ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1969*

УДК 538.574.4 : 533.9

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

И. П. Якименко

В приближении заданного поля рассмотрена постановка нелинейных граничных задач для изотропной плазмы. В рамках теории рассеяния на электромагнитных флуктуациях в ограниченной плазме описаны два нелинейных эффекта при взаимодействии поперечных волн в плазменном цилиндре произвольного радиуса: нетепловое излучение на комбинационных частотах и рассеяние на индуцированных флуктуациях объемной плотности электронного заряда.

Нелинейность материальных уравнений плазмы, как и любой другой среды, отражает принципиальную возможность существования различных нелинейных эффектов [1, 2]. В приближении слабой нелинейности полное поле представляется в виде ряда, первый член которого соответствует решению линеаризованных уравнений, а все последующие—уравнений Максвелла с нелинейными токами и зарядами, возникающими при нелинейном взаимодействии волн. Такие токи и заряды играют роль индуцированных электромагнитных флуктуаций [2, 3], существующих при наличии волн наряду со спонтанными (тепловыми) флуктуациями плотностей заряда и тока. Поэтому можно выделить группу нелинейных эффектов (нетепловое излучение или «переизлучение» [4], рассеяние и трансформация волн на индуцированных флуктуациях), которые родственны явлениям, обусловленным тепловыми флуктуациями (тепловое излучение и молекулярное рассеяние).

Естественно, что методы описания этой группы нелинейных эффектов в ограниченной среде аналогичны используемым в теории теплового излучения и молекулярного рассеяния. Задача переизлучения есть краевая задача электродинамики с заданным сторонним током (для плоского слоя она решена в работах [5, 6]). Задача рассеяния на индуцированных флуктуациях должна ставиться и решаться с учетом всех особенностей теории молекулярного рассеяния в ограниченной среде [7, 8]. Легко видеть, что, если при описании переизлучения одну из сталкивающихся волн формально определить как флуктуационную, то задачи нетеплового излучения и рассеяния на индуцированных флуктуациях объединяются на общей методологической основе.

В настоящей работе в рамках теории рассеяния на электромагнитных флуктуациях в ограниченной среде [7, 8] рассматривается переизлучение и рассеяние на индуцированных флуктуациях в плазменном цилиндре произвольного радиуса (некоторые результаты, относящиеся к бесконечно длинному тонкому цилиндру, получены в работе [4]*).

* Методика построения теории взаимодействия волн при распространении в цилиндрической плазме изложена в [9].

1. ПОСТАНОВКА НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАННОГО ПОЛЯ

Для решения нелинейной граничной задачи необходимо координатное представление индуцированных флуктуаций токов и зарядов. Оно находится из динамических уравнений, описывающих взаимодействие среды и поля. Ограничимся простейшим случаем достаточно высоких частот для того, чтобы резонансное взаимодействие частиц электронного газа с волнами не играло существенной роли и задачу можно было решать в приближении одножидкостной гидродинамики без учета газокинетического давления. Пусть n_s и v_s — плотность и скорость электронов, связанных с s-й волной; δn и δv — флуктуации плотности и скорости частиц, обусловленные взаимодействием некоторого числа волн, поля которых (так же, как и поле s-й волны) удовлетворяют линеаризованным уравнениям в плазме; n_0 — равновесная плотность плазмы. Тогда рассеивающий ток определяется по обычным правилам [10] и в координатной форме представляется в виде [8]

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -en_0 \nabla (v_s \delta v) + e\frac{\partial}{\partial t}(v_s \delta n + n_s \delta v). \tag{1}$$

В фурье-компонентах по времени

$$I_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left[\frac{en_0}{i\omega}\nabla\left(v_{s\omega'}\,\delta v_{\omega-\omega'}\right) + e\left(v_{s\omega'}\,\delta n_{\omega-\omega'} + n_{s\omega'}\,\delta v_{\omega-\omega'}\right)\right]. \tag{2}$$

Для монохроматических полей положим

$$\begin{aligned} v_s &= v_{s\omega_s} e^{-i\omega_s t} + v^*_{s\omega_s} e^{i\omega_s t}, \\ \delta v &= \delta v_{\Delta\omega} e^{-i\Delta\omega t} + \delta v^*_{\Delta\omega} e^{i\Delta\omega t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_\omega = \sum_{l_1, l_2} &\left[\frac{en_0}{i\omega}\nabla\left(v^{l_1}_{s\omega_s}\,\delta v^{l_2}_{\Delta\omega}\right) + e\left(v^{l_1}_{s\omega_s}\,\delta n^{l_2}_{\Delta\omega} + n^{l_1}_{s\omega_s}\,\delta v^{l_2}_{\Delta\omega}\right)\right]\times \\ &\times \delta(\omega - l_1\omega_s - l_2\Delta\omega). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь l_1 и l_2 принимают значения ± 1, причем в случае отрицательного верхнего индекса соответствующая величина берется в комплексно-сопряженном виде. Рассеянное поле, источником которого является ток (4), удовлетворяет в плазме следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E_\omega &= \frac{i\omega}{c} H_\omega, \quad \operatorname{rot} H_\omega = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon(\omega) E_\omega + \frac{4\pi}{c} I_\omega, \\ \operatorname{div} E_\omega &= 4\pi e n_\omega, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{aligned} \tag{5}$$

(ω_0 — ленгмюровская частота электронной плазмы). Плотности и скорости частиц, связанные с этим полем, равны

$$n_\omega = -\frac{i \operatorname{div} I_\omega}{e\omega\varepsilon(\omega)}, \quad v_\omega = \frac{1}{en_0}\left(I_\omega + \frac{ie^2 n_0}{m\omega} E_\omega\right). \tag{6}$$

Соотношений (1)—(6) достаточно для описания различных нелинейных эффектов в плазме в приближении заданного поля. В случае возбуждения единственного «линейного» вида колебаний в плазме в (1) следует положить

$$\delta \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_s, \quad \delta n = \frac{1}{2} n_s. \tag{7}$$

Тогда уравнения (5) совместно с граничными условиями для данной плазменной конфигурации определяют задачу переизлучения на двойной частоте. Если, например, взаимодействие осуществляется посредством собственных колебаний в плазменном слое, то эта частота равна $2\omega_0$ (объемные колебания [5]) и $\omega_0 \sqrt{2}$ (поверхностные колебания [6]). Если же $\boldsymbol{v}_s$ и n_s возникают под воздействием внешних источников, то для их определения необходимо предварительное решение линейной краевой задачи.

Парное взаимодействие волн с различными частотами описывается теми же уравнениями (1)—(5), где любая из волн может формально рассматриваться в качестве флуктуационной и приводит, как это видно из (4), к генерации колебаний различных комбинационных частот (например, частот вида $\omega_0 \left|1 \pm (1/\sqrt{2})\right|$ при взаимодействии поверхностных и объемных колебаний в плазменном слое [6]). В настоящей работе исследуется нелинейное взаимодействие волн, возникающих в плазме, ограниченной цилиндрической поверхностью, при падении на эту поверхность двух плоских волн

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{i\omega_i} \exp\left[-i(\omega_i t - \boldsymbol{k}_i \boldsymbol{r})\right] + \text{к. с.} \tag{8}$$

В простейшем случае, когда тепловое движение частиц не учитывается, конверсия поперечных волн в продольные на границе плазмы отсутствует и возникающее внутреннее дифракционное поле в плазме остается поперечным. Следствием этого является сильное упрощение выражения для рассеивающего тока (1), поскольку в нем следует положить

$$n_s = \delta n = 0, \tag{9}$$

и весь ток становится чисто продольным.

Парное взаимодействие волн сопровождается не только переизлучением на комбинационных частотах, но и возникновением дополнительных зарядов и скоростей в соответствии с (6). Включая эти величины в качестве индуцированных флуктуаций в (4) и выбирая какую-либо линейную s-ю волну, действующую в плазме, мы приходим к описанию эффекта следующего порядка малости—рассеяния s-й волны на индуцированных флуктуациях. Ход решения этой задачи вполне аналогичен типичной задаче рассеяния на флуктуациях в ограниченной среде [7, 8] с той разницей, что пространственно-временной спектр флуктуаций, необходимый при усреднении, определяется не из статистического рассмотрения, а в результате решения нелинейной граничной задачи на предыдущем этапе. Ясно также, что процессы с участием более чем трех волн исследуются по такой же схеме.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

Поскольку частота ω может быть любой по отношению к ω_0, задача определения поля по заданному току I_ω должна ставиться как краевая задача. Поле вне плазменного объема удобно определить сразу на основании теоремы взаимности. Если в качестве вспомогательного источника выбран единичный диполь p ($p = 1$), расположенный в некоторой точке $\boldsymbol{r}$ вне тела, то проекция поля на направление p представляется в виде

$$E_{p\omega}(\boldsymbol{r}) = \frac{i}{\omega} \int I_\omega(\boldsymbol{r}') E'_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'. \tag{10}$$

Вспомогательное поле $E'_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ зависит от выбора геометрии задачи и в случае бесконечно длинного цилиндра равно

$$E'_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i\left[\beta(z'-z) + n(\varphi'-\varphi)\right]\right\} (a_1 \varphi'_1 + i a_2 \varphi'_2)\, d\beta, \tag{11}$$

где

$$\varphi'_1 = \frac{1}{k_0}\left[i\beta J'_n(\lambda r')\, \boldsymbol{i}_{r'} - \left(\frac{n\beta}{r'} \boldsymbol{i}_{\varphi'} - \lambda^2 \boldsymbol{i}_{z'}\right) J_n(\lambda r')\right],$$

$$\varphi'_2 = \frac{in}{r'} J_n(\lambda r')\, \boldsymbol{i}_{r'} - J'_n(\lambda r')\, \boldsymbol{i}_{\varphi'}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

$$a_l = \frac{k_0^2 \delta_{ls} \varphi_s}{\pi a \lambda^2 J H \Delta}, \quad s = 1, 2, \quad \lambda^2 = k_0^2 \varepsilon - \beta^2, \quad \tilde{\lambda}^2 = k_0^2 - \beta^2,$$

$$\delta_{11} = \frac{H'}{H} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} \frac{J'}{J}, \quad \delta_{22} = \frac{H'}{H} - \frac{\varepsilon \tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} \frac{J'}{J}, \tag{12}$$

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = \frac{in\beta}{ka}\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} - 1\right), \quad \Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{k_0}\left[i\beta \tilde{H}' p_r + \left(\frac{n\beta}{r} p_\varphi - \tilde{\lambda}^2 p_z\right)\tilde{H}\right], \quad \varphi_2 = \frac{n}{r} p_r \tilde{H} - i p_\varphi \tilde{H}',$$

$$J = J_n(\lambda a), \quad H = \begin{cases} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} a) \\ H_n^{(2)}(\tilde{\lambda} a) \end{cases}, \quad \tilde{H} = \begin{cases} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) & (\omega > 0) \\ H_n^{(2)}(\tilde{\lambda} r) & (\omega < 0) \end{cases}$$

При $\varphi=0$, $z=0$ этот результат совпадает с приведенным в работе [11].

Легко видеть, что вспомогательное поле удовлетворяет следующему важному соотношению:

$$E'_{-\omega} = E'^{*}_{\omega}. \tag{13}$$

Учитывая это соотношение и интегрируя по частотам с помощью (4), представим нелинейное поле в виде

$$E_p(\boldsymbol{r}, t) = E_p^+(\boldsymbol{r}, t) + E_p^-(\boldsymbol{r}, t), \tag{14}$$

где

$$E_p^{\pm} = E_{p\omega_\pm} e^{-i\omega_\pm t} + \text{к. с.}, \quad \omega_\pm = \omega_s \pm \Delta\omega \tag{15}$$

и

$$E_{p\omega_\pm} = \int d\boldsymbol{r}' E'_{\omega_\pm}\left[\frac{e n_0}{\omega_\pm^2} \nabla\left(\boldsymbol{v}_{s\omega_s} \delta \boldsymbol{v}_{\pm\Delta\omega}\right) + \frac{ie}{\omega_\pm}\left(\boldsymbol{v}_{s\omega_s} \delta n_{\pm\Delta\omega} + n_{s\omega_s} \delta \boldsymbol{v}_{\pm\Delta\omega}\right)\right]. \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что E_p^+ соответствует генерации суммарных комбинационных частот, а E_p^- — разностных.

3. НЕТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА КОМБИНАЦИОННЫХ ЧАСТОТАХ

Пусть на цилиндр изотропной плазмы падают по нормали две плоские волны вида (1). Для определения индуцированных скоростей, связанных с этими волнами, необходимо, вообще говоря, решение линейной дифракционной задачи. Хотя для цилиндра это решение хорошо известно, мы для простоты ограничимся здесь тем случаем, когда $\omega_i \gg \omega_0$ и поле внутри цилиндра можно принять равным падающему.

Учитывая соотношения (9) и поперечность вспомогательного поля ($\operatorname{div} E'_\omega = 0$), преобразуем поле вне цилиндра (16) к виду

$$E_{p\omega} = \frac{en_0}{\omega^2} \oint E'_\omega \left(v_{1\omega_1} v_{2\pm\omega_2}\right) ds', \quad \omega = \omega_\pm > 0. \tag{17}$$

Здесь интегрирование проводится по всей поверхности цилиндра, E'_ω определяется из (11), а $v_{j\omega_j}$ — из уравнений движения

$$v_{j\omega_j} = \frac{ie}{m\omega_j} E_{j\omega_j} e^{ik_j r}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и вводя угол θ между векторами E_1 и E_2, получим

$$E_{p\omega} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{v_1 E_2 \cos\theta}{4\pi\omega_2} \oint \exp\left[ika\cos(\varphi_0 - \varphi')\right] E'_\omega(r, r')\, ds', \tag{19}$$

где

$$k = |k_1 \pm k_2|, \quad \varphi_0 = [\widehat{(k_1 \pm k_2) e_x}], \quad v_1 = \frac{eE_1}{m\omega_1}. \tag{20}$$

Вычисления, указанные в (19), приводят к следующему результату для бесконечно длинного цилиндра ($k_0 r$ произвольно):

$$E_{p\omega}(r) = -i\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{v_1 E_2 \cos\theta}{\varepsilon(\omega)\,\omega_2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n i^n \exp\left[in(\varphi_0 - \varphi)\right] J_n(ka)\, J_n\left(k_0 \sqrt{\varepsilon}\, a\right) \times$$
$$\times \left(JH\delta_{11}\right)^{-1} \left[\frac{in}{r} H_n^{(1)}(k_0 r)\, p_r + H_n^{(1)\prime}(k_0 r)\, p_\varphi\right]. \tag{21}$$

В волновой зоне ($k_0 r \gg 1$)

$$E_{p\omega}(r) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{k_0 v_1 E_2 \cos\theta}{\varepsilon(\omega)\,\omega_2 a} \exp\left[i(k_0 r - \pi/4)\right] \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \exp\left[in(\varphi_0 - \varphi)\right] J_n(ka)\, J_n\left(k_0 \sqrt{\varepsilon}\, a\right) \left(JH\delta_{11}\right)^{-1} p_\varphi, \tag{22}$$

т. е. поле имеет структуру цилиндрической волны, как и должно быть в случае бесконечного цилиндра.

Заметим, что при $\varepsilon(\omega) \to 0$ $\delta_{11}^{-1} \sim \varepsilon$, откуда следует, что переизлученное поле бесконечно длинного цилиндра произвольного радиуса не имеет резонанса при $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega) = 0$.

Если интерес представляет излучение конечного участка цилиндра длиной $2L$, то исходной снова является формула (19), причем в волновой зоне асимптотическое значение интеграла по β находится методом стационарной фазы [12]. Результат вычислений удобно представить в сферической системе координат (R, ϑ, φ) с полярной осью, направленной вдоль оси цилиндра $0z$:

$$E_{p\omega}(r) = 2ik_0^2 \frac{e^{ik_0R}}{R} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\tilde{\lambda}\sin\beta L}{\beta}\right) \frac{v_1 E_2 \cos\theta}{\pi\omega_2} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[in(\varphi_0 - \varphi)\right] J_n(ka)\,(\lambda^2 JH\Delta)^{-1} \left\{ p_\vartheta \left[\frac{i\beta}{k_0} J'_n(\lambda a)\,\delta_{11} - \frac{n}{a} J_n(\lambda a)\delta_{21}\right] + \right.$$

$$\left. + p_\varphi \left[\frac{i\beta}{k_0} J'_0(\lambda a)\,\delta_{12} - \frac{n}{a} J_n(\lambda a)\,\delta_{22}\right]\right\}, \tag{23}$$

где

$$\beta = -k_0\cos\vartheta, \quad \tilde{\lambda} = k_0\sin\vartheta. \tag{24}$$

Поле, переизлученное конечным участком цилиндра, имеет характер сферической волны с диаграммой направленности по обоим углам (ϑ и φ), полная информация о которой содержится в (23).

В предельном случае тонкого цилиндра ($\lambda a \ll 1$, $\tilde{\lambda} a \ll 1$) в мультипольном разложении (21) основную роль играют колебания $n = \pm 1$. Сохраняя в рядах для функций Бесселя только первые члены и удерживая величины, описывающие радиационное затухание, получим из (21) в области $r > a$

$$E_p(r) = \frac{\pi k_0 a v_1 E_2 [1 - \varepsilon(\omega)]\cos\theta}{\omega_2[\varepsilon + 1 - i\pi(k_0a/2)^2(\varepsilon - 1)]} J_1(ka) \left[\frac{1}{r} H_1^{(1)}(k_0 r)\, p_r \cos(\varphi_0 - \varphi) + \right.$$

$$\left. + H_1^{(1)\prime}(k_0 r)\, p_\varphi \sin(\varphi_0 - \varphi)\right]. \tag{25}$$

В волновой зоне роль радиальной компоненты несущественна, а для азимутальной компоненты из (25) следует

$$E_\varphi(r) = \frac{\pi k_0^2 a v_1 E_2 [1 - \varepsilon(\omega)]\cos\theta}{\omega_2[\varepsilon + 1 - i\pi(k_0a/2)^2(\varepsilon - 1)]} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \times$$

$$\times \exp(ik_0 r - \pi/4)\, J_1(ka)\sin(\varphi_0 - \varphi). \tag{26}$$

Формулы (25) и (26) отражают наличие характерного резонанса для цилиндрических плазменных структур, определяемого условием.

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\omega) + 1 = 0. \tag{27}$$

Как видно из (25) и (26), радиационным затуханием можно пренебречь только при условии

$$\operatorname{Im}\varepsilon \gg \pi(k_0a/2)^2(\operatorname{Re}\varepsilon - 1). \tag{28}$$

Тогда (26) совпадает с результатом, полученным в работе [4].

Для процесса переизлучения конечного участка тонкого цилиндра удобно ввести дифференциальное сечение, определенное как отношение переизлученной мощности (в заданный интервал телесных углов) к вектору Умова—Пойнтинга второй падающей волны:

$$d\sigma_\infty = A^2 \frac{[\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta\cos^2(\varphi_0 - \varphi) + |\varepsilon - \cos^2\vartheta|^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi)]\,|1 - \varepsilon(\omega)|^2}{|\varepsilon(\omega) + 1 - (i\pi/2)(k_0a)^2(\varepsilon - \cos^2\vartheta)|^2\,|\varepsilon - \cos^2\vartheta|^2} d\Omega, \tag{29}$$

где

$$A = 2a \cos\theta\, J_1(ka) \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(\frac{v_1}{c}\right) \frac{\sin(k_0 L \cos\vartheta)}{\cos\vartheta}. \tag{30}$$

В частности, по нормали к цилиндру ($\vartheta = \pi/2$) .

$$d\sigma_\omega = 4a^2 \cos^2\theta \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 (k_0 L)^2 J_1^2(ka) \sin^2(\varphi_0 - \varphi) \times$$
$$\times \frac{|1 - \varepsilon(\omega)|^2}{|\varepsilon(\omega) + 1 - (i\pi/2)\varepsilon(k_0 a)^2|^2} d\Omega. \tag{31}$$

4. РАССЕЯНИЕ НА ИНДУЦИРОВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ

Из постановки задачи (разд. 2) без дополнительных вычислений ясно, что рассеяние третьей плоской волны на флуктуациях в плазменном цилиндре, индуцированных при нелинейном взаимодействии первых двух волн, является эффектом следующего порядка малости. Однако, если флуктуации создаются сильными волнами, то их интенсивность может оказаться достаточной для того, чтобы процесс рассеяния мог быть экспериментально обнаружен. Кроме того, исследование этого эффекта важно для сравнения с рассеянием на обычных тепловых флуктуациях.

Замечая, что поле третьей падающей волны

$$\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_3 \exp[-i(\omega_3 t - \boldsymbol{k}_3 \boldsymbol{r})] + \text{к. с.} \qquad (E_3 = 1) \tag{32}$$

внутри плазмы не сопровождается возникновением заряда ($n_{3\omega_3} = 0$) на основании формулы (16) получим

$$E_{p\omega} = \frac{en_0}{\omega^2} \oint \boldsymbol{E}'_\omega (\boldsymbol{v}_3\, \delta \boldsymbol{v}_{\Delta\omega})\, ds' + \frac{ie}{\omega} \int \boldsymbol{E}'_\omega \boldsymbol{v}_3 \delta n_{\Delta\omega}\, d\boldsymbol{r}'. \tag{33}$$

Полное поле состоит из двух частей: первая соответствует рассеянию на поверхностных флуктуациях, а вторая—на объемных флуктуациях плотности электронов. Рассеяние на поверхностных флуктуациях плотности заряда в тонком плазменном цилиндре рассматривалось в борновском приближении в работе [4], где описан резонанс этого поля на частоте, удовлетворяющей условию (27). Ниже приведены результаты, относящиеся к объемному рассеянию.

Сечение рассеяния для второй части (33) имеет вид

$$d\sigma_\omega = r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2 \left|\int \Phi(\boldsymbol{r}')\, \delta n_{\Delta\omega}(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'\right|^2 d\Omega, \tag{34}$$

где

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}, \quad \Phi(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{E}_{\omega_3}(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}'_\omega(\boldsymbol{r}'), \tag{35}$$

а $\delta n_{\Delta\omega}$ определяется из (6):

$$\delta n_{\Delta\omega} = -\frac{n_0 \Delta(\boldsymbol{v}_{1\omega_1} \boldsymbol{v}_{2\omega_2})}{(\Delta\omega)^2\, \varepsilon(\Delta\omega)}. \tag{36}$$

Выполняя в (34) необходимые преобразования, для E-поляризации падающей волны ($E_{3z} \neq 0$, $E_{3y} = 0$) при условии $\omega_3 \gg \omega_0$, получим

$$d\sigma_\omega = A_e^2 \left| \frac{\varepsilon(\Delta\omega) - 1}{\varepsilon(\Delta\omega)} \right|^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-in(\varphi - \Phi)\right] \delta_{1s}(JH\Delta)^{-1} I_n \right|^2 d\Omega, \tag{37}$$

где

$$A_e = \frac{2(ka)^2 \cos\theta}{\pi k_3 a} \sin\vartheta \left(\frac{v_1}{c}\right)\left(\frac{v_2}{c}\right)\left[\frac{\sin(k_0 L \cos\vartheta)}{\cos\vartheta}\right]; \tag{38}$$

$$I_n = \frac{\Lambda J_n(\lambda a) J_{n-1}(\Lambda a) - \lambda J_{n-1}(\lambda a) J_n(\Lambda a)}{a(\lambda^2 - \Lambda^2)}; \tag{39}$$

$$\Lambda^2 = k^2 + k_3^2 \pm 2kk_3 \cos\varphi_0; \tag{40}$$

Φ — угол между положительным направлением оси $0x$ и вектором $(\boldsymbol{k}^3 \pm \boldsymbol{k})$. Индекс s принимает значение 1 для ϑ- поляризации и 2—для φ-поляризации рассеянного излучения.

В случае тонкого цилиндра единственным неисчезающим членом в разложении (37) является нулевой ($n = 0$) и

$$d\sigma_\omega = A_e^2 \left(\frac{\pi a}{4}\right)^2 \left| \frac{\varepsilon(\Delta\omega) - 1}{\varepsilon(\Delta\omega)} \right|^2 d\Omega, \tag{41}$$

причем рассеянное поле является ϑ- поляризованным, так как $\delta_{12} = 0$ при $n = 0$. Характерными особенностями рассеяния E-поляризованной волны на индуцированных объемных флуктуациях в тонком цилиндре является отсутствие направленности рассеяния по углу φ (в отличие, например, от сечения переизлучения (29)), наличие резонанса при $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\Delta\omega) = 0$ и отсутствие резонанса при условии (27) Последнее является отражением хорошо известного факта проявления резонансных свойств малого плазменного цилиндра только при рассеянии волн H-поляризации ($E_{3z} = 0$, $E_{3y} \neq 0$). Можно показать, снова взяв в качестве исходной формулу (34), что сечение рассеяния плоской волны H-поляризации на индуцированных объемных флуктуациях в тонком плазменном цилиндре имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma_\omega = a^2 A_h^2 & \left| \frac{\varepsilon(\Delta\omega) - 1}{(\lambda a)^2 \varepsilon(\Delta\omega)\left[\varepsilon(\Delta\omega) + 1 - i\pi(\lambda a)^2/2\right]} \right|^2 \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} \left| e^{i\varphi} + \tilde{\lambda}^2 e^{-i\varphi}/\lambda^2 \right|^2 \cos^2\vartheta \\ \left| e^{i\varphi} + \varepsilon\tilde{\lambda}^2 e^{-i\varphi}/\lambda^2 \right|^2 \end{array} \right\} d\Omega, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$A_h = \left(\frac{ka}{2}\right)^2 (k_0 a) \cos\theta \left(\frac{k_0}{k_3}\right)\left(\frac{v_1}{c}\right)\left(\frac{v_2}{c}\right) \frac{\sin(k_0 L \cos\vartheta)}{\cos\vartheta} \sin^2\vartheta. \tag{43}$$

Верхняя строка в (42) соответствует ϑ-поляризации, а нижняя —φ-поляризации. Как видно из (42), резонанс, определяемый (27), действительно содержится в спектре рассеянного излучения плоской волны H-поляризации.

Отметим в заключение, что описанные здесь резонансы относятся к случаю, когда частота падающего поля значительно превышает частоту собственных колебаний плазмы ($\omega_3 \gg \omega_0$). Отказ от этого условия приводит к необходимости решать граничную задачу уже для поля $\boldsymbol{E}_3$ (когерентное рассеяние). Такое решение, проведенное ранее в различных приближениях (см., например, [13, 14]), также содержит спектр микроволновых резонансов, не связанных, однако, с нелинейным взаимодействием. Таким образом, если $\omega_3 \simeq \omega_0$ и ставится задача индуцированного рассеяния, то в спектре рассеянного излучения будут содержаться как относящиеся к когерентному рассеянию [13, 14], так и описанные выше резонансы, интенсивность которых определяется амплитудами взаимодействующих волн $E_{1,2}$ и, как видно из (38) и (43), значительно уступает интенсивности резонансов [13, 14]. Поэтому для их экспериментального обнаружения необходимы современные высокочувствительные измерительные приемники.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд Наука М., 1967
2 В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд Наука, М. 1967
3. N. M. Kroll, A Ron, N. Rostoker, Phys. Rev. Letters, **13**, 83 (1964).
4. H. Cheng, Y. C. Lee, Phys. Rev., **156**, 172 (1967).
5. А А. Иванов, Д Д. Рютов, ЖЭТФ, **48**, 684 (1965)
6 Д. Д. Рютов, ДАН СССР, **164**, № 6, 1273 (1965)
7 И П. Якименко, ЖЭТФ, **54**, 255 (1968)
8 И П. Якименко, Изв высш уч зав — Радиофизика, **10**, № 5, 637 (1967)
9 К. С. Карплюк, В Н Ораевский, ЖТФ, **38**, 1214 (1968).
10 А. И. Ахиезер, И А. Ахиезер, Р. В Половин, А Г Ситенко, К. Н Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М, 1964
11. М. Л. Левин, С М Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд Наука, М, 1967.
12. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М, 1962
13. P. E. Vandenplas, R. W Gou'ld, J Nucl. Energy, **C-6**, 449 (1964).
14. A. M Messiaen, P E Vandenplas, Physica, **30**, 2309 (1964).

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию
2 апреля 1968 г.

ON NONLINEAR EFFECTS ARISING FROM SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A BOUNDED PLASMA

I. P. Yakimenko

The nonlinear boundary problems for an isotropic plasma have been considered in the given field approximation Two nonlinear effects are described in the frame of the theory of scattering on electromagnetic fluctuations in a bounded plasma: nonthermal radiation on combinational frequencies and scattering on induced fluctuations of the volume density of an electron charge which arise from the interaction between transverse waves in a plasma cylinder of an arbitrary radius.