Том XII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 533.9

О СТАЦИОНАРНЫХ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛНАХ В СИСТЕМЕ ПОТОК — ПЛАЗМА

С. М. Файнштейн

На основе квазигидродинамических уравнений рассматривается задача об установившихся колебаниях в активной нелинейной системе — неизотермической плазме, пронизываемой потоком заряженных частиц. Показано, что при определенных условиях в такой системе возможны автоколебательные решения.

В литературе (см., например, [1]) рассматривались стационарные ионно-звуковые колебания в консервативной системе; показано, что в бесстолкновительной неизотермической плазме возможны колебания произвольной амплитуды или уединенные волны. При наличии бесстолкновительной диссипации, например, отраженных от фронта волны частиц, появляются ударные волны с осцилляциями на фронте. Неконсервативная система—неизотермическая плазма, пронизываемая потоком заряженных частиц, неустойчива относительно раскачки ионно-звуковых волн на частоте $\omega \simeq kV_0$ (k — волновое число; V_0 — скорость потока) [2]; поэтому представляет интерес отыскание автоколебательных решений [3, 4], которые могут реализоваться в нелинейной активной системе с дисперсией. По амплитуде установившихся автоколебаний можно будет оценить величину нарастающих ионно-звуковых волн. Ниже находятся стационарные волны в неизотермической плазме (для простоты считаем температуру ионов $T_i = 0$, а температуру электронов равной T), пронизываемой потоком электронов с учетом диссипации.

1. Система поток—плазма в одномерном приближении описывается квазигидродинамическими уравнениями [1]:

$$M\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=e\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_i v)=0,$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=4\pi e\left(n_0 e^{-e\varphi/\varkappa T}+n_s-n_i\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+v_s\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\nu_{\text{эфф}}v_s,$$

$$\frac{\partial n_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_s v_s)=0.$$

Здесь v и v_s — соответственно скорости ионов плазмы и электронов потока, n_i и n_s — концентрации ионов и электронов, n_0 — равновесная концентрация электронов, φ — электрический потенциал, $\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — температура электронов плазмы, $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений электронов потока [5], m и M — массы электрона и иона, e — заряд электрона.

Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью стационарной волны u, тогда все функции будут зависеть от одной переменной x. Введем безразмерные величины $\Phi = 2e\varphi/MV_0^2$, $\zeta = \Omega_0 x/V_0$ ($\Omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0/M$, V_0 — равновесная скорость потока). Система (1) имеет три интеграла движения:

$$v^2 - \frac{2e\varphi}{M} = B, \quad n_s v_s = A_1, \quad n_i v = A_2. \tag{2}$$

После необходимых преобразований получим дифференциальное уравнение третьего порядка относительно безразмерного потенциала Φ:

$$\frac{\delta_1}{\left(\delta_2/\sqrt{\gamma+\Phi} - \Phi''/2 - e^{-\beta_T \Phi}\right)} \frac{d}{d\zeta} \frac{\delta_1}{\left(\delta_2/\sqrt{\gamma+\Phi} - \Phi''/2 - e^{-\beta_T\Phi}\right)} =$$
$$= -\frac{\Phi''}{2\mu} - \nu\left(\frac{\delta_1}{\delta_2/\sqrt{\gamma+\Phi} - \Phi''/2 - e^{-\beta_T\Phi}} - \sigma\right), \tag{3}$$

где $\delta_1 = A_1/n_0V_0$, $\delta_2 = A_2/n_0V_0$, $\beta_T = V_0^2/(2\varkappa T/M) = V_0^2/2v_{\text{зв}}^2$ ($v_{\text{зв}}$ — скорость ионного звука в плазме), $\nu = \nu_{\text{эфф}}/\Omega_0$, $\sigma = u/V_0 - 1$, $\gamma = B/V_0^2$, $\mu = m/M$.

Уравнение (3) исследуем в фазовом пространстве $(\Phi, \Phi'_\zeta, \Phi''_{\zeta\zeta})$. Вблизи состояния равновесия $(0, 0, 0)$ разложим нелинейные члены (3) в ряд Тейлора с точностью до кубичной нелинейности. Тогда (3) примет вид

$$-\frac{\Phi'''}{2} + M_1\Phi'' + M_2\Phi' + M_3\Phi = M_4\Phi\Phi' + M_5\Phi'\Phi^2 + M_6\Phi'\Phi'' +$$
$$+ M_7\Phi'\Phi''^2 + M_8\Phi\Phi'\Phi'' + M_9\Phi^2 + M_{10}\Phi^3 + M_{11}\Phi\Phi'' +$$
$$+ M_{12}\Phi^2\Phi'' + M_{13}\Phi\Phi''^2 + M_{14}\Phi''^3, \tag{4}$$

где коэффициенты $M_{1,2,\ldots,14}$ имеют следующие выражения:

$$M_1 = \frac{\nu}{\delta_1}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\left[1 - \frac{3\sigma}{2\delta_1}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\right],$$

$$M_2 = -\frac{\delta_2}{2\gamma^{3/2}} + \beta_T - \left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)^3 \frac{1}{2\mu\delta_1^2},$$

$$M_3 = \frac{\sigma\nu}{\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)^2\left(3\beta_T - \frac{3\delta_2}{2\gamma^{3/2}}\right) - \frac{\nu}{\delta_1}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\left(2\beta_T - \frac{\delta_2}{\gamma^{3/2}}\right),$$

$$M_4 = -\frac{3\delta_2}{4\gamma^{5/2}} + \beta_T^2 + \frac{1}{2\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)^2\left(3\beta_T - \frac{3\delta_2}{2\gamma^{3/2}}\right),$$

$$M_5 = \frac{15}{16}\frac{\delta_2}{\gamma^{7/2}} - \frac{\beta_T^3}{2} + \frac{1}{4\mu\delta_1^2}\left[\frac{3\delta_2^2}{2\gamma^3}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right) + \frac{9\delta_2}{4\gamma^{5/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 6\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right) - 3\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)^2\right],$$

$$M_6 = -\frac{9}{4\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)^2, \quad M_7 = \frac{3}{8\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right),$$

$$M_8 = -\frac{3}{2\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)\left(\beta_T-\frac{\delta_2}{2\gamma^{3/2}}\right),$$

$$M_9 = -\frac{\sigma\nu}{2\delta_1^2}\left[\frac{3\delta_2^2}{2\gamma^3}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)+\frac{9\delta_2}{4\gamma^{5/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)^2+6\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)-\right.$$
$$\left.-3\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)^2\right]+\frac{\nu}{2\delta_1}\left[\frac{\delta_2}{2\gamma^3}+\frac{3\delta_2}{2\gamma^{5/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)+2\beta_T^2-2\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)\right]$$

$$M_{10} = -\frac{\sigma\nu}{6\delta_1}\left[-\frac{3\delta_2^3}{4\gamma^{9/2}}-\frac{27}{4}\frac{\delta_2^2}{\gamma^4}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)-\frac{45}{8\gamma^{7/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)^2+\right.$$
$$\left.+6\beta_T^3-18\beta_T^3\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)+3\beta_T^3\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)\right]+ \tag{5}$$
$$+\frac{\nu}{6\delta_1}\left[-\frac{9\delta_2^2}{4\gamma^4}-\frac{15}{4\gamma^{7/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)-6\beta_T^3+2\beta_T^3\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)\right],$$

$$M_{11} = -\frac{\sigma\nu}{\delta_1^2}\left[-3\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)\left(\beta_T-\frac{\delta_2}{2\gamma^{3/2}}\right)\right]-\frac{\nu}{\delta_1}\left(\beta_T-\frac{\delta_2}{2\gamma^{3/2}}\right),$$

$$M_{12} = -\frac{\sigma\nu}{\delta_1^2}\left[-\frac{3\delta_2^2}{8\gamma^3}-\frac{9\delta_2}{8\gamma^{5/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right)-\frac{3}{2}\beta_T^2\right]+$$
$$+\frac{\nu}{2\delta_1}\left(\beta_T^2-\frac{3\delta_2}{4\gamma^{5/2}}\right)+\frac{3}{2}\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}}-1\right),$$

$$M_{13} = -\frac{\sigma\nu}{\delta_1^2}\left[\frac{3}{8}\left(\beta_T-\frac{\delta_2}{\gamma^{3/2}}\right)\right], \quad M_{14} = \frac{\sigma\nu}{16\delta_1^2}.$$

Уравнение (4) верно при условии Φ, Φ'_ζ, $\Phi''_{\zeta\zeta}$, $\Phi'''_{\zeta\zeta\zeta} \ll 1$.

2. Следуя [6], нетрудно показать, что в начале координат имеет место состояние равновесия типа фокус (узел). Кроме того, исследуя уравнение (4), убеждаемся, что вблизи начала координат фазовые траектории приближаются к плоскости (Φ, Φ'_ζ), поэтому поведение фазовых траекторий в плоскости (Φ, Φ'_ζ) определяется уравнением (4) без третьей производной $\Phi'''_{\zeta\zeta\zeta}$.

Для нахождения периодических решений воспользуемся методом Ван дер Поля [7, 8]. Представим решение в виде

$$\Phi = C(\zeta)\cos[k_0\zeta+\theta(\zeta)],$$
$$\Phi'_\zeta = -C(\zeta)k_0\sin[k_0\zeta+\theta(\zeta)],$$

где $C(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$ — медленно меняющиеся функции координаты ζ. Для функций C и θ после усреднения получим укороченные уравнения:

$$\frac{dC}{d\zeta} = -C\left[\frac{M_2}{2} - \frac{C^2}{8}(M_5 + k_0^4 M_7 - k_0^2 M_8)\right],$$
$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{\widetilde{f\cos[k_0\zeta + \theta(\zeta)]^{2\pi/k_0}}}{k_0 C}. \tag{6}$$

Волнистая черта во втором уравнении (6) означает усреднение по быстрым осцилляциям.. Из первого уравнения (6) видно, что на плоскости переменных Ван дер Поля (C, θ) существуют два состояния равновесия:

$$C_0 = 0, \quad C = 2\left(\frac{-M_2}{M_5 + M_7 k_0^4 - M_8 k_0^2}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Последнее выражение определяет амплитуду предельного цикла.

Уравнение для фазы дает поправку к безразмерному волновому числу k_0, которое определяется дисперсионным уравнением линейной теории:

$$k_0^2 = -\frac{M_3}{M_1} = \frac{V_0^2}{u^2} - \frac{V_0^2}{v_{зв}^2}. \tag{8}$$

В обычных переменных [1] $\omega^2/k^2 = v_{зв}^2 \varkappa_0^2/(\varkappa_0^2 + k^2)$, где ω — частота, k — волновое число, $\varkappa_0^2 = \Omega_0^2/v_{зв}^2$. Из (8) видно, что одним из условий существования автоколебаний является неравенство: $u^2 < v_{зв}^2$.

Выражение для амплитуды автоколебаний имеет вид*.

$$C = 2\left\{\left[k_0^2 + \frac{1}{2\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\right]\left\{\frac{3k_0^4}{8\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right) - \right.\right.$$
$$-\frac{15\delta_2}{16\gamma^{7/2}} + \frac{\beta_T^3}{2} - \frac{1}{4\mu\delta_1^2}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\left[\frac{3\delta_2^2}{2\gamma^3} + \frac{9\delta_2}{2\gamma^{5/2}}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right) + \right. \tag{9}$$
$$\left.\left.\left. + 6\beta_T^2 - 3\beta_T^2\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{\gamma}} - 1\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{1/2}.$$

При достаточно больших k_0 выражение (9) упрощается:

$$C \simeq \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\delta_1}{k_0}\left(\frac{\mu}{\delta_2/\sqrt{\gamma} - 1}\right)^{1/2},$$

т. е. $C \ll 1$. Следовательно, предельный цикл лежит вблизи начала координат, что является необходимым условием, при котором проводится данное исследование.

Автор признателен А. А. Андронову, М. С. Ковнеру, М. И. Рабиновичу за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964
2. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания плазмы, Атомиздат, М., 1964.

* Из первого уравнения (6) легко определить, как устанавливается амплитуда предельного цикла.

3 М И Рабинович, Изв. высш уч зав — Радиофизика, 8, № 4, 794 (1965).
4 С М Файнштейн, Изв высш уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 834 (1968); 11, № 9, 1300 (1968)
5 В Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд Наука, М, 1967
6 Р М Минц, сб Памяти А А Андронова, изд АН СССР, М, 1955.
7 А А Андронов, А А Витт, С. Э Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М, 1959
8 Н Н Боголюбов, Ю. А Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М, 1963.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
22 апреля 1968 г.

STATIONARY ION SOUND WAVES IN A STREAM—PLASMA SYSTEM

S. M. Fainstein

The problem on steady-state oscillations in the active nonlinear system, that is in the nonisothermal plasma, pierced by the flux of charged particles is considered on the basis of quasi-hydrodynamic equations. It is shown that in the definite conditions there is possible an auto-oscillating solution in such a system.