

СОДЕРЖАНИЕ

Токарев Ю. В. Об угловых вариациях спектрального индекса нетеплового космического радиоизлучения	161
Алексеев В. А., Гатэлук Э. Д., Дмитренко Д. А., Романычев А. А., Цейтлин Н. М. Об особенности в спектре радиоизлучения Крабовидной туманности в дециметровом диапазоне волн	168
Кон А. И., Татарский В. И. Корреляция поперечных смещений лучей в турбулентной атмосфере	173
Наумов А. П., Станкевич В. С. Об ослаблении миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн в дождях	181
Плечков В. М. Атмосферное поглощение радиоволн в области вращательного резонанса водяного пара $\lambda \approx 1,35$ см	185
Лоладзе Ц. Д., Цинцадзе Н. Л. Перенос вещества волной и связанная с ним неустойчивость слабоионизированной плазмы	189
Дам Бинь Тхань, Андреев А. Д. Исследование некоторых электрических характеристик плазмы в поле высокой частоты	194
Пятак А. И., Шевченко В. И. Параметрическая неустойчивость при взаимодействии модулированного пучка с плазмой в магнитном поле	197
Ханин Я. И. Влияние неоднородности поля резонатора на переходные процессы в квантовом генераторе	202
Гуревич Г. Л., Отмахов Ю. А. Нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны с просветляющим фильтром	208
Строганов В. В. Таллиевая атомно-лучевая трубка	221
Крупнов А. Ф., Овчаров М. Я., Скворцов В. А., Ульянов А. А., Шеронов А. П. Частотные характеристики молекулярного генератора на формальдегиде	224
Алексеев Б. Ф., Сobotковский Б. Е. О возможных искажениях и сдвигах сигналов поглощения ядерного магнитного резонанса при эффекте Оверхаузера	236
Тропинин В. Н. Спиновая температура при насыщении в слабых РЧ полях	243
Ризкин И. Х. О случайных процессах, слабо отклоняющихся от эргодических	247
Грачева М. Е., Гурвич А. С. Усредняющее действие приемной апертуры на флуктуации интенсивности света	253
Лучинин А. Г., Савельев В. А. О распространении синусоидально модулированного светового пучка в рассеивающей среде	256
Фетисов Е. П. О трансформации поверхностной волны в пространственную при рассеянии на случайных неровностях поверхности	265
Островский Л. А. О взаимодействии волновых пакетов в нелинейной среде	268
Таланов В. И., Шеронова Н. М. Влияние случайных фазовых aberrаций корректоров на характеристики лучевого волновода при высокой степени селекции мод	273
Степанов Н. С. Об адиабатическом преобразовании спектра волн в нестационарной среде с дисперсией	283
Сушик М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И. О «пленении» параметрически связанных волн импульсами и пучками излучения накачки	293
Барабаненков Ю. Н. К теории дифракции волн на теле в рассеивающей среде	298
Григас И. П., Шугуров В. К. Определение коэффициента отражения и диэлектрической проницаемости тонких цилиндрических образцов диэлектриков и полупроводников на СВЧ	307
Куликов М. Н., Стальмахов В. С. О влиянии статического сдвига скоростей в электронном потоке на работу лучевых приборов типа «М»	313

УДК 523.165

ОБ УГЛОВЫХ ВАРИАЦИЯХ СПЕКТРАЛЬНОГО ИНДЕКСА
НЕТЕПЛООВОГО КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Ю. В. Токарев

Рассматриваются регулярные и нерегулярные вариации спектрального индекса космического радиоизлучения при перемещении диаграммы направления приемной антенны по небосводу.

Вопрос об угловых вариациях частотного спектра распределенного космического радиоизлучения теоретически и экспериментально неоднократно рассматривался в ряде работ [1-5]. Наблюдения угловых вариаций спектрального индекса радиоизлучения представляются достаточно важными, поскольку они тесно связаны с особенностями распределения в Галактике релятивистских электронов, межзвездного магнитного поля, а также с конкретными особенностями статистики пространственного распределения метagalактических и галактических дискретных источников и т. д.

Рассмотрим прежде всего возможные регулярные угловые изменения спектрального индекса, обусловленные особенностями пространственного распределения источников галактического радиоизлучения. В работах [1, 4, 6] угловые вариации были рассчитаны на основе стационарной диффузионной модели движения релятивистских электронов в постоянном по величине межзвездном магнитном поле. Предполагалось, что источники космических лучей сосредоточены в галактической плоскости и релятивистские электроны, покинув источники и двигаясь к периферии Галактики, постепенно теряют энергию вследствие различных эффектов. В результате энергетический спектр электронов на периферии Галактики должен быть более крутым, чем в районе плоской галактической подсистемы. Это обстоятельство в рамках рассматриваемой модели как раз и определяет регулярную зависимость спектрального индекса космического радиоизлучения α от галактической широты b . Как показано в [2], в рамках диффузионной модели движения релятивистских электронов при сферической галактической короне действительно должны наблюдаться угловые вариации спектрального индекса, причем в метровом диапазоне волн вариации $\Delta\alpha$ должны быть $\sim 0,15$ для направлений на галактический центр и полюс, а для направлений на антицентр и полюс $\Delta\alpha \simeq 0,07$.

Принятая в [2] для вычисления $\Delta\alpha$ диффузионная модель не является, однако, достаточно обоснованной и тем более единственно возможной. Отметим также, что в [2] напряженность межзвездного магнитного поля считалась постоянной во всем объеме Галактики. Это предположение, вероятно, также не реализуется в действительности, и скорее всего напряженность поля постепенно уменьшается при переходе от галактической плоскости к границам Галактики.

В качестве альтернативной модели Галактики для вычисления $\Delta\alpha(b)$ мы примем ниже модель, в которой имеет место свободный и достаточно быстрый обмен космическими лучами между удаленными

участками галактического пространства. Этой модели, очевидно, соответствует картина относительно упорядоченного магнитного поля. Вместе с тем мы будем считать, что значение напряженности межзвездного магнитного поля H меняется в галактическом пространстве, убывая с ростом расстояния от галактического центра.

В связи с предполагаемой легкостью обмена космическими лучами естественно считать, что энергетический спектр излучающих в радиодиапазоне релятивистских частиц $N(E)$ будет одинаков во всех участках галактического пространства. Пространственные, а следовательно, и угловые вариации $\alpha(b)$ в этой модели должны, очевидно, возникать в том случае, когда энергетический спектр релятивистских электронов отличается от простого степенного закона $N(E) = kE^{-\gamma}$ ($\gamma = \text{const}$), а излучение происходит в магнитном поле, уменьшающемся при удалении от галактической плоскости*. Представляется довольно очевидным, что вторая модель является в известной мере прямо противоположной диффузионной модели. Во всяком случае обе эти модели в значительной степени исчерпывают возможности теоретических оценок $\Delta\alpha(b)$ в рамках простой двухкомпонентной (плоская подсистема, радиокорона) модели, дополняя друг друга.

Для нахождения $\Delta\alpha(b)$ в рамках рассматриваемой модели мы будем исходить из известного выражения для удельной интенсивности синхротронного радиоизлучения на частоте ν в выбранном направлении, которое характеризуется вектором l :

$$I_l(\nu) = 5,65 \cdot 10^{-13} \int_0^{\infty} N(E) P_l\left(\frac{\nu}{kH_{\odot}E^2}\right) dE, \quad (1)$$

где $k = 6,4 \cdot 10^{-12}$, H_{\odot} — напряженность магнитного поля в районе солнечной системы, а интегрирование вдоль луча зрения в (1) уже произведено, так что

$$P_l\left(\frac{\nu}{kH_{\odot}E^2}\right) = \int_0^{\infty} H(l) P\left(\frac{\nu}{kH(l)E^2}\right) dl, \quad (2)$$

где функция $P\left(\frac{\nu}{kHE^2}\right)$ есть функция излучения единичного электрона, усредненная по всевозможным направлениям магнитного поля на луче зрения**.

Для дальнейших вычислений в (1) и (2) необходимо задать вид функции $H(l)$. К сожалению, в настоящее время конкретный вид и даже характер функции $H(l)$ неизвестны. Согласно радиоастрономическим и некоторым другим данным естественно, однако, считать, что магнитное поле убывает с ростом расстояния от галактической плоскости, а в галактической плоскости — с ростом расстояния от центра Галактики.

* Не рассматривая здесь вопроса о природе «искривления» энергетического спектра электронов ($\gamma \neq \text{const}$), отметим все же, что подобное искажение спектра может возникнуть как непосредственно в источниках первичных космических лучей, так и вследствие синхротронных и других потерь энергии в межзвездном пространстве.

** Выражения (1) и (2) справедливы при естественных предположениях о том, что магнитное поле на луче зрения меняется по направлениям случайным образом и, в среднем, все направления H равновероятны. Распределение электронов по скоростям в каждой точке пространства изотропно. Показатель преломления межзвездной среды принят равным единице. Поглощение радиоволн в межзвездной плазме не учитывается.

Для оценочных расчетов мы будем полагать, что изменения магнитного поля в галактическом пространстве описываются простым законом

$$H = H_0 e^{-[(x^2 + y^2)/a^2]} \left[h l^{-2} l_d^2 + (1 - h) e^{-z^2/l_h^2} \right], \quad (3)$$

где a — характерный размер системы в плоскости Галактики, a , l_d и l_h — соответственно размеры диска и короны в направлении, перпендикулярном галактической плоскости, h — параметр, заключенный в пределах от нуля до единицы, H_0 — напряженность поля в галактическом центре. В выражении (3) необходимо задать конкретные численные значения h , a , l_d , l_h , определяющие пространственную структуру источников радиоизлучения в Галактике.

В настоящее время пространственное распределение галактических источников радиоизлучения является объектом дискуссии. В частности, не решен еще однозначно вопрос о наличии в Галактике достаточно обширной радиокороны. Вместе с тем, как показано в [6], в рамках рассматриваемой до сих пор квазигомогенной двухкомпонентной модели пространственного распределения источников нетеплового космического радиоизлучения наличие более или менее развитой галактической короны является совершенно необходимым. Поскольку, согласно [6], форма галактической короны не может быть в настоящее время выведена однозначно из имеющихся экспериментальных данных, в дальнейшем для оценок мы примем две модели короны, отличающиеся друг от друга разной степенью сплюснутости.

Для этого положим 1) $h = 0,75$, $l_h/l_d = 33$, $l_h/a = 1$ (сферическая радиокорона) и 2) $h = 0,7$, $l_h/l_d = 11$, $l_h/a = 0,33$ — сфероидальная в отношении распределения магнитного поля радиокорона с отношением полуосей сфероида, равным трем. Плоские подсистемы, характеризуемые параметрами a и l_d , в обеих моделях одинаковы. Параметры моделей распределения магнитного поля выбраны так, что интегральная интенсивность радиоизлучения в направлении на галактический полюс составляет примерно 0,1 от интенсивности радиоизлучения в направлении на галактический центр, что, в общем, соответствует имеющимся экспериментальным данным.

Выше мы говорили, правда, несколько условно, о форме галактической радиокороны, однако интегрирование в (2) по лучу зрения производится до бесконечности, поскольку магнитное поле (3) с ростом l быстро убывает и удельная объемная радиоизлучательная способность при больших l также уменьшается очень быстро.

При нахождении $I_l(\nu)$ по формуле (1) нами была вычислена предварительно функция $P_l \left(\frac{\nu}{k H_\odot E^2} \right)$ для обеих моделей магнитного поля. Расчет показал, что функции P_l для различных направлений l , построенные в зависимости от $\lg \left(\frac{\nu}{k H_\odot E^2} \right)$, образуют семейство почти

подобных кривых, сдвинутых друг относительно друга по оси абсцисс (при постоянном магнитном поле H вдоль луча зрения это утверждение было бы строгим и, очевидно, тривиальным). Как показывают оценки, некоторые незначительные различия кривых P_l для различных направлений l в дальнейшем совершенно несущественны.

Отмеченное подобие различных кривых P_l означает, что в рассматриваемой модели при одинаковом энергетическом спектре $N(E)$ вычисленные для разных направлений искомые зависимости $I_l(\nu)$ также подобны и отличаются друг от друга лишь соответствующим

сдвигом по частоте. В табл. 1 в логарифмическом масштабе приведены указанные выше сдвиги, отвечающие различным направлениям b , для которых с помощью (1) можно вычислить $I_l(\nu)$, если задан энергетический спектр $N(E)$. Приведенные в таблице смещения по частоте несколько условно отсчитываются от положения кривой $I(\nu)$, отвечающего направлению $b = 90^\circ$. Смысл выбора именно этого направления в качестве начала отсчета будет разъяснен несколько ниже.

Таблица 1

l^{II}	180°						
b^{II}	90°	80°	60°	50°	30°	10°	0°
$\lg \frac{\nu(b^{\text{II}})}{\nu(90^\circ)}$ (сферическое гало)	0	0,02	0,04	0,05	0,16	0,41	0,36
$\lg \frac{\nu(b^{\text{II}})}{\nu(90^\circ)}$ (сферондальное гало)	0	0	0,02	0,03	0,06	0,13	0,1

Для дальнейшего необходимо воспользоваться данными о частотном спектре нетеплового галактического радиоизлучения в области высоких галактических широт, примыкающей к $b^{\text{II}} = 90^\circ$. Если полагать, как обычно, что $I(\nu) \propto \nu^{-\alpha_{\text{гал}}}$, то, согласно [7], в области высоких широт в диапазоне частот от 13 до 178 МГц спектральный индекс галактического радиоизлучения $\alpha_{\text{гал}}$ практически не зависит от частоты и равен $0,46 \pm 0,04$. На частотах $\nu > 200$ МГц имеется лишь небольшое количество данных, согласно которым спектр в этом диапазоне резко искривляется, так что при $\nu \simeq 400$ МГц $\alpha_{\text{гал}} \simeq 0,9$ [7]*.

Зная частотный спектр галактического радиоизлучения, можно вычислить угловые вариации $\Delta \alpha(b)$ на какой-либо фиксированной частоте в рамках рассматриваемой модели при неизменном $N(E)$. Спектр радиоизлучения относится, как уже отмечалось, к области с координатами $b = 90^\circ$. По данным, приведенным в табл. 1, значение α для какого-либо заданного направления может быть найдено путем смещения в частотном спектре по частоте на величину, указанную в таблице. При такой методике, естественно, отпадает необходимость задавать в (1) конкретный вид $N(E)$.

На рис. 1 приведены графики вариаций спектрального индекса $\alpha_{\text{гал}}$ в зависимости от галактической координаты b для сферической

* Частотный спектр радиоизлучения Галактики может быть получен также полупериментальным путем, если воспользоваться данными о частотном спектре интегрального наблюдающегося космического радиоизлучения, вычитая из него соответствующую метагалактическую составляющую. Частотный спектр Метагалактики, в свою очередь, может быть рассчитан на основе данных о частотных спектрах метагалактических дискретных источников. Если частотные спектры источников характеризуются значениями α_i , не зависящими от частоты в определенном диапазоне частот, но вместе с тем α_i имеют определенную дисперсию, то результирующий спектральный индекс метагалактического радиоизлучения имеет отрицательную кривизну. Пользуясь имеющимися статистическими данными о частотных спектрах метагалактических источников, можно показать, что в диапазоне $\nu = 40 - 400$ МГц $\alpha_{\text{мет}}$ меняется при увеличении частоты от 0,93 до 0,78. Полагая далее, что на частоте $\nu \simeq 200$ МГц метагалактическая составляющая равна 0,2 от общей наблюдающейся интенсивности радиоизлучения [7], а $\alpha_{\text{от}} = 0,6$ в диапазоне 40—200 МГц [8] и не зависит от частоты, получим для $\alpha_{\text{гал}}$ в том же диапазоне значение, близкое к приведенному в [7].

и сфероидальной моделей галактической радиокороны. Кривые построены для двух частот 150 и 300 МГц. Как видно из рис. 1, модель сферической короны дает весьма значительные вариации $\Delta\alpha$, не соответствующие имеющимся экспериментальным данным. Модель сфероидальной короны (отношение полуосей ~ 3) приводит к значи-

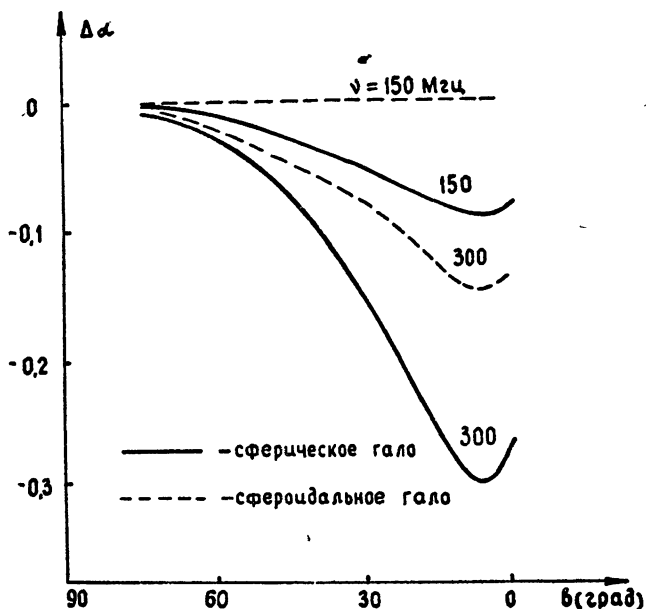


Рис. 1.

тельно меньшим вариациям $\alpha_{\text{гал}}$. Однако, если полученное в [7] различие спектрального индекса в области высоких и низких широт в диапазоне 13—100 МГц ($\alpha_{\text{гал}} = 0,46 \pm 0,04$ и $\alpha_{\text{гал}} = 0,38 \pm 0,04$ соответственно) и тождественность спектральных индексов на частотах $\nu \geq 200$ МГц для этих областей реальны, то и эта модель не соответствует наблюдательным данным.

Что касается диффузионной модели, связанной с представлениями о движении космических частиц вдоль хаотически искривленных силовых линий межзвездного поля, то, как уже отмечалось ранее, $\Delta\alpha$ для направлений на галактический полюс и на антицентр составляет 0,07. Это не согласуется с измерениями $\Delta\alpha$, приведенными в [9], результаты которой свидетельствуют об отсутствии заметных вариаций $\alpha_{\text{гал}}$ на частотах в диапазоне 13—400 МГц. По данным работы [7] $\Delta\alpha = 0,08$ в диапазоне 13—100 МГц. Вместе с тем, согласно [7], на частотах $\nu \geq 200$ МГц заметные вариации $\alpha_{\text{гал}}$ отсутствуют, что не соответствует результатам расчета для диффузионной модели.

Таким образом, если результаты [7] верны (сами по себе они являются несколько неожиданными), то они не согласуются с обеими рассмотренными здесь квазигомогенными моделями распределения источников синхротронного радиоизлучения в галактическом пространстве. По-видимому, единственная возможность объяснить результаты [7] связана с привлечением моделей с резкими и локальными неоднородностями распределения космических лучей в галактическом пространстве. Обмен космическими лучами между различными структурными особенностями Галактики (галактические рукава, корона

и т. д.) должен быть достаточно слабым с тем, чтобы энергетические спектры релятивистских электронов в галактических рукавах и галактической короне были разными.

Выше речь шла исключительно о регулярных угловых вариациях спектрального индекса $\alpha_{\text{гал}}$. Как было показано, в метровом диапазоне волн различные модели дают в качестве верхнего предела $\Delta\alpha_{\text{гал}}$ при перемещении от высоких к низким галактическим широтам значения порядка или меньше 0,1. Об этом же свидетельствуют результаты имеющихся, правда, весьма немногочисленных экспериментальных работ. Вариации $\Delta\alpha_{\text{гал}} \gtrsim 1$ можно в рамках рассмотренных моделей ожидать лишь на частотах $\nu > 300 \text{ МГц}$ и при том на относительно низких галактических широтах.

При измерениях, очевидно, на регулярные изменения α накладываются нерегулярные вариации, которые могут оказаться достаточно велики. В связи с этим возникает необходимость оценить ожидаемые нерегулярные изменения. Можно показать, что для дискретных источников радиоизлучения дисперсия α , обусловленная случайным распределением их по небосводу, при перемещении диаграммы направленности на угол порядка ширины диаграммы равна

$$D(\alpha) = \frac{1}{\Omega} \frac{S_{\text{дискр}}^2}{S^2} \left[D(\alpha_i) + (\bar{\alpha}_i - \alpha_{\text{гал}}) \frac{S_{\text{гал}}^2}{S^2} \right] \int_0^S s^2 n(s) ds / \int_0^S s n(s) ds, \quad (4)$$

где Ω — телесный угол диаграммы направленности, $S_{\text{гал}}$, $S_{\text{дискр}}$ и S — потоки распределенного радиоизлучения, суммарного радиоизлучения дискретных источников и полный поток принимаемого радиоизлучения, $\alpha_{\text{гал}}$, $\bar{\alpha}_i$ и α — соответствующие спектральные индексы, $n(S)dS$ — число дискретных источников с потоком в интервале от S до $S + dS$.

Для оценки $D(\alpha)$, обусловленной метагалактическими источниками, можно воспользоваться зависимостью $\lg N - \lg S$ на частоте 157 МГц , приведенной в [10]. Полагая в (4) $\sqrt{D(\alpha_i)} = 0,2$; $\bar{\alpha}_i = 0,8$; $\alpha_{\text{гал}} = 0,5$; $S_{\text{дискр}}/S \simeq 1/6$; $\Omega = 1/36$, находим, что среднеквадратичное значение флуктуаций $\sqrt{D(\alpha)} = 5 \cdot 10^{-3}$, если в исследуемых областях нет источников с потоками на частоте 157 МГц , превосходящими $10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$ ($N(S) \simeq 1$) и $\sqrt{D(\alpha)} = 10^{-3}$, если отсутствуют источники с потоками, превышающими $5 \cdot 10^{-25} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$ ($N(S) \simeq 4$).

Аналогичная оценка для галактических дискретных источников несколько менее надежна из-за отсутствия достаточно полных данных о статистике источников. Тем не менее, пользуясь имеющимися в литературе данными, можно показать, что $\sqrt{D(\alpha)}$, по всей вероятности, не превосходит 10^{-2} . Таким образом, случайные флуктуации α , обусловленные метагалактическими и галактическими дискретными источниками, относительно малы и, по-видимому, не будут заметно мешать измерениям регулярных угловых вариаций спектрального индекса.

Сложнее обстоит дело с выделением из общих наблюдаемых угловых вариаций α -изменений, связанных с наличием довольно многочисленных галактических шпуров. Соответствующие нерегулярные изменения α могут быть довольно значительными ($\Delta\alpha \sim 0,1$). Разумеется влияние нескольких основных шпуров на регулярные изменения $\alpha_{\text{гал}}$ б) может быть достаточно точно учтено, поскольку положение соответствующих шпуров известны. Более слабые шпуров, связанные, быть может, с близко расположенными остатками сверхновых, учесть труднее. Однако эти вопросы уже выходят за рамки данной работы, поскольку

существование большого количества мелких шпуров делает вообще спорным справедливость рассмотренных здесь квазигомогенных моделей, основанных на предположении о существовании более или менее обширной галактической короны.

Дальнейший прогресс в решении проблемы пространственного распределения источников космического радиоизлучения в Галактике может быть достигнут в результате проведения достаточно точных измерений угловых вариаций спектрального индекса нетеплового космического радиоизлучения.

Автор благодарен Г. Г. Гетманцеву за интерес к работе и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, Тр. 5-го Совещания по вопросам космогонии, М., 1956, стр. 468.
2. С. И. Сыроватский, Астрон. ж., **36**, № 1, 17 (1959).
3. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, № 6, 921 (1960).
4. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Астрон. ж., **46**, № 3, 430 (1964).
5. Г. Г. Гетманцев, В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, № 5, 866 (1962).
6. Г. Л. Абрамян, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, В. А. Зиничев, Астрон. ж. (в печати).
7. A. H. Bridle, M. N. R. A. S., **136**, № 2 (1968).
8. Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. А. Сазонов, А. Ф. Тарасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 2, 191 (1968).
9. C. R. Purton, M. N. R. A. S., **133**, 43 (1966).
10. J. H. Oort, VCAP, memo **18**, 22(2), 19t2.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 ноября 1967 г.

ON ANGULAR VARIATIONS OF THE SPECTRAL INDEX OF NONTHERMAL COSMIC RADIO EMISSION

Yu. V. Tokarev

The author considers regular and irregular variations of the spectral index of cosmic radio emission when the radiation pattern of the receiving antenna is moved over the sky.

УДК 523.164.4

ОБ ОСОБЕННОСТИ В СПЕКТРЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

*В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук, Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,
Н. М. Цейтлин*

Приводятся результаты повторных абсолютных измерений интенсивности радиоизлучения Крабовидной туманности на длинах волн $\lambda = 30,2$; 34,5; 39; 42; 44,1; 57,8; 57,9 см. Полученные результаты указывают на наличие «ступеньки» со спектральным индексом $\alpha \approx 0$ в спектре радиоизлучения источника Телец-А. Эти данные согласуются с результатами измерений интенсивности радиоизлучения Крабовидной туманности, полученными одним из авторов в 1962 г. на волнах $\lambda = 25,1$; 34,25; 35,9; 42,4; 54,4 см.

В результате абсолютных измерений интенсивности радиоизлучения источника Телец-А, проведенных в июле—сентябре 1962 г. в диапазоне длин волн 30—60 см, была обнаружена особенность в спектре радиоизлучения, заключающаяся в существенном уменьшении спектрального индекса α в этом диапазоне [1]. К этому результату, однако, пришлось отнестись с осторожностью, так как, хотя экспериментальные точки явно указывали на наличие в спектре «ступеньки» с $\alpha \approx 0$, все же в пределах точности измерений, учитывая данные других авторов, можно было удовлетворить эксперименту также прямой с $\alpha = 0,25$ — общепринятым спектральным индексом радиоизлучения Крабовидной туманности.

С целью уточнения полученных результатов, в августе—октябре 1966 г. были проведены повторные абсолютные измерения интенсивности радиоизлучения Крабовидной туманности в диапазоне волн 30—60 см.

При этом, так же как и в 1962 г., использовался метод измерений с помощью эталонного излучения «абсолютно черного» диска [2, 3], однако условия измерений существенно отличались от прежних, а именно, вместо 8-метровой антенны с перестраиваемым логарифмическим облучателем использовалась 12-метровая параболическая антенна со сменными дипольными облучателями; вместо «черного» диска диаметром 3,8 м, расположенного на расстоянии 230 м и наблюдаемого под углом 23° , был применен диск с диаметром 4,75 м, расположенный на расстоянии 506 м от антенны на угловой высоте $24^\circ 28'$; диск был покрыт поглощающим материалом иного типа, нежели в 1962 г.; наконец, измерения проводились в точках диапазона, несколько сдвинутых по сравнению с 1962 г. ($\lambda = 30,2$; 34,5; 39; 42; 44,1; 57,8; 57,9 см, в то время как в 1962 г. $\lambda = 25,1$; 34,25; 35,9; 42,4; 54,4 см). Увеличение расстояния до диска и его диаметра уменьшило погрешности за счет неточности в определении фазового центра антенны, и, следовательно, углового размера диска ($\Delta\vartheta_d = 31' 20''$, $\sigma_{\vartheta_d} \approx 0,5\%$), а также величину дифракционной поправки ξ [3] и неточность ее учета ($\sigma_{\text{дифр}} \approx \xi/2 \approx 1 \div 1,5\%$).

Увеличение сигнала от источника, связанное с большей площадью раскрыва антенны, привело к уменьшению погрешности из-за неточного учета фона в районе источника и опорной области ($\sigma_{\Delta S} \approx 1,5\%$) и сокращению числа записей, необходимого для получения достаточно малой случайной ошибки измерений ($\sigma_{\text{фл}}$ на разных волнах составляла от 1,2 до 3,5%), обусловленной флуктуационным порогом чувствительности аппаратуры $\delta T_{a \min}$ (использовался серийный радиометр П-5-9 с $\delta T_{a \min} \approx 1,5 \div 2^\circ\text{K}$ при $\tau = 1$ сек; работа производилась при постоянной времени $\tau = 16$ сек).

С целью уменьшения погрешности за счет конечности расстояния до диска проводилась небольшая перефокусировка антенны—облучатель смещался из фокуса и устанавливался посредине между максимумами фокальных пятен, измеренных по Солнцу и по диску на конечном расстоянии, что обеспечивало равенство усиления при приеме излучения от источников на бесконечном и конечном расстояниях (смещение $\delta \approx 0,1 \lambda$; $\sigma_k < 1\%$ (см. [4]). Измерения проводились на высотах, близких к кульминации Тельца-А (координаты: эпоха 1966, 0, $\alpha = 5^h 34^m 18^s$, $\delta = 22^\circ 00'$); погрешности, связанные с неточным учетом поглощения в атмосфере и величины фона за диском, а также с неточностью наведения на источник и отсчета величины температуры диска не превышали 0,5% каждая; погрешность из-за разного излучения, попадающего в боковые лепестки при повороте антенны, не превышала 1%.

Не останавливаясь на конкретной методике, аналогичной описанной в [1], приведем результаты измерений. (В табл. 1 наряду с результатами 1966 г. представлены для сравнения также результаты 1962 г.)

Таблица 1

1966 год

λ	30,2	34,5	39,8	44,1	57,8	57,9
$S_v (10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1})$	8,9	10,3	9,4	9,8	11,75	11,8
$\sigma (\%)$	3	3	3	4,5	3,5	3

1962 год

λ	25,21	34,25	35,9	42,4	54,4
$S_v (10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1})$	9,8	10,0	10,16	9,1	11,1
$\sigma (\%)$	7	3	10,5	5	6

Таким образом, результаты, полученные в 1966 году, подтверждают существование особенности ($\alpha \approx 0$) в спектре радиоизлучения Крабовидной туманности в районе 25—45 см (см. также рис. 1 и соответствующую табл. 2; на рис. 1, кроме наших данных 1962 и 1966 гг., отмеченных соответственно треугольниками и кружками, представлены результаты работ [5–23], дающие наиболее точные экспериментальные значения интенсивности радиоизлучения Тельца-А; эти данные сведены также в табл. 2).

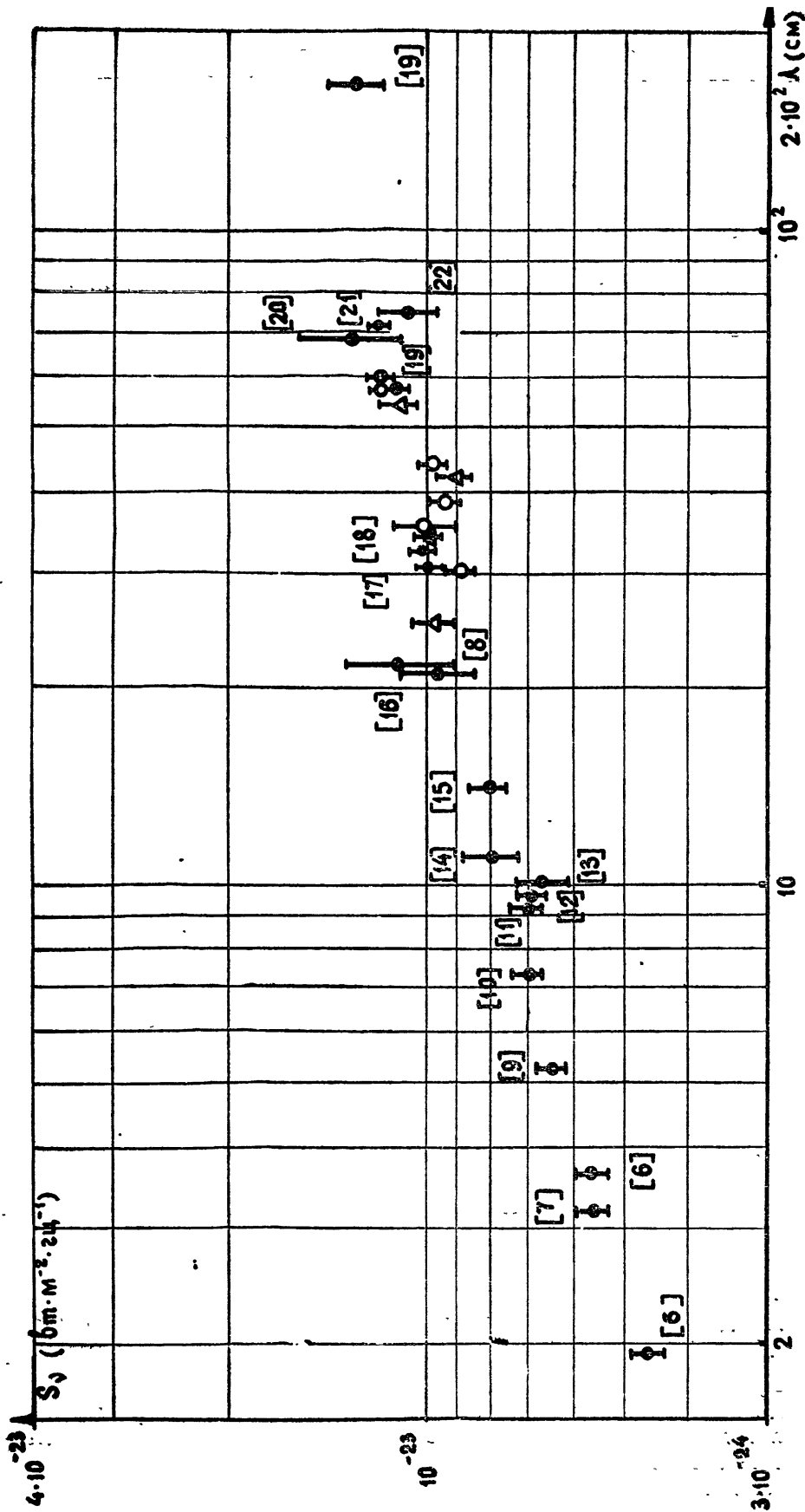


Рис. 1 Спектр Крабовидной туманности.

Таблица 2

λ (см)	$S, (10^{-24} \text{ см} \times \times \text{м}^{-2} \times \times 2\pi^{-1})$	Пореш- ность (%)	Время измерений	А В Т О Р Ы	λ (см)	$S, (10^{-24} \text{ см} \times \times \text{м}^{-2} \times \times 2\pi^{-1})$	Пореш- ность (%)	Время измерений	А В Т О Р Ы
0,85	4,2	15	19,4	C. W. Tolbert, A. W. Straiton [5]	34,5	10,3	3	1966	В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук,
1,94	4,61	6	1965	R. J. Allen, A. H. Bailet [6]					Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,
3,2	5,6	5	1961	B. C. Лазаревский, К. С. Станкевич,	35,9	10,2	10	1962	Н. М. Цейтлин*
				B. C. Троицкий [7]					В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин,
3,61	5,63	5	1965	R. J. Allen, A. H. Barret [6]	39,8	9,4	3	1966	В. А. Порфирьев [1]
5,28	6,46	5	1965	Д. А. Дмитренко, К. М. Стрехнева [9]					В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук,
7,35	7,11	3	1965	R. W. Wilson, A. A. Penzials [10]					Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,
9,37	7,1	5	1959	M. W. Broten, W. J. Medd [11]	42,4	9,1	5	1962	Н. М. Цейтлин*
9,54	6,93	5	1964	W. J. Medd, K. V. Ranana [12]					В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин,
10,2	6,7	10	19 0	J. H. Nichols, R. M. Sloanaker [13]	44,1	9,8	4,5	1966	В. А. Порфирьев [1]
11,1	8,11	10	1930	W. Altenhoff, P. G. Mezger,					В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук,
				H. Wendker, Y. Westerhout [14]					Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,
14,05	8,1	6	1964	В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич [15]	54,4	11,1	6	1962	Н. М. Цейтлин*
21,1	9,68	12	1953	P. G. Mezger [16]					В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин,
21,5	11,2	20	1958	Y. Westerhout [8]	56,1	11,5	5	1964	В. А. Порфирьев [1]
25,2	9,8	7	1962	В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин,	57,8	11,75	3,5	1966	К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин [12]
				B. A. Порфирьев [1]	57,9	11,8	3	1966	В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук,
30,9	8,9	3	1966	В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлук,					Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,
				Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев,					Н. М. Цейтлин*
				Н. М. Цейтлин*	68,5	13,2	20	1958	N. Y. Roman, B. S. Yapple [20]
31,2	10,3	5	1960	D. E. Higgs, J. A. Roberts [17]	70,16	11,8	5,5	1963	А. В. Захаров, В. Д. Кротиков,
32,6	10,2	4	1933	В. А. Разин, В. Т. Федоров [18]					В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин [21]
34,25	10	3	1962	В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин,	75	10,7	10	1956	C. L. Seeger, Y. Westerhout,
				В. А. Порфирьев [1]					Н. С. Hulst [22]
					167	13,0	10	1964	В. П. Ласточкин, Э. Б. Лукин,
					790	25,4	20	1956	К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин [19]
									R. Adgie, F. Y. Smith [23]

* Настоящая работа.

Мы надеемся продолжить абсолютные измерения интенсивности радиоизлучения Крабовидной туманности в диапазоне 10—30 см и 60—100 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, В. А. Порфирьев, *Астрон. ж.*, **41**, № 3, 446 (1964).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **4**, № 3, 393 (1961).
3. Н. М. Цейтлин, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **6**, № 6, 1265 (1963).
4. К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, *Радиотехника и электроника*, **11**, № 3, 451 (1966).
5. C. W. Gilbert, A. W. Straiton, *Astron. J.*, **70**, № 2, 177 (1965).
6. R. J. Allen, A. H. Barret, *Astron. J.*, **71**, № 9, 843 (1966).
7. В. С. Лазаревский, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **40**, № 1, 12 (1963).
8. Y. Westerhout, *Bull. Astron. Inst. Netherl.*, **14**, № 488 (1958).
9. Д. А. Дмитренко, К. М. Стрежнева, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 2, 165 (1967).
10. R. W. Wilson, A. A. Penzials, *Astrophys. J.*, **146**, № 1, 286 (1966).
11. M. W. Broten, W. J. Medd, *Astron. J.*, **64**, № 8, 324 (1959).
12. W. J. Medd, K. V. Ramana, *Astrophys. J.*, **142**, № 1, 383 (1965).
13. J. H. Nichols, R. M. Sloanaker, *Astron. J.*, **65**, № 3, 109 (1960).
14. W. Altenhoff, P. G. Mezger, H. Wendker, Y. Westerhout, *Vereef. Univ. Sternwarte Bohn. № 59*, (1951).
15. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, *Астрон. ж.*, **41**, № 4, 769 (1964).
16. P. G. Mezger, *Zs. f. Ap.*, **46**, 234 (1958).
17. D. E. Harris, J. A. Roberts, *Publs. Astron. Soc. Pacif.*, **72**, № 427, 237 (1960).
18. В. А. Разин, В. Т. Федоров, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **6**, № 5, 1052 (1963).
19. В. П. Ласточкин, Э. Б. Лукин, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, *Астрон. ж.*, **42**, № 4, 705 (1965).
20. N. Y. Roman, B. S. Yaplee, *Proc. IRE*, **46**, 199 (1958).
21. А. В. Захаров, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **7**, № 3, 553 (1964).
22. C. L. Seeger, Y. Westerhout, H. C. Hulst, *Bull. Astron. Inst. Netherl.*, **13**, 89 (1956).
23. R. Adgie, F. Y. Smith, *Observatory*, **76**, 181 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 ноября 1967 г.

ON PECULIARITY IN CRAB NEBULA RADIO EMISSION SPECTRUM IN DECIMETER WAVE RANGE

V. A. Alekseev, E. D. Gatelyuk, D. A. Dmitrenko, A. A. Romanychev,
N. M. Tseitlin

The results of the second absolute intensity measurements of Crab Nebula at the wavelengths 30.2, 34.5, 39, 42, 44.1, 57.3, 57.9 cm are presented. The data obtained point out to the presence of a step with the spectral index $\alpha \approx 1$ in Taurus-A radio emission spectrum. These data agree with intensity measurements of Crab Nebula radio emission obtained by one of the authors in 1962 at the wavelengths 25.1, 34.25, 35.9, 42.4, 54.4 cm.

УДК 537.574

КОРРЕЛЯЦИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СМЕЩЕНИЙ ЛУЧЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. И. Кон, В. И. Татарский

Произведен расчет статистических характеристик поперечных смещений лучей в турбулентной атмосфере при произвольных значениях волнового параметра. Для реальной модели турбулентности рассчитаны средний квадрат поперечных смещений луча (в том числе и на неоднородной трассе) и корреляция смещений параллельных лучей. В геометрико-оптическом приближении найдены формулы, связывающие корреляционную и структурную функции смещений сходящихся лучей с соответствующими формулами для параллельных лучей.

Для ряда приложений представляет интерес выяснить вопрос, каковы средние характеристики поперечных смещений лучей при распространении света в турбулентной атмосфере (например, средний квадрат поперечного смещения луча, корреляция смещений параллельных лучей и т. д.) и как они связаны с обычно входящим в теорию средним квадратом флуктуаций логарифма амплитуды. Представляет также интерес корреляция поперечных смещений лучей, распространяющихся под углом друг к другу.

1. Начнем с рассмотрения вопроса о корреляции смещений двух лучей, распространяющихся параллельно оси X , точки входа которых на начальной плоскости можно, не ограничивая общности, считать симметричными относительно начала координат: $(0, \rho/2)$ и $(0, -\rho/2)$. Для вектора смещения луча в плоскости, перпендикулярной лучу, можно написать следующее выражение [1]:

$$\delta \rho = \frac{1}{k} \int_0^x \{l[\nabla S(x', y, z) l]\} dx', \quad (1)$$

где S — фаза, l — направляющий вектор луча, x — его длина, а y, z берутся на луче. Раскрывая двойное векторное произведение и используя уравнение эйконала, (1) можно переписать в виде

$$\delta \rho = \frac{1}{2} \int_0^x (x-x') \nabla_{\perp} \varepsilon(x', y, z) dx', \quad (2)$$

где ∇_{\perp} — градиент в плоскости, перпендикулярной к лучу.

Для корреляционной функции поперечных смещений указанных выше параллельных лучей имеем

$$\langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^x (x-x')(x-x'') \left\langle \nabla_{\perp} \varepsilon\left(x', \frac{\rho}{2}\right) \nabla_{\perp} \varepsilon\left(x'', -\frac{\rho}{2}\right) \right\rangle dx' dx''. \quad (3)$$

Для вычисления среднего значения произведения поперечных градиентов флуктуаций диэлектрической проницаемости в (3) воспользуемся следующей формулой, справедливой для однородных и изотропных флуктуаций поля ε :

$$\left\langle \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}_1)}{\partial x_i^1} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}_2)}{\partial x_k^1} \right\rangle = - \left[\frac{B'_\varepsilon(r)}{r} \delta_{ik} + \frac{\xi_i \xi_k}{r} \left(\frac{B'_\varepsilon(r)}{r} \right)' \right]. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\xi_i)$, δ_{ik} — символ Кронеккера и штрихи означают дифференцирование по $|\mathbf{r}|$. (При выводе (4) следует воспользоваться свойством изотропности и тождеством $B''_\varepsilon(r) = B'_\varepsilon(r)/r + r[B'_\varepsilon(r)/r]'$.)

С помощью (4) и учетом того, что $2B'_\varepsilon(r) = -D'_\varepsilon(r)$, (3) можно переписать в виде

$$\langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^x (x-x')(x-x'') \left\{ \frac{D'_\varepsilon(r)}{r} + \frac{\rho^2}{2r} \left[\frac{D'_\varepsilon(r)}{r} \right]' \right\} dx' dx'', \quad (5)$$

где $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x'-x'')^2 + \rho^2}$. Отсюда легко получить выражение для структурной функции поперечных смещений параллельных лучей:

$$D_{\delta\rho}^{\Pi} \equiv \langle (\delta \rho_1 - \delta \rho_2)^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x (x-x')(x-x'') \times \\ \times \left\{ \frac{D'_\varepsilon(x'-x'')}{x'-x''} - \frac{D'_\varepsilon(r)}{r} - \frac{\rho^2}{2r} \left[\frac{D'_\varepsilon(r)}{r} \right]' \right\} dx' dx''. \quad (6)$$

Вводя новые переменные $x' - x'' = \xi$, $x' + x'' = 2\eta$ и выполняя интегрирование по η , получим

$$D_{\delta\rho}^{\Pi} = \int_0^x \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 \xi}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right) \left\{ \frac{D'_\varepsilon(\xi)}{\xi} - \frac{D'_\varepsilon(r)}{r} - \frac{\rho^2}{2r} \left[\frac{D'_\varepsilon(r)}{r} \right]' \right\} d\xi. \quad (7)$$

Наибольший вклад в (7) вносит область $\xi \simeq 0$. В самом деле, если принять $D_\varepsilon(\rho) \sim \rho^{2/3}$, что соответствует реальной модели турбулентных флуктуаций в атмосфере, то $D'_\varepsilon(\xi)/\xi \sim \xi^{-4/3}$ и интеграл расходится в нуле (на самом деле он сходится, если учесть влияние теплопроводности и вязкости, но наибольший вклад в него дается областью $\xi \simeq 0$). Принимая это во внимание, мы можем (7) переписать в виде

$$D_{\delta\rho}^{\Pi} \simeq \frac{x^3}{3} \int_0^x \left\{ \frac{D'_\varepsilon(\xi)}{\xi} - \frac{D'_\varepsilon(r)}{r} - \frac{\rho^2}{2r} \left[\frac{D'_\varepsilon(r)}{r} \right]' \right\} d\xi. \quad (8)$$

Учитывая, что при $\xi \gg L$ подынтегральное выражение в (8) быстро убывает пропорционально $D'_\varepsilon(\xi)/\xi^2$ (использовано, что $\rho/L \ll 1$), мы можем, не внося существенной ошибки, распространить интегрирование в (8) до бесконечности. Тогда

$$D_{\delta\rho}^{\Pi} \simeq \frac{x^3}{3} \int_0^\infty \left\{ \frac{D'_\varepsilon(\xi)}{\xi} - \frac{D'_\varepsilon(\sqrt{\xi^2 + \rho^2})}{\sqrt{\xi^2 + \rho^2}} - \frac{\rho^2}{2\sqrt{\xi^2 + \rho^2}} \left[\frac{D'_\varepsilon(\sqrt{\xi^2 + \rho^2})}{\sqrt{\xi^2 + \rho^2}} \right]' \right\} d\xi. \quad (8a)$$

Функция $D_{\delta\rho}^{\Pi}$ в такой форме понадобится в дальнейшем, но выра-

жение (8 а) неудобно для окончательных расчетов с реальной моделью турбулентности, когда $D_e(r) = C_e^2 r^{2/3}$. Поэтому вернемся к формуле (1), используя которую, выражение для корреляционной функции поперечных смещений можно записать в следующей форме:

$$\langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = \frac{1}{k^2} \int_0^x \int_0^{\tilde{x}} \left\langle \nabla_{\perp} S \left(\xi_1, \frac{\rho}{2} \right) \nabla_{\perp} S \left(\xi_2, -\frac{\rho}{2} \right) \right\rangle d\xi_1 d\xi_2. \quad (3a)$$

Не представляет труда рассчитать эту функцию в дифракционном приближении (под «лучами» в этом случае следует понимать нормали к поверхностям равной фазы). Для этого введем для $S(\xi, \rho)$ фурье-представление по поперечным координатам:

$$S(\xi, \rho) = \int e^{i\mathbf{x}\rho} f_S(\xi, \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}.$$

Тогда

$$\left\langle \nabla_{\perp} S \left(\xi_1, \frac{\rho}{2} \right) \nabla_{\perp} S \left(\xi_2, -\frac{\rho}{2} \right) \right\rangle = \int \mathbf{x}^2 e^{i\mathbf{x}\rho} F_S(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}, \quad (9)$$

где $\delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) F_S(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}) = \langle f_S(\xi_1, \mathbf{x}_1) f_S(\xi_2, \mathbf{x}_2) \rangle$.

Функцию F_S легко выразить через двумерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости, используя соотношение

$$f_S(\xi, \mathbf{x}) = \frac{k}{2} \int_0^{\xi} \cos \frac{x^2(\xi - \xi')}{2k} f_{\epsilon}(\xi', \mathbf{x}) d\xi',$$

справедливое в приближении метода плавных возмущений:

$$F_S(\xi_1, \xi_2, \mathbf{x}) \simeq \frac{\pi k^2}{4} \Phi_{\epsilon}(\mathbf{x}) \left\{ \xi_{\min} \cos \frac{x^2(\xi_1 - \xi_2)}{2k} + \right. \\ \left. + \frac{k}{x^2} \left[\sin \frac{x^2(\xi_1 + \xi_2)}{2k} - \sin \frac{x^2|\xi_1 - \xi_2|}{2k} \right] \right\}, \quad (10)$$

где $\xi_{\min} = \min(\xi_1, \xi_2)$. (Формула (10) получена приближенно с учетом того обстоятельства, что при $\xi \gg 1/x$ $F_S(\xi, \mathbf{x})$ быстро стремится к нулю.) Подставляя (10) в (9) и производя интегрирование по угловой переменной в пространстве вектора \mathbf{x} , получим

$$\left\langle \nabla_{\perp} S(\xi_1, \rho/2) \nabla_{\perp} S \left(\xi_2, -\frac{\rho}{2} \right) \right\rangle = \frac{\pi^2 k^2}{2} \int_0^{\infty} \Phi_{\epsilon}(x) x^3 J_0(x\rho) \times \\ \times \left\{ \xi_{\min} \cos \frac{x^2(\xi_1 - \xi_2)}{2k} + \frac{k}{x^2} \left[\sin \frac{x^2(\xi_1 + \xi_2)}{2k} - \sin \frac{x^2|\xi_1 - \xi_2|}{2k} \right] \right\} dx. \quad (11)$$

Используя (11), можно получить для корреляционной функции (3 а) после интегрирования по продольным координатам

$$\langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = 2\pi^2 k^2 x \int_0^{\infty} \Phi_{\epsilon}(x) \left(1 - \frac{k}{x^2 x} \sin \frac{x^2 x}{k} \right) J_0(x\rho) \frac{dx}{x}. \quad (12)$$

Формула (12) верна для произвольного вида спектра Φ_{ϵ} ; мы в дальнейшем будем использовать выражение

$$\Phi_{\varepsilon}(x) = AC_{\varepsilon}^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad A=0,033.$$

Исследуем сначала величину $\langle \delta \rho^2 \rangle$. Легко видеть, что

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \frac{216}{55} A \pi^2 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) C_{\varepsilon}^2 k^{1/6} x^{17/6} \left[D^{-11/6} - \frac{6}{17} \left(1 + \frac{1}{D^2}\right)^{17/12} \sin\left(\frac{17}{6} \arctg D\right) \right], \quad (13)$$

где $D = \frac{x_m x}{k}$. Отсюда легко получить формулы для двух важных частных случаев $D \ll 1$ (геометрическая оптика) и $D \gg 1$:

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = A \pi^2 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) C_{\varepsilon}^2 x_m^{1/3} x^3 \quad (D \ll 1); \quad (13a)$$

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = \frac{216 \cdot 6}{55 \cdot 17} A \pi^2 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \cos \frac{\pi}{12} C_{\varepsilon}^2 k^{1/6} x^{17/6} \quad (D \gg 1). \quad (13b)$$

Сравним полученные формулы с соответствующими выражениями для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды:

$$\sigma_0^2 = \left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle = \frac{\pi^2}{24} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) AC_{\varepsilon}^2 x_m^{7/3} x^3 \quad (D \ll 1); \quad (14a)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{54}{55} A \pi^2 \sin \frac{\pi}{12} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) C_{\varepsilon}^2 k^{7/6} x^{11/6} \quad (D \gg 1). \quad (14b)$$

Сравнивая (13 а, б) и (14 а, б), получаем

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = 24 \frac{\sigma_0^2}{x_m^2} \quad (D \ll 1); \quad (15a)$$

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = \frac{24}{17} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \frac{\sigma_0^2 x}{k} \quad (D \gg 1). \quad (15b)$$

Из формул (15 а, б) видна связь среднего квадрата поперечного смещения луча с существованием области сильных флуктуаций. В самом деле, так как $\sigma_0^2 \sim \langle \delta \rho^2 \rangle / l_0^2$ ($D \ll 1$) и $\sigma_0^2 \sim \langle \delta \rho^2 \rangle / \lambda L$ ($D \gg 1$), то ясно, что область сильных флуктуаций $\sigma_0^2 \gg 1$ начинается там, где поперечное смещение луча $\sqrt{\langle \delta \rho^2 \rangle}$ порядка внутреннего масштаба турбулентности (в геометрическом случае) или порядка радиуса первой зоны Френеля (в дифракционной области). Отметим, что, как легко видеть, величина $\langle \delta \rho^2 \rangle$ является средним квадратом блуждания «центра тяжести» достаточно узкого пучка, когда $\rho \ll l_0$ или, соответственно, $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$. Результат для случая $\rho \ll l_0$ в точности совпадает с полученным в [2].

Не представляет труда написать выражение для $\langle \delta \rho^2(x) \rangle$ и на неоднородной трассе. Принимая $\Phi_{\varepsilon}(x) = C_{\varepsilon}^2(\xi) \Phi_{\varepsilon}^{(0)}(x)$ (где $\Phi_{\varepsilon}^{(0)}(x) = Ax^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2)$), получим

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = 2\pi^2 k^2 \int_0^x C_{\varepsilon}^2(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \Phi_{\varepsilon}^{(0)}(x) \left[1 - \cos \frac{x^2(x-\xi)}{k} \right] \frac{dx}{x}, \quad (16)$$

отсюда

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \frac{A}{2} \pi^2 \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) x_m^{1/3} \int_0^x C_s^2(\xi) (x-\xi)^2 d\xi \quad (D \ll 1); \quad (17a)$$

$$\langle \delta \rho^2(x) \rangle = \frac{216}{55} \pi^2 \cos \frac{\pi}{12} \Gamma \left(\frac{7}{6} \right) A k^{1/6} \int_0^x C_s^2(\xi) (x-\xi)^{11/6} d\xi \quad (D \gg 1). \quad (17b)$$

Корреляционная и структурная функции поперечных смещений лучей для произвольных D после интегрирования (12) имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = \langle \delta \rho^2 \rangle & \left\{ {}_1F_1 \left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{6}{17D} \operatorname{Im} \left[(1-iD)^{17/6} {}_1F_1 \left(-\frac{17}{6}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4(1-iD)} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_{\rho}^{\Pi} \equiv \langle (\delta \rho_1 - \delta \rho_2)^2 \rangle = 2 \langle \delta \rho^2 \rangle & \left\{ 1 - {}_1F_1 \left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{6}{17D} \operatorname{Im} \left[(1-iD)^{17/6} {}_1F_1 \left(-\frac{17}{6}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4(1-iD)} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18a)$$

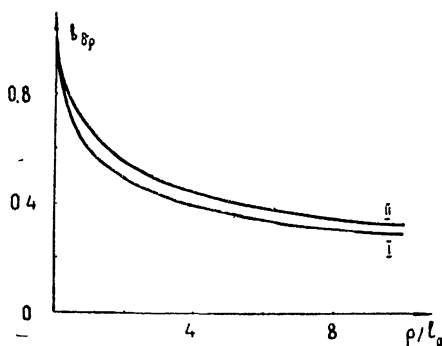
где ${}_1F_1(a, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Отсюда получаются предельные формулы

$$\langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = A \pi^2 \Gamma \left(\frac{7}{6} \right) C_s^2 x_m^{1/3} x^3 {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4} \right) \quad (D \ll 1); \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta \rho_1 \delta \rho_2 \rangle = \frac{216 \cdot 6}{55 \cdot 17} A \pi^2 \Gamma \left(\frac{7}{6} \right) C_s^2 k^{1/6} x^{17/6} \times \\ \times \left\{ \frac{17}{6\Gamma \left(\frac{17}{6} \right)} \left(\frac{k \rho^2}{4x} \right)^{11/6} + \operatorname{Im} \left[e^{-17i\pi/12} {}_1F_1 \left(-\frac{17}{6}, 1, -\frac{ik \rho^2}{4x} \right) \right] \right\} \quad (D \gg 1). \end{aligned} \quad (19b)$$

Коэффициент корреляции смещений параллельных лучей в геометрико-оптическом приближении, получающийся нормировкой корреляционной функции (19 а) на средний квадрат флуктуаций луча (13 а), представлен на рис. 1 (кривая I).

Рис. 1. Коэффициент корреляции поперечных смещений лучей (кривая I — параллельные лучи, кривая II — сходящиеся лучи).



2. Рассмотрим теперь два луча, ориентированных в пространстве, как показано на рис. 2. Благодаря изотропности флуктуаций коэффициента преломления, можно, не ограничивая общности, считать, что средние положения лучей лежат в плоскости XU и составляют с осью X одинаковый угол φ .

Введем единичные векторы, направленные вдоль лучей 1 и 2: $l_1 = (\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$, $l_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Выражение (1) для вектора смещения луча в плоскости, перпендикулярной к лучу, можно переписать в виде

$$\delta \rho_{\perp} = \frac{1}{k} \int_0^{s_0} [\nabla S - l(\nabla S l)] ds,$$

где интеграл берется по лучу l .

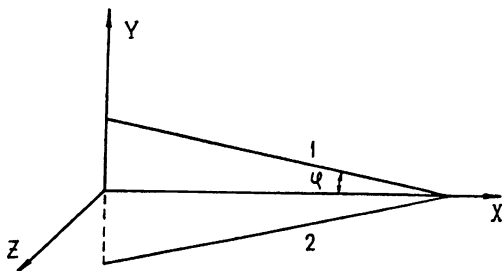


Рис. 2.

Нас будет интересовать величина $D_{\delta\rho} = \langle (\delta\rho_1 - \delta\rho_2)^2 \rangle$, где под $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_2$ надо понимать проекции векторов смещения лучей на плоскость, перпендикулярную к оси X в точке $x = s_0 \cos \varphi$. Если учесть, что $D_{\delta\rho} = 2(\langle \delta\rho^2 \rangle - \langle \delta\rho_1 \delta\rho_2 \rangle)$, то ясно, что для решения задачи достаточно найти корреляционную функцию смещений $B_{\delta\rho} = \langle \delta\rho_1 \delta\rho_2 \rangle$.

Чтобы найти компоненты интересующего нас вектора $\delta\rho_1$, скалярно умножим $\delta\rho_{\perp}$ на единичные векторы $j = (0, 1, 0)$ и $k = (0, 0, 1)$ соответственно. Легко видеть, что для $\delta\rho_{1y} = \delta\rho_1 j$ справедлива формула

$$\delta\rho_{1y} = \frac{1}{k} \int_0^{s_0} \left(\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y} \cos^2 \varphi \right) ds, \quad (20)$$

где x, y, z следует брать на луче после дифференцирования.

Нетрудно убедиться, что, применяя уравнение эйконала, (20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta\rho_{1y} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left[\varepsilon(x, (L-x) \operatorname{tg} \varphi, 0) \operatorname{tg} \varphi + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^x \frac{\partial \varepsilon(\xi, (L-\xi) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} d\xi \right] \right\} dx, \end{aligned} \quad (21)$$

где $L = s_0 \cos \varphi$. Меняя в (21) порядок интегрирования, получаем для $\delta\rho_{1y}$ следующее выражение:

$$\delta\rho_{1y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \int_0^L \varepsilon(x, (L-x) \operatorname{tg} \varphi, 0) dx + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \int_0^L (L-x) \frac{\partial \varepsilon(x, (L-x) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} dx. \quad (22)$$

Аналогично

$$\delta\rho_{1z} = \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \int_0^L (L-x) \frac{\partial \varepsilon(x, (L-x) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial z} dx. \quad (23)$$

В соответствующих выражениях для луча l_2 следует лишь заменить φ на $-\varphi$.

Для корреляционной функции $B_{\delta\varphi}$ имеем

$$\begin{aligned}
 B_{\delta\varphi} = & \left\langle \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \int_0^L \varepsilon(x_1, (L-x_1) \operatorname{tg} \varphi, 0) dx_1 + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \int_0^L (L-x_1) \times \right. \right. \\
 & \times \frac{\partial \varepsilon(x_1, (L-x_1) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} dx_1 \left. \right] \left[-\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \int_0^L \varepsilon(x_2, -(L-x_2) \operatorname{tg} \varphi, 0) dx_2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \int_0^L (L-x_2) \frac{\partial \varepsilon(x_2, -(L-x_2) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} dx_2 \left. \right] \rangle + \\
 & + \frac{1}{4 \cos^4 \varphi} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 (L-x_1) (L-x_2) \times \\
 & \times \left[\frac{\partial \varepsilon(x_1, (L-x_1) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon(x_2, -(L-x_2) \operatorname{tg} \varphi, 0)}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \quad (24)$$

Ограничимся теперь рассмотрением малых углов $\varphi \ll 1$; используя (4), учитывая, что $B'_\varepsilon = -(1/2) D'_\varepsilon$, и проводя рассуждения, вполне аналогичные приведенным при выводе формулы (8 а), получим для структурной функции $D_{\delta\varphi}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 D_{\delta\varphi} = & \int_0^L \eta^2 d\eta \int_0^\infty \left\{ \frac{D'_\varepsilon(\xi)}{\xi} - \frac{D'_\varepsilon(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi})}{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} - \right. \\
 & \left. - \frac{2\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \left[\frac{D'_\varepsilon(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi})}{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right]' \right\} d\xi.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнивая (25) с (8 а), можно внутренний интеграл в (25) выразить через структурную функцию в параллельных лучах, подобно тому, как это делалось в [3] для сферической волны. Тогда $D_{\delta\varphi}$ принимает вид

$$D_{\delta\varphi} = \frac{3}{L^3} \int_0^L \eta^2 D_{\delta\varphi}^{\text{II}} (2\eta \operatorname{tg} \varphi) d\eta. \quad (26)$$

Полагая $\eta = Lt$, окончательно получим формулу, связывающую структурную функцию поперечных смещений в лучах, идущих под углом друг к другу, с соответствующей функцией в параллельных лучах:

$$D_{\delta\varphi}(\rho) = 3 \int_0^1 t^2 D_{\delta\varphi}^{\text{II}} (2L \operatorname{tg} \varphi t) dt. \quad (27)$$

Так как $\rho = 2L \operatorname{tg} \varphi$ — это расстояние между точками «входа» лучей в турбулентную среду, то для сходящихся лучей флуктуации разности поперечных смещений всегда меньше, чем для параллельных

лучей, разнесенных на расстояние $\rho = 2L \operatorname{tg} \varphi$, что ясно и из наглядных представлений.

Полученная в результате численного расчета функция $d_{\delta\rho} = D_{\delta\rho}/2 \langle \delta\rho^2 \rangle$ представлена на рис. 3 в полулогарифмическом масштабе. Формула, аналогичная (27), имеет место и для корреляционной функции. Результат расчета такой функции для удобства сравнения с корреляционной функцией в параллельных лучах нанесен на рис. 1 (кривая II), где $\rho = 2L \operatorname{tg} \varphi$.

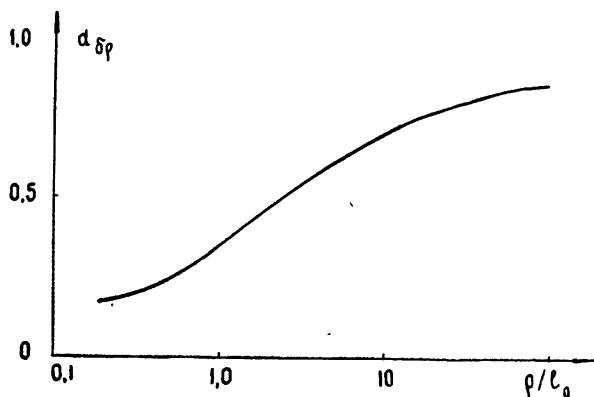


Рис. 3. Структурная функция поперечных смещений сходящихся лучей (ρ —начальное расстояние между лучами).

Отметим, что формула (27) справедлива лишь в области применимости геометрической оптики. Для расчета, учитывающего дифракционные поправки, не удастся получить такого простого соотношения, и в этом случае (27) может использоваться лишь для качественных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, 68 (1967).
3. Ф. Г. Басс, А. В. Мень, Акуст. ж., **9**, 283 (1963).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
11 марта 1968 г.

CORRELATION OF BEAM TRANSVERSE SHIFTS IN A TURBULENT ATMOSPHERE

A. I. Kon, V. I. Tatarskii

The statistical characteristics of beam transverse shifts in the turbulent atmosphere are calculated at arbitrary values of the wave parameter. The mean square of beam transverse shifts (including those in a homogeneous trace) and the correlation of beam parallel shifts are calculated for the real model of turbulence. The formulae relating the correlation and structural functions of the shifts for converging beams with corresponding formulae for parallel beams have been found in the geometrical optics approximation.

УДК 621 371 : 538.576 452.1

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ МИЛЛИМЕТРОВЫХ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В ДОЖДЯХ

А. П. Наумов, В. С. Станкевич

Выполнен расчет коэффициента ослабления γ -радиоволн $\lambda \approx 0,5 \div 3$ мм в дождях с интенсивностью $I = 0,25 \div 150$ мм·час⁻¹. В указанном диапазоне волн величина γ может меняться от значений 0,4 — 0,6 дБ·км⁻¹ (слабо морящий дождь) до значения ~ 50 дБ·км⁻¹ (тропический ливень).

Миллиметровые и субмиллиметровые радиоволны в земной атмосфере испытывают заметное ослабление в газах, обладающих дипольными (электрическими или магнитными) молекулярными моментами, и в осадках (см., например, [1]). Молекулярное поглощение микрорадиоволн рассматривалось в большом числе работ (обзор соответствующих данных содержится, в частности, в [2]). Вопрос об ослаблении радиоволн атмосферными осадками изучался менее интенсивно. Хотя в общем виде задача об ослаблении электромагнитных волн сферическими осадками была решена Ми [3] еще в начале текущего столетия, тем не менее извлечение количественной информации из результатов работы [3] сопряжено с немалыми вычислительными трудностями, которые возрастают в субмиллиметровом диапазоне по мере укорочения длины волны.

В работе [4] были вычислены коэффициенты ослабления сантиметровых и миллиметровых радиоволн (наикратчайшая длина волны $\lambda = 3$ мм) в дождях путем разложения эффективного поперечного сечения капель в ряд по малому параметру $\rho = \pi D/\lambda$ (D — диаметр капли) с последующим учетом небольшого ($\sim 3 \div 10$) количества членов разложения. В субмиллиметровом диапазоне параметр ρ равняется уже 3—18 для капель с диаметром $D \approx 0,1 \div 0,3$ см, составляющих примерно половину в объеме падающей на землю воды при дождях с интенсивностью $I = 0,25 \div 25$ мм·час⁻¹ (см. табл. VIII. 14 в [1]).

Расчеты [5] ослабления радиоволн при $\lambda = 2,7 \div 6$ мм были выполнены по несколько отличающейся от [4] методике, с использованием рекуррентных соотношений для подсчета слагаемых a_n и b_n (см. формулу (2)). В работе [13] ослабление электромагнитной энергии в дождях рассчитывалось на ряде длин волн в сантиметровом и миллиметровом диапазонах (до $\lambda = 1$ мм) с использованием эмпирической зависимости распределения капель в дожде по размерам, согласно [14, 15]. Обширные расчеты [6] позволяют рассматривать ослабление электромагнитной энергии каплями воды в воздухе для всей оптической и инфракрасной радиации ($\lambda \approx 0,2 \div 60$ мк).

Ниже приводятся результаты расчетов коэффициента ослабления γ -субмиллиметровых и миллиметровых радиоволн ($\lambda \approx 0,5 \div 3$ мм) в дождях различной интенсивности ($I = 0,25 \div 150$ мм·час⁻¹), полученные на ЭВМ.

Расчеты выполнялись в предположении, что 1) дождевые капли являются сферическими; 2) интенсивность дождя однозначно определяет распределение капель по размерам $M(D)$ (табл. VIII.14 в [1]).

Диэлектрическая проницаемость воды в рассматриваемом диапазоне волн определялась по формуле Дебая [7] (см. [8-10]). Коэффициент поглощения дождя вычислялся по формуле [1].

$$\gamma(\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}) = 0,23041 I \sum_i \frac{M(D_i) Q(D_i, \lambda)}{V(D_i) D_i^3}. \quad (1)$$

Здесь скорость дождевых капель у поверхности земли $V(D)$ выражена в $\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$ (см. табл. VIII.12 в [1]), диаметр D — в см , эффективное поперечное сечение потерь $Q(D, \lambda)$ — в см^2 . Согласно теории Ми [1],

$$Q(D, \lambda) = \frac{\lambda^2}{2\pi} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n + b_n), \quad (2)$$

где

$$a_n = \frac{S_n(\rho) S'_n(m\rho) - m S'_n(\rho) S_n(m\rho)}{\Phi_n(\rho) S'_n(m\rho) - m \Phi'_n(\rho) S_n(m\rho)}, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{m S_n(\rho) S'_n(m\rho) - S'_n(\rho) S_n(m\rho)}{m \Phi_n(\rho) S'_n(m\rho) - \Phi'_n(\rho) S_n(m\rho)},$$

m — комплексный показатель преломления воды, n — целое положительное число, а функции S_n и Φ_n выражаются через функции Бесселя (см. [11]). Штрихами в формулах (3) обозначены соответствующие производные функции.

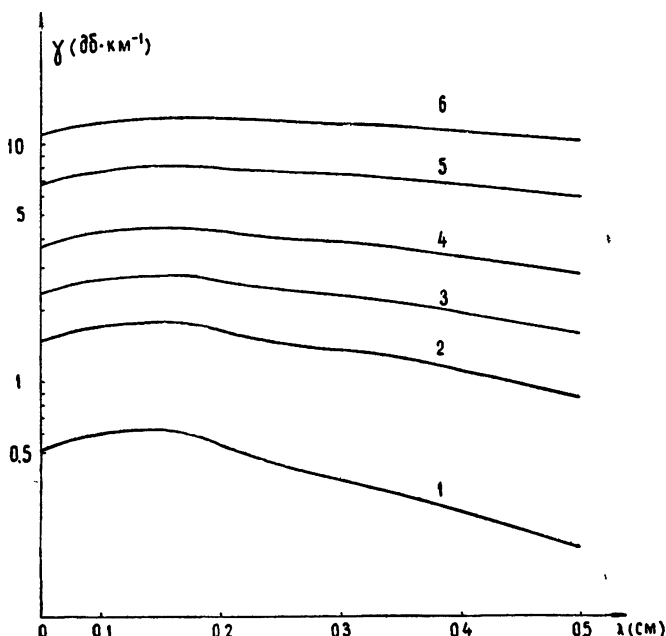


Рис. 1. Ослабление радиоволн $\lambda=0,5-5$ мм в дождях различной интенсивности:

1. — $I=0,25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (слабо моросящий дождь), 2. — $I=1,25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (моросящий дождь), 3. — $I=2,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (слабый дождь), 4. — $I=5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (умеренный дождь), 5. — $I=12,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (сильный дождь), 6. — $I=25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (очень сильный дождь). Абсолютная температура дождевых капель $T=293^\circ\text{K}$.

На рис. 1 представлены результаты выполненных расчетов. Из рисунка следует, что ослабление радиоволн $\lambda \simeq 0,5 \div 3$ мм незначительно меняется ($\gamma \leq 1 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$) по диапазону как при слабых ($I = 2,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$), так и при очень сильных ($I = 25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$) дождях. В максимумах поглощения величина γ составляет $2,8 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ ($I = 2,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$) и $13 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ ($I = 25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$). При слабо моросящих дождях ($I = 0,25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$) изменения γ по диапазону равны $\sim 0,2 - 0,5 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$, максимальная величина $\gamma \simeq 0,63 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ вблизи $\lambda \simeq 1,4$ мм. Ослабление радиоволн $\lambda \simeq 0,5 \div 3$ мм в дождях с интенсивностью $I \simeq 50 \div 150 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ (тропические ливни) возрастает до значений $20 - 50 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$.

Влияние отклонений формы дождевых капель от сферической в большей степени проявляется в рассматриваемом диапазоне волн, нежели в длинноволновых участках спектра (см. [1, 4, 5])*. Однако не вызывает сомнений тот факт, что вычисленные значения γ верно отражают порядок величины ослабления микрорадиоволн в дождях указанной интенсивности. Что касается второй идеализации, принятой в расчетах, то получение более детальной метеорологической информации о распределении капель по размерам в том или ином дожде позволит также уточнить значения γ по вычисленным величинам эффективного поперечного сечения потерь $Q(D, \lambda)$ для различных капель и длин волн (см. табл. 1).

Таблица 1

Эффективное поперечное сечение потерь $Q(\text{см}^2)$ в зависимости от диаметра капли D (см) и длины волны λ (см)

$\lambda \backslash D$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
0,05	$0,5506 \cdot 10^{-2}$	$0,2007 \cdot 10^{-1}$	$0,4291 \cdot 10^{-1}$	$0,7406 \cdot 10^{-1}$	0,1609	0,2803	0,4320	0,6158	0,8317
0,10	$0,6523 \cdot 10^{-2}$	$0,2253 \cdot 10^{-1}$	$0,4744 \cdot 10^{-1}$	$0,8094 \cdot 10^{-1}$	0,1732	0,2987	0,4570	0,6481	0,8718
0,15	$0,6728 \cdot 10^{-2}$	$0,2428 \cdot 10^{-1}$	$0,5083 \cdot 10^{-1}$	$0,8614 \cdot 10^{-1}$	0,1830	0,3139	0,4778	0,6754	0,9059
0,20	$0,5303 \cdot 10^{-2}$	$0,2496 \cdot 10^{-1}$	$0,5331 \cdot 10^{-1}$	$0,9019 \cdot 10^{-1}$	0,1908	0,3258	0,4949	0,6976	0,9339
0,25	$0,3622 \cdot 10^{-2}$	$0,2533 \cdot 10^{-1}$	$0,5550 \cdot 10^{-1}$	$0,9345 \cdot 10^{-1}$	0,1966	0,3354	0,5083	0,7153	0,9568
0,30	$0,2513 \cdot 10^{-2}$	$0,2670 \cdot 10^{-1}$	$0,5760 \cdot 10^{-1}$	$0,9579 \cdot 10^{-1}$	0,2008	0,3420	0,5193	0,7295	0,9743

Авторы признательны С. А. Жевакину за внимательное прочтение рукописи и И. А. Раковой за выполненные расчеты на БЭСМ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распространение ультракоротких радиоволн, перевод с англ. под редакцией Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954
2. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
3. G. Mie, Ann. der Phys., 25, № 3, 377 (1908).
4. S. W. Ryde, J. IEE, 93, 101 (1946).
5. О. Я. Усіков, В. Л. Герман, I. X. Ваксер, Укр. фіз. ж., 6, 618 (1961)
6. Таблицы по светорассеянию, т. 2, Гидрометеоиздат, Л., 1967.
7. П. Дебай, Полярные молекулы, ГНТИ, М., 1931.
8. Н. С. Зинченко, Тр. радиофизического ф-та ХГУ, 3, 817 (1959).

* Согласно [12], ошибка в величине γ из-за несферичности капель на длине волны $\lambda = 8,6$ мм не превышает $\sim 16\%$.

9. К. А. Горонина, Р. К. Белов, Э. П. Сорокина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 975 (1966).
10. А. И. Хвостова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 292 (1967).
11. R. G. Medhurst, IEEE Trans. Antennas and Propag., 13, 550 (1965).
12. T. Oguchi, J. Radio Research Labs (Tokyo), 7, № 9, 467 (1960).
13. Н. П. Красюк, В. И. Розенберг, Д. А. Чистяков, Радиотехника, 13, № 5, 780 (1968).
14. J. S. Marshall, W. Palmer, J. Meteorol., 5, № 4, 165 (1948).
15. A. C. Best, J. Roy. Meteorol. Soc., 76, 16 (1950).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 апреля 1968 г.

ON MILLIMETER AND SUBMILLIMETER RADIO WAVES ATTENUATION IN RAINS

A. P. Naumov, V. S. Stankevich

The attenuation coefficient γ of radio waves $\lambda \simeq 0.5 \div 3$ mm in rains with the intensity $I = 0.25 \div 150$ mm·hour⁻¹ is calculated. In the given frequency range the value γ may change from 0.4—0.6 db·km⁻¹ (a weak drizzling) to ~ 50 db·km⁻¹ (tropic heavy rain).

УДК 621.371.246

АТМОСФЕРНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ РАДИОВОЛН В ОБЛАСТИ
ВРАЩАТЕЛЬНОГО РЕЗОНАНСА ВОДЯНОГО ПАРА $\lambda \simeq 1,35$ см

В. М. Плечков

Сообщаются результаты экспериментального исследования вертикального поглощения радиоволн $\lambda \simeq 1,2 \div 1,5$ см молекулами атмосферного водяного пара и кислорода по собственному радиоизлучению атмосферы. Показано, что коэффициент поглощения паров H_2O вблизи вращательного резонанса $\lambda \simeq 1,35$ см, полученный из измерений вертикального поглощения в предположении экспоненциальной в среднем зависимости удельной влажности от высоты $q(h) = q_0 e^{-\alpha h}$ при значении параметра $\alpha = 0,48$ км⁻¹ и приведенный к стандартным условиям на уровне моря, находится в хорошем согласии с результатами теоретического расчета и лабораторными измерениями Беккера и Отлера. Экспериментальные коэффициенты поглощения радиоволн диапазона 1,2—1,5 см в кислороде на уровне моря в среднем на 28% превышают их теоретические значения.

Изучение теплового радиоизлучения атмосферы вблизи линии вращательного перехода $5_{-1} - 6_{-5}$ молекул H_2O , как отмечено в работах [1-4], может дать метеорологическую информацию о содержании водяного пара в атмосфере. В связи с этим представляют интерес измерения в атмосфере полного вертикального поглощения радиоволн и определение коэффициентов поглощения в кислороде γ_{O_2} и парах воды $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ вблизи $\lambda \simeq 1,35$ см. Эти измерения на волнах 1,21; 1,25; 1,3; 1,33; 1,4; 1,45; 1,5 см были проведены на полигоне НИРФИ «Зименки» в 1966—1967 гг.

Значения полного вертикального поглощения (τ) получаются из относительных измерений излучения атмосферы по известной методике и расчетным формулам, приведенным, в частности, в работах [5-7]. Для этой цели использовался радиотелескоп, описанный в [7]. Чувствительность радиотелескопа в указанном диапазоне волн при постоянной времени наблюдения 3 сек была 2—3°. Приемная антенна имела диаметр 1,5 м. Влияние боковых лепестков антенны было уменьшено путем ее недооблучения. Диаграмма направленности антенны в зависимости от волны менялась от 70 до 90 угловых минут на уровне 3 дБ.

Аппаратурные и методологические погрешности привели к общей среднеквадратичной ошибке в определении τ , равной $\pm (7-8)\%$. Для каждой из длин волн было получено от 50 до 100 значений τ в интервале абсолютной влажности на уровне моря ρ_0 от 0,5 до 17 (г·м⁻³).

Величина τ приводилась к стандартным значениям на уровне моря температуры (293°K), давления (760 мм рт. ст.) и абсолютной влажности (7,5 г·м⁻³) по формулам, содержащимся в [4, 8, 9]. С этой целью в момент измерений у поверхности Земли регистрировались указанные величины. По зависимости τ от ρ_0 (см. рис. 1) выделялось вертикальное поглощение в молекулярном кислороде τ_{O_2} и вертикальное поглощение в водяном паре, которое, согласно замечаниям работ [4, 10], отождествлялось с поглощением $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$ лишь мономерной составляющей паров H_2O .

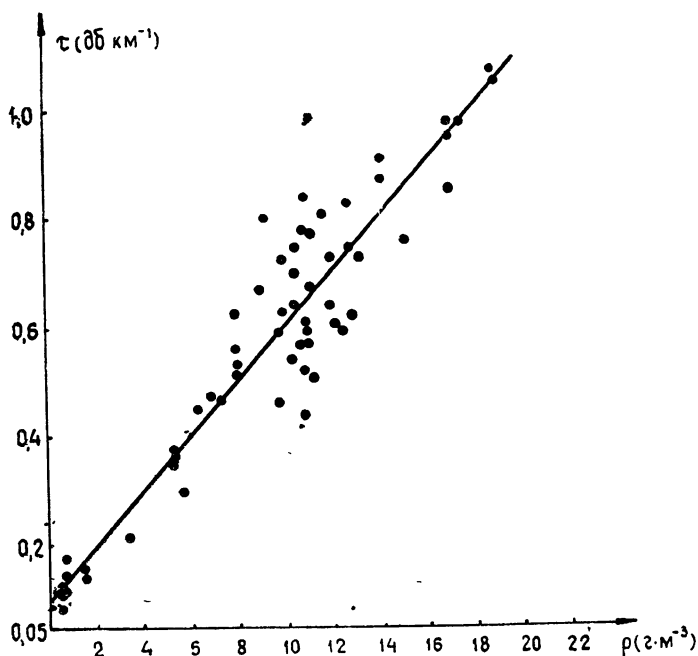


Рис. 1. Зависимость полного вертикального поглощения τ от ρ_0 ($\lambda = 1,3$ см).

Экспериментальные значения γ_{O_2} , γ_{H_2O} в диапазоне волн 1,2—1,5 см даны в табл. 1 и на рис. 2 и 3. Извлечение информации о погонном коэффициенте поглощения водяного пара на уровне моря из изме-

Таблица 1

λ (см)	H_{O_2} (км)	H_{H_2O} (км) $a=0,48$ (км ⁻¹)	H_{H_2O} (км) $a=0,6$ (км ⁻¹)	H_{H_2O} (км) $a=0,4$ (км ⁻¹)	γ_{O_2} (дБ·км ⁻¹)	γ_{H_2O} (дБ·км ⁻¹) $a=0,48$ (км ⁻¹)
1,21	5,1	1,63	1,37	1,87	0,0189	0,147
1,25	5,1	1,757	1,46	2,03	0,018	0,1535
1,3	5,1	1,952	1,58	2,99	0,0189	0,197
1,33	5,1	2,068	1,67	2,51	0,019	0,201
1,4	5,1	1,974	1,60	2,33	0,0172	0,181
1,45	5,1	1,194	1,48	2,08	0,0189	0,143
1,50	5,1	1,675	1,40	1,92	0,0140	0,119

рений вертикального поглощения радиоволн делается, как и для молекулярного кислорода, с помощью привлечения данных о характеристических высотах коэффициентов поглощения радиоволн в соответствующей газовой компоненте. Характеристические высоты в диапазоне 1,2—1,5 см для O_2 , согласно расчетам [8], равны 5,1 км.

Экспериментально найденные значения γ_{O_2} превышают расчетные в среднем по диапазону на 28%. Это отличие не может быть объяснено одними экспериментальными ошибками, среднеквадратичные значения которых в нашем случае составляют $\pm 10\%$.

Величина характеристической высоты водяного пара H_{H_2O} существенно зависит от распределения паров H_2O по высоте. Значения

H_{H_2O} для различных величин α в зависимости удельной влажности $q \doteq q_0 e^{-\alpha h}$ на рассматриваемых длинах волн приведено в табл. 1 (см. также [11]). Обработка данных о вертикальном поглощении радиоволн в водяном паре для $\lambda \simeq 1,2 \div 1,5$ см при различных значениях H_{H_2O} показала, что погонные коэффициенты поглощения на уровне

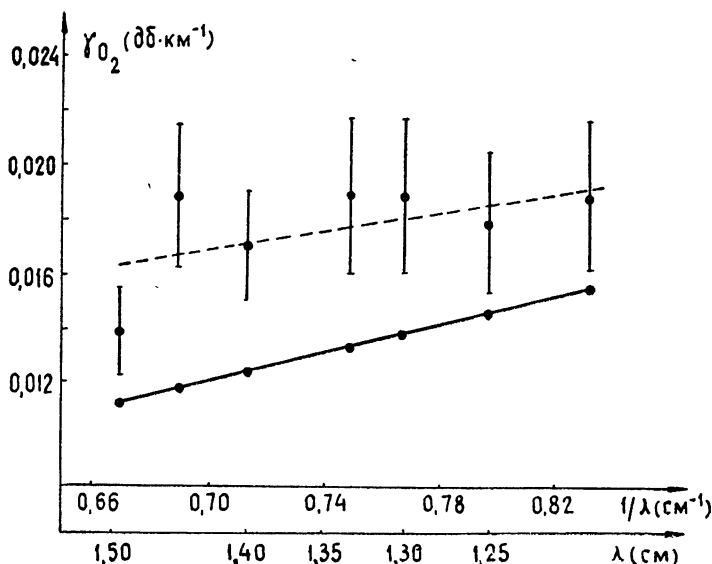
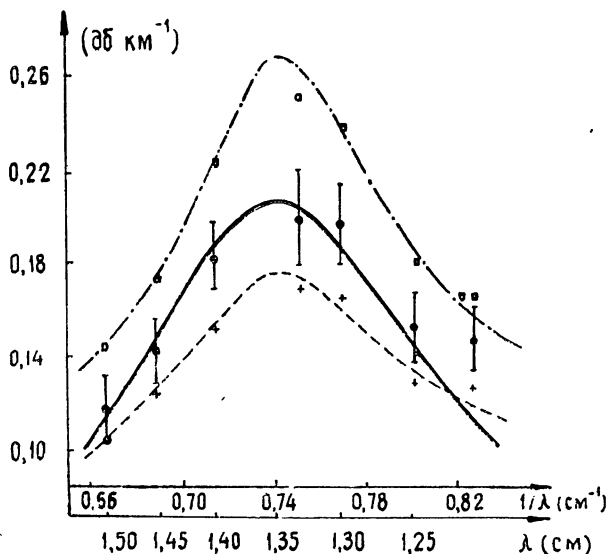


Рис. 2. Спектр поглощения молекулярного кислорода атмосферы в диапазоне 1,21—1,50 см. Сплошная линия—расчетные значения γ_{O_2} . Пунктирная—усредненные по экспериментальным значениям γ_{O_2} . Вертикальными отрезками указан разброс экспериментальных данных.

Рис. 3. Сравнение экспериментальных значений γ_{H_2O} в области вращательного резонанса с вычисленными с формой линии по кинетическому уравнению (сплошная кривая).

● — γ_{H_2O} в предположении, что $\alpha = 0,48$ км⁻¹, + при $\alpha = 0,6$ (км⁻¹), □ при $\alpha = 0,4$ (км⁻¹).



моря $\gamma_{H_2O} = \tau_{H_2O}/H_{H_2O}$ хорошо согласуются с лабораторными измерениями Беккера и Отлера [12], полевыми измерениями Толберга и Стрейтона [13], а также с результатами теоретического расчета [4].

если принять величину $\sigma = 0,48 \text{ км}^{-1}$ (см. рис. 3). Отмеченное обстоятельство свидетельствует о предпочтительности параметра $\alpha \approx 0,48 \text{ км}^{-1}$ при описании в среднем высотного изменения удельной влажности в безоблачной атмосфере экспоненциальным выражением $q(h) = q_0 e^{-\alpha h}$.

Автор выражает признательность А. П. Наумову и В. С. Троицкому за внимание к работе и полезные консультации, А. И. Иванниковой и А. И. Сергеевой за помощь при обработке результатов наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Barret, V. R. Chung, J. Geophys. Res., **67**, № 11, 4259 (1962).
2. D. H. Groom, J. Atmos. and Terr. Phys., **27**, № 2, 217 (1965).
3. А. С. Гурвич, Н. С. Тиме, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **2**, № 8, 814 (1966).
4. А. П. Наумов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **4**, № 2, 170 (1968).
5. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **1**, № 2, 19 (1958).
6. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1244 (1967).
7. В. М. Плечков, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **4**, № 2, 182 (1968).
8. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, № 6, 987 (1965).
9. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 1, 175 (1964).
10. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, **171**, № 5, 1061 (1966).
11. А. П. Наумов, В. М. Плечков, Доклад на 4-й Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 1967 г.
12. J. E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., **70**, 300 (1946).
13. E. S. Rosenblum, Microwave J., **4**, № 3, 91 (1961).
14. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1213 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 марта 1968 г.

ATMOSPHERIC RADIO WAVE ABSORPTION IN THE REGION OF ROTATIONAL RESONANCE OF WATER VAPOUR AT $\lambda \approx 1.35 \text{ cm}$

V. M. Plechkov

The author reports the experimental studies of the vertical radio wave absorption at $\lambda \approx 1.20 \div 1.5 \text{ cm}$ by molecular atmospheric water vapour and oxygen according to atmospheric thermal radiation. It is shown that the absorption coefficient of H_2O vapours near the rotational resonance $\lambda \approx 1.35 \text{ cm}$ obtained from measurements of the vertical absorption under the assumption of the exponential average dependence of the specific moisture on the height $q(h) = q_0 e^{-\alpha h}$ at the parameter value $\alpha = 0.48 \text{ км}^{-1}$ and reduced to standard conditions above the sea level is in good agreement with theoretical calculations and Bekker and Autler's laboratory measurements. The experimental absorption coefficient of 1.2—1.5 cm radio waves in oxygen above the sea level exceeds their theoretical values by 28% on the average.

УДК 533.951.3

ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА ВОЛНОЙ И СВЯЗАННАЯ С НИМ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛАБОИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Ц. Д. Лоладзе, Н. Л. Цинцадзе

Показано, что бегущие ионно-звуковые волны могут переносить электронно-ионную компоненту в слабоионизированной плазме с определенной скоростью. Если эта скорость больше фазовой скорости обычной акустической волны, то наблюдается возбуждение акустических колебаний плазмы. Наличие потока вещества в плазме может привести также к неустойчивости тангенциальных разрывов между слабоионизированной плазмой и нейтральным газом. Получены условия возбуждения акустических колебаний и критерий устойчивости поверхности раздела двух сред.

1. Явление переноса вещества среды в интенсивном звуковом поле, названное акустическим, или звуковым, ветром, наблюдалось еще Фарадеем и Рэлеем [1]. Рэлеем было показано, что для теоретического объяснения акустического ветра необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях сплошной вязкой среды. Однако, как показано в [2], перенос вещества возможен и в идеальной среде. Процесс переноса вещества в плазме высокочастотными волнами экспериментально и теоретически исследовался в работах [3-9].

Нами рассматривается перенос вещества в неизотермической слабоионизированной плазме, вызванный распространением в среде ионно-звуковой волны.

Для исследования поставленной задачи воспользуемся системой одномерных уравнений двухжидкостной гидродинамики, имеющей в случае ионно-звуковых колебаний следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + V_s^2 \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x} &= -\frac{n}{n_0} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{n}{n_0} v \frac{\partial v}{\partial x}, \\ -\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (nv), \end{aligned} \quad (1)$$

где n_0 — равновесная плотность электронов и ионов, $V_s = \left(\frac{T_e}{M}\right)^{1/2}$ — скорость распространения ионно-звуковой волны, v — скорость электронно-ионной компоненты. При выводе уравнений (1) воспользовались квазинейтральностью плазмы и тем фактом, что в слабоионизированной неизотермической ($T_e \gg T_i$) плазме ионно-звуковые колебания являются слабозатухающими при выполнении условий [10]

$$k^2 v_{Te}^2 \gg \nu_{en} \omega, \quad \nu_{en} \gg \omega \gg \nu_{in},$$

где ν_{en} , ν_{in} — частоты столкновения заряженных частиц с нейтралами, v_{Te} — тепловая скорость электронов.

Представим ионно-звуковую волну в качестве волнового пакета т. е. запишем скорость и плотность в виде

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=-i}^i v_{il} \exp [il(kx - \omega t)],$$

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=-i}^i n_{il} \exp [il(kx - \omega t)],$$
(2)

где индексы i и l указывают, соответственно, на порядок приближения и номер гармоники.

Подставим соотношения (2) в систему уравнений (1), исключим из (1) амплитуду плотности n_{il} и для определения амплитуды скорости v_{il} получим следующее уравнение:

$$l\omega n_0 v_{il} \left(1 - \frac{k^2 V_s^2}{\omega^2}\right) = l \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{l'=-j}^j v_{jl'} v_{l-j, l-l'} +$$

$$+ \frac{k}{\omega} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{l'=-j}^j \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{l''=-j'}^{j'} l' v_{l-j, l-l'} v_{j'l''} v_{j-j', l'-l''} +$$

$$+ \frac{k}{\omega} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{l'=-j}^j \sum_{j'=1}^{l-j-1} \sum_{l''=-j'}^p (l-l'-l'') v_{jl''} v_{il'} v_{l-j-j', l-l'-l''}.$$
(3)

Решим уравнение (3) в различных приближениях [6].

1) $i = l = 1$. Из (3) имеем

$$(\omega^2 - k^2 V_s^2) v_{11} = 0,$$

т. е. в линейном приближении получаем дисперсионное соотношение для ионно-звуковых волн $\omega = kV_s$, а также связь между амплитудами:

$$v_{11} = \frac{ie}{M\omega} E_{11}, \quad n_{11} = \frac{iek n_0}{M\omega^2} E_{11}.$$
(4)

2) $i = 3, l = 1$. Этот случай приводит к уравнению с двумя амплитудами v_{20} и v_{22} :

$$2v_{20}v_{21} = -2v_{22}v_{11} - 3 \frac{k}{\omega} v_{11} |v_{11}|^2.$$
(5)

3) $i = l = 3$. В этом случае получаем уравнение для определения v_{22} :

$$v_{22} = -\frac{1}{2} \frac{k}{\omega} v_{11}^2.$$
(6)

Подставив значение v_{22} в уравнение (5) и используя соотношение (4), находим

$$v_{20} = -V_s \left(\frac{\Omega_i}{kV_s} \right)^2 \frac{|E_{11}|^2}{4\pi n_0 T_e},$$
(7)

где $\Omega_i = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M} \right)^{1/2}$ — ленгмюровская частота ионов.

Полная скорость переноса вещества получается из выражения плотности потока переноса вещества:

$$J_{ie} = n_0 v_{ie} + \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{l'=-j}^j n_{jl''} v_{l-j, l-l'},$$

откуда

$$J_{20} = n_0 v_{20} + 2 \frac{e^2 k n_0}{M^2 \omega^3} |E_{11}|^2 = n_0 V_s \left(\frac{\Omega_i}{k V_s} \right)^2 \frac{|E_{11}|^2}{4 \pi n_0 T_e}.$$

Таким образом, бегущие ионно-звуковые волны переносят вещество плазмы со скоростью

$$v_0 = V_s \left(\frac{\Omega_i}{k V_s} \right)^2 \frac{|E_{11}|^2}{4 \pi n_0 T_e}.$$

Так как $E = -ik\varphi$, то скорость переноса вещества можно записать в виде

$$v_0 = V_s \left(\frac{e\varphi}{T_e} \right)^2, \quad (8)$$

откуда видно, что $v_0 < V_s$.

2. Как было показано выше, электроны и ионы движутся относительно нейтральных частиц с одинаковой упорядоченной скоростью v_0 , что может явиться источником возбуждения акустических колебаний плазмы.

Для выяснения эффекта возбуждения акустических колебаний рассмотрим линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} N_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{4}{3} \frac{\gamma_i}{M} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + V_a^2 \frac{\partial N}{\partial x} + \nu_n (N_0 V - N v_0) &= 0, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + N_0 \operatorname{div} V &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где N, V — плотность и скорость нейтральных частиц, $V_a = \left(\frac{T_n}{M} \right)^{1/2}$ — тепловая скорость нейтралов, $\nu_n = \nu_{nc} + \nu_{ni}$ — частота столкновения нейтральных частиц с заряженными частицами.

Из системы (9) получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 + i \left(\frac{4}{3} \frac{\gamma_i k^2}{M N_0} + \nu_n \right) - k^2 V_a^2 - i k v_0 \nu_n = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) при предположениях $\left(\frac{4}{3} \frac{\gamma_i k^2}{M N_0} + \nu_n \right) \ll 4 k^2 V_a^2$ и $\frac{v_0}{V_a} \left(\frac{\nu_n}{k V_a} \right) \ll 1$ имеет вид

$$\omega_1 = k V_a + \frac{i}{2} \nu_n \left(\frac{v_0}{V_a} - 1 - \frac{4}{3} \frac{\gamma_i k^2}{M N_0 \nu_n} \right). \quad (11)$$

Из (11) видно, что для раскачки акустических колебаний необходимо соблюдение условия

$$\frac{v_0}{V_a} - 1 - \frac{4}{3} \frac{\gamma_i k^2}{M N_0 \nu_n} > 0, \quad (12)$$

откуда, используя явное выражение для скорости v_0 (8), находим амплитуду поля, при котором возможна раскачка акустических колебаний:

$$\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right)^2 > \left(\frac{T_n}{T_e}\right)^{1/2} \left(\frac{m_1}{M}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\eta k^2}{MN_0 v_n}\right), \quad (13)$$

где m_1 — масса заряженных ионов, M — масса нейтралов.

Неравенство (13) не нарушает приближения малой нелинейности $\frac{|E_{11}|^2}{4\pi n_0 T_e} = k^2 r_{De}^2 \left(\frac{e\varphi}{T_e}\right)^{1/2} \ll 1$, где r_{De} — дебаевский радиус электронов.

3. Ионно-звуковые колебания, вызывающие перенос вещества плазмы, могут привести к неустойчивости поверхности раздела между электронно-ионным облаком и нейтральным газом. Эта резкая поверхность раздела удерживается гидродинамическим давлением и может быть представлена поверхностью тангенциального разрыва, на которой скорость испытывает скачок.

Рассмотрим вопрос об устойчивости резкой границы раздела между нейтральным газом (область 1) и слабоионизированной плазмой (область 2), аналогично работе [2].

Запишем системы уравнений для каждой из областей.

Область (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V_a^2 \frac{1}{N_0} \nabla N &= 0, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + N_0 \operatorname{div} V &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Область (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + V_s^2 \frac{1}{n_0} \nabla n &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь N_0 — равновесная плотность нейтралов, v_0 — скорость переноса вещества плазмы, направленная вдоль оси x . Решение систем (14) и (15) будем искать в виде $f(z) \exp[i(kx - \omega t)]$.

Решив (14) и (15) подобно [2] и воспользовавшись граничным условием равенства давлений на поверхности разрыва, получим искомую зависимость между ω и k в виде

$$\frac{(\omega - kv_0)^2}{\left[k^2 - \frac{(\omega - kv_0)^2}{V_s^2}\right]^{1/2}} = -\gamma \frac{\omega^2}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{V_a^2}\right)^{1/2}}, \quad (16)$$

где $\gamma = \frac{N_0}{n_0} \gg 1$.

Найдем решение уравнения (16) в разных предельных случаях. 1) $v_0 \ll V_s$, $\omega \ll kV_a$, kV_s . Из (16) имеем

$$\omega = kv_0 \frac{n_0 \pm i(n_0 N_0)^{1/2}}{n_0 + N_0}. \quad (17)$$

Частота ω оказывается комплексной величиной с мнимой частью $\operatorname{Im} \omega \gg \operatorname{Re} \omega$. Это совпадает с результатом исследования, проведенного в [2].

2) $v_0 \gg \omega/k$. В этом случае из (16) получаем

$$\frac{kv_0^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = -\gamma \frac{\omega^2}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{V_a^2}\right)^{1/2}}, \quad (18)$$

где $\beta^2 = v_0^2/V_s^2 \ll 1$. Решая (18), находим, что ω является чисто мнимой величиной; следовательно, имеет место аperiodическая неустойчивость тангенциального разрыва.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность О. Д. Чеишвили за ценные замечания, М. Л. Левину и А. А. Рухадзе за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Стретт (Лорд Рэлей), Теория звука, т. 2, ГИТТЛ, М., 1955.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1954
3. Р. А. Sturrock, Proc. Roy. Soc., **242A**, 1230, 277 (1957).
4. С. М. Хзарджян, Диссертация, ТГУ, 1960.
5. А. А. Власов, ЖЭТФ, **27**, 224 (1954).
6. И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, **34**, 1576 (1964)
7. Р. А. Демирханов, И. Я. Кадыш, И. С. Фурса, Ю. С. Ходырев, ЖТФ, **35**, 212 (1965).
8. Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, ЖТФ, **36**, 460 (1966).
9. Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, ЖТФ, **37**, 1789 (1967).
10. Б. Милнчи и А. А. Рухадзе, ЖТФ, **38**, 229 (1968)

Институт физики АН ГССР

Поступила в редакцию
27 мая 1968 г.

TRANSFER OF THE MATERIAL BY A WAVE AND INSTABILITY OF WEAKLY-IONIZED PLASMA ASSOCIATED WITH IT

Ts. D. Loladze, N. L. Tsyntsadze

It is shown that traveling ionic sound waves may transfer the electron-ionic component in a weakly-ionized plasma with the definite velocity. If this velocity is greater than the phase velocity of an ordinary sound wave, excitation of acoustic oscillation of plasma is observed. The presence of the material flux in plasma may lead also to the instability of tangential discontinuities between weakly-ionized plasma and neutral gas. The conditions of excitation of acoustic oscillations are derived, as well as the criterium of instability of the two media interface.

УДК 533.932

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Дам Бинь Тхань, А. Д. Андреев

Приведены результаты экспериментального исследования возмущения плазмы положительного столба тлеющего разряда в воздухе высокочастотным полем. Изучена зависимость потенциала пристеночной плазмы от частоты при различных давлениях газа и различных расстояниях от стенки камеры. По линейному участку вольтамперной характеристики двойного зонда измерена величина удельной проводимости плазмы, которая может сравниваться со значением, определенным для тех же условий опыта по резонансной кривой.

В работе рассматривается влияние высокочастотного поля на проводимость плазмы и величину «плавающего» потенциала электродов, помещенных в плазму.

Схема измерений приведена на рис. 1. Тлеющий разряд с холодным

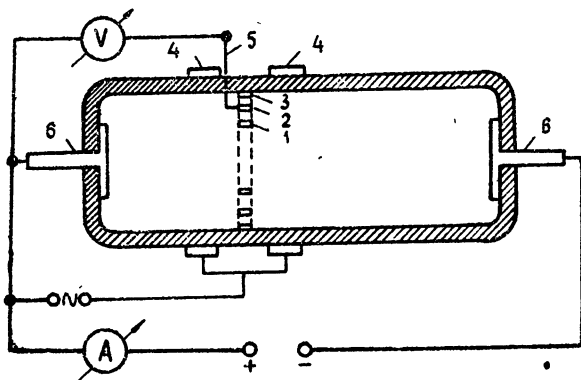


Рис. 1. Схема экспериментального устройства:
1, 2, 3— внутренние кольца, 4— внешние кольцевые электроды,
5— измерительный зонд, 6— дисконные электроды.

катодом возбуждался в цилиндрической стеклянной камере из молибденового стекла толщиной 1,5 мм диаметром 36 мм, длиной 220 мм от источника постоянного тока мощностью 100 Вт. Камера находилась под непрерывной откачкой, давление воздуха регулировалось с помощью игольчатого натекателя в пределах $2 \cdot 10^{-2} \div 10$ мм рт. ст. Внешнее высокочастотное поле создавалось двумя медными кольцевыми электродами (4) шириной 8 мм и толщиной 0,5 мм, плотно прилегающими к внешней поверхности камеры на расстоянии 15 мм друг от друга. Эти электроды соединялись с выходом генератора синусоидального напряжения типа ГС-100 через широкополосный усилитель. Амплитуда высокочастотного напряжения измерялась ламповым вольтметром.

В стекло камеры вплавлялся зонд (5) из молибденовой проволоки диаметром 0,4 мм. К зонду подсоединялись концентрические кольцевые

электроды (1)—(3) из латунной фольги толщиной 0,3 мм и шириной 2 мм. Диаметр каждого из колец (1) и (2) равен 20,28 мм, кольцо (3) вплотную прилегало к внутренней поверхности камеры. Выступающая в плазму часть зонда (5) тщательно изолировалась. Надежность прижимного контакта между зондом и кольцом контролировалась перед монтажом устройства пропусканием тока порядка нескольких *ма*.

При измерениях в камере устанавливался только один кольцевой электрод, к которому посредством зонда подсоединялся вольтметр постоянного тока с достаточно высоким внутренним сопротивлением, контролирующий изменение «плавающего» потенциала кольца. По шкале вольтметра отсчитывались значения разности потенциалов между внутренним кольцом и анодом при включенном высокочастотном поле и без поля. Строилась зависимость разности этих значений от частоты внешнего приложенного напряжения.

Концентрация заряженных частиц в положительном столбе тлеющего разряда в воздухе, согласно [1], плавно возрастает с приближением к оси столба. Располагая кольцевые электроды на различных расстояниях по диаметру камеры, можно получить данные о влиянии концентрации заряженных частиц на величину «плавающего» потенциала электрода в поле высокой частоты. На рис. 2 приведены зависимости приращения этого потенциала от частоты внешнего поля. Как видно из рис. 2, кривые имеют максимум, который для электродов (1)—(3), расположенных последовательно в областях с увеличивающейся концентрацией заряженных частиц, смещается при увеличении концентрации в сторону больших частот. Такое же влияние на положение максимума оказывает увеличение разрядного тока (см. рис. 2, 3).

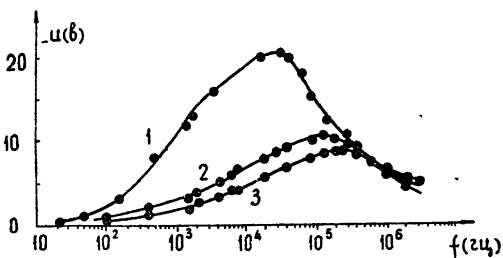


Рис. 2. Зависимости 1, 2, 3 получены соответственно с внутренними кольцами (3)—(1) при давлении $6 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст., амплитуде внешнего напряжения 100 в и токе разряда 5 *ма*.

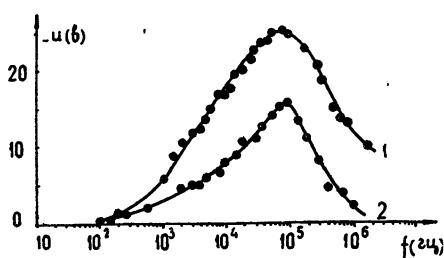


Рис. 3. Зависимости 1, 2 получены при давлении соответственно $6 \cdot 10^{-2}$, $3 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст., амплитуде внешнего напряжения 100 в и токе разряда 7,5 *ма*.

С помощью двойного электрического зонда, расположенного на внутренней поверхности камеры, были измерены зависимости тока насыщения зонда от разрядного тока (рис. 4) и от давления газа в камере (рис. 5). Величина тока насыщения пропорциональна концентрации заряженных частиц. Таким образом, наблюдаемое увеличение максимума резонансных кривых при увеличении давления, а также сдвиг этого максимума в сторону больших частот в различных областях столба и при увеличении разрядного тока сопровождается ростом концентрации заряженных частиц. Это дает основание предполагать наличие некоторой связи между изменением концентрации заряженных частиц в плазме и изменением приращения «плавающего» потенциала металлических колец, помещенных в плазму, в поле высокой частоты.

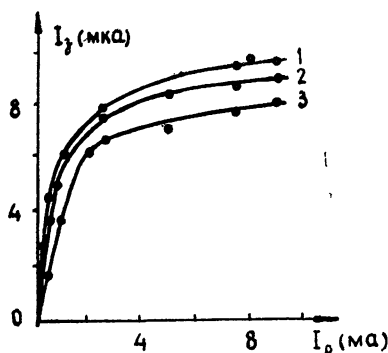


Рис. 4. Зависимости тока двойного зонда (I_z) от тока разряда (I_p). Кривые 1, 2, 3 соответствуют частотам 10^4 , $4 \cdot 10^4$, $8 \cdot 10^4$ сек $^{-1}$ при давлении $6 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст., амплитуде высокочастотного напряжения 100 в.

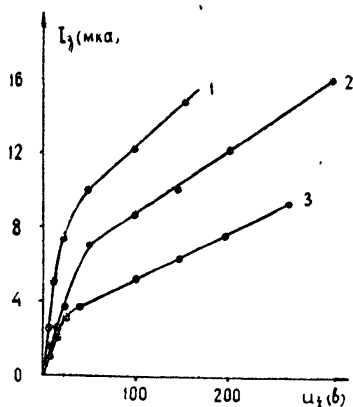


Рис. 5. Вольтамперные характеристики двойного электрического зонда. Кривые 1, 2, 3 соответствуют давлениям $9 \cdot 10^{-2}$, $6 \cdot 10^{-2}$, $3 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст., частоте поля $4 \cdot 10^4$ сек $^{-1}$, амплитуде высокочастотного напряжения 100 в. при токе разряда 5 ма.

ЛИТЕРАТУРА

Г. Григоров, Г. Попов, Л. Дразгева, Докл. Болг. АН, 18, 307 (1965).

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
17 июня 1967 г.

INVESTIGATION OF SOME ELECTRIC CHARACTERISTICS OF PLASMA IN HF FIELD

Dam Bin' T Khan', A. D. Andreev

The authors present the results of experimental studies of plasma perturbations of the positive column of the glow discharge in the air by the high-frequency field. The dependency of the potential of plasma near the wall on the frequency at different gas pressures and different distances from the camera wall is studied. The value of the specific plasma conductivity is measured along the linear section of volt-ampere characteristic of the double probe. This value of the conductivity is compared with the value determined for the same experimental conditions by the resonance curve.

УДК 533.922

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МОДУЛИРОВАННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. И. Пятак, В. И. Шевченко

Исследован вопрос о взаимодействии модулированного по плотности пучка заряженных частиц с плазмой в магнитном поле в условиях параметрического резонанса. Найдена ширина зон параметрических неустойчивостей и инкременты их нарастания при возбуждении продольных колебаний плазмы.

1. В работах [1-4] было показано, что при взаимодействии пучка с плазмой предварительная модуляция пучка заряженных частиц по плотности нарушает необходимую для развития неустойчивости фазировку частиц для тех колебаний, частоты и длины волн которых отличаются от модуляционной, и это приводит к частичной стабилизации пучковой неустойчивости. В то же время, как было показано в [3], в условиях параметрического резонанса, когда удвоенная длина волны модуляции кратна плазменной длине волны, возможно возникновение параметрических неустойчивостей.

В настоящей заметке мы рассмотрим возбуждение продольных колебаний плазмы, помещенной в магнитное поле, модулированным пучком в условиях параметрического резонанса.

2. Будем предполагать, что в стационарном состоянии пучок представляет собой периодическую последовательность сгустков со скомпенсированным зарядом, движущихся со скоростью u_0 вдоль оси OZ (ось OZ выбрана в направлении внешнего магнитного поля H_0). В двух других направлениях пучок и плазма неограничены и однородны. В этом случае плотность частиц пучка определяется соотношением

$$n_{0в}(\zeta) = \begin{cases} n_{0в}, & s\lambda_0 < \zeta < s\lambda_0 + d \\ 0, & s\lambda_0 + d < \zeta < (s+1)\lambda_0, \quad s=0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $n_{0в}$ — постоянная плотность частиц внутри сгустка; $\zeta = z - u_0 t$; d — ширина сгустка; λ_0 — расстояние между сгустками.

Для исследования параметрической неустойчивости высокочастотных продольных колебаний будем исходить из линеаризованной системы гидродинамических уравнений, которая в системе, связанной со сгустками, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_v}{\partial t} = -\frac{e}{m} E - \frac{e}{mc} [v_v H_0]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_v}{\partial t} + \text{div} [n_{0в}(\zeta) v_v] = 0; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) v = -\frac{e}{m} E - \frac{e}{mc} [v H_0]; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) n + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e(n + n_b); \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (7)$$

Здесь n_b и \mathbf{v}_b — возмущение плотности и скорости частиц пучка, n , \mathbf{v} — те же величины для электронов плазмы, n_0 и $n_{0b}(\zeta)$ — начальные значения плотности плазмы и пучка.

Решения уравнений (2)–(7) ищем в виде $f(\zeta) e^{ik_x x - i\omega t}$ (колебания распространяются в плоскости XOZ). Рассмотрим случай, когда волны распространяются почти перпендикулярно к магнитному полю, т. е. $k_x \gg \frac{\partial}{\partial \zeta}$, тогда для возмущения плотности пучка и плазмы получим

$$n_b = -ik_x \frac{e}{m} n_{0b}(\zeta) \frac{E_x}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad (8)$$

$$(\hat{L}^2 + \omega_H^2) n = ik_x \frac{e}{m} n_0 E_x, \quad (9)$$

где

$$\hat{L} = i\omega + u_0 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc}.$$

Комбинируя (8) и (9) с уравнением Пуассона, получим уравнение для электрического поля

$$\left(i\omega + u_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 E + \left(\frac{\omega_0^2}{\epsilon_b(\zeta, \omega)} + \omega_H^2 \right) E = 0, \quad (10)$$

где $E = \epsilon_b E_x$, $\epsilon_b(\zeta, \omega) = 1 - \frac{\omega_{0b}^2(\zeta)}{\omega^2 - \omega_H^2}$ — диэлектрическая постоянная пучка, $\omega_{0b}^2(\zeta) = \frac{4\pi e^2 n_{0b}(\zeta)}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ — ленгмюровские частоты пучка и плазмы соответственно.

Рассмотрим случай, когда выполнено условие

$$\frac{d}{\lambda_0} \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_b^2 - \omega_H^2} \ll 1 \quad \left(\omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0b}}{m} \right) \quad (11)$$

и для всех $n \neq 0$ значения $f_{n,\omega} \ll f_{0,\omega}$ ($f_{n,\omega}$ — коэффициенты фурье-разложения функции $\frac{1}{\epsilon_b(\zeta, \omega)} = \sum_n f_{n,\omega} e^{in k_0 \zeta}$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$). В этом случае решение уравнения (2) находим в виде

$$E = E_+ \exp(ik_+ \zeta) + E_- \exp(ik_- \zeta), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} k_{\pm} &= -\frac{\omega}{u_0} \pm \frac{\omega_0}{u_0} \sqrt{f_0 + \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2}} = \\ &= -\frac{\omega}{u_0} \pm \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}}{u_0} \left(1 + \frac{d}{2\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_H^2} \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_b^2 - \omega_H^2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

E_{\pm} — медленно меняющиеся функции ζ .

Параметрическая неустойчивость возникает при выполнении условия

$$k_{+} = k_{-} + nk_0 + \Delta, \quad \frac{|\Delta|}{k_0} \ll 1, \quad (14)$$

где n — целое число. Тогда для E_{\pm} из (10) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{+}}{\partial \zeta} + \frac{\omega_0^2 f_n}{2iu_0(\omega + k_{+}u_0)} E_{-} e^{-i\Delta\zeta} &= 0, \\ \frac{\partial E_{-}}{\partial \zeta} + \frac{\omega_0^2 f_n^*}{2iu_0(\omega + k_{-}u_0)} E_{+} e^{i\Delta\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда $E_{\pm} = \text{const} \cdot \exp\left(i x \zeta \mp i \frac{\Delta}{2} \zeta\right)$, где x при $\frac{d}{\lambda_0} \ll 1$ определяем из уравнения

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{\Delta^2}{4} - \frac{\omega_0^2 |f_n|^2}{4u_0^2(f_0 + \omega_H^2/\omega_0^2)} = - \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 + \omega_H^2)u_0^2} \frac{d^2}{4\lambda_0^2} \frac{\omega_B^4}{(\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_H^2)^2} + \\ + \frac{1}{4} \left[2 \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}}{u_0} \left(1 + \frac{d}{2\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_H^2} \frac{\omega_B^2}{\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_H^2} \right) - nk_0 \right]^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим возбуждение колебаний с волновым числом k . Так как $k = k_{\pm} \mp \frac{\Delta}{2} + x$, то из соотношений (13) и (14) получим

$$\left(k + \frac{\omega}{u_0} - x \right)^2 = \left[\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}}{u_0} \left(1 + \frac{d}{2\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_H^2} \frac{\omega_B^2}{\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_H^2} \right) - \frac{\Delta}{2} \right]^2 = \frac{n^2 k_0^2}{4}. \quad (17)$$

Частота в лабораторной системе отсчета равна

$$\omega_n = \omega + ku_0 = \frac{n}{2} k_0 u_0 + xu_0. \quad (18)$$

С помощью (16) и (18) получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\omega_n - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right)^2 = \left(\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right)^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right) \times \\ \times \frac{d}{\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}} \frac{\omega_B^2}{(\omega_n - ku_0)^2 - \omega_B^2 - \omega_H^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

При достаточно больших расстройках, когда $\left| \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right| \gg \text{Im } \omega$,

из уравнения (19) можно получить формулы для спектра и инкрементов пучковой неустойчивости на Допплер-эффекте, найденные в работе [4]. Здесь мы исследуем случай малых расстройок $\left| \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right| \leq \text{Im } \omega$, когда неустойчивость связана с параметрическим резонансом.

При точном резонансе $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} = \frac{n}{2} k_0 u_0$ и неустойчивость отсутствует ($\omega_a = \frac{n}{2} k_0 u_0$, $\omega_a = k u_0 \pm \omega_H$, так как $\omega_b^2 \ll \omega_H^2$). Если $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} \neq \frac{n}{2} k_0 u_0$, как следует из уравнения (19), существенен резонанс вблизи $k u_0 \pm \omega_H$. В этом случае решение ищем в виде $\omega_a = k u_0 \pm \omega_H + \gamma$, где $|\gamma| \ll k u_0 \pm \omega_H$. Это соответствует $\left(\frac{n}{2} k_0 - k\right) u_0 = \pm \omega_H$. Из (19) получим уравнение (в случае, когда $\omega_H \gamma \gg \omega_b^2$) для γ :

$$\gamma^3 - \left(\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right) \gamma \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \right) \frac{d}{\lambda_0} \times \\ \times \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}} \frac{\omega_b^2}{\omega_H} = 0. \quad (20)$$

Следовательно, неустойчивость возникает при

$$-\frac{3^{3/4}}{2} \sqrt{\frac{d}{\lambda_0}} \frac{\omega_b \omega_0}{\sqrt{\omega_H} (\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/4}} < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 < \frac{3^{3/4}}{2} \times \\ \times \sqrt{\frac{d}{\lambda_0}} \frac{\omega_b \omega_0}{\sqrt{\omega_H} (\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/4}}. \quad (21)$$

Максимальное значение инкремента в зоне неустойчивости по порядку величины равно

$$\gamma_{\max} \simeq \sqrt{\frac{d}{\lambda_0}} \frac{\omega_b \omega_0}{\sqrt{\omega_H} (\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/4}}.$$

Если же $\omega_H \gamma \ll \omega_b^2$ и распределение частиц в пучке существенно неоднородно ($\frac{d}{\lambda_0} \frac{\omega_0}{\omega_b} \ll 1$), ширина зоны неустойчивости и наибольшее значение инкремента в ней определяются следующим образом:

$$0 < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 < \frac{d}{\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}}, \\ \gamma_{\max} = \frac{d}{2\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}} \quad \text{при} \quad \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 = \frac{d}{2\lambda_0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}}.$$

Таким образом, максимальное значение инкрементов в рассмотренных случаях при параметрической неустойчивости того же порядка, что и максимум инкремента при пучковой неустойчивости [4]. Это значение инкремента достигается при большой расстройке $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} - \frac{n}{2} k_0 u_0 \propto \gamma_{\max}$. При меньших расстройках эта неустойчивость развивается медленнее, чем пучковая.

В заключение авторы выражают благодарность В. Д. Шапиро за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, Атомная энергия, **19**, 336 (1965).
- 2 В. Д. Шапиро, ЖТФ, **37**, 2 (1967).
- 3 В. Д. Шапиро, Атомная энергия, **22**, 44 (1967).
- 4 А. И. Пятак, В. И. Шевченко, ЖТФ, **38**, 482 (1968).

Поступила в редакцию
29 апреля 1968 г.

PARAMETRIC INSTABILITY AT INTERACTION OF MODULATED BEAM WITH
PLASMA IN A MAGNETIC FIELD

A. I. Pyatak, V. I. Shevchenko

The intepaction of density-modulated beam of charged particles with plasma in a magnetic field under the condition of a parametric resonator is investigated. The widths of zones of parameteric instabilities and their increments have been found when exciting longitudinal plasma oscillations.

УДК 621.378.3

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ РЕЗОНАТОРА НА ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Я. И. Ханин

Исследуется вопрос о влиянии неоднородности структуры поля в резонаторе на характер переходных процессов в квантовом генераторе. Рассмотрена модель с двумя образцами рабочего вещества, помещенными в области резонатора, отличающиеся по интенсивности поля. Показано, что по сравнению со случаем одного образца имеет место эффект некоторого сглаживания пульсаций интенсивности в переходном режиме, и найдены условия максимального ослабления пульсаций. Кроме того, выяснены условия, при которых переходный процесс становится аperiodическим.

1. Как известно, характеристики квантового генератора можно изменять в широких пределах путем введения в его схему дополнительных обратных связей [1]. Положительная обратная связь приводит к нарушению устойчивости стационарного режима (если таковой существует в исходном генераторе) и к установлению режима периодических пульсаций излучения. Отрицательная обратная связь, наоборот, стабилизирует генерацию. В частности, если исходный генератор излучает пачки, то введение отрицательной обратной связи способствует их сглаживанию.

Для осуществления обратной связи в резонатор квантового генератора следует поместить диссипативный элемент, уровень потерь в котором является функцией интенсивности излучения. Таким элементом может служить электрооптическая ячейка, управляющее напряжение на которой определяется интенсивностью излучения генератора [2]. Вторая возможность заключается в использовании нелинейных сред. Известны насыщающиеся поглотители и среды, характеризующиеся ростом потерь вследствие таких эффектов, как вынужденное рассеяние или двухфотонное поглощение. Особенности работы квантовых генераторов с нелинейными поглотителями посвящен ряд работ [1, 3-6].

Очевидно, что роль нелинейного элемента может играть не только поглощающая, но и усиливающая среда, насыщение в которой наступает раньше, нежели в основном активном элементе генератора. Поэтому, если и основной и дополнительный элементы однотипны, то последний должен быть помещен в область резонатора с большей напряженностью поля [13]. Динамике такой системы и посвящена настоящая статья.

2. Предположим, что в резонаторе находятся два активных кристалла. В объеме каждого из них поле можно считать однородным. Если в генерации участвует только одна мода, то устройство описывается следующей системой уравнений баланса [4]:

$$\dot{m} = G(n_1 + n_2 - 1)m; \quad (1a)$$

$$\dot{n}_1 = n_{10} - (m + 1)n_1; \quad (1б)$$

$$n_2 = n_{20} - (\rho m + 1)n_2. \quad (1в)$$

Уравнения (1а)—(1в) написаны в безразмерных обозначениях: n_1, n_2 — разности населенностей в первом и втором образцах, отнесенные к соответствующим пороговым значениям; n_{10}, n_{20} — равновесные значения разностей населенности, устанавливающиеся в отсутствие генерации; m и ρm — величины, пропорциональные интенсивности поля в объеме первого и второго образцов. В качестве единицы безразмерного времени выбрано время релаксации разности населенностей T_1 , одинаковое для обоих образцов. Наконец, $G = T_1/T_c$, где T_c — время жизни фотона в резонаторе.

Следует заметить, что уравнения в форме (1а)—(1в) пригодны также для описания лазера с очень большим числом генерирующих мод при условии пространственной однородности инверсии населенностей в объеме каждого из образцов и узости спектра генерации по сравнению с шириной линии вещества [7,8].

3. При выполнении условия самовозбуждения $n_{10} + n_{20} > 1$ система, описываемая уравнениями (1а)—(1в), обладает положением равновесия

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{2} \left(n_{10} + \frac{n_{20}}{\rho} - 1 - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(n_{10} + \frac{n_{20}}{\rho} - 1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\rho} (n_{10} + n_{20} - 1) \right]^{1/2}, \\ \bar{n}_1 &= \frac{n_{10}}{\bar{m} + 1}, \quad \bar{n}_2 = \frac{n_{20}}{\rho \bar{m} + 1}, \end{aligned} \quad (2)$$

устойчивость которого гарантируется положительностью n_{10} и n_{20} . В дальнейшем мы будем считать $\rho \gg 1$, $n_{10} \gg n_{20}/\rho$ и пользоваться приближенными формулами

$$\bar{m} \simeq n_{10} - 1, \quad \bar{n}_1 \simeq 1, \quad n_2 \simeq n_{20}/\rho (n_{10} - 1). \quad (2a)$$

Известно, что большая величина параметра G является причиной разбегания фазового пространства системы (1а)—(1в) на области быстрых и медленных движений [9]. Из (1а) видно, что при $m \neq 0$ область медленных движений ограничена малой окрестностью плоскости

$$n_1 + n_2 = 1. \quad (3)$$

В пределе медленные фазовые траектории стремятся к асимптотической кривой

$$m = \frac{n_{10} + n_{20} - 1}{n_1 + \rho n_2}. \quad (4)$$

Этой асимптоте принадлежит и особая точка (2), местоположение которой определяется соотношением между n_{10} и n_{20} , а ее тип — свойствами корней характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \rho \bar{m} \lambda^2 + G \bar{m} (1 + \rho \bar{n}_2) \lambda + G \bar{m} (\rho \bar{m} + 1 + \rho \bar{n}_2) = 0. \quad (5)$$

Учитывая большую величину параметра G , нетрудно найти приближенные значения корней:

$$\lambda_1 = - \frac{\rho \bar{m} + 1 + \rho \bar{n}_2}{1 + \rho \bar{n}_2},$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \{ \rho \bar{m} \pm [\rho^2 \bar{m}^2 - 4G(n_{10} + n_{20})]^{1/2} \}. \quad (6)$$

Особая точка будет узлом, если корни $\lambda_{2,3}$ действительны, т. е.

$$\rho^2 > 4G \frac{n_{10} + n_{20}}{(n_{10} - 1)^2}. \quad (7)$$

Правая часть (7) убывает с увеличением накачки. При разумных накачках множитель при G составляет 0,1—1 по порядку величины и, грубо говоря, достаточно иметь коэффициент компрессии поля $\rho > G^{1/2} \sim 10^2 - 10^3$, чтобы в генераторе реализовался беспичковый режим.

4. Если неравенство (7) не выполнено, особая точка (2) является фокусом. Фазовые траектории имеют вид, показанный на рис. 1. После

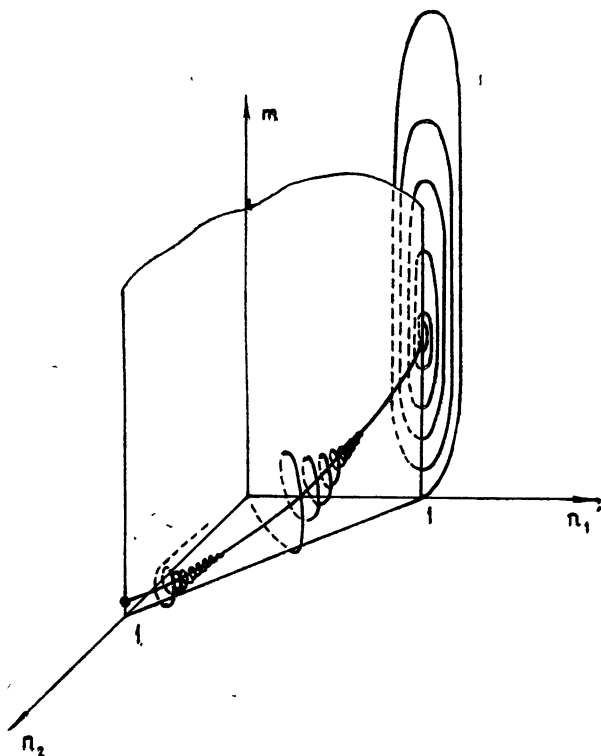


Рис. 1.

включения накачки изображающая точка до пересечения границы самовозбуждения движется в плоскости $n_1 n_2$, а затем переходит на спираль, навивающуюся на кривую медленных движений. При $n_2 \equiv 0$ спираль становится плоской [9, 10].

Существенный эффект, к которому приводит наличие второго образца; заключается в уменьшении амплитуды переходных пульсаций. Процесс генерации пичков при $n_2 \equiv 0$ описан в [9]. Амплитуда пичка в этом случае определяется выражением

$$m_{\max} \approx \frac{1}{2} G \eta_{\max}^2, \quad (8)$$

причем

$$\eta_{\max} \simeq \sqrt{\frac{2(n_{10} - 1)}{G} \ln \frac{n_{10} - 1}{m_{\phi}}}. \quad (9)$$

Здесь m_{ϕ} — интенсивность начального флуктуационного поля в резонаторе.

При $0 < n_{20} \ll n_{10}$ отвечающая первому пичку величина η_{\max} практически не отличается от (9). Заметные отличия выявляются на нелинейной стадии процесса. Пока интенсивность меняется в пределах $m < n_{10} - 1$, высвечивается только второй образец. На этом этапе справедливо приближенное уравнение

$$\frac{dm}{dn_2} \simeq - \frac{G}{\rho} \frac{n_1 - 1 + n_2}{n_2}, \quad (10)$$

решение которого имеет вид

$$m - m_{\text{нач}} = \frac{G}{\rho} \left[(n_1 - 1) \ln \frac{n_{2\max}}{n_2} + n_{2\max} - n_2 \right]. \quad (11)$$

Если определяемая выражением (11) интенсивность поля достигает значения $m \simeq n_{10} - 1$ и при этом $n_1 - 1 \ll \eta_{\max}$, то изображающая точка попадает в окрестность положения равновесия (2) и амплитуда первого пичка оказывается малой. Для реализации подобного режима параметры системы должны удовлетворять двум требованиям. Во-первых, в процессе высвечивания второго образца должно быть достигнуто равновесное значение поля. Учитывая, что до излучения первого пичка $n_2/n_1 = n_{20}/n_{10}$ и, следовательно, при $n_1 \simeq 1$ имеет место $n_2 = n_{20}/n_{10}$, а также, что $m_{\text{нач}} \ll n_{10} - 1$ и $n_2 > 0$, получаем из (11) критерий*

$$\frac{n_{20}}{n_{10}} \gtrsim \frac{\rho}{G} (n_{10} - 1). \quad (12)$$

Заметим, что в случае

$$\frac{n_{20}}{n_{10}} \ll \frac{\rho}{G} (n_{10} - 1)$$

наличие второго образца вообще не сказывается на режиме генерации и следует пользоваться обычной системой уравнений баланса [9], а не уравнениями (1а)—(1в).

Во-вторых, отличие n_1 от единицы должно быть минимальным. Отсюда следует условие $n_{2\max} < \eta_{\max}$ или, с учетом (9),

$$\frac{n_{20}}{n_{10}} < \sqrt{\frac{2(n_{10} - 1)}{G} \ln \frac{n_{10} - 1}{m_{\phi}}}. \quad (13)$$

Неравенства (12) и (13) непротиворечивы в случае $\rho^2 < \frac{2G}{n_{10} - 1} \times \times \ln \frac{n_{10} - 1}{m_{\phi}}$, т. е. при условии, что особая точка является фокусом**.

* С точностью до знака при n_{20} (12) совпадает с критерием неустойчивости положения равновесия, полученным в [4].

** В реальных условиях $\ln \frac{n_{10} - 1}{m_{\phi}} \sim 15 \div 20$.

Выполнение (12) и (13) обеспечивает режим генерации с минимальной амплитудой переходных осцилляций. Если (13) не выполняется, амплитуда первого пика окажется большей, чем в предыдущем случае. Однако по его окончании соотношение между n_1 и n_2 оказывается измененным, и к началу второго пика $n_{2\max}/n_1 < n_{20}/n_{10}$. Следовательно, наличие второго образца увеличивает скорость затухания переходного процесса. Из (6) видно, что скорость затухания малых колебаний возрастает в ρ раз.

5. В качестве примера генератора, в котором проявляются рассмотренные выше эффекты, можно указать лазер со сферическими зеркалами резонатора или эквивалентными им отражателями. Необходимая неоднородность поля обеспечивается в таком резонаторе формой каустической поверхности мод.

Степень неоднородности поля вдоль оси активного элемента зависит от соотношения между длинами кристалла и резонатора и радиусом кривизны зеркал. Она возрастает по мере приближения к концентрической конфигурации и с увеличением коэффициента заполнения резонатора.

Вопрос о скорости затухания переходного процесса в лазере со сферическими отражателями был исследован в [14]. Полученные в [14] результаты находятся в качественном согласии с изложенным выше. Вместе с тем, насколько можно судить по приведенным в [14] экспериментальным данным, подтверждается и наш вывод о связи амплитуды пиков со степенью неоднородности поля.

Типы колебаний с резко неоднородным распределением свойственны сопряженно-концентрическому резонатору [11], режим генерации в котором характеризуется отсутствием пиков [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖТФ, 37, 947 (1967).
2. F. R. Marshall, O. L. Roberts, Proc. IRE, 50, 2108 (1962).
3. В. И. Бородулин, Н. А. Ермакова, Л. А. Ривлин, В. С. Шильдяев, ЖЭТФ, 48, 845 (1965).
4. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 909 (1965).
5. R. H. Pantell, J. Warszaewski, Appl. Phys. Lett., 11, 213 (1967).
6. J. Schwartz, C. S. Naiman, R. K. Chang, Appl. Phys. Lett., 11, 242 (1967).
7. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 513 (1966).
8. М. М. Сушик, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 919 (1966).
9. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).
10. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
11. R. V. Pole, J. Opt. Soc. Am., 55, 254 (1965).
12. R. V. Pole, H. Wieder, Appl. Optics., 3, 1086 (1964).
13. Я. И. Ханин, Диссертация, Горький, 1967.
14. М. Е. Глобус, Ю. В. Набойкин, А. М. Ратнер, И. А. Ром-Кричевская, Ю. А. Тиунов, ЖЭТФ, 52, 857 (1967).

THE EFFECT OF RESONATOR FIELD INHOMOGENEITY ON TRANSIENT PROCESSES IN QUANTUM GENERATOR

Ya. I. Khanin

The effect of the field structure inhomogeneity in the resonator on the character of transient processes in a quantum generator is investigated. The model with two samples of the operating matter placed in the resonator regions which differ in the field intensities is considered. It is shown that there takes place the effect of some smoothing of intensity in a transient regime as compared with the case of one sample. The conditions of maximum attenuation of pulsation have been found. Besides, the conditions are clarified under which the transient process becomes aperiodic.

УДК 621.378.325.2

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОКГ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ

Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов

Предлагается теория нестационарных процессов в ОКГ бегущей волны с просветляющимся фильтром. Рассмотрение ведется без разложения поля по собственным модам резонатора. Получены простые соотношения, позволяющие определить амплитуду и форму импульсов излучения с учетом нелинейности фильтра и активного вещества. Показано, что при определенных условиях рассматриваемая система может работать как усилитель с весьма малым искажением и очень большим коэффициентом усиления. Определены условия, при которых возможна генерация периодической последовательности коротких импульсов (режим «синхронизации мод»), найдена форма этих импульсов

1. В последнее время уделяется большое внимание нестационарным процессам в ОКГ с просветляющимися фильтрами. Этому вопросу посвящен ряд теоретических [1-3] и экспериментальных работ [1, 4-6].

Теоретическое изучение нестационарных процессов в ОКГ обычно проводится путем разложения поля по собственным модам резонатора. Поскольку это приводит к исследованию системы зацепляющихся нелинейных уравнений, то обычно предполагают, что в системе возбуждается мало (не более 2-3) мод [10-12]. Однако в целом ряде практически интересных случаев (например, когда в системе формируется последовательность коротких импульсов, длительностью 10^{-10} - 10^{-11} сек) это предположение не оправдывается. Поэтому представляет интерес развить методы исследования ОКГ, не связанные с разложением поля по модам резонатора [13].

Ниже, таким методом исследуются нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны для случая, когда модуляция добротности производится с помощью просветляющихся фильтров. Развитый метод эквивалентен учету произвольного числа взаимодействующих между собой мод.

2. Пусть в одномерный резонатор бегущей волны (рис. 1) помещен образец активного вещества (АВ) и нелинейно поглощающий фильтр (Ф). Молекулы активного вещества и молекулы фильтра будем считать двухуровневыми. Пусть в некоторый момент времени скачком включается достаточно интенсивная накачка и выполняется условие самовозбуждения для некоторой моды резонатора. Возьмем этот момент за начало отсчета времени. В начальный период нарастания поля, когда амплитуды мод достаточно малы, можно не учитывать влияния поля на изменение разности населенностей активного вещества и фильтра. Этот этап работы ОКГ с просветляющимся фильтром, когда фильтр и активное вещество еще линейны, рассмотрен в [10]. Выражения для амплитуд полей, полученные в [10], будут справедливы до момента времени t_3 , когда станет заметным изменение разности населенностей нелинейного фильтра под действием поля.

При $t > t_3$ начинает сказываться изменение разности населенностей фильтра и активного вещества под действием поля. Исходные уравнения для изменения разности населенностей рабочих уровней $n_{1,2}(z, t)$ и числа фотонов $m(z, t)$ в единице объема соответственно фильтра и активного вещества имеют вид

$$\left. \frac{\partial n_1}{\partial t} + (n_1 - \bar{n}_1)/T_1^\Phi = B_1 m n_1 \right\} \quad 0 \leq z \leq l_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + c \frac{\partial m}{\partial z} = B_1 m n_1 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial n_2}{\partial t} + (n_2 - \bar{n}_2)/T_1 = -B_2 m n_2 \right\} \quad l_1 + l_3 < z \leq l_1 + l_2 + l_3. \quad (3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + c \frac{\partial m}{\partial z} = B_2 m n_2 \quad (4)$$

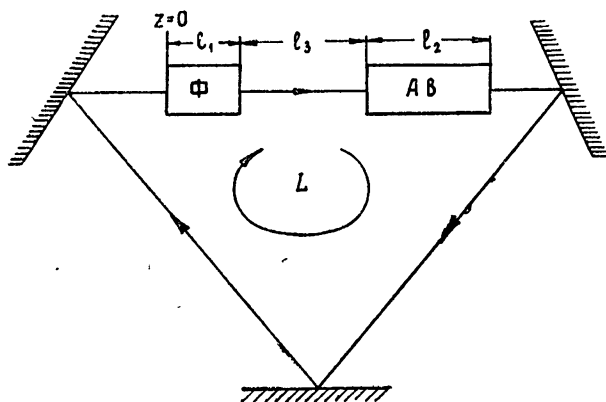


Рис. 1.

Здесь B — коэффициент Эйнштейна; $\bar{n}(t_3)$ — равновесное значение разности населенностей к моменту времени $t = t_3$; индекс 1 относится к фильтру, 2 — к активному веществу; T_1^Φ , T_1 — времена релаксации разности населенностей молекул фильтра и активного вещества с учетом некогерентной накачки, c — скорость света, которая предполагается постоянной в рассматриваемой области частот. Предполагается, что $\bar{n}_1 < 0$, $\bar{n}_2 > 0$.

При написании этой системы мы пренебрегли производной недиагонального элемента матрицы плотности; это эквивалентно предположению, что поляризация вещества следует за полем (пренебрежение дисперсией). В линейном случае, когда влиянием полей на разность населенностей можно пренебречь, дисперсия является единственным механизмом, приводящим к искажению формы импульса, и учет ее обязателен (см. [10]). В нелинейном режиме, как мы увидим, действуют другие механизмы, приводящие к искажению начального распределения. Можно ожидать, что, пока ширина спектра генерируемого поля мала по сравнению с шириной линии активного вещества и фильтра, основную роль будут играть именно они. Поля, найденные в [10] и описывающие линейный режим работы, мы будем использовать как начальные для следующего этапа работы ОКГ, описываемого уравнениями (1) — (4).

При $t > t_3$ скорость изменения поля в резонаторе увеличивается, а разность населенностей рабочих уровней нелинейного поглотителя быстро убывает. Как будет видно из дальнейших оценок, длительность процесса после $t = t_3$ много меньше, чем T_1 . Поэтому в уравнении (3) можно пренебречь членом $(n_2 - \bar{n}_2)/T_1$.

Пусть в сечении $z = l_1 + l_3$ (рис. 1) дана некоторая функция $m_1(\tau)$ ($-1 < \tau < 0$). Тогда, решая (3)–(4), находим поле в сечении $z = L$ [11, 12]:

$$m(\tau, L) = m_1[\tau - (L - l_1 - l_3)/L] / \left[1 - (1 - K_2^{-1}) \exp \left(-B_2 \frac{L}{c} \int_{-(L-l_1-l_3)/L}^{\tau - (L-l_1-l_3)/L} m_1(\tau') d\tau' \right) \right],$$

$$\tau = t'c/L, \quad t' = t - t_3. \quad (5)$$

В зависимости от скорости релаксационных процессов, происходящих в нелинейном фильтре, будем рассматривать два предельных случая.

а) Время релаксации фильтра велико по сравнению с временем, в течение которого происходит излучение.

б) Релаксационные процессы в фильтре происходят много быстрее, чем характерное время изменения поля.

Обратимся сначала к случаю а). В уравнении (1) можно тогда отбросить член $(n_1 - \bar{n}_1)/T_1^\Phi$. Поле в сечении $z = l_1 + l_3$ выражается через поле в сечении $z = 0$ аналогично (5). Далее, вводя новую переменную

$$x(\tau) = \exp \left(B_1 \frac{L}{c} \int_{-1}^{\tau} m(\tau') d\tau' \right) \quad (6)$$

и учитывая условия периодичности [$x(\tau, 0) = x(\tau, L)$] и непрерывности $x(\tau)$ так же, как это было сделано в работе [13], получаем разностное уравнение, которое описывает процесс развития и установления поля в резонаторе бегущей волны*:

$$x(\tau) = x_n(0) \{ [1 + K_2 \{ (x(\tau-1) - 1) K_1 + 1 \}^{1/\beta} - 1] \}^\beta, \quad (7)$$

где

$$x_n(\tau) = \exp \left(B_1 \frac{L}{c} \int_{-1}^{\tau} m_n(\tau') d\tau' \right), \quad (8)$$

$m_n(\tau)$ — начальное поле (см. [10]), заданное на интервале $-1 < \tau < 0$, $\beta = B_1/B_2$,

$$K_1 = \exp(B_1 \bar{n}_1 l_1/c); \quad (9)$$

$$K_2 = \exp(B_2 \bar{n}_2 l_2/c), \quad (10)$$

K_1, K_2 имеют смысл коэффициентов усиления фильтра и активного вещества в момент времени $t = t_3$. Определив из (7) $x(\tau)$, можно затем с помощью (6) найти

$$m(\tau, 0) = \frac{1}{B_1 L/c} \frac{d}{d\tau} \ln x(\tau) \quad (11)$$

— интенсивность поля в сечении $z = 0$.

Зная это поле, можно определить поле в произвольном сечении [11]. Заметим, что, если $K_1 = 1$, то из уравнения (7) следует разностное

* Мы предполагаем, что зеркала резонатора идеальные.

уравнение, описывающее процессы в лазере бегущей волны при отсутствии нелинейного фильтра [13].

Уравнение (7) представляет собой нелинейное разностное уравнение первого порядка. Найти его решение в общем виде не представляется возможным. Но, как будет видно из дальнейшего, можно извлечь важную информацию о развитии генерации в ОКГ и о форме импульсов поля, не прибегая к решению уравнения (7) в общем виде. Вначале выполняется условие

$$x(\tau) - 1 \ll 1. \quad (12)$$

При этом из (7) получаем линейное разностное уравнение

$$x(\tau) - 1 = x_n^{1/\beta}(0) K_1 K_2 [x(\tau-1) - 1] + \beta (x_n^{1/\beta}(0) - 1). \quad (13)$$

Физический смысл неравенства (12) заключается в том, что поле в резонаторе мало, так что еще не сказывается насыщение нелинейного фильтра.

Решение уравнения (13) имеет вид

$$x(\tau) - 1 = [x_n^{1/\beta}(0) K_1 K_2]^{\tau + C(\tau)} + \frac{\beta (x_n^{1/\beta}(0) - 1)}{1 - x_n^{1/\beta}(0) K_1 K_2}, \quad (14)$$

где $C(\tau)$ — периодическая функция, определяемая начальной функцией $x_n(\tau)$:

$$C(\tau) = \frac{\ln[x_n(\tau - E(\tau) - 1) - 1 - \beta (x_n^{1/\beta}(0) - 1)/(1 - x_n^{1/\beta}(0) K_1 K_2)]}{\ln [x_n^{1/\beta}(0) K_1 K_2]} - \tau + E(\tau) + 1 \quad (15)$$

$E(\tau)$ — целая часть τ — имеет смысл числа пробегов волны через резонатор.

Когда поле вырастет настолько, что станет выполняться неравенство

$$x \gg K_1^{-1} \quad (16)$$

(что соответствует насыщению нелинейного фильтра), из общего разностного уравнения (7) следует уравнение, которое описывает эволюцию поля во времени после момента просветления нелинейного фильтра:

$$x^{1/\beta}(\tau) = x_n^{1/\beta}(0) K_1^{1/\beta} K_2 x^{1/\beta}(\tau-1) + (1 - K_2) x_n^{1/\beta}(0). \quad (17)$$

Решая уравнение (17), которое является линейным относительно величины $x^{1/\beta}(\tau)$, получим

$$x^{1/\beta}(\tau) = [(x_n(0) K_1)^{1/\beta} K_2]^{\tau + C_1(\tau)} + \frac{(1 - K_2) x_n^{1/\beta}(0)}{1 - (x_n(0) K_1)^{1/\beta} K_2}. \quad (18)$$

Здесь $C_1(\tau)$ является периодической функцией, подлежащей определению. Мы найдем ее из следующих соображений.

Решение нелинейного разностного уравнения (7) содержит одну произвольную периодическую функцию [14]. Причем, как легко показать, эта функция может входить лишь в сумме с аргументом τ . Последнее является следствием того, что время τ явно не входит в (7).

Соотношения (14) и (18) являются пределами точного (но неизвестного нам) решения уравнения (7) соответственно при $x \rightarrow 1$ и $x \gg K_1^{-1}$. Поэтому входящие в них произвольные периодические функции должны совпадать. Однако, так как $x(\tau + C_1(\tau) + \tau_1)$, где τ_1 — произвольная постоянная, также является функцией, зависящей

от аргумента $\tau + C_1(\tau)$, то нужно требовать совпадения $C(\tau)$ и $C_1(\tau)$ с точностью до произвольной постоянной. Поэтому положим $C_1(\tau) = C(\tau) + \tau_1$. Теперь формула (18) с учетом (15) позволяет определить форму сигнала после насыщения нелинейного фильтра, если известна форма сигнала до начала его насыщения, т. е. получить наиболее важную информацию о работе нелинейного фильтра.

Неопределенность в выборе τ_1 приводит к неопределенному сдвигу сигнала во времени. Если известно время $\tau_{\text{нл}}$, в течение которого величина $x(\tau)$ достигла некоторого значения $x_{\text{нл}} \gg K_1^{-1}$, то величина τ_1 легко может быть найдена. Для этого необходимо положить в (18) $x(\tau) = x_{\text{нл}}$ и определить τ_1 .

После этого, воспользовавшись (11), можно получить следующее выражение для поля в резонаторе, справедливое после момента просветления фильтра:

$$m(\tau) = A \frac{\{1 + a[x_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) - 1]\}^{q-1} m_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1)}{\{1 + a[x_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) - 1]\}^q + b[(x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]^{-E(\tau) + E(\tau_{\text{нл}})}}. \quad (19)$$

В (19) введены обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \ln[(x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]/(x_{\text{н}}^{1/\beta}(0) - 1), \quad a = (K_1K_2x_{\text{н}}^{1/\beta}(0) - 1)/\beta(x_{\text{н}}^{1/\beta}(0) - 1), \\ b &= (1 - K_2)x_{\text{н}}^{1/\beta}(0)/[1 - (x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]\{x_{\text{нл}}^{1/\beta}(1 - K_2)x_{\text{н}}^{1/\beta}(0)/[1 - (x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]\}, \\ q &= \ln[(x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]/\ln[x_{\text{н}}^{1/\beta}(0)K_1K_2]. \end{aligned} \quad (20)$$

Величина $\tau_{\text{нл}}$ состоит из суммы двух времен: времени $\tau_{\text{лин}}$, в течение которого вообще не сказывается изменение разности населенностей ($x(\tau) - 1 \ll 1$), и $\tau_{\text{просв}}$ — времени насыщения фильтра; $\tau_{\text{лин}}$ находим легко:

$$E(\tau_{\text{лин}}) \simeq 1/\beta(x_{\text{н}}^{1/\beta}(0) - 1). \quad (21)$$

При $B_2 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$; $l_2 = 20 \text{ см}$; $\bar{n}_1 = -10^{17} \text{ см}^{-3}$; $l_1 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ см}$; $T_1 = 10^{-4} \text{ сек}$; $T_1^{\Phi} = 10^{-7} \text{ сек}$; $t_3 \simeq 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$; $L = 100 \text{ см}$; $B_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$; $\bar{n}_2 \simeq 10^{19} \text{ см}^{-3}$ из (8) и [10] имеем $x_{\text{н}}(0) \simeq 1,1$; $x_{\text{нл}} \simeq 10^2$; $\beta = 10^4$, а из (9) и (10) $K_2 \simeq 10$, $K_1K_2 \simeq 1,003$. Тогда из (20) получаем $A = 2 \cdot 10^5$; $a = 3 \cdot 10^{-2}$; $b = 2 \cdot 10^3$; $q = 7 \cdot 10^2$, а из (21) $E(\tau_{\text{лин}}) = 10$.

Вычисление $\tau_{\text{просв}}$ затруднительно, но оценка этого времени непосредственно из уравнения (14) показывает, что $E(\tau_{\text{просв}}) \simeq 4 \div 6$ при вышеприведенных значениях параметров. Заметим, что величина $(\tau_{\text{нл}}L/c)$ много меньше, чем t_3 , поэтому ошибка в определении $\tau_{\text{нл}}$ мало сказывается на оценке интервала времени от начала процесса до момента просветления фильтра.

Воспользуемся формулой (19) для нахождения поля до и после насыщения активного вещества. Из (19) видно, что пока $E(\tau) - E(\tau_{\text{нл}})$ невелико, второй член в знаменателе во много раз больше первого и выражение для поля значительно упрощается:

$$m(\tau) = \frac{A}{b} [1 + a[x_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) - 1]]^{q-1} m_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) [(x_{\text{н}}(0)K_1)^{1/\beta}K_2]^{E(\tau) - E(\tau_{\text{нл}})}. \quad (22)$$

Формула (22) представляет собой выражение для поля сразу после просветления нелинейного фильтра, пока еще не сказывается насыщение активного вещества. Из (22) видно, что форма сигнала после просветления фильтра заметно отличается от начальной, благодаря наличию множителя $\{1 + a[x_{\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) - 1]\}^{q-1}$. Степень иска-

жения можно оценить, вычислив отношение максимума к минимуму этого множителя. Эта величина равна $K_1^{1/\beta-1}$.

Когда $E(\tau)$ станет достаточно большой величиной, удовлетворяющей условию

$$E(\tau) \gg E(\tau_{нл}) + \ln b / \ln [(x_n(0) K_1)^{1/\beta} K_2], \quad (23)$$

произойдет насыщение активного вещества. Тогда из (19) получим

$$m(\tau) = A \frac{m_n(\tau - E(\tau) - 1)}{1 + a[x_n(\tau - E(\tau) - 1) - 1]}. \quad (24)$$

Поскольку $a[x_n(\tau - E(\tau) - 1) - 1] \ll 1$, то форма сигнала после насыщения активного вещества практически не отличается от формы начального поля. Учитывая (8), (12) и (20), вместо (24) можно записать

$$m(\tau) = \left[1 + \beta \ln (K_1^{1/\beta} K_2) / B_1 \frac{L}{c} \int_{-1}^0 m_n(\tau') d\tau' \right] m_n(\tau - E(\tau) - 1). \quad (25)$$

При значениях параметров, приведенных выше,

$$m(\tau) \simeq 2,3 \cdot 10^5 m_n(\tau - E(\tau) - 1).$$

Таким образом, активное вещество исправляет искажения начального сигнала, обусловленные нелинейностью фильтра.

3. Это наводит на мысль использовать рассмотренную выше систему в качестве неискажающего усилителя. Такой усилитель, однако, самовозбуждается. Рассмотрим поэтому систему, у которой в момент времени $\tau = 0$ $K_1 K_2 < 1$. Пусть в сечении $z = 0$ задан короткий сигнал (длительностью меньше L/c). Если его интенсивность достаточно велика, то нелинейный фильтр может быть насыщен, общий коэффициент усиления превысит единицу и начнется процесс, аналогичный рассмотренному выше.

Обратимся снова к уравнению (7). Можно показать, что это уравнение при $K_1 K_2 < 1$ имеет два состояния равновесия, т. е. такие точки на фазовой плоскости $(x(\tau), x(\tau - 1))$, где $x(\tau) \equiv x(\tau - 1)$. При $K_1 K_2 \simeq 1$ правую часть уравнения (14) можно разложить в ряд по $(x - 1) K_1$ до величин второго порядка малости. В результате получим квадратное уравнение для определения состояний равновесия

$$\frac{1}{2} K_2 x_n(0) (K_2 - 1) K_1^2 (x - 1)^2 - (x - 1) (1 - K_1 K_2 x_n(0)) + x_n(0) - 1 = 0. \quad (26)$$

Если решение (26) существует, то при $\tau \rightarrow \infty$ решение уравнения (7) стремится к пределу, определяемому первым корнем из (26). Вторым корнем уравнения (26) не имеет физического смысла. Как легко показать, уравнение (26) не будет иметь состояний равновесия, если

$$1 - K_1 K_2 x_n(0) < 0. \quad (27)$$

В этом случае произойдет насыщение нелинейного фильтра.

Критическая энергия, необходимая для возбуждения регенеративного квантового усилителя бегущей волны, определяется из (27) и (8) следующим образом:

$$B_1 \frac{L}{c} \int_{-1}^0 m_{нр}(\tau') d\tau' = \ln (K_1 K_2)^{-1}. \quad (28)$$

Таким образом, если энергия, содержащаяся в начальном поле, превышает критическую величину, определяемую из (28), происходит насыщение фильтра и система работает в режиме регенеративного усилителя, коэффициент усиления которого можно определить из (25)*:

$$K_{\text{рег ус}} = 1 + \beta \ln(K_1^{1/\beta} K_2) / B_1 \frac{L}{c} \int_{-1}^0 m_n(\tau') d\tau'. \quad (29)$$

Максимальное значение $K_{\text{рег ус}}$ найдем, используя (28),

$$K_{\text{рег ус max}} = 1 + \beta \ln(K_1^{1/\beta} K_2) / \ln(K_1 K_2)^{-1}. \quad (30)$$

Полагая $\beta = 10^4$; $K_1 K_2 = 0,99$; $K_2 = 10$, найдем, что $K_{\text{рег ус max}} = 2,3 \cdot 10^6$. Интересно отметить, что коэффициент усиления сигнала, проходящего через тот же слой активного вещества без резонатора, будет равен лишь 10.

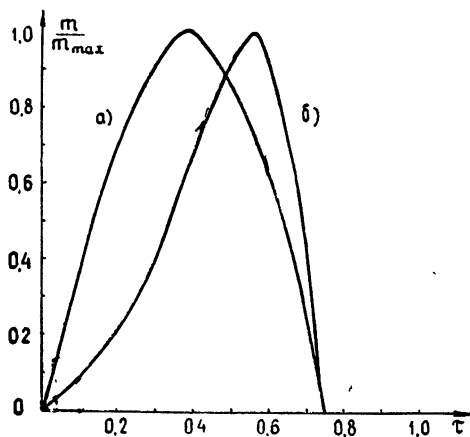


Рис. 2.

На рис. 2 представлены формулы импульсов излучения в случае, когда на вход системы падает синусоидальный импульс $m/m_0 = \sin(4\pi\tau/3)$. На рис. 2 а показана форма входного импульса, на рис. 2 б — форма импульсов излучения после просветления нелинейного фильтра. Форма импульса после насыщения активного вещества практически совпадает с формой входного сигнала.

4. Обратимся теперь к безынерционному фильтру. В этом случае в системе уравнений (1) — (4) можно отбросить производную по времени

в уравнении для разности населенностей нелинейного фильтра.

Если в сечении $z = 0$ задано $m_2(\tau)$ ($\tau = t'c/L$), то из первой пары уравнений получаем выражение для плотности числа фотонов $m_1(\tau) = m(\tau, l_1 + l_3)$,

$$\begin{aligned} \ln m_1(\tau) + B_1 T_1^\Phi m_1(\tau) &= B_1 \bar{n}_1 l_1 / c + \ln m_2\left(\tau - \frac{l_1 + l_3}{L}\right) + \\ &+ B_1 T_1^\Phi m_2\left(\tau - \frac{l_1 + l_3}{L}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Зная $m_1(\tau)$, из второй пары уравнений системы (1) — (4), находим поле в сечении $z = L$. (5) и (31) представляют собой систему разностных уравнений, описывающих развитие и установление генерации в лазере бегущей волны с безынерционным фильтром. Найти решение этой системы нелинейных разностных уравнений в общем виде не представляется возможным. Но когда отношение коэффициентов Эйнштейна фильтра и активного вещества велико $B_1/B_2 = \beta \gg 1$, решение задачи

* Под коэффициентом усиления здесь понимают отношение интенсивности поля после насыщения активного вещества лазера к начальной интенсивности $m_n(\tau)$.

может быть значительно упрощено. Большая разница в величинах B_1 и B_2 приводит к тому, что процессы насыщения фильтра и активного вещества разделены во времени: вначале происходит насыщение фильтра и лишь затем, когда фильтр насытится, начнет сказываться нелинейность активного вещества. Таким образом, процесс генерации может быть разбит на три этапа:

- а) линейный режим работы активного вещества и фильтра;
- б) линейный режим работы активного вещества и нелинейный режим работы фильтра;
- в) нелинейный режим работы активного вещества и линейный — фильтра.

Если активное вещество находится в линейном режиме, т. е.

$$\exp\left(-B_2 \frac{L}{C} \int_{-(L-l_1-l_3)/L}^{\tau-(L-l_1-l_3)/L} m_1(\tau') d\tau'\right) \ll 1$$

(см. формулу (5)), из (5) и (31) получим нелинейное разностное уравнение, описывающее первый и второй этапы работы системы,

$$m_1(\tau) \exp(B_1 T_1^\Phi m_1(\tau)) = K_1 K_2 m_1(\tau-1) \exp(K_2 B_1 T_1^\Phi m_1(\tau-1)), \quad (32)$$

где K_1 и K_2 по-прежнему определяются выражениями (9) и (10).

Для решения уравнения (32) воспользуемся методикой, которая была использована в разд. 2, 3. Найдем сначала решение уравнения (32), когда поле еще мало настолько ($B_1 T_1^\Phi m_1(\tau) \ll 1$), что не сказывается насыщение нелинейного фильтра, а затем решение после просветления нелинейного фильтра ($B_1 T_1^\Phi m_1(\tau) \gg 1$).

Затем «сошьем» эти решения аналогично тому, как это было сделано в разд. 2.

В результате получим следующее выражение для интенсивности поля в сечении $z = l_1 + l_3$:

$$m_1(\tau) = m_{1\text{нл}} [m_{1\text{н}}(\tau - E(\tau) - 1) / m_{1\text{н}}(\tau_{\text{макс}})]^{\ln K_2 / \ln K_1 K_2} K_2^{E(\tau) - E(\tau_{\text{нл}})}, \quad (33)$$

где $m_{1\text{н}}(\tau_{\text{макс}})$ — максимальное значение поля в интервале $-1 < \tau < 0$; $m_{1\text{нл}} \gg (B_1 T_1^\Phi)^{-1}$, $(B_1 T_1^\Phi)^{-1}$ — значение поля, при котором просветляется нелинейный фильтр. Это значение поля достигается через время $\tau_{\text{нл}} = \tau_{\text{лин}} + \tau_{\text{просв}}$.

Если $B_1 = 10^{-5} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$; $T_1^\Phi \simeq 10^{-11} \text{ сек}$; $m_{1\text{н}}(\tau_{\text{макс}}) = 0,1 (B_1 T_1^\Phi)^{-1}$; $\ln K_1 K_2 = 3 \cdot 10^{-3}$, то $E(\tau_{\text{лин}}) \simeq 7 \cdot 10^2$, а $E(\tau_{\text{просв}}) = 2 \div 3$. Заметим, что для безынерционного фильтра $E(\tau_{\text{лин}})$ гораздо больше, чем для инерционного фильтра, а просветление безынерционного фильтра происходит быстрее, чем инерционного.

Из (33) видно, что насыщение нелинейного фильтра приводит к искажению формы начального поля. Деформация начального сигнала будет тем больше, чем больше отношение $\ln K_2 / \ln(K_1 K_2)$.

Результат, аналогичный (33), был получен в работе [2] для ОКГ со встречными волнами. Укажем, что эта формула справедлива для произвольных значений K_1 и K_2 .

Сделаем еще одно замечание. Выражение (33) верно для тех значений $m(\tau)$, при которых произошло насыщение фильтра. Строго говоря, при $E(\tau) = E(\tau_{\text{нл}})$ оно справедливо в окрестности максимума $m_{1\text{н}}(\tau_{\text{макс}})$, и лишь со временем область, в которой решение можно представить в виде (33), увеличивается. Однако, поскольку основная энергия после просветления фильтра сосредоточена в области, соответ-

вующей $m_{1n}(\tau_{\max})$, то формулой (33) практически можно пользоваться сразу после $E(\tau) > E(\tau_{\text{нл}})$. Она становится несправедливой лишь тогда, когда начинает сказываться насыщение активного вещества.

Для вычисления поля в режиме, когда сказывается насыщение разности населенностей активного вещества, воспользуемся результатами работы [13]. В этой работе показано, что, если на единичном интервале задано $\bar{m}_n(\tau)$, причем $B_2 \frac{L}{c} \int_{-1}^{\tau} \bar{m}_n(\tau') d\tau' \ll 1$ (это условие того, что разность населенностей активного вещества под действием $\bar{m}_n(\tau)$ не изменилась), то поле в последующие моменты времени будет описываться выражением

$$m(\tau') = \frac{(K_2 - 1) \bar{m}_n(\tau' - E(\tau') - 1)}{(K_2 - 1) B_2 \frac{L}{c} \int_{-1}^{\tau' - E(\tau') - 1} \bar{m}_n(\tau'') d\tau'' + B_2 \frac{L}{c} \int_{-1}^0 \bar{m}_n(\tau'') d\tau'' + (K_2 - 1) K_2^{-E(\tau') - 1}}. \quad (34)$$

Здесь $\tau' = \tau - \tau_{\text{нл}}^{-1}$.

В качестве $\bar{m}_n(\tau)$ в (34) необходимо подставить выражение для $m(\tau)$ из (33), взятое на единичном интервале времени τ ($\tau_{\text{нл}} - 1 < \tau < \tau_{\text{нл}}$), на котором еще не сказывается насыщение активного вещества. Когда $E(\tau') + 1$ становится достаточно большой величиной

$$E(\tau') + 1 \gg \ln \left\{ (K_2 - 1) / m_{1n} B_2 \frac{L}{c} \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^0 [m_{1n}(\tau'') / m_{1n}(\tau_{\max})]^{\ln K_2 / \ln K_1 K_2} d\tau'' \right\} / \ln K_2, \quad (35)$$

происходит насыщение активного вещества. При этом выражение для $m(\tau')$ примет вид

$$m(\tau') = \{ (K_2 - 1) [m_{1n}(\tau' - E(\tau') - 1)]^{\ln K_2 / \ln(K_1 K_2)} \} \times \\ \times \left\{ (K_2 - 1) B_2 \frac{L}{c} \int_{-1}^{\tau' - E(\tau') - 1} [m_{1n}(\tau'')]^{\ln K_2 / \ln(K_1 K_2)} + B_2 \frac{L}{c} \int_{-1}^0 [m_{1n}(\tau'')]^{\ln K_2 / \ln(K_1 K_2)} d\tau'' \right\}^{-1}. \quad (36)$$

Отметим, что, если $m_{1n}(\tau') \sim (K_1 K_2)^{\tau}$, то какая-либо модуляция после насыщения активного вещества отсутствует. Из этого сразу видно, что, если в линейном режиме (см. [10]) возбуждалась лишь одна мода, то модуляции будут отсутствовать. Можно написать два условия, при которых формируется последовательность коротких импульсов:

а) необходимо, чтобы в линейном режиме к моменту времени t_s возбуждалась более чем одна мода; тогда в интенсивности излучения будут присутствовать модуляции, которые в процессе просветления нелинейного фильтра могут обостриться;

$$б) \quad \gamma^2 \equiv (\ln K_2 / \ln K_1 K_2) \gg 1. \quad (37)$$

Величина γ приближенно показывает, во сколько раз обостряется начальная модуляция интенсивности поля после просветления нелинейного фильтра.

При малом превышении порога, когда в линейном режиме заметную роль играет лишь две моды, можно из (33) и [10] получить следующее выражение для длительности импульса излучения после насыщения фильтра:

$$t_{\text{имп}} \simeq \gamma^{-1} L/c \exp at_3, \quad (38)$$

$$\text{где } a = - \frac{B_1 l_1}{2L} \bar{n}_1 \left(\frac{\pi c}{L} \right)^2 T_2^2.$$

Воспользовавшись [10], можно записать*

$$t_{\text{имп}} \simeq \frac{L}{c} (2\pi\delta\Delta)^{1/4} \left[(-B_1 \bar{n}_1 l_1) (\ln K_1^{-1}) \frac{c}{L} T_1 \right]^{-1/4} \exp a \sqrt{\frac{2T_1 L \delta}{\Delta}}. \quad (39)$$

Здесь $\Delta = B_2 \bar{n}_2 l_2 + B_1 \bar{n}_1 l_1$, величина Δ характеризует превышение порога генерации;

$$\delta \simeq \ln \left[\frac{\Delta^{1/2} T_1^{1/2} B_2 l_2 L^{1/2} \alpha}{2\varepsilon (2\pi)^{1/2} T_1^\Phi B_2 n_2^0 l_2 B_1 l_1} \right],$$

n_2^0 — число активных молекул в 1 см³, $\alpha \ll 1$, $\varepsilon \simeq 10^{-12}$ [10]. При обычных значениях параметров $\delta \simeq 10 \div 20$. Из (39) видно, что существует оптимальное значение Δ , при котором $t_{\text{имп}}$ достигает минимума:

$$\Delta_{\text{opt}} \simeq 8a^2 T_1 L \delta,$$

$$t_{\text{имп min}} \simeq 7,3 \sqrt{\delta} T_2.$$

Таким образом, даже минимальная длительность импульса значительно превышает T_2 .

Рассмотрим в качестве примера также такие случаи, когда в линейном режиме возбуждаются четыре моды. Форма начального поля зависит от соотношения фаз отдельных мод. Если $\varphi_0 = \varphi_{-1} = \pi/2$; $\varphi_1 = \varphi_{-2} = 0$,

$$m_{1n}(\tau) = \alpha (B_1 T_1^\Phi l_1 / l_2)^{-1} (K_1 K_2)^{\tau+1} [1 + 0,7(\cos 2\pi\tau + 0,4 \cos 6\pi\tau)]. \quad (40)$$

При $\varphi_0 = \varphi_{-1} = \pi$; $\varphi_1 = \varphi_{-2} = 0$

$$m_{1n}(\tau) = \alpha (B_1 T_1^\Phi l_1 / l_2)^{-1} (K_1 K_2)^{\tau+1} [1 - 0,9(\cos 2\pi\tau + \cos 4\pi\tau) + 0,7(\cos 2\pi\tau + 0,4 \cos 6\pi\tau)]. \quad (41)$$

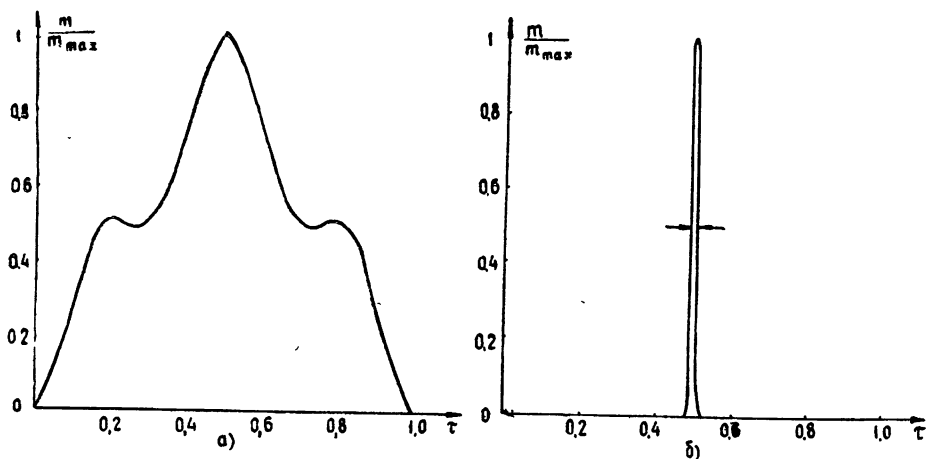


Рис. 3. $\varphi_0 = \varphi_{-1} = \pi/2$; $\varphi_1 = \varphi_{-2} = 0$:

а) форма начального поля; б) форма импульсов излучения после просветления нелинейного фильтра. Форма импульсов излучения после насыщения активного вещества мало отличается от формы импульсов после просветления нелинейного фильтра.

* Формула для t_3 используется нами $t_3 = \sqrt{2T_1 L \delta \Delta^{-1}}$ несколько отличается от формулы для оценки t_3 , приведенной в [10], так как мы учли конечность T_1^Φ .

Графики этих функций, форма импульсов излучения после просветления нелинейного фильтра и после насыщения активного вещества представлены на рис. 3 и 4 (соответственно а), б) и в)). Оценки при указанных выше параметрах показывают, что ширина импульса излучения составляет $T_{\text{имп}} \sim 6 \cdot 10^{-11}$ сек.

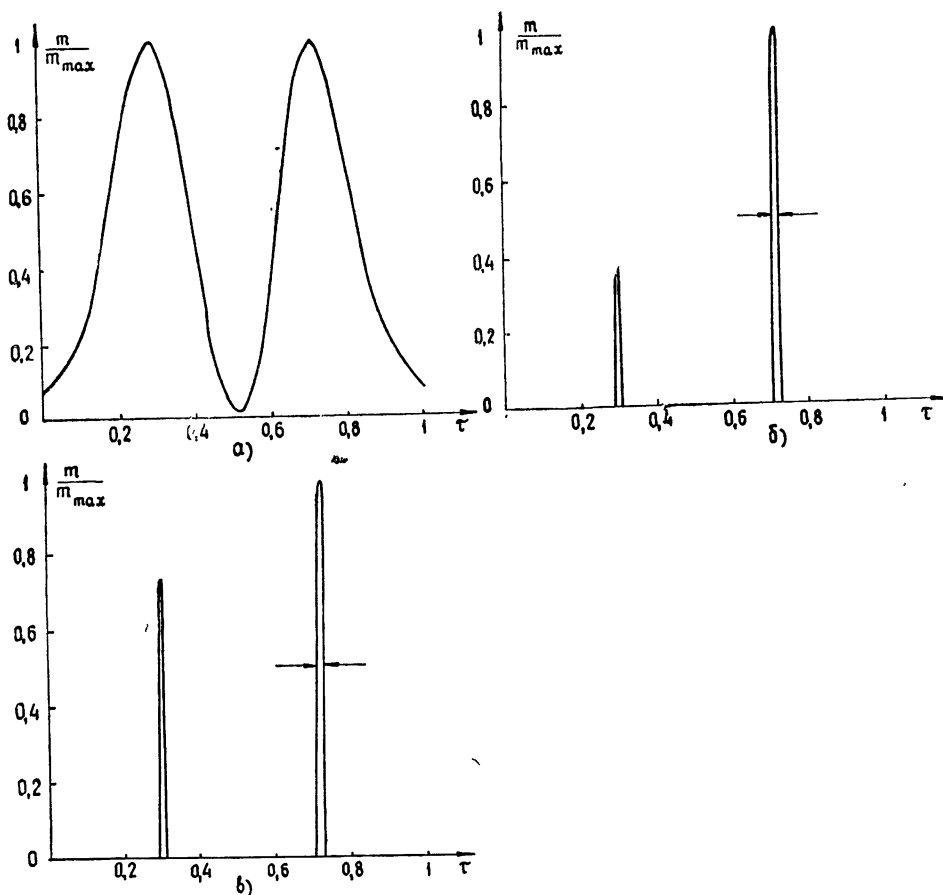


Рис. 4. $\varphi_0 = \varphi_{-1} = \pi$; $\varphi_1 = \varphi_{-2} = 0$:

а) форма начального поля; б) форма импульсов излучения после просветления нелинейного фильтра; в) форма импульсов излучения после насыщения активного вещества.

В заключение сделаем ряд замечаний.

а) Выше предполагалось, что потери в стенках резонатора отсутствуют (идеальный резонатор). Как показано в [13], если резонатор не идеальный, но достаточно «хороший»: $1 - r \ll 1$ (r — произведение коэффициентов отражения от зеркал), то результаты для него можно получить, умножая интенсивность излучения идеального резонатора (34) на множитель $\exp(-rE(\tau))$. В этой же работе проводятся оценки длительности процесса и максимальной мощности излучения, справедливые после просветления нелинейного фильтра.

б) Как видно из формул (33) и (34), в процессе формирования пиков в безынерционном фильтре происходит сильное искажение начальной формы сигнала. Если до начала просветления фильтра отношение интенсивностей сигналов в некоторые два момента времени было η то после насыщения активного вещества эта величина достигает примерно значения $\eta^{1/\ln(K_2/K_1)}$. Если $\eta_1 = 0,99$, то для приве-

веденных выше параметров $\gamma_{\ln K_2/\ln(K_1K_2)} \simeq 10^{-5}$. Поэтому в конце процесса будет излучаться, как правило, один импульс за период L/c (напомним, что речь здесь идет об ОКГ бегущей волны), поскольку достаточно иметь небольшую разницу в амплитудах импульсов начального сигнала, чтобы в конце процесса был бы заметен лишь один импульс (см. рис. 3). Лишь тогда, когда в начальном импульсе интенсивности максимумов нескольких импульсов отличаются не больше чем в $\ln K_1 K_2 / \ln K_2$ раз, они проявят себя в конце процесса (рис. 4).

в) Процесс формирования коротких импульсов с помощью просветляющихся фильтров обычно называют процессом самосинхронизации мод. В это название вкладывается следующий смысл. Считают, что до того, как начала сказываться нелинейность фильтра, в системе существовало достаточно много мод. Нелинейность фильтра обеспечивает связь между этими модами, которая приводит к тому, что максимумы всех мод во времени достигаются одновременно. Тогда, естественно, излучение приобретает вид коротких импульсов.

Из приведенного выше рассмотрения ясно, что в действительности нелинейность фильтра играет весьма существенную роль в генерации мод. Действительно, в нашем примере вначале в системе существовало всего четыре моды, затем сформировалась последовательность коротких импульсов. Эту последовательность можно, конечно, разложить по модам линейного резонатора; спектр этих мод будет весьма широким. Таким образом, по крайней мере в нашем примере, роль нелинейности состоит не только в фазировании мод (хотя этот эффект также играет существенную роль), но и в генерации новых мод.

г) Мы предполагали, что ширина пучка постоянна по длине резонатора. Если на фильтре или на активном веществе пучок фокусируется, то в формуле (7) и далее необходимо заменить β на $\beta s_2/s_1$, где $s_{1,2}$ — площади поперечных сечений пучка на фильтре и активном веществе. Отсюда видно, что в качестве фильтра можно использовать и вещество, не обладающее очень большим коэффициентом Эйнштейна, если на это вещество сфокусировать излучение [15]. В частности, в качестве инерционного фильтра может быть использован тот же материал, что и в активном элементе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Кузнецова, В. И. Малышев, А. С. Маркин, ЖЭТФ, 52, 438 (1967).
2. Т. И. Кузнецова, Препринт ФИАН, № 25 (1967).
3. A. Szabo, R. A. Stein, J. Appl. Phys., 36, 1562 (1965).
4. Hans W. Mocker, R. J. Collins, Appl. Phys. Lett., 7, 270 (1965).
5. A. J. De Maria, D. A. Stetser, H. Heynan, Appl. Phys. Lett., 8, 174 (1966).
6. D. A. Stetser, A. J. De Maria, Appl. Phys. Lett., 9, 118 (1966).
7. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).
8. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, 70 (1965).
9. Л. М. Магдич, ЖЭТФ, 51, 18 (1966).
10. М. М. Сушик, Г. И. Фрейсман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, 319 (1966).
11. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 491 (1964).
12. L. M. Frantz, J. S. Nodvik, J. Appl. Phys., 34, 2346 (1963).
13. Г. Л. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 503 (1968).
14. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1959.
15. В. И. Бородулин Оптика и спектроскопия, 20, вып. 4 (1966).

NONSTATIONARY PROCESSES IN TRAVELING WAVE LASER WITH SATURATION FILTER

G. L. Gurevich, Yu. A. Otmakhov

The authors propose the theory of nonstationary processes in a traveling wave laser with saturation filter. Consideration is made without field expansion over self modes of the resonator. Simple relations are obtained giving allowance for determination of the amplitude and pulse shape of the field with taking into account the filter nonlinearity and active material. It is shown that the considered system may operate as an amplifier with a rather small distortion and very great amplification factor under definite conditions. The conditions are found under which the generation of periodic succession of short pulses (locking mode regime) may exist. The shape of these pulses is estimated.

УДК 621 385.832 : 539

ТАЛЛИЕВАЯ АТОМНО-ЛУЧЕВАЯ ТРУБКА

В. В. Строганов

Описывается экспериментальная таллиевая атомно-лучевая трубка и приводятся результаты по наблюдению резонансных линий сверхтонкой структуры основного состояния $6^2P_{1/2}$ атомов Tl^{205} .

Линия $(1,0) \rightarrow (0,0)$ сверхтонкой структуры основного состояния $6^2P_{1/2}$ атомов Tl^{205} может быть использована для построения первичного атомного эталона частоты, обладающего высокой абсолютной точностью $[1-3]$.

Сверхтонкая структура атомов таллия состоит всего из четырех уровней $(1, \pm 1)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$, частота ее единственного σ -перехода $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$ равна $21310,834 \text{ Мгц}$ и слабо зависит от внешних магнитных полей: $\nu = \nu_0 + 20,4 H_0^2 (гц)$. Таким образом, Tl^{205} имеет важные для точных измерений частоты преимущества по сравнению с Cs^{133} , у которого в сверхтонкой структуре имеется 16 уровней, а частота основного перехода зависит от частоты, как $\nu = \nu_0 + 427 H_0^2 (гц)$, где $\nu_0 = 9192,631 \text{ Мгц}$.

Применительно к задаче построения таллиевого атомного эталона была создана таллиевая атомно-лучевая трубка и разработана радиоаппаратура для наблюдения магнитного резонанса. Принцип работы таллиевой атомно-лучевой трубки заключается в следующем. В камере с высоким вакуумом из нагреваемого источника испускается пучок атомов таллия, последний расщепляется в сортирующем магните «А» на две части соответственно состояниям атомов. Магнит «В» отклоняет на детектор пучка только атомы, совершившие квантовый переход в области Рамзея под воздействием высокочастотного поля, частота которого близка частоте перехода $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$.

Конструкция таллиевой АЛТ имеет несколько особенностей. Из-за сравнительно слабого отклонения атомов таллия в неоднородных магнитных полях для удовлетворительного расщепления пучка в плоскости детектора использовались сортирующие магниты с напряженностью магнитного поля $H = 12000 \text{ э}$ в зазоре 3 мм . Высокий потенциал ионизации атомов Tl , равный $6,11 \text{ эв}$, обусловил использование в качестве детектора ионизирующей нити из оксидированного вольфрама. Эффективность такого детектора не менее $40-60\%$ при температуре нити 900°C , а постоянная времени, определяемая временем нахождения атомов на нити, достаточно мала и позволяет модулировать интенсивность пучка с частотой 20 гц .

Для индуцирования атомных переходов использован U -обратный резонатор с добротностью $Q = 3000$ и расстоянием между концами $L = 100 \text{ см}$. Резонатор снаружи закрыт магнитным экраном, внутри которого вдоль резонатора расположены четыре проводника, служащие для создания по оси трубки постоянного однородного поля H_0 . Переключение тока в проводниках позволяет наблюдать π - или σ -переходы.

На резонатор поступает СВЧ сигнал от клистрона, имеющего фазовую стабилизацию частоты (рис. 1). Магнитный резонанс для переходов $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$ с центральной частотой $21310,834 \text{ МГц}$ наблюдался при параллельном направлении векторов постоянного поля H_0 и высокочастотного поля H_{\sim} в резонаторе. Ширина резонансной кривой

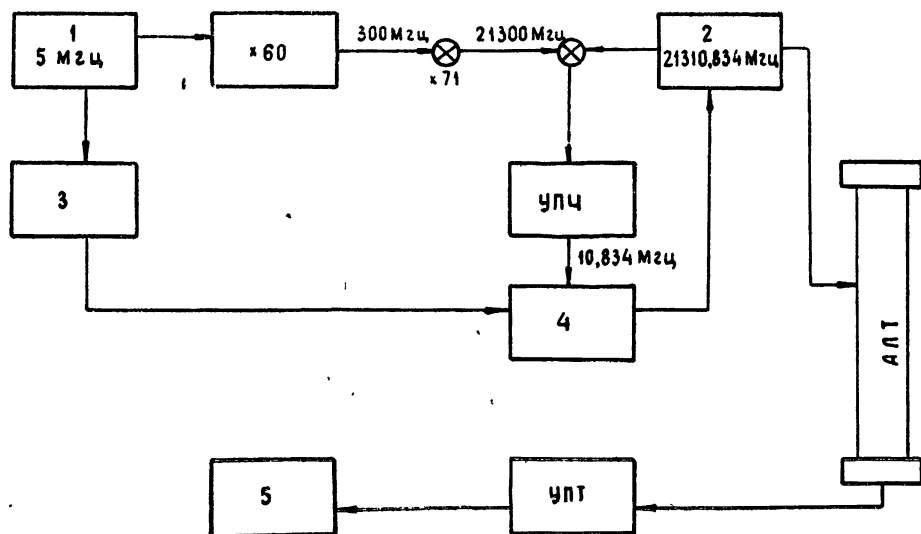


Рис. 1. Электронная схема для наблюдения резонансных линий сверхтонкой структуры основного состояния атомов таллия:

1) кварцевый генератор; 2) клистрон; 3) синтезатор; 4) фазовый детектор; 5) самописец.

составила 40 кГц , а отношение сигнала к шуму— 80 кГц . С увеличением мощности СВЧ поля достигалось насыщение линии.

При выборе направления H_0 перпендикулярно направлению H_{\sim} также наблюдался резонанс для переходов $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$. Центральная частота резонанса, линейно зависящая от величины напряженности поля, была использована для калибровки поля H_0 . На рис. 2 приведена измеренная зависимость разности резонансных частот линий $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ и $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$ от величины тока в катушке, создающей поле. Там же для сравнения показано изменение резонансной частоты низкочастотной линии $(1, 0) \rightarrow (1, -1)$, для наблюдения которой на трубку между впаянными концами резонатора было намотано 6 катушек длиной $l = 5 \text{ см}$ каждая. На катушку поочередно подавался сигнал со звукового генератора. При этом величина резонансного сигнала равнялась 3 вольтам по шкале электрометрического усилителя со входным сопротивлением 10^{11} ом , а ширина резонансной кривой составляла 7 кГц . Как видно из рис. 2, при нулевом токе резонансная частота линии $(1, 0) \rightarrow (1, -1)$ равна $12,5 \text{ кГц}$. Так как для нее

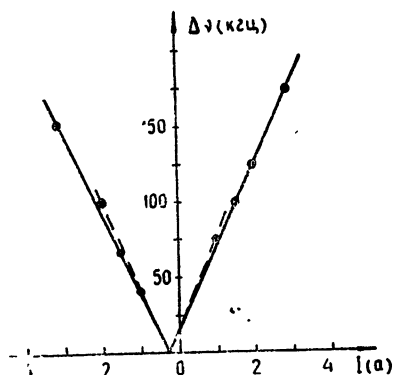


Рис. 2. Зависимость разности резонансных частот линий $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ и $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$ от величины поля H_0 —сплошная линия. Зависимость резонансной частоты линии $(1, 0) \rightarrow (1, -1)$ от величины поля H_0 —штрихованная линия.

на измеренная зависимость разности резонансных частот линий $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ и $(1, 0) \rightarrow (0, 0)$ от величины тока в катушке, создающей поле. Там же для сравнения показано изменение резонансной частоты низкочастотной линии $(1, 0) \rightarrow (1, -1)$, для наблюдения которой на трубку между впаянными концами резонатора было намотано 6 катушек длиной $l = 5 \text{ см}$ каждая. На катушку поочередно подавался сигнал со звукового генератора. При этом величина резонансного сигнала равнялась 3 вольтам по шкале электрометрического усилителя со входным сопротивлением 10^{11} ом , а ширина резонансной кривой составляла 7 кГц . Как видно из рис. 2, при нулевом токе резонансная частота линии $(1, 0) \rightarrow (1, -1)$ равна $12,5 \text{ кГц}$. Так как для нее

$\nu = 467 H_0$ кГц, то величина остаточного поля составляет примерно 0,027 э. Неоднородность поля H_0 вдоль оси трубки, полученная из измерений остаточного поля для шести участков, расположенных между концами резонатора, $\Delta H_0 = 0,005$ э, что дает ошибку в определении центра линии $\Delta \nu_H = 2 \cdot 10^{-1} H_0$ гц.

Структура Рамзея линии (1,0)—(0,0) показана на рис. 3. Ширина центрального максимума на уровне 0,5 равна $\Delta \nu_0 = 120$ гц, следовательно, добротность линии $Q = 1,7 \cdot 10^8$. Несимметрия структуры вызвана наличием фазового сдвига между векторами H_{ω} в областях индуцирования переходов. Этот фазовый сдвиг, определенный способом, описанным в [4], и равный $\delta \Phi = 0,08^\circ$, должен привести к сдвигу частоты центрального пика на величину $\Delta \nu_\Phi = (\delta \Phi / 180) \Delta \nu_0 \approx 0,045$ гц. Отношение величины пика к величине pedestala Раби составляет около 0,25.

В процессе работы были замечены уходы резонансной частоты резонатора на величину 5 Мгц. Такая расстройка резонатора может вызвать сдвиг частоты ν_0 на величину, меньшую чем $4 \cdot 10^{-5}$ гц. Однако резонатор можно повторно настроить на нужную частоту с точностью до 100 кГц. Центральная частота перехода (1,0)—(0,0), измеренная с точностью ± 100 гц, равна $\nu = 21310834 \pm 0,1$ кГц и согласуется с данными, опубликованными в [2,3].

Рис. 3. Резонансная кривая для перехода (1,0)—(0,0), полученная методом отдельных осциллирующих полей.

Частота центрального пика $\nu_0 = 21310834 \pm 0,1$ кГц.

В заключение автор благодарит Л. Л. Мясникова и В. С. Насонова за помощь, оказанную ими в работе.

ЛИТЕРАТУРА

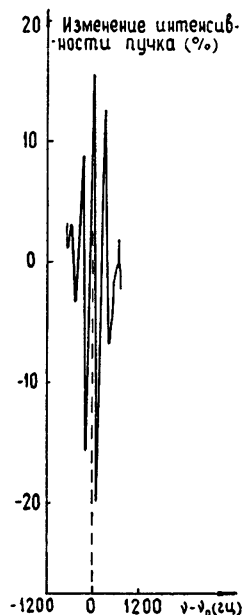
1. Н. Ф. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
2. R. E. Beehler, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, IM-15, № 1, 392 (1966).
3. J. A. Bonanomy, IRE Trans. Instrumentation, I-11, № 3, 212 (1962).
4. J. Holloway, W. Mainberger, F. H. Reder, G. M. R. Winkler, L. Essen, J. V. L. Parry, Proc. IRE, № 10, 1730 (1959).

Поступила в редакцию
28 апреля 1968 г.

TALLIUM ATOM-BEAM TUBE

V. V. Stroganov

An experimental tellurium atom-beam tube is described. The data on observing the superfine structure of the main state $6^2P_{1/2}$ of Tl^{205} atoms and Ramsey line structure (1,0)—(0,0) are presented.



УДК 621 378 33

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА НА ФОРМАЛЬДЕГИДЕ

А. Ф. Крупнов, М. Я. Овчаров, В. А. Скворцов, А. А. Ульянов,
А. П. Шеронов

Излагаются результаты исследования частотных характеристик молекулярного генератора на формальдегиде [1]; экспериментальная часть исследований была выполнена в 1965—1966 гг.

1. ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА НА H_2CO ОТ ПАРАМЕТРОВ

Для проведения исследований были построены два молекулярных генератора на переходе $1_{01}—0_{00}$ формальдегида H_2CO (длина волны $\lambda \sim 4,1$ мм), которые могли работать в однолучковом и двухлучковом режимах; общий вид собранного генератора без вакуумной системы приведен на рис. 1. Резонаторы молекулярных генераторов могли на-

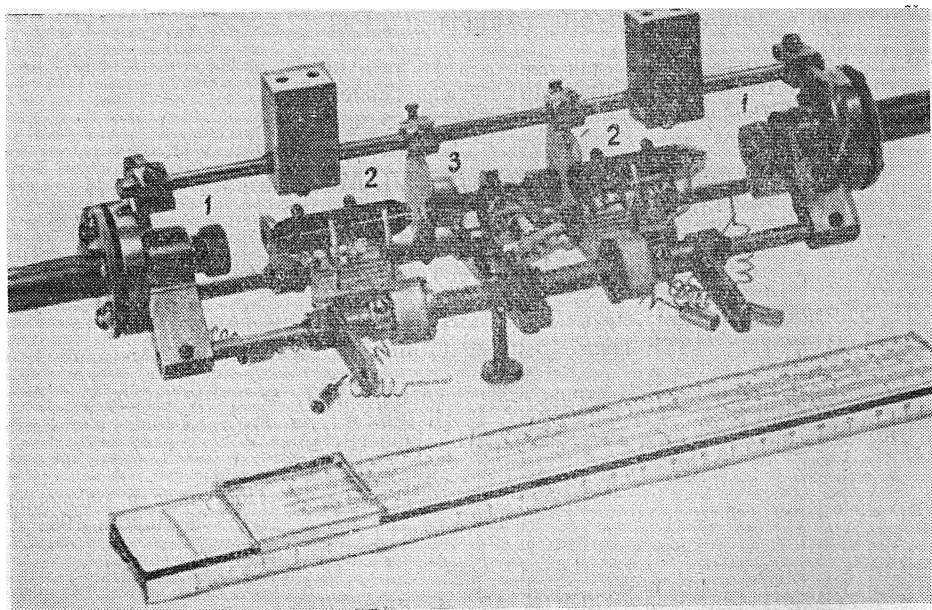


Рис. 1. Двухлучковый молекулярный генератор на формальдегиде без вакуумной системы:

1 — охлаждаемые до $-60^\circ C$ источники пучка; 2 — квадрупольные сортирующие системы; 3 — резонатор на тип колебания E_{010} .

страиваться механически штырем подстройки и были термостабилизированы с точностью $0,01^\circ$. (Подробнее об устройстве молекулярных генераторов на формальдегиде, см., например, в [2].) Методика исследо-

вания частотных характеристик генераторов была обычной (см., например, [3]). Колебания двух генераторов, развязанных ферритовыми вентилями и волноводным тройником, подавались на один супергетеродинный приемник, и разностная частота после детектора УПЧ измерялась цифровым частотомером. Параметры одного, опорного, генератора поддерживались постоянными, а параметры второго могли изменяться для снятия частотных зависимостей. Частота клистронного гетеродина 4-миллиметрового диапазона была стабилизирована схемой фазовой автоподстройки (ФАП) по кварцевому генератору.

Для исследования свойств генератора на формальдегиде как стандарта частоты мы определяли зависимость частоты его колебаний от основных влияющих на частоту параметров—величины сортирующего напряжения и интенсивности молекулярного пучка (при различных настройках резонатора). Частота опорного молекулярного генератора при этом поддерживалась постоянной за время измерения с точностью 10—15 герц. Поэтому характеристики снимались при относительно больших расстройках резонатора с тем, чтобы измеряемое отклонение частоты было существенно больше 10—15 герц. Зависимость частоты от интенсивности пучка была получена при сортирующем напряжении 13 кв. Мерой интенсивности пучка служило давление в рабочем объеме молекулярного генератора.

Полученные характеристики, приведенные на рис. 2 для одно- и двухпучкового режима работы генератора, сходны с аналогичными

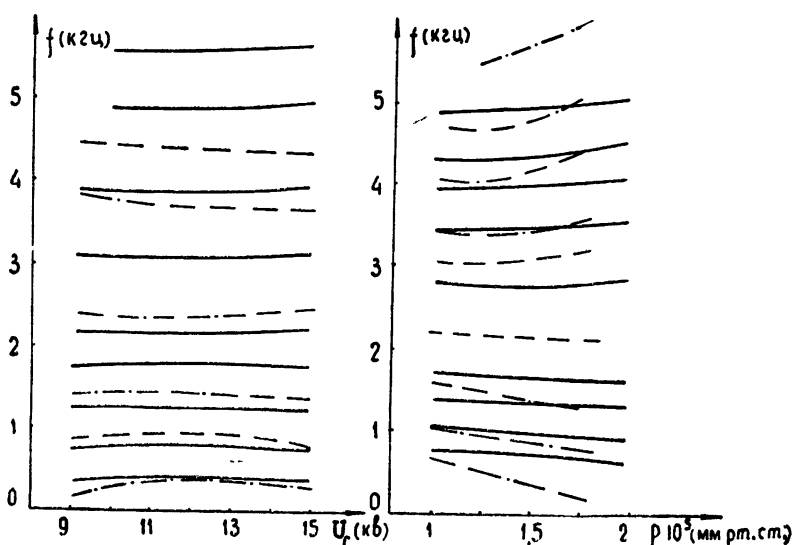


Рис. 2. Зависимости частоты колебаний генератора на формальдегиде от параметров:

— двухпучковый, - - - однопучковый режим.

кривыми для аммиачных генераторов на линиях $J = 3$, $K = 2$, $N^{14}H_3$ или $J = 3$, $K = 3$, $N^{15}H_3$. В частности, отсутствуют сложные зависимости, характерные для молекулярного генератора на линии с неразрешенной тонкой структурой (как $J = 3$, $K = 3$, $N^{14}H_3$) [3].

Применение двухпучковой схемы уменьшает зависимость частоты колебаний от параметров благодаря компенсации эффекта неравномерности излучения молекул в резонаторе. Однако нужно отметить большую, нежели в случае аммиака, трудность балансирования интенсивности пучков, связанную с методикой получения рабочего вещества

термическим разложением полимера формальдегида. Процесс разложения недостаточно стабилен, а изменение интенсивности пучка изменением подогрева колбы с полимером инерционно. Ввиду этих трудностей все последующие характеристики снимались в однопучковом режиме. Поэтому, создавая представление об общем виде характеристик, они определяют лишь верхнюю границу нестабильности частоты генератора на формальдегиде.

Особенностями перехода $1_{01} - 0_{00}$ H_2CO являются отсутствие тонкой структуры и наличие максимума штарк-энергии верхнего уровня при легко достижимых величинах полей в сортирующей системе ($\sim 150 \text{ кв. см}^{-1}$). В соответствии с этим ожидалась меньшая, чем в случае генератора на аммиаке [1, 2], зависимость частоты от параметров, в особенности от напряжения на сортирующей системе. В самом деле, экспериментально полученная зависимость частоты от сортирующего напряжения имеет плоский участок, начиная примерно с 13 кв. При настройке резонатора на максимум мощности частота колебаний оставалась неизменной с точностью $\pm 10 \text{ гц}$ при изменении сортирующего напряжения от 12 до 14 кв.

Для сравнения нами были сняты характеристики однопучковых генераторов на H_2CO на переходе $1_{01} - 0_{00}$ и $J = 3, K = 3, N^{14}\text{H}_3$ по такой же методике. Генератор на H_2CO имел квадрупольную, а на NH_3 — шестипольсную сортирующую систему. В качестве источника пучка использовался одиночный капилляр. Генерация на H_2CO возникла при напряжении на сортирующей системе 5 кв, а на NH_3 — при напряжении 10 кв. Генерация на H_2CO наблюдалась при давлении $8 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-5} \text{ мм рт. ст.}$, на NH_3 — при давлении $4 \cdot 10^{-6} - 8 \cdot 10^{-5} \text{ мм рт. ст.}$, а максимум мощности достигался соответственно при $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ мм рт. ст.}$ и $2 \cdot 10^{-5} \text{ мм рт. ст.}$

Характеристики аммиачного генератора и генератора на формальдегиде совмещались в точке, соответствующей настройке резонатора на максимум мощности, а абсолютное значение отклонения частоты аммиачного генератора умножалось на 3 (в соответствии с различием

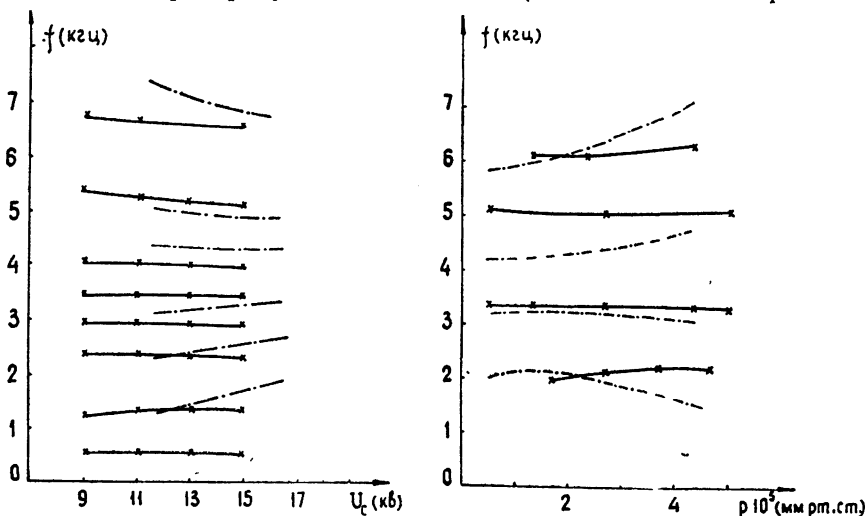


Рис. 3. Зависимости частоты колебаний генераторов на формальдегиде и аммиаке от параметров:
 — H_2CO , — — — NH_3 .

частот генераторов), чтобы сохранить относительную величину расстройки. Полученные семейства характеристик, приведенные на рис. 3,

показывают значительно меньшую зависимость частоты от параметров (особенно от сортирующего напряжения) для генератора на формальдегиде.

Нами исследовалась также воспроизводимость частоты обоих генераторов. В табл. 1 приведены среднеквадратичные вариации частоты при создании одного и того же давления в вакуумной камере (σ_p) и напряжения на сортирующей системе (σ_U).

Т а б л и ц а 1

	σ_p	σ_U
H ₂ CO	$3 \cdot 10^{-10}$	$7 \cdot 10^{-11}$
NH ₃	$2 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-10}$

Из табл. 1 видно, что воспроизводимость частоты по напряжению у формальдегида значительно выше. Несколько худшая воспроизводимость частоты по давлению обусловлена, по-видимому, указанными выше трудностями воспроизведения одной и той же интенсивности пучка.

2. ИЗМЕРЕНИЕ ЧАСТОТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ $1_{01} - 0_{00}$ H₂CO

Частота перехода $1_{01} - 0_{00}$ формальдегида ранее измерялась исследователями на спектроскопе с газовой ячейкой по относительно широкой спектральной линии с точностью порядка сотен килогерц. По данным [4], $\nu(1_{01} - 0_{00}) = 72838,14$ Мгц. Узость спектральной линии в пучковом молекулярном генераторе и настройка частоты автоколебаний генератора на центр спектральной линии позволили нам значительно повысить точность измерения частоты перехода. При измерениях частоты перехода резонатор молекулярного генератора настраивался на центр спектральной линии по максимуму мощности генератора, интенсивность молекулярного пучка также соответствовала максимальной мощности генерации, и напряжение на сортирующей системе равнялось 13 кв с точностью 1%.

При измерениях частота опорного кварцевого генератора поддерживалась равной 1 Мгц путем сравнения с сигналом образцовой частоты, передающимся по радио. Частота стабилизированного гетеродинного клистрона равнялась 72 810-й гармонике частоты кварцевого генератора. Колебания настроенного молекулярного генератора подавались на смеситель, куда поступали также колебания гетеродина. Разностная частота молекулярного генератора и гетеродина (~ 28 Мгц) после усиления измерялась счетным частотомером.

Измеренная таким образом частота перехода равна (по шкале UT-2, 1966 г.)

$$\nu(1_{01} - 0_{00}) = 72\,838\,338\,860 \text{ гц} \quad (1)$$

со среднеквадратичной ошибкой 290 гц*. При определении суммарной ошибки, кроме приведенных в табл. 1 среднеквадратичных вариаций частоты в зависимости от давления и сортирующего напряжения, учитывалась среднеквадратичная вариация частоты, связанная с расстройкой резонатора, $\sigma_f = 3,44 \cdot 10^{-9}$, неточность определения действи-

* Приведенное значение усреднено по нескольким десяткам измерений.

тельного значения частоты $\sigma_n = 2 \cdot 10^{-9}$ и погрешность измерения $\sigma_u = 7 \cdot 10^{-10}$.

Полученное значение частоты перехода позволяет уточнить вращательные постоянные формальдегида. Вращательная энергия уровня J_{mn} основного колебательного состояния формальдегида с учетом центробежного возмущения выражается в единицах частоты как [5, 8]

$$W(J_{mn}) = \frac{1}{2} (A_0 + C_0) J(J+1) + \frac{1}{2} (A_0 - C_0) E_{mn}(x) + \\ + \frac{1}{4} \sum_a \tau_{aaaa} P_a^4 + \frac{1}{4} \sum_{a\beta} \tau_{a\alpha\beta\beta} (P_a^2 P_\beta^2 + P_\beta^2 P_a^2) + \\ + \frac{1}{2} \tau_{baba} (P_b^2 P_a^2 + P_a^2 P_b^2), \quad (2)$$

где A_0, B_0, C_0 — вращательные постоянные; a, b, c — оси, связанные с молекулой; J — вращательное квантовое число;

$$E_{mn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{для уровня } 0_{00} \\ x - 1 & \text{для уровня } 1_{01} \end{cases} \quad (3)$$

(величина $E_{mn}(x)$ протабулирована в [8]),

$$x = \frac{2B_0 - A_0 - C_0}{A_0 - C_0} \quad (4)$$

— параметр асимметрии Рэя; τ — компоненты тензора, характеризующего центробежное возмущение; P_q^2 — квадрат момента импульса по оси q , равный

$$P_q^2 \simeq \frac{\partial W^0(J_{mn})}{\partial Q}, \quad (5)$$

Q — соответствующая вращательная постоянная.

Для перехода $1_{01} - 0_{00}$ из (2) — (5) получим

$$\nu(1_{01} - 0_{00}) = B_0 + C_0 + \frac{1}{4} (\tau_{bbbb} + 2\tau_{bbcc} + \tau_{cccc}). \quad (6)$$

Значения компонент тензора τ следующие: $\tau_{bbbb} = -0,40331 \text{ МГц}$, $\tau_{bbcc} = -0,29166 \text{ МГц}$; $\tau_{cccc} = -0,23114 \text{ МГц}$ [6]. К сожалению, в [6] не указана точность, с которой определены указанные величины. Однако в [7] с помощью этих констант (по переходу $1_{10} - 1_{11}$) величина

$$B_0 - C_0 = 4 \, 832,13 \text{ МГц} \quad (7)$$

определена с точностью $\pm 0,01 \text{ МГц}$, что дает примерное представление о возможной ошибке.

Таким образом, из наших измерений

$$B_0 + C_0 = 72 \, 838,642 \text{ МГц}, \quad (8)$$

комбинируя (7) и (8), найдем

$$B_0 = 38 \, 835,38 \text{ МГц}, \\ C_0 = 34 \, 003,26 \text{ МГц}. \quad (9)$$

3. НАСТРОЙКА МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА НА H_2CO

1. Частота молекулярного генератора [3]

$$\nu = \nu_L \left[1 - \frac{Q_p}{Q_L} \frac{\nu_p - \nu_L}{\nu_L} G(U, \gamma_0) + \sum_i \Delta_i(U, \gamma_0) \right], \quad (10)$$

где ν_L , ν_p , Q_L , Q_p — частота и добротность линии и резонатора соответственно, $G(U, \gamma_0)$ и $\Delta_i(U, \gamma_0)$ — функции сортирующего напряжения и параметра насыщения γ_0 , т. е. мощности генерации. Молекулярный генератор обычно настраивается на исчезновение зависимости частоты от какого-либо параметра; при этом используется модуляция добротности линии Q_L или $G(U, \gamma_0)$.

Нами исследовались возможности настройки резонатора молекулярного генератора на H_2CO с помощью модуляции добротности спектральной линии магнитным полем, а также с помощью модуляции параметра возбуждения, т. е. $G(U, \gamma_0)$, переориентацией молекул перед резонатором*.

2. Переходы с переориентацией молекул типа $\Delta J = 0$, $|\Delta M| = 1$ использовались в радиоспектроскопии методом электрического резонанса [16]. В молекулярном генераторе на формальдегиде в отсортированном пучке (на верхнем уровне $J = 1$) молекулы могут иметь магнитное квантовое число (проекцию J на выбранную ось) $M = 0$ или $|M| = 1$. Лишь одна из этих групп может взаимодействовать с полем резонатора, т. е. излучать энергию [11]. Переориентация молекул в слабых полях перед резонатором может привести к изменению весов взаимодействующих и не взаимодействующих с полем СВЧ молекул, что при неизменной интенсивности пучка приведет к изменению параметра возбуждения. Подчеркнем, что в случае H_2CO этот эффект будет только при переходах с переориентацией, соответствующих $|\Delta M| = 1$, причем при различии интенсивности переходов с $M = +1$ и $M = -1$ та же зависимость будет и для линейного наклона магнитных характеристик (см. ниже).

Матричный элемент переходов с переориентацией $\Delta J = 0$, $|\Delta M| = 1$ равен в данном случае нулю в отсутствие электрического поля, т. е. для невозмущенных волновых функций. Электрическое поле, возмущая волновые функции, смешивает их и приводит к появлению матричного элемента перехода между подуровнями с различными M .

Найдем матричные элементы дипольного момента перехода между вырожденными в отсутствие поля подуровнями $M = 0$, $M = +1$ и $M = 0$, $M = -1$ уровня 1_{01} ($J = 1$, $K_{-1} = 0$, $K_{+1} = 1$; индекс K_{-1} для H_2CO весьма близко к числу K симметричного волчка). Выберем ось z по направлению постоянного поля \vec{E}_z , возмущающего уровни, и будем искать возмущенные волновые функции уровней в виде

$$\psi'(JM) = \sum_{ij} c(ij) \psi(ij), \quad (11)$$

где $\psi(ij)$ — невозмущенные волновые функции, а коэффициенты $c(ij)$ с точностью до величин второго порядка малости в нашем случае равны [12].

* О характеристиках настройки по давлению и сортирующему напряжению можно судить по рис. 2 и 3. Очевидно, что ввиду малой зависимости частоты от сортирующего напряжения настройка по сортирующему напряжению не эффективна.

$$c(ij) = \frac{\langle ij | \hat{V} | JM \rangle}{W^0(JM) - W^0(ij)} \quad \text{при } ij \neq JM, \quad (12)$$

$$c(JM) = 1.$$

Здесь W^0 — невозмущенные энергии уровней, а возмущение $V = -d_z E_z$ выражается через невозмущенные матричные элементы, соответствующие $\Delta M = 0$. Невозмущенные матричные элементы дипольного момента перехода $JKM \rightarrow J'K'M'$ равны

$$\langle JKM | \hat{d} | J'K'M' \rangle = d \Phi_{JJ'} \Phi_{JKJ'K'} \Phi_{JMJ'M'}, \quad (13)$$

где d — дипольный момент молекулы, Φ — матричные элементы направляющих косинусов. Значения матричных элементов Φ приведены в табл. 1 [13].

Найдем возмущенную волновую функцию уровня $J = 1, M = 0$. Отличными от нуля матричными элементами возмущения будут связывающие уровень $J = 1, M = 0$ с уровнями $J = 0, M = 0$ и $J = 2, M = 0$. Подставляя их значения и учитывая, что

$$\begin{aligned} W^0(1_{01}) - W^0(0_{00}) &= h(B_0 + C_0), \\ W^0(2_{02}) - W^0(1_{01}) &\simeq 2h(B_0 + C_0), \end{aligned} \quad (14)$$

где h — постоянная Планка, получим

$$\psi'(10) = \psi(10) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \psi(00) + \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \psi(20). \quad (15)$$

Состояние $J = 1, M = 1$ связано переходом $\Delta M = 0$ только с состоянием $J = 2, M = 1$. Его возмущенная волновая функция

$$\psi'(11) = \psi(11) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \psi(21). \quad (16)$$

Пользуясь определением матричного элемента и учитывая, что все матричные элементы в (15), (16) — действительные числа, получим для перехода $J = 1, M = 0 \leftrightarrow J = 1, M = 1$ следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \langle 10 | \hat{d}_y | 11 \rangle &= \int \psi'^*(10) \hat{d}_y \psi'(11) dv = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \langle 10 | \hat{d}_y | 21 \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \langle 00 | \hat{d}_y | 11 \rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{dE_-}{h(B_0 + C_0)} \langle 20 | \hat{d}_y | 11 \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Матричные элементы переходов $|\Delta J| = 1, |\Delta M| = 1$ также приведены в табл. 1 работы [13]. Окончательно, подставляя в (17) значения матричных элементов, получим

$$\langle 10 | \hat{d}_y | 11 \rangle = i \langle 10 | \hat{d}_x | 11 \rangle = \frac{3\sqrt{2}d^2E_-}{20h(B_0 + C_0)}, \quad (18)$$

что при $B_0 = C_0$ (линейная молекула) совпадает с [14]. Аналогично для перехода $J = 1, M = 0 \leftrightarrow J = 1, M = -1$

$$\langle 10 | \hat{d}_y | 1 - 1 \rangle = -i \langle 10 | \hat{d}_x | 1 - 1 \rangle = -\frac{3\sqrt{2}d^2E_-}{20h(B_0 + C_0)}. \quad (19)$$

Матричные элементы соответствующих переходов для аммиака могут быть получены аналогичным образом и имеют сходную структуру. Такие переходы будут индуцироваться переменным электрическим полем E_\perp , осциллирующим или вращающимся в плоскости xu , причем осциллирующее поле (которое можно представить как сумму двух полей половинной амплитуды, вращающихся в противоположные стороны) будет индуцировать оба типа переходов (18) и (19) в равной степени. Взаимодействие с вращающимся полем описывается возмущением вида

$$V = -\frac{1}{2} (d^+ E_\perp^- + d^- E_\perp^+), \quad (20)$$

где $d^\pm = d_x \pm id_y$; $E_\perp^\pm = E_{\perp x} \pm iE_{\perp y}$; члены $d^+ E_\perp^-$ и $d^- E_\perp^+$ в (20) соответствуют взаимодействию с полями, вращающимися в различные стороны [12]. Полученные из (18) и (19), матричные элементы d^\pm приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

	$\Delta J = 0$ $M = 0 \leftrightarrow +1$	$\Delta J = 0$ $M = 0 \leftrightarrow -1$
d^+	0	$-i \frac{3\sqrt{2}}{10} \frac{d^2E_-}{h(B_0 + C_0)}$
d^-	$-i \frac{3\sqrt{2}}{10} \frac{d^2E_+}{h(B_0 + C_0)}$	0

Из табл. 2 видно, что вращающееся в одну сторону поле индуцирует только один тип переходов (18) или (19) с переориентацией молекулы.

В наших опытах роль E_\perp могло играть поле рассеивания сортирующей системы, а поле, индуцирующее переходы, создавалось заряженным проволочным колечком, охватывающим отсортированный пучок перед резонатором [10]. Зависимость частоты генерации от напряжения на кольце для разных настроек резонатора приведена на рис. 4.

Вид характеристик рис. 4 показывает возможность настройки молекулярного генератора на H_2CO таким способом. Частота настроенного молекулярного генератора, по исследованиям на аммиачных генераторах, зависит от метода настройки, т. е. точки настройки различными методами не совпадают. В случае формальдегида также наблюдается это явление: точка настройки по давлению лежит на 1000 $гц$ ниже по частоте, чем точка настройки по переориентации, которая, в свою очередь, лежит ниже по частоте на 300 $гц$, нежели точка настройки по напряжению на сортирующей системе. (Положение точек

спределено с точностью ± 150 гц). Напомним, что абсолютная ширина спектральной линии втрое больше, чем для аммиака, и составляет примерно 15—20 кгц [1].

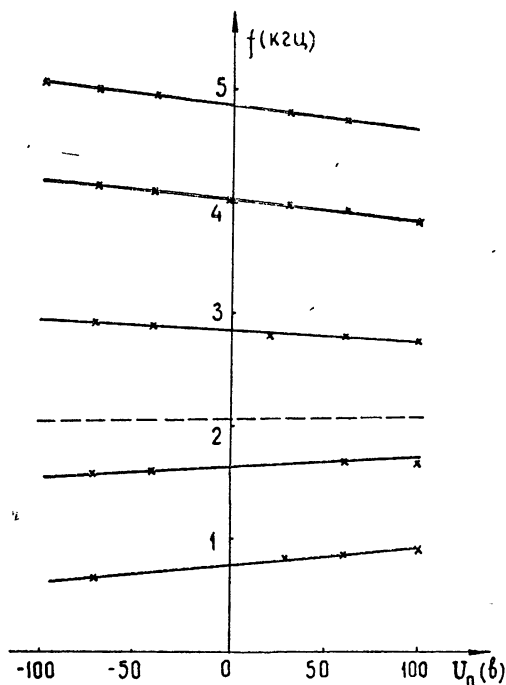


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний генератора на формальдегиде от переориентирующего напряжения U_n при различных настройках резонатора.

3. Возможность применения магнитной настройки в молекулярном генераторе на формальдегиде обусловлена тем фактом, что даже молекулы в $^1\Sigma$ состоянии благодаря вращению приобретают магнитный момент порядка ядерного магнетона [8] $\mu_J = \mu_n g_J J$. Поэтому даже при суммарном спине ядер, равном нулю, как в случае $1_{01} - 0_{00}$ H_2CO , молекула все же взаимодействует с магнитным полем. Определим величину этого взаимодействия. Зеемановская энергия

$$W_3 = -\mu_n g_J (JH) = \begin{cases} 0 & \text{для уровня } 0_{00} \\ -\mu_n g_J MH & \text{для уровня } 1_{01} \end{cases}, \quad (21)$$

где $\mu_n = 762,3$ гц \cdot гс $^{-1}$ — ядерный магнетон, M — проекция J на направление магнитного поля, H — магнитное поле, g_J — эффективный g -фактор в рассматриваемом вращательном состоянии; g_J выражается через компоненты g -тензора:

$$g_J = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{J(J+1)} \left[E_{mn}(x) - (x+1) \frac{dE_{mn}(x)}{dx} \right] \right\} g_{aa} + \\ + \frac{1}{J(J+1)} \frac{dE_{mn}(x)}{dx} g_{bb} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{J(J+1)} \left[E_{mn}(x) - (x-1) \frac{dE_{mn}(x)}{dx} \right] \right\} g_{cc}, \quad (22)$$

где $g_{aa} = -2,90$; $g_{bb} = -0,14$; $g_{cc} = -0,14$ [9, 19]. Пользуясь (3) и (22), для уровня 1_{01} получаем

$$g_J = \frac{1}{2} (g_{bb} + g_{cc}) = -0,14. \quad (23)$$

Для модуляции ширины линии магнитное поле прикладывалось, как обычно, перпендикулярно электрическому полю СВЧ в резонаторе, т. е. перпендикулярно оси резонатора, в котором возбуждалось колебание типа E_{010} . Выбирая ось z по направлению магнитного поля, т. е. характеризуя молекулы числом M —проекцией J на направление магнитного поля, получим из обычных правил отбора, что линия СВЧ перехода $1_{01} - 0_{00}$ H_2CO в резонаторе расщепляется магнитным полем на две зеемановские компоненты, которые соответствуют переходам $J = 1, M = 1 \rightarrow J = 0, M = 0$ и $J = 1, M = -1 \rightarrow J = 0, M = 0$, причем частоты их смещены на

$$\Delta\nu_3 = \pm 107 \text{ H гц}, \quad (24)$$

где H выражено в эрстедах. Эта зависимость намного слабее (относительное отклонение частоты примерно на порядок меньше), чем для аммиака, имеющего $g \sim 0,5$. Экспериментальные характеристики магнитной настройки, приведенные на рис. 5, подтверждают наши выводы.

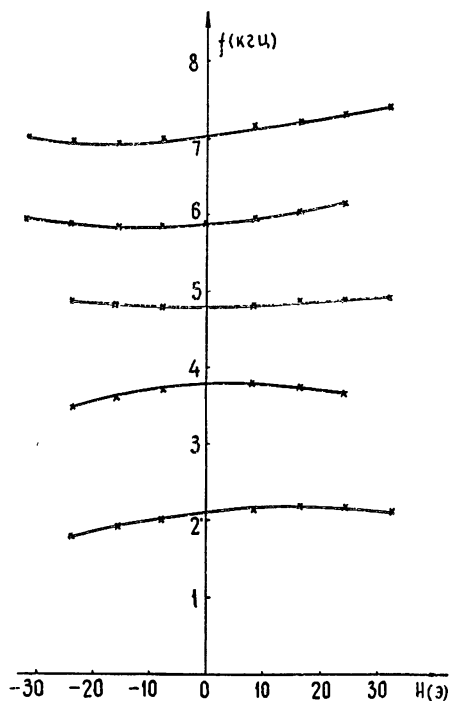


Рис. 5. Зависимость частоты колебаний генератора на формальдегиде от магнитного поля H , приложенного перпендикулярно резонатору при различных настройках резонатора.

Действительно, для модуляции добротности линии приходится применять поля до 30 эрстед, в то время как для аммиака достаточны поля порядка единиц эрстед.

4. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ МОЛЕКУЛ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИТНОЙ НАСТРОЙКИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Молекулярный генератор на переходе $1_{01} - 0_{00}$ формальдегида, благодаря предельной простоте перехода, представляет собой весьма удобный инструмент для выяснения ряда вопросов физики процессов, происходящих в молекулярных генераторах вообще. Например, с его помощью были выяснены процессы сортировки пучка и ориентации молекул в отсортированном пучке [11]. В настоящей работе описывается еще одно исследование, выполненное с его помощью.

Из рассмотрения рис. 5 видно, что полученные характеристики магнитной настройки содержат, как и в случае аммиака [17, 18], кроме квадратичной, линейную зависимость частоты от магнитного поля, приложенного к резонатору. Наличие линейной зависимости снижает точность настройки и, следовательно, стабильность молекулярных генераторов, так как положение центра линии становится неопределенным. Квадратичная зависимость получается в результате увеличения ширины спектральной линии в резонаторе [3] при равной интенсивности зеемановских компонент. Линейная же зависимость свидетельствует о неравенстве интенсивностей зеемановских компонент, т. е. о смещении центра тяжести линии магнитным полем.

Неравная интенсивность зеемановских компонент может быть обусловлена неравной населенностью уровней $J = 1$, $M = +1$ и $J = 1$, $M = -1$ на входе в резонатор. В свою очередь, неравная населенность уровней, отличающихся знаком M , может быть результатом процесса переориентации молекул в отсортированном пучке, позволяющего, в принципе, отдельно индуцировать переходы с уровней, отличающихся знаком M (см. [15] и табл. 2 настоящей работы). Экспериментальные исследования линейной зависимости показывают, что разность интенсивностей зеемановских компонент весьма мала ($\sim 10^{-2} - 10^{-3}$). Если предположить, что малая разность населенностей зеемановских подуровней создается процессами переориентации, имеющими несколько различную интенсивность для уровней, отличающихся знаком M , то в случае молекулярного генератора на формальдегиде одни и те же переходы между $M = 0$ и $M = \pm 1$ уровня $J = 1$ будут определять и мощность генерации и угол наклона характеристик магнитной настройки. В этом случае вид зависимостей мощности генерации и угла наклона характеристик от переориентирующего напряжения (периодичность, положение экстремумов) должен совпадать*.

В процессе исследования генератора на формальдегиде нами одновременно снимались зависимости от переориентирующего напряжения U_n мощности генерации и одной из характеристик магнитной настройки. Положение минимума на этой характеристике служило для определения угла наклона характеристик α . Некоторый наклон характеристик существовал уже при $U_n = 0$. Относительное изменение этого наклона в зависимости от U_n показано на рис. 6 вместе с нормированной зависимостью мощности генерации от этого же переориентирующего напряжения. Совпадение вида зависимостей на рис. 6 прямо указывает на действенность механизма создания неравной интенсивности зеемановских компонент переориентацией.

* В случае аммиака зависимости с разными значениями M ($M = 0, 1, 2, 3$) накладываются друг на друга и простая связь между параметром возбуждения и наклоном характеристик отсутствует.

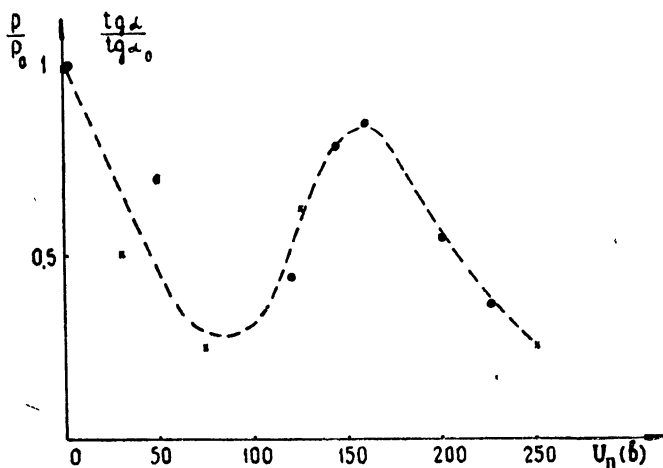


Рис. 6. Нормированные зависимости мощности генерации (0) и тангенса угла наклона характеристик магнитной настройки (X) от переориентирующего напряжения U_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ, 45, 101 (1963).
2. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 3, 513 (1963).
3. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
4. R. B. Lawrence, M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., 83, 363 (1951).
5. K. Takagi, T. Oka, J. Phys. Soc. Japan, 18, № 8, 1174 (1963).
6. T. Oka, Y. Morino, J. Phys. Soc. Japan, 16, № 6, 1235 (1961).
7. T. Oka, H. Hirakawa, K. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, 15, № 12, 2265 (1960).
8. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
9. K. Kondo, H. Hirakawa, A. Miyahara, T. Oka, K. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, 15, 303 (1960).
10. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 827 (1966).
11. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Радиотехника и электроника, 10, 387 (1965).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
13. М. Стендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956.
14. H. K. Hughes, Phys. Rev., 72, 614 (1947).
15. А. Ф. Крупнов, В. А. Логачев, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1689 (1967).
16. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
17. K. Shimoda, J. Kohn, Japan, J. Appl. Phys., 1, 5 (1962).
18. Г. А. Елкин, В. С. Казачок, Г. Г. Рахимов, А. Ф. Щербинин, в сб. Тр. ин-тов комитета стандартов, мер и измерительных приборов СССР, вып. 88 (148), 1966, стр. 46; Г. Г. Рахимов, Диссертация, ФИАН, 1965.
19. T. Shigenari, J. Phys. Soc. Japan, 23, № 2, 404 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 апреля 1968 г.

FREQUENCY CHARACTERISTICS OF MOLECULAR GENERATOR ON FORMALDEHYDE

A. F. Krupnov, M. Ya. Ovcharov, V. A. Skvortsov, A. A. Ul'yanov,
A. P. Sheronov

The results of investigating the frequency characteristics of molecular generator on formaldehyde [1] are discussed. The experimental part of studies was carried out in 1965—66.

УДК 539.143.43

О ВОЗМОЖНЫХ ИСКАЖЕНИЯХ И СДВИГАХ СИГНАЛОВ ПОГЛОЩЕНИЯ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА ПРИ ЭФФЕКТЕ ОВЕРХАУЗЕРА

Б. Ф. Алексеев, Б. Е. Сobotковский

Показано, что при эффекте Оверхаузера сигнал поглощения ЯМР в зависимости от магнитного поля искажается и может сдвигаться. Сдвиг линии поглощения ЯМР связан с расстройкой частоты насыщения ЭПР относительно резонансной частоты для поля, в котором наблюдается ЯМР. Искажения и сдвиг увеличиваются с уменьшением отношения ширины линии ненасыщенного ЭПР к ширине линии ЯМР и степени насыщения ЭПР. Предложена методика расчета необходимой стабильности частоты насыщения ЭПР для исключения указанного сдвига.

В экспериментальной радиоспектроскопии форма и положение линии поглощения ядерного магнитного резонанса (ЯМР) во внешнем магнитном поле при постоянной частоте спин-детектора часто используется для получения ряда сведений об исследуемом образце. В связи с использованием эффекта Оверхаузера [1, 2] для усиления слабых сигналов ЯМР в связанных электрон-ядерных спин-системах представляет интерес изучение вопроса о форме и положении максимума сигнала поглощения ЯМР в зависимости от магнитного поля при насыщении электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Подобные вопросы ранее не рассматривались. Неучитываемые искажения и сдвиги сигналов ЯМР при насыщении ЭПР могут являться причиной ошибок при обработке экспериментальных данных.

Рассмотрение вопроса о форме и положении линии поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера проведено нами для лорентцевых форм исходных сигналов ЯМР и ЭПР. Предполагается, что регистрация сигнала ЯМР осуществляется за счет адиабатического прохождения магнитного поля H_0 через резонанс при постоянной частоте ω_n спин-детектора ЯМР. Анализ выполнен для спина ядра I и спина электрона S , равных $1/2$, в предположении, что для описания движения вектора макроскопической ядерной намагниченности при эффекте Оверхаузера справедливо уравнение Блоха [3].

При сделанных допущениях форму сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера можно определить из выражения [4]

$$v_{\text{дин}} = -\omega_0 H_{1n} T_{2n} x_0 \frac{1 + \rho f \frac{\Pi - \Pi_0}{P_0}}{1 + \gamma_n^2 H_{1n}^2 T_{2n} T_{1n} + \Delta H^2 / \Delta H_n^2}, \quad (1)$$

где γ_n — гиромагнитное отношение ядер; T_{1n} и T_{2n} — времена продольной и поперечной ядерной релаксации соответственно; H_{1n} — амплитуда высокочастотного магнитного поля, индуцирующего ядерные переходы; x_0 — статическая ядерная восприимчивость без эффекта Оверхаузера; ρ — коэффициент [2], зависящий от механизма связи ядерных и электронных спинов; f — так называемый фактор утечки [2];

P_0 и Π_0 — термически равновесные ядерная и электронная поляризации [5] соответственно; Π — электронная поляризация при насыщении ЭПР; $\Delta H_n = (\gamma_n T_{2n})^{-1}$ — полуширина линии «обычного» (без эффекта Оверхаузера) ЯМР, выраженная в единицах магнитного поля; $\omega_0 = \gamma_n H_0$; $\Delta H = \omega_n / \gamma_n - H_0$.

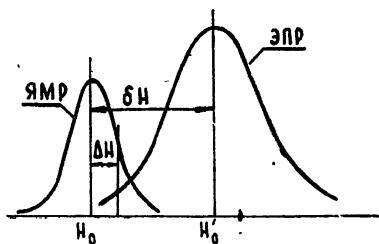
Для дальнейшего рассмотрения заменим поляризации, входящие в выражение (1), приближенными соотношениями, справедливыми при $kT \gg \hbar \omega$:

$$P_0 \simeq \frac{\gamma_n H_0 \hbar}{2kT}; \quad \Pi_0 \simeq \frac{\gamma_e H_0 \hbar}{2kT}; \quad \Pi \simeq \frac{\gamma_e H_0 \hbar}{2kT} s. \quad (2)$$

Здесь k — постоянная Больцмана; T — температура решетки; γ_e — гиромагнитное отношение электронов; s — фактор насыщения [3] электронного резонанса.

Пусть частота насыщения ЭПР ω_e не совпадает с резонансной частотой для поля, в котором наблюдается максимум линии «обычного» ЯМР. Это может быть связано с неточной установкой или нестабильностью генератора, насыщающего ЭПР. Допустим, что в поле H_0 частота спин-детектора ЯМР совпадает с частотой прецессии ядер, т. е. $\omega_n = \omega_0 = \gamma_n H_0$ (рис. 1). Это означает, что максимум линии «обыч-

Рис. 1. Взаимное положение линий поглощения ЯМР и ЭПР при прохождении магнитного поля. Частота насыщения ЭПР больше резонансной частоты для поля H_0



ного» ЯМР наблюдается в поле H_0 . Предположим, что частота ω_e больше, чем частота прецессии электронных спинов $\gamma_e H_0$. Тогда максимум линии ЭПР при прохождении магнитного поля будет наблюдаться в поле $H'_0 = \omega_e / \gamma_e$, которое больше, чем H_0 , на величину $\delta H = \omega_e / \gamma_e - \omega_n / \gamma_n$. Поэтому, если расстройка магнитного поля для линии ЯМР составляет $\pm \Delta H$, то расстройка для линии ЭПР будет равна $\pm \Delta H - \delta H$. Если же $\omega_e < \gamma_e H_0$, значения расстроек при уменьшении магнитного поля от значения H_0 будут равны по абсолютной величине значениям расстроек при увеличении магнитного поля в предыдущем случае. Следовательно, достаточно рассмотреть лишь взаимное положение линий ЯМР и ЭПР, изображенное на рис. 1.

Если расстройка магнитного поля для линии ЯМР составляет ΔH , то фактор насыщения ЭПР равен

$$s = \frac{1 + (\Delta H - \delta H)^2 / \Delta H_e^2}{1 + \gamma_e^2 H_{1e}^2 T_{2e} T_{1e} + (\Delta H - \delta H)^2 / \Delta H_e^2} \quad (3)$$

где T_{2e} и T_{1e} — времена поперечной и продольной электронной релаксации соответственно; H_{1e} — амплитуда высокочастотного магнитного поля, насыщающего ЭПР; $\Delta H_e = (\gamma_e T_{2e})^{-1}$ — полуширина ненасыщенной линии ЭПР.

Учитывая (2) и (3), коэффициент усиления сигналов ЯМР при эффекте Оверхаузера $\left(1 + \nu f \frac{\Pi - \Pi_0}{P_0}\right)$ можно представить в виде

$$1 + \rho f \frac{\Pi - \Pi_0}{P_0} \simeq k_{\max} (s - 1) =$$

$$= -k_{\max} \frac{\gamma_e^2 H_{1e}^2 T_{2e} T_{1e}}{1 + \gamma_e^2 H_{1e}^2 T_{2e} T_{1e} + (\Delta H - \delta H)^2 / \Delta H_e^2}, \quad (4)$$

$k_{\max} = \rho f \gamma_e / \gamma_n$ — максимально достижимое абсолютное усиление сигнала ЯМР.

Если подставить (4) в (1) и ввести безразмерные величины $\alpha = \Delta H_e / \Delta H_n$; $\varepsilon = \Delta H / \Delta H_n$; $\lambda = \delta H / \Delta H_n$; $\eta_e = \gamma_e^2 H_{1e}^2 T_{2e} T_{1e}$; $\eta_n = \gamma_n^2 H_{1n}^2 T_{2n} T_{1n}$, можно получить выражение для формы сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера в виде

$$v_{\text{дин}} = \omega_0 H_{1n} T_{2n} x_0 k_{\max} \Phi(\alpha, \lambda, \eta_e, \eta_n, \varepsilon). \quad (5)$$

Сигнал дисперсии в рассматриваемом случае равен

$$u_{\text{дин}} = -\omega_0 H_{1n} T_{2n} x_0 k_{\max} \varepsilon \Phi(\alpha, \lambda, \eta_e, \eta_n, \varepsilon). \quad (6)$$

Функция Φ , входящая в (5) и (6), имеет вид

$$\Phi(\alpha, \lambda, \eta_e, \eta_n, \varepsilon) = \eta_e \left\{ \frac{\varepsilon^4}{\alpha^2} - \frac{2\lambda\varepsilon^3}{\alpha^2} + \left[1 + \eta_e + \frac{1}{\alpha^2} (1 + \eta_n) + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right] \varepsilon^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda}{\alpha^2} (1 + \eta_n) \varepsilon + 1 + \eta_n + \eta_e + \eta_n \eta_e + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} (1 + \eta_n) \right\}^{-1}. \quad (7)$$

Характерные кривые, описываемые функцией $\Phi = \Phi(\varepsilon)$, изображены на рис. 2 для $\alpha = 1$, $\eta_e = 1$, $\eta_n = 0$ и различных положительных значений λ (или δH). Приведенные кривые, как следует из (5), представляют форму сигналов поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера при прохождении магнитного поля.

На рис. 2 изображена также пунктиром форма исходной лорентцевой линии ЯМР, максимальное значение которой приведено к $\Phi = \Phi(\varepsilon = 0, \eta_n = 0, \lambda = 0)$. Видно, что сигналы поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера по сравнению с линиями «обычного» ЯМР искажаются и их максимумы сдвигаются в сторону положительных ε . Если $\lambda < 0$ ($\delta H < 0$), то сдвиг сигналов происходит симметричным образом в сторону отрицательных ε . При $\lambda \neq 0$ интенсивность сигналов ЯМР уменьшается. Искажения и уменьшения сигналов при прочих неизменных условиях тем больше, чем больше λ .

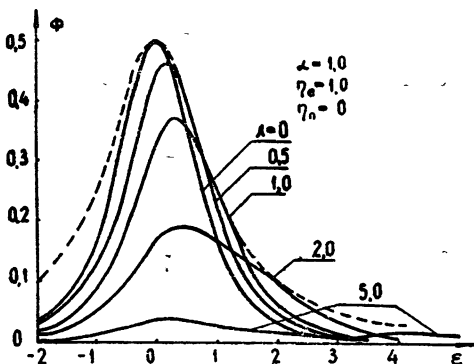


Рис. 2. Форма сигналов поглощения ЯМР при расстройке частоты насыщения ЭПР относительно резонансной для поля H_0 .

Пунктиром изображена исходная форма сигнала поглощения «обычного» ЯМР.

Нужно отметить, что при исследовании образцов с неизвестной формой сигнала ЯМР и неизвестным g -фактором полученные таким

образом результаты могут быть неправильно интерпретированы. Если при этом частота генератора, насыщающего ЭПР, нестабильна, то экспериментальные результаты не будут воспроизводиться, что приведет к погрешности измерений.

Если обозначить $\varepsilon_{\max} = \frac{H_{\max} - H_0}{\Delta H_n}$, где H_{\max} — значение магнитного поля, соответствующее максимуму сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера, то зависимость ε_{\max} от λ при неизменных прочих параметрах можно найти из условия

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\alpha, \lambda, \eta_e, \eta_n, \varepsilon) = 0. \quad (8)$$

Это условие дает уравнение относительно ε_{\max}

$$\frac{2}{\alpha^2} \varepsilon_{\max}^3 - \frac{3\lambda}{\alpha^2} \varepsilon_{\max}^2 + \left[1 + \eta_e + \frac{1}{\alpha^2} (1 + \eta_n) + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right] \varepsilon_{\max} - \frac{\lambda}{\alpha^2} (1 + \eta_n) = 0. \quad (9)$$

Анализ решения уравнения (9) в общем виде представляет значительные трудности. Поэтому нами проведены численные расчеты $\varepsilon_{\max} = f(\lambda)$ при $\alpha, \eta_e, \eta_n = \text{const}$ на ЭВМ. Типичные результаты расчета приведены на рис. 3—5. Из графиков видно, что при увеличении λ

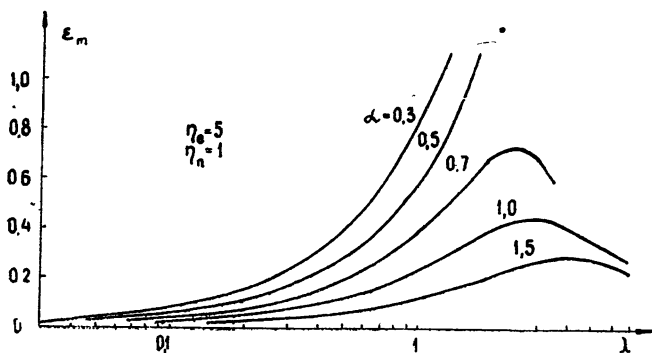


Рис. 3.

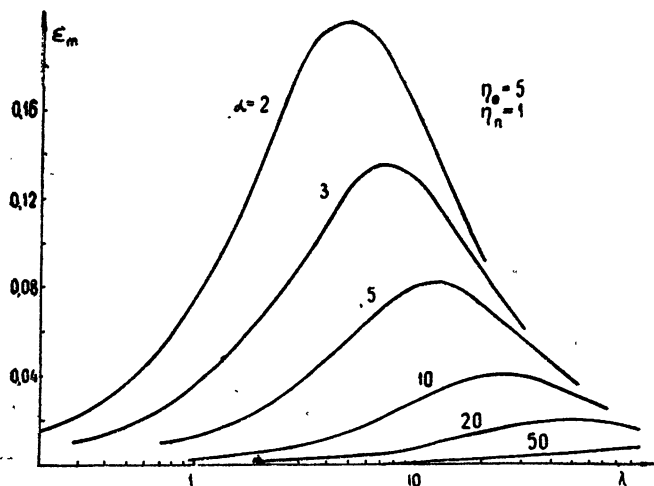


Рис. 4.

сдвиг возрастает до некоторого максимального значения, затем падает. Максимальный сдвиг при $\alpha \gg 5$ линия ЯМР имеет при $\lambda \sim \alpha(1 + \eta_e)^{1/2}$. Это означает, что линия ЯМР более всего сдвигается при расстройке частоты насыщения ЭПР по сравнению с резонансной частотой для поля, в котором наблюдается «обычный» ЯМР, на полуширину насыщенной линии ЭПР. При дальнейшем увеличении λ сдвиг сигнала поглощения ЯМР уменьшается. Одновременно падает и интенсивность сигналов ЯМР, так как значительно уменьшается коэффициент усиления (4).

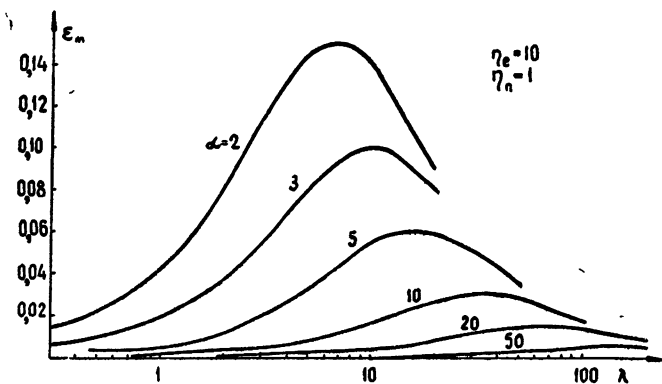


Рис. 5.

Из графиков следует также, что максимальная величина сдвига зависит от $\alpha = \Delta H_e / \Delta H_n$. Чем больше α , тем меньше сдвиг. В предельном случае $\alpha \gg 1$ сдвиг линии ЯМР при насыщении ЭПР пренебрежимо мал. Анализ показывает, что искажения формы линии ЯМР в этом случае также малы. Значение $\alpha \gg 1$ наиболее вероятно для жидких растворов парамагнитных солей. Если же $\alpha \ll 1$, то сдвиг линии поглощения ЯМР почти линейно следует за изменением λ , а ее форма почти повторяет форму насыщенной линии ЭПР.

Рассматриваемый случай наиболее вероятен для твердых парамагнитных образцов. В некоторых углях [6], например, $\Delta H_n \sim 2,5$ э, $\Delta H_e \sim 0,25$ э. В магнитоцентрированном поликристаллическом дифенилпикрилгидразиле (ДФПГ), согласно [7], $\Delta H_n \sim 5,6$ э, $\Delta H_e \sim 1,7$ э.

При $\alpha \ll 1$ сдвиг линии поглощения ЯМР и искажения ее формы наибольшие. Однако количественные оценки сдвига и искажений по приведенным формулам для рассматриваемого случая будут приближенными, так как допущение о лорентцевой линии ЯМР в твердых телах является грубым. Полученные результаты при нелорентцевых линиях ЯМР позволяют, в основном, лишь качественно предсказать возможные эффекты.

Из рис. 3—5 видно, что с увеличением α при прочих неизменных условиях максимум сдвига сигнала поглощения ЯМР смещается пропорционально α в сторону больших значений λ (для $\alpha \gg 5$). При увеличении степени насыщения ЭПР (η_e) наибольший сдвиг уменьшается, но он смещается в сторону больших значений λ для больших α пропорционально $\sim (1 + \eta_e)^{1/2}$. В случае малых α указанные зависимости являются менее наглядными.

Рассматриваемый сдвиг сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера не связан, по-видимому, с изменением гиромагнитного отношения ядер, так как, согласно (6), значение магнитного поля, при котором сигнал дисперсии обращается в нуль, при насыщении ЭПР остается неизменным. Насыщение ЭПР приводит лишь к искажению сигнала дисперсии.

Полученные результаты имеют наглядную интерпретацию. Согласно (1), форма сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера определяется произведением исходной формы сигнала поглощения «обычного» ЯМР и коэффициента усиления вида (4). При сделанных допущениях обе эти функции являются лорентцевыми и смещенными относительно друг друга. Произведение таких функций не будет лорентцевой кривой; максимум произведения не будет совпадать с максимумом ни одной из этих кривых. Этим физически обусловлен сдвиг и искажения сигнала поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера для $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ сдвиг отсутствует, но линия ЯМР при насыщении ЭПР искажается и сужается [4].

Результаты данного расчета позволяют определить необходимую стабильность и точность установки частоты генератора, насыщающего ЭПР. При $\lambda \neq 0$, как следует из изложенного, максимум сигнала поглощения ЯМР наблюдается в магнитном поле

$$H = H_0 \pm \epsilon_{\max} \Delta H_n. \quad (10)$$

Сдвиг максимума практически нельзя заметить, если [8]

$$\epsilon_{\max} \leq 0,1. \quad (11)$$

Это условие в рассматриваемом случае соответствует также минимуму искажений. Для заданных α, η_e, η_n из рис. 3—5 или решения уравнения (9) на восходящем участке $\epsilon_{\max} = f(\lambda)$ можно найти такое λ_{\min} , чтобы условие (11) выполнялось. Тогда отклонение частоты насыщения ЭПР от резонансной на величину

$$\pm \delta \omega_e = \gamma_e \delta H = \lambda_{\min} \gamma_e \Delta H_n = \lambda_{\min} \frac{\gamma_e}{\gamma_n} \Delta \omega_n \quad (12)$$

не приводит к практически заметному сдвигу положения максимума сигнала поглощения ЯМР при насыщении ЭПР.

Оценим необходимую стабильность частоты ω_e для ряда образцов. Для ДФПГ [7] $\alpha = \Delta H_e / \Delta H_n = 1,7/5,6 \sim 0,3$. При $\eta_e = 5, \eta_n = 1$ из рис. 3 находим $\lambda_{\min} \sim 0,1$. Тогда, согласно (12), $\pm \delta \omega_e \leq 10^7 \text{ сек}^{-1}$. При исследованиях в сильных магнитных полях требуемая относительная стабильность частоты ω_e составляет $\delta \omega_e / \omega_e \leq 10^7 / 2\pi \cdot 10^{10} \leq 10^{-4}$. Для раствора натрия в жидком аммиаке [9] при некоторой концентрации $\Delta H_e \sim 0,04 \text{ э}$, $\Delta H_n \sim 0,02 \text{ э}$, $\alpha \sim 2$. При $\eta_e = 5, \eta_n = 1$ из рис. 4 находим $\lambda_{\min} \sim 1$; $\pm \delta \omega_e \sim 3,5 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$. При исследованиях в магнитных полях порядка 30 э $\omega_e \sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$ и $\delta \omega_e / \omega_e \leq 3,5 \cdot 10^{-4}$. В сильных полях $\delta \omega_e / \omega_e \leq 6 \cdot 10^{-6}$.

Требования к стабильности частоты насыщения ЭПР еще более возрастают при исследовании парамагнитных образцов с более узкими линиями ЯМР и меньшими α . В некоторых случаях для исключения указанных эффектов могут потребоваться значительные усложнения аппаратуры, так как стабилизация мощных СВЧ генераторов, применяемых для насыщения ЭПР, представляет трудности.

Из изложенного следует, что сигналы поглощения ЯМР при эффекте Оверхаузера могут искажаться и сдвигаться по сравнению с сигналами «обычного» ЯМР. Искажения сигналов ЯМР при насыщении ЭПР проявляются всегда. Сдвиги сигналов связаны только с расстройкой частоты насыщения ЭПР. Величина сдвигов при неизменной расстройке уменьшается с увеличением отношения ширины ненасыщенной линии ЭПР к ширине линии ЯМР и степени насыщения ЭПР. Искажения и сдвиги линий поглощения ЯМР пренебрежимо малы, если указанное отношение превышает 40—50. В остальных случаях сдвиги и искажения линий поглощения ЯМР могут быть заметны. В предельном случае,

когда указанное отношение мало, сдвиг почти линейно следует за расстройкой частоты насыщения ЭПР, а форма сигнала ЯМР повторяет форму сигнала насыщенного ЭПР.

Авторы выражают благодарность А. Г. Граммакову за внимание к работе и обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Overhauser, Phys. Rev., **92**, 411 (1953).
2. Г. Р. Хуцишвили, УФН, **71**, 9 (1960).
3. А. Леше, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
4. Б. Ф. Алексеев, Б. Е. Соботковский, ФТТ, **10**, 237 (1968).
5. W. Müller-Warmuth, Z für Naturforschung, **15a**, 927 (1960).
6. A. Abragam, A. Landesman, J. M. Winter, Compt. Rend., **247**, 1852 (1958).
7. А. В. Кессених, Изв. высш. уч. зав. — Физика, **1**, 144, (1962); ПТЭ, № 3, 107 (1961).
8. W. C. Diskinson, Phys. Rev., **81**, 717 (1951).
9. T. R. Carver, C. P. Slichter, Phys. Rev., **102**, 975 (1956).

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
23 октября 1967 г.

POSSIBLE DISTORTIONS AND SHIFTS OF SIGNALS OF NUCLEUS MAGNETIC RESONANCE ABSORPTION AT OVERHAUSER EFFECT

B. F. Alekseev, B. E. Sobotkovskii

It is shown that the signal of NMR absorption as a function of the magnetic field is distorted and may be shifted at Overhauser effect. The shift of NMR absorption line is related to the shift of saturation frequency to the resonance frequency of the field in which NMR is observed. The distortions and the shift are increased as the ratio of the widths of unsaturated EPR line to the width of NMR line and the degree of EPR saturation are decreased. The method is proposed to calculate the necessary frequency stability of EPR saturation for eliminating the given shift.

УДК 539.124.4

СПИНОВАЯ ТЕМПЕРАТУРА ПРИ НАСЫЩЕНИИ В СЛАБЫХ РЧ ПОЛЯХ

В. Н. Тропинин

Получены условия, при выполнении которых поле звуковой частоты, действующее на спиновую систему в условиях насыщения во вращающейся системе координат, не приводит к нарушению ее термодинамического равновесия. Рассмотрен случай слабых РЧ полей и сделано сравнение с экспериментом

1. В настоящей работе исследовано влияние поля звуковой частоты на изменение спиновой температуры при насыщении во вращающейся системе координат в случае слабых РЧ полей ($H_1 < H_{\text{лок}}$, где $H_{\text{лок}}$ — локальное поле во вращающейся системе координат). Как показано в [1], гамильтониан системы спинов в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_0 = \sum_{k>j} A_{jk}(I_{jk} - 3I_{jz}I_{kz}), \\ \tilde{H}_1 &= \hbar\omega_1 I_x, \quad \tilde{H}_2 = \frac{2\gamma^2 \hbar H_1 H_a}{\omega_a} I_y \sin(\omega_a t),\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}A_{jk} &= \gamma^2 \hbar^2 r_{jk}^{-3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_{jk} - 1), \quad I = \sum_j I_j, \\ \omega_1 &= -\gamma H_1,\end{aligned}$$

$2H_a$ — амплитуда поля звуковой частоты ω_a .

Первое слагаемое в (1) содержит члены, коммутирующие с I_z , так как время спин-решеточной релаксации предполагается достаточно большим. Константа A_{jk} не содержит слагаемых, ответственных за косвенные взаимодействия.

В гамильтониан [1] входит зависящее от времени возмущающее поле амплитуды $H_y = \frac{2\gamma H_1 H_a}{\omega_a}$, приложенное в y -направлении, которое вызывает спиновые перебросы между уровнями. Решение уравнения Шредингера приводит к выражению для намагниченности, которое содержит одну экспоненту и, таким образом, по форме совпадает с соответствующим результатом теории БПП [2]. В этом случае возникает вопрос об условиях применимости понятия спиновой температуры к системам (1). Так как в магниторезонансных экспериментах измерение спиновой температуры осуществляется с помощью зависящего от времени поля и, следовательно, не является калориметрическим, то, как это неоднократно подчеркнуто в [3], само понятие спиновой температуры представляет собой эффективную рабочую гипотезу. Наша задача состоит в том, чтобы установить, при каких условиях,

налагаемых на продолжительность воздействия зависящего от времени поля, гипотеза спиновой температуры применима к системам с гамильтонианом (1).

2. До приложения поля звуковой частоты спиновая система во вращающихся координатах описывается оператором плотности

$$\rho_0 = \frac{\exp [-(\tilde{H}_0 + \tilde{H}_1)/kT]}{\text{Sp} \{\exp [-(\tilde{H}_0 + \tilde{H}_1)/kT]\}}. \quad (2)$$

В высокотемпературном приближении, ограничиваясь спинами одного сорта, находим соответствующую энергию спиновой системы

$$E_0 = \frac{\gamma^2 \hbar^2 I(I+1) N}{3kT} \left[H_1^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \hbar^2 I(I+1) \sum_k r_{jk}^{-6} \right]. \quad (3)$$

После приложения поля звуковой частоты оператор плотности является функцией времени. Представим его в виде

$$\rho(t) = \rho_0 + \varepsilon(t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение для оператора плотности

$$i\hbar \dot{\rho} = [\tilde{H}, \rho], \quad (5)$$

находим

$$i\hbar \dot{\varepsilon} = [\tilde{H}_0, \rho_0] + [\tilde{H}_0, \varepsilon] + [\tilde{H}_1, \rho_0] + [\tilde{H}_1, \varepsilon] + [\tilde{H}_2, \rho_0] + [\tilde{H}_2, \varepsilon]. \quad (6)$$

Первый и третий члены в правой части (6) равны нулю, так как \tilde{H}_0 и \tilde{H}_1 коммутируют с ρ_0 . Поскольку $\varepsilon \sim H_1 H_a$, то четвертый член $\sim H_1^2 H_a$, а шестой $\sim H_1^2 H_a^2$. Этими членами пренебрегаем по сравнению с $H_1 H_a$. Таким образом, получаем

$$i\hbar \dot{\varepsilon} = [\tilde{H}_0, \varepsilon] + [\tilde{H}_2, \rho_0]. \quad (7)$$

Решая (7) методом, изложенным в [4], и вычисляя энергию, поглощенную спиновой системой из поля звуковой частоты за время t , в течение которого происходит измерение температуры, находим

$$E_1 = Pt = \frac{H_y^2 \gamma^2 \hbar^2 t}{4 Q k T} \sum_{m, n} |\langle m | I_y | n \rangle|^2 \frac{\omega_a^2}{|\omega_{mn} - \omega_a|}. \quad (8)$$

При вычислении E_1 учтено, что вблизи резонанса $\omega_{mn} \simeq \omega_a$. Из (8) находим

$$E_1 = a \frac{N H_y^2 \gamma^2 \hbar^2 t}{k T} \frac{\omega_a^2}{|\omega_{\text{лок}} - \omega_a|}, \quad (9)$$

где, согласно (1), $\omega_{mn} = \omega_{\text{лок}}(m - n)$ и отброшены все слагаемые, знаменатели у которых отличаются от $\omega_a - \omega_{\text{лок}}$ на $\omega_{\text{лок}}$ и более; a — численный коэффициент, равный $1/8$ для спина $1/2$, $1/3$ для спина 1 и $5/8$ для спина $3/2$.

Сравнивая (9) и (3), находим условия, налагаемые на продолжительность времени t , при выполнении которых процесс измерения спи-

новой температуры не приведет к нарушению термодинамического равновесия в системе:

$$t \ll b \frac{\hbar^2 \sum_k r_{jk}^{-6}}{H_1^2 H_a^2} |\omega_{\text{лок}} - \omega_a|, \quad (10)$$

где коэффициент b равен $3/32$ для спина $1/2$, $1/4$ для спина 1 и $15/32$ для спина $3/2$.

3. Экспериментальное исследование [1] насыщения во вращающейся системе координат в случае малых РЧ полей было проведено на ядрах фтора в монокристалле CaF_2 при комнатной температуре. Спины фтора приводились в состояние теплового равновесия в большом внешнем поле H_0 , после чего поле H_0 быстро, т. е. за время, намного меньшее времени спин-решеточной релаксации, уменьшалось до малого значения $h \simeq 15$ э и включалось РЧ поле H_1 . Эта ситуация соответствует переходу во вращающуюся систему координат. Магнитный момент, первоначально ориентированный вдоль H_0 , после перехода во вращающуюся систему координат прецессирует вокруг эффективного поля, если h не равно нулю, или вокруг H_1 , если h адиабатически в смысле Эренфеста уменьшается до нуля. После этого вдоль лабораторной оси z , по которой было направлено H_0 , включается поле звуковой частоты на время t . Предполагается, что за время, протекшее от момента перехода во вращающуюся систему координат и до момента включения поля H_a , между дипольным резервуаром и зеемановской системой успело установиться тепловое равновесие.

После выключения H_a выключалось РЧ поле H_1 и детектировалась намагниченность, прецессирующая вокруг H_0 . Время спин-решеточной релаксации в монокристалле CaF_2 составляет около 12 сек, во вращающейся системе координат $H_{\text{лок}} = 0,90 \pm 0,01$ э, $H_1 = 0,37 \pm \pm 0,01$ э, $H_a = 0,10 \pm 0,005$ э. Спин фтора равен $1/2$, $\gamma = 2\pi 4005,5$ э $^{-1}$ ·сек $^{-1}$ [5], спин Ca равен 0, поэтому (см. [3], стр. 503) при точном резонансе

$$H_{\text{лок}}^2 = \frac{N\gamma^4 \hbar^4 I^2 (I+1)^2}{4N\gamma^2 \hbar^2 I(I+1)} \sum_k r_{jk}^{-6} = \frac{3\gamma^2 \hbar^2}{16} \sum_k r_{jk}^{-6} \quad (11)$$

и

$$t \ll \frac{H_{\text{лок}}^2}{2\gamma^2 H_1^2 H_a^2} |\omega_{\text{лок}} - \omega_a|, \quad \omega_{\text{лок}} = \gamma H_{\text{лок}}. \quad (12)$$

На рис. 1 (см. в [1] рис. 9) приведены зависимости $\ln \frac{M_0}{M_z}$, где M_z — намагниченность во вращающейся системе координат после воздействия импульса звуковой частоты, от продолжительности импульса t для различных значений $\omega_a/2\pi$. Сплошные линии, пересекающие прямые, построены с помощью (12) и изображают предельные значения t . Соответствующие предельно допустимые значения намагниченности лежат под сплошными линиями.

Из рис. 1 видно, что наименьшее предельное значение t соответствует частоте, при которой наблюдается минимум намагниченности после приложения поля H_a . Это предельное значение при заданных H_1 и H_a определяется только величиной ω_a , независимо от величины

намагниченности, оставшейся после приложения поля H_a . Согласно (10), предельное значение t может быть увеличено за счет уменьшения как H_1 , так и H_a .

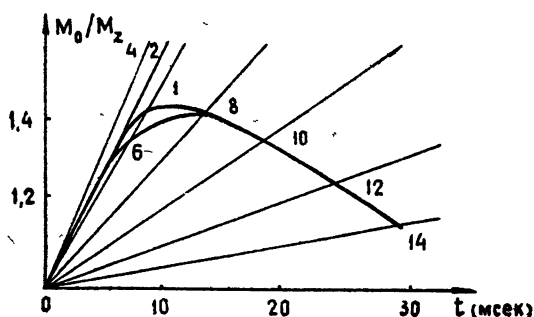


Рис. 1. Предельные значения времени воздействия импульса звуковой частоты. Цифры у прямых намагниченности — звуковые частоты в кГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Franz, C. P. Slichter, Phys. Rev., **148**, 287 (1966).
2. N. Bloembergen, E. M. Purcell, R. V. Pound, Phys. Rev., **73**, 679 (1948).
3. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
4. В. Н. Тропинин, ФТТ, **9**, 2302 (1967).
5. A. Abragam, W. G. Proctor, Phys. Rev., **109**, 1441 (1958).

Уральский лесотехнический институт

Поступила в редакцию
30 января 1968 г.

SPIN TEMPERATURE AT SATURATION IN WEAK RF FIELDS

V. N. Tropinin

The conditions have been obtained under which the field of the sound frequency acting the spin system under saturation conditions in rotating coordinates does not lead to violation of its thermodynamic equilibrium. The case of weak RF fields is considered and compared with the experiment.

УДК . 538.56 : 519.25

О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ, СЛАБО ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ ЭРГОДИЧЕСКИХ

И. Х. Ризкин

Рассмотрены некоторые характеристики неэргодических процессов, позволяющие оценить степень отклонения от эргодичности и сформулировать условия малости этого отклонения. Приведен пример.

1. Исследователь, располагающий единственной реализацией процесса, вынужден опираться на его эргодические свойства. Характеристика эргодических нестационарных процессов содержится, например, в [1, 2]. Однако в практике радиофизических исследований сравнительно часто приходится сталкиваться с неэргодическими процессами, например, с такими, корреляционные функции которых содержат периодические составляющие. Существенно также, что самая принадлежность процесса к эргодическим не может в ряде случаев рассматриваться до исследования как достоверный факт.

Очевидно, что исследование неэргодических случайных функций связано, вообще говоря, с большими ошибками, чем эргодических. Однако можно выделить класс процессов, слабо отклоняющихся от эргодических, так что ошибка, вызванная неэргодичностью, достаточно мала. Заметим, что в реальных случаях анализ процессов всегда ограничен конечным временным интервалом и погрешность, обусловленная наличием одной (а не ансамбля) реализации, по величине конечна. Поэтому исследование процесса, достаточно близкого к эргодическому, может быть связано с ошибками, величина которых значительно меньше обусловленной конечностью временного интервала. При этом существенно, чтобы погрешность, вызванная неэргодичностью, непрерывно зависела от отклонения от эргодичности.

Целесообразность рассмотрения процессов, мало отличающихся от эргодических, определяется и следующим обстоятельством. Если априори неизвестно, эргодичен ли исследуемый процесс, то оперирование с некоторыми близкими к эргодическим процессам позволяет оценить ошибки исследования, вызванные неэргодичностью. В этом случае, однако, необходимо ввести меру неэргодичности.

Ниже рассматриваются некоторые количественные характеристики, пригодные для оценки отклонения от эргодичности, и приводится пример использования этих характеристик для неэргодического процесса.

2. Пусть имеется одна реализация, вообще говоря, нестационарного случайного процесса $\xi(t)$, заданная на отрезке $[0, T]$. Цель ее обработки — отыскание некоторой неслучайной функции $\Theta(z)$, ограниченной в интересующей нас области; под z понимается совокупность m аргументов z_1, \dots, z_m ; $\Theta(z)$ может вырождаться в постоянную.

Выберем далее вид оценки $\Theta_j^*(z)$ для $\Theta(z)$; она составляется, очевидно, по единственной доступной реализации $\xi(t)$ и зависит от длины

ее T . В дальнейшем предполагается, что оценка эта несмещенная, хотя бы и асимптотически, т. е. для всех $z \in [z_1, z_2]$ при $T \rightarrow \infty$ $\Theta_T^*(z) \rightarrow \Theta(z)$. Идея последующего рассмотрения состоит в некотором тривиальном расширении класса эргодических процессов, которое можно описать следующим образом.

Если бы процесс был эргодическим по отношению к $\Theta(z)$ при оценке $\Theta_T^*(z)$, то при всех z

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[|\Theta_T^*(z) - \Theta(z)| \geq \varepsilon] = 0.$$

Будем вместе с эргодическими рассматривать и такие процессы, для которых вероятность не стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ или вообще не стремится к определенному пределу, но удовлетворяет следующему условию: при достаточно больших T для всех z она не превышает некоторой достаточно малой неотрицательной функции $A(\varepsilon)$. Иначе говоря, мы будем рассматривать процессы, для которых всегда можно найти малую функцию $A(\varepsilon) \geq 0$ и число T_0 такое, что при любых $T > T_0$ для всех $z \in [z_1, z_2]$ при любом ε , превышающем некоторое ε_0 , будет выполняться неравенство

$$\Phi(T, z, \varepsilon) \equiv P[|\Theta_T^*(z) - \Theta(z)| \geq \varepsilon] \leq A(\varepsilon). \quad (1)$$

Поскольку вероятность всегда ограничена, условие (1) становится содержательным лишь после указания критерия малости функции $A(\varepsilon)$. Один из возможных критериев таков. Зафиксируем величины ρ и k , удовлетворяющие условию

$$0 < \rho \ll 1; \quad (2)$$

$$0 < k \ll 1. \quad (3)$$

Пусть первая из них ограничивает сверху вероятность в левой части (1), а вторая—относительную ошибку оценки, т. е.

$$P[|\Theta_T^*(z) - \Theta(z)| \geq \varepsilon] \leq \rho; \quad (4)$$

$$\frac{|\Theta_T^*(z) - \Theta(z)|}{|\Theta(z)|} \leq k \quad (5)$$

при всех $z \in [z_1, z_2]$. Тогда функцию $A(\varepsilon)$ можно назвать асимптотически малой порядка (ρ, k) по отношению к $\Theta(z)$, если для всех

$$\varepsilon \geq k \sup_{z \in [z_1, z_2]} |\Theta(z)| \equiv \varepsilon_0, \quad (6)$$

имеем

$$A(\varepsilon) \leq \rho. \quad (7)$$

Удобство этого определения связано с легкостью выбора порядка относительной ошибки k , в то время как абсолютная ошибка ε часто не может быть разумно выбрана до выяснения порядка $|\Theta(z)|$ в соответствующей области.

Разумеется, возможен и другой выбор признака малости $A(\varepsilon)$ например, в неравенстве (5) может фигурировать некоторый функционал от $|\Theta_T^*(z) - \Theta(z)|$, а в (6)—форма функционала, отличная от принятой. В ряде случаев целесообразно вместо верхнего предела $|\Theta(z)|$ в (6) оперировать со средним от $|\Theta(z)|$ или средним квадратом $\overline{\Theta^2(z)}$ в области $[z_1, z_2]$. Иногда при обработке результатов в знаменателе (5) можно подставлять не $\Theta(z)$, а ее оценку.

Приписав границе $A(\varepsilon)$ в (1) по одному из указанных правил пару чисел (ρ, k) , мы получаем некоторую, хотя, может быть, и грубую, числовую характеристику этой границы и, следовательно, одновременно характеристику состоятельности оценки $\Theta_T^*(z)$ для $\Theta(z)$.

Ниже мы будем называть процесс почти эргодическим порядка (ρ, k) по отношению к $\Theta(z)$ при оценке $\Theta_T^*(z)$, если для заданных ρ и k имеет место (1) при выполнении условий (6) и (7). Таким образом, при малом порядке (ρ, k) мала вероятность даже малого отклонения оценки от $\Theta(z)$, причем пара (ρ, k) характеризует и малость вероятности и малость отклонений. Для эргодических процессов $A(\varepsilon) \equiv 0$, $\rho = 0$ (при $T = \infty$).

В частности, к почти эргодическим процессам порядка (ρ, k) принадлежат процессы, имеющие для всех T дисперсию $D(\Theta_T^*)$ такую, что при $T \rightarrow \infty$

$$D(\Theta_T^*) \rightarrow \beta \leq k^2 \rho \left[\sup_{z \in [z_1, z_2]} |\Theta(z)| \right]^2. \quad (8)$$

Докажем это.

Поскольку Θ^* при всех z — асимптотически несмещенная оценка Θ , то при любом δ и $T > T'(\delta)$ для всех z

$$|\overline{\Theta_T^*(z)} - \Theta(z)| < \delta.$$

Далее очевидно, что для всех z

$$||\Theta_T^* - \overline{\Theta_T^*}| - |\Theta_T^* - \Theta|| \leq |\Theta_T^* - \overline{\Theta_T^*} - \Theta_T^* + \Theta| < \delta. \quad (9)$$

Обозначим для краткости

$$\Theta_T^* - \overline{\Theta_T^*} = a, \quad \Theta_T^* - \Theta = b. \quad (10)$$

Поскольку, в силу (9) и (10), $||a| - |b|| < \delta$, а δ может быть выбрано сколь угодно малой, то для $T \rightarrow \infty$ равномерно по z

$$P_{|a| > \varepsilon}(|b| \geq \varepsilon) = 1 - P_{|a| > \varepsilon}(|b| < \varepsilon) = 1 - \int_{|a| > \delta} p_{|a| > \varepsilon}(|b|) d|b| \rightarrow 1 \quad (11)$$

и симметрично

$$P_{|b| > \varepsilon}(|a| \geq \varepsilon) \rightarrow 1 \quad (12)$$

при весьма общих требованиях к условным плотностям вероятностей $p_{|b| > \varepsilon}(|a|)$ и $p_{|a| > \varepsilon}(|b|)$, зависящим от z ; существенно, что δ может быть выбрано одинаковым для всех z .

Так как при любых T и z

$$P(|a| \geq \varepsilon) P_{|a| > \varepsilon}(|b| \geq \varepsilon) = P(|b| \geq \varepsilon) P_{|b| > \varepsilon}(|a| \geq \varepsilon),$$

то из (11) и (12) следует, что при $T \rightarrow \infty$

$$P(|b| \geq \varepsilon) \rightarrow P(|a| \geq \varepsilon). \quad (13)$$

Используя неравенство Чебышева, можно записать

$$P[|\Theta_T^* - \Theta| \geq \varepsilon] \rightarrow P[|\Theta_T^* - \overline{\Theta_T^*}| \geq \varepsilon] \leq \lim_{T \rightarrow \infty} D\Theta_T^*/\varepsilon^2 = \beta/\varepsilon^2.$$

Равномерность по z в (13) вытекает из равномерности в (11) и (12) и ограниченности величины вероятности. Если теперь положить

$$A(\varepsilon) = \beta/\varepsilon^2$$

и учесть (6) и (7), то доказательство завершается. Заметим, что су

существование предела у дисперсии не обязательно, важно лишь, чтобы дисперсия оставалась малой при больших T .

Возвращаясь к (1), заметим, что из существования «малой» границы $A(\epsilon)$ при $T \rightarrow \infty$ вытекает существование при достаточно больших T малой же функции $N(T, \epsilon)$ такой, что $N(\infty, \epsilon) = A(\epsilon)$. Это обстоятельство часто оказывается полезным при построении процедуры обработки случайного процесса.

Приведем некоторые примеры функций $\Theta(z)$ и их оценок $\Theta^*(z)$, встречающихся в радиофизических исследованиях.

В последнее время часто отыскивают корреляционную функцию нестационарного процесса $\Theta(z_1, z_2) = \psi(t, \tau)$. Функция $\Theta(z)$ вырождается в постоянную, например, в тех случаях, когда вычисляют статистическое среднее от временного среднего функции $f[\xi(t)]$, где f — детерминированная функция, $\xi(t)$ — случайный процесс. Несмещенной оценкой для этой величины

$$\Theta = \overline{f[\xi(t)]} \quad (14)$$

будет, очевидно,

$$\Theta_T^* = \overline{f[\xi(t)]}. \quad (15)$$

Для усредненной плотности $\Theta(z) = w_T(x) \Delta x$ [1] несмещенной оценкой может служить относительное время пребывания, для корреляционной функции — временная корреляционная функция и т. д.

При определении $\Theta(z_1, z_2) = \psi(t, \tau)$ или среднего $\Theta(z) = m(t)$ обычно используют оценки в виде разложений по известным функциям времени с коэффициентами, соответственно зависящими от τ или постоянными [2, 3].

3. Здесь мы ограничимся простым, но важным для приложений примером. Рассмотрим нормальный стационарный процесс с корреляционной функцией $\psi(\tau_0)$ и предположим, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) [\psi^2(\tau) + \psi(\tau + \tau_0) \psi(\tau - \tau_0)] d\tau = \gamma \neq 0. \quad (16)$$

Известно (см. [4], стр. 326), что при $\gamma = 0$ процесс $\xi(t)$ — эргодический по отношению к корреляционной функции $\psi(\tau_0)$. В качестве несмещенной оценки искомой функции $\Theta(z) = \psi(\tau_0)$ выступает здесь

$$\Theta_T^*(z) = \psi_T(\tau_0) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^0(t + \tau_0) \xi^0(t) dt,$$

где ξ^0 — центрированный процесс.

Используя [4], можно написать для дисперсии $\Theta_T^*(z)$

$$D(\Theta_T^*(z)) = D(\psi_T(\tau_0)) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) [\psi^2(\tau_0) + \psi(\tau + \tau_0) \psi(\tau - \tau_0)] d\tau.$$

Теперь в соответствии с (8) и (16) получается следующее условие принадлежности процесса к почти эргодическим порядка (ρ, k) :

$$\gamma \leq \frac{\rho}{2} (k \psi(0))^2. \quad (17)$$

Подобные процессы часто наблюдаются в эксперименте, в особенности, когда корреляционные функции содержат периодические составляющие; последние и обуславливают неравенство нулю величины γ .

Пусть корреляционная функция

$$\psi(\tau) = \psi_1(\tau) + A \cos(\omega\tau + \xi),$$

где $\psi_1(\tau)$ такова, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\psi_1(\tau)|^2 d\tau = 0.$$

Вычислив γ по (16), найдем

$$\gamma = \frac{A^2}{2}.$$

Тогда условие (17) примет вид

$$\frac{\psi_1(0)}{A} + \cos \zeta \geq \frac{1}{k\sqrt{\rho}}.$$

Например, для $k = \rho = 0,1$

$$\frac{\psi_1(0)}{A} + \cos \zeta \geq 31,6,$$

т. е. условие почти эргодичности данного порядка будет во всяком случае выполнено, если A составляет менее $\sim 3\%$ от начального значения корреляционной функции ψ_1 . Следует, однако, иметь в виду, что подобная оценка основана на чебышевском неравенстве и может оказаться грубой.

Другие примеры оценки неэргодичности, в том числе и для нестационарных процессов, предполагается рассмотреть отдельно.

4. Суждение о мере неэргодичности процесса может основываться либо на априорной информации, либо на оценке, составляемой по единственной реализации. Можно показать (см., в частности, разд. 3), что условие принадлежности процесса к почти эргодическому заданного порядка часто можно записать в виде

$$\gamma < F(\rho, k), \quad (18)$$

где γ — некоторый параметр или функция от параметров, характеризующих процесс, а F — функция величин, относящихся к мере неэргодичности.

Тогда возможны три случая; первые два предполагают наличие априорной информации.

1. Величина γ известна точно. Принадлежность процесса также устанавливается точно.

2. Априорная информация о процессе задана в форме статистических характеристик, например, в форме распределения для γ . Тогда решение о принадлежности процесса носит вероятностный характер; ошибка решения в ряде случаев может быть оценена, например, по распределению для γ и значению $F(\rho, k)$ с привлечением (18).

3. Величина γ может быть получена лишь как оценка на основе имеющейся реализации процесса. При этом решение о принадлежности процесса к почти эргодическим также носит вероятностный характер. Ошибка решения может быть оценена, если известны ошибки для γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
2. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 2, 267 (1961).
3. Ю. С. Шинаков, сб. Тр. учебных ин-тов связи, вып. 32, 70 (1966).
4. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1962.

Московский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
15 февраля 1968 г.

ON RANDOM PROCESSES DIFFERRING SLIGHTLY FROM ERGODIC PROCESSES

I. Kh. Rizkin

There are given some characteristics of nonergodic processes which make possible to estimate the degree of difference from ergodic processes and formulate the conditions of smallness of this difference. The example is presented.

УДК 535.3

УСРЕДНЯЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ПРИЕМНОЙ АПЕРТУРЫ НА ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА

М. Е. Грачева, А. С. Гурвич

Вычислена дисперсия флуктуаций полного светового потока через круглую приемную диафрагму на основе измеренных пространственных корреляционных функций флуктуаций интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы. Расчеты проведены для условий сильных флуктуаций.

Интенсивность светового потока, прошедшего через турбулентную атмосферу, испытывает беспорядочные флуктуации, обусловленные пульсациями коэффициента преломления воздуха. Известно, что при этом размеры диафрагмы приемного устройства оказывают существенное влияние на величину флуктуаций принимаемого светового потока. Это было установлено экспериментально в результате многочисленных наблюдений «мерцания» звезд с помощью телескопов. Впервые теоретическая интерпретация экспериментальных данных была произведена Татарским [1,2] который исследовал усредняющее действие приемной диафрагмы в случае слабых флуктуаций интенсивности, когда дисперсия флуктуаций логарифма интенсивности (уровня) $\sigma < 1$. В работе [4] аналогичным образом рассчитано усредняющее действие приемной диафрагмы на величину флуктуаций для большого диапазона значений флуктуаций уровня, исходя из первого приближения метода плавных возмущений. При этом получилось, что с ростом σ ослабление флуктуаций по апертуре приемника увеличивается.

Как показано в [1,2], в области, где $\sigma \ll 1$, средний квадрат флуктуаций уровня σ^2 в плоской волне определяется следующим соотношением, полученным при решении волнового уравнения методом плавных возмущений в первом приближении:

$$\sigma_1^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \sqrt{\lambda L} \gg l_0. \quad (1)$$

где L — длина пути луча в турбулентной атмосфере, C_n — структурная постоянная коэффициента преломления, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина световой волны, l_0 — внутренний масштаб турбулентности. В случае слабых флуктуаций радиус корреляции флуктуаций уровня имеет порядок зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$ поэтому усредняющее действие приемной апертуры на флуктуации интенсивности сказывается только при условии, что диаметр D превышает радиус корреляции.

Как следует из экспериментальных данных [3], уже на трассах порядка 500 метров в дневное время измеренные значения σ перестают следовать формуле (1), дисперсия флуктуаций уровня σ превышает единицу и наступает насыщение, т. е. флуктуации интенсивности перестают расти с увеличением дистанции. Тем не менее, параметр σ_1 является основной характеристикой процесса и в условиях сильных флуктуаций интенсивности $\sigma > 1$, когда нельзя ограничиться первым приближением метода плавных возмущений [2].

В [3] показано также, что в области сильных флуктуаций $\sigma_1 > 1$ с ростом параметра σ_1 радиус корреляции флуктуаций интенсивности заметно увеличивается и коэффициент корреляции R_I является функцией двух безразмерных параметров $R_I = (\rho/\sqrt{\lambda L}, \sigma_1)$, где ρ — расстояние между точками наблюдения. Полученные в [3] корреляционные функции сильных флуктуаций интенсивности позволяют рассчитать ослабление флуктуаций в зависимости от величины приемной диафрагмы.

Усредняющее действие приемной диафрагмы удобно характеризовать отношением $\Theta(R) = \frac{G(R)}{G(0)}$ ($G(R) = \frac{\bar{P}^2}{P^2}$, где P — полный световой поток через диафрагму приемника, \bar{P} — его среднее значение, $\bar{P}^2 = (P - \bar{P})^2$ — средний квадрат флуктуаций). Отношение $\Theta(R)$ показывает, во сколько раз относительные флуктуации полного светового потока P через диафрагму радиуса R меньше, чем для точечной диафрагмы. В работе [2] получено

$$\Theta(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} \frac{B_I(\rho)}{B_I(0)} \left(\arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right) \rho d\rho, \quad (2)$$

где $\frac{B_I(\rho)}{B_I(0)} = R_I = R \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda L}}, \sigma_1 \right)$ — нормированный коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности.

Заменой переменных $\frac{\rho}{D} = x$ ($D = 2R$) (2) сводится к виду

$$\Theta \left(\frac{D}{\sqrt{\lambda L}}, \sigma_1 \right) = \frac{16}{\pi} \int_0^1 R_I \left(\frac{Dx}{\sqrt{\lambda L}}, \sigma_1 \right) (\arccos x - x \sqrt{1 - x^2}) dx. \quad (3)$$

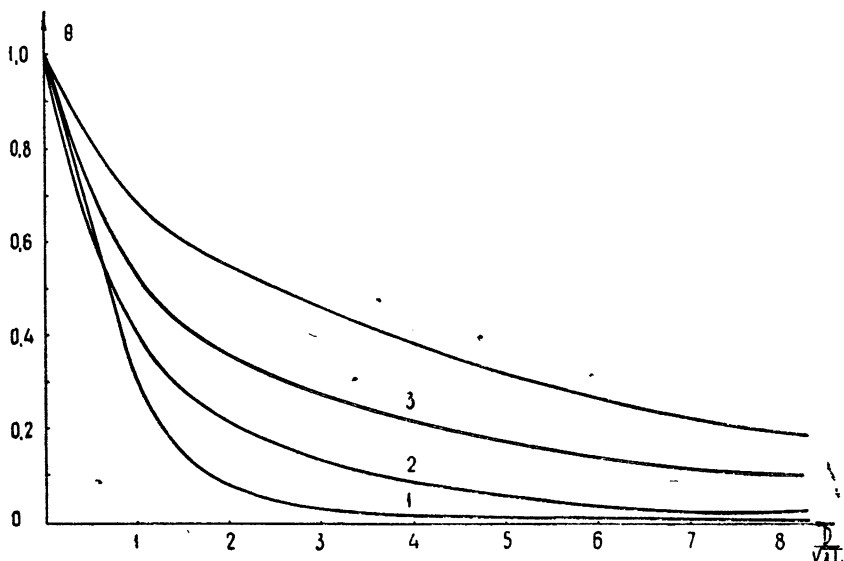


Рис. 1. Относительное уменьшение величины флуктуаций полного светового потока через диафрагму диаметра D в зависимости от $D/\sqrt{\lambda L}$ и σ_1 :
1. $\sigma_1 = 0$ [°]; 2. $\sigma_1 = 1 + 3$ [°]; 3. $\sigma_1 = 3 + 7$ [°]; 4. $\sigma_1 = 7 + 11$ [°].

Численное интегрирование выражения (3) с использованием корреляционных функций из [3] приводит к результатам, изображенным на рис. 1. По оси ординат отложена функция Θ , а по оси абсцисс отношение $D/\sqrt{\lambda L}$. Как видно из графика, в области сильных флуктуаций интенсивности с увеличением параметра σ_1 ослабление флуктуаций по апертуре приемника уменьшается. Это обстоятельство связано с отмеченным выше увеличением радиуса корреляции с ростом σ_1 и не было учтено в [4]. Поэтому результаты, полученные в [4], имеют ограниченное применение лишь для области слабых флуктуаций интенсивности.

В заключение следует отметить, что приведенный выше расчет ослабления флуктуаций диафрагмой приемника производился по эмпирическим корреляционным функциям, полученным лишь до значений $\rho/\sqrt{\lambda L} = 8$, и точность функции $R_l(\rho/\sqrt{\lambda L}, \sigma_1)$ при больших значениях параметра $\rho/\sqrt{\lambda L}$ невелика, тем не менее можно полагать, что данные рис. 1 хорошо отражают основной характер зависимости $\Theta(D/\sqrt{\lambda L})$ и могут быть использованы как приближенные оценки. Пересечение кривых 1 и 2, вероятно, вызвано недостаточной точностью экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 776 (1967).
4. D. L. Fried, Optic. Society, 57, № 2, 169 (1967).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
18 апреля 1968 г.

THE AVERAGING EFFECT OF THE RECEIVING APERTURE ON LIGHT INTENSITY FLUCTUATIONS

M. E. Gracheva, A. S. Gurvich

The dispersion of the full light beam fluctuations through the circular receiving aperture is calculated on the basis of measuring spatial correlation functions of light intensity fluctuations in propagating in the atmospheric layer near the Earth. Calculations are made for the conditions of strong fluctuations.

УДК 535.6

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИНУСОИДАЛЬНО МОДУЛИРОВАННОГО СВЕТОВОГО ПУЧКА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. Г. Лучинин, В. А. Савельев.

Рассмотрена задача о распространении синусоидально модулированного пучка света в мутной среде. Исследована зависимость фазовой скорости и показателя ослабления модулирующего сигнала от частоты модуляции ω . Показано, что с ростом ω диаграмма яркости переменной составляющей светового поля сужается.

Как известно [1-3], распространение модулированного пучка света в мутной среде сопровождается искажением модулирующего сигнала из-за многократного рассеяния света и связанного с ним разброса фотонов по пути (и времени) их пробега от излучателя до точки приема. В приближении лучевой оптики этот эффект описывается нестационарным уравнением переноса [3], которое имеет вид

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla_r + \varepsilon \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \sigma \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', t) x(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'} + Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t). \quad (1)$$

Здесь $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ — интенсивность излучения в точке \mathbf{r} в момент времени t и в направлении единичного вектора \mathbf{n} , $x(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ — индикатриса рассеяния среды, σ и ε — показатели рассеяния и суммарного ослабления ($\varepsilon = \sigma + \alpha$, где α — показатель истинного поглощения), c — скорость света, Q — источники излучения, $d\Omega_{\mathbf{n}'}$ — элемент телесного угла около направления \mathbf{n}' .

В силу линейности уравнения (1) относительно энергетической величины I , мощность сигнала на выходе приемной оптической системы (P_2) и излучаемая мощность (P_1) связаны линейным соотношением*

$$P_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $g(t)$ — отклик приемной системы на импульс излучения предельно малой длительности ($P_1 = \delta(t)$). Это означает, что по отношению к модулирующему сигналу система излучатель — среда — приемник ведет себя как линейный фильтр с импульсной реакцией $g(t)$ и частотной характеристикой

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

* Речь идет о мощности светового сигнала, усредненной по периоду оптических колебаний.

Последняя служит коэффициентом передачи гармонических составляющих модулирующего сигнала

$$F_2(\omega) = 2\pi G(\omega) F_1(\omega); \quad (4)$$

$$F_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{1,2}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

и дает наглядную информацию об искажениях его спектра под воздействием рассеивающей среды. Ее можно рассматривать как одну из основных характеристик оптического канала связи, знание которой необходимо для определения его пропускной способности и правильного выбора рабочего диапазона частот модуляции.

Заметим, что, если интенсивность пучка на выходе излучателя изменяется по синусоидальному закону

$$P_1(t) = \bar{P}_1 [1 + m_1 \cos(\omega t + \varphi_1)], \quad (6)$$

то, в соответствии с (2) и (3), принимаемая мощность равна

$$P_2(t) = \bar{P}_2 [1 + m_2 \cos(\omega t + \varphi_2)], \quad (7)$$

где

$$\bar{P}_2 = 2\pi G(0) \bar{P}_1, \quad m_2 = \frac{|G(\omega)|}{G(0)} m_1, \quad (8)$$

$$\varphi_2 = \arg G(\omega) + \varphi_1$$

(при написании (8) учитывалось, что $G(-\omega) = G^*(\omega)$). Следовательно, вид функции $G(\omega)$ может быть определен на основе данных об изменении средней мощности, глубины модуляции и фазы огибающей синусоидально модулированного пучка света, прошедшего через слой мутной среды. В принципе эти данные могут быть получены как теоретически (из уравнения (1)), так и экспериментально.

Некоторые закономерности распространения синусоидально модулированных пучков будут исследованы ниже на простейших моделях мутной среды, допускающих аналитическое решение уравнения (1).

1. ОДНОМЕРНАЯ СРЕДА

Пусть излучатель формирует пучок параллельных лучей, которые направлены вдоль базисного вектора \mathbf{z}_0 и падают на границу одномерной мутной среды, занимающей полупространство $z \geq 0$. Одномерной мы называем гипотетическую среду, которая рассеивает только в направлении падающего луча и противоположном ему направлении. Индикатриса рассеяния такой среды имеет вид

$$x(\gamma) = \mu \delta(\gamma) + (1 - \mu) \delta(\gamma - \pi), \quad (9)$$

где $\delta(\gamma)$ — дельта-функция, μ — вероятность рассеяния вперед ($0 \leq \mu \leq 1$).

При этих предположениях интенсивность излучения в среде можно представить в виде

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = H^+(\mathbf{z}, t) \delta(\mathbf{n} - \mathbf{z}_0) + H^-(\mathbf{z}, t) \delta(\mathbf{n} + \mathbf{z}_0) \quad (10)$$

и свести уравнение переноса (1) к системе двух дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon - \mu \sigma \right) H^+ = (1 - \mu) \sigma H^-; \quad (11)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon - \mu\sigma\right) H^- = (1 - \mu) \sigma H^+ \quad (12)$$

для потоков излучения H^\pm в направлениях $+z_0$ и $-z_0$. Эта система должна решаться при граничных условиях

$$H^+(0, t) = H_1(t); \quad (13)$$

$$H^+(z, t) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \alpha \neq 0, \quad (14)$$

H_1 — заданный поток излучения на входе в среду.

Если мощность падающего на среду пучка изменяется по синусоидальному закону

$$H_1(t) = \bar{H}_1[1 + m_1 \cos(\omega t + \varphi_1)], \quad (15)$$

то, в соответствии с (11) — (15), потоки излучения H^\pm равны

$$H^\pm(z, t) = \text{Re } \bar{H}_1 [F^\pm(z, 0) + m_1 F^\pm(z, \omega) e^{i\omega t + i\varphi_1}], \quad (16)$$

где $F^\pm(z, \omega)$ есть решение системы уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} + \varepsilon - \mu\sigma\right) F^+ = (1 - \mu) \sigma F^-; \quad (17)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega}{c} + \varepsilon - \mu\sigma\right) F^- = (1 - \mu) \sigma F^+ \quad (18)$$

при граничных условиях*

$$F^+(0, \omega) = 1; \quad (19)$$

$$F^+(z, \omega) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \alpha \neq 0. \quad (20)$$

При $\mu = 0$ это решение имеет вид

$$F^+(z, \omega) = \exp(-ihz); \quad (21)$$

$$F^-(z, \omega) = \frac{\Lambda}{1 + i\nu + ih/\varepsilon} \exp(-ihz), \quad (22)$$

где

$$\Lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \nu = \frac{\omega}{\varepsilon c}, \quad h = h_1 - ih_2; \quad (23)$$

$$h_{1,2}(\omega) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \{V[v^2 + (1 - \Lambda)^2][v^2 + (1 + \Lambda)^2] \mp (1 - \Lambda^2 - v^2)\}^{1/2}. \quad (24)$$

Решение для случая $\mu \neq 0$ может быть получено из (21) — (24) путем замены $\sigma \rightarrow (1 - \mu)\sigma$, $\varepsilon \rightarrow (\varepsilon - \mu\sigma)$. Учитывая это обстоятельство, мы будем в дальнейшем рассматривать только случай $\mu = 0$.

Как следует из (16), (21) — (24), постоянная во времени составляющая потока излучения H^+ экспоненциально убывает с ростом z , а

* Функция $1/2\pi F^\pm(z, \omega)$ служит частотной характеристикой оптического канала связи, который включает в себя излучатель, формирующий пучок параллельных лучей, и оптический приемник, расположенный на расстоянии z от излучателя и реагирующий на поток излучения в $\pm z_0$ -направлении.

пространственное распределение его переменной составляющей имеет вид затухающей волны, которая распространяется в $+z_0$ -направлении:

$$H^+(z, t) = \bar{H}_1 [e^{-h_2(\omega)z} + m_1 e^{-h_2(\omega)z} \cos(\omega t - h_1(\omega)z + \varphi_1)]. \quad (25)$$

Показатель ослабления этой волны (h_2) и ее фазовая скорость $v = \omega/h_1$ связаны соотношением

$$\frac{h_2}{\varepsilon} = \frac{v}{c} \quad (26)$$

и зависят от частоты модуляции ω .

Выражение для H^- имеет аналогичный вид и получается из (25) заменой $\bar{H}_1 \rightarrow \bar{H}_1 F^-(0, 0)$, $m_1 \rightarrow m_1 \frac{|F^-(0, \omega)|}{F^-(0, 0)}$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 + \arg F^-(0, \omega)$.

На рис. 1 представлена зависимость величин (h_2/ε) и (v/c) от без-

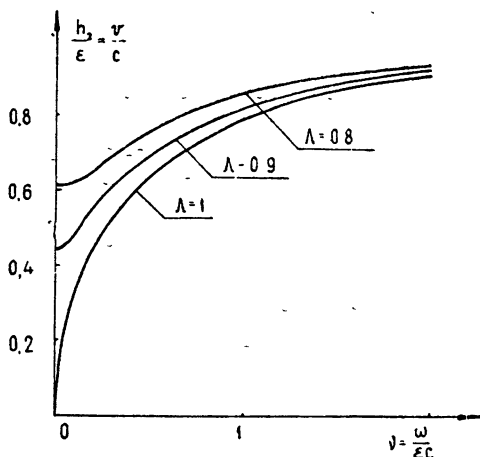


Рис. 1.

размерной частоты $\nu = \omega/\varepsilon c$ для нескольких значений параметра Λ . Из рисунка видно, что с увеличением ω показатель ослабления и фазовая скорость модулирующего сигнала монотонно растут, асимптотически приближаясь к значениям, которые они принимают в чисто поглощающей среде с показателем поглощения, равным ε ($h_2 \rightarrow \varepsilon$, $v \rightarrow c$ при $\omega \rightarrow \infty$). Дисперсия h_2 и v относительно слаба в интервалах частот $0 \leq \nu \ll (1 - \Lambda)/\Lambda$ и $\Lambda \ll \nu < \infty$, где справедливы приближенные формулы:

$$h_2/\varepsilon = v/c \simeq \sqrt{1 - \Lambda^2} \left[1 + \frac{\Lambda^2 \nu^2}{2(1 - \Lambda^2)^2} \right] \quad \text{при } \nu \ll \frac{1 - \Lambda}{\Lambda}; \quad (27)$$

$$h_2/\varepsilon = v/c \simeq \left(1 - \frac{\Lambda^2}{2\nu^2} \right) \quad \text{при } \nu \gg \Lambda. \quad (28)$$

При значениях $\omega \sim \varepsilon c$ дисперсия максимальна. Уменьшение параметра Λ приводит к ослаблению дисперсии во всем бесконечном интервале частот модуляции. При $\Lambda \rightarrow 1$ низкочастотный участок спектра со слабой дисперсией сужается и исчезает при $\Lambda = 1$.

Если пучок замодулирован в некоторой полосе частот $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$, то искажения модулирующего сигнала, которые возникают при его прохождении через мутную среду, могут рассматриваться как проявление описанного выше эффекта дисперсии. Величина этих искажений растет с увеличением оптической дальности (ϵz), параметра Δ , ширины спектра сигнала $\Delta\omega$ и существенно зависит от положения центральной частоты ω_0 . Характер этой зависимости очевидным образом определяется формой дисперсионных кривых рис. 1.

2. СРЕДА С СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ

В качестве второго примера рассмотрим задачу о распространении синусоидально модулированного пучка света в среде с вытянутой вперед индикатрисой рассеяния. Для упрощения задачи будем предполагать, что угловое распределение яркости является медленно меняющейся функцией (в масштабе угловой ширины индикатрисы) и в то же время его характерная ширина мала по сравнению с $\pi/2$. Ограничения, которые должны быть при этом наложены на оптические характеристики среды, частоту модуляции и угловую структуру падающего на среду пучка, будут указаны ниже.

Световое поле, которое формируется в трехмерной среде при падении на нее бесконечно широкого плоского синусоидально модулированного пучка света, может быть представлено в виде

$$I(z, \mathbf{n}, t) = \text{Re} [I_0(z, \mathbf{n}) + I_\omega(z, \mathbf{n}) e^{i\omega t}]. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (1), получаем

$$\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon + i \frac{\omega}{c}\right) I_\omega(z, \mathbf{n}) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} x(\mathbf{n}, \mathbf{n}') I_\omega(z, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'}, \quad (30)$$

где $\theta = (\mathbf{n}, \mathbf{z}_0)$.

Используя условие плавности $I_\omega(z, \mathbf{n}')$, разложим ее в ряд около максимума функции $x(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ и, ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим уравнение диффузии [4]:

$$\left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \alpha + i \frac{\omega}{c}\right) I_\omega(z, \mathbf{n}) = D \Delta_{\mathbf{n}} I_\omega(z, \mathbf{n}), \quad (31)$$

где $\Delta_{\mathbf{n}}$ — в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (32)$$

Коэффициент диффузии D равен

$$D = \frac{\sigma \bar{\gamma}^2}{4}, \quad (33)$$

где $\bar{\gamma}^2$ — средний квадрат угла отклонения лучей при единичном акте рассеяния:

$$\bar{\gamma}^2 = \int_{4\pi} \gamma^2 x(\gamma) d\Omega. \quad (34)$$

Поскольку по предположению угловая ширина тела яркости $\Delta\theta \ll \frac{\pi}{2}$, то в (31) и (32) полагаем

$$\sin \theta \simeq \theta, \quad \cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Делая замену переменных $\xi = \theta \cos \varphi$ и $\eta = \theta \sin \varphi$, приводим уравнение (31) к виду

$$\left[\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \alpha + i \frac{\omega}{c} \right] I_{\omega}(z, \xi, \eta) = D \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) I_{\omega}(z, \xi, \eta). \quad (35)$$

Уравнение (35) допускает разделение переменных. Положив

$$I_{\omega}(z, \xi, \eta) = R(z)F(\xi)\Phi(\eta), \quad (36)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + p \right) R(z) &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{p}{D} \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) - \frac{i \frac{\omega}{c} + \alpha + q}{D} \right] F(\xi) &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{q}{D} - \frac{p\eta^2}{2D} \right) \Phi(\eta) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где p и q — константы разделения.

Общее решение уравнения (35) имеет вид

$$\begin{aligned} I_{\omega}(z, \xi, \eta) &= e^{(i\xi^2 + \eta^2)/8} \sum_{mj} A_{mj} \exp \left(-p_{mj} z - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{mj}}{2D}} \right) \times \\ &\times H_m \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{mj}}{2D}} \xi \right) H_j \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{mj}}{2D}} \eta \right), \end{aligned} \quad (38)$$

где $H_k(x)$ — полином Эрмита и

$$\begin{aligned} p_{mj} &= \alpha + i \frac{\omega}{c} - \frac{D}{2} + D(m+j+1)^2 + D(m+j+1) \times \\ &\times \sqrt{(m+j+1)^2 + \frac{2(\alpha + i\omega/c)}{D} - \frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, решение представляется суммой бесконечного набора полей с различной угловой структурой и различными постоянными распространения. Коэффициенты возбуждения нормальных волн A_{mj} определяются граничными условиями при $z=0$, $z \rightarrow \infty$, и при любой разумной зависимости $I_{\omega}(0, \mathbf{n})$ оказываются отличными от нуля для

достаточно большого набора индексов m и j^* . Поэтому в рассматриваемом случае оптический канал связи является принципиально многомодовой системой, что, естественно, затрудняет исследование его частотных характеристик.

Здесь мы ограничились расчетом постоянных распространения двух типов нормальных волн, именно, волн с индексами $m = j = 0$ и $m = 2, j = 0$ или $m = 0, j = 2^{**}$. Результаты расчета, проведенные по формуле (39) для значений параметров $\bar{\gamma}^2 = 0,03$ и $\Lambda = 0,5; 0,8$, представлены на рис. 2 и 3 в виде кривых, изображающих зависимость показателей ослабления и фазовых скоростей этих типов волн от безразмерной частоты $\nu = \omega/\epsilon c$. Из сравнения кривых рис. 1 и рис. 2, 3 вытекает, что в анизо-

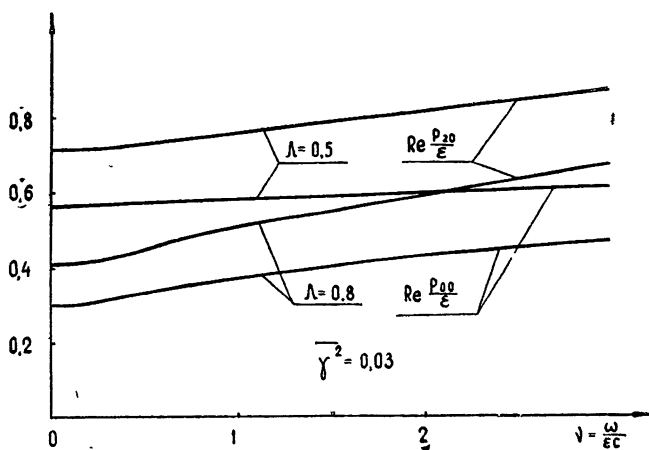


Рис. 2.

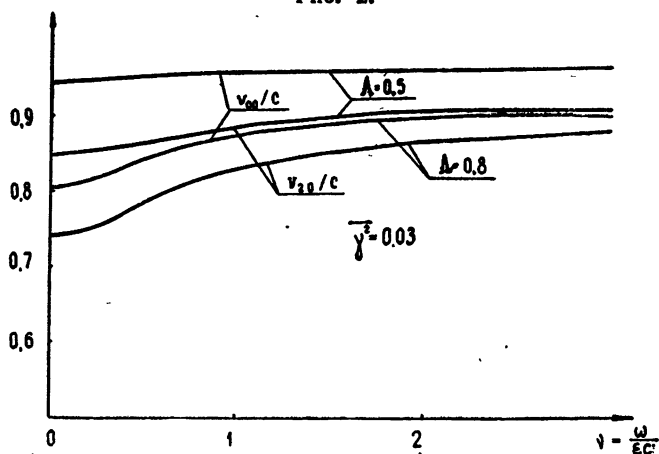


Рис. 3.

* Заметим, что отыскание коэффициентов A_{mj} производится обычным способом, поскольку имеет место соотношение ортогональности:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right] \exp \left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \right) F_m F_n \Phi_i \Phi_j d\xi d\eta = 0 \quad \text{при } m \neq n, \quad i \neq j.$$

Норма собственных функций представляется величиной

$$N_{mi} = \iint_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \right) F_m^2 \Phi_i^2 d\xi d\eta = \pi \frac{z^{m+i} m! n!}{\sqrt{1/16 + p_{mi}/2D}} \times \left(1 - \frac{m+i+1}{\sqrt{1/16 + p_{mi}/2D}} \right).$$

** При симметричных угловых граничных условиях $A_{10} = A_{01} = A_{11} = 0$.

тропно рассеивающей среде дисперсия имеет такой же характер, как и в одномерной среде.

Интересно отметить, что частота модуляции влияет не только на величину постоянной распространения волны, но и на угловое распределение интенсивности. Например, для волны типа $m=j=0$ из (38) получаем

$$F_0 \Phi_0 \sim \exp \left[-\frac{\theta^2}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{00}}{2D}} - \frac{1}{4} \right) \right] = \exp \left(-\frac{\theta^2}{2} - i\varphi \right), \quad (40)$$

где

$$\bar{\theta}^2 = \frac{2}{\operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{00}}{2D}} - \frac{1}{4} \right)}; \quad (41)$$

$$\varphi = \frac{\theta^2}{2} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{p_{00}}{2D}}. \quad (42)$$

Нетрудно видеть, что с ростом частоты модуляции параметр $\bar{\theta}^2$, характеризующий угловую ширину амплитудной диаграммы яркости, уменьшается. Зависимость $\bar{\theta}^2$ от безразмерной частоты представлена на рис. 4. Лучи, образующие тело яркости в некоторой точке среды и при-

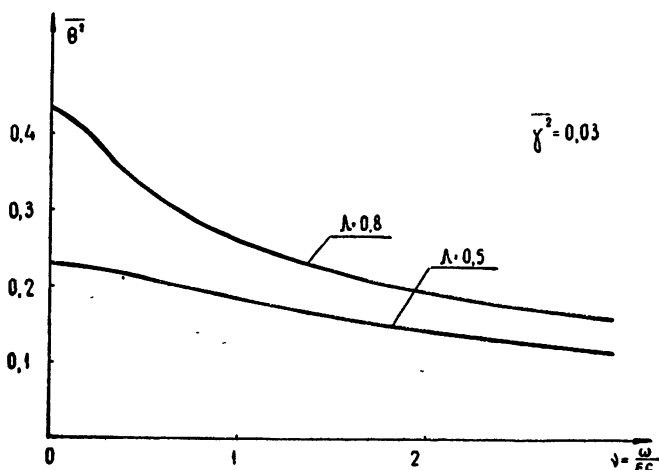


Рис. 4.

ходящие в нее под разными углами, имеют разные фазы. Фазовая диаграмма яркости определяется формулой (42).

В соответствии с предположениями, которые были сделаны в начале настоящего раздела статьи, границы применимости полученного решения определяются неравенством

$$\bar{\gamma}^2 \ll \bar{\theta}^2 < \frac{1}{2}, \quad (43)$$

которое выполняется при условии

$$\sqrt{\bar{\gamma}^2} \ll \frac{2\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{1-\Lambda+\sqrt{(1-\Lambda)^2+\nu^2}}} < \frac{1}{2\sqrt{\bar{\gamma}^2}}. \quad (44)$$

Авторы признательны Л. С. Долину за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Романова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 10, 1022 (1965).
2. Л. М. Романова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 2, № 8, 844 (1966).
3. А. М. Белянцев, Л. С. Долин, В. А. Савельев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 4, 489 (1967).
4. Н. Времмер, J. Res. Nat., Bureau Stand., 68D, 503 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 мая 1968 г.

PROPAGATION OF A SINUSOIDAL MODULATED LIGHT BEAM IN
SCATTERING MEDIUM

A. G. Luchinin, V. A. Savel'ev

The propagation of a sinusoidal modulated light beam in a turbid medium is considered. The dependence of the phase velocity and the attenuation coefficient of the modulated signal on the modulation frequency ω is investigated. It is shown that the brightness pattern of the variable component of the light field is narrowed with the growth of ω .

УДК 621.371.22

О ТРАНСФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННУЮ ПРИ РАССЕЯНИИ НА СЛУЧАЙНЫХ НЕРОВНОСТЯХ ПОВЕРХНОСТИ

Е. П. Фетисов

Рассматривается рассеяние поверхностной волны при распространении вдоль шероховатой поверхности. Указывается на возможность экспериментального обнаружения возникающего при этом излучения.

В ряде случаев возможно возбуждение поверхностных волн с весьма значительной спектральной плотностью энергии, на несколько порядков превышающей, например, плотность энергии переходного излучения^[1]. В связи с этим представляет интерес вопрос о преобразовании поверхностной волны в пространственную и наблюдении соответствующего излучения. По-видимому, подобное излучение наблюдалось в работах [2, 3].

В настоящей работе рассматривается эффект трансформации при рассеянии поверхностной волны на случайных неровностях поверхности. Пусть поверхностная волна распространяется в направлении единичного вектора \mathbf{n} вдоль плоскости раздела $z = 0$ между вакуумом ($z > 0$) и средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$. Соответствующее поле в вакууме имеет вид [1]

$$E_{\omega}^j = (\omega^2/c^2)(1 + \epsilon)^{-1/2} \hat{\Pi}_{\omega}^j(\hat{k}_{sz}\mathbf{k} + \kappa\mathbf{n}), \quad (1)$$

где $\hat{\Pi}_{\omega}^j$ — фурье-компонента вектора Герца волны, $\kappa = (\omega/c)\sqrt{\epsilon/1 + \epsilon}$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, $\hat{k}_{sz} = (\omega/c)\kappa\sqrt{\epsilon}$. Поле в среде E_{ω}^s получается из (1) заменой $\hat{\Pi}^j \rightarrow \hat{\Pi}^s$, $\hat{k}_{sz} \rightarrow -\hat{k}_{jz} = \frac{\omega}{c}\kappa/\sqrt{\epsilon}$.

Рассмотрим вначале редко расположенные неровности, малые по сравнению с длиной волны ($\hat{\lambda} \approx 1500 \text{ \AA}$ в серебре), и пренебрежем ослаблением волны вследствие рассеяния [4]. В таком случае для спектральной плотности W_{ω}^+ излучения, рассеянного в единицу телесного угла в направлении вектора $\mathbf{q} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ выступами, расположенными на некоторой площадке S , можно получить следующее выражение*:

$$W_{\omega||}^+ = 4(\omega^4/c^3)(N^+/S)\text{ctg}^2\theta \iint |(\mathbf{p}^+ + \mathbf{q})q_{sz} - \epsilon p_z^+ \kappa|^2 |\epsilon q_z + q_{sz}|^{-2} dx dy. \quad (2)$$

W_{\perp}^+ получается из $W_{||}^+$ заменой произведения модулей выражением $|[\mathbf{p}\mathbf{q}]_z|^2 |q_z + q_{sz}|^{-2}$. Здесь $P_i^+ = \alpha_{ie}^+ E_e^j$ — средний дипольный момент выступа, N^+ — их число, $\kappa = (q_x, q_y)$, $q_{sz} = \sqrt{\epsilon - \sin^2\theta}$, индексы $||$ и \perp выделяют

* Поля диполей приведены, например, в работе [5]; линейные размеры площадки считаются малыми по сравнению с расстоянием до точки наблюдения.

волну, электрический вектор которой лежит в плоскости рассеяния (q, k) или перпендикулярен к ней. Аналогичные величины W^- для диполь-впадин получаются заменой $P_{x,y}^+ \rightarrow P_{x,y}^-$, $\varepsilon P_z^+ \rightarrow P_z^-$, $N^+ \rightarrow N^-$, полная плотность W_ω равна сумме W_ω^+ и W_ω^- . Рассеянное излучение пропорционально квадрату поля поверхностной волны и имеет максимум в той же спектральной области $\varepsilon(\omega) \simeq -1$, где велика плотность энергии волны. Задавая закон, по которому распределены поляризуемости неровностей, и выбирая $\Pi^{i,s}$, можно вычислить излучение для различных частных случаев возбуждения поверхностных волн.

Коэффициент трансформации η определяется отношением W_ω к полному потоку энергии в поверхностной волне. В вакууме этот поток равен

$$\hat{W}_\varepsilon^i = (\omega^3/c^2) |\varepsilon|^{-1} + \varepsilon |\oint df| |\Pi|^2 \operatorname{Re}(\hat{x}n + \hat{k}_{jz}k). \quad (3)$$

Аналогичный поток в среде \hat{W}_ω^s получается заменой $\Pi^i \rightarrow \Pi^s$ и $\hat{x} \rightarrow \hat{x}/\varepsilon$.

Более интересно аппроксимировать реальную поверхность моделью пологих неровностей [4, 6], η при этом достигает больших значений*. В этом случае для плоской поверхности волны частоты ω получаем

$$W_\omega = (\omega^4/8\pi^2 c^3) \left| \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right|^2 |\Pi|^2 G(k_\perp - x) S(\zeta_0 l_g \bar{\lambda}^2)^2 q_z^2 (Q_\parallel + Q_\perp) \quad (4)$$

$$(\bar{\lambda} = \lambda/2\pi);$$

$$Q_\parallel = |\varepsilon|^2 |x^2 - q_{sz}(nx)/\sqrt{\varepsilon}|^2 |\varepsilon q_z + q_{sz}|^{-2} x^{-2}, \quad Q_\perp = |\varepsilon| |x^2 n - x(nx)|^2 \times \\ \times |q_z + q_{sz}|^{-2} x^{-4}. \quad (5)$$

Здесь G — фурье-образ функции корреляции высот, ζ_0 — средняя высота, l_g — радиус корреляции, Π — вектор Герца, из которого выделена координатная зависимость, $k_\perp = \left(\hat{k}_x - \frac{\omega}{c} q_x, \hat{k}_y - \frac{\omega}{c} q_y \right)$, $\hat{k}_{x,y}$ — компоненты волнового вектора поверхностной волны. Заметим, что в общем случае функция G позволяет учесть не только пространственную, но и временную (случайную и систематическую) корреляцию высот, приводящую к комбинационному рассеянию [6].

Рассмотрим подробнее случай возбуждения поверхностной волны наклонно падающим электроном $\beta = (\beta_x, 0, \beta_z)$ [1] в пределе слабого поглощения. В рэлеевской модели одинаковых диполь-полусфер радиуса a в пренебрежении деполаризацией имеет место формула

$$W_{\omega\parallel} = (N/S) (\omega^8 \beta_x / 2c^7 \beta_z) a^6 |1 + \varepsilon|^{-2} |\Pi_\omega^i|^2 |\operatorname{Im} \hat{k}_{jz} \operatorname{Im} x|^{-1} \cos^2 \theta \times \\ \times [\sin^2 \varphi (1 + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta]. \quad (6)$$

Величина W_\perp получается из W_\parallel заменой угловой части на $\cos^2 \theta \cos^2 \varphi$. Легко видеть, что при наблюдении в плоскости (y, z) излучение оказывается поляризованным в плоскости рассеяния, $W_\perp = 0$, тогда как при наблюдении под малыми углами θ в плоскости (x, z) излучение сильно поляризовано в перпендикулярной плоскости, $W_\perp \gg W_\parallel$.

В модели пологих неровностей в длинноволновом пределе $l_g \ll |\hat{k}_\perp|^{-1}$ величина $2Q_\parallel$ совпадает с выражением в квадратных скобках формулы (6), величина $2Q_\perp$ равна $\cos^2 \varphi$, т. е. угловое распределение и поляризация те же, что и в рэлеевской модели. В случае

* Сходный метод был использован недавно в работах по рассеянию света шероховатой пластинкой [7-9].

большого радиуса корреляции $l_g \gg |k_{\perp}^{-1}|$, благодаря функции G , начинает преобладать рассеяние в направлении «зеркального отражения» [4]. Однако для поверхностных волн этот эффект невелик, поскольку $(\omega/c) \ll |\hat{k}|$, и более существенным оказывается общее уменьшение рассеяния.

Наконец, коэффициент трансформации в рэлеевской модели равен

$$\eta = (N/S) (\omega^5/c^5) a^6 |1 + \varepsilon|^{-1} Q(\theta, \varphi) |\operatorname{Im} \hat{k}_{jz} / \operatorname{Im} \hat{x} \operatorname{Re} \hat{x}|. \quad (7)$$

Принимая для оценки $\omega \simeq 6 \cdot 10^{15}$, $\varepsilon'' \simeq 0,24$ (серебро), $(N/S) = f/\hat{\lambda}^2$, $f < 1$, $a \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ см, получаем $\eta \simeq f \cdot 10^{-4}$, т. е. эффективность рассеяния невелика, что связано с малой концентрацией диполей.

Для пологих неровностей в случае нормального распределения имеем

$$\eta = (\omega/2\pi c) Q_{\parallel, \perp} \cos^2 \theta |1 + \varepsilon|^{-1} |\operatorname{Im} \hat{k}_{jz} / \operatorname{Im} \hat{x} \operatorname{Re} \hat{x}| (\zeta_0 l_g / \bar{\lambda}^2)^2 \exp(-|k_{\perp}^2| l_g^2/4). \quad (8)$$

Легко видеть, что радиус корреляции порядка нескольких сотен $\hat{\lambda}$ является оптимальным для рассеяния в рассматриваемой области частот и нормального распределения. Если $\varepsilon'' \simeq 0,24$, $\zeta_0 \simeq 5 \cdot 10^{-7}$ см и $l_g \simeq 3 \cdot 10^{-6}$ см, то η составляет около 10^{-3} .

Учитывая большую спектральную плотность энергии поверхностных волн [1], можно утверждать, что интенсивность рассеянного излучения, по крайней мере, на порядок превышает интенсивность переходного излучения и, следовательно, трансформированное излучение должно наблюдаться на эксперименте. Исследование характеристик этого излучения может оказаться полезным для изучения свойств поверхности.

Считаю приятным долгом поблагодарить В. Е. Пафомова и В. М. Финкельберга за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Пафомов, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, **53**, 965 (1967).
2. H. Boersch, P. Dobberstein, D. Fritsche, G. Sauerbrey, Zs. Phys., **187**, 97 (1965).
3. G. E. Jones, L. S. Cram, E. A. Arakawa, Phys. Rev., **147**, 515 (1966).
4. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд АН СССР, М., 1961.
5. В. Е. Пафомов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 240 (1967).
6. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 1, 58 (1961).
7. E. A. Stern, Phys. Rev. Lett., **19**, 1321 (1967).
8. R. E. Willems, R. H. Ritchie, Phys. Rev. Lett., **19**, 1325 (1967).
9. E. Kretschman, H. Raether, Zs. Naturforsch., **22a**, 1623 (1967).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
24 апреля 1968 г.

TRANSFORMATION OF SURFACE WAVE INTO SPATIAL WAVE IN SCATTERING ON RANDOM SURFACE IRREGULARITIES

E. P. Fetisov

The scattering of the surface wave traveling along a rough surface is considered. A possibility to discover experimentally the radiation occurred in this case is pointed out.

УДК 538.56

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Л. А. Островский

Проводится расчет частотных изменений и соответствующего преобразования спектра для двух взаимодействующих импульсов в нелинейном диэлектрике.

Сильное расширение спектра светового излучения при самофокусировке, неоднократно наблюдавшееся в последнее время [1, 2], связано, по крайней мере, частично с нелинейным самовоздействием бегущего импульса, в первую очередь, с частотной модуляцией света, вызванной изменением показателя преломления среды [3-5]. Аналогичные эффекты могут быть обусловлены взаимодействием волны с другим импульсным полем (компонентой вынужденного рассеяния [6] или отраженным импульсом основной частоты). Нелинейное взаимодействие рассматривается обычно без учета нестационарного характера процесса [7, 8].

Интересно провести хотя бы простейший расчет совместного влияния эффектов самовоздействия и взаимодействия на характер частотных изменений в импульсах. Уравнения такого процесса получены в [9] для двух бегущих навстречу волн; их обобщение на случай произвольных импульсов не составляет труда.

Для анализа фазовых эффектов ограничимся первым приближением, в котором не учитывается искажение амплитудных огибающих, т. е.

$$m_i = m_i(\eta_i), \quad \eta_i = t - z/v_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где m_i — интенсивность i -й волны, v_i — ее групповая скорость ($v_1 \neq v_2$). Интегрируя уравнения для частот, получим*

$$\delta_i = \widetilde{\delta}_i(\eta_i) - \frac{\beta z}{c} \dot{m}_i(\eta_i) + \frac{2\beta v_i/c}{1 - v_i/v_k} [m_k(\eta_i) - m_k(\eta_k)], \quad i \neq k. \quad (2)$$

Здесь δ_i — переменная часть частоты, отнесенная к средней частоте ($\delta_i = \omega^{-1} \varphi_i$), $\widetilde{\delta}_i$ — функции, заданные при $z = 0$, β — коэффициент нелинейности ($n_{nl} = \beta m$). При $m_2 = 0$ (2) переходит, разумеется, в формулу для частоты уединенного бегущего импульса. Там, где нужно конкретизировать функции $m_i(\eta_i)$, будем считать импульсы косинусоидальными:

$$m_i = \frac{1}{2} M_i (1 + \cos \Omega_i \eta_i), \quad -\frac{T_i}{2} < \eta_i < \frac{T_i}{2}, \quad T_i = \frac{2\pi}{\Omega_i}, \quad (3)$$

Рассмотрим следующие случаи.

* Мы пренебрегаем здесь дисперсией нелинейных параметров среды, учет которой привел бы к появлению дополнительного множителя порядка единицы в последнем члене формулы (2).

1. *Взаимодействие импульсов большой длительности.* Пусть $v_i T_i \gg L$, где L — длина нелинейного участка среды. Тогда из (2) имеем

$$\delta_i = \widetilde{\delta}_i - \frac{\beta z}{c} (\dot{m}_i + 2\dot{m}_R). \quad (4)$$

Если, например, второй импульс вызван отражением первого от границы при $z=L$, то $v_1 = -v_2 = v$, $\delta_2(L, t) = \delta_1(L, t)$, $m_2 = Rm_1$ (R — коэффициент отражения). Тогда

$$\delta_1 = -\frac{\beta z}{c} (1 + 2R) \dot{m}_1, \quad \delta_2 = \frac{\beta}{c} [(2 + R)z - 3(1 + R)L] \dot{m}_1. \quad (5)$$

Следовательно, частота выходящего излучения (при $z = L$) изменяется так же, как и у бегущего импульса, но это изменение больше в $(1 + 2R)$ раз. В случае (3) максимальная девиация в точке $z = L$ равна $\pm \delta_n$, где $\delta_n = \pi L(1 + 2R)\beta M/cT$.

Определим спектр прошедшей волны. Функция, описывающая световое поле $E_i \sim \sqrt{m_i} \cos(\omega_i t + \int \delta_i \omega_i dt)$, может быть разложена на интервале $(-T/2, T/2)$ в ряд Фурье с частотами $\omega_{\pm}^{\pm} = \omega \pm (\nu + 1/2)\Omega$, причем энергия W_{\pm}^{\pm} пропорциональна $J_{\nu}^2(\alpha) + J_{\nu+1}^2(\alpha)$, где $\alpha = \delta_n/\Omega$ — индекс модуляции, $J_{\nu}(\alpha)$ — функции Бесселя первого рода.

Так же распределена интенсивность I_{ω} сплошного спектра импульса в соответствующих дискретных точках. Если $I_{\omega}(\delta)$ существенно изменяется лишь на интервалах $\Delta\omega > \Omega$, то приближенно $I_{\omega}(\delta) \sim J_{\nu}^2(\alpha) + J_{\nu+1}^2(\alpha)$; $\nu = (\delta/\Omega) - 1/2$ во всех точках оси δ . Тогда пользуясь асимптотикой функции Бесселя при $x \gg 1$ (только в этом случае возникает сильное расширение спектра), получим $(\cos \beta = \nu/\alpha = \delta/\delta_n)$

$$I_{\omega}(\delta) \simeq (1 - R) \frac{MT}{2\pi \delta \operatorname{tg} \beta} (\cos^2 s_{\nu} + \cos^2 s_{\nu+1}); \quad s_{\nu} = \nu \operatorname{tg} \beta - \nu\beta - \pi/4, \quad (6)$$

т. е. функция $I_{\omega}(\delta)$ осциллирует с переменным периодом $T_{\delta} = \pi\Omega/\beta^*$. Отметим, что при $\nu \gg 1$ (когда формула (6) верна в деталях) $s_{\nu+1} \simeq s_{\nu} - \beta$. Вблизи центра линии $\beta \rightarrow \pi/2$, $T_{\delta} \rightarrow 2\Omega$, а амплитуда осцилляций стремится к нулю. С приближением к краям линии $\beta \rightarrow 0$ и T растет, а амплитуда осцилляций максимальна (рис. 1).

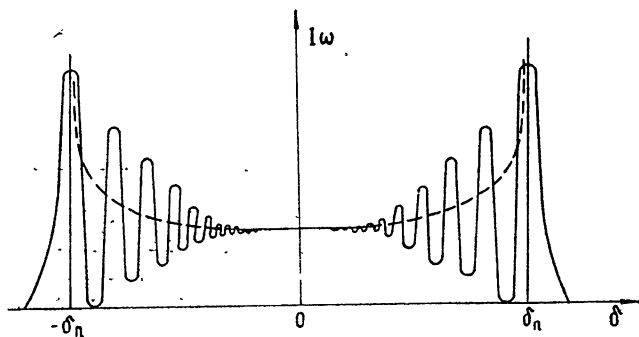


Рис. 1 Структура линии, возникающая при распространении одиночного импульса и при взаимодействии длинных импульсов.

* На связь периодичности структуры линии с частотной модуляцией ранее указывали Шимицу [2] и Келли (частное сообщение).

В окрестности последнего максимума около точек $\delta = \pm \delta_n$ формула (6) теряет применимость. Оценка порядка величин ширины последнего максимума $(T_\delta)_{\max}$ и максимальной интенсивности $(I_\omega)_{\max}$ в нем дает

$$(T_\delta)_{\max} \sim \Omega \alpha^{1/3}, \quad (I_\omega)_{\max} \sim I_\omega(0) \alpha^{1/3}, \quad (7)$$

где $I_\omega(0) = (1 - R)MT/2\pi\delta_n$ — интенсивность вблизи центра линии. Следовательно, I_m может заметно расти от центра линии к ее краю**. Усредняя функцию (6) на больших, по сравнению с T_δ , интервалах, можно получить

$$\bar{I}_\omega = I_\omega(0) (1 - \delta^2/\delta_n^2)^{-1/2}. \quad (8)$$

Это выражение сразу следует из приближенной формулы, приведенной в [3].

2. Взаимодействие коротких импульсов. Пусть теперь $v_1 T_1 < L$, т. е. импульс целиком укладывается на нелинейном участке. В этом случае существенную роль играет временной сдвиг между импульсами. Действительно, вдали от точки $z = 0$ функции $m_k(\eta_i)$ и $m_k(\eta_k)$, входящие в (2), отличны от нуля в неперекрывающихся областях, одна из этих функций лежит вне области локализации i -го импульса и может быть отброшена. Оставшееся выражение показывает, что взаимодействие приводит к одностороннему расширению спектра, так, при встречном распространении ($v_1 v_2 < 0$) спектр смещается в область низких частот. Если $v_1 = -v_2 = v$, то

$$\delta_1 = \tilde{\delta}_2(\eta_1) - \frac{\beta z}{c} \dot{m}_1(\eta_1) - \frac{\beta v}{c} m_2(\eta_2). \quad (9)$$

Для более детального анализа этого эффекта предположим, что последний член в (9) играет определяющую роль. Если импульсы имеют вид (3) с $T_1 = T_2$ и в данной точке их максимумы совпадают (как при отражении на конце линии), то интенсивность спектра в этой точке (при тех же допущениях, что и выше) пропорциональна $(J_v + J_{v+1})^2$ при $\delta < -\delta'_n/2$ и $(J_v - J_{v+1})^2$ при $-\delta'_n/2 < \delta < 0$; здесь $\delta'_n = \omega_2 v \beta M_2 / 2c\omega_1$.

Соответствующая форма линии показана на рис. 2. Средняя интенсивность меняется по закону

$$\bar{I}_\omega = I_1 \left(\frac{|\delta|/\delta'_n}{1 - |\delta|/\delta'_n} \right)^{1/2}, \quad I_1 = \frac{2cM_1}{v\Omega\omega_2\beta M_2} \quad (-2\delta'_n < \delta < 0). \quad (10)$$

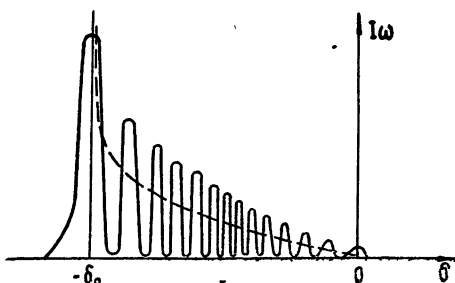


Рис. 2. Структура линии, обусловленная сильной релаксацией среды или взаимодействием коротких импульсов, совпадающих в данной точке.

* Детальный анализ формы линии при $|\delta| \geq \delta_n$ можно провести, пользуясь более сложной асимптотикой бесселевых функций [10].

Отметим, что такая же форма линии отвечает бегущему импульсу в релаксирующей среде, если $\Omega\tau \gg 1$, где τ — время релаксации, причем $I_1 = 2M/\Omega\delta'_n$, $\delta'_n = 2\delta_n/\Omega\tau$, а δ'_n — девиация при $\tau = 0$ [5]. Если $L \gg v\tau$ (что обычно выполняется), то сдвиг спектра вниз из-за взаимодействия (отражения) возможен уже при $T \gg \tau$, когда инерционность среды несущественна.

Другой пример — распространение в одном направлении импульсов, исходящих одновременно из точки $z = 0$. Рассматривая поле вдали от $z = 0$, следует отбросить в (2) член с $m_k(\eta_k)$. В этом случае также происходит расширение спектра в одну сторону: вниз при $v_k > v_i$ и вверх при $v_k < v_i$; взаимные сдвиги частоты для двух импульсов противоположны по знаку. Так, основное излучение расширяет вверх спектр попутной стоксовой компоненты вынужденного комбинационного рассеяния, поскольку групповая скорость последней больше*. Заметим, что при близких скоростях v_1 и v_2 эффект взаимодействия возрастает. Если, однако, v_1 и v_2 близки настолько, что $|1 - v_k/v_i| < \beta m_{1,2}$ (групповой синхронизм), то более корректно рассматривать все поле как одну модулированную волну (формула (2) с $m_k = 0$) с некоторым результирующим изменением амплитуды и фазы. Это изменение (биения) может быть быстрым по отношению к модуляции каждого импульса в отдельности и, следовательно, вести к более интенсивному расширению спектра.

Если, наконец, поля импульсов разделены как на входном, так и на выходном концах нелинейного участка, взаимодействие вообще не оказывает влияния на спектр выходящего излучения. Ситуация, однако, меняется в случае релаксирующей среды. При $\tau \gg T$ для такой среды можно получить

$$\delta_i = \tilde{\delta}_i(\eta_i) - \frac{\beta}{c\tau} \left[m_i(\eta_i)z + \frac{2v_i}{(1 - v_i/v_k)} \int_{\eta_i}^{\eta_k} m_k(\xi) d\xi \right]. \quad (11)$$

Отсюда следует, что после разделения импульсов взаимодействие проявляется как постоянный сдвиг спектра, знак которого снова зависит от знака разности $v_k - v_i$.

В заключение оценим величину рассмотренных эффектов в нелинейной оптике. Оценки влияния самовоздействия, уже проводившиеся для самофокусирующихся импульсов [3–5], показывают возможность сильного (10% и более от несущей частоты) расширения спектра. Согласно (4) и (5), наличие отражения может заметно увеличить эффект уже для длинных импульсов. Формулы (6), (7) позволяют рассчитывать и некоторые детали формы линии. В частности, соотношение (7) между Ω , δ_n , $(\delta)_\text{max}$ имеет место для спектра, приведенного в [2]. Что касается коротких импульсов, то относительное изменение частоты в (9), вызванное взаимодействием, порядка изменения $n_\text{нл}$, которое при самофокусировке достигает $10^{-2} - 10^{-1}$ [8]. Для попутных волн эффект существенно возрастает из-за близости групповых скоростей (обычно в оптике $|1 - v_i/v_k| < 10^{-1}$). В результате для не слишком коротких ($T \gg \tau$) пикосекундных импульсов взаимодействие может повлечь за собой столь же сильное (хотя и другое по характеру) расширение спектра, как и самовоздействие. Дальнейшее укорочение импульсов ведет к уменьшению эффекта примерно в $\Omega\tau$ раз из-за релаксации.

* Здесь не учитывается процесс усиления компоненты ВКР; влияние этого процесса на фазовые сдвиги в импульсе обсуждалось в [11] на основе приближения, аналогичного принятому в формуле (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Brewer, Phys. Rev. Lett., 19, 8 (1967).
2. F. Shimizu, Phys. Rev. Lett., 19, 1097 (1967).
3. Л. А. Островский, Письма в ЖЭТФ, 6, 807 (1967).
4. P. Kelley, F. De-Martini, C. Townes, T. Gustafson, Phys. Rev., 164, 312 (1967).
5. Л. А. Островский, Доклад на 3-м Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Ереван, 1967.
6. K. Shimoda, Japan J. Appl. Phys., 5, 615 (1966).
7. N. Bloembergen, P. Lallemand, Phys. Rev. Lett., 16, 81 (1966).
8. R. Brewer, C. Townes, Phys. Rev. Lett., 18, 196 (1967).
9. Л. А. Островский, сб. Нелинейная оптика (Тр. 2-го Всесоюзного симпозиума, 1966), Новосибирск, 1968, стр. 301.
10. В. А. Фок, ДАН СССР, 1, 7 (1934).
11. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 55, 1430 (1968).

INTERACTION OF WAVE PACKETS IN NONLINEAR MEDIUM

L. A. Ostrovskii

Frequency shifts and the corresponding spectrum transformations are calculated for two interacting pulses in a nonlinear dielectric.

УДК 621.372 · 535

ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ АБЕРРАЦИЙ КОРРЕКТОРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛУЧЕВОГО ВОЛНОВОДА ПРИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ СЕЛЕКЦИИ МОД

В. И. Таланов, Н. М. Шеронова

Предложен метод расчета средних потерь в квазиоптических линиях передачи со случайными нерегулярностями. Метод основан на рассмотрении рекуррентных уравнений для коэффициентов корреляции амплитуд нормальных волн на последовательных корректорах. Для различных типов случайных возмущений корректоров рассчитаны средние потери в волноводе с высокой степенью селекции поперечных мод

При проектировании квазиоптических линий передачи (линзовых [1] и зеркальных [2,3] волноводов) исключительно важным является вопрос об устойчивости пучков в таких системах по отношению к случайным возмущениям параметров отдельных фазовых корректоров. Изучению этого вопроса был посвящен ряд работ [4-11].

В данной работе развивается подход, основанный на рассмотрении случайных возмущений самой функции фазовой коррекции. Как частный случай получаются результаты, относящиеся к изменениям отдельных параметров фазового корректора как целого. Метод анализа основывается на рассмотрении коэффициентов корреляции амплитуд нормальных волн*.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть f_k — собственные функции, описывающие волновые пучки в «среднем» сечении диафрагмированных фазовых корректоров регулярного лучевого волновода (рис. 1) и являющиеся решением уравнения

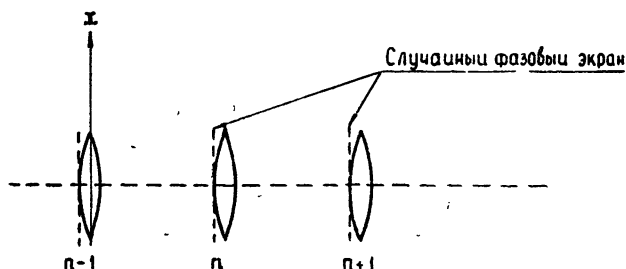


Рис. 1. Линзовый волновод.

* Настоящая работа была выполнена в 1964 г. и доложена на семинаре ИРЭ АН СССР (февраль 1965 г.). Поскольку как в появившихся к тому времени, так и в более поздних статьях предлагались иные подходы к задаче, то данная публикация представляется нам целесообразной. Для частного случая конфокального волновода результаты, аналогичные нашим, получены в работе [14].

$$\lambda_k f_k = \hat{A} f_k, \quad (1.1)$$

где \hat{A} — оператор трансформации пучка на одном периоде волновода, λ_k — соответствующие f_k собственные значения, удовлетворяющие в общем случае условию $|\lambda_k| < 1$. Квадраты модулей $|\lambda_k|^2$ равны коэффициентам трансформации (по мощности) волнового пучка на периоде системы. Оператор \hat{A} — симметричен (но не эрмитов!), так что функции f_k образуют ортогональную систему

$$(f_k f_m) = \int_S f_k f_m^* dS = \delta_{km}, \quad (1.2)$$

где S — площадь «среднего» сечения корректора.

Мы будем предполагать также и полноту системы f_k , хотя в настоящее время доказательств такой полноты не существует, за исключением случая конфокальных корректоров.

При наличии случайных фазовых aberrаций корректоров последовательные распределения поля описываются рекуррентными уравнениями

$$\psi^{(n+1)} = e^{i\varphi_{n+1}(x)} \hat{A} \psi^{(n)}. \quad (1.3)$$

Здесь $\varphi_{n+1}(x)$ — случайное распределение фаз, вносимое $(n+1)$ -м корректором; для определенности можно считать, что оно обусловлено случайным фазовым экраном, расположенным перед этим корректором (рис. 1). Для простоты мы здесь рассматриваем двумерные пучки. Полученные нами результаты легко могут быть обобщены и на трехмерные системы, если предположить, что функция корреляции фазовых ошибок разделяется по координатам x и y .

Разложим функцию $\psi^{(n)}$ по собственным функциям уравнения (1.1)

$$\psi^{(n)} = \sum_k a_k^{(n)} f_k \quad (1.4)$$

и подставим это разложение в (1.3). Умножая полученное соотношение на f_m и интегрируя по всей ширине корректора $2a$, найдем, что

$$a_m^{(n+1)} = \sum_k \lambda_k a_k^{(n)} c_{km}^{(n+1)}, \quad (1.5)$$

где

$$c_{km}^{(n+1)} = \int_{-a}^a e^{i\varphi_{n+1}(x)} f_k f_m^* dx. \quad (1.6)$$

В дальнейшем анализе уравнения (1.5) воспользуемся методом, предложенным в [12].

Умножим (1.5) на аналогичное комплексно-сопряженное уравнение, но с другими индексами и усредним полученное соотношение по ансамблю систем. В итоге для коэффициентов корреляции

$$R_{kl}^{(n)} = \overline{a_k^{(n)} a_l^{(n)*}}$$

получим систему рекуррентных уравнений

$$R_{mp}^{(n+1)} = \sum_{k,l} \lambda_k \lambda_l^* R_{kl}^{(n)} \varepsilon_{kmp}^{(n+1)}, \quad (1.7)$$

где

$$\varepsilon_{kmlp}^{(n)} = \overline{c_{km}^{(n)} c_{lp}^{(n)*}} = \int_{-a}^a \int_{-a}^a f_k(x) f_m(x) f_l^*(x') f_p^*(x') \overline{\exp[i[\varphi_n(x) - \varphi_n(x')]]} dx dx'. \quad (1.8)$$

Если вероятностные характеристики случайных возмущений фазовых корректоров одинаковы (стационарность по n), то коэффициенты $\varepsilon_{kmlp}^{(n)}$ не зависят от n и этот индекс у их обозначения можно опустить.

Рассмотрение коэффициентов корреляции $R_{kl}^{(n)}$ вместо корреляционных характеристик непосредственно самих случайных функций $\varphi^{(n)}(x)$ имеет прямой физический смысл. Дело в том, что расчет возбуждающего и приемного устройства лучевого волновода всегда производится по параметрам одного из типов волн (обычно основного) идеальной системы. Коэффициенты $R_{kl}^{(n)}$, которые могут быть получены из рекуррентных соотношений (1.7), как раз равны (с точностью до нормировки) мощности, принимаемой на выходе n -й ячейки волновода устройством, идеально согласованным с l -м типом волны.

Если случайная фазовая aberrация $\varphi_n(x)$ стационарна по x , то

$$\overline{\exp[i[\varphi(x) - \varphi(x')]]} = \Phi(x - x'), \quad (1.9)$$

где Φ — некоторая функция корреляции, зависящая только от разности аргументов x и x' . Основываясь на четном характере функции $\Phi(x)$ и считая, что четность функции f_n определяется четностью ее индекса, легко показать, что

$$\varepsilon_{kmlp} = 0, \quad (1.10)$$

если суммарная четность всех индексов равна 1*. Кроме того,

$$\varepsilon_{kmlp} = \varepsilon_{*pkm} = \varepsilon_{mklp} = \varepsilon_{kmp l}. \quad (1.11)$$

С учетом (1.10) система (1.7) может быть разбита на две независимых системы уравнений, каждая из которых содержит коэффициенты R_{kl} с индексом одинаковой суммарной четности. Эти системы позволяют определить корреляционные характеристики пучка на произвольном корректоре, если они известны на входе системы (при $n = 0$). Анализ общих уравнений довольно сложен. Однако он заметно упрощается для лучевых волноводов с высокой степенью селекции поперечных мод. Ниже приводятся соотношения для волноводов с одной и двумя поперечными модами.

2. ОДНОМОВОЕ И ДВУХМОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Предположим сначала, что

$$|\lambda_i| \ll |\lambda_0| \quad (i \neq 0). \quad (2.1)$$

В этом случае система (1.7) приближенно сводится к одному уравнению

$$R_{00}^{(n+1)} = |\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000} R_{00}^{(n)} \quad (2.2)$$

и имеет решение в виде

$$R_{00}^{(n)} = \gamma^n R_{00}, \quad (2.3)$$

где

$$\gamma = |\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000}. \quad (2.4)$$

* Мы приписываем группе индексов четность 0, если их сумма равна четному числу, и 1, если сумма индексов — нечетное число.

Энергетический коэффициент потерь

$$\delta = -\ln \gamma = -\ln |\lambda_0|^2 - \ln \varepsilon_{0000}$$

отличается от коэффициента потерь невозмущенной системы на величину $-\ln \varepsilon_{0000}$.

Остальные, не учтенные в (2.2), уравнения позволяют определить другие коэффициенты корреляции через R_{00} :

$$R_{mp}^{(n+1)} = |\lambda_0|^2 \gamma^n \varepsilon_{0m0p} R_{00}^{(n)}. \quad (2.5)$$

При меньшей степени диафрагмирования корректоров будем считать выполненным условие двухмодового приближения

$$\lambda_1 \ll |\lambda_1| \sim |\lambda_1|. \quad (2.6)$$

Уравнения (1.7) разбиваются при этом на две независимых системы:

$$R_{00}^{(n+1)} = |\lambda_0|^2 R_{00}^{(n)} \varepsilon_{0000} + |\lambda_1|^2 R_{11}^{(n)} \varepsilon_{1010}, \quad (2.7)$$

$$R_{11}^{(n+1)} = |\lambda_0|^2 R_{00}^{(n)} \varepsilon_{0101} + |\lambda_1|^2 R_{11}^{(n)} \varepsilon_{1111};$$

$$R_{10}^{(n+1)} = \lambda_0 \lambda_1^* R_{01}^{(n)} \varepsilon_{0110} + \lambda_1 \lambda_0^* R_{10}^{(n)} \varepsilon_{1100}, \quad (2.8)$$

$$R_{01}^{(n+1)} = \lambda_0 \lambda_1^* R_{01}^{(n)} \varepsilon_{0011} + \lambda_1 \lambda_0^* R_{10}^{(n)} \varepsilon_{1001}.$$

Системы (2.7) и (2.8) описывают изменение коэффициентов корреляции $R_{00}^{(n)}$, $R_{11}^{(n)}$, $R_{10}^{(n)}$, $R_{01}^{(n)}$ при условии, что они были заданы на входе системы. Как и в предыдущем случае, можно искать решение систем (2.7), (2.8) в виде

$$R_{00}^{(n)} = \gamma_1^n R_{00}, \quad R_{11}^{(n)} = \gamma_1^n R_{11}; \quad R_{10}^{(n)} = \gamma_1^n R_{10}, \quad R_{01}^{(n)} = \gamma_1^n R_{01}. \quad (2.9)$$

Подставляя эти выражения в (2.7) и (2.8), получим

$$\frac{R_{11}}{R_{00}} = \frac{\gamma_1 - |\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000}}{|\lambda_1|^2 \varepsilon_{1010}} = \frac{|\lambda_0|^2 \varepsilon_{0101}}{\gamma_1 - |\lambda_1|^2 \varepsilon_{1111}}; \quad (2.10)$$

$$\frac{R_{01}}{R_{10}} = \frac{\gamma_1 - \lambda_1 \lambda_0^* \varepsilon_{1100}}{\lambda_0 \lambda_1^* \varepsilon_{0110}} = \frac{\lambda_1 \lambda_0^* \varepsilon_{1001}}{\gamma_1 - \lambda_0 \lambda_1^* \varepsilon_{0011}}. \quad (2.11)$$

Откуда

$$\gamma_1^2 - (|\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000} - |\lambda_1|^2 \varepsilon_{1111}) \gamma_1 + |\lambda_0|^2 |\lambda_1|^2 [\varepsilon_{0000} \varepsilon_{1111} - (\varepsilon_{1010})^2] = 0; \quad (2.12)$$

$$\gamma_1^2 - 2 \operatorname{Re}(\lambda_0 \lambda_1^* \varepsilon_{0011}) \gamma_1 + |\lambda_0|^2 |\lambda_1|^2 [|\varepsilon_{1100}|^2 - (\varepsilon_{0110})^2] = 0. \quad (2.13)$$

Решая последние уравнения, найдем

$$(\gamma_1)_{1,2} = \frac{1}{2} (|\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000} + |\lambda_1|^2 \varepsilon_{1111}) \pm \left[\frac{(|\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000} - |\lambda_1|^2 \varepsilon_{1111})^2}{4} + |\lambda_0|^2 |\lambda_1|^2 (\varepsilon_{1010})^2 \right]^{1/2}; \quad (2.14)$$

$$(\gamma_1)_{1,2} = \operatorname{Re}(\lambda_0 \lambda_1^* \varepsilon_{0011}) \pm i \{ [\operatorname{Im}(\lambda_0 \lambda_1^* \varepsilon_{0011})]^2 - |\lambda_0|^2 |\lambda_1|^2 (\varepsilon_{0110})^2 \}^{1/2}. \quad (2.15)$$

Из (2.15), в частности, следует, что

$$|\gamma_1| = |\lambda_0 \lambda_1| [|\varepsilon_{0011}|^2 - (\varepsilon_{0110})^2]. \quad (2.16)$$

Общие решения систем (2.7), (2.8) можно представить в виде

$$R_{00}^{(n)} = (\gamma_1)_1^n (R_{00})_1 + (\gamma_1)_2^n (R_{00})_2, \quad (2.17)$$

$$R_{11}^{(n)} = (\gamma_1)_1^n (R_{11})_1 + (\gamma_1)_2^n (R_{11})_2,$$

и аналогично

$$R_{01}^{(n)} = (\gamma_{II})_1^n (R_{01})_1 + (\gamma_{II})_2^n (R_{01})_2, \quad (2.18)$$

$$R_{10}^{(n)} = (\gamma_{II})_1^n (R_{10})_1 + (\gamma_{II})_2^n (R_{10})_2,$$

причем величины $(R_{ik})_{1,2}$ определяются начальными значениями коэффициентов корреляции с учетом (2.10) и (2.11). В дальнейшем нас будут интересовать лишь собственные значения (2.14), описывающие изменение коэффициентов $R_{00}^{(n)}$ и $R_{11}^{(n)}$, имеющих, как говорилось выше, определенный энергетический смысл.

Соотношение (2.14) дает возможность уточнить условие применимости одномодового приближения (2.2):

$$|\varepsilon_{1010}| \ll \frac{1}{2} \frac{|\lambda_0|^2 \varepsilon_{0000} - |\lambda_1|^2 \varepsilon_{1111}}{|\lambda_0| |\lambda_1|} \sim \frac{|\lambda_0|^2 - |\lambda_1|^2}{2|\lambda_0| |\lambda_1|}. \quad (2.19)$$

При $|\lambda_0|$ и $|\lambda_1| \sim 1$ условие (2.19) означает, что коэффициент связи $|\varepsilon_{1010}|$ между нулевой и первой модами должен быть мал по сравнению с разницей в коэффициентах потерь этих типов волн. Из (2.19) ясно, что при $|\varepsilon_{1010}| \ll 1$ принятое выше условие (2.1) является чересчур сильным. Аналогичным образом можно уточнить и условия применимости двухмодового приближения (2.6), учтя коэффициенты связи рассматриваемых мод с высшими типами волн системы.

В последующих примерах мы ограничимся рассмотрением одномодового приближения, привлекая условие (2.19) для оценки границ применимости полученных соотношений.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве иллюстрации применения общих формул, полученных в разд. 2, рассмотрим влияние фазовых ошибок трех типов:

- а) $\varphi(x)$ — малая случайная величина,
- б) $\varphi(x) = kx$, где α — случайная величина,
- в) параметр $C = F^{-1}$ — случайная величина

Ошибки типов б) и в) уже анализировались в работах [5, 8]. Рассмотрение их здесь преследует в основном методические цели.

Пусть $\varphi(x)$ — стационарная случайная величина с моментами

$$\overline{\varphi(x)} = 0, \quad \overline{\varphi^2(x)} = \sigma_\varphi^2, \quad \overline{\varphi(x)\varphi(x')} = \sigma_\varphi^2 \exp[-(x-x')^2/\rho_\varphi^2], \quad (3.1)$$

где ρ_φ — радиус корреляции.

При $|\varphi(x)| \ll 1$

$$\Phi(x, x') = 1 - \frac{1}{2} [\overline{\varphi(x) - \varphi(x')}]^2 = 1 - \sigma_\varphi^2 + \sigma_\varphi^2 \exp[-(x-x')^2/\rho_\varphi^2]; \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{km1p} = (1 - \sigma_\varphi^2) \delta_{km} \delta_{lp} + \quad (3.3)$$

$$+ \sigma_\varphi^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a f_k(x) f_m(x) f_l^*(x') f_p^*(x') \exp[-(x-x')^2/\rho_\varphi^2] dx dx'.$$

Подстановка в (3.3) точных функций требует проведения численного

интегрирования. Однако при $\rho_\varphi \ll a$ пределы интегрирования в (3.3) можно заменить на $\pm \infty$, а в качестве собственных функций f_n взять собственные функции системы недифрагмированных корректоров*. Ввиду малости σ_φ^2 допущенная при этом ошибка в ε_{kmlp} будет незначительна по крайней мере для нескольких первых функций f_n . Мы запишем собственные функции f_n в виде

$$f_n = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \frac{e^{-(\sigma x^2/2)}}{2^{n/2} \sqrt{n!}} H_n(\sqrt{\sigma} x); \quad (3.4)$$

где H_n — полиномы Эрмита, величина σ определяет полуширину пучка

$$\rho_s = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \quad (3.5)$$

нулевого типа волны на преобразователе. Для периодической последовательности линз с фокусными расстояниями F , находящихся на расстоянии L друг от друга,

$$\sigma = \frac{k}{L} \sqrt{1-g^2}, \quad g = 1 - \frac{L}{2F}, \quad \rho_s = \sqrt{\frac{2L}{k \sqrt{1-g^2}}}. \quad (3.6)$$

Из (3.3) и (3.4) имеем

$$\varepsilon_{0000} = 1 - \sigma_\varphi^2 b_{0000}, \quad \varepsilon_{1111} = 1 - \sigma_\varphi^2 b_{1111}, \quad \varepsilon_{0101} = \sigma_\varphi^2 b_{0101}, \quad (3.7)$$

где

$$b_{0000} = 1 - \frac{1}{(1+\tau)^{1/2}}, \quad b_{1111} = 1 - \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}} - \frac{3\tau^2/4}{(1+\tau)^{5/2}}, \quad (3.8)$$

$$b_{0101} = \frac{\tau}{2(1+\tau)^{3/2}}; \quad \tau = (\rho_s/\rho_\varphi)^2. \quad (3.9)$$

Графики величин b_{kmlp} приведены на рис. 2. Характерно, что параметром, определяющим эти величины, является отношение радиуса пучка к радиусу корреляции фазовых ошибок.

Коэффициент потерь δ_0 в одномодовом приближении равен

$$\delta_0 = -\ln |\lambda_0|^2 + \tilde{\delta}, \quad (3.10)$$

где $\tilde{\delta} = -\ln \varepsilon_{0000} \approx \sigma_\varphi^2 b_{0000}$ — коэффициент дополнительных потерь из-за случайных фазовых ошибок. При заданной величине дисперсии

* В известной степени эта процедура вычислений аналогична применяемой при расчете влияния фазовых ошибок в раскрытии на диаграммы направленности больших антенн [13]. Как показывают численные оценки, относительная ошибка в величине вычисленного таким образом интеграла в (3.3) не превышает нескольких процентов $\ln(k a^2/L) \sqrt{1-g^2} \gg \pi$.

σ_φ^2 он зависит только от τ^1 и, следовательно, определяется по графику величины b_{0000} (рис. 2).

На рис. 3 показаны зависимости σ_φ^2 от τ , отвечающие заданному коэффициенту дополнительных потерь δ . Пунктирными линиями отмечены уровни σ_φ^2 , соответствующие среднеквадратичной разности хода $(\overline{\Delta L^2})^{1/2}$, равной $\lambda/10$ и $\lambda/20$ (λ — длина волны). Из рис. 3 видно, что требования к точности изготовления корректоров повышаются с увеличением отношения ρ_s/ρ_φ . В частности, при дельта-корреляции (диффузно рассеивающий случайный экран) влияние ошибок максимально: $\tilde{\delta} = \sigma_\varphi^2$.

Проведенное рассмотрение применимо при

$$\sigma_\varphi^2 b_{0101} \ll \frac{|\lambda_0|^2 - |\lambda_1|^2}{2|\lambda_0||\lambda_1|} \tau = \frac{1 - \Gamma^2}{2\Gamma},$$

где

$$\Gamma = |\lambda_1|^2/|\lambda_0|^2.$$

Например, для конфокального волновода при $c = ka^2/L = 3$ $\Gamma \simeq 0,7$. Взяв величину b_{0101} равной ее максимальному значению 0,2, имеем

$$\sigma_\varphi^2 \ll 1,8$$

или

$$V\overline{\Delta L^2} \ll \lambda/5.$$

При $c=4$ для того же волновода $\Gamma \simeq 0,92$ и

$$V\overline{\Delta L^2} \ll \lambda/10.$$

Заметим, что при $\sigma_\varphi^2 \gtrsim 1$ разложение (3.2) становится неприменимым. Если предположить, что ошибки распределены по двумерному нормальному закону с параметрами (3.1), то вместо (3.2) следует взять

$$\Phi(x-x') = \exp \left[-\sigma_\varphi^2 (1 - e^{-(x-x')^2/\rho_\varphi^2}) \right]. \quad (3.11)$$

Однако в этом случае расчет ϵ_{kmlp} по формуле (1.8) требует применения численного интегрирования.

Ошибки типа $\varphi = kx\alpha$, где α — случайная величина, могут быть обусловлены поперечными смещениями корректоров в линзовом или перекосами отражателей в зеркальном волноводе [8, 9]. В этом случае

$$\Phi(x-x') = \exp \left[-ik(x-x')\alpha \right].$$

Если случайная величина α распределена по нормальному закону со средним значением $\bar{\alpha} = 0$ и дисперсией $\bar{\alpha}^2 = \sigma_\alpha^2$, то

$$\Phi(x-x') = \exp \left[-k^2 \sigma_\alpha^2 (x-x')^2/2 \right]. \quad (3.12)$$

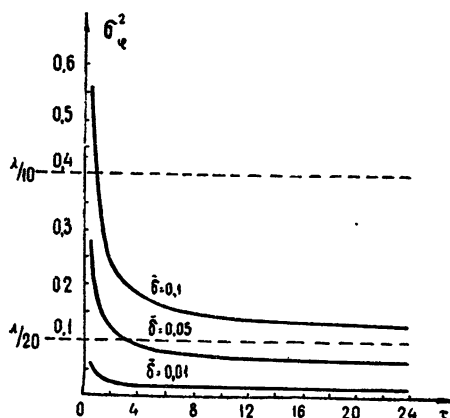


Рис. 3. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от $(\rho_s/\rho_\varphi)^2$ при различных коэффициентах дополнительных потерь.

Согласно (1.8), первые коэффициенты ε_{klmp} равны

$$\varepsilon_{0000} = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^{1/2}}, \quad \varepsilon_{1111} = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^{3/2}} + \frac{3\bar{\tau}^{3/2}}{(1 + \bar{\tau})^{5/2}},$$

$$\varepsilon_{0101} = \frac{\bar{\tau}}{2(1 + \bar{\tau})^{3/2}},$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_a^2 k^2 \rho_s^2}{2}. \quad (3.14)$$

При $\bar{\tau} \ll 1$ можно пользоваться приближенными выражениями

$$\varepsilon_{0000} \simeq 1 - \frac{\bar{\tau}}{2}, \quad \varepsilon_{1111} \simeq 1 - \frac{3}{2}\bar{\tau}, \quad \varepsilon_{0101} \simeq \frac{\bar{\tau}}{2}. \quad (3.15)$$

В одномодовом приближении коэффициент дополнительных потерь равен

$$\tilde{\delta} = \sigma_a^2 \frac{k^2 \rho_s^2}{4} = \frac{\bar{\tau}}{2}. \quad (3.16)$$

Исходя из (3.6), нетрудно видеть, что он имеет наименьшую величину (при заданных L и σ_a^2) в конфокальной системе ($g = 0$):

$$\tilde{\delta} = \sigma_a^2 kL. \quad (3.17)$$

Если линейные фазовые ошибки обусловлены поперечными смещениями линз Δx , так что $\alpha = \Delta x/F$, то, согласно (3.16),

$$\tilde{\delta} = \frac{4k\Delta x^2}{L} \frac{(1-g)^{3/2}}{(1+g)^{1/2}}. \quad (3.18)$$

В этом случае потери будут меньше в длиннофокусных системах ($g \sim 1$)*.

Произведем оценку порядка допустимого значения σ_a^2 в конфокальной системе. Чтобы обеспечить $\tilde{\delta}_{\text{конф}} < 0,01$, необходимо юстировать систему с точностью

$$\sigma_a < 0,1\theta_0,$$

где $\theta_0 = (kL)^{-1/2}$ — угол, под которым виден «край» $r = \rho_s$ пятна на данном преобразователе из центра предыдущего. Например, при $\lambda = 8$ мм, $L = 10$ м точность юстировки должна превышать $\pm 3,5'$.

Оценим, исходя из (2.19), пределы применимости одномодового приближения (3.16):

$$\tilde{\delta} \ll \frac{1 - \Gamma^2}{2\Gamma}. \quad (3.19)$$

При $|\lambda_0|$ и $|\lambda_1| \sim 1$, согласно (3.19), коэффициент дополнительных потерь должен быть мал по сравнению с разностью коэффициентов потерь двух первых мод.

* Известный интерес представляет задача о минимуме полных потерь (3.10), как функции параметров g, λ, a . Обсуждению этого вопроса посвящены работы [9, 15].

Рассмотрим, наконец, влияние возмущений фокусных расстояний отдельных корректоров:

$$\varphi(x) = \frac{\Delta C k x^2}{2}, \quad (3.20)$$

где ΔC — случайная величина, которую мы будем считать распределенной по нормальному закону

$$\overline{\Delta C} = 0, \quad \overline{\Delta C^2} = \sigma_C^2. \quad (3.21)$$

Имеем

$$\Phi(x, x') = \overline{\exp[ik(x^2 - x'^2)/2] \Delta C} = \exp[-\sigma_C^2 k^2 (x^2 - x'^2)^2/8]. \quad (3.22)$$

Ввиду симметрии функции $\Phi(x, x')$, а также четного характера ее по каждому из аргументов остаются в силе все следствия, вытекающие из (1.9).

Подстановка (3.4) и (3.22) в (1.8) дает выражения для коэффициентов ε_{kmlp} , требующие численного интегрирования. Приближенно коэффициенты ε_{kmlp} можно найти, если предположить, что параметр

$$\tau = \frac{\sigma_C^2 k^2}{8g^2} \equiv \frac{\sigma_C^2 L^2}{8(1-g^2)} \ll 1. \quad (3.23)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0000} &= 1 - \tau, & \varepsilon_{1111} &= 1 - 3\tau, & \varepsilon_{0101} &= 0, \\ \varepsilon_{2222} &= 1 - 7\tau, & \varepsilon_{0202} &= \tau. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Коэффициент дополнительных потерь равен

$$\tilde{\delta} = \tau = \frac{\sigma_C^2 L^2}{8(1-g^2)} = \frac{\sigma_F^2}{F^2} \frac{1-g}{1+g}, \quad (3.25)$$

где $\sigma_F^2 = \overline{\Delta F^2}$ — дисперсия разброса фокусных расстояний корректоров. Чувствительность к ошибкам ΔF растет по мере перехода от плоской к концентрической системе.

Ввиду отсутствия связи между симметричным и несимметричным колебаниями ($\varepsilon_{0101} = 0$) условие применимости одномодового приближения (2.19) должно быть заменено в рассматриваемом случае на следующее:

$$\varepsilon_{0202} \equiv \tilde{\delta} \ll \frac{|\lambda_0|^2 - |\lambda_2|^2}{2|\lambda_0||\lambda_2|}. \quad (3.26)$$

Например, для конфокального волновода при $c = 5$ ($\Gamma_2 = 0,8$) условие (3.26) сводится к неравенству

$$\frac{\sigma_F^2}{F^2} \ll 0,225,$$

которое практически всегда выполнимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Goubau, F. Schwing, IRE Trans., AP-9, 3, 248 (1961).
2. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1516 (1963).
3. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).

4. G. Goubau, J. P. Cristian, IEEE Trans., MTT-12, № 2, 212 (1964).
5. J. Hirano, Y. Fukatsi, PIEEE, 52, № 11, 1284 (1964).
6. D. Gloge, A. E. Ü., 19, № 1, 13 (1965).
7. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 9, № 11, 1958 (1964).
8. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 10, № 12, 2146 (1965).
9. Р. В. Ваганов, Диссертация, ИРЭ АН СССР, Москва, 1965.
10. C. C. Eaglesfield, PIEEE, 3, 610 (1964).
11. В. А. Зятицкий, Радиотехника и электроника, 12, № 7, 1192 (1967).
12. В. И. Беспалов, ДАН СССР, 117, 209 (1957).
13. J. Ruse, Nuovo Cimento Symp., 9, 364 (1952).
14. В. А. Зятицкий, Радиотехника и электроника, 13, № 8, 1383 (1968).
15. Р. Б. Ваганов, Б. З. Каценеленбаум, Антенны, изд. Связь, М., 1966, стр. 22.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 января 1968 г.

THE INFLUENCE OF RANDOM PHASE ABBERATIONS OF CORRECTORS ON THE CHARACTERISTICS OF RAY WAVEGUIDE AT HIGH DEGREE OF MODE SELECTION

V. I. Talanov, N. M. Sheronova

The method is proposed to calculate the average losses in quasi-optical transmission lines with random irregularities. The method is based on consideration of recurrent equations for the correlation coefficients of normal wave amplitude on successive correctors. The average losses in the waveguide with a high degree of transversal mode selection are calculated for different types of random perturbations.

УДК 621.371 : 621.372

ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СПЕКТРА ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Н. С. Степанов

Рассматривается задача о распространении волн в произвольной слабонестационарной и слабонеоднородной среде, обладающей как временной, так и пространственной дисперсией. Используя дисперсионное уравнение (уравнение эйконала), обобщенное для таких сред, получены соотношения, определяющие изменение частоты и волнового вектора квазимонохроматических волн, а также траекторию лучей. Исследуются закономерности преобразования спектра волн в такой среде; показано, например, что в диспергирующей среде возможно адиабатическое сжатие или, наоборот, расширение спектра волнового пакета как с изменением, так и без изменения несущей частоты. В качестве примера рассмотрены электромагнитные волны в волноводах и искусственных длинных линиях.

В работах [1, 2] на примере электромагнитных волн в плазме было показано, что в нестационарной среде с дисперсией оказывается возможным адиабатическое сжатие спектра сигналов без потерь, и, следовательно, увеличение их спектральной плотности. Однако полученные в этих работах результаты не выясняют общей картины, они, например, не позволяют сделать предельный переход к недиспергирующим системам, так как в случае волн в плазме при таком переходе (при уменьшении концентрации электронов) исчезает и переменный параметр. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о преобразовании спектра волн в произвольной диспергирующей системе с одним или несколькими медленно изменяющимися параметрами. Как будет показано ниже, некоторые полезные результаты можно получить при весьма общих предположениях — в рамках волновой кинематики, не уточняя физической природы волн и механизма дисперсии и, тем самым, не выписывая соответствующих динамических уравнений.

1. Пусть имеем некоторую волновую систему, которая в стационарном случае (при постоянных параметрах) описывается дисперсионным уравнением

$$k^2 = \omega^2 n^2(\omega, \mathbf{k}, p_i, q_i), \quad (1)$$

где $n(\omega, \mathbf{k}, p_i, q_i)$ — величина, обратная фазовой скорости волн, в оптике с точностью до постоянной c соответствующая обычному показателю преломления. Зависимость n от частоты ω и волнового вектора \mathbf{k} означает учет временной и пространственной дисперсии. Пусть, кроме того, величина n зависит от некоторых скалярных (p_i) и векторных параметров (q_i), определяющих дисперсионные свойства среды. В частности, в упоминавшемся уже примере с электромагнитными волнами в плазме такими параметрами могут служить электронная концентрация N и скорость дрейфа плазмы V [1, 2]. Заметим, что пока не делается никаких ограничивающих предположений об однородности задачи и изотропности среды (в литературе в основном обсуждались случаи, сводящиеся к одномерным), будем лишь считать, что в стационарном

нарном случае потерь нет и величина n в полосе прозрачности вещества. Для анизотропных и гиротропных сред (а также для волн в волноводных системах), конечно, значение n может быть различным для разных типов волн при одной и той же частоте.

В нестационарной и неоднородной в пространстве среде, когда параметры p_i и q_i переменны, волны уже не будут строго гармоническими. Однако, если изменения всех параметров достаточно медленны, величины ω и k и соотношение (1) (с той же зависимостью $n[\omega, k, p_i(r, t), q_i(r, t)]$) сохраняют свой смысл и для квазимонохроматических волн в такой среде. Для этого, очевидно, необходимо выполнение условий

$$\left| \frac{\partial p_i}{\partial t} \right| \ll \omega p_i, \quad |\nabla p_i| \ll k p_i, \quad (2)$$

т. е. параметры p_i должны мало изменяться за время порядка ω^{-1} и на расстояниях порядка k^{-1} (аналогично для q_i).

Иначе говоря, среда должна быть слабонестационарной, или, по иногда применяемой терминологии [6], «слабопараметрической». Более строго соотношение (1) в каждом конкретном случае можно получить, раскладывая решение по степеням малого параметра порядка $(\omega p_i)^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial t}$ и ограничиваясь членами нулевого порядка; при этом равенство (1) соответствует уравнению эйконала (см., например, [1-5]). Укажем, что мгновенная частота $\omega(r, t)$ и волновой вектор $k(r, t)$ выражаются через эйконал $\psi(r, t)$ как

$$\omega = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad k = -\nabla \psi, \quad (3)$$

причем для корректности приближения величины ω и k также должны удовлетворять условиям типа (2) (т. е. $\left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \ll \omega^2$, и т. д.), означаящим, что волны квазигармонические и квазиплоские.

Тогда задача заключается, в частности, в исследовании закономерностей изменения $\omega(r, t)$ и $k(r, t)$ при заданных функциях $p_i(r, t)$, $q_i(r, t)$. Необходимое для этого уравнения можно получить, продифференцировав соотношение (1) по времени и исключив k при помощи формул (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \nabla) \omega = - \frac{\omega \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, k}}{\frac{\partial n \omega}{\partial \omega}}. \quad (4)$$

Здесь $u(\omega, k, p_i, q_i) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{p_i, q_i}$ — групповая скорость волн, равная

$$u = \frac{l - \omega \frac{\partial n}{\partial k}}{\frac{\partial n \omega}{\partial \omega}}, \quad l = \frac{k}{k}; \quad (5)$$

$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\omega, k}$ — величина, характеризующая степень нестационарности среды*:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\omega, k} = \sum_i \left(\frac{\partial n}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \right). \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (4) квазилинейное, тогда как исходное уравнение (1) нелинейно относительно ψ . Из (4), прежде всего, следует, что возмущения мгновенной частоты распространяются в пространстве с групповой скоростью $u(r, t)$, которая, таким образом, сохраняет свой смысл и в произвольной слабонестационарной среде (см. также [1-5]). Величина $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \nabla) \omega$ соответствует тогда полной производной для фиксированного группового фронта и в стационарной среде равна нулю; при этом $\frac{d}{dt}$ можно выразить также через производную вдоль луча $\frac{d}{ds}$. Очевидно, $\frac{d}{dt} = u \frac{d}{ds}$.

При найденной величине $\omega(r, t)$ волновое число k можно определить из исходного равенства (1), и для одномерной задачи уравнения (4) оказывается достаточно, хотя в некоторых случаях более удобно сначала найти зависимость $k(r, t)$. В общем же случае для полного решения задачи необходимо рассматривать уравнение для волнового вектора $k(r, t)$. Последнее можно получить аналогично (4), взяв градиент от каждого члена в формуле (1):

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + (u \nabla) k = \frac{\omega (\nabla n)_{\omega, k}}{\frac{\partial n}{\partial \omega}}, \quad (7)$$

где обозначено

$$(\nabla n)_{\omega, k} = \sum_i \left\{ \frac{\partial n}{\partial p_i} \nabla p_i + \left(\frac{\partial n}{\partial q_i} \nabla \right) q_i + \left[\frac{\partial n}{\partial q_i} \text{rot } q_i \right] \right\}. \quad (8)$$

Таким образом, изменение волнового вектора для фиксированного группового фронта происходит вследствие пространственной неоднородности среды. Из формул (5) и (7) нетрудно найти и уравнение луча. Для краткости мы приведем его лишь для изотропной среды без пространственной дисперсии $\left(\frac{\partial n}{\partial k} = 0\right)$. В этом случае $\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} = u^{-1}$, и из равенства (7) следует $\frac{dk}{ds} = \omega (\nabla n)_{\omega}$, так что

$$\frac{d \ln k}{ds} = \left(\frac{\partial \ln n}{\partial s} \right)_{\omega}; \quad (9)$$

* Здесь и везде ниже индексы у производных по t и r показывают, что данные величины при дифференцировании рассматриваются как постоянные, $\left(\text{например, производная } \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\omega, k} \text{ берется при постоянных } \omega \text{ и } k\right)$.

$$\frac{dl}{ds} = \frac{(\nabla_{\perp} n)_{\omega}}{n}, \quad (10)$$

где $(\nabla_{\perp} n)_{\omega}$ — поперечная к вектору \mathbf{k} составляющая $(\nabla n)_{\omega}$, причем здесь $\mathbf{l} = \mathbf{k}/k = \mathbf{u}/u$.

Согласно этим уравнениям, неоднородность среды в направлении распространения волны приводит к изменению волнового числа k , а «псперечная» неоднородность вызывает искривление лучей (точнее, траекторий групповых фронтов)*. При этом отличие от стационарного случая [7] заключается в том, что в левой части (9) и (10) фигурируют полные производные (для фиксированного группового фронта)**: Это отличие, однако, достаточно существенно, так как траектории двух последовательных групповых фронтов (начинающих движение из одной точки в одном и том же направлении) теперь могут не совпадать.

Заметим, что уравнение (4) для частоты ω при $\frac{\partial n}{\partial k} = 0$ также может быть записано в более компактном виде:

$$\frac{d \ln \omega}{ds} = - \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega}. \quad (11)$$

2. Приведенные выше уравнения в принципе позволяют обобщить лучевые представления на случай квазимонохроматических волн в произвольной слабонестационарной среде. Из вида их ясно, что свойства решения существенно зависят от поведения семейства групповых характеристик $\xi(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \xi = 0. \quad (12)$$

В частности, интегрирование уравнения (4) дает

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \omega_0(\xi) \exp \left[- \int \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, \mathbf{k}} dt \right], \quad (13)$$

где $\omega_0(\xi)$ — произвольная функция, определяемая начальными и граничными условиями, а интеграл в показателе экспоненты берется вдоль характеристики, т. е. при $\xi = \text{const}$ (при $\frac{\partial n}{\partial k} = 0$ этот интеграл

может быть записан как $\int \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega} ds$). Для недиспергирующей системы, таким образом, выражение для частоты $\omega(\mathbf{r}, t)$ находится в квадратурах.

Учет даже только временной дисперсии существенно усложняет задачу, так как теперь, во-первых, подынтегральная функция в выражении (13) сама зависит от $\omega(\mathbf{r}, t)$ и поэтому (13) фактически представляет собой интегральное уравнение для ω ; во-вторых, здесь групповая скорость зависит от ω и характеристическое уравнение (12) оказывается «зацепленным» с (4) (а в среде с пространственной

* В среде с пространственной дисперсией, как ясно из (5), однородность среды еще не обеспечивает прямолинейности лучей.

** Для электромагнитных волн в недиспергирующей среде уравнение луча (10) другим методом получено в работе [6]. Однако формула (11) цитируемой работы записана не вполне правильно — в правой части этой формулы ошибочно опущен член $\ln \frac{\partial n}{\partial t}$.

дисперсией—с (7)). Поэтому отыскание решения в квадратурах возможно лишь в частных случаях. Качественные выводы, однако, можно сделать в общем случае. Например, из (13) ясно, что в области $c \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, k} < 0$ частота фиксированного группового фронта монотонно увеличивается вдоль луча.

Множитель $\omega_0(\xi)$ при учете дисперсии имеет характер римановой волны в нелинейной и нестационарной среде (для среды с только временной дисперсией этот вопрос уже обсуждался в литературе [4]). Рассмотрим два достаточно близких последовательных групповых фронта в волне. Временной интервал между ними в произвольной точке (т. е. длительность цуга) будет, очевидно, равен $\tau = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^{-1} \Delta \xi$, где $\Delta \xi$ —разность значений ξ для этих фронтов, остающаяся постоянной; пространственную же длину цуга можно найти как $l = u\tau$.

Исключив производную $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ с помощью (12), нетрудно получить уравнения, определяющие изменение τ и l при распространении волны:

$$\frac{d \ln \tau}{dt} = - \frac{\partial \ln u}{\partial t}, \quad \frac{d \ln l}{ds} = \frac{\partial \ln u}{\partial s}, \quad (14)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} \quad (15)$$

(аналогично для $\frac{\partial u}{\partial s}$). Интегрируя эти уравнения, имеем

$$\tau = \tau_0 \exp \left(- \frac{1}{u} \int \frac{\partial u}{\partial t} ds' \right), \quad l = l_0 \exp \left(\int \frac{\partial u}{\partial s} dt \right), \quad (16)$$

где τ_0 и l_0 —начальные значения соответствующих длительностей (интегралы в (16) берутся вдоль характеристик).

Таким образом, деформация временной и пространственной структуры огибающей волнового пакета зависит от производных групповой скорости $u(\omega, k, p, q)$. В области $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ групповые фронты нагоняют друг друга и происходит сжатие сигнала во времени (при $\frac{\partial u}{\partial s} < 0$ — в

пространстве). При этом первые два члена в (15) связаны с нестационарностью среды, а третий и четвертый—соответственно с временной и пространственной дисперсией. Для сигналов с неоднородным заполнением $[\omega(r, t), k(r, t)]$ последние члены присутствуют и в стационарной среде*. Заметим, что вблизи областей обгона групповых фронтов рассматриваемое приближение перестает быть применимым.

* Возможность сжатия частотно-модулированных волн в диспергирующей среде хорошо известна и используется в радиолокационных системах оптимального приема (см., например, [8]). Здесь мы интересуемся эффектами, вызванными нестационарностью среды, подобные же вопросы в литературе рассмотрены лишь для частных случаев.

Из формул (16) можно найти изменение длительности волнового пакета. Конечно, для применимости группового описания сигнала как целого область локализации пакета должна быть малой по сравнению с масштабами, характеризующими изменение параметров среды в пространстве и времени (в трехмерной задаче должны быть малы, вообще говоря, и поперечные размеры пакета). При найденной величине τ тогда нетрудно оценить и ширину спектра пакета с однородным заполнением ($\Delta\omega \sim \tau^{-1}$).

3. В качестве частного случая более подробно рассмотрим однородную в пространстве среду ($(\nabla n)_{\omega, k} = 0$). При этом, согласно уравнению (7), волновой вектор k для фиксированного группового фронта постоянен ($k = k_0(\xi)$, где вид функции $k_0(\xi)$ определяется начальными и граничными условиями). Изменение частоты ω для этого фронта тогда можно найти непосредственно из (1), не решая уравнения (4). Для однородного пакета ($k_0 = \text{const}$) из (16) будем иметь*

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{u}{u_0}, \quad l = l_0 = \text{const}, \quad (17)$$

где $\Delta\omega_0$ и u_0 — начальные значения $\Delta\omega$ и u .

Более показательной, однако, является относительная ширина спектра $\delta = \Delta\omega/\omega$. Из формул (1) и (17) следует, что

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{un}{u_0 n_0} = \frac{1 + \frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega}}{1 + \left(\frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}}. \quad (18)$$

Иначе говоря, результат здесь определяется тем, увеличивается или уменьшается отношение групповой и фазовой скоростей, что зависит от конкретных дисперсионных характеристик волновой системы.

В недиспергирующей системе, как это было выяснено еще в работе [9], относительная ширина спектра короткого волнового пакета не меняется ($\delta = \Delta\omega/\omega = \text{const}$), хотя частота $\omega(t)$ может быть изменена достаточно сильно. Можно показать, что аналогично обстоит дело и для довольно широкого класса диспергирующих систем. В самом деле, во многих случаях дисперсионное уравнение (1) может быть записано в виде

$$k = k \left(\frac{\omega}{p} \right), \quad (19)$$

т. е. волновое число является функцией отношения частоты к некоторому единственному параметру p , который может быть переменным во времени. Тогда в пространственно-однородной системе ($k = \text{const}$) всегда и $\eta = \omega(t)/p(t) = \text{const}$, т. е. частота распространяющихся волн изменяется пропорционально параметру $p(t)$; в результате относительная ширина спектра пакета остается постоянной. Это видно

и непосредственно из формулы (18), так как здесь $un = (k/\omega) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = (k/\eta) \left(\frac{dk}{d\eta} \right)^{-1}$ зависит только от $\eta = \omega/p$ и не меняется при $k = \text{const}$.

* Заметим, что для среды без пространственной дисперсии из уравнения (10) в этом случае вытекает также прямолинейность и параллельность лучей, так что задача сводится к одномерной.

Например, дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в идеальном волноводе имеет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{p^2} - \kappa^2, \quad (20)$$

где κ — поперечное волновое число, зависящее от типа волны, $p^2 = c^2/\epsilon\mu$. Пусть проницаемости ϵ и μ не зависят от частоты. Если они медленно изменяются во времени, согласно вышесказанному, будем иметь

$$\omega(t) = c \sqrt{\frac{k^2 + \kappa^2}{\epsilon\mu}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0\mu_0}{\epsilon(t)\mu(t)}}, \quad (21)$$

где ϵ_0 , μ_0 , ω_0 — начальные значения ϵ , μ , ω , а относительная полоса будет неизменной, как и для ТЕМ волн ($\kappa = 0$) или для волн в свободном пространстве.

Разнообразные дисперсионные характеристики возможны в искусственных длинных линиях, и рассмотрение их представляет некоторый интерес, так как подходящим выбором схемы можно смоделировать характеристики различных сред. (Здесь, конечно, задача является одномерной, причем роль k играет набег фазы β на одну ячейку линии.) Например, для обычных фильтров низких и высоких частот (рис. 1а, 1б) дисперсионные уравнения имеют соответственно вид [10] $\cos \beta = 1 - 2\eta^2$ и $\cos \beta = 1 - 2\eta^{-2}$, где $\eta = \omega/\omega_k$ (ω_k — критическая частота этих фильтров), и относятся к типу (19), так что здесь $\omega(t) \sim \omega_k(t)$ и $\delta = \text{const}$ независимо от того, какие конкретно элементы ячейки фильтра (L , C или оба вместе) являются переменными.

Рассмотрим теперь несколько модифицированный вариант фильтра высоких частот (см. рис. 1в), в котором последовательно с индуктивностью L включена дополнительная емкость C' . Здесь, как легко показать,

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \left(\omega^2 LC - \frac{C}{C'} \right)^{-1}, \quad (22)$$

причем пока безразлично, какие из трех элементов ячейки (L , C или C') изменяются. При одновременном изменении параметров всех ячеек $\beta = \text{const}$ и из (20) имеем

$$\omega^2 LC - \frac{C}{C'} = \text{const}. \quad (23)$$

Если, в частности, отношение $C/C' = \text{const}$ (т. е., например, обе емкости C и C' не изменяются, а $L = L(t)$), то и здесь $\omega(t) \sim p(t)$, где на этот раз $p = 1/\sqrt{LC}$, и $\delta = \text{const}$.

Иной результат получается, если переменной является добавочная емкость C' , а L и C постоянны. При этом из (23) находим

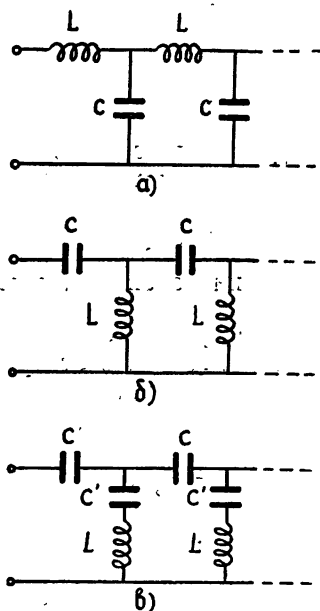


Рис. 1.

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C'_0} \right), \quad (24)$$

где ω_0 и C'_0 , как и раньше, начальные значения величин ω и C' .

Для групповой скорости волн из соотношения (20) нетрудно найти

$$u = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right)_p = - \frac{\sin \beta}{4\omega LC(1 - \cos \beta)^2} \quad (25)$$

(групповая скорость в таком фильтре при $\omega/\beta > 0$ отрицательна, т. е. ее направление противоположно направлению фазовой скорости). Следовательно, для волн с неизменной пространственной конфигурацией ($\beta = \text{const}$) в этом случае групповая скорость изменяется обратно пропорционально частоте ($u \sim \omega^{-1}$), тогда как фазовая скорость $n^{-1} = \omega/\beta \sim \omega$. В итоге, согласно (18), с уменьшением емкости $C'(t)$ относительная полоса δ убывает как $1/\omega^2$:

$$\frac{\delta(t)}{\delta_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2(t)}. \quad (26)$$

Заметим, что аналогичные результаты ($\Delta\omega \sim \omega^{-1}$, $\delta \sim \omega^{-2}$) имеют место при распространении электромагнитных волн в плазме с переменной электронной концентрацией [2].

До сих пор приводились примеры, когда изменение полосы частот $\Delta\omega$ происходит одновременно (хотя и не всегда пропорционально) с несущей частотой ω . В системе с дисперсией возможно, однако, адиабатическое сжатие или расширение спектра и без изменения несущей. Нетрудно выяснить необходимые для этого условия.

Чтобы несущая частота была постоянна, необходимо (см. (4)), чтобы на этой частоте ω_* производная $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, k}$ равнялась нулю.

В то же время, согласно (17), для изменения $\Delta\omega$ групповая скорость u должна зависеть от времени. Эти требования совместимы, если функция $n(\omega, p)$ вблизи ω_* имеет вид

$$n(\omega, p) = F(\zeta), \quad \zeta = (\omega - \omega_*) g(\omega, p) + b(\omega), \quad (27)$$

где $F(\zeta)$, $g(\omega, p)$ и $b(\omega)$ — произвольные дифференцируемые функции своих аргументов, причем при $\omega = \omega_*$ величины g и $\frac{dF}{d\zeta}$ не должны равняться нулю. Действительно, здесь $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega} = (\omega - \omega_*) \left(\frac{dF}{d\zeta} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{\omega} = 0$ при $\omega = \omega_*$, а групповая скорость на этой же частоте, как нетрудно

видеть, при изменении параметра $p(t)$ будет переменной величиной.

Заметим, что зависимости $n(\omega, p)$ типа (27) можно добиться в уже рассмотренной выше схеме фильтра, указанного на рис. 1 в, если в ней наряду с $C'(t)$ по специально подобранному закону меняется и индуктивность $L(t)$. В самом деле, пусть

$$L(t) = \frac{1}{\omega_*^2} \left[\frac{1}{C_*} + \frac{1}{C'(t)} \right], \quad (28)$$

где C_* — некоторая постоянная величина (для попадания ω_* в полосу прозрачности фильтра должно быть $0 \leq C_* \leq 4C$). Тогда при малых расстройках $\omega - \omega_*$ уравнение (22) может быть сведено к виду (27), где в данном случае $F(\zeta) = \arccos \zeta$, $g = \omega C_*^2 L(t)/2C$, $b = 1 - C_*/2C$,

и при $\omega = \omega_*$ частота остается постоянной (это видно и непосредственно из (24)). Групповая же скорость, как ясно из (25), будет при этом изменяться как L^{-1} , так что, согласно (18), имеем в этом случае

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{L_0}{L(t)}. \quad (29)$$

Таким образом, для сужения полосы сигнала здесь необходимо уменьшать емкость $C'(t)$ и одновременно увеличивать индуктивность $L(t)$. Физически это понятно, поскольку как раз при подобном противоположном по знаку изменении L и C' возмущения показателя преломления на какой-то одной частоте ω_* могут быть скомпенсированы; в то же время на соседних (боковых) частотах такой компенсации уже не будет и они могут приближаться к несущей частоте или, наоборот, удаляться от нее. Может только показаться неясным, почему в результате (29) не входит значение несущей частоты, хотя величина дисперсии при заданных параметрах фильтра зависит от частоты волны, и рассматриваемый эффект изменения полосы обусловлен именно дисперсией. Причина этого заключается в том, что частота несущей входит в условие (28), т. е. само соотношение между $L(t)$ и $C'(t)$ подбирается в зависимости от значения ω_* .

Рассмотренный здесь эффект параметрического преобразования спектра сигналов, по-видимому, представляет определенный теоретический и практический интерес. При этом величина эффекта определяется глубиной изменения параметров (см. (24), (26), (19)), однако его можно увеличить, применяя бегущую волну параметра (как ясно из уравнений (4) и (7), последнюю надо синхронизовать с групповой скоростью сигнала), или же многократно пропуская сигнал через участок с переменными параметрами.

Что касается амплитуд и энергии волн, то для их вычисления уравнения эйконала (1) недостаточно и необходимо привлечь, как это сделано в работах [1-6], укороченные динамические уравнения следующего (первого) приближения, вид которых зависит от конкретной физической системы. В настоящей работе мы не будем останавливаться на этом вопросе. Заметим, однако, что для консервативной системы отношение энергии волнового пакета к несущей частоте является адиабатическим инвариантом [1, 2, 9], что позволяет по известному распределению $\omega(r, t)$ сразу найти изменение амплитуды и энергии волн, не прибегая к специальному уравнению для последних величин. В наиболее общем виде это можно показать, используя «усредненный вариационный принцип», предложенный Уитамом [11]. Как и в стационарном случае, приближение геометрической оптики не применимо вблизи каустик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, 2186 (1967).
2. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 700 (1968).
3. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 17, 930 (1947).
4. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 293 (1961).
5. S. Veinberg, Phys. Rev., 126, 1844 (1962).
6. В. Н. Красильников, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 6, изд. ЛГУ, 1966, стр. 76.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
8. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков, Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1963.

9. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 4, 672 (1960).
10. А. М. Заездный, Основы расчета радиотехнических цепей, изд. Связь, М., 1966.
11. G. B. Whitham, J. Fluid Mech., 22, part 2, 273 (1965).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
11 октября 1967 г.

ON ADIABATIC TRANSFORMATION OF THE WAVE SPECTRUM IN NONSTATIONARY MEDIUM WITH DISPERSION

N. S. Stepanov

The propagation of waves in arbitrary weakly-nonstationary and weakly-inhomogeneous medium both with time and spatial dispersion is considered. The relations determining the change of the frequency and the wave vector of quasi-monochromatic waves as well as the beam trajectory have been derived using the dispersion equation (eikonal equation) generalized for such media. The regularities of the wave spectrum transformation in such a medium is investigated; as an example it is shown that in the dispersive medium there may occur the adiabatic compression or vice versa the spectrum broadening of the wave packet both with the change of the carrier frequency and without it. As an illustration, electromagnetic waves in waveguides and artificial long lines are considered.

УДК 621.378.001

О «ПЛЕНЕНИИ» ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛН ИМПУЛЬСАМИ И ПУЧКАМИ ИЗЛУЧЕНИЯ НАКАЧКИ

М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман

Показано, что параметрически связанные волны могут быть «пленены» пучками или импульсами излучения накачки. Необходимым условием «пленения» является наличие разных направлений разностей групповых скоростей взаимодействующих волн и скорости излучения накачки. Для некоторых конкретных случаев найден инкремент «пленённых» мод.

В процессах взаимодействия параметрически связанных волн с пучками и короткими импульсами излучения накачки в ряде случаев может сказаться явление пространственного захвата («пленения») этих волн накачкой. Оно невозможно при вырожденном взаимодействии [1], когда из-за разных величин или разных направлений групповых скоростей излучения накачки и сигнала усиление ограничено конечным временем (или расстоянием) взаимодействия. При невырожденном взаимодействии разности между векторами групповых скоростей взаимодействующих волн и вектором групповой скорости излучения накачки могут иметь противоположные знаки. При этом процессы в системе координат, движущейся вместе с импульсом накачки (или в системе координат с осью z , направленной вдоль групповой скорости накачки), похожи на процессы в параметрических усилителях с обратной волной [2]: существуют колебания, поле которых в основном локализовано в области, занятой излучением накачки, и вследствие этого непрерывно усиливается.

При выполнении условий пленения может существенно меняться распределение по частотам и углам интенсивности излучения параметрической суперлюминесценции, а условия самовозбуждения параметрических генераторов могут определяться не средней, а пиковой мощностью накачки. Явление захвата может быть использовано для получения больших коэффициентов усиления и параметрической генерации с малым порогом самовозбуждения при двумерных взаимодействиях. При этом для каждого типа колебаний существует своя зависимость условий пленения от мощности накачки и размеров ее пучка (длительности импульсов), что позволяет, в принципе, осуществлять дополнительную селекцию частотного и углового спектров излучения параметрических генераторов и усилителей света.

Рассмотрим вначале случай взаимодействия плоских волн в среде с квадратичной нелинейностью, считая, что импульсы накачки с амплитудой E_0 , длительностью τ и периодом T имеют прямоугольную форму. Амплитуду параметрически связанных волн $E_{1,2}$ будем искать в виде произведения $U_{1,2}(\xi) \exp(\gamma z + pt)$, где $U_{1,2}(\xi)$ — периодические функции переменной $\xi = t - s_3 z$ ($s_3 = v_3^{-1}$ — обратная величина групповой скорости накачки v_3). Поскольку уравнения для $U_{1,2}(\xi)$ имеют постоянные на интервалах $0 < \xi < \tau$ и $\tau < \xi < T$ коэффициенты, легко найти функции $U_{1,2}(\xi)$, а также дисперсионное уравнение для γ и p .

Не будем останавливаться на случае, когда волны бегут в одну сторону относительно импульса накачки ($\Delta s_1, \Delta s_{2,3} > 0$), так как при этих условиях, как видно из дисперсионного уравнения, явление захвата невозможно, а значения инкрементов $\gamma_1 = \text{Re } \gamma$, $p_1 = \text{Re } p$ определяют некоторым средним за период полем накачки $\bar{E} \simeq E_0 \tau / T$.

Если же $\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3} < 0$, то при $\tau \ll T$ дисперсионное уравнение не зависит от величины периода T и имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \Delta \tau + \frac{\Delta}{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|} \frac{\sin \Delta \tau}{\Lambda} &= 0, \\ \Lambda &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|}} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{\Delta^2}{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|}}, \\ \Delta &= \Delta s (\gamma + s_3 p + \alpha) + \Delta \alpha \left(\frac{s_1 + s_2}{2} - s_3 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Delta s = (s_2 - s_3)/2$; $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, $\Delta \alpha = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$ — среднее значение коэффициентов затухания взаимодействующих волн и их полуразность; λ_0 — коэффициент усиления плоских волн [3], соответствующий пиковому значению амплитуды накачки E_0 (для определенности принято $v_1 > v_3$). При достаточно большой длительности импульса накачки ($\tau > \tau_N$) уравнение (1) имеет $1 + N$ нарастающих решений:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \gamma + s_3 p + \alpha = \lambda_0 \frac{\sqrt{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|}}{\Delta s} \sqrt{1 - \frac{(\tau_n)^2}{\tau^2}}, \\ \tau_n &= \frac{\pi(\eta_n + n) \sqrt{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|}}{\lambda_0} \\ (n &= 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (2)$$

соответствующих локализованным внутри импульса излучения накачки волнам*. Амплитуды $U_{1,2}(\xi)$ в области $0 < \xi < \tau$ определяются (при $\tau \ll T$) соотношениями

$$\begin{aligned} U_1(\xi) &= i U_{2,0} \frac{\tau}{\tau_n} \sqrt{\left| \frac{\Delta s_{2,3}}{\Delta s_{1,3}} \right|} \sin [\pi(\eta_n + n) \tau^{-1} \xi] \exp \left[-\frac{s_1 + s_2 - 2s_3}{2\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}} \tilde{\gamma} \xi \right], \\ U_2(\xi) &= U_{2,0} \left\{ \cos [\pi(\eta_n + n) \tau^{-1} \xi] + \frac{\tau}{\tau_n} \sqrt{1 - \frac{\tau_n^2}{\tau^2}} \sin [\pi(\eta_n + n) \tau^{-1} \xi] \right\} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{s_1 + s_2 - 2s_3}{2\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}} \tilde{\gamma} \xi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

При удалении от импульса накачки в областях, куда могут излучаться соответствующие волны, $U_{1,2}(\xi)$ экспоненциально убывают:

$$U_{1,2}(\xi) \sim \exp [\Delta s_{1,2,3}(\alpha_{1,2} + \gamma + s_3 p) \xi] \quad \text{при } \xi \geq 0 \quad (3a)$$

и равны, естественно, нулю при $\xi \leq 0$.

* Величина η_n слабо зависит от параметров и заключена в интервале от $\eta_0 = 1/2$ до 1: $\eta = \eta_0$ при $\tau = \tau_n^{(k)} = [\pi(\eta_0 + n) \sqrt{|\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3}|}] / \lambda_0$; $\eta \simeq 1$ при $\tau > \tau_n^{(k)}$.

Приведем оценки величины

$$\tau_n^{(k)} = \frac{\pi(\eta_0 + n) \sqrt{|\Delta s_{13} \Delta s_{23}|}}{\lambda_0}, \quad (4)$$

определяющей предельную длительность импульса накачки, для которой еще существуют локализованные решения с номером n . Для взаимодействия типа $1^0 + 2^e = 3^e$ в кристалле КДР волн с $\omega_1 \simeq \omega_2$, $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq 1\mu$, $\Delta s_{23} \simeq -\Delta s_{13} \simeq \sqrt{\epsilon} \cdot 10^{-2}/c$, $\lambda_0 = \bar{\chi} \sqrt{S_0} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{S_0}$ (S_0 — пиковая плотность потока мощности накачки в $\text{мвт} \cdot \text{см}^{-2}$) и при $\sqrt{\epsilon} = 1,5$ $\tau_0^{(k)} \simeq 3 \cdot 10^{-11} / \sqrt{S_0}$. Таким образом, при $S_0 \simeq 100 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ захват может наблюдаться при использовании в качестве накачки пикосекундных импульсов света. Учет дисперсионного распыливания импульсов при этом еще не существен.

Пространственным аналогом рассмотренного выше явления является захват волн пучками излучения накачки. Его исследование в общем случае является более сложной задачей (повышается число независимых переменных и порядок уравнений). Однако для пучков накачки, дифракционное распыливание которой можно не учитывать, и взаимодействующих волн, векторы групповых скоростей которых лежат в одной плоскости (xz) с вектором групповой скорости излучения накачки, задача приближенно сводится к определению распределения полей в этой плоскости (в нормальном к плоскости xz направлении распределение в этом приближении произвольно). При этом, за исключением особых случаев, когда волновые векторы двух пар синхронных волн близки друг к другу ($|\lambda_0| |x_0^{(+)} - x_0^{(-)}| \gtrsim 1$) или когда малы углы $\tilde{\beta}_{1,2,3}$ между групповыми скоростями взаимодействующих волн и групповой скоростью излучения накачки ($\lambda_0/k_{1,2} \gtrsim \tilde{\beta}_{1,2,3}$), уравнения аналогичны по виду уравнениям для рассмотренной выше задачи. Поэтому для пучка шириной a с однородным распределением интенсивности и постоянной фазой дисперсионное уравнение и распределение амплитуд волн по сечению пучка накачки определяются выражениями (1), (2) и (3)*, в которых надо провести замену

$$s_{1,2} \rightarrow \tilde{\beta}_{1,2} = \beta_{1,2} \pm \frac{x_0}{k_{1,2}}, \quad \xi = x - \beta_3 z, \quad \tau \rightarrow a. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\beta}_{1,2}$ — углы между групповыми скоростями взаимодействующих волн и направлением волнового вектора накачки; $\beta_{1,2,3}$ — углы двулучепреломления этих волн и волны накачки; $\pm x_0$ — поперечные составляющие волнового вектора соответственно первой и второй волны, определяемые из условий двумерного синхронизма:

$$x_0^{(\pm)} = -\frac{\bar{k}_{\beta_2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\bar{k}_{\beta_2}^2}{4} + 2\Omega \Delta s \bar{k}}, \quad (6)$$

* Следует заметить, что для аксиально симметричных пучков накачки с мощностью P дисперсионное уравнение (2) иногда целесообразно записать, введя критическую мощность пучка накачки $P_n = \pi^2 (\eta_n + n)^2 |\tilde{\Delta \beta_{13}} \tilde{\Delta \beta_{23}}| / \bar{\chi}^2$ (для КДР $P_0 \simeq 0,3 |\tilde{\Delta \beta_{13}} \tilde{\Delta \beta_{23}}|$, где углы $\tilde{\beta}$ в градусах) в виде

$$\eta_n + s_3 P_n + a = \frac{2\pi |\tilde{\Delta \beta_{13}} \tilde{\Delta \beta_{23}}| (\eta_n + n)}{\tilde{\Delta \beta_{12}^2}} \sqrt{\frac{P}{P_n} \left(1 - \frac{P_n}{P}\right)} \frac{|\tilde{\Delta \beta_{12}}|}{a}.$$

где Ω — отклонение частоты первой волны (для определенности будем считать ее в дальнейшем обыкновенной) от частоты ω_{01} , определяемой из условий одномерного синхронизма; $\bar{k}^{-1} = (k_1^{-1} + k_2^{-1})/2$. Учитывая (2), (5) и (6), можно определить частоты и направления распространения на входе в область взаимодействия и выходе из нее волн, которые могут быть захвачены пучками накачки. Не останавливаясь на этом подробно, приведем оценку критической ширины пучка $a_0^{(k)}$, определяющей область значений a ($a > a_0^{(k)}$), для которых возможен захват волн в кристалле КДР ($\beta_1 = 0$; $\beta_2 \simeq \beta_3 \simeq -1/30$), а также соответствующих коэффициентов усиления.

При взаимодействии, близком к одномерному ($x_0/k_2 \ll \beta_2$), $a_0^{(k)}$ стремится к нулю при $x_0 \rightarrow 0$, но при этом стремится к нулю и коэффициент усиления. Однако уже при $\beta_1 = 10'$ коэффициент усиления всего в $2/3$ раза меньше коэффициента усиления для плоских волн, если $a^2 \gg (a_0^{(k)})^2 \simeq (0,6/\sqrt{S_0})^2 \text{ см}^2$. Критическая ширина $a_0^{(k)} = 0,5 \text{ мм}$, если $S_0 = 100 \text{ мвт} \cdot \text{см}^2$, и явление захвата может быть обнаружено, так как при длине кристалла 3 см смещение захваченной обыкновенной волны на выходе кристалла относительно его положения при распространении без взаимодействия с накачкой равно 1 мм . При ширине пучка a порядка нескольких миллиметров и $S_0 = 100 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ будут захвачены волны с существенно двумерным взаимодействием. Например, $a_0^{(k)} \simeq (3/\sqrt{S_0}) \text{ см}$ при $x_0/k_1 = |\beta_2|$. Коэффициент усиления для этих волн при $a > a_0^{(k)}$ будет почти такой же, как и при взаимодействии плоских волн.

Интересно рассмотреть условия пленения стоксовых и антистоксовых составляющих пучками излучения накачки при ВКР. Дисперсионное уравнение в этом случае совпадает с уравнением (1) (при учете замены (5)), но параметр λ_0 оказывается комплексным ($\lambda_0 = g_0(f_1 + if_2)$), где $f_1 = \Delta\Omega/(1 + \Delta\Omega^2)$; $f_2^2 = (1 + \Delta\Omega^2)^{-1}$; $\Delta\Omega = (\Omega - \Omega_0)$; Ω_0 — частота соответствующего перехода, Ω — сдвиг частоты стоксовой составляющей в единицах ширины линии. Поэтому найти решение (1) можно лишь численными методами. Однако выяснить особенности явления пленения и провести оценки в этом случае можно из следующих соображений.

Для пучков накачки с плавным распределением интенсивности уравнения для амплитуд стоксовой и антистоксовой волны вблизи максимума поля пучка накачки можно приближенно свести к уравнению типа уравнения для волновой функции гармонического осциллятора. Это позволяет легко найти приближенные значения собственных функций и инкрементов плененных волн. В частности, поля нулевой моды пропорциональны $\exp(\gamma_0 z - x^2 x_0^{-2})$, где γ_0 и x_0^{-2} определяются из уравнений,

$$\frac{4}{x_0^4} = \frac{1}{\Delta\beta^2} [\Delta k g_0 (if_2 - f_1) a^{-2} + 2\Delta\beta g_0^2 (f_1 - if_2)^2 a^{-2}],$$

$$(\gamma_0 + a)^2 = -\frac{\Delta k^2}{4} + [\Delta k g_0 (f_1 - if_2) - \Delta\beta g_0^2 (f_1 - if_2)^2] - \frac{2\Delta\beta^2}{x_0^2}. \quad (7)$$

Здесь Δk — расстройка от синхронизма, величина a характеризует распределение плотности потока мощности пучка накачки ($S_n = S_0 \exp(-x^2 a^{-2})$), и, кроме того, принято $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $|\tilde{\Delta\beta}_1| = |\tilde{\Delta\beta}_2| = \Delta\beta$.

Не анализируя подробно соотношения (7), остановимся коротко на случае, когда частота волн соответствует центру перехода ($\Delta\Omega = 0$; $f_1 = 0$; $f_2 = 1$). При этом, как видно из (7), локализованные моды могут быть только при $\Delta k \neq 0$. При этом $2x_0^{-2} \simeq \frac{1+i}{\sqrt{2}} a^{-1} \frac{\sqrt{\Delta k g_0}}{\Delta\beta}$,

а γ_0 определяется выражениями

$$\gamma_0 + \alpha = \left[\left(\Delta k g_0 - \frac{\Delta\beta \sqrt{\Delta k g_0}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta k^2}{4} + \frac{\Delta\beta \sqrt{\Delta k g_0}}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right); \quad (8a)$$

$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg} \left[\frac{4g_0}{\Delta k} \frac{1 - a^{-1} \Delta\beta \sqrt{\Delta k g_0}}{1 + \frac{4\Delta\beta}{a \Delta k} \sqrt{g_0 / \Delta k}} \right]. \quad (8б)$$

Из (8) следует, что усиливаться волны могут, если $a > a_0 = \Delta\beta / \sqrt{\Delta k g_0}$, однако при увеличении Δk уменьшается максимальное значение коэффициента усиления. Для широких пучков этот максимум лежит вблизи $\Delta k \simeq g_0$, причем $\gamma'_{0 \max} \simeq g_0$.

Для ВКР в жидкостях характерными являются значения $\Delta\beta \simeq 3^\circ$; $g_0 = 3 \cdot 10^{-3} S_0$. При этом $a_0 \simeq 15 \text{ см} / S_0$ для $\Delta k = g_0$, т. е. при $S_0 = 100 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ пленение этих волн произойдет при ширине пучка больше 3 мм. Такое большое значение критического размера пучка накачки может затруднить наблюдение эффекта пленения в этом случае. Однако следует заметить, что вследствие более быстрой, чем при взаимодействии волн в среде с квадратичной нелинейностью, зависимости критического размера от плотности потока мощности накачки $a_0 = 0,5 \text{ мм}$ уже при $S_0 = 300 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Таким образом, не исключена возможность наблюдения эффекта пленения волн и при ВКР.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Glann, Appl. Phys. Lett., 11, 333 (1967).
2. D. L. Bobroff, J. Appl. Phys., 36, № 5, 1760 (1965).
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М., изд. ВИНТИ, 1964.
4. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
5. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1345 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 июля 1968 г.

PARAMETRICALLY-COUPLED WAVE IMPRISONMENT BY PULSES AND BEAMS OF PUMPING RADIATION

M. M. Sushchik, V. M. Fortus, G. I. Freidman

It is shown that parametrically-coupled waves may be imprisoned by beams and pulses of pumping radiation. The presence of different directions of the differences of group velocities of interacting waves and velocity of pumping radiation is the necessary condition of imprisonment. The increment of imprisoned modes is found for some concrete cases,

УДК 538.574.6

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ТЕЛЕ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

Дана общая постановка задачи о дифракции скалярных волн на теле в рассеивающей среде. Методами диаграммной техники выводятся общие интегральные уравнения для средних по ансамблю значений поля и его билинейной комбинации. Полученные уравнения применяются к вычислению средних значений амплитуды и поперечника рассеяния тела в ограниченной рассеивающей среде. Исследуется интегро-дифференциальное уравнение для среднего поля в пределе, когда длина волны велика по сравнению с масштабом нелокальности ядра интегрального члена уравнения. Показано, что в этом пределе вычисление среднего поля сводится к решению задачи дифракции волны на теле в детерминированной среде с комплексным и неоднородным эффективным показателем преломления. Неоднородная часть показателя преломления может быть истолкована как своеобразная поляризация среды под влиянием тела.

Вопросам теории дифракции волн на телах различной формы (сфера, цилиндр, экран и т. д.) и различных оптических свойств (диэлектрик, идеальный проводник и т. д.) посвящена обширная литература. Развит ряд эвристических и строгих методов решения дифракционных задач, изложение которых можно найти, например, в [1-3], где приведена также обширная библиография.

Во всех названных работах по дифракции предполагается, что условия распространения волн в окружающей среде и условия на границе тел являются детерминированными. В то же время в радиофизике, акустике (гидроакустике), оптике имеется очень много задач, связанных с влиянием случайных неоднородностей, которые могут быть объемными и поверхностными. Это соответствует тому, что случайными могут быть либо свойства среды, в которой происходит распространение волн, либо граничные условия—форма поверхности тела, коэффициенты отражения и пропускания. Таким образом, существует проблема дифракции волн на теле, расположенном в рассеивающей среде со случайными неоднородностями, граничные условия на поверхности которого также являются случайными. Мы будем интересоваться только первой частью проблемы (по второй части см. монографию Рытова [4]).

В настоящее время известны две работы по дифракции волн на теле в рассеивающей среде [5, 6].

В работе Юнг Минг-Чена [5] рассмотрена задача о дифракции плоской скалярной волны на идеально мягкой сфере, расположенной в неограниченной статистически однородной и изотропной среде с флуктуирующим показателем преломления. Он использует метод Келлера [7], позволяющий решать стохастические дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр, и выводит для среднего по ансамблю флуктуаций поля интегро-дифференциальное волновое уравнение.

Тамойкин [6] рассматривает дифракцию электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре, помещенном в слой со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Длина падающей

волны предполагается малой по сравнению с радиусом цилиндра и масштабом флуктуаций диэлектрической проницаемости. Проводя расчет дифракции волны на цилиндре методом физической оптики, а ее распространение в среде—в геометрическом приближении, он вычисляет среднее поле, а также поперечник и диаграмму рассеяния.

В настоящей работе нам хотелось обобщить результаты Юнг Минг-Чена и Тамойкина в отношении постановки задачи и ее принципиального решения, не накладывая ограничений на форму и размеры тела, тип граничных условий, масштаб флуктуаций и т. д. Используя методы диаграммной техники, мы выведем общие уравнения для среднего поля и среднего его произведения на комплексно-сопряженное значение и обсудим способы их решения.

Будем рассматривать приведенное волновое уравнение с переменным в пространстве показателем преломления, описывающее скалярное поле $\psi(\mathbf{x})$, гармонически зависящее от времени. Уравнение запишем в виде

$$\Delta \psi(\mathbf{x}) + k^2(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

где $k(\mathbf{x})$ —волновое число, \mathbf{x} —координаты точки трехмерного пространства. Внутри тела волновое число имеет постоянное значение $k = k_i$. Вне тела полагаем $k^2 = k_e^2 = k_0^2 [1 + \varepsilon(\mathbf{x})]$, где k_0 —постоянное волновое число свободного пространства, $\varepsilon(\mathbf{x})$ —флуктуирующая часть квадрата показателя преломления среды, окружающей тело. Вместо волновых чисел k_i и k_e удобно ввести отклонения их квадратов от квадрата волнового числа k_0 , обозначая $V_0(\mathbf{x}) = k_i^2 - k_0^2$ и $V(\mathbf{x}) = k_0^2 - k_e^2 = -k_0^2 \varepsilon(\mathbf{x})$. Предполагается, что функция $V_0(\mathbf{x})$ вне тела и функция $V(\mathbf{x})$ внутри тела тождественно равны нулю. При этом уравнение (1) формально принимает вид уравнения Шредингера:

$$[\Delta + k_0^2 - V_0(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})] \psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (1a)$$

Используя такого рода аналогию с квантовой механикой, назовем функции $V_0(\mathbf{x})$ и $V(\mathbf{x})$ эффективными потенциалами тела и окружающей его рассеивающей среды.

Обычно в задачах дифракции скалярных волн на поверхности тела S задается одно из трех следующих граничных условий, которых мы тоже будем придерживаться:

$$\psi_i|_S = \psi_e|_S, \quad (1/\rho_i) \partial_n \psi_i|_S = (1/\rho_e) \partial_n \psi_e|_S; \quad (2)$$

$$\psi_e|_S = 0; \quad (3)$$

$$\partial_n \psi_e|_S = 0. \quad (4)$$

Здесь индексы i и e относятся к внутренней и внешней областям пространства относительно поверхности тела S , ∂_n —символ нормальной к поверхности тела производной. В акустике граничное условие (2) означает непрерывное изменение при переходе через поверхность S давления и нормальной компоненты скорости. Условие Дирихле (3) характеризует идеально мягкую поверхность и условие Неймана (4)—абсолютно жесткую. При граничных условиях Дирихле и Неймана из волнового уравнения (1a) потенциал тела $V_0(\mathbf{x})$ исключается.

Кроме граничных условий на поверхности тела, необходимо еще задать условие излучения в бесконечности, где поле $\psi(\mathbf{x})$ должно распадаться на падающее поле $\phi_0(\mathbf{x})$ и расходящиеся волны. Падающее поле мы будем выбирать или в виде плоской волны $\exp i k_0(\mathbf{s}_0 \mathbf{x})$, распространяющейся в направлении единичного вектора \mathbf{s}_0 , или в виде

де сферической волны $G_0(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \exp(ik_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)/(-4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$, исходящей из некоторой точки \mathbf{x}' . Во втором случае в правую часть волнового уравнения (1а) необходимо ввести дельта-образный источник $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Соответствующее решение этого уравнения обозначим через $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ и назовем функцией Грина тела в рассеивающей среде.

Наряду с поставленной дифракционной задачей для тела в рассеивающей среде целесообразно рассматривать ее предельный случай для изолированного тела, когда рассеивающая среда отсутствует и ее потенциал $V(\mathbf{x}) \equiv 0$. Предельные значения волнового поля $\psi(\mathbf{x})$, возникающего при облучении плоской волной, и функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ обозначим через $\psi(\mathbf{x}|V_0)$ и $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|V_0)$, указывая индексом V_0 на то обстоятельство, что они относятся к изолированному телу.

Располагая известным решением дифракционной задачи для изолированного тела, можно свести задачу о дифракции на теле в рассеивающей среде к решению интегрального уравнения. Если падающее поле является плоской волной, то интегральное уравнение имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}|V_0) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|V_0) V(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (5)$$

При облучении сферической волной приходим к уравнению

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|V_0) + \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}''|V_0) V(\mathbf{x}'') G(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') d\mathbf{x}''. \quad (6)$$

Применяя к обеим частям уравнений (5) и (6) оператор $\Delta_{\mathbf{x}} + k_0^2 - V_0(\mathbf{x})$, убеждаемся, что их решения действительно удовлетворяют волновому уравнению (1а). Граничные условия на поверхности тела и условие излучения в бесконечности выполняются автоматически в силу того, что они выполняются для $\psi(\mathbf{x}|V_0)$ и $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Обратимся к уравнению (6) для функции Грина тела в рассеивающей среде $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Формально оно имеет как раз такую функциональную структуру, применительно к которой Бурре [8], а вслед за ним Татарский [9] и Фриш [10] сформулировали способ составления общих уравнений для средних по ансамблю реализаций рассеивающей среды значений функции Грина $\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}$ и ее билинейной комбинации $\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}')}$, где индекс* указывает на переход к комплексно-сопряженной величине. По аналогии с квантовой электродинамикой упомянутые уравнения носят название уравнений Дайсона и Бете—Солпитера. Их вывод основан на анализе результата усреднения борновских рядов теории возмущений для $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ и $\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}')}$ методами диаграммной техники.

Применительно к задаче дифракции на теле в рассеивающей среде интерес представляют среднее поле $\overline{\psi(\mathbf{x})}$, средняя функция Грина $\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}$ и среднее значение билинейной комбинации поля $\overline{\psi(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{y})}$. Эти величины удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\overline{\psi(\mathbf{x})} = \psi(\mathbf{x}|V_0) + \iint G(\mathbf{x}, \mathbf{x}''|V_0) d\mathbf{x}'' M(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'|V_0) d\mathbf{x}' \overline{\psi(\mathbf{x}')}; \quad (7)$$

$$\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|V_0) + \iint G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'''|V_0) d\mathbf{x}''' M(\mathbf{x}',', \mathbf{x}''|V_0) d\mathbf{x}'' \overline{G(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')}; \quad (8)$$

$$\overline{\psi(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{y})} = \overline{\psi(\mathbf{x})} \overline{\psi^*(\mathbf{y})} + \iiint \overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'')} \times \quad (9)$$

$$\times \overline{G^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}'')} K(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'; \mathbf{y}'', \mathbf{y}'|V_0) d\mathbf{x}'' d\mathbf{y}'' \overline{\psi(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{y}')};$$

Ядра $M(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|V_0)$ и $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{y}, \mathbf{y}'|V_0)$ носят название массового оператора

ра и оператора интенсивности. Они равны суммам всевозможных неприводимых диаграмм без внешних линий распространения. Индекс V_0 у операторов указывает на то, что их значения, вообще говоря, существенно зависят от присутствия тела.

Если потенциал среды $V(\mathbf{x})$ флуктуирует по нормальному закону с нулевым средним значением $\overline{V(\mathbf{x})} = 0$ и корреляционной функцией $\overline{V(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}')} = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, то первые члены разложений массового оператора и оператора интенсивности по степеням корреляционной функции потенциала равны

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') | V_0 B(\mathbf{x}, \mathbf{x}'); \quad (10)$$

$$K_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \mathbf{y}, \mathbf{y}' | V_0) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}'). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) представляют собой обобщение хорошо известных в теории многократного рассеяния волн приближения Бурре для массового оператора и лестничного приближения для оператора интенсивности на случай, когда в рассеивающей среде имеется тело.

Как видно из (11), присутствие тела не сказывается на лестничном приближении для оператора интенсивности, если не считать того очевидного факта, что в области пространства, занятой телом, корреляционная функция потенциала среды $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ тождественно равна нулю. Напротив, приближение Бурре для массового оператора в присутствии тела изменяется существенным образом. Действительно, функция Грина изолированного тела $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0)$ равна сумме двух слагаемых: $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0) = G_0(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) + G_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0)$. Из них первое слагаемое представляет известную нам функцию Грина свободного пространства, описывающую распространение в свободном пространстве сферической волны из точки \mathbf{x}' в точку \mathbf{x} . Второе слагаемое $G_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0)$ — регулярная составляющая функции Грина изолированного тела — описывает распространение волны, исходящей из точки \mathbf{x}' , взаимодействующей с телом и приходящей после этого в точку \mathbf{x} . Соответственно разбиению функции Грина изолированного тела на два слагаемых подразделяется на два слагаемых и приближение Бурре (10) для массового оператора. При этом первое слагаемое совпадает с массовым оператором в приближении Бурре без тела, а второе слагаемое учитывает его присутствие.

Применим общие уравнения для средних полей (7), (8) и (9) к рассмотрению задачи о дифракции плоской волны, когда рассеивающая среда с телом занимает ограниченную область пространства. В силу условия излучения вдали от этой области неусредненное поле $\psi(\mathbf{x})$ должно слагаться из падающей плоской и расходящейся сферической волны $G_0(x)$, умноженной на некоторую амплитуду рассеяния $F(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_0)$, где $\mathbf{s}_x = \mathbf{x}/x$ — единичный вектор в направлении на точку наблюдения; начало координат расположено внутри тела. Расходящаяся волна является рассеянным полем, причем в рассеянии принимают участие и тело и окружающая его среда. Физический интерес представляют средняя амплитуда рассеяния $\overline{F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)}$ и средний квадрат ее модуля $|\overline{F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)}|^2$, имеющий смысл среднего дифференциального поперечника рассеяния тела в рассеивающей среде.

При отыскании названных средних значений амплитуды рассеяния нам придется воспользоваться асимптотической формулой вида

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0) |_{x \rightarrow \infty} \simeq G_0(x) \psi_{-s_x}(\mathbf{x}' | V_0). \quad (12)$$

Формула утверждает, что функция Грина изолированного тела вдали от него равна произведению функции Грина свободного пространства

на поле, которое получается из поля $\psi(\mathbf{x}' | V_0)$ заменой единичного вектора падающей плоской волны \mathbf{s}_0 на $(-\mathbf{s}_x)$. Формулу (12) можно получить на основании интегральных уравнений для функции Грина изолированного тела, рассмотренных в [11] применительно к граничным условиям (2) и в [3] применительно к граничным условиям (3) и (4). Кроме названных интегральных уравнений, для вывода асимптотического представления (12) следует принять во внимание аналогичное представление функции Грина для свободного пространства и принцип взаимности, согласно которому $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | V_0) = G(\mathbf{x}', \mathbf{x} | V_0)$.

Рассмотрим теперь уравнение для среднего поля (7). Устремляя в нем точку наблюдения \mathbf{x} в бесконечность, подставляем в правую часть асимптотическое представление поля $\psi(\mathbf{x} | V_0)$, равное $\psi(\mathbf{x} | V_0) \simeq \simeq \exp ik_0(\mathbf{s}_0 \mathbf{x}) + f(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_0) G_0(\mathbf{x})$, а также асимптотическое представление функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'' | V_0)$, вычисленное согласно (12). Через $f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)$ мы обозначили амплитуду рассеяния изолированного тела. В результате для средней амплитуды рассеяния тела в рассеивающей среде получаем выражение

$$\overline{F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)} = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) + \iint \psi_{-\mathbf{s}}(\mathbf{x}'' | V_0) M(\mathbf{x}'', \mathbf{x}' | V_0) \overline{\psi(\mathbf{x}') dx'' dx'}. \quad (13)$$

Рассмотрим далее уравнение для средней функции Грина (8). Из этого уравнения, подобно тому, как было получено асимптотическое представление функции Грина изолированного тела (12), можно найти аналогичное асимптотическое представление средней функции Грина, имеющее вид

$$\overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') |_{x \rightarrow \infty}} \simeq G_0(\mathbf{x}) \overline{\psi_{-\mathbf{s}_x}(\mathbf{x}')}. \quad (14)$$

Совместим в уравнении для средней билинейной комбинации поля (9) точки наблюдения \mathbf{x} и \mathbf{y} , устремляя их в бесконечность. Используя при этом асимптотическое представление средней функции Грина (14), приходим к следующему выражению для флуктуации амплитуды рассеяния тела в рассеивающей среде:

$$\begin{aligned} & |\overline{F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)}|^2 - |\overline{F(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0)}|^2 = \\ & = \iiint \overline{\psi_{-\mathbf{s}}(\mathbf{x}'') \psi_{-\mathbf{s}}^*(\mathbf{y}'')} K(\mathbf{x}'', \mathbf{x}'; \mathbf{y}'', \mathbf{y}' | V_0) \overline{\psi(\mathbf{x}') \psi^*(\mathbf{y}')} dx'' dy'' dx' dy'. \end{aligned} \quad (15)$$

Проанализируем полученные выражения. Согласно (13), средняя амплитуда рассеяния тела в рассеивающей среде равна амплитуде рассеяния изолированного тела плюс член, учитывающий эффект рассеивающей среды. Заметим, что эффект рассеивающей среды зависит от присутствующего тела. Для вычисления по формулам (13) и (15) необходимо предварительно решить уравнения для средних полей (7), (8) и (9). Вообще говоря, это весьма сложная проблема. Однако в предельном случае, когда линейные размеры L области, занимаемой рассеивающей средой и телом, малы по сравнению с длиной экстинкции d , $L \ll d$, проблема значительно упрощается.

Действительно, в этом случае эффект рассеивающей среды мал и уравнения для средних полей можно решать методом итераций. Удобно ввести соответствующий малый параметр α в качестве множителя перед массовым оператором и оператором интенсивности, заменяя временно $M \rightarrow \alpha M$ и $K \rightarrow \alpha K$, и искать решения уравнений для средних полей в виде разложений по параметру.

Аналогично можно разложить по введенному параметру и соотношения (13) и (15). При этом в первом порядке по параметру α , если

попутно выбрать массовый оператор и оператор интенсивности в приближении Бурре (10) и лестничном приближении (11), соотношения (13) и (15) принимают вид

$$\overline{\Delta f(s, s_0)} \simeq \iint \psi_{-s}(x'' | V_0) B(x'', x') G(x'', x' | V_0) \psi(x' | V_0) dx'' dx'; \quad (16)$$

$$|\overline{\Delta f(s, s_0)}|^2 \simeq \iint \psi_{-s}(x' | V_0) \psi_{-s}^*(y' | V_0) B(x', y') \psi(x' | V_0) \psi^*(y' | V_0) dx' dy'. \quad (17)$$

Здесь через $\Delta f(s, s_0)$ обозначена поправка к амплитуде рассеяния изолированного тела, обусловленная присутствием рассеивающей среды и равная $\Delta f(s, s_0) = F(s, s_0) - f(s, s_0)$. В правой части (16) и (17) фигурируют уже не средние поля, а поля, относящиеся к изолированному телу. Физически это означает, что мы пренебрегли многократным рассеянием волн в окружающей тело среде.

Формулы (16) и (17) допускают дальнейшее упрощение, если предположить, что рассеивающие свойства изолированного тела тоже выражены слабо (модуль амплитуды рассеяния тела $|f|$ мал по сравнению с его линейными размерами r_0). Это может быть, например, в случае, когда показатель преломления тела мало отличается от единицы (рассеяние Рэлея—Ганса [12]) или же когда линейные размеры тела малы по сравнению с длиной волны (рэлеевское рассеяние [1]). В указанном предположении можно заменить в правых частях формул (16) и (17) все дифракционные поля $\psi(|V_0)$ и $\psi_{-s}(|V_0)$ на плоские волны, распространяющиеся в свободном пространстве в направлении s_0 и $(-s)$, а функцию Грина изолированного тела $G(x, x' | V_0)$ на функцию Грина свободного пространства. Физически описанная замена соответствует пренебрежению взаимодействием между волной, отраженной от тела, и окружающей его рассеивающей средой.

Перейдем к вопросу о методах решения уравнений для средних полей (7), (8) и (9) в тех случаях, когда существенно многократное рассеяние волн и метод итераций уже не применим. Остановимся на уравнении для среднего поля (7). Подеиствуем на его левую и правую части оператором $\Delta + k_0^2 - V_0(x)$, переводя (7) в интегро-дифференциальное уравнение

$$[\Delta + k_0^2 - V_0(x)] \overline{\psi(x)} = \int M(x, x' | V_0) dx' \overline{\psi(x')}. \quad (18)$$

Интегральный член уравнения (18) в силу нелокальности массового оператора учитывает пространственную дисперсию волн.

Обозначим через a пространственный масштаб нелокальности массового оператора $M(x, x' | V_0)$. Тогда массовый оператор заметно отличен от нуля лишь при $|x - x'| \leq a$. Допустим, что длина волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ значительно больше масштаба нелокальности массового оператора, $k_0 a \ll 1$. Так как среднее поле $\overline{\psi(x)}$, очевидно, испытывает заметное изменение на расстояниях порядка длины волны λ_0 , то в рассматриваемом пределе длинных волн его можно вынести из-под знака интеграла в правой части уравнения (18) в точке $x' = x$ как медленно меняющийся множитель. При этом уравнение принимает вид

$$[\Delta + k_{\text{эф}}^2(x) - V_0(x)] \overline{\psi(x)} = 0, \quad (19)$$

Через $k_{\text{эфф}}(x)$ обозначено эффективное волновое число, определяемое соотношением

$$k_{\text{эфф}}^2(x) = k_0^2 - \int M(x, x' | V_0) dx'. \quad (20)$$

Мы пришли к выводу, что в пределе, когда длина волны велика по сравнению с масштабом нелокальности массового оператора, нахождение среднего поля задачи дифракции на теле в рассеивающей среде сводится к решению аналогичной дифракционной задачи в детерминированной среде с комплексным неоднородным эффективным показателем преломления.

Исследуем эффективный показатель преломления $n_{\text{эфф}}(x) = k_{\text{эфф}}(x)/k_0$. Массовый оператор возьмем в приближении Бурре (10). В этом приближении масштаб нелокальности массового оператора a совпадает с радиусом корреляции l флуктуаций потенциала среды. Условие, согласно которому масштаб нелокальности массового оператора мал по сравнению с длиной волны, превращается в условие того, что флуктуации потенциала среды являются мелкомасштабными, $k_0 l \ll 1$. Рассеивающую среду, окружающую тело, будем считать неограниченной статистически однородной и изотропной, а тело — идеально мягкой сферой радиуса r_0 . Подобного рода задача рассматривалась Юнг Минг-Ченом. В частности, интегро-дифференциальное уравнение (18) при $V_0(x) = 0$ с учетом граничного условия Дирихле (3) на поверхности сферы эквивалентно основному уравнению Юнг Минг-Чена.

Регулярная составляющая функции Грина изолированной идеальной мягкой сферы $G_S(x, x' | V_0)$ вычислена Юнг Минг-Ченом и имеет вид

$$G_S(x, x' | V_0) = \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \Theta) \times \\ \times [j_l(k_0 r_0)/h_l(k_0 r_0)] h_l(k_0 x) h_l(k_0 x'). \quad (21)$$

Здесь $P_l(\cos \Theta)$ — полиномы Лежандра, Θ — угол между векторами x и x' , j_l и h_l — сферические функции Бесселя. Предполагается, что начало координат расположено в центре сферы и обе точки x и x' лежат во внешней области сферы.

На основании (20) квадрат эффективного показателя преломления в приближении Бурре равен

$$n_{\text{эфф}}^2(x) = n^2 - \frac{1}{k_0^2} \int B(|x - x'|) G_S(x, x' | V_0) dx'. \quad (22)$$

Первое слагаемое в формуле (22), обозначенное через n^2 , представляет собой квадрат показателя преломления среды без тела в пределе мелкомасштабных флуктуаций. Он исследовался многими авторами (см., например, [13, 14]). Для экспоненциальной корреляционной функции $B(x) = k_0^4 \langle \epsilon^2 \rangle \exp(-x/l)$ в указанном пределе квадрат показателя преломления среды без тела приближенно равен $n^2 \simeq 1 + \langle \epsilon^2 \rangle (k_0 l)^2 + 2i \langle \epsilon^2 \rangle (k_0 l)^3$. Соответствующее значение коэффициента экстинкции равно $1/d = 2k_0 \text{Im } n \simeq 2 \langle \epsilon^2 \rangle k_0 (k_0 l)^3$.

Обратимся ко второму слагаемому формулы (22). Оно может быть истолковано как проявление своеобразной неоднородной поляризации среды под действием тела. Допустим, что точка наблюдения x лежит в френгоферовой зоне дифракции сферы, $x \gg k_0 r_0^2$. Если радиус сферы порядка или больше длины волны, $k_0 r_0 \gg 1$, то вследствие мелкомас-

штабности флуктуаций ($k_0 l \ll 1$) точка x' , по которой во втором слагаемом (22) производится интегрирование, тоже оказывается в зоне дифракции Фраунгофера. Это позволяет заменить в регулярной составляющей функции Грина (21) обе сферические бесселевы функции $h_l(k_0 x)$ и $h_l(k_0 x')$ их асимптотическими представлениями при больших значениях аргументов. В частности, получаем, что при совпадающих аргументах $x = x'$ регулярная составляющая функции Грина в зоне дифракции Фраунгофера равна

$$G_s(x, x'|V_0) \simeq f(\pi) G_0^2(x) \quad (x \gg k_0 r_0^2). \quad (23)$$

Через $f(\pi)$ здесь обозначена амплитуда рассеяния плоской волны $f(\vartheta)$ (ϑ — угол рассеяния) на рассматриваемой сфере в направлении назад $\vartheta = \pi$. Аналогично находим следующее выражение для второй* производной от регулярной составляющей функции Грина по углу ϑ между векторами x и x' , совмещая их после дифференцирования:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} G_s(x, x'|V_0)|_{x=x'} \simeq \left[\frac{d^2 f(\vartheta)}{d \vartheta^2} \right]_{\vartheta=\pi} G_0^2(x) \quad (x \gg k_0 r_0^2). \quad (24)$$

Если через ϑ_π обозначить угловой масштаб изменения амплитуды рассеяния $f(\vartheta)$ в окрестности направления рассеяния назад, то при дополнительном условии $x \gg l/\vartheta_\pi$ во втором слагаемом (22) регулярную составляющую функцию Грина можно вынести из-под знака интеграла в точке $x' = x$ как медленно меняющийся множитель. Возникающий при этом интеграл от корреляционной функции равен $4\pi/d$. Таким образом, если точка наблюдения расположена в зоне дифракции Фраунгофера, из (22) получаем

$$n_{\text{эфф}}^2(x) \simeq n^2 - \frac{4\pi}{k_0^2 d} f(\pi) G_0^2(x). \quad (25)$$

Согласно (25), поляризация среды телом убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Если радиус сферы мал по сравнению с длиной волны, $k_0 r_0 \ll 1$, то единственным условием применимости формулы (25) является требование, чтобы расстояние x точки наблюдения от центра сферы превышало** радиус корреляции l , $x \gg l$. Амплитуда рассеяния малой сферы изотропна и $f(\pi) \simeq 4\pi r_0$. Отсюда для составляющей квадрата показателя преломления, связанной с поляризацией среды телом, получаем оценку

$$|n_{\text{эфф}}^2(x) - n^2| \sim (\text{Re } n - 1) \frac{r_0}{l} \left(\frac{l}{x} \right)^2. \quad (26)$$

Здесь первый множитель $\text{Re } n - 1 \simeq (1/2) \langle \epsilon^2 \rangle (k_0 l)^2$ мал по сравнению с единицей в силу условия применимости приближения Бурре для среды без тела. Второй множитель r_0/l для малой сферы может быть как больше, так и меньше или порядка единицы.

В заключение ограничимся кратким замечанием относительно возможных путей решения уравнения (9) для средней билинейной комбинации поля. В отсутствие тела одним из регулярных способов решения данного уравнения является сведение его к уравнению переноса излучения [15–18]. В присутствии тела можно попытаться свести

* Первая производная в силу условия симметрии задачи обращается в нуль.

** В противном случае регулярную составляющую функции Грина нельзя вынести из-под знака интеграла второго слагаемого (22).

уравнение (9) к уравнению переноса с учетом граничных условий на поверхности тела. Уравнение переноса подобного рода рассматривается, например, Соболевым в [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, 1951.
2. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1962.
3. Х. Хенл, А. Мауэ и К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1961.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
5. Yung Ming-Chen, J. Mathem. Phys., 5, № 11, 1541 (1964).
6. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1124 (1966).
7. I. B. Keller, Proceedings of the Seventeenth Symposium on Applied Mathematics (American Mathematical Society, New York, 1964).
8. R. C. Bourret, Nuovo Cimento, 26, № 1, 1 (1962).
9. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, № 4, 1399 (1964).
10. U. Frisch, Annales D'Astrophysique, 29, № 6, 645 (1966).
11. Г. А. Югова, ВМУ, № 2, 121 (1959).
12. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
13. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 44, № 2, 676 (1963).
14. Frank C. Karal, Ir and Joseph B. Keller, J. Mathem. Phys., 5, № 4, 537 (1964).
15. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).
16. А. Г. Боровой, Изв. высш. уч. зав.—Физика, № 6, 50 (1966).
17. Ю. Н. Барабаненков, Доклады АН СССР, 174, № 1, 53 (1967).
18. Ю. Н. Барабаненков, В. Н. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, № 3, 978 (1967).
19. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.

Поступила в редакцию
20 июня 1967 г.

TO THE THEORY OF WAVE DIFFRACTION ON A BODY IN A SCATTERING MEDIUM

Yu. N. Barabanenkov

The problem on diffraction of scalar waves on a body in a scattering medium is formulated. The general integral equations are deduced for mean over the ensemble values of the field and its bilinear combinations by the methods of pattern technique. The equations obtained are used to calculate the mean values of the amplitude and the scattering cross-section of the body in the bounded scattering medium. The integral-differential equation is investigated for the mean field in a long-wave region when the wavelength is great as compared with the scale of the nucleus nonlocality of the equation integral term. It is shown that in this region the calculation of the mean field is reduced to the problem of wave diffraction on the body in the determined medium with complex and inhomogeneous effective refractive index. The inhomogeneous part of the refractive index may be interpreted as peculiar polarization of the medium by the body.

УДК 621.372.826

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ДИЭЛЕКТРИКОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ НА СВЧ

И. П. Григас, В. К. Шугуров

Рассчитан коэффициент отражения основной волны H_{10} от тонкого диэлектрического цилиндра, помещенного в центр широкой стенки прямоугольного волновода параллельно вектору электрического поля. Показано, что диэлектрическая проницаемость тонких диэлектрических цилиндров или нитевидных кристаллов высокоомных полупроводников в широком диапазоне СВЧ может быть определена по измеренному коэффициенту отражения. Сопоставлены теоретические и экспериментальные результаты определения коэффициента отражения нитевидных кристаллов высокоомного полупроводникового соединения Sb_2S_3 в диапазоне частот 9—27 ГГц.

Исследование полупроводников и диэлектриков в сверхвысоко-частотных электрических полях представляет интерес с научной и практической точки зрения. Весьма актуальной задачей является исследование диэлектрических свойств нитевидных монокристаллов высокоомных полупроводников, поскольку по своей внутренней структуре такие кристаллы близки к идеальным. В настоящей работе предложен способ определения диэлектрической проницаемости нитевидных образцов по измерению их коэффициента отражения на СВЧ.

На рис. 1 показан тонкий цилиндрический образец радиуса r , расположенный в центре широкой стенки прямоугольного волновода параллельно вектору электрического поля основной волны H_{10} . Предположим, что магнитная восприимчивость материала цилиндра $\mu = 1$, а диэлектрическая проницаемость равна ϵ . Из леммы Лоренца для коэффициента отражения основной волны H_{10} получаем

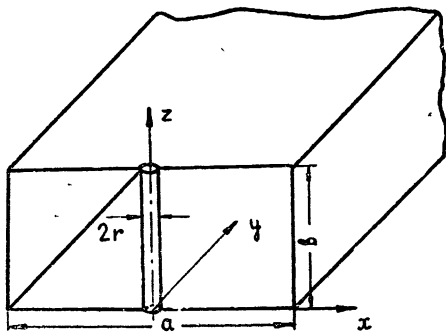


Рис. 1. Расположение диэлектрического стержня в прямоугольном волноводе.

$$C = \frac{i(\epsilon - 1)}{h} \int_V (E^{\text{вн}} E_0) dV, \quad (1)$$

где h — постоянная распространения волны H_{10} , $E^{\text{вн}}$ — напряженность электрического поля внутри цилиндра, E_0 — то же для основной волны пустого волновода. Интегрирование распространяется на объем цилиндра. Векторы E_0 и $E^{\text{вн}}$ направлены параллельно оси z .

Разложим E_{0z} и E_z^{BH} в ряд по цилиндрическим волнам:

$$E_{0z} = ik^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{\text{пад}} J_m(kr) e^{im\varphi},$$

$$E_z^{\text{BH}} = ik^2 \sqrt{\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{\text{BH}} J_m(k\sqrt{\epsilon} r) e^{im\varphi},$$
(2)

где

$$B_m^{\text{пад}} = \frac{1}{2} A \cos \varphi_1 [i^m e^{im\varphi_1} + (-1)^m e^{-im\varphi_1}].$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, φ и φ_1 — полярные координаты, $\varphi_1 < \pi/2$ — угол между волновым вектором $\vec{k}(\pi/a, h, 0)$ и осью x , A — нормированная постоянная [1]. В частности

$$B_0^{\text{пад}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{ab}}.$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$C = \frac{i(\epsilon - 1)}{2h} I,$$

где

$$I = -2\pi k^4 \sqrt{\epsilon} b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{\text{BH}} B_m^{\text{пад}} \int_0^r J_m(k\sqrt{\epsilon} r) J_{-m}(kr) r dr.$$

Поскольку в сантиметровом и миллиметровом диапазоне СВЧ наибольший интерес представляет случай $kr \ll 1$, то в разложении одной из функций Бесселя можно ограничиться первым членом. Получающийся после этого интеграл берется (см. [2], форм. 6.561.5). Окончательно имеем

$$C = -i\pi(\epsilon - 1) \frac{k}{h} k^2 b r [B_0^{\text{BH}} B_0^{\text{пад}} J_1(k\sqrt{\epsilon} r) - B_1^{\text{BH}} B_1^{\text{пад}}(kr) J_2(k\sqrt{\epsilon} r) + \dots].$$
(3)

Коэффициенты B_m^{BH} находятся из граничных условий для тангенциальных составляющих электрического поля E_z и магнитного поля H_φ

$$H_\varphi^{\text{BH}} = k^2 \epsilon \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{\text{BH}} J'_m(k\sqrt{\epsilon} r) e^{im\varphi}$$
(4)

внутри цилиндра и вне его. Отраженное поле записывается аналогично формуле (4), только вместо цилиндрических функций J_m следует писать функции Ганкеля второго рода H_m .

Без учета боковых стенок волновода граничные условия приводят к уравнениям

$$\sqrt{\epsilon} B_m^{\text{BH}} J_m(k\sqrt{\epsilon} r) = B_m^{\text{пад}} J_m(kr) + B_m^{\text{отр}} H_m(kr),$$

$$\epsilon B_m^{\text{BH}} J'_m(k\sqrt{\epsilon} r) = B_m^{\text{пад}} J'_m(kr) + B_m^{\text{отр}} H'_m(kr).$$
(5)

Учет стенок производится введением зеркальных отражений зарядов и токов. На рис. 2 показаны две цилиндрические волны, соотношение между амплитудами B_m и B_{-m}' которых находится из условия исчезновения на отражающей стенке касательной компоненты E_z . Имея в виду, что $\varphi + \varphi' = \pi$, находим

$$B_m = -B_{-m}'.$$
(6)

Легко непосредственно убедиться, что, если имеет место равенство (6), магнитное поле обладает только касательной составляющей. Это позволяет записать граничные условия на поверхности цилиндра с теми же амплитудами для электрического и магнитного полей, как и в (5).

При подсчете E_z на поверхности цилиндра мы будем пренебрегать r по сравнению с расстоянием до изображений. Так что достаточно вычислить поля, индуцированные изображениями, на оси цилиндра. Для всех волн, приходящих от правых изображений, углы $\varphi' = \pi$, а для волн, приходящих от левых изображений, $\varphi' = 0$. Математически это означает, что в разложении цилиндрической волны по цилиндрическим волнам с другой осью берется только первый член. Следующие члены будут содержать kr в качестве множителя. Если расчет ведется в таком приближении, то в формуле (3) вторым и следующими слагаемыми в квадратных скобках можно пренебречь. Другими словами, в системе (5) достаточно уточнить уравнения, соответствующие значению $m = 0$. Здесь еще необходимо заметить, что

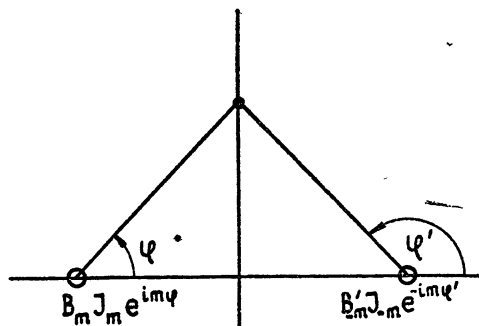


Рис. 2.

$$\frac{B_m^{\text{отр}}}{B_m^{\text{пад}}} \sim (kr)^{2m+1},$$

так что мы можем пренебречь всеми членами в отраженной волне, кроме первого, характеризуемого амплитудой $B_0^{\text{отр}}$.

Итак, граничные условия для электрического поля принимают вид

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} B_0^{\text{вн}} J_0(k\sqrt{\varepsilon} r) &= B_0^{\text{пад}} J_0(kr) + B_0^{\text{отр}} H_0(kr) + \\ &+ 2B_0^{\text{отр}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_0(mka); \end{aligned}$$

для магнитного поля они ничем не отличаются от второго равенства системы (5).

Следовательно, в нашем приближении

$$B_0^{\text{вн}} = -i \frac{2B_0^{\text{пад}}}{\pi kr \Delta},$$

где определитель

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon J_1(k\sqrt{\varepsilon} r) [H_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_0(mka)] - \\ &- \sqrt{\varepsilon} J_0(k\sqrt{\varepsilon} r) H_1(kr). \end{aligned} \quad (7)$$

Входящая в уравнение (7) сумма протабулирована с точностью 0,1% в области $k = 1,8849 \div 5,6653$, и ее значения приведены в табл. 1.

Для коэффициента отражения получаем следующую формулу:

$$C = \frac{4(\epsilon - 1)}{\pi \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1}} \frac{J_1(k\sqrt{\epsilon}r)}{\Delta}. \quad (8)$$

Представим ее в следующем виде:

$$\frac{H_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_0(mka)}{kr H_1(kr)} - \frac{2k^2 (B_0^{\text{пая}})^2}{kr Ch H_1(kr)} = A, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{J_0(k\sqrt{\epsilon}r)}{k\sqrt{\epsilon}r J_1(k\sqrt{\epsilon}r)}.$$

Для определенной частоты СВЧ поля и радиуса исследуемого образца левая часть уравнения (9) является постоянной величиной. Измеряя коэффициент отражения тонких диэлектрических стержней или нитевидных кристаллов высокоомных полупроводников, по графику, представленному на рис. 3, можно непосредственно определить диэлектрическую проницаемость.

В работе [3] показано, что высокоомные полупроводниковые соединения Sb_2S_3 , Sb_2Se_3 и др. обладают высокой диэлектрической проницаемостью на СВЧ. На рис. 4 представлена частотная зависимость диэлект-

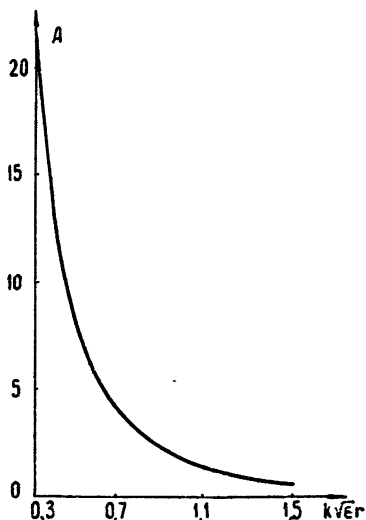


Рис. 3.

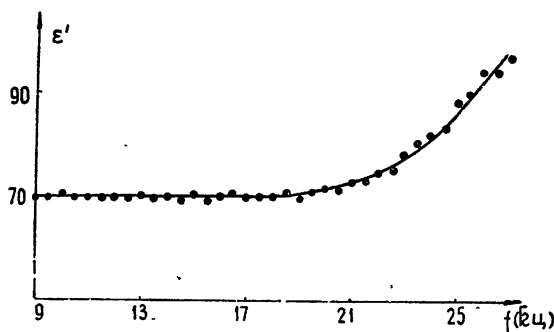


Рис. 4. Зависимость диэлектрической проницаемости нитевидного кристалла Sb_2S_3 от частоты.

рической проницаемости нитевидного монокристалла Sb_2S_3 ($r = 0,0165$ см). Мнимая часть диэлектрической проницаемости кристалла во всем частотном диапазоне не превышает значения $\epsilon'' = 0,05 \div 1,0$, поэтому с достаточной степенью точности диэлектрическую проницаемость можно считать реальной величиной.

Зависимость модуля коэффициента отражения этого кристалла от частоты, рассчитанного по формуле (8), представлена на рис. 5 сплошной кривой. Кружочками отмечены экспериментальные точки модуля коэффициента отражения. Скачки коэффициента отражения соответ-

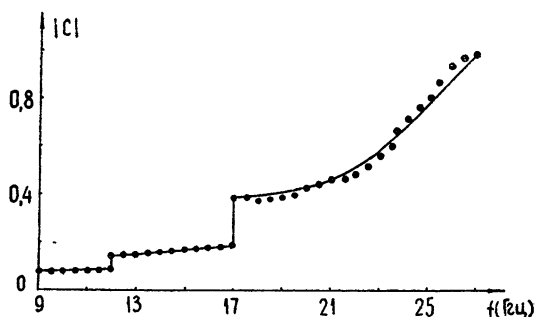
Таблица 1

Значения суммы $\Sigma = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m H_0(mka)$ для различных ka

$f(\text{Гц})$	ka	Σ	$f(\text{Гц})$	ka	Σ
9,0	4,3354	0,1701 — i 0,3133	17,0	3,9164	0,3559 — i 0,3548
10,0	4,8171	0,0478 — i 0,2656	18,0	4,1469	0,2387 — i 0,3319
11,0	5,2988	— 0,0319 — i 0,2255	19,0	4,3972	0,1568 — i 0,3110
11,5	5,5308	— 0,0609 — i 0,2059	20,0	4,6677	0,0934 — i 0,2903
12,0	5,7805	— 0,0872 — i 0,1844	22,0	5,0684	0,0034 — i 0,2479
12,0	4,2726	0,1897 — i 0,3152	23,0	5,2988	— 0,0307 — i 0,2285
13,0	4,6286	0,0885 — i 0,2876	24,0	5,5292	— 0,0598 — i 0,2068
14,0	4,9846	0,0166 — i 0,2563	25,0	5,7596	— 0,0863 — i 0,1864
15,0	5,3407	— 0,0376 — i 0,2235	26,0	5,9899	— 0,1071 — i 0,1657
16,0	5,6967	— 0,0784 — i 0,1933	27,0	6,2319	— 0,1278 — i 0,1444

Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения кристалла от частоты:

— — теоретическая кривая,
 — экспериментальные точки.



вуют изменению поперечного сечения волновода с $10 \times 23 \text{ мм}^2$ на $8 \times 17 \text{ мм}^2$ на частоте 12 Гц и с $8 \times 17 \text{ мм}^2$ на $5,5 \times 11 \text{ мм}^2$ на частоте 16,5 Гц.

В диапазоне частот 9—16,5 Гц модуль $|C|$ определяется мнимой частью коэффициента отражения, поскольку она для кристалла Sb_2S_3 на порядок и больше превышает реальную часть. При более высоких частотах реальная часть коэффициента отражения сильно возрастает.

Хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов для модуля коэффициента отражения в широком диапазоне СВЧ при различных значениях диэлектрической проницаемости указывает, что по измерению коэффициента отражения удобно проводить исследование диэлектрической проницаемости и ее зависимости от различных внешних факторов (температуры, напряженности электрического поля и др.) диэлектриков и нитевидных кристаллов высокоомных полупроводников.

На основе полученных результатов может быть создан автоматический измеритель диэлектрической проницаемости тонких диэлектрических стерженьков и нитевидных монокристаллов высокоомных полупроводников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.
2. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. ФМЛ, М., 1963
3. И. П. Григас, А. С. Карпус, ФТТ, 9, 2887 (1967).

DETERMINATION OF THE REFLECTION COEFFICIENT AND DIELECTRIC PERMITTIVITY OF THIN CYLINDRICAL SAMPLES OF DIELECTRICS AND SEMICONDUCTORS AT MICROWAVES

I. P. Grigas, V. K. Shugurov

The reflection coefficient of the principal wave H_{10} from a thin dielectric cylinder placed at the center of a wide wall of rectangular waveguide parallel to the electric field vector is calculated. It is shown that the dielectric permittivity of thin dielectric cylinders or filamented crystals of high-ohmic semiconductors in wide microwave range may be estimated from the reflection coefficient measured. Theoretical and experimental data of the reflection coefficient of filamented crystals of high-ohmic semiconductor connection Sb_2S_3 in the frequency range 9–27 GHz are compared.

УДК 621.385.6

О ВЛИЯНИИ СТАТИЧЕСКОГО СДВИГА СКОРОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ НА РАБОТУ ЛУЧЕВЫХ ПРИБОРОВ ТИПА «М»

М. Н. Куликов, В. С. Стальмахов

На основе модели бриллюэновского потока в адиабатическом приближении и в предположении малой толщины луча получены выражения для постоянных распространения и начальных амплитуд волн в системе с учетом конечного значения относительного сдвига скоростей в луче.

Во всех известных работах, посвященных линейному анализу лучевых приборов типа «М» в адиабатическом приближении, в которых получены аналитические выражения для постоянных распространения волн, величина относительного сдвига скоростей в луче $\alpha_0 = \frac{v_{e+} - v_{e-}}{v_{e+} + v_{e-}}$

(где v_{e+} и v_{e-} — скорость электронов на верхней и нижней границах луча соответственно) явно или неявно предполагается малой.

В настоящей работе изложены результаты анализа взаимодействия поля бегущей электромагнитной волны с бриллюэновским электронным потоком в скрещенных полях ($\omega_p = \omega_c$, где ω_p — плазменная частота, ω_c — циклотронная частота) малой толщины, в котором на величину α_0 никаких ограничений не накладывается. Анализ проведен в адиабатическом приближении. Рассматриваемая схема и основные обозначения приведены на рис. 1.

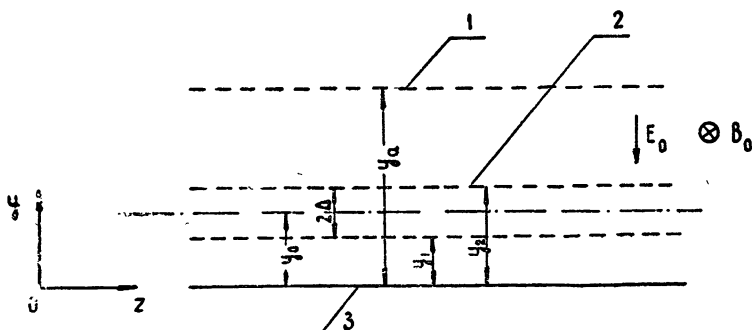


Рис. 1. Рассматриваемая модель электронного потока в пространстве взаимодействия лучевого прибора со скрещенными полями:

1—замедляющая система, 2—электронный поток, 3—отрицательный электрод.

Следуя методике [1], для тонкого бриллюэновского луча в линейном приближении можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\beta - \beta_0}{\beta_0} [\xi_0^2 - 2g(\beta\Delta) \xi_0 + (\beta\Delta)^2] = \mp \frac{\omega}{\omega_c} D^2 \frac{\beta}{\beta_{e0}} \xi_0, \quad (1)$$

где β — искомая постоянная распространения, β_0 — «холодная» постоянная распространения волны в системе,

$$\xi_0 = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{\beta - \beta_{e0}}{\beta_{e0}}, \quad \beta_{e0} = \frac{\omega}{v_{e0}},$$

v_{e0} — скорость электронов на оси луча,

$$D^2 = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{I_0}{2V_{e0}} \zeta \operatorname{cth} \beta y_0,$$

I_0 — ток луча, $V_{e0} = \frac{v_{e0}^2}{2\eta}$ — потенциал на оси луча, K — сопротивление связи на оси луча,

$$g = \frac{\operatorname{th} \beta (y_a - y_2) - \operatorname{th} \beta y_1}{\operatorname{th} \beta (y_a - y_2) + \operatorname{th} \beta y_1}.$$

В (1) верхний знак относится к взаимодействию с прямой волной системы, нижний — с обратной.

Уравнение (1) получено в предположении $\xi_0 \ll 1$ (адиабатичность) и $\beta \Delta \ll \operatorname{th} \beta (y_a - y_2)$, $\beta \Delta \ll \operatorname{th} \beta y_1$ (малость толщины луча и достаточная удаленность от потока окружающих электродов).

Величины $\beta \Delta$ и ξ_0 связаны соотношением

$$\beta \Delta = \beta_{e0} \Delta + \alpha_0 \xi_0, \quad (2)$$

так что из (1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\beta - \beta_0}{\beta_0} [(1 - 2g\alpha_0 + \alpha_0^2) \xi_0^2 - 2(g - \alpha_0)(\beta_{e0} \Delta) \xi_0 + (\beta_{e0} \Delta)^2] = \\ = \mp \frac{\omega}{\omega_c} D^2 \frac{\beta}{\beta_{e0}} \xi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если положить $D^2 = 0$, то левая часть (3), заключенная в квадратные скобки, дает уравнение для постоянных распространения диокотронных волн, которое имеет решение

$$\frac{\beta - \beta_{e0}}{\beta_{e0}} = \frac{\omega_c}{\omega} \frac{(g - \alpha_0) \pm j \sqrt{1 - g^2}}{1 - 2g\alpha_0 + \alpha_0^2} (\beta_{e0} \Delta). \quad (4)$$

Если величиной α_0 можно пренебречь по сравнению с единицей, то (4) переходит в известное выражение для постоянных распространения диокотронных волн в луче малой толщины [2]. Учет же конечной величины α_0 приводит к изменению как фазовой скорости диокотронных волн, так и к изменению величины диокотронного усиления. В частности, при симметричном расположении электронного потока между окружающими электродами ($g = 0$) фазовая скорость диокотронных волн оказывается отличной от скорости электронов на оси луча и равной $v_\phi = v_{e0}(1 + \alpha_0^2)$. Максимум диокотронного усиления достигается при смещении электронного потока к отрицательному электроду, при этом $g_{\text{opt}} = 2\alpha_0 / (1 + \alpha_0^2)$.

Переходя к известным обозначениям Пирса $\beta = \beta_{e0}(1 + jD\delta)$, $\beta_0 = \beta_{e0}(1 + Db \pm jDd)$ и полагая $D \ll 1$, из (4) получаем

$$(\delta + jb \pm d) [(1 - 2g\alpha_0 + \alpha_0^2) \delta^2 + 2j(g - \alpha_0) S \delta - S^2] = \pm \delta, \quad (5)$$

где $S = \alpha_0 / D$ — параметр пространственного заряда.

Для начальных амплитуд парциальных волн при отсутствии пред-
варительной модуляции луча находим

$$\tilde{E}_i(0) = \tilde{E}(0) \frac{(1 - 2g\alpha_0 + \alpha_0^2) \delta_i^2 + 2j(g - \alpha_0) S \delta_i - S^2}{(\delta_i - \delta_j)(\delta_i - \delta_k)}, \quad (6)$$

где $\tilde{E}_i(0)$ — амплитуда i -й волны в плоскости системы на входе
в пространстве взаимодействия; i, j, k — циклическая перестановка ин-
дексов 1, 2, 3.

Если в (5) и (6) пренебречь величиной α_0 по сравнению с едини-
цей, то также получаем известные выражения для тонкого луча [2].

Соотношения (5) — (6) показывают, что влияние конечного значе-
ния α_0 приводит к изменению величин постоянных распространения
волн и их начальных амплитуд. Если значения α_0 и g не очень велики,
так что можно пренебречь величинами $g\alpha_0$ и α_0^2 по сравнению с едини-
цей, то соотношения (5) и (6) не будут ничем отличаться от известных,
если положить $g_{\text{эkv}} = (g - \alpha_0)$. В этом случае увеличение α_0 эквивалент-
но, очевидно, смещению электронного потока к положительному
электроду. В частности, для ЛОВМ это соответствует тому, что в слу-
чае $g = 0$ колебания будут возникать не при синхронизме волны систе-
мы и электронов на оси луча, а при $b_{st} < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Row, R. Y. Lee, J. Appl. Phys., 33, № 1, 185 (1962).
2. R. W. Gould, J. Appl. Phys., 28, № 5, 599 (1957).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
1 июля 1968 г.

ON ACCOUNT OF THE EFFECT OF STATISTICAL VELOCITY SHIFT IN ELECTRON FLUX ON M-TYPE RAY DEVICES

M. N. Kulikov, V. S. Stal'makhov

The expressions have been obtained for propagation constants and initial ampli-
tudes of waves in the system with finite values of the relative velocity shift in the beam.
The consideration is based on the model of Brillouin flux in adiabatic approximation
and on the assumption of the small thickness of the beam.