ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 538.56 : 519.25

К ОЦЕНКЕ НЕЭРГОДИЧНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. Х. Ризкин

Приводятся примеры вычисления оценок неэргодичности (в частности, для нестационарных процессов), представляющие интерес для радиофизических приложений

1. В [1] были рассмотрены оценки неэргодичности случайных процессов и приведен пример, относящийся к стационарному неэргодическому процессу. Ниже рассматриваются некоторые дополнительные примеры, связанные, в основном, с нестационарными процессами.

Во всех примерах, кроме разд. 3, используется простейший путь: выписывается дисперсия оценки, в качестве границы $A(\varepsilon)$ (см. [1]), в соответствии с неравенством Чебышева выбирается отношение дисперсии к ε^2 и устанавливается значение дисперсии при $T \to \infty$ допускаемое условиями принадлежности процесса к почти эргодическим заданного порядка. Очевидным дефектом такого способа является грубость оценки. Если, как это принято в разд. 3, известно распределение оценок, граница вычисляется точно.

2. Обратимся к нестационарному процессу $\xi(t)$, для которого разыскивается статистическое среднее от временного среднего с Θ и Θ_T^*, определяемыми соответственно по (16) и (17) в [1].

Дисперсия Θ_T^* вычислена в [2], стр. 85:

$$D\Theta_T^* = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \psi_f(t,\ t')\,dt\,dt'.$$

Воспользовавшись (8) в [1], получим

$$\frac{D\Theta_T^*}{|\overline{f[\widetilde{\xi(t)}]}|^2} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T^2}\displaystyle\int_0^T\int_0^T \psi_f(t,\ t')\,dt\,dt'}{|\overline{f[\widetilde{\xi(t)}]}|^2} \leqslant k^2\rho, \tag{1}$$

причем операция взятия верхней грани отпадает, так как Θ — постоянная.

Пусть, например, на входе квадратичного безынерционного преобразователя действует сумма $\xi(t)$ детерминированного сигнала $s(t)$ и стационарного нормального шума с нулевым средним значением и корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2\rho(\tau)$ такой, что

$$\lim_{\tau\to\infty} K(\tau) = a_0 = \sigma^2 b_0. \tag{2}$$

Корреляционная функция для нестационарного процесса $f[\xi(t)] = \xi^2(t)$ будет [2]

$$\psi_f(t,\ \tau) = 2\sigma^2[\sigma^2 R(\tau) + 2ss_\tau R(\tau)]. \tag{3}$$

Положив для определенности

$$s(t) = A \sin t,$$

$$R(\tau) = b_0 + R_1(\tau), \quad \lim_{\tau\to\infty} R_1(\tau) = 0$$

и подставив это в (3), найдем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \psi_f(t, t')\, dt dt' = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{4\sigma^4}{T} \int_0^T R(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{4\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T s(t)\, s(t')\, R(t-t')\, dt dt' \right] = 2\sigma^4 b_0. \tag{4}$$

Внося это в (1), получим

$$\sigma^4 b_0 \leqslant \frac{k^2\rho}{2} \left| \overline{\overline{f[\xi(t)]}} \right|^2. \tag{5}$$

Интересно заметить, что $s(t)$ не сказывается на оценке, так как неэргодичность процесса обусловлена свойствами шума на входе преобразователя; однако присутствие сигнала сообщает $\xi(t)$ нестационарность.

3. Разумеется, граница $A(\varepsilon)$ соотношения (1) в [1] может быть взята точной (со знаком равенства), если известно распределение оценки. Рассмотрим в качестве примера случай, когда предельное при $T \to \infty$ распределение несмещенной оценки Θ^*_T, не являющейся функцией z, существует и нормально. Учитывая несмещенность оценки, получаем в соответствии с известным соотношением для нормального закона

$$P(|\Theta^*_\infty - \Theta| \geqslant \varepsilon) = 1 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{D\Theta^*_\infty}}\right). \tag{6}$$

Правую часть (6) можно взять в качестве точной границы, и условие принадлежности процесса к почти эргодическому порядка (ρ, k) примет тогда вид

$$1 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{D\Theta^*_\infty}}\right) \leqslant \rho,$$

$$\varepsilon \geqslant k\Theta.$$

Разрешая первое из этих неравенств относительно ε и сопоставляя его со вторым, можно найти условие, ограничивающее сверху величину $D\Theta^*_\infty$, т. е. $D\Theta^*_T$ при $T \to \infty$.

Например, для $k = \rho = 0{,}1$ получаем

$$D\Theta^*_\infty \leqslant 3{,}7 \cdot 10^{-3}\, \Theta^2,$$

а для $k = 0,1$, $\rho = 0{,}05$ —

$$D\Theta^*_\infty \leqslant 2{,}6 \cdot 10^{-3} \Theta^2.$$

В то же время согласно (8) в [1] коэффициенты в правых частях будут соответственно равны $1 \cdot 10^{-3}$ и $0{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Аналогично могут быть установлены точные границы и для распределений, отличных от нормального, например, для распределения Стьюдента или χ-распределения. При этом $A(\varepsilon)$ будет выражаться через табулированные функции $S_k(t_p)$ и $L_k(\varepsilon_p)$ (см., например, [3]). Соответственно могут быть получены и ограничения на дисперсию, вытекающие из задания порядка (ρ, k). Для примера укажем, что при распределении Стьюдента с двумя степенями свободы для $\rho = k = 0{,}1$ требуется

$$D\Theta_{\infty}^{*} \leqslant 1{,}17 \cdot 10^{-3}\Theta^2,$$

а при $\rho = 0{,}05$, $k = 0{,}1$ должно быть

$$D\Theta_{\infty}^{*} \leqslant 0{,}57 \cdot 10^{-3}\Theta^2,$$

что довольно близко к чебышевской оценке.

Следует подчеркнуть, что приведенные здесь неравенства характеризуют не погрешность оценки, обусловленную конечностью реализации, а предельную (при $T \to \infty$) неустранимую ошибку, вызванную неэргодичностью.

Таким образом, даже при не слишком малых порядках (ρ, k) почти эргодичности, дисперсия при $T \to \infty$ должна составлять не более десятых долей процента квадрата разыскиваемой величины.

4. В заключение рассмотрим соотношения, относящиеся к отысканию математического ожидания $m(t)$ нестационарного процесса [4]. Установленные в [4] условия эргодичности естественно считать невыполненными. Допустим, что корреляционная функция

$$\psi(t, \tau) = \overline{[\zeta(t) - m(t)]\,[\zeta(t+\tau) - m(t+\tau)]}$$

ограничена, но с ростом $|\tau|$ стремится не к нулю, а к некоторой величине $u \neq 0$ равномерно по t. Остальные ограничения [4] сохраняются.

Как и в работе [4], можно искать коэффициенты m_n разложения

$$m(t) = \sum_n m_n a_n(t) \tag{7}$$

по известным функциям $a_n(t)$. Оценкой для m_n служат величины $m^*_{T(n)}$, вычисляемые в [4].

Буквально повторяя рассуждения Тудзенко, найдем для дисперсии оценок коэффициентов ряда (7)

$$Dm^*_{T(n)} \leqslant A_n^2 \frac{1}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_0^T |\psi(t, t')|\,dt\,dt' = A_n^2 \frac{1}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_{-t}^{T-t} |\psi(t, \tau)|\,dt\,d\tau, \tag{8}$$

где A_n — верхняя граница для функций $A_n^{(T)}(t)$, с помощью которой вычисляется m_n (см. [4]). Если

$$\psi(t, \tau) = \psi_0(t, \tau) + u, \tag{9}$$

где $\psi_0(t, \tau)$ таково, что при всех t и равномерно по t

$$\lim_{|\tau| \to \infty} |\psi(t, \tau)| = 0,$$

то, подставив (9) в (8), легко получим

$$Dm^*_{T(n)} \leqslant A_n^2 |u|. \tag{10}$$

В частности, если $\psi(t, \tau) > 0$ при всех t, τ и $u > 0$, последний множитель справа не может быть уменьшен.

Поскольку $a_n(t)$ в (7) — детерминированные функции, определение среднего $m(t)$ сводится к вычислению вектора z, образованного постоянными m_n. Вектор оценок z^*_T образуется составляющими $m^*_{T(n)}$. Поэтому задачу оценки неэргодичности процесса $\zeta(t)$ и определения порядка можно считать решенной, поскольку найден вектор оценки сверху (10) и, следовательно, составляющие $Dm^*_{T(n)}/\varepsilon^2$ вектор-функции $A(\varepsilon)$, различающиеся лишь множителями A_n^2.

Прямая оценка дисперсии для функции времени $m^*_T(t)$ затруднена необходимостью отыскивать верхнюю грань ряда по $a_n(t)$ на множестве значений t. В эргодическом случае эта трудность может быть обойдена [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. И Х Ризкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 2, 247 (1969)
2. С М Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М, 1966.
3. В С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М, 1962
4. Л. И Гудзенко, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 267 (1961).

Московский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 15 февраля 1968 г.

AN ESTIMATE OF NON-ERGODICITY OF RANDOM PROCESSES

I. Kh. Rizkin

The examples of calculating the estimates of the non-ergodicity (in particular, for nonstationary processes) interesting for radiophysical applications are presented.