_2$, представляющего собой «нормаль к комплексному фазовому фронту» $\varphi = \mathrm{const}$.

Транспонированной системе уравнений нулевого приближения

$$
\tilde{A}_{\alpha\beta}\tilde{E}^{(0)}_{\beta} = A_{\beta\alpha}\tilde{E}^{(0)}_{\beta} = 0 \tag{15}
$$

удовлетворяет вектор поляризации $\tilde{f}$ с компонентами

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_x &= A_{yx}A_{zy} - A_{zx}A_{yy}, \\
\tilde{f}_y &= A_{xy}A_{zx} - A_{zy}A_{xx}, \\
\tilde{f}_z &= A_{xx}A_{yy} - A_{yx}A_{xy}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Выделив из $\tilde{f}$ части $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$, соответственно не содержащие и содержащие первые степени компонент тензора $A^{а}_{\alpha\beta}$, и используя (2), (11) и (14), можно убедиться, что

$$
\tilde{f}_1 = f_1^*, \qquad \tilde{f}_2 = -f_2^*. \tag{17}
$$

---

* Возможно, существует более симметричная и потому более изящная форма записи векторов f_1 и f_2 через компоненты тензоров $A^{э}_{\alpha\beta}$ и $A^{а}_{\alpha\beta}$. Найти такую инвариантную относительно исследуемой системы координат форму нам не удалось.

В результате решение $\widetilde{E}^{(0)}$ транспонированной системы (15) выразится через f_1 и f_2 следующим образом:

$$\widetilde{E}^{(0)} = \widetilde{\Phi}\widetilde{f} = \widetilde{\Phi}(\widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2) = \widetilde{\Phi}\left(f_1^* - f_2^*\right), \tag{18}$$

где $\widetilde{\Phi}$ — произвольный комплексный множитель.

Если $A^{a}_{\alpha\beta} = 0$ (однородные волны в среде без поглощения), то $f_2 = \widetilde{f}_2 = 0$ и $\widetilde{f} = f^*$. Следовательно, если положить в (18) $\widetilde{\Phi} = \Phi^*$, то $\widetilde{E}^{(0)} = E^{(0)*}$. Иными словами, в этом случае решение транспонированной системы (15) есть просто комплексно-сопряженное поле $E^{(0)*}$ (общие теоремы по этому вопросу имеются в [17]; частные случаи этих теорем использованы в [9, 11]).

В анизотропном диэлектрике, у которого $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, тензор $A_{\alpha\beta}$ симметричен, при этом f_1 — чисто вещественный, а f_2 — чисто мнимый вектор. В этом случае $\widetilde{f}_1 = f_1^* = f_1$ и $\widetilde{f}_2 = -f_2^* = f_2$, т. е. векторы $\widetilde{f}$ и f совпадают (это следует непосредственно из (13) и (16)). Таким образом, если положить в (18) $\widetilde{\Phi} = \Phi$, то в качестве $\widetilde{E}^{(0)}$ в анизотропном диэлектрике можно взять само поле $E^{(0)}$. В общем же случае нужно пользоваться формулой (18).

Укажем, что если рассматривать векторы поляризации f и $\widetilde{f}$ как функции величин p_α, $\varepsilon^{э}_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon^{a}_{\alpha\beta}$, задаваемые формулами (13) и (16), то вместо (17) можно написать эквивалентное соотношение

$$\widetilde{f}^*\left(p_\alpha^*,\ \varepsilon^{э*}_{\alpha\beta},\ \varepsilon^{a*}_{\alpha\beta}\right) = f\left(p_\alpha,\ \varepsilon^{э}_{\alpha\beta},\ -\varepsilon^{a}_{\alpha\beta}\right), \tag{19}$$

которое может оказаться полезным при конкретных вычислениях. В частном случае непоглощающей среды $\left(\varepsilon^{a}_{\alpha\beta} = 0\right)$

$$\widetilde{f}^*\left(p_\alpha^*,\ \varepsilon^{э*}_{\alpha\beta}\right) = f\left(p_\alpha,\ \varepsilon^{э}_{\alpha\beta}\right). \tag{19a}$$

4. УСЛОВИЕ СОВМЕСТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для совместности системы уравнений первого приближения (в уравнениях (5) следует положить $m = 1$) необходимо, чтобы вектор $X^{(0)}$ в правой части этих уравнений был ортогонален вектору поляризации $\widetilde{f}$, отвечающему транспонированной системе (15) [15]:

$$\widetilde{f}X^{(0)} = \widetilde{f}[\widetilde{p} \times \operatorname{rot} E^{(0)} + \operatorname{rot}(p \times E^{(0)})] = 0. \tag{20}$$

Подстановка (12) в (20) дает уравнение для амплитудного коэффициента Φ:

$$S\nabla \ln \Phi^2 - M = 0, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} S = (\widetilde{f}f)\,p - \frac{1}{2}\,f(p\widetilde{f}) - \frac{1}{2}\widetilde{f}(pf), \\ M = \widetilde{f}\operatorname{rot}(p \times f) + \widetilde{f}(p \times \operatorname{rot} f). \end{gathered} \tag{22}$$

Используя комплексные лучи, решение уравнения (21) можно записать в весьма компактной форме. Для этого учтем, что векторы S и $\frac{\partial g}{\partial p}$ отличаются только скалярным множителем $\alpha = (1/2)(A_{xx}A_{yy} - A_{xy}A_{yx})$:

$$S = \alpha \frac{\partial g}{\partial p} \tag{23}$$

(в правильности соотношения (23) легко убедиться сравнением (22) с результатами прямого дифференцирования определителя $g = \det \| A_{\alpha\beta} \|$), и воспользуемся теоремой, согласно которой

$$\operatorname{div} \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{d}{d\tau} \ln D(\tau), \tag{23a}$$

где $D(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}$ — якобиан перехода от декартовых координат x, y, z к лучевым координатам ξ, η, τ, а $x(\tau)$, $y(\tau)$ и $z(\tau)$ удовлетворяют уравнению $dr/d\tau = \partial g/\partial p$ [16].

С помощью (23) и (23 а) после несложных преобразований приведем уравнение (21) к виду

$$\frac{d}{d\tau}(\ln \Phi^2) = -\frac{d}{d\tau} \ln D(\tau) + S\nabla\alpha + \alpha Q, \tag{24}$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\left[(p \times f)\operatorname{rot}\tilde{f} - (p \times \tilde{f})\operatorname{rot} f + \tilde{f}\operatorname{rot}(p \times f) - f\operatorname{rot}(p \times \tilde{f})\right].$$

При выводе этого уравнения принято во внимание, что

$$\frac{d}{d\tau} \ln \Phi^2 = \nabla \ln \Phi^2 \frac{dr}{d\tau} = \nabla \ln \Phi^2 \frac{\partial g}{\partial p} = \alpha S \nabla \ln \Phi^2.$$

В негиротропной среде скаляр Q тождественно равен нулю, так как $\tilde{f} = f$.

Уравнение (24) имеет следующее решение:

$$\Phi = \Phi(0) \sqrt{\frac{D(0)}{D(\tau)}} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^\tau (S\nabla\alpha + \alpha Q)\, d\tau\right], \tag{25}$$

где $\Phi(0)$ и $D(0)$ — значения Φ и D на исходной поверхности S (т. е. при $\tau = 0$). Интегрирование в (24) ведется по комплексной траектории $r(\tau)$.

Заметим, что из (25) можно определить модуль и аргумент комплексного фактора $\Phi = |\Phi| e^{i\delta}$ в отдельности. Однако в рассматриваемой задаче выделение из Φ амплитудного и фазового множителей имеет весьма условный характер, поскольку изменения амплитуды описываются еще и множителем $e^{-k_0\varphi_2}$.

5. О НАПРАВЛЕНИИ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН В НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

При использовании формул (10) и (25) для комплексной амплитуды и комплексной фазы волны предполагается, что комплексные траектории (лучи) известны. Во всяком случае подразумевается, что решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (9) проще, чем решение исходных уравнений Максвелла. В действительности, однако, аналитические выражения для комплексных траекторий, а следовательно, для амплитуды и фазы волны удается найти лишь в немногих частных случаях (сказанное относится, впрочем, и к вещественным траекториям). В связи с этим подчеркнем, что переход к геометрическому приближению еще не дает решения уравнений Максвелла в общепринятом смысле этого слова, а представляет собой лишь сведение волновой задачи, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных, к решению более простых обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тем не менее введение лучей представляется полезным для качественного описания структуры поля, как это хорошо известно, для вещественных лучей. Хотя в отношении комплексных лучей возможность получить наглядную физическую интерпретацию существенно сужается, с их помощью все же удается сделать ряд заключений о направлении потока электромагнитной энергии.

В работе [12] было показано, что в отсутствие поглощения вектор плотности потока интенсивности скалярной волны в изотропной среде направлен вдоль вещественной части вектора волновой нормали $\boldsymbol{p}_1 = \mathrm{Re}\,\nabla\varphi$ и нормален мнимой части $\boldsymbol{p}_2 = \mathrm{Im}\,\nabla\varphi$. Для непоглощающей анизотропной среды можно доказать аналогичное, хотя и несколько более слабое утверждение, заключающееся в том, что в нулевом приближении комплексной геометрической оптики усредненный по периоду колебаний вектор Пойнтинга

$$S_0 = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}^{(0)*} \times \boldsymbol{H}^{(0)} + \boldsymbol{E}^{(0)} \times \boldsymbol{H}^{(0)*}\right) \tag{26}$$

ортогонален вектору $\boldsymbol{p}_2$.

В самом деле, положим в уравнениях (4) $m = 0$ и умножим скалярно первое уравнение на $\boldsymbol{E}^{(0)*}$, а второе на $\boldsymbol{H}^{(0)*}$, после чего вычтем одно скалярное произведение из другого. Это приводит к соотношению

$$S_0 \boldsymbol{p} = \frac{c}{16\pi}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} E_\alpha^{(0)*} E_\beta^{(0)} + H_\alpha^{(0)} H_\alpha^{(0)*}\right), \tag{27}$$

в котором вектор S_0 и выражение в первой части вещественны. Приравнивая в (27) вещественные и мнимые части, получаем

$$S_0 \boldsymbol{p}_1 = \frac{c}{16\pi}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} E_\alpha^{(0)*} E_\beta^{(0)} + H_\alpha^{(0)} H_\alpha^{(0)*}\right); \tag{28}$$

$$S_0 \boldsymbol{p}_2 = 0. \tag{29}$$

Формула (29) и доказывает наше утверждение.

Отметим, что (29) вытекает и из точной теоремы Пойнтинга, которая в случае монохроматических полей без сторонних источников утверждает, что

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} \equiv \mathrm{div}\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = 0. \tag{30}$$

Учитывая, что в приближении геометрической оптики поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ пропорциональны $e^{ik_0\varphi} = e^{ik_0\varphi_1 - k_0\varphi_2}$ и что амплитуды полей описываются асимптотическими разложениями (3), вектор $\boldsymbol{S}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{S}_m}{(ik_0)^m}\, e^{-2k_0\varphi_2}, \tag{31}$$

Тогда из (30) и (31) следует, что в m-м приближении

$$\frac{1}{k_0}\operatorname{div} S_{m-1} + S_m p_2 = 0.$$

При $m = 0$ отсюда вытекает (29).

Физический смысл соотношения (29) заключается в том, что поток энергии в неоднородной волне направлен параллельно поверхности $\varphi_2 = \operatorname{Im}\varphi = \text{const}$. Разумеется, в действительности имеется и нормальная к поверхности $\varphi_2 = \text{const}$ составляющая вектора Пойнтинга, но она появляется не в нулевом, а в первом и более высоких приближениях относительно $1/k_0$.

Отметим одно следствие из соотношения (28). Если умножить обе части (29) на ω/c, обозначив вектор $\omega p_1/c$ через k_1, и продифференцировать по k_1, то мы получаем соотношение

$$S_0 = \frac{\partial\omega}{\partial k_1} W_0, \tag{32}$$

связывающее вектор Пойнтинга S_0 с плотностью электромагнитной энергии

$$W_0 = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{\alpha\beta})}{\partial\omega} E_\alpha^{(0)*} E_\beta^{(0)} + H_\alpha^{(0)} H_\alpha^{(0)*}\right].$$

При некоторых дополнительных условиях вектор $u_1 = \dfrac{\partial\omega}{\partial k_1}$ можно. по-видимому, интерпретировать как вектор групповой скорости неоднородной волны. Рассмотрим, например, плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль оси x и затухающую в направлении y,

$$E \sim \exp\left[ik_1(\omega)\,x - k_2(\omega)\,y - i\omega t\right]. \tag{33}$$

Закон дисперсии $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$ определяется дисперсионными свойствами импедансной поверхности $y = 0$, удерживающей неоднородную волну, и свойствами окружающей среды (в однородной изотропной среде с $\varepsilon = 1$, $k_1 = \omega/c$ и $k_2 = \sqrt{k_1^2 - \omega^2/c^2}$).

Квазимонохроматический сигнал, представляющий собой суперпозицию волн вида (33) со спектральной плотностью $F(\omega)$, можно записать в виде интеграла Фурье

$$E(x, y, t) \sim \int F(\omega) \exp\left[ik_1(\omega)\,x - k_2(\omega)\,y - i\omega t\right] d\omega, \tag{34}$$

причем $F(\omega)$ отлично от нуля в узком интервале $(\omega_0 - \Delta\omega,\ \omega_0 + \Delta\omega)$. Разлагая $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$ в степенные ряды по расстройке $\omega - \omega_0$ и проводя интегрирование, ограничившись линейными относительно $\omega - \omega_0$ членами в показателе экспоненты, заключаем, что величина

$$u_1 = \left(\frac{dk_1}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{d\omega}{dk_1} \tag{35}$$

может характеризовать скорость распространения высокочастотного импульса как целого при условии, что

$$y\left|\frac{dk_2}{d\omega}\Delta\omega\right| \ll 1, \tag{36}$$

Так как по порядку величины $\left|\frac{dk_2}{d\omega}\right| \sim \left|\frac{dk_1}{d\omega}\right|$ и $\Delta\omega \sim T^{-1}$, где T — длительность импульса, условие (36) можно записать в виде

$$y \ll u_1 T. \tag{36a}$$

При $y \gtrsim u_1 T$, т. е. на расстояниях от плоскости $y = 0$, сравнимых с пространственной длиной импульса, условие (36) не выполняется. Отсюда следует, что величину u_1 можно рассматривать как групповую скорость цуга волн только вблизи поверхности $y = 0$. Вопрос о том, можно ли приписать вектору $\boldsymbol{u}_1 = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}_1}$ смысл вектора групповой скорости в других условиях, остается открытым.

6. ПРИМЕР

а) Рассмотрим простую задачу о нормальном падении необыкновенной волны* на слой поглощающей магнитоактивной плазмы, свойства которой меняются только в направлении z, а внешнее статическое магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ имеет только y-компоненту (случай поперечного распространения).

Как известно, показатель преломления и компоненты вектора поляризации необыкновенной волны при поперечном распространении выражаются формулами [1]

$$p^2 = (p_1 + ip_2)^2 = 1 - \frac{v(1 - v - is)}{(1 - u - v - s^2) - is(2 - v)},$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_x + \frac{iv\sqrt{u}(1 - u - v - s^2)}{(1 - u - v - s^2)^2 + s^2(2 - v)^2}\,\boldsymbol{e}_z \equiv f_{1x}\boldsymbol{e}_x + if_{1z}\boldsymbol{e}_z, \tag{37}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = -\frac{sv\sqrt{u}(2 - v)\,\boldsymbol{e}_z}{(1 - u - v - s^2)^2 + s^2(2 - v)^2} \equiv f_{2z}\boldsymbol{e}_z,$$

где $u = \omega_H^2/\omega^2$, $\omega_H = eH_0/mc$, $v = \omega_0^2/\omega^2$, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$, $S = \nu_{\text{эфф}}/\omega$; $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ — единичные векторы в направлении соответствующих координатных осей.

При помощи (17) получаем, что компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{f}}$ имеют вид

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1 = f_{1x}\boldsymbol{e}_x - if_{1z}\boldsymbol{e}_z, \quad \tilde{\boldsymbol{f}}_2 = -f_{2z}\boldsymbol{e}_z. \tag{38}$$

Используя (37) и (38), запишем уравнение (21) следующим образом:

$$S_z \frac{d}{dz}\ln\Phi^2 - M = 0. \tag{39}$$

Здесь

$$S_z = S_{z1} + iS_{z2} = f_{1x}^2 p_1 + if_{1x}^2 p_2,$$

$$M = M_1 + M_2 = -\frac{dp_1}{dz} - i\frac{dp_2}{dz}.$$

* Обыкновенная волна не рассматривается, так как ее распространение описывается таким же образом, как и распространение поперечной волны в изотропной среде с $H_0 = 0$.

Уравнение (39) после разделения вещественной и мнимой частей запишется в виде системы уравнений для $|\Phi|$ и $\delta = \arg \Phi$:

$$\frac{d \ln|\Phi|}{dz} - \frac{d\delta}{dz}\frac{S_{z2}}{S_{z1}} + \frac{M_1}{S_{z1}} = 0,$$

$$\frac{d \ln|\Phi|}{dz} + \frac{d\delta}{dz}\frac{S_{z1}}{S_{z2}} + \frac{M_2}{S_{z2}} = 0,$$

которая легко решается:

$$\ln|\Phi| = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{M_1 S_{z1} + M_2 S_{z2}}{S_{z1}^2 + S_{z2}^2}\, dz,$$

$$\delta = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{M_2 S_{z1} - M_1 S_{z2}}{S_{z1}^2 + S_{z2}^2}\, dz. \qquad (40)$$

Интегрирование в (40) производится от точки z_0, отвечающей началу слоя.

Из выражений (40) видно, что величины $\ln|\Phi|$ и δ могут быть любого знака (в зависимости от того, какой член в подынтегральных выражениях превалирует). Для перехода к непоглощающей среде необходимо положить $p_2 = f_{z2} = S_{z2} = M_2 = 0$. Тогда из (40) получаем известный закон изменения амплитуды $|\Phi| = \mathrm{const}/\sqrt{p_1}$, при этом $\frac{d\delta}{dz} = 0$, т. е. фаза δ постоянна и может быть положена равной нулю.

б) В качестве второго примера рассмотрим задачу о распространении необыкновенной неоднородной волны в одноосном кристалле в области каустической тени. Выбирая систему координат так, чтобы направление анизотропии совпадало с осью y (распространение происходит в плоскости xy), получим из (5) для необыкновенной волны (вектор E лежит в плоскости распространения)

$$\left(p_y^2 - \varepsilon_1\right) E_x^{(0)} - p_x p_y E_y^{(0)} = 0,$$

$$- p_x p_y E_x^{(0)} + \left(p_x^2 - \varepsilon_2\right) E_y^{(0)} = 0, \qquad (41)$$

где ε_1 и ε_2 — вещественные компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Рассматривая для простоты случай плоско-слоистой среды, свойства которой меняются вдоль оси x, с учетом (8) и (41) имеем

$$p_x^2 = \frac{\varepsilon_2\left(\varepsilon_1 - p_y^2\right)}{\varepsilon_1}, \qquad (42)$$

где $|\varepsilon_1| < p_y^2$. Если p_y^2 вещественно, то, очевидно, p_x будет величиной чисто мнимой:

$$p_x = i|p_x| = i\sqrt{\frac{\varepsilon_2\left(p_y^2 - \varepsilon_1\right)}{\varepsilon_1}}.$$

Компоненты вектора поляризации записываются в виде

$$\frac{f_x}{i|p_x|p_y} = \frac{f_y}{p_y^2 - \varepsilon_1}, \qquad (43)$$

откуда с учетом (17) получаем

$$f_1^* = f_1 \equiv f_y, \quad f_2^* \equiv -f_2 = f_x. \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что с помощью (44) условие совместности (20) можно представить как

$$e^{-i\delta}\varepsilon\,[\mathrm{rot}\,(p \times \varepsilon e^{i\delta}) + p \times \mathrm{rot}\,(\varepsilon e^{i\delta})] = 0, \tag{45}$$

где $\varepsilon = \Phi f_0$.

Полагая в (45) вещественную и мнимую части равными нулю и учитывая соотношения

$$S_1 \equiv S_y, \; S_2 \equiv S_x = -\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,(p_y^2 - \varepsilon_1)^{3/2}\, e_x \tag{46}$$

$(S \equiv S_1 + iS_2 = f \times p \times f)$, получим

$$S_y \frac{\partial \ln \Phi^2}{\partial x} - 2S_x \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0,$$

$$S_x \frac{\partial \ln \Phi^2}{\partial x} + S_y \frac{\partial \delta}{\partial y} = -\frac{\partial S_x}{\partial x}.$$

Из последней системы имеем

$$\delta = \mathrm{const}, \quad \Phi^2 = \frac{\mathrm{const}}{S_x} \equiv \frac{A^2}{S_x},$$

откуда с учетом (42), (46) непосредственно записываются выражения, определяющие компоненты электрического поля волны

$$\begin{aligned} E_x &= iA \frac{p_y}{\sqrt{p_x}\,\varepsilon_1^{1/4}} \exp\left(-\frac{\omega}{e} \int |p_x|\, dx + i\frac{\omega}{c} p_y y\right), \\ E_y &= A \frac{(p_y^2 - \varepsilon_1)^{1/4}}{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{\omega}{c} \int |p_x|\, dx + i\frac{\omega}{c} p_y y\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Таким образом, учитывая (29), можно сделать вывод, что в данном случае направление наибыстрейшего спадания поля совпадает с осью x. Вектор же Пойнтинга S_0 направлен параллельно оси y, вдоль которой и происходит перенос энергии.

Авторы глубоко признательны С. М Рытову за прочтение статьи и ценные замечания, а также Б. Н. Гершману за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. K. G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, 1961.
3. Д. А. Ратклифф, Магнито-ионная теория и ее приложение к ионосфере, изд. ИЛ, М., 1962.
4. S. Weinberg, Phys. Rev., 126, 1899 (1962)
5. H. Poeverlein, Phys. Rev., 128, 959 (1962).
6. J. Bazer, J. Hurley, J. Geophys. Res., 68, 147 (1963).
7. Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1108 (1966).
8. Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 756 (1967).
9. Ю. А. Зайцев, Ю А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1802 (1968).
10. R. M. Lewis, Ann. Mech. Ratnl. Math., 20, 191 (1965).
11. Ю А. Кравцов, ЖЭТФ (в печати).

12 Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1283 (1967).
13 Ю. Я. Яшин, Тезисы IV Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Харьков, 1967.
14. Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 4, 491 (1968).
15. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, I, Гостехиздат, М., 1951.
16. В. А Смирнов, Курс высшей математики, **3**, ч 1, Гостехиздат, М., 1952
17. С. М. Рытов, Диссертация, Тр. ФИАН, **2**, № 1 (1938).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 мая 1968 г.

COMPLEX GEOMETRICAL OPTICS OF INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA

Yu. A. Kravtsov, Yu. Ya. Yashin

The propagation of waves in anisotropic media with strong absorption and that of nonuniform waves in anisotropic media without absorption is investigated by the geometrical optics method. The formal solution of eikonal equation is written using complex rays which are determined as in the case of an isotropic medium. A suitable method is proposed to solve the system of transponed equations of the zero approximation in the general case. This solution is used to formulate the conditions of the equation consistency from which the field amplitude is found by means of integrating over the complex rays. The direction of Poynting vector and the propagation velocity of nonuniform waves in a non-absorbing medium are discussed. The transverse propagation of an extra-ordinary wave in a plane-layer medium with a strong absorption is considered as an example of the theory presented.