ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1969

УДК 621.371.255

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ ВДОЛЬ СЛОЯ ПЛАЗМЫ

В. В. Демченко, В. В. Долгополов

Рассматривается распространение электромагнитных волн типа ТЕ вдоль плоско-параллельного слоя плазмы, находящегося между двумя идеально проводящими пластинами. Исследовано распределение плотности плазмы по толщине слоя, получены выражения для полей и дисперсионное уравнение.

Влияние давления высокочастотного поля на распространение электромагнитных волн типа ТМ вдоль слоя плазмы исследовалось в работе [1]. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для ТЕ волн, распространяющихся вдоль плоско-параллельного слоя плазмы, находящегося между двумя идеально проводящими пластинами (при отсутствии этих пластин волны рассматриваемого типа распространяться вдоль слоя плазмы не могут).

Будем считать, что идеально проводящие пластины ограничивают область пространства, определяемую неравенством

$$|x| < l,$$

а область пространства, занятая плазмой, определяется неравенством

$$|x| < a,$$

где $a < l$. В отсутствие электромагнитного поля плотность плазмы была бы постоянна по сечению слоя (предполагается, что частицы не «уходят» на стенку).

Пусть направление оси z совпадает с направлением распространения волны. Тогда составляющие электромагнитного поля не будут зависеть от пространственной координаты y, а их зависимость от координаты z и времени пусть определяется соотношением

$$E,\ H \sim e^{i(kz-\omega t)}.$$

В рассматриваемом нами случае ТЕ волн отличными от нуля компонентами поля будут E_y, H_x и H_z.

Составляющая E_y электрического поля волны удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k^2\right)E_y = 0, \qquad (1)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды. При $|x| > a$ $\varepsilon = 1$. При $|x| < a$

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n_0(x)}{m\omega^2}, \qquad (2)$$

где e и m—заряд и масса электрона, $n_0(x)$—плотность плазмы (плазма состоит из электронов и однократно ионизованных ионов).

Предполагается, что температура электронов равна температуре ионов, а тепловая скорость электронов $v_T = (T/m)^{1/2}$ и максимальная скорость электронов, приобретаемая ими в поле волны, $v_E = e\,|\boldsymbol{E}|/m\omega$, удовлетворяют неравенствам

$$v_T \ll \omega\lambda, \qquad v_E \ll \omega\lambda, \tag{3}$$

где λ — характерное расстояние, на котором изменяется электромагнитное поле в направлении оси x. Тогда $n_0(x)$ можно представить в виде

$$n_0(x) = \mathrm{const}\,\exp\left(-\,e^2\,|\boldsymbol{E}|^2/8\,m\omega^2 T\right). \tag{4}$$

Как следует из соотношения (2), функция $\varepsilon(x)$ удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int\limits_{-a}^{a}(1-\varepsilon)\,dx = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \tag{5}$$

где N — полное число частиц, приходящихся на единицу поверхности слоя плазмы.

Подставляя выражение для $n_0(x)$, определяемое соотношением (4), в правую часть соотношения (2), получим [2, 3]

$$\varepsilon = 1 - Ae^{-b\,|E|^2}, \tag{6}$$

здесь $b \equiv e^2/8m\omega^2T$; A — постоянная, определяемая из условия нормировки (5).

Легко найти первый интеграл уравнения (1):

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 + k_0^2E^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\,Ae^{-bE^2} = C, \tag{7}$$

где E — амплитуда составляющей поля E_y, которую мы считаем действительной величиной; $k_0^2 \equiv (\omega^2/c^2) - k^2$; C — постоянная интегрирования. Используя соотношение (6), последнее уравнение можно привести к виду

$$\frac{dx}{d\zeta} = \mp\frac{1}{2bE\zeta\left(C - k_0^2E^2 - \omega^2\zeta/bc^2\right)^{1/2}}, \tag{8}$$

где $\zeta(x) = 1 - \varepsilon(x)$.

Рассмотрим случай, когда амплитуда электрического поля волны мало изменяется в слое плазмы, т. е. при $-a < x < a$

$$|E(x) - E(0)| \ll |E(0)|. \tag{9}$$

Последнее не означает, что плотность плазмы также будет мало изменяться по толщине слоя. Если давление электромагнитного поля волны значительно больше газокинетического давления плазмы $(bE^2 \gg 1)$, то величина $\zeta(x)$ (следовательно, и плотность плазмы) может значительно изменяться на толщине слоя и при выполнении неравенства (9). Интегрируя уравнение (8), в котором согласно соотношению (9) величину E можно считать постоянной, получим

$$\zeta(x) = \frac{4e^{-2Kx_0}}{\left[e^{\pm Kx} + \beta^2\exp\left(-2Kx_0 \mp Kx\right)\right]^2}, \tag{10}$$

где

$$K \equiv \alpha^{1/2} B, \quad \alpha \equiv bE^2(0), \quad B \equiv \left(bC - k_0^2 \alpha\right)^{1/2}, \quad \beta \equiv \omega / Bc, \tag{11}$$

x_0 — постоянная интегрирования.

Учитывая, что электрическое поле вблизи идеально проводящих пластин обращается в нуль, решение уравнения (1) вне слоя плазмы запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} E_y &= E_- \frac{\sin[k_0(l-x)]}{\sin[k_0(l-a)]} \qquad (a < x < l), \\ E_y &= E_+ \frac{\sin[k_0(l+x)]}{\sin[k_0(l-a)]} \qquad (-l < x < -a), \end{aligned} \tag{12}$$

где E_+ и E_- — постоянные относительно x величины.

Принимая во внимание неравенство (9), из условия непрерывности на границе плазмы составляющей электрического поля имеем

$$E_+ \simeq E_- \simeq E(0).$$

Непрерывность на границе плазмы производной $\frac{dE}{dx}$, определяемой при $|x| < a$ соотношением (7), приводит к уравнению

$$\left[C - k_0^2 E^2 - \frac{\omega^2}{bc^2} \zeta(\pm a)\right]^{1/2} = -k_0 E \operatorname{ctg}\left[k_0(l-a)\right]. \tag{13}$$

Из уравнения (13) следует, что ζ является четной функцией пространственной координаты x. Последнее, как видно из выражения (10), возможно в том случае $\left(\text{мы полагаем, что при } |x| < a \text{ величина } \frac{d\zeta}{dx} \text{ непрерывна}\right)$, если

$$\beta^2 e^{-2Kx_0} = 1. \tag{14}$$

Тогда выражение (10) принимает вид

$$\zeta(x) = \frac{c^2 K^2}{\alpha \omega^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(Kx)}. \tag{15}$$

Иными словами, $\zeta(x)$ убывает, а величина $|E(x)|$ возрастает к периферии. Поэтому в левой части уравнения (13) выбран знак + перед корнем. Поскольку правая часть уравнения (13) при этом также должна быть положительной, рассматриваемые колебания возможны в том случае, если выполняются условия

$$(\pi/2) + n\pi < k_0(l-a) < \pi + n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из соотношений (11), (13) и (15) находим

$$\left\{1 - \frac{k_0^2 \alpha^2}{K^2} \operatorname{ctg}^2[k_0(l-a)]\right\} \operatorname{ch}^2(Ka) = 1. \tag{16}$$

Условие нормировки (5) можно записать в виде

$$\int_0^a \zeta(x)\, dx = \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2}. \tag{17}$$

Подставляя в уравнение (17) выражение (15) для $\zeta(x)$, можно найти связь между величинами α и K:

$$\alpha = \frac{mc^2 K}{2\pi e^2 N} \,\mathrm{th}\,(Ka). \tag{18}$$

После подстановки выражения (18) в уравнение (16) получим дисперсионное уравнение для волны типа TE, распространяющейся вдоль слоя плазмы:

$$\mathrm{tg}\,[k_0(l - a)] = -\frac{mc^2 k_0}{2\pi e^2 N}. \tag{19}$$

Как следует из уравнения (19), волновой вектор k является функцией только частоты волны, расстояния между проводящей стенкой и плазмой и числа электронов N, приходящихся на единицу поверхности слоя плазмы, и не зависит от амплитуды волны и температуры плазмы.

Учитывая связь между величинами $\zeta(x)$ и $n_0(x)$, для плотности плазмы $n_0(x)$ получим следующее выражение:

$$n_0(x) = \frac{NK}{2\,\mathrm{th}\,(Ka)\,\mathrm{ch}^2(Kx)}. \tag{20}$$

Как следует из выражения (20), распределение плотности плазмы по толщине слоя зависит от амплитуды волны и температуры плазмы (отношение квадрата амплитуды волны к температуре плазмы определяется величиной α, а последняя связана с постоянной K уравнением (18)). При этом плотность плазмы максимальна в центре слоя ($x = 0$) и убывает к границам. При $Ka \gg 1$ плотность плазмы у границ слоя пренебрежимо мала по сравнению с плотностью плазмы вблизи центра слоя, между тем как электрическое поле волны в рассматриваемом приближении по толщине слоя почти не изменяется.

Определим границы применимости полученных результатов. Соотношение (9) эквивалентно следующему:

$$\left| \left.\frac{dE_y}{dx}\right|_{x=a} \right| a \ll |E_y|. \tag{21}$$

Учитывая уравнения (12) и (19), неравенство (21) можно привести к виду

$$\frac{2\pi e^2 N a}{mc^2} \ll 1. \tag{22}$$

При интегрировании уравнения (8) амплитуду поля E можно считать постоянной, если выполняется условие

$$k_0^2 \ll \frac{4\pi e^2 n_0(x)}{mc^2}. \tag{23}$$

Таким образом, выполнение неравенств (3), (22) и (23) является условием применимости полученных выше результатов.

При $Ka \ll 1$ уравнение (19) переходит в дисперсионное уравнение линейной теории для случая, когда плотность плазмы постоянна по толщине слоя.

Из соотношений (18) и (20) следует, что плотность плазмы в центре слоя может значительно превышать плотность плазмы у границ только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{2\pi e^2 Na}{mc^2} bE^2 \gg 1,$$

т. е. давление электромагнитного поля волны значительно превышает газокинетическое давление плазмы.

В заключение выражаем благодарность К. Н. Степанову за обсуждение результатов и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Демченко, В. В. Долгополов, ЖТФ, 38, 1850 (1968).
2. Т. Ф. Волков, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, 336, изд. АН СССР, М., (1958).
3. A. H. Boot, S. A. Self, R. Harvie, J. Electron and Control, 4, 434 (1958).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 августа 1968 г.

PROPAGATION OF TE-WAVE WITH A LARGE AMPLITUDE ALONG A PLASMA LAYER

V. V. Demchenko, V. V. Dolgopolov

The propagation of TE-wave along a plane-parallel plasma layer laying between two perfectly conducting plates is considered. The density distribution of the plasma layer thickness has been investigated. The expressions have been obtained for the fields and the dispersion equation.