

СОДЕРЖАНИЕ

Каневский М. Б. О роли тропосферных слоев при дальнем распространении УКВ вдоль трасс «земля—воздух»	1759
Миронов В. А. Расслоение плазмы в высокочастотном поле	1765
Спиридонов Ю. Г., Лукин Д. С. О напряженности поля в ионосферном канале	1769
Оболенский Л. М., Чугунов Ю. В., Яшин Ю. Я. Об электрических характеристи- ках приемной антенны в гиротропных средах	1776
Крупнов А. Ф., Щуко О. Б. Исследование сверхтонкой структуры перехода $J = K = 1$ аммиака $N^{14}H_3$ по одновременной генерации на ряде компонент спектральной линии	1780
Фортус В. М., Фрейдман Г. И. О синхронизации мод в параметрических генера- торах света	1788
Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г. О возможности наблюдения самофокусировки при вынужденном комбинационном рассеянии	1792
Ривлин Л. А. Динамические неустойчивости излучения полупроводникового квантового генератора	1795
Буишвили Л. Л., Волгина Г. А. К теории насыщения линий ядерного квадру- польного резонанса	1805
Комолов В. П., Маслов В. Ю., Трофименко И. Т. Диапазонный квантователь фазы несинхронного сигнала	1811
Гудзенко Л. И. Флуктуации фазы релаксационного генератора без утечки	1815
Фомин Я. А. О последовательной процедуре обнаружения детерминированного слабого сигнала	1819
Геранин В. А. Дисперсия числа выбросов отрезка нестационарного случайного процесса	1823
Зверев В. А., Орлов Е. Ф., Салина Э. М., Шаронов Г. А. Измерения диаграмм направленности антенн методом оптического моделирования в некогерент- ном свете	1829
Пермитин Г. В., Фрайман А. А. Структура поля вблизи каустик в среде с флуку- тациями диэлектрической проницаемости	1836
Рамм А. Г. Оптимальное решение задачи синтеза линейной антенны	1842
Иванов Е. А., Луханина Г. М. К дифракции плоской электромагнитной волны на двух круговых цилиндрах конечной длины	1849
Мальцев В. П., Нефёдов Е. И., Шевченко В. В. Вытекающие волны в волноводе из двух разделенных слоев	1855
Малушков Г. Д. Рассеяние плоской электромагнитной волны на телах кониче- ской формы	1862
Эпштейн Э. М. К теории осцилляций затухания ультразвука в полупроводнике в высокочастотном электрическом поле	1869
Кузнецов М. И. Об одном механизме флуктуаций в магнетронном диоде	1873
Вигдорчик В. И., Конторович В. М. К кинетической теории статического режима плоского магнетрона. I	1882
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Бондаренко А. Н., Кривошеков Г. В., Смирнов В. А. ОКГ на стекле с Nd^{3+} в режиме гигантского импульса под действием внешнего вынужденного сигнала	1895
Алексеев Б. Ф. Оптимальная концентрация электронных спинов в рабочем ве- ществе магниторезонансных устройств с динамически поляризованными ядрами	1968
Волосов В. Д., Дмитриев В. Г., Зудков П. И., Швом Е. М., Шкунов Н. В. Гене- рация второй гармоники в новом нелинейном кристалле — дигидроарсенате цезия	1898
Самсон Давыдович Гвоздовер	1900
 Информация	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. IX, №№ 1, 2, 3, 4, 1969 г.	1901
Содержание т. XII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1969 г.	1907
Именной указатель — т. XII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1969 г.	1917

УДК 621.371.243

О РОЛИ ТРОПОСФЕРНЫХ СЛОЕВ ПРИ ДАЛЬНЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ УКВ ВДОЛЬ ТРАСС «ЗЕМЛЯ — ВОЗДУХ»

M. B. Каневский

Рассматривается случай распространения УКВ за горизонт, когда вдоль части трассы расположен тропосферный слой, так что излучение приходит в точку приема за счет канализации энергии слоем и дифракции на открытых концах приподнятого тропосферного волновода. Показано, что в этом случае на трассах «земля—воздух» могут наблюдаться поля, значительно превышающие прогнозируемый стандартный уровень.

В теоретических работах, посвященных изучению влияния тропосферных слоев на распространение УКВ за горизонт, обычно обсуждается механизм отражения от слоя [1].

Между тем тропосферный слой, часто обладающий хотя и малой по сравнению с длиной трассы протяженностью, но достаточно большим градиентом показателя преломления, может действовать как отрезок приподнятого тропосферного волновода, переизлучая захваченную им энергию направленным образом. Очевидно, условия возбуждения такого волновода и приема излучения определяются тем, насколько близко к максимумам диаграмм направленности концов волновода находятся передатчик и приемник, поэтому наиболее благоприятными эти условия будут скорее всего для трасс «воздух—воздух» и «земля—воздух».

В настоящей работе рассмотрена задача о распространении УКВ за горизонт за счет канализации приподнятым тропосферным волноводом и дифракции на его концах. Указанный механизм, разумеется, не может претендовать на полное описание дальнего тропосферного распространения, однако с его помощью могут быть объяснены некоторые аномальные явления (см. разд. 4).

1. В пределах нескольких первых километров тропосферы часто наблюдаются инверсионные слои, характеризуемые большим отрицательным градиентом показателя преломления $n(z)$ [2, 3]. Полное изменение показателя преломления в инверсионных слоях толщиной $\Delta z \sim 1-300 \text{ м}$ составляет от $(1 \div 2) \cdot 10^{-6}$ до $(50 \div 60) \cdot 10^{-6}$. Соответствующий идеализированный профиль модифицированной диэлектрической проницаемости $\epsilon_m(z) = n^2(z) + 2z/a$, где a — земной радиус, показан на рис. 1*. Очевидно, при такой зависимости $\epsilon_m(z)$ в принципе возможен захват части излученной источником энергии и волноводное распространение ее вдоль слоя, типичный горизонтальный размер которого составляет несколько десятков километров [4, 5].

Если толщина слоя Δz велика по сравнению с длиной волны λ , то условие существования в приподнятом тропосферном волноводе захва-

* Введение модифицированной диэлектрической проницаемости позволяет, как известно, перейти от сферически симметричной задачи к плоской.

ченной нормальной волны (моды) с номером n запишется следующим образом:

$$k \int_{z_{n1}}^{z_{n2}} [\epsilon_m(z) - x_n^2/k^2]^{1/2} dz = (n - 1/2)\pi \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, x_n — постоянная распространения n -й моды, z_{n1} и z_{n2} — соответственно нижняя и верхняя точки поворота, являющиеся корнями уравнения

$$\epsilon_m(z) - x_n^2/k^2 = 0. \quad (2)$$

Представим изображенную на рис. 1 зависимость $\epsilon_m(z)$ в виде кусочно-линейной функции

$$\epsilon_m(z) = \begin{cases} \epsilon_0 + 2z/a_9 & (0 \leq z \leq z_c), \\ \epsilon_0 + 2z_c/a_9 - (z - z_c)\Delta\epsilon_m/\Delta z & (z_c \leq z \leq z_c + \Delta z), \end{cases} \quad (3)$$

где $a_9 = 8500 \text{ км}$ — эффективный земной радиус, параметры слоя z_c , Δz , $\Delta\epsilon_m = \Delta\epsilon - 2\Delta z/a$ ($\Delta\epsilon$ — изменение истинной диэлектрической проницаемости) показаны на рис. 1. Подставляя (3) в (1) и ограничиваясь первой модой ($n = 1$), получим соотношение, связывающее максимальную захватываемую волну λ_{\max} с параметрами слоя:

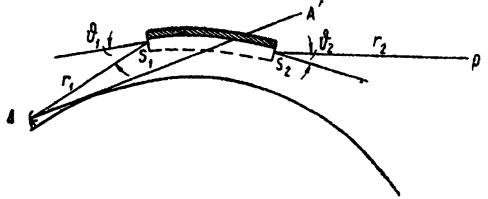
$$\lambda_{\max} = \frac{4}{3} (\Delta\epsilon_m)^{3/2} (a_9 + 2\Delta z/\Delta\epsilon_m). \quad (4)$$

Рис. 1 Профиль $\epsilon_m(z)$ при наличии тропосферного слоя.

Подставляя в (4) величины $\Delta z = 100 \text{ м}$, $\Delta\epsilon_m = 3 \cdot 10^{-5}$ ($\Delta\epsilon \approx 6,14 \cdot 10^{-5}$), получаем $\lambda_{\max} \approx 3,3 \text{ м}$. Следовательно, тропосферные слои в ряде случаев способны захватывать волны метровой части УКВ диапазона. Напомним, что речь здесь идет о захвате за счет полного внутреннего отражения в достаточно толстом слое.

2. Излучение, пришедшее в точку приема P , расположенную на высоте $z_P \geq z_c$ далеко за радиогоризонтом относительно наземного передатчика A (см. рис. 2), обусловлено в основном захваченными волнами, бегущими вдоль слоя к его излучающему концу*. На рис. 2

Рис. 2. Геометрия задачи. Пунктиром показана нижняя граница волновода, заштрихованная область — тропосферный слой, AA' — касательная к земной поверхности.



пунктиром показана нижняя граница области, где сосредоточено поле захваченных волн, буквами s_1 и s_2 обозначены сечения открытых концов волновода. В дальнейшем в качестве источника будем предполагать элементарный вертикальный электрический диполь единичного момента.

* Профиль $\epsilon_m(z)$, изображенный на рис. 1, в принципе допускает существование волн, которые наряду с полным внутренним отражением в слое испытывают отражение от земной поверхности. Однако последние существуют лишь в случае выполнения соотношения $\Delta\epsilon_m = \Delta\epsilon - 2\Delta z/a > 2z_c/a_9 \sim 10^{-4}$, что представляется маловероятным.

Запишем выражение для поля, излучаемого концом s_2 в точку приема P^* :

$$E = \frac{i}{r_2 \lambda} \int \int_{s_2} E_{s_2} \exp(ikr'_2) ds_2, \quad (5)$$

где E_{s_2} — поле набегающих из волновода волн, r'_2 — текущее расстояние от s_2 до P . Далее воспользуемся теоремой взаимности, согласно которой поле E_{s_2} , возбуждаемое в некоторой точке сечения s_2 элементарным вертикальным электрическим диполем, помещенным в точку A , совпадает с полем, возбуждаемым в точке A идентичным диполем, помещенным в ту же точку сечения s_2 . Записывая для E_{s_2} выражение, аналогичное (5), найдем E :

$$E = -\frac{1}{\lambda^2 r_1 r_2} \int \int_{s_1} ds_1 \int \int_{s_2} ds_2 E_{s_1 s_2} \exp[ik(r'_1 + r'_2)], \quad (6)$$

где $E_{s_1 s_2}$ — поле, возбуждаемое в сечении s_2 источником, помещенным в сечение s_1 .

Для нахождения $E_{s_1 s_2}$ воспользуемся решением задачи о распространении волн по тропосферному волноводу [6]. Поле $E_{s_1 s_2}$, возбуждаемое элементарным вертикальным электрическим диполем единичного момента, определяется выражением.

$$E_{s_1 s_2} = ik^2 \pi \sum_n H_0^{(1)}(x_n \rho) f_n(z_1) f_n(z_2). \quad (7)$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, z_1 и z_2 — высоты источника и точки наблюдения, ρ — расстояние между ними, отсчитываемое вдоль земной поверхности, f_n — высотный множитель, представляющий собой удовлетворяющее условию излучения нормированное решение уравнения

$$d^2f/dz^2 + k^2 [\epsilon_m(z) - x_n^2/k^2] f = 0. \quad (8)$$

Подставляя в (6) выражение (7), где суммирование ведется лишь по захваченным модам, получаем следующее выражение для E :

$$E = -\frac{ik^2 \pi}{\lambda^2 r_1 r_2} \int \int_{s_1} ds_1 \int \int_{s_2} ds_2 \exp[ik(r'_1 + r'_2)] \sum_n H_0^{(1)}(x_n \rho) f_n(z_1) f_n(z_2). \quad (9)$$

Введем две прямоугольные системы координат $x_1 y_1 z_1$ и $x_2 y_2 z_2$ так, чтобы сечения s_1 и s_2 располагались соответственно в плоскостях $x_1 z_1$ и $x_2 z_2$, а начала координат — на оси волновода**. Тогда из геометрических соображений следует, что $r'_{1,2} \approx r_{1,2} + x_{1,2}^2/2r_{1,2} + z_{1,2}^2/2r_{1,2} + z_{1,2} \sin \vartheta_{1,2}$ и $\rho \approx l + (x_2 - x_1)^2/2l$, где l — длина слоя. Это обычные разложения, используемые в теории френелевской дифракции. Интегрирование в (9) фактически ограничено по горизонтали несколькими зонами Френеля, а по вертикали — размерами области, где функции $f_n(z)$ существенно отличны от нуля. Подставим выражения для $r_{1,2}$ и ρ в (9), воспользуем-

* Здесь и ниже имеется в виду вертикальная компонента электрического поля, которая в данном случае является основной. В (5) учтена малость ϑ и углового расстояния от излучающего конца до точки приема.

** В качестве высоты оси волновода примем высоту z_0 , на которой расположен максимум функции $f_1(z)$.

ся асимптотическим выражением для функции Ханкеля $\tilde{H}_0^{(1)}$ и распространим интегрирование на бесконечные пределы:

$$E = -\frac{ik^2\pi}{\lambda^2 r_1 r_2} \sqrt{\frac{2}{\pi k l}} \exp [ik(r_1 + r_2) + i\pi/4] \sum_{n=1}^N \exp(i\chi_n l) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 f_n(z_1) f_n(z_2) \exp \left\{ i \left[\frac{\chi_n}{2l} (x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2} (x_1^2/r_1 + x_2^2/r_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k}{2} (z_1^2/r_1 + z_2^2/r_2) + k(z_1 \sin \vartheta_1 + z_2 \sin \vartheta_2) \right] \right\}. \quad (10)$$

Вычисляя двойной интеграл по x_1, x_2 , находим

$$E = \frac{k^2 \exp[ik(r_1 + r_2) + i\pi/4]}{[\lambda r_1 r_2 (r_1 + r_2 + l)]^{1/2}} \sum_{n=1}^N \exp(i\chi_n l) F_n(r_1, \vartheta_1) F_n(r_2, \vartheta_2), \\ F_n(r, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(z) \exp[ik(z^2/2r + z \sin \vartheta)] dz. \quad (11)$$

Учитывая, что $r_1 + r_2 + l \approx R$ (R — расстояние между корреспондирующими пунктами), запишем для функции ослабления $W = |E|^2/|E_0|^2$, где E_0 — поле в свободном пространстве:

$$W = \frac{R}{\lambda r_1 r_2} \left| \sum_{n=1}^N \exp(i\chi_n l) F_n(r_1, \vartheta_1) F_n(r_2, \vartheta_2) \right|^2. \quad (12)$$

3. Для линейной модели слоя (3) нормированное на единицу решение уравнения (8) выражается через функцию Эйри $v(t)$ [7]:

$$f_n(z) = \begin{cases} (-1)^{n+1} C_n k^{1/6} (2/a_s)^{-1/6} v[k^{2/3} (2/a_s)^{1/3} (z_{n1} - z)] & (0 < z < z_c), \\ C_n k^{1/6} (\Delta \epsilon_m / \Delta z)^{-1/6} v[k^{2/3} (\Delta \epsilon_m / \Delta z)^{1/3} (z - z_{n2})] & (z_c < z < z_c + \Delta z), \end{cases} \quad (13)$$

где C_n — нормировочный коэффициент. Рассмотрим случай, когда $\Delta \epsilon_m / \Delta z$ отличается от величины $2/a_s$ в пределах, обеспечивающих выполнение соотношения $0,5 k^{2/3} (z_{n2} - z_{n1}) |(\Delta \epsilon_m / \Delta z)^{1/3} - (2/a_s)^{1/3}| \ll 1$. Можно показать, что при не слишком больших n это соотношение выполняется, если значение модуля градиента показателя преломления в слое находится в пределах $0,2 \cdot 10^{-6} m^{-1} \leq \Delta n / \Delta z \leq 0,5 \cdot 10^{-6} m^{-1}$. В этом случае $f_n(z)$ будет близка к четной (при $n = 1, 3, 5, \dots$) или нечетной (при $n = 2, 4, 6, \dots$) функции $z - z_0$ — расстояния от оси волновода. Воспользовавшись этим обстоятельством, после ряда преобразований получим для функции ослабления W :

$$W = \frac{16}{\pi^2} (4/3)^{2/3} \frac{R \lambda^{1/3} (\Delta z / \Delta \epsilon_m)^2}{r_1 r_2 (a_s + 2\Delta z / \Delta \epsilon_m)^{4/3}} (\sum_1^2 + \sum_2^2), \\ \sum_1^2 = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} (2n-1)^{-1/3} \{ [A_n(r_1, \vartheta_1) A_n(r_2, \vartheta_2) - B_n(r_1, \vartheta_1) B_n(r_2, \vartheta_2)] \cos \gamma_n - \\ - [A_n(r_1, \vartheta_1) B_n(r_2, \vartheta_2) + B_n(r_1, \vartheta_1) A_n(r_2, \vartheta_2)] \sin \gamma_n \}, \quad (14) \\ \sum_2^2 = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} (2n-1)^{-1/3} \{ [A_n(r_1, \vartheta_1) A_n(r_2, \vartheta_2) - B_n(r_1, \vartheta_1) B_n(r_2, \vartheta_2)] \sin \gamma_n + \\ + [A_n(r_1, \vartheta_1) B_n(r_2, \vartheta_2) + B_n(r_1, \vartheta_1) A_n(r_2, \vartheta_2)] \cos \gamma_n \},$$

$$A_n(r, \vartheta) = \int_{t_n}^{\infty} v(t) \cos \left[\frac{k^{-1/3}}{2r} (\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{2/3} (t - t_n)^2 \right] \sin [(k \Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{1/3} \vartheta (t - t_n)] dt,$$

$$B_n(r, \vartheta) = \int_{t_n}^{\infty} v(t) \sin \left[\frac{k^{-1/3}}{2r} (\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{2/3} (t - t_n)^2 \right] \cos [(k \Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{1/3} \vartheta (t - t_n)] dt,$$

$$\gamma_n = (x_n - x_1) l = \frac{kl}{2} (3\lambda/4)^{2/3} (a_s + 2\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{-2/3} [1 - (2n - 1)^{2/3}],$$

$$\vartheta_{1,2} = (r_{1,2}/2a_s) - (z_{A,P} - z_c)/r_{1,2},$$

где z_A и z_P — высоты корреспондирующих пунктов. В выражениях для A_n и B_n модам с нечетными номерами n соответствуют числа t_n — экстремумы функции Эйри и функция косинус в третьем сомножителе подынтегрального выражения, а модам с четными n соответствуют t_n — нули функции Эйри и функция синус.

Обратимся к случаю $N = 1$, которым часто можно ограничиться при численных оценках. Если расстояния r_1 и r_2 достаточно велики для того, чтобы выполнялось $(\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{2/3} k^{-1/3} / 2r \ll 1$ (или, что то же самое, $(z_{11} - z_{12})^2 \ll \lambda r$), то (14) принимает вид

$$W = \frac{16}{\pi^2} (4/3)^{2/3} \frac{R \lambda^{1/3} (\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^2}{r_1 r_2 (a_s + 2\Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{4/3}} A^2(\vartheta_1) A^2(\vartheta_2),$$

$$A(\vartheta) = \int_{t_1}^{\infty} v(t) \cos [(k \Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{1/3} \vartheta (t - t_1)] dt. \quad (15)$$

Нормированная диаграмма направленности $\varphi(\mu) = A^2[\mu(\vartheta)]/A^2(0) = = (2,09)^{-1} A^2[\mu(\vartheta)]$, где $\mu(\vartheta) = (k \Delta z / \Delta \varepsilon_m)^{1/3} \vartheta$, приведена на рис. 3. Нетрудно видеть, что угловая ширина диаграммы пропорциональна $\lambda^{1/3}$.

4. Результаты численных расчетов, проводившихся на ЭВМ по формулам (14) для трассы «земля—воздух», показаны на рис. 4. Значения параметров были следующими: $\Delta z = 50$ м, $\Delta \varepsilon = 2,8 \cdot 10^{-5}$ ($\Delta \varepsilon_m =$

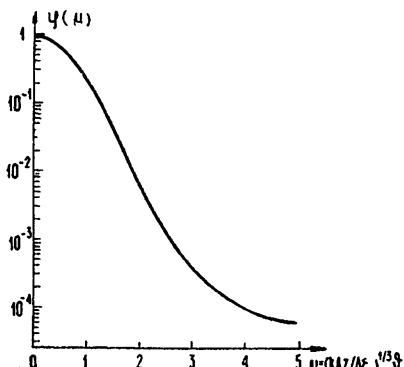


Рис. 3. Нормированная диаграмма направленности, обусловленная первой модой.

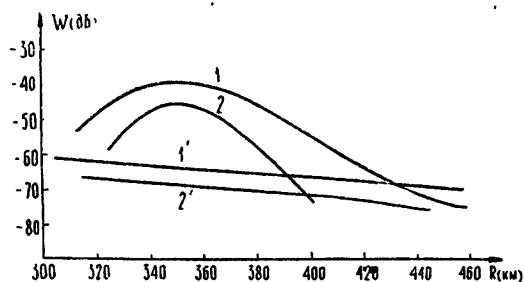


Рис. 4. Результаты расчета: 1. — $\lambda = 90$ см, 2. — $\lambda = 30$ см. Стандартные уровни: 1'. — $\lambda = 100$ см, 2'. — $\lambda = 30$ см. Высота самолета $z_p = 2$ км, высота слоя $z_c = 0,5$ км.

$= 1,2 \cdot 10^{-5}$), $z_c = 0,5$ км, $l = 100$ км, $z_p = 2$ км, $z_A = 0$, $r_1 = 90$ км, $\lambda = 90$ см ($N = 1$), $\lambda = 30$ см ($N = 2$). Стандартная функция ослабления (линии 1' и 2') была найдена по формуле $W_{ct}(R) = W'_{ct}(R - \sqrt{2a_s z_p})$, где

$W'_{\text{ст}}$ — стандартная функция ослабления, полученная по результатам наземных измерений [1].

Как видно из рис. 4, при пересечении самолетом диаграммы направленности слоя уровень сигнала может значительно превысить стандартный.

В работе [8] на трассе «земля—воздух» наблюдалось возрастание сигнала на протяженном участке трассы за радиогоризонтом. Сравнение кривых рис. 4 с соответствующей экспериментальной кривой работы [8] показывает, что расчетные кривые качественно повторяют экспериментальную.

В некоторых случаях, по-видимому, следует учитывать возможность кусочно-волноводного распространения в тропосфере за счет переизлучения из слоя в слой. Действием этого механизма можно объяснить тот факт, что в [8] на наземной трассе $R \approx 900$ км был отмечен импульс сигнала, который, судя по времени его прихода, доходил до приемника по пути более короткому, чем через объем, ограниченный пересечением диаграмм направленности передатчика и приемника.

Автор благодарит С. А. Жевакина за обсуждение результатов, а также П. П. Прыгунова, проводившего вычисления на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн, под ред. Б. А. Введенского и др., изд. Сов. радио, М., 1965.
2. J. A. Lane, R. W. Meadows, Nature, **197**, 35 (1963).
3. J. A. Saxton, J. A. Lane, R. W. Meadows, P. A. Matthews, Proc. IEE, **111**, 275 (1964).
4. B. R. Beal, V. R. Frank, J. A. Lane, J. Res. NBS, **67D**, 597 (1963).
5. J. A. Lane, J. Atm. Terr. Phys., **27**, 969 (1965).
6. Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954.
7. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, Гостехиздат, М., 1946.
8. D. B. Clemon, E. H. Bryce-Clayton, Radio and Electr. Eng., **25**, 17 (1963).
9. J. H. Chisholm, W. E. Moggow, B. E. Nickols, J. E. Roche, A. E. Tatham, Proc. IRE, **50**, 2489 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 июля 1968 г.

A PART OF TROPOSPHERIC LAYERS IN FAR ULTRA-SHORT WAVE PROPAGATION ALONG THE GROUND-AIR TRACES

M. B. Kanevskii

There is considered the ultra-short wave propagation behind the horizon when along the part of the trace, a tropospheric layer is situated so that the radiation comes to the receiving point due to energy chaneling by the layer and diffraction on opened ends of elevated tropospheric duct. It is shown that in this case on the ground-air traces the fields, considerably exceeding the predicted standard level, may be observed.

УДК 533. 922

РАССЛОЕНИЕ ПЛАЗМЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

B. A. Миронов

Изучается поведение однородной плазмы в квазистатическом электрическом поле E с частотой ω . Показано, что состояние плазмы с отрицательной диэлектрической проницаемостью в поле, большем некоторого критического E_{kp} , неустойчиво. В результате развития неустойчивости плазма расслаивается на участки, характерные размеры которых оцениваются.

Эффекты самовоздействия, возникающие при взаимодействии электромагнитного поля с плазмой, обычно связывают либо с нагревом электронного газа [1], либо с перераспределением концентрации плазмы n в неоднородном электрическом поле волны E [2]. Наиболее сильного взаимодействия поля с плазмой, как неоднократно отмечалось (см., например, [3]), следует ожидать в области, где диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 0$. В частности, в [2] было показано, что каждому значению поля вне однородной плазмы E_0 , большему некоторого критического E_{kp} , соответствуют три значения поля внутри $|E_1| > |E_2| > |E_3|$. Состояние плазмы, соответствующее промежуточному значению поля E_2 , неустойчиво, и при достаточно медленном изменении E_0 имеет место гистерезис. Однако для такого вывода существенно, чтобы поле обращалось в нуль на бесконечности. В отсутствие этого условия плазма с $\epsilon < 0$ ведет себя как двухфазная система и при $E_0 > E_{kp}$ не может оставаться однородной. Именно в изучении явления расслоения плазмы и состоит цель настоящей работы.

Рассмотрим однородный слой плазмы, характерный размер которого много больше длины свободного пробега электрона λ , в квазистатическом поле частоты ω плоского конденсатора при $\omega \gg v$, где v — эффективная частота столкновений электрона. Гармоническое возмущение концентрации плазмы n с характерным размером l делает, в свою очередь, слабо неоднородным поле внутри конденсатора $E = E_0/\epsilon$, где E_0 — поле в вакууме, $\epsilon = 1 - \alpha n$, $\alpha > 0$.

1. Когда $l \gg \lambda$, поле E мало меняется на длине свободного пробега электрона и тепловые нелинейные эффекты становятся сильнее стрикционных. Механизм неустойчивости, приводящий к тепловому расслоению плазмы, состоит в следующем. В области более сильного поля электронный газ нагревается до более высокой температуры и диффундирует в область слабого поля [1]. При $\epsilon < 0$ реализуется такая ситуация, что области более сильного поля и, следовательно, более высокого электронного давления совпадают с минимумами возмущенной концентрации. Иначе говоря, сжатие на некотором участке сопровождается уменьшением давления в этом месте, что приводит к дальнейшему сжатию с возрастающей скоростью.

Поскольку при возмущении n возмущается не только поле E , но и газодинамическое давление, указанная неустойчивость существует лишь при $E_0 > E_{kp}$, которое мы оценим из уравнения состояния плазмы как идеального газа в электрическом поле

$$v = nk(T_e + T_i), \quad (1)$$

где k — постоянная Больцмана, $T_i = T = \text{const}$ — температура ионов, $T_e = T(1 + E_0^2/E_p^2 |\epsilon|^2)$ — температура электронов [1-3], $E_p^2 = 3mk\delta T\omega^2/e^2$ при $\omega^2 \gg v^2$, e и m — соответственно заряд и масса электрона, $\delta \ll 1$ — доля энергии, передаваемая электроном тяжелой частице при одном столкновении, $|\epsilon|^2 = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 + v^2\omega_p^2/\omega^2\omega^2$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$. Соотношение (1), рассматриваемое как функция от n и параметра E_0 при постоянном T , качественно совпадает с изотермами ван-дер-ваальсовского газа [4]. Пользуясь этой аналогией, можно утверждать, что существует критическое поле $E_{kp}^2 \simeq E_p^2 \simeq p_0\delta$, где p_0 — давление в отсутствие поля, такое, что при $E_0 > E_{kp}$ плазма с $\epsilon < 0^*$ является двухфазной системой. Иными словами, в состоянии термодинамического равновесия первоначально однородная плазма в поле, большем критического, представляет собой кусочно однородную среду, в которой слои с $\epsilon < 0$ («плотная фаза») и $\epsilon > 0$ («редкая фаза») чередуются между собой.

При учете теплопроводности, естественно, переход от одного слоя к другому будет плавным, а написанное выше уравнение состояния справедливым лишь для возмущений, характерный размер которых $l \gg L = \sqrt{\chi/\delta v}$, где L — расстояние, на которое распространяется тепло за время установления равновесной температуры электронного газа [1, 3] $\tau = 1/\delta v$, а χ — коэффициент электронной температуропроводности.

Характерный размер слоя d можно оценить по максимальному инкременту нарастания возмущения в линейном приближении. Так, в слабо ионизованной плазме при $\omega \gg v$ система уравнений переноса имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{Mn} \frac{\partial p}{\partial x} - v_{in} v; \quad (3)$$

$$kT_e n \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) + \sigma E^2 - \frac{3}{2} k \delta v n (T_e - T), \quad (4)$$

где v — скорость движения плазмы, M — масса иона, $s = \ln(T_e^{3/2} n^{-1})$ — энтропия, отнесенная на один электрон, $\kappa = nk^2 T_e/mv$ — коэффициент теплопроводности, $\sigma = e^2 v n / 2m \omega^2$ — проводимость плазмы, $v = v^0 \sqrt{T_e/T}$, а v^0 — эффективная частота столкновений электрона с тяжелой частицей при $T_e = T$. В линейном приближении, когда $n = n_0 + n'$, $v = v'$, $T_e = T_0 + T'$ ($n' \ll n_0$, $T' \ll T_0$), полагая $n', v', T' \sim \exp(\gamma t - iqx)$ и рассматривая лишь $\gamma \ll v$, находим из (2) — (4)

$$\gamma = -\frac{q^2 k [(1 - \epsilon_0) \sigma_0 E_0^2 / \epsilon_0^3 + 3k \delta v_0 T n_0 / 2 + q^2 T_0 \kappa_0]}{M v_{in} (3k n_0 \delta v_0 / 2 + q^2 \kappa_0)}. \quad (5)$$

Отсюда ясно, что характерный размер слоя составляет $d \simeq \lambda / \sqrt{\delta}$, где λ — длина свободного пробега электрона. Точно такое же выражение для d получается и в полностью ионизованной плазме.

* Легко показать, что (1) может иметь максимум при изменении n лишь при $\epsilon \approx 0$.

2. Когда $\rho_\sim \ll l \ll \lambda$, где ρ_\sim — амплитуда колебаний электрона в поле, движение электрона можно представить в виде быстрых осцилляций и медленного дрейфа в области более слабого поля. Амплитуда гармонического возмущения n будет нарастать при $\varepsilon < 0$, когда минимумы концентрации совпадают с максимумами поля и, следовательно, электромагнитного давления. Значение поля, при котором рассмотренный механизм неустойчивости приводит к бесстолкновительному расслоению, можно оценить как и ранее из уравнения состояния плазмы с учетом электромагнитного давления и стрикции [5]:

$$p = p_0 + \frac{1 - 2\varepsilon_r}{8\pi} \frac{E_0^2}{|\varepsilon|^2}, \quad (6)$$

где p_0 — газодинамическое давление, $\varepsilon_r = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. Это уравнение, как и (1), тоже качественно совпадает с уравнением состояния ван-дер-ваальсовского газа [4], и при $E_0^2 > E_{kp}^2 \approx p_0$ плазма расслаивается.

Решение в линейном приближении уравнений двухжидкостной гидродинамики, аналогичное [6], но с учетом газодинамических давлений электронов и ионов позволяет найти следующее значение инкремента нарастания низкочастотных потенциальных колебаний в нерезонансном случае ($\omega_e^2 \neq j^2\omega^2$):

$$\gamma^2 = \omega_e^2 \left[1 - \omega_e^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{J_j(a)}{\omega_e^2 - j^2\omega^2} \right] + \left(c_i^2 + c_e^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_e^2} \right) q^2, \quad (7)$$

где ω_e , ω_i — соответственно плазменные частоты электронных и ионных колебаний, J_j — функция Бесселя индекса j , $a = eqE_0/m\omega^2|\varepsilon|$, c_i и $c_e \omega_i^2/\omega_e^2$ — соответственно изотермические скорости ионного звука и ионного звука с электронной температурой, q — волновое число возмущения. Из (7) легко видеть, что инкремент γ максимальен при $a \approx 1$ и, следовательно, в поле, большем критического, первоначально однородная плазма расслаивается на участки размером порядка амплитуды осцилляций электрона в этом поле.

Структура переходной области определяется как пространственной дисперсией и появлением вблизи скачка сильных электростатических полей, обусловленных нарушением квазинейтральности, так и генерацией кратных гармоник $j\omega$.

Столь же простых оценок для значения концентрации плазмы в слое как при тепловом, так и бесстолкновительном расслоении привести не удается, однако в каждом конкретном случае это можно сделать, пользуясь законом сохранения числа частиц и общими условиями термодинамического равновесия, которые состоят в постоянстве температуры тяжелых частиц, давления и химического потенциала [7].

Таким образом, в областях с характерным размером, большим $\lambda/\sqrt{\delta}$, по мере увеличения E_0 сначала происходит тепловое расслоение, потом более мелкое бесстолкновительное. В областях же с характерным размером, меньшим λ , возможно лишь бесстолкновительное расслоение.

В заключение сделаем несколько замечаний.

Прежде всего, поскольку критическое поле линейно зависит от температуры T , которая, в свою очередь, медленно растет со временем, может произойти «срыв» расслоенной структуры.

Рассмотренные эффекты могут наблюдаться и при падении плоской волны на слой непрозрачной плазмы, так как в приближении заданного поля в линейном случае для возмущений вдоль поля уравнения будут теми же самыми. Таким образом, для достаточно сильной волны следу-

ет ожидать заметного изменения коэффициента прохождения через непрозрачный слой с увеличением мощности.

В плазме, находящейся в стороннем потенциальном поле, например, в гравитационном поле Земли, когда $[Eg] \neq 0$, где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, как и в ван-дер-ваальсовском газе более «плотная фаза» плазмы целиком собирается возле «дна» [8].

Автор признателен В. Б. Гильденбургу, А. Г. Литваку и М. А. Миллеру за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 70 (1965).
2. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 45, 1243 (1963).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
4. Л. Д. Ландау, А. И. Ахиезер, Е. М. Лифшиц, Курс общей физики, изд. Наука, М., 1965.
5. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 39, 1450 (1960).
6. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
8. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 46, 2156 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 декабря 1968 г.

PLASMA LAMINATION IN A HIGH-FREQUENCY FIELD

V. A. Mironov

The behaviour of a homogeneous plasma in a quasi-static electric field E with the frequency ω is studied. It is shown that the state of the plasma with the negative dielectric permittivity in the field larger than some critical E_{cr} is unstable. As a result of the development of instability, the plasma is laminated into sections the characteristic sizes of which are estimated.

УДК 538.56 : 621.371.252

О НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ В ИОНОСФЕРНОМ КАНАЛЕ

Ю. Г. Спиридовонов, Д. С. Лукин

Приводятся результаты численного расчета напряженности и интерференционной структуры поля в различных сечениях неоднородного ионосферного канала при «рикошетирующем» распространении радиоволн. Определяются периоды осцилляций амплитуды в зонах многолучевого приема.

Анализ первых наблюдений за сигналами искусственных спутников Земли показал ряд особенностей, отличающих радиосвязь с космическими объектами от обычной наземной связи [1, 2].

Оказалось, что в очень большом числе случаев, доходящем до 90%, наблюдается радиосвязь на частотах, значительно превышающих максимально применимые частоты (МПЧ). Иногда это превышение достигало 50% и более. Как правило, на частотах выше МПЧ имела место аномальная зависимость напряженности поля от расстояния, с очень медленным спадом на расстояниях от 5 до 18 тыс. км, причем измеренная напряженность поля в ряде случаев значительно превышала рассчитанную по формуле идеальной радиопередачи.

Механизм распространения, объясняющий эти явления [3], схожен с механизмом распространения звука в шепчущей галерее, исследованным еще Рэлеем [4], с той лишь разницей, что отражение происходит не от идеально отражающей поверхности, а от неоднородной ионосфера. При определенной высоте передатчика над поверхностью Земли часть излучения захватывается ионосферным волноводным каналом, образующимся за счет кривизны ионосферы ниже максимума слоя ионизации. Лучи, отражаясь от ионосферы под пологими углами, снова попадают в ионосферу без предварительного отражения от Земли (рикошетирующий механизм распространения), при этом отражение происходит на частотах, превышающих в 5—10 раз критическую частоту слоя F_2 .

Подробное исследование рикошетирующего механизма распространения в условиях реальной ионосферы на основе численного расчета траекторий лучей проводилось в работах [5—7].

В настоящей работе приводятся результаты численного расчета напряженности поля и интерференционной структуры в различных сечениях неоднородного ионосферного канала при рикошетирующем распространении радиоволн.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Расчет напряженности поля проводился для бипарabolической модели зависимости электронной концентрации от высоты, с экспоненциальным спадом выше максимума F -слоя:

$$N = \begin{cases} 0 & (h < h_n), \\ N_{\max} \left[\frac{2(h - h_n)}{(h_{\max} - h_n)} - \frac{(h - h_n)^2}{(h_{\max} - h_n)^2} \right]^2 & (h_n < h < h_{\max}), \\ N_{\max} \exp[\lambda(h_{\max} - h)] & (h > h_{\max}). \end{cases}$$

Здесь h — высота над поверхностью Земли, h_n — высота нижней границы ионосферы, h_{\max} — высота максимума ионизации, N_{\max} — электронная концентрация в максимуме слоя $\lambda = 6 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$.

На рис. 1 изображена схема ионосферного канала; h_1 и h_2 — высоты источников. Напряженность поля рассчитывалась в горизонтальных

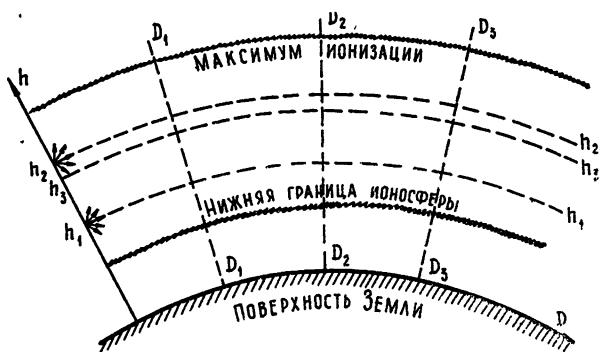


Рис. 1. Схема ионосферного канала. Высота максимума ионизации 300 км; нижняя граница ионосферы — 100 км; $h_1 = 130$ км, $h_2 = 200$ км, $h_3 = 180$ км, $D_1 = 2500$ км, $D_2 = 4500$ км, $D_3 = 5500$ км.

сечениях h_1h_1 , h_2h_2 , h_3h_3 и в вертикальных D_1D_1 , D_2D_2 , D_3D_3 для ряда значений параметра f_{kp}/f .

Для иллюстраций методики расчета рассмотрим подробно определение напряженности поля в вертикальном сечении D_1D_1 ($D_1 = 2500$ км). Используя предложенный в работах [8, 9] численный метод расчета напряженности поля вдоль траектории луча, нетрудно получить картину напряженности поля $E(\varphi_0, ct)$ в лучевых координатах, где φ_0 — угол выхода луча, ct — групповой путь вдоль луча. Соответствующий расчет был проведен на ЭВМ «Стрела» с шагом $\Delta\varphi_0 = 0,001^\circ$, $\Delta ct = 1$ км.

Для того, чтобы получить картину напряженности поля в интересующем нас сечении, например, D_1D_1 , необходимо перейти от лучевых координат к переменным h и D :

$$E[\varphi_0(h, D), ct(h, D)] = E(h, D).$$

На рис. 2 а приведена зависимость $E(h)$ при дальности $D_1 = 2500$ км. Как видно из рисунка, кривая $E(h)$ не является однозначной, т. е. в каждую точку приходит несколько лучей. Амплитуда напряженности поля в этом случае зависит от разности фаз приходящих лучей, в частности, для двух лучей:

$$E(h) = [E_1^2(h) + E_2^2(h) - 2E_1(h)E_2(h)\cos(\Delta\Phi(h))]^{1/2}. \quad (1)$$

В принципе разность фаз $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ можно определить, рассчитывая фазу вдоль каждого из лучей:

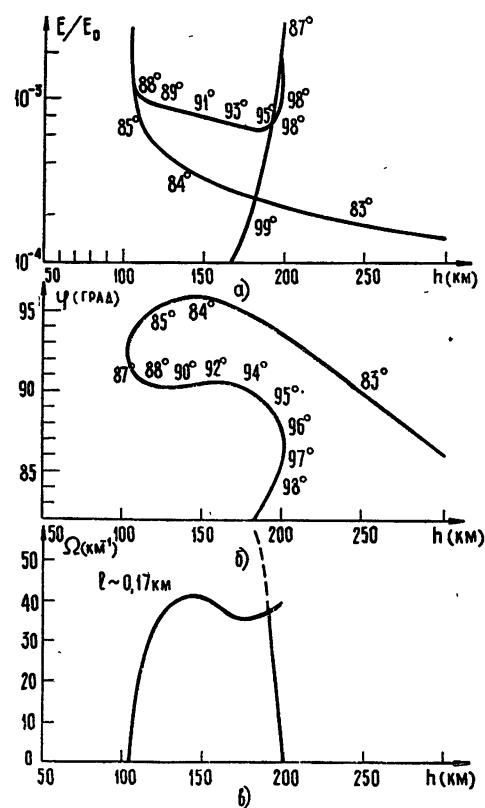
$$\Phi_{1,2} = \int_0^D K dr_{1,2}. \quad (2)$$

Однако при больших расстояниях D небольшая относительная погрешность в численных расчетах траектории и фазы приводит к значитель-

ным изменениям разности фаз $\Delta\Phi$, что не приемлемо для расчета напряженности поля по формуле (1).

Рис. 2. К расчету интерференционной картины поля в сечении D_1D_1 .

- а) Зависимость амплитуды поля от высоты в сечении D_1D_1 для различных углов выхода лучей. (E_0 — напряженность поля заданного источника на расстоянии 1 км.) б) Зависимость угла прихода лучей от высоты в сечении D_1D_1 . в) Зависимость скорости изменения разности фаз от высоты в сечении D_1D_1 .



Эту трудность можно обойти, используя некоторые результаты расчета траекторий лучей. Считая, что в точке приема приходящие волны являются локально плоскими, нетрудно получить выражение для дифференциальной разности фаз:

$$d(\Delta\Phi) = 2K \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) dh. \quad (3)$$

Здесь $\Delta\varphi$ — угол между приходящими лучами, α — угол между одним из лучей и направлением изменения h .

Зависимость угла прихода (угол между вертикалью и направлением луча) от высоты на данном расстоянии (рис. 2 б) позволяет рассчитать скорость изменения разности фаз $\Omega = \frac{d\Delta\Phi}{dh}$ по формуле (3). Угол между приходящими лучами $\Delta\varphi$ определяется как разность двух значений угла прихода φ на фиксированной высоте, угол α равен φ .

На рис. 2 в приведена зависимость скорости изменения разности фаз от высоты. Искомая разность фаз определяется как площадь под кривой $\Omega = \Omega(h)$:

$$\Delta\Phi = \int_{h_0}^h \Omega(h) dh + \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Полное построение интерференционной картины в условиях ионосферного распространения нецелесообразно из-за нестабильности и неточности определения параметров ионосферы. Для характеристики интерференционной картины в ионосфере достаточно определить распределения максимальной $E_1 + E_2$ и минимальной $E_1 - E_2$ амплитуд напряженности поля, а также дифференциальный период осцилляций амплитуды $l(h) = 2\pi/\Omega(h)$.

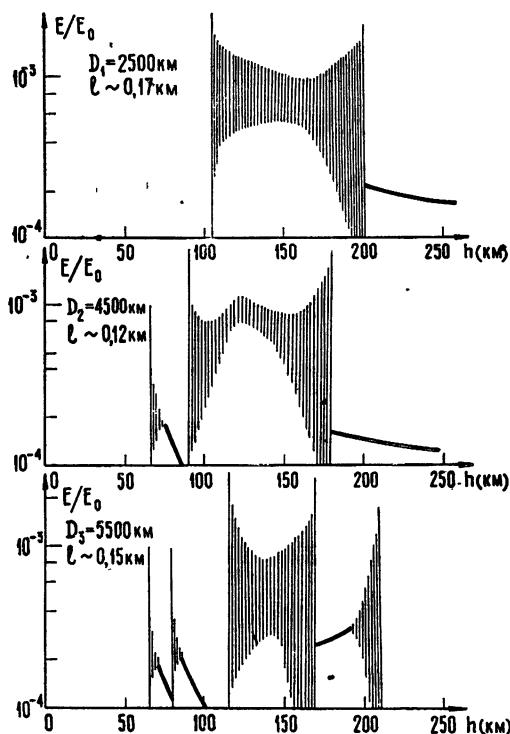


Рис. 3. Распределение амплитуды напряженности поля в вертикальных сечениях канала (высота источника 130 км; $f_{kp}/f=0,25$).

На рис. 4 представлена зависимость амплитуды от расстояния в горизонтальном сечении h_1, h_1 (высота источника $h_1 = 130$ км). На расстояниях больше 1000 км средняя амплитуда напряженности поля превышает соответствующее значение, рассчитанное для случая распространения в свободном пространстве (пунктирная линия).

Число лучей, приходящих в каждую точку, растет с увеличением расстояния от источника. В интервале 1900—3200 км в каждую точку приходят три луча (1 зона интерференции); 3200—5100 км — четыре луча (2 зона интерференции); 5100—7000 км — шесть лучей (3 зона интерференции). Количество приходящих лучей меняется каждый раз при переходе через каустику, причем число лучей на данном расстоянии D на единицу больше числа каустик, пересекаемых вертикальным сечением DD (см. рис. 3).

Несмотря на большое количество приходящих лучей, интерференционная структура на всех расстояниях определяется, в основном, лишь тремя лучами, идущими вблизи оси канала. Эта группа лучей имеет наименьшую длину скачка (расстояние между последующими

На рис. 3 приведены распределения максимальной и минимальной амплитуд напряженности поля в вертикальных сечениях D_1D_1 , D_2D_2 , D_3D_3 . Средний период осцилляций равен соответственно $l_1 = 0,17$ км, $l_2 = 0,12$ км, $l_3 = 0,15$ км. По мере приближения к каустике период осцилляций Ω , как следует из рис. 2в, уменьшается. Основная часть излучения заключена в интервале высот от 100 до 200 км. Выше 200 км амплитуда напряженности поля мала и значительно падает с ростом расстояния от источника. Снизу излучение ограничено внешней ветвью каустики, которая на больших расстояниях проходит параллельно поверхности Земли на высоте около 65 км.

Отсутствие отражения от Земли и соответствующей дефокусировки при отражении приводит к аномальной зависимости амплитуды напряженности поля в канале от расстояния.

отражениями от ионосферы), равную приблизительно 3500 км. Амплитуды остальных лучей уменьшаются с увеличением расстояния из-за расходности фронта волны и дают незначительный вклад в суммар-

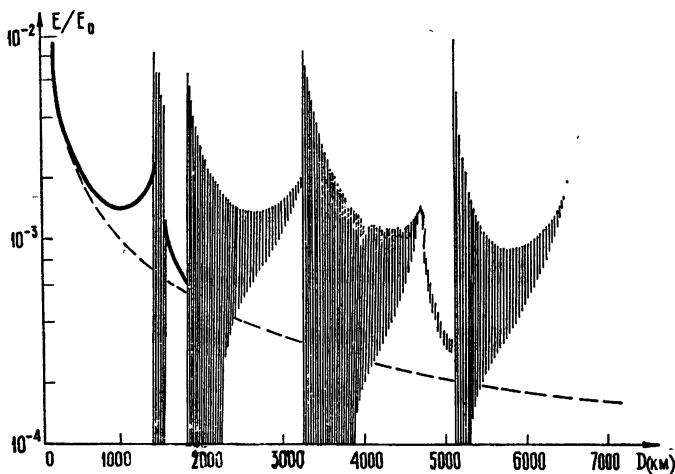


Рис. 4. Распределение амплитуды напряженности поля в горизонтальном сечении канала на высоте 130 км (высота источника 130 км; $f_{kp}/f = 0,25$).

ную амплитуду. Интерференционная структура для трех зон интерференции изображена на рис. 5. Наличие двух периодов осцилляций амплитуды характерно для интерференционной структуры с тремя приходящими лучами. Периоды осцилляций зависят от взаимной разности фаз приходящих лучей и определяются так же, как и в случае двух лучей.

На рис. 5 указаны интервалы изменения периодов осцилляций в пределах каждой интерференционной зоны. При приближении к каустике периодичность осцилляций падает, как квадратный корень из расстояния до каустики [10].

Результаты расчета, приведенные выше, относятся к случаю, когда источник находится на оси канала. Ось канала расположена на высоте максимума функции $n(r)r$ [5]; в нашей модели это соответствует высоте 130 км.

Если источник сдвинут относительно оси, ионосферный канал захватывает всего лишь узкий пучок лучей, что приводит к появлению зон «молчания» на определенных расстояниях от источника. На рис. 6 и 7 представлены распределения амплитуды в горизонтальных сечениях

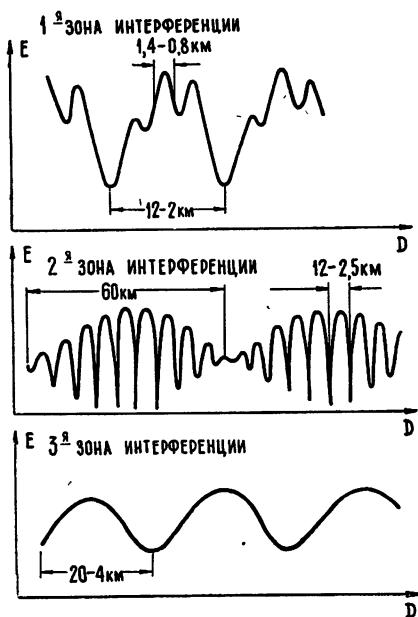


Рис. 5. Интерференционная структура поля в горизонтальном сечении на высоте 130 км.

$h_3 h_3$ ($h_3 = 180$) и $h_2 h_2$ ($h_2 = 200$ км) при высоте источника $h_2 = 200$ км. При несимметричном расположении источника наряду с появлением зон молчания возникает еще одна особенность: напряженность поля на расстояниях до 3000 км меньше, чем напряженность поля в свободном пространстве. Этот интересный результат отмечается также в работе [1].

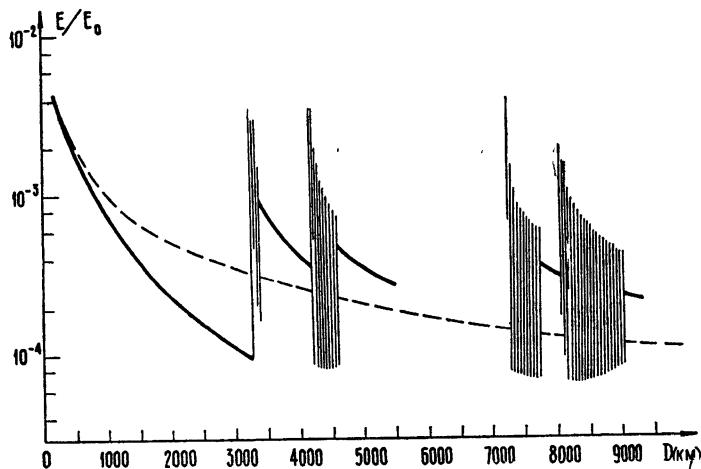


Рис. 6 Распределение амплитуды напряженности поля в горизонтальном сечении канала на высоте 180 км (высота источника 200 км; $f_{kp}/f=0,3$).

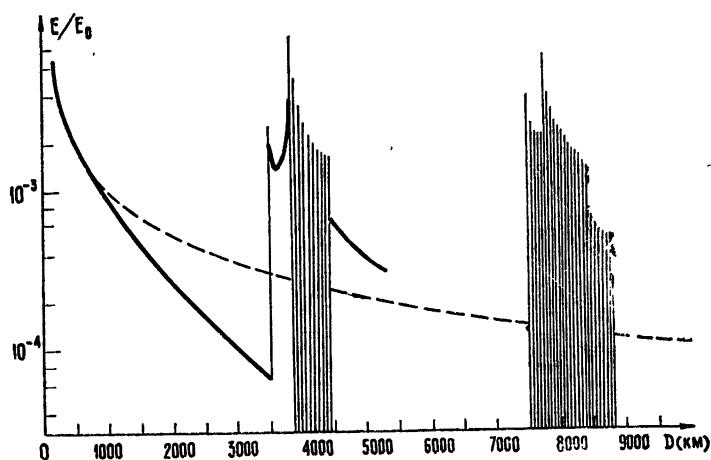


Рис. 7. Распределение амплитуды напряженности поля в горизонтальном сечении канала на высоте 200 км (высота источника 200 км; $f_{kp}/f=0,3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Казанцев, Т. С. Романова, А. Я. Клементенко, Радиотехника и электроника, 3, № 9, 1107 (1958); Planet. Space Sci., 1, 130 (1959).
2. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Космические исследования, 4, № 2, 238 (1966).
3. П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в проблеме дальних радиосвязей, МГУ, 1947.
4. Lord Rayleigh (J. W. Strutt), Sci. Pap., II, 441 (1886).
5. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Космические исследования, 4, № 2, 221 (1966).
6. M. D. Grossi, B. M. Langworth, Radio Sci., 1, № 8, 887 (1966).
7. P. M. Banks, J. Geophys. Res., 70, № 3, 625 (1965).

8. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Ю. Г. Спиридовон, Космические исследования, 5, № 4, 593 (1967).
9. Д. С. Лукин, Ю. Г. Спиридовон, Радиотехника и электроника, 14, № 9, 1673 (1969).
10. G. B. Haselgrave, J. Haselgrave, R. C. Jennison, Proc. Roy. Soc. 261A, № 1306, 420 (1961).
11. Л. Н. Ляхова, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 2, 351 (1965).

Московский физико-технический
институт

Поступила в редакцию
11 октября 1968 г.

THE INTENSITY OF THE FIELD IN AN IONOSPHERIC CHANNEL

Yu. G. Spiridonov, D. S. Lukin

The authors present the results of numerical calculation of the intensity and interference structure of the field in different sections of inhomogeneous ionospheric channel at "ricocheting" propagation of radio waves. The periods of amplitude oscillations in the regions of multy-ray reception is determined.

УДК 621.396.67

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПРИЕМНОЙ АНТЕННЫ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Л. М. Оболенский, Ю. В. Чугунов, Ю. Я. Яшин

На основании «обобщенной» теоремы взаимности показано, что характеристики диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, в магнитоактивной плазме совпадают в режимах приема и передачи.

Задача об определении электрических характеристик (импеданса, диаграммы направленности, действующей высоты) излучающей антенны, помещенной в магнитоактивную плазму, рассматривалась неоднократно (см., например, [1-4]). Однако в экспериментах, связанных с измерением напряженности электрического поля в ионосфере на низких частотах или в лабораторной плазме, а также в ряде других случаев необходимо знать характеристики зонда (антенны), работающего в режиме приема. В средах с симметричным тензором диэлектрической проницаемости на основании электродинамической теоремы взаимности легко показывается равенство электрических характеристик приемной и передающей антенн [5]. В гиротропных средах теорема взаимности в обычной форме не применима, а непосредственный расчет приемной антенны представляет часто значительные трудности.

В настоящей работе на основании «обобщенной» теоремы взаимности [6] показывается, что и в случае магнитоактивной плазмы (без учета теплового движения частиц) характеристики короткого диполя (размеры диполя много меньше длины волны) в режиме приема и передачи равны.

1. Будем исходить из обобщенной теоремы взаимности [6]

$$\int j_{ct}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{H}_0) d\mathbf{r} = \int j_{ct}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, -\mathbf{H}_0) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $j_{ct}^{(1)}$, $j_{ct}^{(2)}$ — плотности сторонних токов в первой и второй антennen, $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ — создаваемые ими поля, а \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле.

Запишем векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= j_1 + i j_2 \equiv j_0 e^{i\gamma}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E}_0 e^{i\psi} = \Phi \mathbf{f} e^{i\psi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где j_0 , \mathbf{E}_0 — амплитуды, а γ и ψ — фазы соответствующих векторов, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_1 + i \mathbf{f}_2$ — вектор поляризации, который отнормирован следующим образом: $(\mathbf{f}\mathbf{f}^*) = 1$.

Ниже считается, что диполи находятся в освещенной области, т. е. в пределах диаграммы направленности, поэтому в рассмотрение принимаются только однородные волны. Для таких волн, распростра-

няющихся в среде, описываемой эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} , имеет место соотношение [7]

$$E(-H_0) \equiv f(-H_0) \Phi(-H_0) = f^*(H_0) \Phi(H_0). \quad (3)$$

Поле источника в волновой зоне в данном направлении можно представить в виде квазиплоской волны с амплитудой, зависящей от расстояния, и вектором поляризации, совпадающим с вектором поляризации нормальной плоской волны, распространяющейся в том же направлении. Амплитуда поля симметрична по отношению к H_0 [7], поэтому соотношение (3) можно распространить и на поле точечного диполя в волновой зоне. Заметим, что (3) справедливо и для слабонеоднородной среды.

Для короткого диполя длины l ($l \ll \lambda$, где λ — длина волны в среде) имеет место равенство

$$\mathbf{j}_0^{(2)} f^{(1)*}(H_0) = \mathbf{j}_0^{(2)} f^{(1)}(H_0) e^{-ix}, \quad (4)$$

где $\operatorname{tg} \chi = (\mathbf{j}_0^{(2)} f_2^{(1)}) / (\mathbf{j}_0^{(2)} f_1^{(1)})$. Физический смысл последнего соотношения очевиден. Как известно, распространяющаяся в магнитоактивной плазме волна имеет эллиптическую поляризацию. Вещественная и мнимая части вектора поляризации f , т. е. и вектора f^* , соответствуют направлениям двух сопряженных полуосей (вообще говоря, не главных) этого эллипса. Таким образом, проекции электрических полей с эллипсами поляризации f и f^* на прямую, совпадающую с осью диполя, сдвинуты по фазе по отношению друг к другу. Этот дополнительный сдвиг и определяется формулой (4).

В итоге, принимая во внимание (2) — (4), представим (1) следующим образом:

$$\int j_{\text{ст}, 0}^{(1)} E_0^{(2)} \exp [i(\gamma_1 + \psi_2)] dr = \int j_{\text{ст}, 0}^{(2)} E_0^{(1)} \exp [i(\gamma_2 + \psi_1) + i\chi] B dr, \quad (5)$$

где через B обозначен некоторый амплитудный множитель.

2. Ниже будем предполагать, что сторонняя ЭДС приложена на некотором данном малом участке антенны. Если считать также, что напряженность стороннего поля равномерно распределена по сечению диполя, то из соотношения (5) можно перейти к следующей форме электродинамической теоремы взаимности для двух антенн в магнитоактивной плазме (для изотропной среды теорема взаимности в подобном виде приведена, например, в [8]):

$$\frac{\mathcal{E}_1}{I_{12}} = \frac{\mathcal{E}_2}{I_{21}} Be^{i\eta}, \quad (6)$$

где \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — ЭДС, приложенные к первому и второму диполям, I_{12} — амплитуда тока в первом диполе, создаваемого полем второго, I_{21} — амплитуда тока во втором диполе, наведенного полем первого*. Через η обозначена некоторая дополнительная фаза, определяемая соотношением (5), конкретный вид которой для дальнейшего не существенен.

Воспользовавшись (6) и поступая далее так, как это делается в большинстве монографий по теории антенн (см., например, [5]), можно показать, что имеет место соотношение

$$\frac{I_k(Z_k + Z_{a,k}) e^{i\eta}}{E_k h_{a,k} F_k(\phi, \theta, \theta_1)} = N = \text{const}, \quad (7)$$

* Все вышеуказанные величины относятся к рассматриваемому сечению антennы.

где I_k и E_k — соответственно ток на зажимах диполя и проекция электрического поля на направление диполя в режиме приема. Все остальные параметры в (7) относятся к антенне в режиме передачи: h_{dk} — действующая высота диполя; F_k — некоторая функция, характеризующая диаграмму направленности и ориентацию диполя относительно H_0 (θ_1 — угол между диполем и внешним магнитным полем); Z_k — импеданс, включенный между зажимами диполя ($k = 1, 2, \dots, m$ — номер диполя).

Поскольку величина N будет одной и той же для любого диполя независимо от ориентации его относительно H_0 , то, очевидно, N является универсальной константой.

3. Равенство входных импедансов антенны Z_{ak} , работающей в режиме приема и передачи, можно показать, используя принцип суперпозиции и теорему об активном двухполюснике (теорема Тавенина) [9]*. Отметим, что единственным предположением относительно сред, окружающих антенну, фигурирующим в этом доказательстве, является их линейность.

Используя это обстоятельство, можно записать выражение для $Z_k + Z_{ak}$ в формуле (7) в виде

$$Z_{k(\text{пр})} + Z_{a(k)} = \frac{E_{k(\text{пр})} h_{dk} F_{k(\text{пр})}}{I_{k(\text{пр})}}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\left(\frac{h_{dk} F_{\text{пр}}}{h_{dk} F_{\text{пер}}} \right)_k = N \exp(i\eta_k). \quad (9)$$

Поскольку N является универсальной константой, то для ее определения можно взять простейший случай, когда оба диполя расположены в вакууме (это легко понять, если последовательно применять теорему взаимности для диполей в слабонеоднородной плазме, которая выходит на вакуум на каком-то расстоянии от первой пары излучателей). Тогда, аналогично тому, как это сделано в [10], можно показать, что $N = 1$. С учетом этого из соотношения (9) сразу следует, что $h_{dk(\text{пр})} = h_{dk(\text{пер})}$, $F_{\text{пр } k} = F_{\text{пер } k} \exp(i\eta_k)$, т. е. действующие длины короткого диполя в режимах приема и передачи равны, а диаграммы направленности отличаются лишь фазовым множителем. Для коротких линейных антенн этот фазовый множитель несущественен.

Отличие диаграммы направленности приемной антенны от передающей на фазовый множитель можно пояснить следующим образом. Пусть передающая антenna, определенным образом ориентированная относительно H_0 и возбуждаемая каким-то током заданной амплитуды, создает в некоторой точке пространства поле с амплитудой Φ , поляризацией f и фазой φ . Поместим в точке приема такую же передающую антенну (ориентация ее относительно H_0 и сторонний ток — такие же). Тогда поле излучения этой антennы в первоначальной точке совпадает по амплитуде с Φ , но отличается поляризацией и фазой. Для того, чтобы добиться полного совпадения полей, необходимо изменить ориентацию излучающего (или приемного) диполя.

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Таланову за дискуссии.

* На это обстоятельство любезно обратил наше внимание В. И. Таланов.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. R. Kaiser, *Planet. Sp. Sci.*, **9**, 639 (1962).
2. V. P. Piati, H. Weil, *Radio Sci.*, **69**, 291 (1965).
3. H. Staras, *IEEE Trans. Ant. Prop.*, **AP-12**, 695 (1964).
4. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 1, 50 (1968).
5. Г. З. Айзенберг, Коротковолновые антенны, Гос. изд. литер. по вопр. связи и радио, М., 1962.
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, ГИФМЛ, М., 1960.
7. Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 6, 1108 (1966).
8. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
9. Л. А. Бессонов, Теоретические основы электротехники, изд. Высшая школа, М., 1962.
10. А. Л. Драбкин, В. Л. Зузенко, Антенно-фидерные устройства, изд. Сов. радио, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 июня 1967 г.,
после доработки
6 июня 1969 г.

ELECTRIC CHARACTERISTICS OF THE RECEIVING ANTENNA
IN GYROTROPIC MEDIA

L. M. Obolenskii, Yu. V. Chugunov, Yu. Ya. Yashin

On the basis of the generalized reciprocity theorem, it is shown that the characteristics of the dipole, which dimensions are small as compared with the wavelength in a magnetoactive plasma, coincide in the cases of reception and transmission.

УДК 621.378.323

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПЕРЕХОДА
 $J = K = 1$ АММИАКА $N^{14}H_3$ ПО ОДНОВРЕМЕННОЙ
 ГЕНЕРАЦИИ НА РЯДЕ КОМПОНЕНТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ**

A. Ф. Крупнов, О. Б. Щуко

Проведено исследование сверхтонкой структуры перехода $J = K = 1$ аммиака $N^{14}H_3$ методом измерения частот биений между одновременно генерирующими в пучковом мазере компонентами линии. Рассмотрены особенности метода. Получено значение магнитной константы $B = -14,6 \text{ кГц}$.

В настоящей работе проводится исследование сверхтонкой структуры аммиака методом, предложенным в [1]. Метод заключается в получении одновременной генерации в пучковом мазере на ряде компонент сверхтонкой структуры линии. При этом измерение расстояний между компонентами сводится, в сущности, к измерению частот биений между колебаниями, соответствующими генерации на каждой компоненте, с учетом некоторых специфических для данного метода поправок. Так как в данном случае измеряются непосредственно малые разности частот, аппаратура и методика эксперимента упрощается, причем в принципе достижимы большие точности измерений. Экспериментально этот метод применен нами впервые.

Нами исследовалась линия $J = K = 1$ инверсионного спектра аммиака $N^{14}H_3$ на частоте 23 694,48 Мгц*. Пучковый мазер на линии $J = K = 1$ имел обычную конструкцию. Были приняты лишь меры к увеличению интенсивности пучка активных молекул: очистка аммиака перемораживанием, применение холодных диафрагм по обе стороны сортирующей системы, тщательное изготовление и очистка сортирующей системы, которая выдерживала напряжение до 42 кв. Благодаря этим мерам была получена генерация на четырех компонентах линии $J = K = 1$, которая сама по себе является существенно более слабой, нежели обычно применяющаяся $J = K = 3$. Колебания молекуллярного генератора принимались супергетеродинным приемником, на детекторе которого получались биения между колебаниями, соответствующими генерации на различных компонентах линии. Частоты биений измерялись электронно-счетным частотомером 43-9, а также узкополосным приемником с кварцевой калибровкой.

1. РАСЧЕТ НАБЛЮДАВШЕЙСЯ СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Обычный аммиак $N^{14}H_3$ имеет квадрупольную и магнитную сверхтонкую структуру [3]. Особенностью переходов с $|K|=1$ у аммиака является то, что каждая компонента линии, включая центральную, расщепляется на две благодаря снятию K -вырождения. Применение выражений для энергии уровней, полученных в [4, 5], приводит к зависимостям частот компонент от различных констант, показанным в табл. 1. Нами сохранены обозначения [4, 5], где $(A + 0,5 C)$ и B — кон-

* В [2] упоминается, что генерация на отдельных компонентах линии $J = K = 1$ была получена А. И. Барчуковым и В. В. Савранским.

станты, описывающие магнитное взаимодействие ядер водорода с вращением молекулы, которые определяются экспериментально; D_1 и D_2 — константы, описывающие магнитное диполь-дипольное взаимодействие ядер водорода и азота, которое может быть рассчитано:

$$D_1 = g_H g_N \mu_0^2 \left\langle v \left| r_{NH}^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right| v \right\rangle, \quad (1)$$

$$D_2 = g_H g_N \mu_0^2 \left\langle v \left| r_{NH}^{-3} \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right| v \right\rangle.$$

В формулах (1) μ_0 — ядерный магнетон, $g_H = 2 \cdot 2,793$, $g_N = 0,404$, r_{NH} и β — геометрические параметры молекулы, ясные из рис. 1, скобки оз-

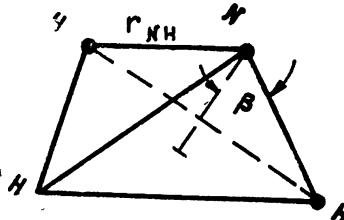


Рис. 1. Структурные параметры молекулы аммиака.

начают усреднение по инверсионным состояниям. В качестве первого приближения, следя [6], примем значения r_{NH} и β , усредненные по основному колебательному состоянию. Уточненные геометрические параметры молекулы аммиака получены в [6], откуда $r_{NH} = 1,0134 \text{ \AA}$, $\beta = 67^\circ 43'$. Расчет дает $D_1 = -2,35 \text{ кгц}$, $D_2 = +10,85 \text{ кгц}$. Разность квадрупольных констант Δ (eq Q) = $3,8 \text{ кгц}$ уточнена в [7]. Эти значения констант и использовались нами в дальнейшем.

Наиболее интенсивными, по общему правилу, должны быть компоненты с $\Delta F = \Delta F_1 = \Delta J$; для инверсионного перехода $\Delta J = 0$. Двукратное применение известной процедуры расчета распределения интенсивностей вначале по квадрупольной, а затем по магнитной структуре [5] приводит к относительным интенсивностям I_r (табл. 1). Сортировка изменяет относительную интенсивность сверхтонких компонент по сравнению с интенсивностями в газе I_r . Примерный учет сортировки производится умножением I_r на весовой множитель [5]

$(2F_1 + 1)^{-1} \sum_{M_J} N(M_J) M_J^2$ — для квадратичного штарк-эффекта,

$(2F_1 + 1)^{-1} \sum_{M_J} N(M_J) M_J$ — для линейного штарк-эффекта,

где $N(M_J)$ — число состояний молекулы в слабом поле, переходящих в состояние с данным M_J в сильном поле. В случае $J = K = 1$ дело упрощается тем, что сортируются лишь молекулы с $M_J = 1$, а $N(1)$ одинаково для сортирующихся компонент $F_1 = 1$ и 2. Тогда весовой множитель сводится к $(2F_1 + 1)^{-1}$ при любом поле. Рассчитанные интенсивности компонент в отсортированном пучке I_c также приведены в табл. 1. Отметим, что в рабочей области сортирующих напряжений всюду осуществляется случай сильного поля; при этом относительные интенсивности компонент (т. е. вид линии) не зависят от сортирующего напряжения, которое влияет лишь на общую интенсивность линии.

Таблица 1

Центральная линия			
Переходы $F'_1 F' \rightarrow F_1 F$	Расстояние компонент от центра линии, выраженное через постоянные сверхтонкой структурой	I_g отн. ед.	I_c отн. ед.
$1 \frac{1}{2} \rightarrow 1 \frac{1}{2}$	$B - 2D_2 - 0,125 \Delta (\text{eq } Q)$	7,93	13,2
$2 \frac{5}{2} \rightarrow 2 \frac{3}{2}$	$1,25 (A + 0,5C) + 0,25 B + 0,25 D_1 + 0,1D_2 +$ $+ 0,025 \Delta (\text{eq } Q)$	7,1	7,1
$1 \frac{3}{2} \rightarrow 1 \frac{1}{2}$	$0,75 (A + 0,5C) + 0,25 B - 0,75 D_1 - 0,5 D_2 -$ $- 0,125 \Delta (\text{eq } Q)$	4	6,68
$2 \frac{3}{2} \rightarrow 2 \frac{3}{2}$	$1,5 B + 0,6 D_2 + 0,025 \Delta (\text{eq } Q)$	64,2	64,2
$1 \frac{1}{2} \rightarrow 1 \frac{3}{2}$	$-0,75 (A + 0,5C) + 0,25 B + 0,75 D_1 - 0,5 D_2 -$ $- 0,125 \Delta (\text{eq } Q)$	4	6,68
$2 \frac{5}{2} \rightarrow 2 \frac{5}{2}$	$-B - 0,4 D_2 + 0,025 \Delta (\text{eq } Q)$	100	100
$1 \frac{3}{2} \rightarrow 1 \frac{3}{2}$	$-0,5 B + D_2 - 0,125 \Delta (\text{eq } Q)$	19,8	33,4
$2 \frac{3}{2} \rightarrow 2 \frac{5}{2}$	$-1,25 (A + 0,5C) + 0,25 B - 0,25 D_1 +$ $+ 0,1 D_2 + 0,025 \Delta (\text{eq } Q)$	7,1	7,1
Квадрупольные спутники			
Переходы $F'_1 F' \rightarrow F_1 F$	Расстояние от центра линии Δf , выраженное через постоянные сверхтонкой структуры	$\Delta f_{\text{изм}}$ кгц	$\Delta f_{\text{корр}}$ кгц
$1 \frac{3}{2} \rightarrow 2 \frac{5}{2}$	$-0,15 \text{ eq } Q - (a+b) - 0,25 (A + 0,5C) - 0,75 B +$ $+ 0,35 D_1 + 0,3 D_2 - 0,05 \Delta (\text{eq } Q)$	605,1	617
$1 \frac{3}{2} \rightarrow 0 \frac{1}{2}$	$-0,375 \text{ eq } Q + 0,5 (a+b) + 0,25 (A + 0,5C) -$ $- 0,25 B + 0,25 D_1 + 0,5 D_2 - 0,05 \Delta (\text{eq } Q)$	1531,7	1545,7

Рассмотрение относительных интенсивностей компонент показывает, что почти вся интенсивность сосредоточена в компонентах $\Delta F = \Delta F_1 = 0$, частоты которых зависят лишь от констант B и D_2^* . Поэтому представляется рациональным уточнить именно не поддающуюся расчету константу B . Для величины $(A + 0,5C)$, слабо влияющей на частоту суммарных максимумов, взято значение, полученное в [5] на других переходах, а именно $(A + 0,5C) = -18,3 \pm 0,2$ кгц. По определению [6] $B = -14,1 \pm 0,3$ кгц. Полученные результаты позволяют подойти к интерпретации экспериментальных данных по центральному дублету.

Кроме центрального дублета нами была получена генерация также на квадрупольных спутниках, расположенных с высокочастотной стороны линии и соответствующих переходам $\Delta F_1 = \pm 1$, $\Delta F = 0, \pm 1$, которые идентифицированы нами как $1 \frac{3}{2} - 2 \frac{5}{2}$ и $1 \frac{3}{2} - 0 \frac{1}{2}$. Это наиболее интенсивные спутники, для них $\Delta F = \Delta F_1$, а низкочастотные спутники подавлены сортировкой [5]. Выражения для частот спутников приведены в табл. 1. По данным [6] константы, соответствующие магнитному взаим-

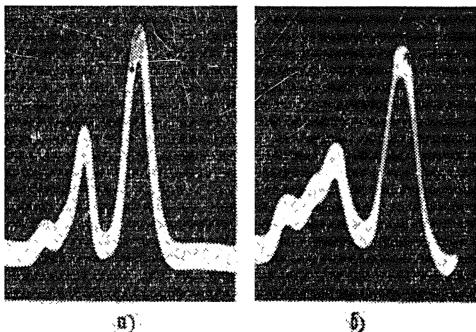
* Константа $\Delta (\text{eq } Q)$ входит аналогичным образом и с весьма малым весом.

модействию ядра азота с вращением молекулы, равны $a = 6,66 \pm 0,2$ кгц, $b = 6,66 \pm 0,2$ кгц. Для наибольшей по величине константы eqQ , определяющей квадрупольное взаимодействие ядра азота с полем молекулы, в [4, 5] приведены несколько отличные значения (см. ниже).

2. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 2 а приведен наблюдавшийся нами обычным способом (с сигналом) вид центральной линии перехода $J = K = 1$. Сравнение

Рис. 2. а) Экспериментально наблюдавшаяся центральная линия $\Delta F_1 = 0$ перехода $J = K = 1$; б) та же линия, частично насыщенная.



его с расчетным профилем линии (рис. 3) показывает достаточно хорошее согласие. Генерация происходила на двух наибольших максимумах

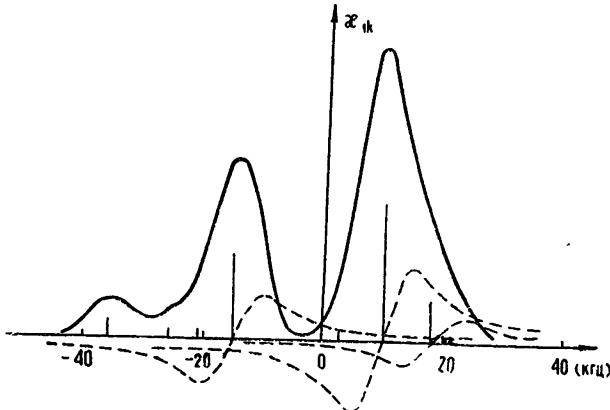


Рис. 3. Расчетный профиль центральной линии перехода $J = K = 1$.

линии, близких к частотам переходов $2\frac{3}{2} - 2\frac{3}{2}$ и $2\frac{5}{2} - 2\frac{5}{2}$. При этом имела место неожиданно большая (несколько килогерц) зависимость частоты биений от ряда параметров: настройки резонатора, интенсивности пучка, величины сортирующего напряжения. Проведенный анализ свидетельствует о том, что все указанные зависимости в конечном счете сводятся к зависимости частоты биений от мощности генерации, причем частота биений растет с ростом мощности. На рис. 4 и 5 приведены зависимости частоты биений от мощности колебаний, причем в случае рис. 4 мощность регулировалась изменением сортирующего напряжения, а в случае рис. 5—изменением интенсивности молекулярного пучка. Эти зависимости, как будет показано далее, сводятся к влиянию эффекта насыщения. Среднее значение частоты биений, экстраполиро-

ванной к нулевым амплитудам, оказалось равным 24,85 кгц со среднеквадратичной ошибкой 0,12 кгц.

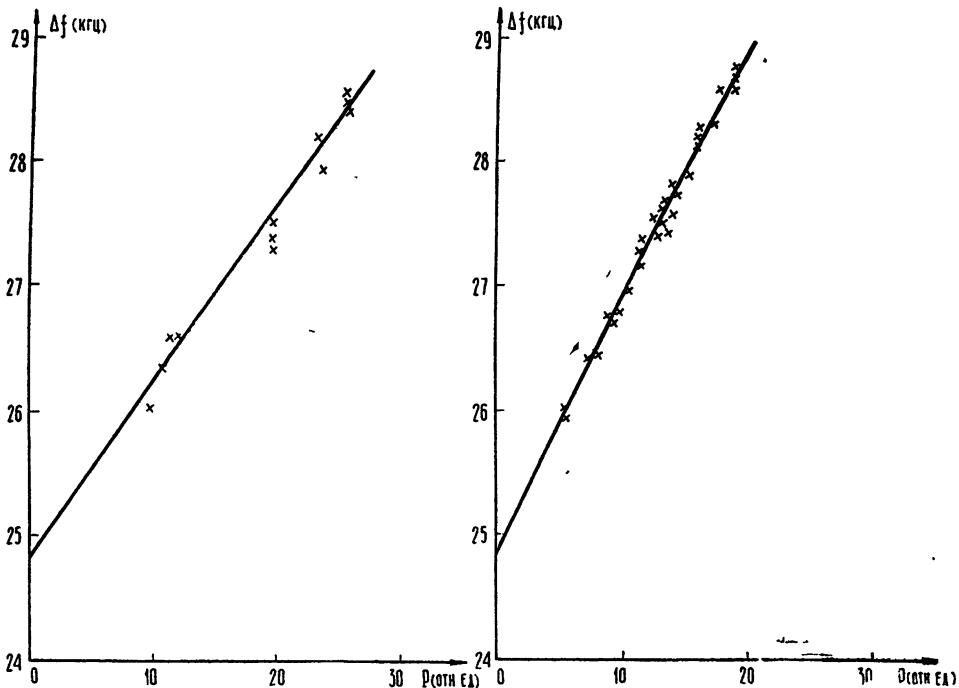


Рис. 4. Зависимость частоты биений от мощности генерации при регулировании мощности изменением сортирующего напряжения.

Рис. 5. Зависимость частоты биений от мощности генерации при регулировании мощности изменением интенсивности пучка.

Нами наблюдалась также генерация на двух высокочастотных квадрупольных спутниках центральной линии. В табл. 1 приведены значения частот биений $\Delta f_{изм}$ (экстраполированных к нулевым амплитудам) при одновременной генерации на квадрупольном спутнике и на большом пике центральной линии около перехода $2\frac{5}{2} - 2\frac{5}{2}$.

Анализ метода и интерпретация результатов. Принципиальные особенности данного метода кратко рассмотрены в [1]. В [8] решена задача о бигармоническом режиме в молекулярном генераторе, спектральная линия которого расщеплена магнитным полем на две компоненты равной интенсивности. Как видно из рассмотрения, основной особенностью бигармонического режима является довольно сложная зависимость частоты биений от расстояния между компонентами и их ширины. В настоящей работе требуется найти расстояние между компонентами по частоте биений, ширине и интенсивности компонент. Расстояние же между компонентами просто связано с искомой константой B (см. табл. 1). В связи с тем, что в данной задаче нужно учитывать более двух компонент спектральной линии, причем различной интенсивности, проведем расчет частоты биений несколько иным методом, позволяющим легче представить качественную картину явлений.

Уравнение колебаний в молекулярном генераторе имеет вид

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{\omega_p}{Q_p} \frac{dE}{dt} + \omega_p^2 E = -4\pi \frac{d^2 \langle P \rangle}{dt^2}, \quad (2)$$

где E — поле в резонаторе, Q_p , ω_p — добротность и частота резонатора. Усредненная по резонатору поляризация пучка $\langle P \rangle$ при наличии нескольких компонент спектральной линии может быть представлена как

$$\langle P \rangle = \sum_k \langle P_k \rangle = \sum_k (\langle z_{1k} \rangle + i \langle z_{2k} \rangle) E. \quad (3)$$

Поляризация каждой компоненты $\langle P_k \rangle$ может быть подсчитана, например, из общего решения уравнений, описывающих состояние двухуровневой системы при гармоническом возмущении [9]. Заранее задаваясь существованием бигармонического режима (компоненты разрешены [8]), ищем решение (2) в виде

$$E = E_1 \exp(i\omega_1 t) + E_2 \exp(i\omega_2 t). \quad (4)$$

Подставляя (3), (4) в (2), разделяя реальную и мнимую части, приравнивая члены с одинаковыми частотами, имеем для частот генерации ω_1 и ω_2 уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p - \omega_1}{2\pi\omega_1} &= \sum_k \langle z_{1k}(\omega_1) \rangle, \\ \frac{\omega_p - \omega_2}{2\pi\omega_2} &= \sum_k \langle z_{1k}(\omega_2) \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

В частном случае двух достаточно удаленных компонент одного порядка интенсивности частота биений

$$F = \Delta - K_1 \Delta \frac{Q_p}{Q_\lambda} - K_2 \Delta \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \left[1 + \frac{(I_2 - I_1)^2}{2I_1 I_2} \right], \quad (6)$$

где Δ — расстояние между линиями, Δ_λ — ширина компоненты на уровне половинной интенсивности, I_1, I_2 — интенсивности компонент, K_1, K_2 зависят от формы компонент (вида распределения молекул по скоростям) и приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вид распределения по скоростям молекул в пучке	K_1	K_2
Монокинетический пучок	1,07	0,38
$\tau_0^{-1} \exp(-\tau \tau_0^{-1})$	1	0,5
Максвелловское	0,86	0,39

Грубая оценка роли слагаемых в правой части (5) (при $\Delta_\lambda = 9 \cdot 10^3$ гц, $Q_p Q_\lambda^{-1} = 2,3 \cdot 10^{-3}$) показывает, что в случае генерации на квадрупольном спутнике и одной из центральных компонент основную роль в несовпадении частоты биений с частотным интервалом между компонентами ($\Delta = 6 \cdot 10^5$ и $1,5 \cdot 10^6$ гц) играет обычное затягивание частоты генерации резонатором. Для влияния же на частоту биений между компонентами центральной линии основным является последний член, описывающий влияние диэлектрической постоянной соседних компонент. Пренебрегая влиянием резонатора, из (4) имеем в первом приближении условие на частоты генерации:

$$\sum_k \langle z_{1k}(\omega_1) \rangle = 0, \quad (7)$$

$$\sum_k \langle z_{1k}(\omega_2) \rangle = 0.$$

Вид $z_{1k}(\omega)$ для трех наиболее интенсивных компонент центральной линии (в отсутствие насыщения) показан пунктиром на рис. 3. Таким образом, частота генерации находится в первом приближении как частота, на которой алгебраическая сумма действительных частей диэлектрических восприимчивостей различных компонент спектральной линии равняется нулю. Такое рассмотрение позволяет легко качественно представить (и численно решить) зависимость частоты биений от числа, положения, ширины и интенсивности компонент.

Рассмотрим качественное влияние насыщения на частоту биений. При насыщении кривая $x_1(\omega)$ становится более широкой и пологой, причем высота максимумов уменьшается в большей степени, нежели крылья. Поэтому качественно видно, что при насыщении влияние соседних линий будет увеличиваться. В нашем случае к этому эффекту добавляется еще неравномерное насыщение компонент с $F_1 = 1$ и 2. Переходы с $F_1 = 2$ имеют больший средний матричный элемент дипольного момента, нежели переходы с $F_1 = 1$. В соответствии с этим из рис. 3 видно, что с увеличением насыщения частота биений (и расстояние между максимумами центральной линии) должна увеличиваться из-за возрастания роли более удаленных от центра линии компонент с $F_1 = 1$ (в основном $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}$). На рис. 2 б приведена экспериментально наблюдавшаяся частично насыщенная линия, вид которой подтверждает вышеизложенные соображения (и свидетельствует о правильной идентификации компонент). В нашем эксперименте влияние насыщения устранилось экстраполяцией частоты биений к нулевым амплитудам.

Для решения системы (4) необходимо еще знание формы и ширины спектральных компонент. Нахождение этих параметров осуществлялось построением профиля суммарной линии с помощью счетной машины для моделей формы линий, соответствующих указанным в табл. 2 распределениям по скорости и ширине компоненты от 6 до 10 кгц. Наилучшее совпадение получилось при форме линии $x^{-2} \sin^2 x$ (соответствующей монокинетическому пучку) и ширине компоненты 9 кгц на уровне половинной интенсивности. При этом в $x^{-2} \sin^2 x$ учитывался только центральный максимум (побочные максимумы «замазываются» при некотором разбросе молекул по скоростям). Полученная форма линии изображена на рис. 3. Построение профиля суммарной линии показало, кроме того, что в то время, как форма линии на крыльях существенно зависит от выбора и ширины компонент (легко отличаются кривые при изменении ширины линии на 0,5—1 кгц), расстояние между центральными максимумами мало чувствительно к модели.

Итак, величина константы B находилась нами при ширине линии 9 кгц и учтете лишь трех наиболее интенсивных компонент линии $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$ и $1\frac{3}{2}$. Определенная таким образом величина константы $B = -14,6$ кгц. Это значение лежит в пределах ошибки, даваемой в [4], но выходит за пределы ошибки значения [5].

Отличие частоты биений от расстояния между компонентами (т. е. величина рассчитанной нами поправки) составляет около 2,5 %. Учитывая также слабую зависимость поправки от выбора формы спектральной линии (см. табл. 2), можно сказать, что ошибка в расстоянии между компонентами в основном определяется ошибкой эксперимента. Отметим также, что расстояние между максимумами суммарной линии определяется в основном константами B и D_2 ; суммарный вклад других

констант в это расстояние не превышает 3%, и ошибками в знании других констант можно также пренебречь.

Аналогичным образом обрабатывались данные, полученные при генерации на квадрупольных спутниках линии. Величина расстояния от центра линии $\Delta f_{\text{корн}}$ приведена в табл. 1. Наши измерения по внутреннему квадрупольному спутнику дали величину квадрупольной константы $eq Q = -4083,7 \text{ кгц}$, а по внешнему квадрупольному спутнику $eq Q = -4094,7 \text{ кгц}$. Эти результаты не позволяют сделать выбор между значениями $eq Q$ в [4, 5]. Для $J = K = 1$ в [4] $eq Q = -4085,4 \pm 0,3 \text{ кгц}$, а в [5] для $eq Q$ приведены два значения $eq Q = -4090 \pm 1,5 \text{ кгц}$ и $eq Q = -4092,8 \pm 1,5 \text{ кгц}$. Следует заметить, что сами значения в [4] и [5] различаются более чем в пределах ошибки, указанной авторами. Причины такого расхождения в настоящее время неясны.

В заключение отметим, что для исследования таким методом при обычной аппаратуре пригоды только достаточно сильные линии, однако результаты, полученные на одной линии, приложимы к расчету других линий рассмотренного вещества. Облегчение условий самовозбуждения в таком радиоспектропрекопе (например, путем использования сверхпроводящего резонатора) значительно расширило бы круг веществ, пригодных для исследования этим способом, позволившим в нашем случае уменьшить ошибку эксперимента в несколько раз.

Авторы благодарят В. А. Скворцова, принимавшего участие в работе на ранних этапах, Б. В. Громова за помощь в эксперименте, Л. А. Синегубко, В. А. Боярского и А. М. Аферова за участие в измерениях, А. Н. Ораевского за ценное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, Диссертация, ФИАН, М., 1956.
2. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
3. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
4. G. R. Gunther-Mohr, R L. White, A L. Shawlow, W. E. Good, D. K. Cales, Phys. Rev., 94, № 5, 1184 (1954); G. R. Gunther-Mohr, C. H. Townes, J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 94, № 5, 1191 (1954).
5. J. P. Gordon, Phys. Rev., 99, № 4, 1253 (1955).
6. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1186 (1968).
7. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 142 (1967).
8. В. А. Логачев, В. М. Морозов, В. А. Савва, Г. М. Страховский, Радиотехника и электроника, 13, № 11, 2011 (1968).
9. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 ноября 1968 г.,
после доработки
23 июня 1969 г.

INVESTIGATION OF HYPERFINE STRUCTURE OF THE TRANSITION $J=K=1$ OF AMMONIA $N^{14}H_3$ BY SIMULTANEOUS GENERATING A NUMBER OF COMPONENTS OF THE SPECTRAL LINE

A. F. Krupnov, O. B. Shchuko

The hyperfine structure of the transition $J = K = 1$ of ammonia $H^{14}N_3$ is investigated by the method of measuring the frequencies of beats between simultaneously generating components of the line in a beam maser. The peculiarities of the method are considered. The value of the magnetic constant $B = -14.6 \text{ kc/sec}$ is obtained.

УДК 621.373.7

О СИНХРОНИЗАЦИИ МОД В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ СВЕТА

B. M. Фортус, Г. И. Фрейдман

С учетом групповых расстроек найдены условия синхронизации мод в параметрических генераторах света при накачке последовательностью пикосекундных импульсов.

Интенсивное развитие исследований по синхронизации и самосинхронизации мод в ОКГ позволяет ставить вопрос о синхронизации мод параметрических генераторов света (ПГС) и получении последовательности пикосекундных импульсов света с перестраиваемой частотой. Наиболее перспективным способом для этого является, по-видимому, применение для накачки ПГС последовательности пикосекундных импульсов ОКГ*. Как будет показано ниже, при выяснении условий синхронизации мод ПГС принципиальным является учет групповых расстроек волн**.

Одна из особенностей процесса синхронизации мод в ПГС (по сравнению с процессом синхронизации мод в ОКГ [3, 4]) связана с необходимостью синхронизировать группы мод двух типов волн (за исключением вырожденного случая) с разными групповыми скоростями $v_{1,2}$ в нелинейной среде длины d и разными в общем случае временами пробега волн через резонатор ($T_{1,2} + v_{1,2}^{-1}d$). Синхронизация таких групп мод оказывается возможной в некотором интервале значений пиковой плотности потока мощности накачки S_0 , длительности ее импульсов τ и периода их повторения T за счет специфического для параметрического взаимодействия механизма подстройки эффективного времени пробега сигналов через резонатор***.

Рассмотрим вначале случай, когда в нелинейном кристалле групповые расстройки $\tau_{1,2,3} = \Delta s_{1,2,3} d$ ($\Delta s_{i,k} = v_i^{-1} - v_k^{-1}$) имеют разные знаки. При этом процессы в бегущей области взаимодействия аналогичны процессам в параметрических генераторах обратной волны [6]: вблизи краев импульса накачки происходит передача энергии в ту волну, которая уносит ее внутрь движущейся области взаимодействия, т. е. от краев этой области происходит отражение. Поэтому, если длительность импульса накачки τ превосходит некоторое критическое значение $\tau_{\#}^{(1)}$ (зависящее от пикового значения коэффициента взаимо-

* Системы с очень большим коэффициентом усиления за один проход могут излучать короткие импульсы без выполнения условий синхронизации. Однако излучение в этих импульсах будет некогерентно.

** В работе [1] групповые расстройки не учитывались. На возможность синхронизации мод в ПГС при конечной величине расстроек указывалось в работе одного из авторов. [2]. Однако примененный в этой работе спектральный подход при накачке синхронизированными модами не позволяет выяснить природу механизма синхронизации и установить границу области значений параметров, где она происходит.

*** В вырожденном режиме ПГС синхронизируется одна группа мод. Аналогичная ситуация имеет место в параметрическом генераторе видеоимпульсов [5].

действия волн $\gamma_0 = \chi \sqrt{S_0}$, χ — параметр, характеризующий нелинейность кристалла), излучение энергии из движущейся области взаимодействия для ($n+1$) типов конфигураций полей («плененных» или бегущих мод) становится меньше энергии, получаемой ими от накачки [7]. Если при этом групповые расстройки $\Delta T_{1,2} = (T_{1,2} + v_3^{-1} d - T)$ в линейной среде пренебрежимо малы ($|\Delta T_{1,2}| \ll |\tau_{1,2;3}|$), то ясно, что при достаточно больших коэффициентах передачи $R_{1,2}$ в цепи обратной связи амплитуда импульсов при повторных пробегах будет непрерывно увеличиваться—возбудится n -я группа синхронизированных мод (n -я мода ПГС). Опуская выкладки, приведем выражения для $\tau_n^{(1)}$ и инкрементов этих мод $p_n^{(1)}$, которые при $R_1 = R_2 = R$ и $\tau \ll T$ легко получить из приведенного в [7] дисперсионного уравнения «плененных» импульсами накачки полей*:

$$p_n^{(1)} T = -\alpha d - \ln R^{-1} + \gamma_0 d \frac{2 \sqrt{\tau_{1,3} \tau_{2,3}}}{|\tau_{1,2}|} \sqrt{1 - \frac{(\tau_n^{(1)})^2}{\tau^2}},$$

$$\tau_n^{(1)} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2} + n \right) \sqrt{|\tau_{1,3} \tau_{2,3}|}}{\gamma_0 d}. \quad (1)$$

Возрастание групповых расстроек $\Delta T_{1,2}$ сначала не увеличивает минимального значения длительности импульса накачки $\tau = \tau_0^{(1)}$, при котором возможна синхронизация мод ПГС. Действительно, при $\tau_0^{(1)} < \tau \leq \tau_1^{(1)}$ в кристалле усиливается только нулевая бегущая мода. Вследствие этого, при $\gamma_0 d > 1$ форма импульсов на выходе нелинейного кристалла будет мало отличаться от формы импульсов этой моды независимо от того, с каким сдвигом относительно импульсов накачки они через цепь обратной связи падают на вход кристалла. Отсюда ясно, что инкремент нулевой моды генератора будет определяться выражением (1), но с заменой R и d на некоторые эффективные значения коэффициента обратной связи \tilde{R} и длины взаимодействия \tilde{d} . В частности, $\tilde{R} \approx (R_1/2)(1 - |\Delta T_1|/\tau)$, $\tilde{d} = d$ при $R_2 = 0$ и $(\Delta T_1 \tau_{1,3}) > 0$, поскольку в этом случае усиливается только поле первой волны, попавшее на входе кристалла в импульс накачки. При $\Delta T_1 \tau_{1,3} < 0$ «пленение» поля генерируемой волны происходит внутри кристалла после его «столкновения» с импульсом накачки. Поэтому, например, $\tilde{R} = R_1 \gamma_0 \tau / 2 \Delta s_{1,3}$; $\tilde{d} \approx d(1 - |\Delta T_1| \tau_{1,3})$ при $\tau \ll |\tau_{1,3}| \approx |\tau_{2,3}|$; $R_2 = 0$.

Синхронизация мод ПГС может происходить и в случае, когда «пленения» волн импульсами накачки в нелинейном кристалле не происходит ($\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3} > 0$) или когда оно несущественно ($|\tau_{1,2;3}| \ll |\Delta T_{1,2}|$). При этом подстройка эффективного времени пробега импульсов через резонатор к величине периода T возможна, очевидно, при разных знаках суммарных групповых расстроек $\delta T_{1,2} = (T_{1,2} + v_{1,2}^{-1} d - T)$. Не останавливаясь на этом случае подробно, заметим лишь, что в данном случае длина пути взаимодействия может быть

* Ниже, если не оговорено противное, форма импульсов накачки принята прямоугольной. Результаты для импульсов, близких к гауссовым, отличаются в основном тем, что длительность импульсов n -й моды генератора равна примерно $\sqrt{\tau \tau_n}$, а не τ . Влияние фазовой модуляции может быть более существенным. Ограничимся, однако, простейшим случаем импульсов накачки с постоянной фазой. Коэффициенты затухания волн приняты одинаковыми $a_1 = a_2 = a$, а для накачки $a_3 = 0$.

меньше длины кристалла d даже при очень малых $|\delta T_{1,2}|$. Например, при близкой к гауссовой форме импульсов накачки и $|\tau_{1;3}| > |\tau_{1,2}|$, $|\delta T_{1,2}|$ инкремент синхронизированных мод ПГС при $R_1 = R_2 = R$ и $\gamma_0 d < 1$ определяется выражением

$$\begin{aligned} p_n^{(2)} T = -\alpha d - \ln R^{-1} + \gamma_0 \tilde{d} \sqrt{\frac{2|\delta T_1 \delta T_2|}{|\delta T_1 - \delta T_2|}} \sqrt{1 - \frac{\frac{\tau_n^{(1)}}{\tilde{\tau}}}{\frac{\tau}{\tilde{\tau}}}}, \\ \tau_n^{(2)} = \frac{|\delta T_1 \delta T_2|^{1/2} \pi [1/2 + n]}{(\gamma_0 \tilde{d})^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\tilde{d} = \tilde{d}(\tau / |\tau_{1,3}|) = \int_{-d/2}^{d/2} \exp[-(\Delta s_{1,3} y / \tau)^2] dy$ — эффективная длина

взаимодействия, а $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau / |\tau_{1,3}|)$ — эффективная длительность импульсов накачки. Естественно, что $\tilde{d} = d$, $\tilde{\tau} = \tau$ при $\tau \gg |\tau_{1,3}|$, в то время как для коротких импульсов накачки ($\tau \ll |\tau_{1,3}|$) $\tilde{d} \approx \tilde{d}_0 = \tau / |\Delta s_{1,3}|$, $\tilde{\tau} \approx |\tau_{1,3}|$.

Для некоторых характерных случаев приведем оценки значений S_0 , достаточных для синхронизации мод ПГС. Необходимое условие «пленения» волн ($\Delta s_{1,3} \Delta s_{2,3} < 0$) выполняется, например, при взаимодействии типа $1^\circ + 2^\circ = 3^\circ$ в кристаллах КДР ($\tau_{2,3} \approx -\tau_{1,3} \approx (6 \cdot 10^{-11} d)$ сек при $\lambda_3 = 0,53 \mu$, $\lambda_{1,2} \approx 1 \mu$) и прустита ($\tau_{1,3} \approx -6 \cdot 10^{-12} d$ сек; $\tau_{2,3} \approx (3 \cdot 10^{-12} d)$ сек при $\lambda_3 = 1,06 \mu$ и $\lambda_{1,2} \approx 2 \mu$). Из (1) получим, что для КДР ($\gamma_0 \approx 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{S_0 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}}$) $\tau_0^{(1)} \approx 10^{-11} / \sqrt{S_0 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}}$, т. е. при $\tau = 10^{-12}$ сек синхронизация мод ПГС возможна, если $S_0 > 100 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Несмотря на гораздо большие значения $|\tau_{1,3}|$, аналогичная ситуация будет и для генератора с пруститом вследствие большой нелинейности этого кристалла.

При взаимодействии типа $1^\circ + 2^\circ = 3^\circ$ в ниобате лития «пленения» волн в кристалле не происходит. При этом $|\tau_{1,2}| < |\tau_{1,3}|$ даже для рассмотренного ниже существенно невырожденного по частоте случая ($\tau_{1,3} \approx \tau_{1,2}$; $\gamma_1 \approx (5 \cdot 10^{-12} d)$ сек; $\tau_{1,2} \approx 2 \cdot 10^{-12} d$ сек при $\lambda_1 = 0,53 \mu$, $\lambda_1 = 1,5 \mu$, $\lambda_2 \approx 0,81 \mu$). Из (2) следует, что толщину кристалла d не следует брать больше \tilde{d}_0 , т. е. при $\tau = 10^{-12}$ сек — больше чем $\tilde{d}_0 = 2 \text{ мм}$. При этом (например, изменение периода T) можно сделать $|\delta T_1| \approx |\delta T_2| = 1/2 |\tau_{1,2}| = 2 \cdot 10^{-13}$ сек. Тогда $\tau_0^{(1)} < \tau$ уже при $(\gamma_0 d)^2 > 0,3$. Поскольку для LiNbO_3 $\gamma_0 \approx 5 \cdot 10^{-2} \sqrt{60 S_0}$, синхронизация мод произойдет при $S_0 > 50 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$.

Пиковые значения плотности потока мощности порядка $10^2 - 10^3 \text{ мвт} \cdot \text{см}^{-2}$ сравнительно легко достижимы в пикосекундных импульсах. Таким образом, хотя до настоящего времени эффект синхронизации мод в ПГС не был обнаружен, проведенные оценки показывают возможность его реализации.

Авторы благодарны А. В. Гапонову и В. И. Беспалову за полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. E. Harris, IEEE, QE-2, 701 (1956).
2. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1345 (1968).
3. В. И. Беспалов, Э. Я Дауме, ЖЭТФ, 55, 1321 (1968).
4. В. С. Летохов, ЖЭТФ, 54, 1392 (1968).

5. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов,
Письма в ЖЭТФ (в печати).
6. D. L. Voggoff, J. Appl. Phys., 36, 1760 (1965)
7. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 2, 293 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 апреля 1969 г.

MODE LOCKING IN PARAMETRICAL LIGHT GENERATORS

V. M. Fortus, G. I. Freidman

The conditions of mode locking in parametrical light generators at pumping by a succession of piko-second pulses are found with taking into account the group detunings.

УДК 535.36

О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ САМОФОКУСИРОВКИ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЯНИИ

B. C. Бутылкин, A. E. Каплан, Ю. Г. Хронопуло

Вычислена зависимость восприимчивости вещества от интенсивности накачки и стоксовой компоненты при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР). Показана возможность и рассмотрены особенности самофокусировки света из-за ВКР. Найден порог такой самофокусировки; приведены оценки для сжатых газов и жидкостей. Обсуждаются возможные эксперименты по обнаружению самофокусировки, обусловленной ВКР.

Известно, что на процесс вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) существенное влияние оказывает самофокусировка света [1, 2]. Целью настоящей работы является обсуждение в некотором смысле обратного эффекта, а именно, самовоздействия, вызываемого ВКР.

Известно, что показатель преломления среды зависит от населения возбужденных уровней (см., например, [3]). В работе Аскарьяна [4] было указано, что этот эффект может влиять на процесс самовоздействия света; аналогичное предположение об изменении ϵ из-за возбуждения молекул при ВКР высказано в [2]. Однако в известных нам работах не оценивалась возможность реализации самофокусировки, обусловленной ВКР, и не обсуждались ее особенности. Ниже будет показано, что «ВКР-самофокусировка» существенно отличается от обычной самофокусировки, приведены оценки величин, характеризующих такое самовоздействие, и предложены эксперименты, позволяющие его обнаружить.

Рассмотрим зависимость восприимчивости вещества $\chi = (\epsilon - 1)/4\pi$ от интенсивности накачки и стоксовой компоненты при ВКР. Пренебрегая вкладом в χ переходов между колебательными подуровнями основного состояния, а также населенностями возбужденных электронных состояний, из формулы (14.12) в [3] имеем

$$\chi(\omega) = \frac{2}{\hbar} N \sum_q \sum_m \frac{|p_{mq}|^2 \omega_{mq}}{\omega_{mq}^2 - \omega^2} = N \sum_q \sigma_q \chi_q, \quad (1)$$

где N — количество молекул в единице объема, индекс q относится к колебательным подуровням основного электронного состояния, индекс m — ко всем остальным уровням, ω_{mq} — частота перехода между m и q состояниями, p_{mq} — матричный элемент дипольного момента этого перехода, χ_q — восприимчивость, отнесенная к одной частице, находящейся в состоянии q (в частности, χ_1 — равновесная, т. е. в отсутствие полей, восприимчивость молекулы).

Изменение населенностей σ_q в процессе ВКР может быть вычислено с помощью аппарата матрицы плотности. При этом в случае малой

ангармоничности* необходимо учитывать заселение нескольких уровней. Аналогично тому, как это было сделано в [6] для двухуровневой системы, может быть получено стационарное распределение** насыщенностей при ВКР (для $\hbar\omega_{q,q-1} \gg kT$):

$$\sigma_{q < Q} = \prod_{p=q+1}^Q \left(1 + \frac{w_{p,p-1}}{s_{p,p-1} E_n^2 E_c^2} \right) \sigma_Q,$$

$$\sigma_Q = \left[1 + \sum_{q=1}^{Q-1} \prod_{p=q+1}^Q \left(1 + \frac{w_{p,p-1}}{s_{p,p-1} E_n^2 E_c^2} \right) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где Q — номер верхнего из уровней, для которого выполняется условие $|w_{q,q-1} - \omega_n + \omega_c| \ll \Delta_{q,q-1}$, $w_{p,p-1}$ — вероятности релаксационных переходов, E_n и E_c — действительные амплитуды полей накачки и стоксовой компоненты, $s_{p,p-1} = |r_{p,p-1}|^2 T_{p,p-1} / 8\hbar^4 (1 + T_{p,p-1}^2 \Delta_{p,p-1}^2)$, остальные обозначения те же, что и в [6]. Формулы (1) и (2) позволяют вычислить $\chi(E_n^2 E_c^2)$.

Очевидно, что заселение q -го уровня может привести к значительному изменению ϵ , если выполняется условие $\omega_{m\bar{q}} - \omega_n \leq \omega_{q,q-1} (\bar{q} \leq Q)$. Однако $\Delta\epsilon$ может быть заметным, даже если насыщение населенностей еще невелико. Указанное обстоятельство соответствует условию

$$s_{q,q-1} E_n^2 E_c^2 / w_{q,q-1} \ll 1. \quad (3)$$

При этом заметно заселяется только второй уровень и зависимость $\chi(E_n^2 E_c^2)$ имеет вид

$$\chi = N\chi_1 + N(\chi_2 - \chi_1) \frac{s_{2,1}}{\omega_{2,1}} E_n^2 E_c^2 = N\chi_1 \left(1 + A \frac{s_{2,1}}{\omega_{2,1}} E_n^2 E_c^2 \right). \quad (4)$$

Обычно $\omega_{2,1}/\omega_0 \ll 1 - \omega_n^2/\omega_0^2$ и $A \approx (\omega_{2,1}/\omega_0) [(\omega_0^2 + \omega_n^2)/(\omega_0^2 - \omega_n^2)]$, где ω_0 — частота перехода между основным и первым возбужденным электронным состояниями.

Для оценок примем $T_{2,1} = 10^{-11}$ сек, $w_{2,1} = 10^{10}$ сек⁻¹, $\omega_0 = 10^{16}$ сек⁻¹, $|r| = 10^{-51}$ CGSE, $\omega_{2,1}/\omega_0 = 2,5 \cdot 10^{-2}$; $\epsilon = 2,25$ (цифры, характерные для жидкостей типа бензола) и $\omega_n = 2,7 \cdot 10^{15}$ сек⁻¹ — частота рубинового лазера. Тогда для $E_n^2 \approx E_c^2 \approx 2,4 \cdot 10^7$ CGSE*** имеем $s_{2,1} E_n^2 E_c^2 / w_{2,1} \approx 7 \cdot 10^{-2}$ и $\Delta\epsilon \approx 2,2 \cdot 10^{-4}$. Изменение ϵ из-за эффекта Керра для бензола при таких J оказывается много меньше; оба эффекта сравниваются при $J \approx 45$ Мвт·см⁻², когда $\Delta\epsilon \approx 3 \cdot 10^{-7}$. В газах насыщение населенностей наступает в менее мощных световых потоках; так, для H_2 под давлением 30 атм ($T_{2,1} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ сек, $w_{2,1} \approx 3 \cdot 10^4$ сек⁻¹, $|r| \approx 0,5 \cdot 10^{-52}$ CGSE, $\omega_{2,1}/\omega_0 \approx 0,05$) условие (3) нарушается, если $J_n \approx J_c \approx 30$ Мвт·см⁻². Но и в газах во многих случаях можно пользоваться разложением (4).

Рассмотрим теперь процесс ВКР-самофокусировки.

Преобразование энергии накачки в стоксову компоненту происходит на небольшой длине $L \sim (\alpha E_n^2 v_k)^{-1}$ ($\alpha = 64\pi\hbar\omega_n Ns/c$ — коэффициент

* Например, для бензола расстройка из-за ангармоничности колебаний $\delta_{2,2} = \omega_{2,2} - \omega_{2,1} \approx 2$ см⁻¹ [5] меньше ширины Q — ветви $\Delta_{2,1} \approx 3$ см⁻¹.

** Это распределение устанавливается за время порядка $(\omega_{q,q-1} + s_{q,q-1}) \times (E_n^2 E_c^2)^{-1}$, где q и $q-1$ — пара уровней с самой медленной релаксацией их разности населенностей.

*** Это соответствует потоку мощности в тонких световых каналах $J = 2$ гвт·см⁻² [1].

преобразования при ВКР); например, для бензола ($\alpha \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ CGSE) при $J \approx 30 \text{ Mвт} \cdot \text{см}^{-2}$ имеем $L \approx 0,1 \text{ см}$. Таким образом, слой, в котором χ заметно отлична от равновесного значения, можно рассматривать как фазовый корректор или тонкую линзу, образованную волнами накачки и стоксовой компоненты с еще неискаженной геометрией. Это позволяет воспользоваться для расчета линзы величинами полей в плоской волне [7]. Геометрооптический расчет такой линзы* показывает, что безаберрационной ВКР-самофокусировке соответствует, как при обычной самофокусировке, квадратичное распределение входной интенсивности накачки по сечению пучка: $E_{\text{вх}}^2 = E_0^2(1 - \rho^2/a^2)$ (E_0^2 — интенсивность в центре, a — радиус пучка). При этом фокусное расстояние оказывается равным

$$F = k_n a^2 \hbar w_{21} / 2A\chi_1 E_0^2 \quad (k_n = 2\pi/\lambda_n). \quad (5)$$

Например, для бензола при $J = 1 \text{ гвт} \cdot \text{см}^{-2}$ и $a = 10^{-2} \text{ см}$ имеем $F = 16 \text{ см}$; для H_2 при 30 атм такое же фокусное расстояние будет при $J = 20 \text{ гвт} \cdot \text{см}^{-2}$ и $a = 0,3 \text{ см}$. Приближение «тонкой линзы» справедливо пока $F > L$, откуда следует условие на входной радиус пучка $a > a_0 = (A\chi_1/\alpha k_n \hbar w_{21})^{1/2}$. Для бензола $a_0 \approx 10^{-4} \text{ см}$, для сжатого водорода $a_0 \approx 0,1 \text{ см}$.

Пороговую интенсивность накачки, требуемую для ВКР-самофокусировки, получаем, приравнивая F дифракционной длине пучка $R_d = k_n a^2$:

$$E_{\text{пор}}^2 = \mathcal{E}^2 = \hbar w_{21} / 2A\chi_1. \quad (6)$$

Для бензола соответствующая плотность потока мощности равна $J_{\text{пор}} = 1 \text{ гвт} \cdot \text{см}^{-2}$. Выражение (6) получено в предположении, что порог самого ВКР мал: $E_{\text{ВКР}}^2 \ll \mathcal{E}^2$. Учет конечности порога ВКР ($E_{\text{ВКР}}^2$) приводит к следующему значению порога ВКР-самофокусировки:

$$E_{\text{пор}}^2 = \xi (2E_{\text{ВКР}}^2 + \mathcal{E}^2), \quad (7)$$

где $\xi = 1$ при $E_{\text{ВКР}}^2 \ll \mathcal{E}^2$ и $\xi = 1/2$ при $E_{\text{ВКР}}^2 \gg \mathcal{E}^2$ (в последнем случае, если $E_{\text{ВКР}}^2 < E_0^2 < 2E_{\text{ВКР}}^2$, величина фокусного расстояния (5) уменьшается вдвое). Для H_2 при 30 атм $J_{\text{ВКР}} = 12 \text{ Мвт} \cdot \text{см}^{-2}$, \mathcal{E} соответствует $75 \text{ квт} \cdot \text{см}^{-2}$, т. е. ВКР-самофокусировка должна начинаться почти сразу после превышения порога ВКР.

Подчеркнем некоторые характерные особенности рассматриваемого эффекта. Во-первых, как видно из (6) и (7), для ВКР-самофокусировки пороговым является не полный поток мощности в пучке, как при обычной самофокусировке, а плотность потока. Во-вторых, зависимость порога ВКР-самофокусировки от нелинейности и плотности вещества входит только через величину $E_{\text{ВКР}}^2$. В-третьих, ВКР-самофокусировка представляет собой, по существу, фокусировку тонким нелинейным слоем; при этом не должно быть «коллапса» пучка в районе фокуса.

Если входная интенсивность накачки во много раз превышает порог ВКР, то можно ожидать появления ряда линз, связанных с последовательным преобразованием излучения в стоксовые компоненты выс-

* Расчет основан на вычислении нелинейного приращения оптического пути

$\Delta l(\rho) = 4\pi \int (\chi - N\chi_1) dz = 4\pi N\chi_1 A \frac{s_{21}}{w_{21}} \int_0^\infty E_{\text{в}}^2 E_{\text{с}}^2(\rho, z) dz$ (z — координата вдоль оси пучка, ρ — поперек пучка) в каждой точке сечения ρ .

ших порядков; каждая из этих линз отстоит от предыдущей на расстояние, необходимое для нарастания следующей стоксовой компоненты из спонтанного излучения. Такая система линз представляла бы собой квазиоптический волновод, способный канализировать узкие пучки.

Другим фактором, формирующим канал, может являться «трубчатая» структура показателя преломления, образующаяся благодаря «выеданию» центра пучка накачки из-за ВКР и дифракционной диффузии стоксовой компоненты из центра и накачки с периферии. Обычно при диаметре пучка 1 мм порог Керр-самофокусировки ниже порога ВКР-самофокусировки. Поэтому должен начаться первый процесс, а затем до достижении $E'_{\text{пор}}$ образуются линзы и трубчатая структура. Последняя может препятствовать «схлопыванию» пучка, к которому должно приводить действие обычной самофокусировки.

В заключение укажем некоторые способы экспериментального обнаружения ВКР-самофокусировки.

1) Изучение зависимости характеристик самофокусировки от порога ВКР, который можно менять внесением определенного количества примеси, поглощающей стоксову компоненту.

2) Изучение зависимости самофокусировки от частоты падающего излучения. Эффект должен резко возрастать при приближении ω_n к $\omega_{m\bar{d}}$ (см. формулу (1)).

3) Изучение кинетики самофокусировки в веществах с малой постоянной Керра в тонких пучках (так, чтобы порог Керр-самофокусировки был выше порога ВКР-самофокусировки).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
2. R. Y. Chiao, M. A. Johnson, S. Krinsky, H. A. Smith, C. H. Townes, E. Garmire, IEEE J. Quantum Electronics, QE-2, 467 (1966).
3. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
4. Г. Л. Аскарьян, Письма в ЖЭТФ, 4, 400 (1966).
5. З. Мулдахметов, Тр. ФИАН, 39, 7 (1967).
6. Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 3, 674 (1964).
7. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмаков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 6, 1164 (1966).

Институт радиотехники и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
14 марта 1969 г.

A POSSIBILITY OF OBSERVING SELF-FOCUSING DUE TO THE STIMULATED COMBINATIONAL SCATTERING

V. S. Butylkin, A. E. Kaplan, Yu. G. Khranopulo

The dependence of the matter susceptibility on the intensity of pumping and Stokes component at the stimulated combinational scattering is calculated. A possibility is shown and the properties of light self-focusing due to the stimulated combinational scattering are considered. The threshold of such self-focusing is found. The estimates for compressed gases and liquids are given. The possible experiments on the discovery of self-focusing caused by the stimulated combinational scattering are discussed.

УДК 621.372.35

ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА

Л. А. Ривлин

Методами теории колебаний произведен анализ устойчивости процесса генерации полупроводникового квантового генератора, составленного из участков с различным положением квазиуровней Ферми. Дано теоретическое объяснение явлений бистабильности, гистерезиса и автомодуляции и их зависимости от различных факторов, в частности, от потерь в резонаторе. Расчетные оценки находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментом.

1. Такие экспериментальные факты, относящиеся к динамике излучения инжекционных полупроводниковых квантовых генераторов (ПКГ), как бистабильный [1–3] и автомодуляционный [4, 5] режимы генерирования, испускание ультракоротких моноимпульсов света [6], синхронизация последовательностей импульсов [7, 8], жесткий режим конкуренции мод [9] и др., позволяют усмотреть [7] в этих явлениях действие известного нелинейного механизма двухкомпонентной среды с отрицательным поглощением [10], в которой роль излучающей и поглощающей компонент играют участки полупроводника с различными положениями квазиуровней Ферми [11, 12]. Сущность явлений сводится к движению квазиуровней Ферми под совместным воздействием инжеции носителей, спонтанной рекомбинации и вынужденного фотонного поля в резонаторе, интенсивность которого, в свою очередь, определяется процессами вынужденного испускания и потерями. Поведение такой самосогласованной системы (так же, как и динамика двухкомпонентной среды на основе рубина или неодимового стекла [13]) поддается анализу методами теории колебаний [11]. Эти же методы применены и в настоящей работе, чтобы вскрыть динамические неустойчивости, которые ответственны за отмеченные выше экспериментальные факты.

2. Для анализа удобно принять модель излучательных переходов в полупроводнике, хорошо оправдавшую себя при сопоставлении с экспериментом (по крайней мере, для арсенида галлия [14]), а именно переходы без выполнения правил отбора по волновым векторам между прилегающим к валентной зоне узким примесным уровнем с плотностью состояний, описываемой дельта-функцией $\rho_{\text{в}}(0)$, и «хвостом» примесного происхождения у дна зоны проводимости с экспоненциальной зависимостью плотности состояний $\rho_{\text{n}} = \rho_0 \exp(E/E_0)$ от энергии E ($E_0 = \text{const}$ — параметр легирования).

Для этой модели нетрудно получить выражения для коэффициента отрицательного поглощения света

$$g(x) = Ae^x \operatorname{th} \frac{\mu - x}{2\beta}, \quad (1)$$

скорости спонтанной рекомбинации

$$S = A \frac{(\hbar \omega)^2 E_0}{\pi^2 c^2 \hbar^3} a e^\mu \quad (2)$$

и электронной концентрации

$$n = \rho_0 E_0 a e^\mu, \quad (3)$$

где $x \equiv \hbar \omega / E_0$, $\mu \equiv F/E_0$ и $\beta \equiv kT/E_0$ — соответственно безразмерные энергия кванта, электронный квазиуровень Ферми и температура, а константа равна $A = 2\pi^2 \hbar e^2 \rho_0 \rho_{\text{в}} \langle |M|^2 \rangle / c_0 m^2 (c_0/c) \hbar \omega$ (m и e — масса и заряд электрона, c_0 — скорость света, c_0/c — показатель преломления, $\langle |M|^2 \rangle$ — средний квадрат матричного элемента перехода). Безразмерный множитель a зависит только от температуры $\beta = kT/E_0$ по закону, представленному на рис. 1 сплошной кривой. Применимость модели исчерпывается по мере повышения температуры ($\beta \rightarrow 1$, $a(\beta) \rightarrow \infty$), когда электроны заполняют не только экспоненциальный «хвост», но и дно зоны проводимости.

Для дальнейших выкладок удобно, как в [11], заменить $g(x)$ приближенным выражением

$$g(x) \simeq A e^x \frac{\mu - x}{2\beta}, \quad (4)$$

в котором удержан только линейный член разложения тангенса гиперболического. На рис. 2 представлен точный (1) и приближенный (4) ход зависимости $g(x)$ для $\beta=2/3$ (что соответствует, например, $T=77^\circ\text{K}$ и $E_0 = 10$ мэв), иллюстрирующий удовлетворительное качество аппроксимации.

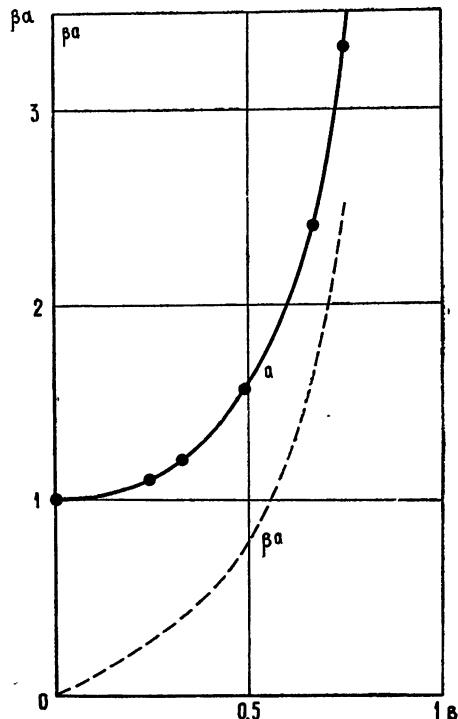


Рис. 1.

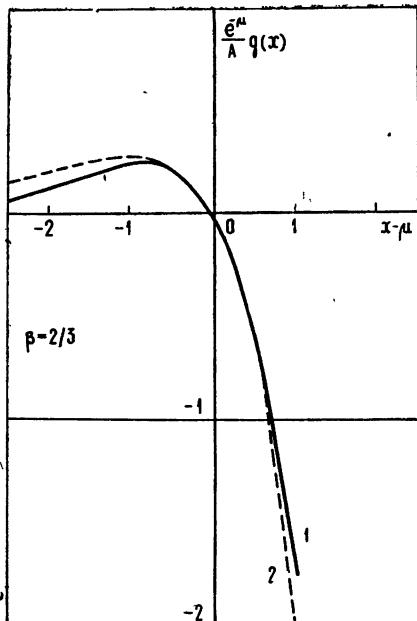


Рис. 2. — точная кривая, - - - приближенный расчет.

Если полупроводниковая среда инвертирована неоднородно*, т. е. содержит участки с различными положениями квазиуровня Ферми μ_i , то в том же приближении суммарный коэффициент отрицательного поглощения $G(x) = \sum \gamma_i g_i(x)$ дается той же формулой (4), где $\mu = \mu \equiv \sum \gamma_i \mu_i$, причем предполагается, что участки, относительная протяженность которых характеризуется коэффициентами γ_i ($\sum \gamma_i = 1$), чередуются достаточно часто, чтобы можно было рассматривать среду как квазинепрерывную и пренебречь неоднородностью распределения фотонов в резонаторе. Наконец, характеристическое время спонтанной рекомбинации $\tau = \pi^2 \hbar^3 c^2 \rho_0 / A(\hbar \omega)^2$ определяется из равенства $S = n/\tau$.

3. Согласно этой модели кинетика автоколебательного процесса в инжекционном полупроводниковом квантовом генераторе с неоднородной инверсией среды в квазимохроматическом одномодовом приближении описывается в безразмерных переменных

$$\Theta \equiv c\alpha t, R \equiv N[\rho_0 E_0 a \Omega \exp(x+1)]^{-1}, i_i \equiv j_i \eta \tau [ed \rho_0 E_0 a \exp(x+1)]^{-1}, z_i \equiv \exp(\mu_i - x - 1)$$

системой уравнений

$$\frac{dR}{d\Theta} = \left\{ A e^x \frac{\mu - x}{2\alpha\beta} - 1 \right\} R; \quad (5)$$

$$\frac{dz_i}{d\Theta} = \Omega \left\{ i_i - z_i - A e^x \frac{\mu_i - x}{2\alpha\beta} R \right\}, \quad (6)$$

где N — объемная концентрация фотонов, $(c\alpha)^{-1}$ — их время жизни в резонаторе, j_i — плотность тока инжекции на i -м участке, η — квантовая эффективность инжекции, d — толщина оптически активного слоя полупроводника, t — текущее время, $\Omega = (c\alpha t)^{-1} \ll 1$.

Эта система имеет стационарные решения двух типов, из которых только второй характеризуется отличными от нуля значениями R :

$$\text{I.} \quad R^0 = 0, \quad z_i = i_i; \quad (7)$$

$$\text{II.} \quad R^0 = \frac{\mu^0 - x}{\mu_i^0 - x} (i_i - z_i), \quad A e^x \frac{\mu^0 - x}{2\alpha\beta} = 1. \quad (8)$$

Если в квазимохроматическом одномодовом приближении принять, что генерируемая частота совпадает с максимумом $G(x)$, то, как и в [11], $x = \mu^0 - 1 = \ln(2\alpha\beta/A)$, и тогда для решений II типа

$$R^0 = (i_i - z_i)(\mu_i^0 - x)^{-1}. \quad (9)$$

4. Содержание стационарных решений удобно раскрыть на примере двухкомпонентной полупроводниковой среды ($i = 1, 2$), когда уравнения (9) принимают вид

$$[i_1 - \exp(\gamma_2 \Delta)](\gamma_2 \Delta + 1)^{-1} = R^0 = [\exp(-\gamma_1 \Delta) - i_2](\gamma_1 \Delta - 1)^{-1}. \quad (10)$$

Здесь $\Delta \equiv \mu_1^0 - \mu_2^0$ — стационарное значение разности квазиуровней Ферми на участках 1 и 2.

Состояние системы может быть описано любыми двумя переменными из четырех (i_1, i_2, Δ, R^0), связанных уравнениями (10). Как будет

* Примером неоднородно инвертированной среды может служить ПКГ с изолированными областями инжекции, но общим оптически активным слоем [1-3].

видно ниже, задание состояния с помощью нормированных токов инжекции i_1 и i_2 существенно неоднозначно. Поэтому в дальнейшем в качестве независимых переменных главным образом используются переменные Δ и R^0 .

При $R^0 \rightarrow 0$ из (10) непосредственно следуют пороговые условия

$$[i_1]_n = \exp(\gamma_2 \Delta_n), \quad [i_2]_n = \exp(-\gamma_1 \Delta_n) \quad (11)$$

или, после исключения $\Delta = \Delta_n$,

$$i_1^n i_2^n = 1. \quad (12)$$

Это пороговое условие, представленное графически на рис. 3, отличается от зависимости $[i_1]_n + [i_2]_n = \text{const}$, которое ожидалось в [2] как следствие пропорциональности коэффициента усиления току инжекции, но вполне удовлетворительно воспроизводит ход известных экспериментальных кривых [2, 3] для пороговых плотностей тока в полупроводниковом лазере с двумя изолированными областями инжекции*.

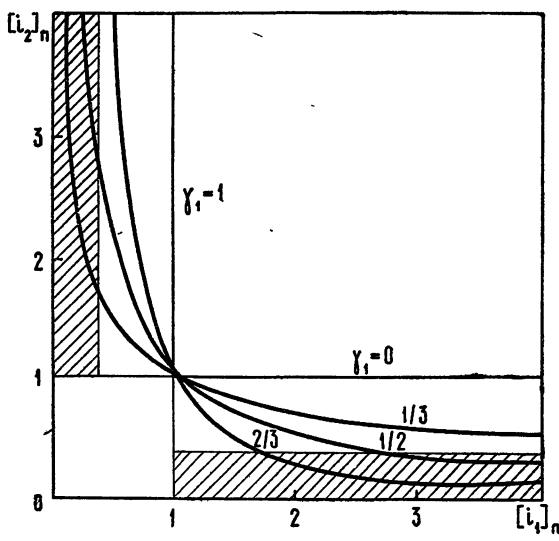


Рис. 3

Перестройка графика рис. 3 в координатах абсолютных значений пороговых плотностей тока вскрывает явную зависимость от температуры β : с понижением температуры кривые ближе прилегают к координатным осям. Мерой этой зависимости может служить абсолютное значение плотности тока $j_1 = |j_{1,2}|_n$, соответствующее точкам кривых, лежащих на биссектрисе координатного угла $[i_1]_n = [i_2]_n = 1$, и равное $j_1 = \text{const} \beta a(\beta)$. Эта зависимость, представленная прерывистой линией на рис. 1, удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [2]. Между прочим, последняя формула, по существу, выражает температурную зависимость пороговой плотности тока

* Некоторое расхождение с экспериментом наблюдается при $[i_1]_n = 0$ или $[i_2]_n = 0$. Этим точкам в эксперименте соответствуют конечные пороговые значения $[i_2]_n$ или $[i_1]_n$, расчетная же зависимость дает бесконечные значения. Причиной расхождения является идеализация, не учитывающая повышения μ_1 и μ_2 даже при $i_1 = 0$ и $i_2 = 0$ (по сравнению с термодинамическим равновесием), за счет несовершенства электрической изоляции между областями, а также из-за оптической накачки спонтанными и сверхизлучательными фотонами соседнего инжектируемого участка.

в генераторе с однородной инжекцией, качественно соглашающуюся с данными спектра [15] в исследованном интервале температур.

5. Исследование стационарных состояний I и II типа с помощью критерия Рауса—Гурвица, примененного к уравнениям (5) и (6), линеаризованным относительно малых девиаций от стационарных значений, приводит к двум неравенствам:

$$R^0 > R_\Delta \equiv \gamma_2 \exp(\gamma_2 \Delta) (\gamma_1 \Delta - 1) - \gamma_1 \exp(-\gamma_1 \Delta) (\gamma_2 \Delta + 1); \quad (13)$$

$$\Omega > \Omega_\Delta \equiv R^0 \frac{R^0 \{1 + R_\Delta [\exp(\gamma_1 \Delta) + \exp(-\gamma_2 \Delta)]\} + R_\Delta}{\{2 + R^0 [\exp(\gamma_1 \Delta) + \exp(-\gamma_2 \Delta)]\} [R^0 + \exp(-\gamma_1 \Delta)] [R^0 + \exp(\gamma_2 \Delta)]}. \quad (14)$$

Стационарное решение устойчиво при одновременном выполнении обоих неравенств и неустойчиво при нарушении любого из них.

Для стационарного решения I типа ($R^0 = 0$) условие неустойчивости совпадает с пороговым условием (12).

Для решений II типа ($R^0 > 0$) условие (13) отсекает на плоскости (R^0, Δ) (рис. 4) область безусловной неустойчивости $R^0 < R_\Delta$. Неравенство же (14) налагает ограничение на отношение Ω времени жизни фотонов в резонаторе $(c \alpha)^{-1}$ к времени спонтанной рекомбинации τ .

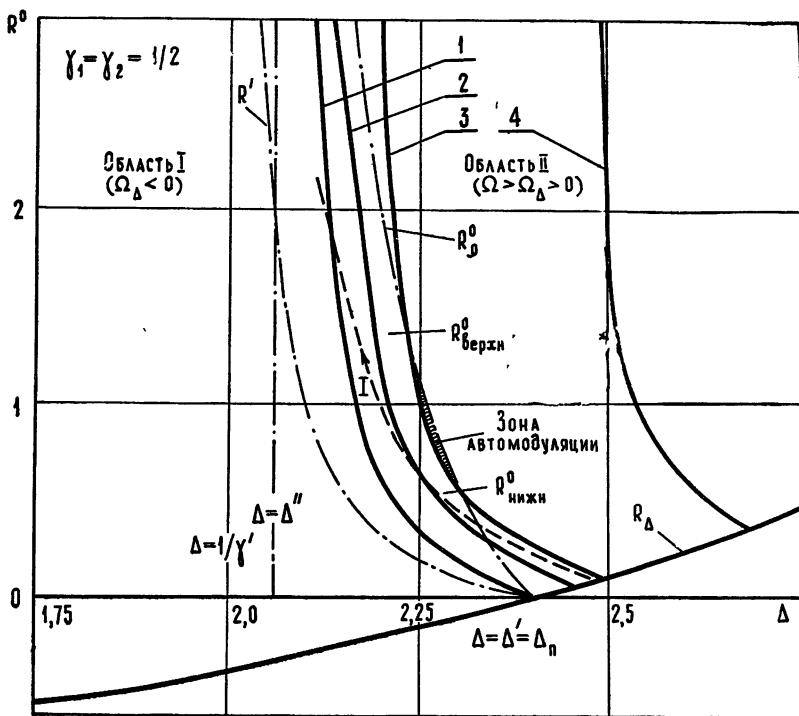


Рис. 4. 1— $\Omega_\Delta = 0,00$; 2— $\Omega_\Delta = 0,005$; 3— $\Omega_\Delta = 0,01$; 4— $\Omega_\Delta = 0,05$.

Если разрешить (14) относительно R^0 , то для каждого данного значения $\Omega = \Omega_\Delta$ можно найти некоторую величину $R^0 = R_2(\gamma_1, \Delta, \Omega)$, которая совместно с условием (13) определяет область устойчивости колебаний ПКГ с амплитудой $R^0(\Delta)$:

$$R_\Delta < R^0 < R_2. \quad (15)$$

Кривые $R_2(\Delta)$ (1, 2, 3, 4 — линии равных значений $\Omega_\Delta = 0; 0,005; 0,010$ и $0,050$ соответственно) для случая $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ даны на рис. 4.

Область, ограниченную неравенством (15), можно назвать областью условной устойчивости (область II на рис. 4), так как последняя имеет место только, если $\Omega > \Omega_\Delta$. Область безусловной устойчивости (область I), реализующейся при любых значениях Ω , лежит за граничной кривой $R_\Omega = R_\Omega^0$, соответствующей $\Omega = 0$:

$$R_\Omega^0 = -R_\Delta \{1 + R_\Delta [\exp(\gamma_1 \Delta) + \exp(-\gamma_2 \Delta)]\}^{-1}. \quad (16)$$

Кривая $R_\Omega^0(\Delta)$ начинается с $R_\Omega^0 = 0$ при $\Delta = \Delta' = \Delta_n$ и неограниченно возрастает ($R_\Omega^0 \rightarrow \infty$) вблизи асимптоты $\Delta = \Delta''$, определяемой из уравнения $R_\Delta = -[\exp(\gamma_1 \Delta'' + \exp(-\gamma_2 \Delta'')]^{-1}$ (рис. 4). Вся область безусловной устойчивости расположена при значениях $R_\Delta < 0$, т. е. удовлетворяет и условию (13).

Таким образом, часть интервала (15) можно заменить неравенством $R^0 < R_\Omega^0$ и назвать его критерием безусловной устойчивости. Заметим, что генератор без поглощающих участков ($\Delta < \gamma_1^{-1}$, $g_1 > 0$, $g_2 > 0$) целиком лежит в области безусловной устойчивости.

6. Теперь для иллюстрации диаграммы (R^0, Δ) (рис. 4) полезно с помощью системы стационарных решений (10) перестроить ее в координатах (i_1, i_2) , а также найти явные зависимости $\Delta(i_1, i_2)$ и $R^0(i_1, i_2)$. Эти зависимости для случая $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ представлены на рис. 5. Порогово-

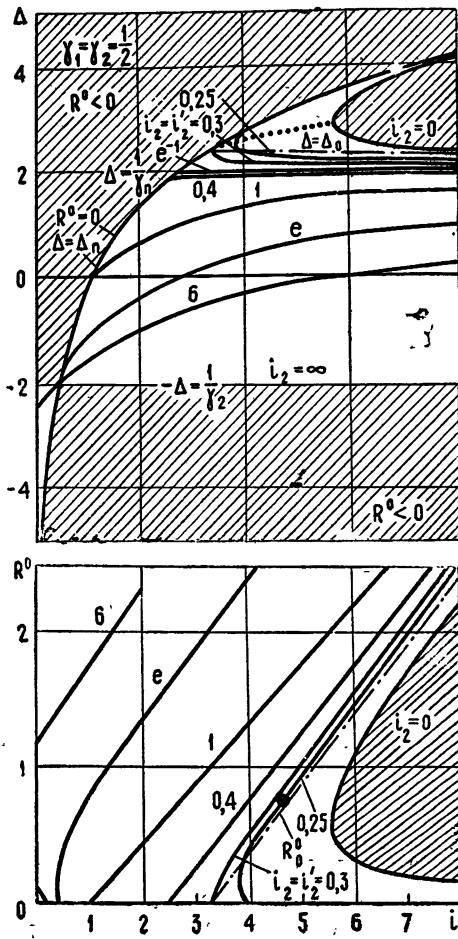


Рис. 5.

вая кривая (11) $\Delta = \Delta_n$ и линии $i_2 = 0$ и $\Delta = -\gamma_2^{-1}$ делят поле (Δ, i_1) на области $R^0 < 0$ и $R^0 > 0$. Последняя в свою очередь разделена на две части, причем $g_1 \geq 0$ и $g_2 \geq 0$ реализуются только там, где $\Delta > \gamma_1^{-1}$ или $\Delta < -\gamma_2^{-1}$.

На плоскости (Δ, i_1) нанесены линии равных значений $i_2 = \text{const}$, начинающиеся на пороговой кривой и асимптотически приближающиеся при $i_1 \rightarrow \infty$ к прямой $\Delta = \gamma_1^{-1}$, $i_2 = e^{-1}$. Линия $i_2 = 0$ служит второй границей (наряду с пороговой кривой) поля реализуемых значений (Δ, i_1) . Линии равных значений $i_2 = \text{const}$, начиная с некоторого $i_2 = i'_2$, обнаруживают в области $R^0 > 0$ двузначную зависимость $\Delta(i_1)$. Минимальное значение $i_1 = i'_1$ на двузначной кривой $\Delta(i_1)$ определяется из условия $\frac{di_1}{d\Delta} = 0$, приводящего к зависимости $i'_1 = \exp(\gamma_2\Delta) + R_\Omega(\gamma_2\Delta + 1)$, изображенной на рис. 5 пунктирной кривой. Двузначные кривые $\Delta(i_1)$ лежат выше некоторой граничной линии $i_2 = i'_2 = \text{const}$, начинающейся на пороговой кривой в точке, где $R_\Omega = 0$, т. е. при $\Delta = \Delta_1' = \Delta_n$, и, следовательно, $i'_2 = \exp(-\gamma_1\Delta')$. В области, где $\Delta < \gamma_1^{-1}$, зависимость $\Delta(i_1)$, естественно, однозначна всегда.

Итак, если $i_2 < i'_2$ или $R^0 < R' \equiv [\exp(-\gamma_1\Delta) - \exp(-\gamma_1\Delta')]/(\gamma_1\Delta - 1)$, двузначность отсутствует. Поскольку $R' < R_\Omega^0$ для всех значений $\Delta < \Delta'$, постольку всем изображающим точкам поля (R^0, Δ) на рис. 4 (кривая R' дана на нем штрих-пунктиром), лежащим вне области безусловной устойчивости, соответствуют двузначные кривые $\Delta(i_1)$ (рис. 5). Двузначным зависимостям $\Delta(i_1)$ соответствуют двузначные кривые $R^0(i_1)$ в нижней части рис. 5.

На рис. 6 представлена часть диаграммы параметров, перестроенной в координатах (i_1, i_2) ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$, $\Omega = 0,01$). Пороговая кривая R_0^0 и кривая устойчивости R_Ω делят ее на области, раскрывая вместе с рис. 5 смысл явлений гистерезиса (бистабильности), автомодуляции и др.

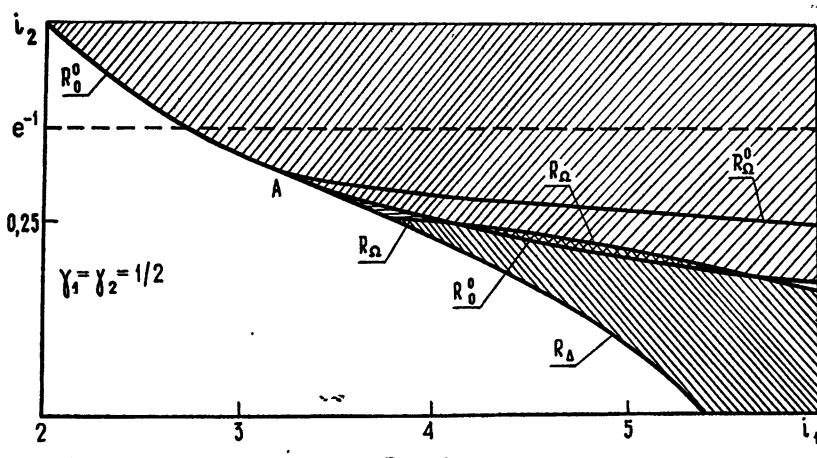


Рис. 6.

Точка A отсекает на пороговой кривой R_0^0 участки мягкого (левее A) и жесткого (правее A) возбуждения. Устойчивый «гладкий» режим генерирования реализуется в области, лежащей над обеими кривыми R_0^0 и R_Ω (штриховка с наклоном вправо). Ниже пороговой

кривой R_0^0 (правее A), но выше кривой устойчивости R_α расположена область гистерезисного бистабильного режима (горизонтальная штриховка). Слева ее ограничивает кривая R_\downarrow , которая соответствует точкам вырождения двузначности $\frac{d\dot{x}_1}{dR^0} = \frac{dx_1}{d\Delta} = 0$ на рис. 5.

Если кривые R_0^0 и R_α пересекаются, как на рис. 6, то между точками пересечения выделяется область автомодуляции (двойная штриховка), где стационарные решения обоих типов неустойчивы (изображающие точки лежат выше порога R_0^0 , но ниже R_α). Поэтому здесь происходят осцилляции интенсивности излучения R относительно этих двух стационарных (нулевого и конечного) значений R_0^0 .

Существует критическое значение параметра $\Omega = \Omega^*(\gamma_1)$, при котором точки пересечения кривых R_0^0 и R_α сливаются в одну точку касания. Тогда неравенство $\Omega < \Omega^*$ является необходимым условием существования автомодуляционного режима (для $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$, например, $\Omega^* \approx 0,012$). Наличие критического значения Ω^* свидетельствует о том, что неоднородности зеркал и объемных потерь могут привести к одновременному существованию «гладкого» и автомодуляционного режимов излучения в разных каналах активного слоя генератора, что и наблюдается на опыте [4]. В случае $\Omega > \Omega^*$ область гистерезиса образует сплошную полосу между непересекающимися кривыми R_0^0 и R_α :

Проведенный анализ дает разумное соответствие с данными эксперимента. Нужно, однако, обратить внимание на три обстоятельства, которые следует учитывать, если желательно получить более детальное совпадение:

а) конечную электропроводность между областями, приводящую к растеканию токов инжекции и выравниванию квазиуровней Ферми μ_i ;

б) взаимную оптическую накачку соседних областей спонтанными и сверхизлучательными фотонами, также приводящую к выравниванию μ_i ;

в) возможность неодномодового режима автомодуляции, когда движение μ_i при генерировании колебаний в одной моде влияет на возбуждение другой моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Lasher, Solid State Electronics, 7, 707 (1964).
2. M. I. Nathan, J. C. Marinace, R. F. Rutz, A. E. Michel, G. J. Lasher, J. Appl. Phys., 36, 473 (1965).
3. Н. Г. Басов, Ю. П. Захаров, В. В. Никитин, А. А. Шеронов, ФТП, 7, 3128 (1965).
4. В. Д. Курносов, В. И. Магаляс, А. А. Плешков, Л. А. Ривлин, В. Г. Трухан, В. В. Цветков, Письма в ЖЭТФ, 4, 449 (1966).
5. Ю. А. Дрожбин, Ю. П. Захаров, В. В. Никитин, А. С. Семенов, В. А. Яковлев, Письма в ЖЭТФ, 5, 180 (1967).
6. В. Д. Курносов, А. А. Плешков, Г. С. Петрухина, Л. А. Ривлин, В. Г. Трухан, В. В. Цветков, Письма в ЖЭТФ, 5, 77 (1967).
7. В. И. Магаляс, А. А. Плешков, Л. А. Ривлин, А. Т. Семенов, В. В. Цветков, Письма в ЖЭТФ, 6, 550 (1967).
8. Ю. П. Захаров, И. Н. Компанеец, В. В. Никитин, А. С. Семенов, ЖЭТФ, 53, 1553 (1967).
9. Л. А. Ривлин, В. С. Шильдяев, Письма в ЖЭТФ, 6, 659 (1967)..
10. Л. А. Ривлин, Авторское свидетельство № 166149 от 3/VII 1963 г. (Бюллетень изобретений, вып. 21, 1964); ЖЭТФ, 47, 624 (1964).
11. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, В. В. Никитин, А. С. Семенов, ФТП, 1, 1570 (1967).

12. Л. А. Ривлин, Письма в ЖЭТФ, 6, 966 (1967)
13. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, 909 (1965)
14. G. Lasher, F. Stern, Phys. Rev., 138, A 533 (1964).
15. M. H. Pilkuhn, H. Rupprecht, S. E. Blum, Solid State Electronics, 7, 905 (1964).

Поступила в редакцию
7 октября 1968 г.

DYNAMIC INSTABILITIES OF RADIATION OF SEMICONDUCTOR QUANTUM GENERATOR

L. A. Rivlin

The stability of the generation process of a semiconductor quantum generator, composed of sections with different positions of Fermi quasi-levels, is analyzed by the methods of the oscillation theory. The phenomena of bistability, hysteresis and self-modulation and their dependences on different factors, in particular, on the resonator losses are theoretically explained. The estimated data are in satisfactory agreement with the experiment.

УДК 539.285

К ТЕОРИИ НАСЫЩЕНИЯ ЛИНИЙ ЯДЕРНОГО КВАДРУПОЛЬНОГО РЕЗОНАНСА

Л. Л. Бушвили, Г. А. Волгина

Приводится квантово-статистическое рассмотрение насыщения ядерного квадрупольного резонанса в отсутствие постоянного внешнего магнитного поля. Показано, что учет изменения температуры диполь-дипольного резервуара в ЯКР приводит к картине, аналогичной той, которая наблюдается при насыщении ядерного магнитного резонанса.

Как показал Провоторов [1], в явлении насыщения ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в твердых телах при определенных условиях существенную роль играет учет изменения температуры диполь-дипольного резервуара (имеется в виду секулярная часть диполь-дипольного взаимодействия спинов, рассматриваемая как самостоятельная подсистема). При насыщении ЯМР в кристаллах с сильным квадрупольным взаимодействием [2] также проявляются эффекты, связанные с диполь-дипольным резервуаром (ДДР). Стационарный случай насыщения чистого ядерного квадрупольного резонанса (ЯКР), когда в отличие от [2] имеется вырождение энергетических уровней, обсуждается в работах [3, 4].

В данной работе рассматривается вопрос о насыщении ЯКР в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля. При этом предполагается, что уширение резонансной линии однородно и обусловлено диполь-дипольным ($d-d$) взаимодействием между спинами. В отличие от (2)–(4) учитывается конкретный вид $d-d$ взаимодействия и механизма спин-решеточной релаксации, а также выводится зависящее от времени уравнение для спиновой температуры.

Рассмотрим случай двухуровневой квадрупольной системы, реализующейся при взаимодействии электрического квадрупольного момента ядра (спин ядра $I = 1$ или $3/2$) с электрическим полем кристалла при аксиальной симметрии тензора градиента электрического поля. (При $I = 1$ один из уровней дважды вырожден, при $I = 3/2$ вырождены оба уровня.) Если квадрупольная энергия гораздо больше энергии $d-d$ взаимодействия между спинами, то как и для ядерного магнитного резонанса часть $d-d$ гамильтонiana, которая не коммутирует с квадрупольным взаимодействием, в рассмотрении роли не играет [5]. Тогда оказывается возможным рассмотреть квадрупольные степени свободы и $d-d$ взаимодействие как отдельные подсистемы и приписать каждой из этих подсистем соответствующую температуру.

В этой ситуации задача о насыщении линий квадрупольного резонанса математически, в основном, аналогична задаче о насыщении ядерного магнитного резонанса [1]. Различия же будут состоять в следующем.

а) Если приложено линейно поляризованное переменное поле, то в рассмотрении насыщения квадрупольного резонанса существенны обе циркулярные поляризации, суперпозицию которых представляет исход-

ное поле. Поэтому, если не провести специальных преобразований, проделанных, например, для $I = 3/2$ в работе [6], задачу о насыщении не удается строго рассмотреть путем перехода во вращающуюся систему координат. В связи с этим удобным оказывается квантовое рассмотрение переменного магнитного поля [7].

б) Часть гамильтонiana $d-d$ взаимодействия, которая коммутирует с квадрупольным взаимодействием («усеченный» $d-d$ гамильтониан), существенно отличается от секулярной части $d-d$ гамильтониана в случае магнитного резонанса. Так, члены, пропорциональные $I_i^+ I_j^+$ и $I_i^- I_j^-$, также дают вклад в секулярную часть (индексы i и j нумеруют разные спины). Члены же $I_i^+ I_i^-$ не всегда вызывают желаемые переходы. Например, при $I = 1$ это могут быть и такие переходы $(0, 0) \rightarrow (1, -1)$, т. е. изменение магнитного квантового числа первого спина равно 1 ($\Delta m_1 = 1$), а второго $-\Delta m_2 = -1$. Но в этом случае энергия квадрупольной системы не сохраняется, и поэтому подобные переходы должны быть исключены. Этот вопрос обсуждался в работе [8], где секулярная часть $d-d$ гамильтониана для спина $I = 1$ была записана в виде

$$\begin{aligned} H'_d = & \frac{1}{2} \gamma_i^2 \sum_{i,j} r_{i,j}^{-3} \left\{ (1 - 3 \cos^2 \theta_{i,j}) I_i^z I_j^z - \frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 \theta_{i,j}) \times \right. \\ & \times (I_i^z + I_j^z) (I_i^+ I_j^- + I_i^- I_j^+) (I_i^z + I_j^z) + \frac{3}{4} (I_i^z + I_j^z) \times \\ & \times [I_i^+ I_j^+ \sin^2 \theta_{i,j} \exp(-2i\varphi_{i,j}) + I_i^- I_j^- \sin^2 \theta_{i,j} \exp(2i\varphi_{i,j})] (I_i^z + I_j^z) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ_i — ядерное гиромагнитное отношение, $r_{i,j}$, $\theta_{i,j}$, $\varphi_{i,j}$ — сферические координаты радиуса-вектора $r_{i,j}$, соединяющего i -е и j -е ярда, $I_i^\pm = I_i^x \pm i I_i^y$ и I_i^z , I_i^y , I_i^z — операторы проекций спина ядра, расположенного в i -м узле решетки (ось z выбрана параллельной оси симметрии тензора градиента электрического поля кристалла); считается, что $\hbar = 1$.

В случае $I = 3/2$ явный вид H'_d также можно написать, если следовать работе [6].

в) Если релаксация ядер будет в основном обусловлена взаимодействием с парамагнитными примесями (что возможно в ряде случаев при низких температурах [9]), то, поскольку внешнее магнитное поле равно нулю, в релаксации в отличие от магнитного резонанса [10] будут играть роль члены, содержащие S^+ , S^- ($S^\pm = S^x \pm i S^y$, S — электронный спин).

Гамильтониан системы в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$H = H_Q + H'_d + H_L + H_h + H_{lh} + H_{IL}. \quad (2)$$

Здесь H_Q — оператор энергии квадрупольного взаимодействия, равный

$$H_Q = \frac{3eQq_{zz}}{4I(2I-1)} \sum_i \left[(I_i^z)^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right], \quad (3)$$

где eQq_{zz} — постоянная квадрупольного взаимодействия, H'_d — секулярная часть $d-d$ гамильтониана, H_L и H_h — гамильтонианы решетки и внешнего переменного поля соответственно; H_{lh} описывает взаимодействие спин-системы с радиочастотным полем. Считая, что внешнее переменное поле приложено в плоскости, перпендикулярной оси z , оператор H_{lh} запишем так:

$$H_{Ih} = \frac{1}{2} \sum_i (h^+ I_i^- + h^- I_i^+), \quad (4)$$

где h^+ и h^- — операторы, описывающие переменное поле с частотой ω и полуамплитудой H_1 ($h^\pm = h^x \pm i h^y$), H_{IL} — гамильтониан взаимодействия спин-системы с решеткой.

Введем как отдельные подсистемы квадрупольные степени свободы, секулярную часть $d-d$ взаимодействия, решетку и переменное поле, причем через β_Q , β_d , β_L и β_h обозначим температуры соответствующих подсистем. Остальные члены гамильтониана (2) рассмотрим как возмущение. Тогда, аналогично работе [11], методом построения неравновесного статистического оператора [12] можно получить для $I=1$ и $3/2$ в пределе высоких температур следующую систему уравнений для β_Q и β_d :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_Q}{dt} &= -4W(\omega_0 - \omega) \left(\beta_Q - \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \beta_d \right) - \frac{\beta_Q - \beta_L}{T_{QL}} + \frac{\beta_d - \beta_L}{T_{Qd}}, \\ \frac{d\beta_d}{dt} &= \alpha^2 4W(\omega_0 - \omega) \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \right) \left(\beta_Q - \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \beta_d \right) + \frac{\beta_Q - \beta_L}{T_{dQ}} - \frac{\beta_d - \beta_L}{T_{dL}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) приняты обозначения: ω_0 — частота перехода между уровнями квадрупольной энергии, равная для спинов $I=1$ и $I=3/2$ соответственно $3eQq_{zz}/4$ и $eQq_{zz}/2$, $\alpha^2 \equiv \langle H_Q^2 \rangle / \langle (H_d')^2 \rangle$, где $\langle \dots \rangle = \text{Sp}(\dots)/\text{Sp}1$, $W(\omega_0 - \omega)$ — вероятность индуцированных переходов, вызванных действием внешнего переменного магнитного поля частоты ω ,

$$2W(\omega_0 - \omega) = \frac{9}{5} \pi \langle |h^+|^2 \rangle f^+ - (\omega_0 - \omega) \quad (I=1); \quad (6)$$

$$2W(\omega_0 - \omega) = 3\pi \langle |h^+|^2 \rangle f^+ - (\omega_0 - \omega) \quad (I=3/2). \quad (7)$$

При вычислении $W(\omega_0 - \omega)$ предполагалось, что средние значения

$$\langle h^+ h^-(t) \rangle = 2 \langle |h^+|^2 \rangle \cos(\omega t), \quad \langle |h^+|^2 \rangle = \gamma_I^2 H_1^2.$$

Функция $f^+ - (\omega_0 - \omega)$ определяется соотношением

$$f^+ - (\omega_0 - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sp} I_i^+ I_i^-(t)}{\text{Sp} I_i^+ I_i^-} \exp[i(\omega_0 - \omega)t] dt, \quad (8)$$

где $I^-(t)$ — оператор в гейзенберговском представлении.

Второй момент функции $f^+ - (\omega_0 - \omega)$ для $I=1$ был вычислен в работе [8] для кубических кристаллов и равен

$$M_+^2 = 28,4 \gamma_I^4 \hbar^4 d^{-6}; \quad (9)$$

здесь d — постоянная решетки.

Данное значение второго момента примерно в полтора раза больше второго момента, найденного для случая магнитного резонанса при $I=1$ [5].

Для релаксационных постоянных T_{QL}^{-1} , T_{Qd}^{-1} , T_{dL}^{-1} , T_{dQ}^{-1} в (5) получаются следующие выражения:

$$\frac{1}{T_{QL}} = \frac{1}{\text{Sp} H_Q^2} \int_{-\infty}^0 e^{st} dt \frac{1}{\beta_L} \int_0^{\beta_L} \text{Sp} \beta_L K_{QL} K_{QL}(t + i\lambda) d\lambda,$$

$$\frac{1}{T_{Qd}} = \frac{1}{\text{Sp} H_Q^2} \int_{-\infty}^0 e^{st} dt \frac{1}{\beta_L} \int_0^{\beta_L} \text{Sp} \rho_L K_{QL} K_{dL}(t + i\lambda) d\lambda, \quad (10)$$

$$\frac{1}{T_{dL}} = \frac{1}{\text{Sp}(H_d')^2} \int_{-\infty}^0 e^{st} dt \frac{1}{\beta_L} \int_0^{\beta_L} \text{Sp} \rho_L K_{dL} K_{dL}(t + i\lambda) d\lambda,$$

$$\frac{T_{dQ}}{T_{Qd}} = \frac{\text{Sp} H_Q^2}{\text{Sp}(H_d')^2},$$

где $K_{QL} = i^{-1}[H_Q, H_{dL}]$, $K_{dL} = i^{-1}[H_d, H_{dL}]$, K_k — оператор в гейзенбергском представлении, ρ_L — равновесная матрица плотности решетки: $\rho_L = [\text{Sp} \exp(-\beta_L H_L)]^{-1} \exp(-\beta_L H_L)$.

При сильном насыщении членами с коэффициентами T_{Qd}^{-1} и T_{dQ}^{-1} в (5) можно пренебречь. Тогда для поглощаемой мощности получится соотношение, аналогичное формуле (39) в работе [1]:

$$P = -C \frac{N \omega^2}{T_{dL}} \frac{\omega_d^2}{T_{QL} \omega_d^2 / T_{dL} + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (11)$$

Численный коэффициент C при $I = 1$ равен $C = 4/9$, при $I = 3/2$ соответственно $C = 1/2$; N — число резонирующих ядер.

Рассмотрим в качестве конкретного механизма релаксации ядер $d-d$ взаимодействие с парамагнитными примесями. Гамильтониан взаимодействия в этом случае имеет вид

$$H_{dL} = \frac{1}{2} \sum_{i, n} I_i^\alpha v_{in}^{\alpha\beta} S_n^\beta, \quad (12)$$

где α и β — индексы, соответствующие различным проекциям спиновых операторов, $v_{in}^{\alpha\beta}$ — известные коэффициенты, которые можно найти, например, в [5], индексы i и n нумеруют различные ядерные и электронные спины.

Используя (12) для получения выражений (10), можем записать T_{QL}^{-1} и T_{dL}^{-1} при $I = 1$ в виде

$$\frac{1}{T_{QL}} = \frac{1}{\text{Sp} H_Q^2} \frac{S(S+1)}{6} \sum_{i, n} (|v_{in}^{+x}|^2 + |v_{in}^{+y}|^2 + |v_{in}^{+z}|^2) \frac{4\omega_0^2 \tau_S}{1 + (\omega_0 \tau_S)^2}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{dL}} = \frac{1}{\text{Sp}(H_d')^2} \frac{S(S+1)}{6} & \left[\sum_{i, n} (|v_{in}^{+x}|^2 + |v_{in}^{+y}|^2 + |v_{in}^{+z}|^2) \frac{2\tau_S}{1 + (\omega_0 \tau_S)^2} 2M_{i+-}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i, n} (|v_{in}^{zx}|^2 + |v_{in}^{zy}|^2 + |v_{in}^{zz}|^2) 4M_{izz}^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь S — электронный спин, M_{i+-}^2 и M_{izz}^2 — вторые моменты функций

$$f_i^{+-(\omega)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\text{Sp} I_i^+ I_i^-(t)}{\text{Sp} I_i^+ I_i^-} dt,$$

$$\hat{f}_i^{zz}(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{\text{Sp } I_i^z I_i^z(t)}{\text{Sp } (I_i^z)^2} dt$$

соответственно.

Проводя в (13) и (14) усреднение по углам, получим для обратных времен релаксации квадрупольного и $d-d$ резервуаров следующие выражения:

$$\frac{1}{T_{QL}} = \frac{2}{\langle H_Q^2 \rangle} \gamma_I^2 \gamma_S^2 \frac{\omega_0^2 \tau_S}{1 + (\omega_0 \tau_S)^2} \sum_{i,n} r_{in}^{-6}; \quad (15)$$

$$\frac{1}{T_{dL}} = \frac{2}{\langle (H_d')^2 \rangle} \gamma_I^2 \gamma_S^2 \sum_{i,n} r_{in}^{-6} \left[\frac{\tau_S}{1 + (\omega_0 \tau_S)^2} M_{i+-}^2 + \frac{\tau_S}{2} M_{izz}^2 \right], \quad (16)$$

где γ_S — гиromагнитное отношение для электрона, τ_S — время корреляции электронного спина.

Отношение T_{QL}/T_{dL} , входящее в формулу (11), на основании (15) и (16) запишется как

$$\frac{T_{QL}}{T_{dL}} = \frac{M_{i+-}^2}{\omega_d^2} + \frac{1}{2} (1 + \omega_0^2 \tau_S^2) \frac{M_{izz}^2}{\omega_d^2}, \quad (17)$$

а формула для поглощаемой мощности в рассматриваемом случае окончательно примет вид

$$P = C \frac{N \omega^2}{T_{dL}} - \frac{\omega_d^2}{[M_{i+-}^2 + (1 + \omega_0^2 \tau_S^2) M_{izz}^2 / 2] + (\omega_0 - \omega)^2}. \quad (18)$$

Из (18) видно, что эффективная ширина линии ядерного квадрупольного резонанса при насыщении выразится следующим образом:

$$\tilde{\Delta}^2 = M_{i+-}^2 + \frac{1}{2} (1 + \omega_0^2 \tau_S^2) M_{izz}^2. \quad (19)$$

Конкретные вычисления для кубической решетки дают

$$M_{i+-}^2 = 16 \gamma_I^4 \hbar^4 d^{-6}, \quad M_{izz}^2 \simeq 8 \gamma_I^4 \hbar^4 d^{-6}.$$

Используя численное значение (19), получим относительное изменение ширины линии по сравнению с шириной, которую имела линия ЯКР до насыщения, равным

$$\frac{\tilde{\Delta}^2}{M_{i+-}^2} = 0,6 + 0,1 (1 + \omega_0^2 \tau_S^2). \quad (20)$$

Если $\omega_0 \tau_S \ll 1$, тогда линия по форме лоренцева и $\tilde{\Delta}^2 = 0,7 M_{i+-}^2$. Если же $\omega_0 \tau_S \gg 1$, получаем значительное уширение, обусловленное тем, что релаксация ДДР происходит гораздо быстрее, чем релаксация квадрупольной подсистемы, и изменение температуры ДДР при насыщении несущественно.

В заключение выражаем благодарность В. С. Гречишкому, привлекшему наше внимание к этому вопросу, а также М. Д. Звиададзе за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Провоторов, ЖЭТФ, 41, 1582 (1961).
2. Б. И. Провоторов, ФТТ, 4, 2940 (1962); ФТТ, 5, 564 (1962); Б. И. Провоторов, Докторская диссертация, М., 1964.
3. M. Goldman, A. Landesman, Phys. Rev., 132, № 2, 610 (1963).
4. M. Goldman, Phys. Rev., 138, № 6A, 1668 (1965).
5. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
6. C. W. Lepelmeier, E. L. Hahn, Phys. Rev., 142, 179 (1966).
7. Л. Л. Буишвили, ФТТ, 9, 8 (1967).
8. А. А. Абрагам, K. Kamble, Phys. Rev., 91, 894 (1953).
9. R. L. Kyhl, B. D. Nageswara-Rao, Phys. Rev., 158, 284 (1967).
10. Г. Р. Хуцишвили, УФН, 87, 211 (1967).
11. L. L. Buishvili, M. D. Zwriadze, Phys. Lett., 24a, 63 (1967).
12. Д. Н. Зубарев, ДАН СССР, 140, 92 (1961).

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
30 декабря 1968 г.

TO THE THEORY OF LINE SATURATION IN NUCLEAR QUADRUPOLE
RESONANCE

L. L. Buishvili, G. A. Volgina

A quantum-statistic consideration of saturation in nuclear quadrupole resonance in the absence of the external magnetic field is given. It is shown that the changes of the temperature of a dipole-dipole tank in NQR give the results similar to those observed at saturation of the nuclear magnetic resonance.

УДК 621.391

ДИАПАЗОННЫЙ КВАНТОВАТЕЛЬ ФАЗЫ НЕСИНХРОННОГО СИГНАЛА

В. П. Комолов, В. Ю. Маслов, И. Т. Трофименко

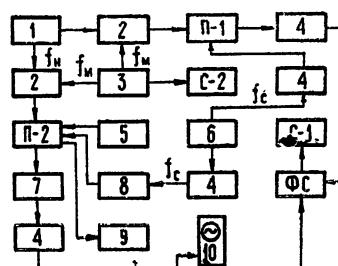
Приводятся результаты квантования фазы несинхронного сигнала известной частоты f_c с помощью емкостного параметрического генератора субгармоники с фиксированной частотой накачки f_n и фазового селектора с манипулированной по известному закону фазой опорного напряжения. При перестройке частоты f_c в пределах 1—2% от частоты $f_n/2$ рассмотренный метод квантования приближается по эффективности к квантованию сигнала, синхронного с субгармоникой накачки, и может быть использован в физических приложениях для частотных и фазовых измерений.

В [1, 2] были рассмотрены некоторые способы регистрации слабого несинхронного сигнала методом квантования фазы с помощью параметронов. В тех случаях, когда частота сигнала заранее известна, но перестраивается в некотором диапазоне, обработка результатов квантования может быть существенно упрощена по сравнению с обработкой, применяющейся в [1, 2]. В описанной ниже схеме частота параметрона-квантователя остается постоянной, что принципиально важно, поскольку система с перестраиваемым по частоте параметроном-квантователем конструктивно сложна и обладает существенным недостатком — непостоянством вероятностных характеристик, т. е. вероятностей возбуждения стационарных фаз параметрона при перестройке частоты.

При синхронном приеме разность фаз $\Delta\phi$ между опорным сигналом фазового селектора (ΦC) и принимаемым сигналом остается постоянной, и регистрация сигнала сводится к подсчету разности числа биполярных импульсов δ на выходе ΦC . В случае несинхронного приема величина $\Delta\phi$ периодически меняется и $\delta \rightarrow 0$ при большом объеме выборки. Устранить эту неопределенность можно при манипуляции фазой опорного сигнала ΦC на π с частотой F , равной или кратной частоте расстройки $\Delta f = f_c - f$; практически это достигается путем синхронной модуляции напряжения накачки опорного параметрона ($\Pi-1$) и параметрона-квантователя ($\Pi-2$) и периодического изменения фазы опорного параметрона с помощью большого сигнала частоты f_c .

Ниже приводятся результаты экспериментального исследования схемы (рис. 1) бинарного квантователя фазы несинхронного сигнала известной частоты f_c . В качестве квантователя использовались одно-

Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:
1—генератор накачки; 2—модулятор накачки;
3—генератор запускающих импульсов; 4—фазо-
вращатель; 5—генератор нормального шума; 6—
генератор несинхронного сигнала; 7—буферный
каскад; 8—делитель напряжения; 9—селективный
микровольтметр; 10—осциллограф; $\Pi-1$, $\Pi-2$ —
параметроны; $C-1$, $C-2$ —счетчики импульсов; ΦC —
фазовый селектор.



контурные емкостные параметроны с фиксированной рабочей частотой $f = 1 \text{ МГц}$ и с кварцеванной накачкой $f_n = 2 \text{ МГц}$; частота запуска параметронов $f_m = 500 \text{ гц}$. Параметроны П-1 и П-2 собраны по балансной схеме на стабилитронах Д813. Для получения на входе П-2 заданного отношения сигнал/шум (С/Ш) в схеме использовался кварцеванный генератор сигнала и генератор нормального шума диапазона 50 гц — 6 МГц. Отношение С/Ш измерялось как $A_c/\sigma_{\text{ш}}$, где A_c — эффективная амплитуда сигнала, $\sigma_{\text{ш}} = \sqrt{V_f^2(f_0/Q)}$ — средне-квадратичное напряжение шума на контуре параметрона (V_f^2 — спектральная плотность шумового напряжения вблизи f_0 , Q и f_0 — добротность и резонансная частота «холодного» контура параметрона).

Сравнение стационарных фаз φ_{k1} и φ_{k2} ($k = 1, 2$) параметрических колебаний на выходе П-1 и П-2 при каждом синхронном запуске параметронов проводилось с помощью фазового селектора. Число импульсов l , появляющихся на выходе ФС при совпадении φ_{k1} и φ_{k2} , регистрировалось счетчиком С-1. Общее число синхронных запусков параметронов L (длина выборки) регистрировалось счетчиком С-2. Счетчики работали параллельно с синхронным пуском и остановкой.

В экспериментальной установке была предусмотрена тщательная экранировка параметрона-квантователя и развязка его от опорного параметрона по всем цепям связи. Все напряжения на входе П-2 измерялись диапазонным селективным макровольтметром в полосе 8 кгц.

Настройка установки заключалась в реализации одновременного перехода фазы сигнала φ_c через сепаратрисы параметронов; она осуществлялась с помощью плавных фазовращателей, включенных в схему между параметронами и генератором сигнала, и проводилась при больших сигналах на входах П-1 и П-2 ($\text{С/Ш} \gg 1$).

Измерения проводились при различных отношениях С/Ш на входе П-2 и различных расстройках Δf . В статистической обработке выборок использовался метод классического анализа: измерения были разбиты на серии с постоянным числом запусков параметронов $L \approx 5 \cdot 10^3$. По результатам 10 серий запусков определялось выборочное среднее значение

$$\text{ние } \tilde{l} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} l_i, \text{ соответствующее числу совпадений фаз } \varphi_{k1} \text{ и } \varphi_{k2}$$

в фиксированном объеме выборки L . При $\text{С/Ш} = 0$, когда на входе П-2 имеется только шум, вероятности возбуждения его стационарных фаз близки к 1/2 и $l_0 \approx L/2$. В эксперименте определялось отклонение $\tilde{N}_0 = \tilde{l}_0 - L/2 \approx 0$; такие измерения проводились систематически для проверки «нуля» установки и стабильности ее работы.

При большом несинхронном сигнале на входе П-2 ($\text{С/Ш} \gg 1$) стационарные фазы φ_{k2} определяются, в основном, фазой сигнала φ_c и периодически повторяются в последовательности радиоимпульсов на выходе П-2 с частотой F . В таком режиме параметрические колебания

в П-1 и П-2 возбуждаются синфазно и $\tilde{l} \rightarrow L$. Однако $\tilde{l} < L$, поскольку при переходах φ_c через сепаратрисы параметронов происходит выравнивание вероятностей возбуждения стационарных фаз. Величина

$r = L - \tilde{l}$ при $\text{С/Ш} \gg 1$ определяет минимальные потери информации о входном сигнале, обусловленные этими переходами; в условиях проведенного эксперимента уменьшение измеренной разности вероятностей, связанное с выравниванием, составляло не более 4% при перестройке f_c в пределах 1—2% частоты параметронов f .

В качестве выходного сигнала установки при $C/W \ll 1$ и $C/W \sim 1$ естественно принять величину $\Theta(C/W) = \tilde{N} - \tilde{N}_0$, где $\tilde{N} = \tilde{l} - L/2$; при этом обнаружению сигнала соответствует $\Theta = \tilde{N} - \varepsilon - \tilde{N}_0 - \varepsilon_0 > 0$, где ε и ε_0 —доверительные интервалы, в которых с заданной вероятностью правильного обнаружения лежат истинные средние значения \bar{N} и \bar{N}_0 . Таким образом, $\Theta = \tilde{l} - \tilde{l}_0$.

На рис. 2 приведены результаты обработки выборок L , полученные для трех значений расстройки Δf . По оси ординат отложены значения

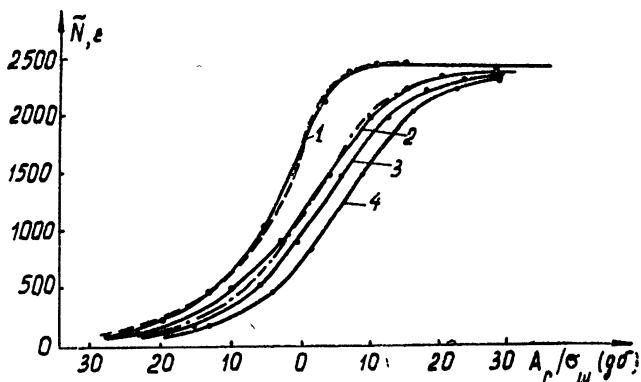


Рис. 2. Зависимость величины \tilde{N} от отношения сигнала/шум на входе параметрона. Пунктир—теоретическая кривая для синхронного, штрих-пунктир—для несинхронного приема. Сплошные кривые—экспериментальные: 1—синхронный прием; 2, 3, 4—несинхронный прием с расстройками 10 гц, 7,5 кгц и 17,5 кгц соответственно. Размеры доверительных интервалов $|2\varepsilon| \sim 50 \pm 40$, т. е. порядка величины экспериментальных точек.

\tilde{N} с соответствующими доверительными интервалами ε , в которых с достоверностью 0,99 лежат истинные средние \bar{N} . По оси абсцисс в децибелах отложена величина A_c/σ_w , соответствующая отношению C/W на входе П-2. Пунктиром отмечена теоретическая кривая для синхронного приема, вычисленная по формуле $N = (L/2)\Phi(A_c/\sigma\sqrt{2})$, штрих-пунктиром—для несинхронного приема: $N = (L/2\pi) \times \int_0^{\pi} \Phi |(A_c/\sigma\sqrt{2}) \cos \varphi_c| d\varphi_c$; Φ —интеграл вероятностей. При фиксированном времени накопления с ростом расстройки $|\Delta f|$ увеличивается число переходов через сепаратрисы параметронов, при этом возрастают потери от выравнивания вероятностей и выходной сигнал установки уменьшается.

При известном отношении C/W и известной начальной фазе φ_{c0} эта схема позволяет регистрировать фазовое запаздывание эхо-сигнала $\Delta\varphi = \varphi_{c0} - \varphi_c$.

Расчеты показывают [2], что рассмотренный метод обнаружения слабого несинхронного сигнала при одном и том же объеме выборки уступает по чувствительности оптимальному фазовому методу на величину порядка 4,7 дБ, из которых ~ 1 дБ соответствует минимальным потерям квантования, а 3,7 дБ—потерям, связанным с периодическими переходами φ_c через сепаратрису. Эти дополнительные потери зависят от Δf и f_m , особенно при длине выборки, соизмеримой с периодом рас-

стройки; они могут быть уменьшены, если применить фазовую автоподстройку генератора запускающих импульсов по частоте расстройки Δf (см., например, [3]). При использовании квадратурного квантователя-параметрона с фазоманипулированной накачкой [4], реализующего два ортогональных канала, в таких системах можно применить разделение накопления по двум каналам квантования и при любой длине выборки устранить потери, связанные с переходами φ_c через сепаратрису.

В заключение отметим, что рассмотренная схема позволяет проводить измерения сдвига фаз между когерентными сигналами, несинхронными с колебаниями параметронов. В этом случае один из сигналов подается на П-1, а другой на П-2, при этом П-1 выполняет роль второго квантователя. Сравнение частот $f_{c1} \approx f_{c2}$ входных сигналов П-1 и П-2 и автоподстройка генераторов этих сигналов [3] могут быть выполнены с помощью этой схемы с высокой степенью точности без стабилизации частоты запусков параметронов f_m .

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, А. С. Чиркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 693 (1964).
2. В. П. Комолов, А. С. Рошаль, И. Т. Трофименко, Б. Д. Фельдман, Параметры в цифровых устройствах, изд. Энергия, М., 1968.
3. В. П. Комолов, Вестник МГУ, сер. Физика, № 3, 99 (1967).
4. В. Ю. Маслов, Дипломная работа, МГУ, 1967

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
18 марта 1968 г.

A DIAPASON PHASE QUANTIZATOR OF NONSYNCHRONOUS SIGNAL

V. P. Komolov, V. Yu. Maslov, I. T. Trofimenko

The authors present the results of quantization of the phase of the nonsynchronous signal of the known frequency f_s using the capacity parametric generator of the subharmonic with the fixed frequency of pumping f_p and the phase selector with the phase of the reference voltage varied according to the known law. When the frequency f_s is detuned in the limits of 1–2% from the frequency $f_p/2$, the considered method of quantization is approximated to the quantization of the signal synchronous with the subharmonic of pumping and can be used in physical applications for frequency and phase measurements.

УДК 621.373.431.4

ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ РЕЛАКСАЦИОННОГО ГЕНЕРАТОРА БЕЗ УТЕЧКИ

Л. И. Гудзенко

Флуктуационный набег фазы релаксационного генератора на газоразрядной лампе приводит к появлению восстанавливющей силы, которая вызывает ограничение роста дисперсии фазы с увеличением времени.

Набег фазы $\Delta_t(T) \equiv \theta(t + T) - \theta(t)$ автогенератора томсоновского типа под действием собственных естественных шумов подчиняется закону асимптотически линейного роста дисперсии $\langle [\Delta_t(T)]^2 \rangle \simeq DT$ на больших интервалах наблюдения T . Этот закон постулативно перенесен в [1] на релаксационные генераторы. Обосновывающие такой вывод рассуждения проводились в [2, 3] для автогенераторов общего типа. Действительно, при малых флуктуациях набег фазы определяется тангенциальной (направленной вдоль предельного цикла) составляющей скорости, изображающей точки генератора. В динамически автономной системе положение изображающей точки полностью характеризует состояние. Смещение вдоль цикла на полный оборот приводит к прежнему состоянию и не может вызвать возвращающую динамическую реакцию. Тангенциальные флуктуации (или, что то же—флуктуации фазы) подобны координате свободной броуновской частицы; значит, дисперсия фазы неограниченно растет по диффузионному закону.

На примере релаксационного автогенератора на газоразрядной лампе покажем, что такие рассуждения верны не всегда—в нелинейной системе флуктуации зачастую трудно отделить от динамики. Выберем схему (рис. 1) так, чтобы упростить рассуждения без претензии на общность или непосредственные радиотехнические приложения.

Идеализируя свойства газоразрядной лампы, опишем ее емкостью C_1 , мгновенно пробивающейся, как только напряжение достигает значения V . Пусть t_n —моменты пробоя, тогда

$$v(t_n - 0) = V, \quad v(t_n + 0) = 0. \quad (1)$$

При любых t

$$i(t) + j(t) = J, \quad u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_n}^t i(\xi) d\xi + u(t_n).$$

На каждом интервале $t_n \leq t < t_{n+1}$ напишем $v(t) = (1/C_1) \int_{t_n}^t j(\xi) d\xi$.

Следовательно,

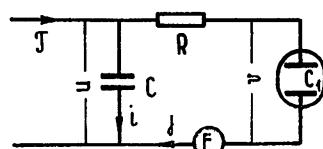


Рис. 1.

$$u(t) = \frac{J}{C} (t - t_n) - \frac{C_1}{C} v(t) + u(t_n) \quad (t_n \leq t < t_{n+1}). \quad (2)$$

Учитывая $u(t) = Rj(t) + v(t) + E(t)$, получаем

$$RC_1 \frac{dv}{dt}(t) + \left(1 + \frac{C_1}{C}\right) v(t) = u(t_n) + \frac{J}{C} (t - t_n) - E(t) \quad (t_n \leq t < t_{n+1}). \quad (3)$$

Будем считать, что ЭДС $E(t)$ — стационарный случайный процесс, интервал корреляции которого во много раз меньше среднего периода $T_0 \equiv \langle t_{n+1} - t_n \rangle$:

$$E(t) \equiv E + \delta E(t),$$

$$\langle \delta E(t) \delta E(t') \rangle = \langle (\delta E)^2 \rangle \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau}\right) \quad (0 < \tau \ll T_0).$$

Безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \frac{1+\alpha}{RC_1} t, & z(\theta) &\equiv p_n(\theta) - \frac{v(\theta)}{JR}, & F(\theta) &\equiv \frac{E(\theta)}{JR(1+\alpha)}, \\ p_n(\theta) &\equiv z_n + \eta(\theta - \theta_n), & \theta_n &\equiv \frac{1+\alpha}{RC_1} t_n, & \eta &\equiv \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}, \\ z_n &\equiv \frac{u(t_n)}{JR(1+\alpha)} - \eta, & \alpha &\equiv \frac{C_1}{C} \end{aligned} \quad (4)$$

приводят уравнение (3) к виду*

$$\frac{dz}{d\theta}(\theta) + z(\theta) = F(\theta) \quad (\theta_n \leq \theta < \theta_{n+1}, \quad z(\theta_n + 0) = z_n). \quad (5)$$

Для безразмерных периодов колебаний $\Theta_n \equiv \theta_{n+1} - \theta_n$ согласно (1), (4) найдем

$$z(\theta_{n+1} - 0) = z_n + \eta \Theta_n - \beta \quad \left(\beta \equiv \frac{V}{JR}\right). \quad (6)$$

Условие скачка при пробое в соответствии с формулами (2), (4), (6) напишем в виде

$$z_{n+1} - z(\theta_{n+1} - 0) = \gamma \quad \left(\gamma \equiv \frac{\beta}{1+\alpha}\right). \quad (7)$$

Из (5) — (7) получаем рекуррентные формулы

$$z_n [1 - \exp(-\Theta_n)] + \eta \Theta_n - \beta = \Phi_n, \quad (8)$$

$$\Phi_n \equiv \int_0^{\Theta_n} F(\theta) \exp(\theta - \Theta_n) d\theta;$$

$$z_{n+1} = z_n + \eta \Theta_n - \beta + \gamma. \quad (9)$$

* В динамическое ($E(t) \equiv 0$) уравнение (3) время t входит в явной форме, после замены переменных (4) мы приходим к динамически автономному уравнению (5). Если определять автогенератор как динамическую систему, характеризуемую постоянными физическими параметрами и вырабатывающую периодический сигнал, то обсуждаемая здесь схема должна быть отнесена к автоколебательным. Но по своей сути эта схема находится где-то на границе автоколебательных систем, приближаясь к системе типа колеса, приводимого в движение бесконечно длинной рёбкой. Последнюю систему уже не хотелось бы называть автогенератором.

Выделим в переменных флюктуационные составляющие: $\Theta_n = \Theta + \delta_n$, $z_n = Z + \zeta_n$, $\Phi_n = \Phi + \varphi_n$. Из (5), (6) при $\langle z_n \rangle = \langle z_{n+1} \rangle$ следует $\Theta \equiv \langle \theta_{n+1} - \theta_n \rangle = (\beta - \gamma)/\eta = \beta(1+\alpha)$. Смысл этой формулы, переписанной для среднего периода F_0 обычной размерности, ясен: постоянная составляющая тока проходит только через лампу, электрический же заряд, переносимый за период, равен $C_1 V$.

Пусть $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$, тогда $\Theta \approx \beta \ll 1$, $Z \approx (\Phi/\beta) + 1$. Будем считать, что $\Phi > 0$. От дискретных последовательностей $\{\zeta_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\varphi_n\}$ перейдем к гладким функциям непрерывного аргумента $\zeta(v)$, $\delta(v)$, $\varphi(v)$, для которых при целых v : $\zeta(n) \equiv \zeta_n$, $\delta(n) \equiv \delta_n$, $\varphi(n) \equiv \varphi_n$. Уравнениям (8), (9) можно теперь придать вид

$$\zeta(v) + \frac{\Phi + \beta}{\beta} = \frac{\Phi + \beta + \varphi(v) - \alpha\delta(v)}{\beta + \delta(v)}, \quad \frac{d\zeta}{dv}(v) = \alpha\delta(v).$$

Для малых флюктуаций при $\langle \varphi^2 \rangle \ll \beta^2$ получаем отсюда

$$(\Phi + \beta) \frac{d\delta}{dv}(v) + \alpha [\beta + \delta(v)]^2 \delta(v) = [\beta + \delta(v)] \frac{d\varphi}{dv}(v).$$

Если, более того, $\langle \varphi^2 \rangle \ll \alpha^2\beta^4$, уравнение предельно упрощается:

$$\frac{\Phi + \beta}{\alpha\beta^2} \frac{d\delta}{dv}(v) + \delta(v) = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{d\varphi}{dv}(v), \quad (10)$$

при этом $\langle \delta^2 \rangle \ll \beta^2$. Покажем, что обсуждаемый автогенератор характеризуется также равномерно ограниченной на сколь угодно больших интервалах наблюдения дисперсией набега фазы.

Переходя к «медленному отсчету числа колебаний» $h \equiv \alpha\beta^2 N / (\Phi + \beta)$, для набега фазы за N колебаний

$$\Delta_n(N) \equiv \int_n^{n+N} \delta(v) dv,$$

получаем согласно (10)

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dh}(h) + \Delta(h) &= \Psi(h), \quad \Psi(h) \equiv \frac{1}{\alpha\beta} \left[\varphi \left(n + \frac{\Phi + \beta}{\alpha\beta^2} h \right) - \varphi(n) \right], \\ \langle \Psi(h) \Psi(h') \rangle &= \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{\alpha^2\beta^2} \left[1 + \exp \left(- \frac{|h-h'|}{\sigma} \right) - \exp \left(- \frac{h}{\sigma} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left(- \frac{h'}{\sigma} \right) \right], \quad \sigma < \frac{\alpha\beta^2}{\Phi + \beta} < \alpha\beta \ll 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\langle [\Delta(h)]^2 \rangle = \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{\alpha^2\beta^2} D(h), \quad D(h) \equiv 1 - 2 \exp(-h) + \exp(-2h). \quad (11)$$

График $D(h)$ изображен на рис. 2. Получающийся из формулы (11) вывод о малости по сравнению с единицей дисперсии установившихся флюктуаций числа периодов $\delta N \equiv \Delta(N)/\Theta$ связан лишь с упрощающим анализ ограничением: $\langle \varphi^2 \rangle \ll \alpha^2\beta^4$.

Ограниченност $\langle \Delta^2 \rangle$ характеризует идеальный релаксационный автогенератор. При наличии в емкостях C или C_1 хотя бы небольшого тока утечки, а также при флюктуациях тока J дисперсия набега фазы с увеличением времени растет неограниченно, переходя после участка более быстрого роста к замедленному закону диффузии.

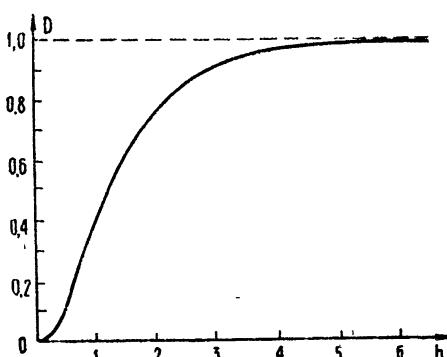


Рис. 2.

циклической активности описанному здесь релаксационному генератору [5] было указано до работы [4]. Теперь можно сказать, что у автогенератора активности без всякой синхронизации «чужими» колебаниями дисперсия набегов фазы на больших временах должна стабилизоваться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Хургин, Научн. докл. высш. шк. — Радиотехника и электроника, 1, 96 (1958).
2. Л. И. Гудзенко, ДАН СССР, 125, № 1, 62 (1959).
3. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 1, 50 (1959).
4. Л. И. Гудзенко, В. Е. Черто́пруд, Астрон. ж., 43, № 1, 113 (1966).
5. Л. И. Гудзенко, В. Е. Черто́пруд, Астрон. ж., 41, № 4, 627 (1964).

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
12 сентября 1968 г.

PHASE FLUCTUATIONS OF RELAXATION GENERATOR WITHOUT LEAKAGE

L. I. Gudzenko

The fluctuation displacement of the phase of the relaxation generator in a gas-discharged tube leads to the appearance of the "restorative" force which causes the restriction of the phase dispersion with increasing the time.

УДК 621.3.019.4

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СЛАБОГО СИГНАЛА

Я. А. Фомин

Анализируется последовательная процедура обнаружения детерминированного слабого сигнала по реализациям огибающей наблюдаемого случайногопроцесса. Получено приближенное выражение распределения длительности последовательной процедуры обнаружения слабого сигнала. Приведены результаты вычисления этого распределения для симметричного и асимметричного порогов.

При обнаружении слабых сигналов на фоне шумов во многих случаях могут быть весьма эффективно использованы методы последовательного анализа, позволяющие достичь существенной экономии в продолжительности процедуры обнаружения. Однако практическая реализация этих методов затруднена, поскольку проблема нахождения необходимой для расчетов характеристики—распределения вероятностей длительности процедуры последовательного анализа—решена (приближенно) только лишь для ограниченного класса задач, связанных, в основном, с проверкой простых статистических гипотез о параметре нормального распределения [1-3].

Настоящая работа посвящена исследованию последовательной процедуры последетекторного обнаружения детерминированного слабого сигнала по реализациям огибающей наблюдаемого случайногопроцесса на основе использования общих методов анализа вероятностных характеристик выбросов случайных последовательностей [4, 5]. Пусть наблюдаемый случайный процесс представляет собой либо узкополосный стационарный нормальный шум с нулевым средним, дисперсией σ^2 и энергетическим спектром, равномерным в полосе Δ (гипотеза H_0), либо сумму этого шума и узкополосного детерминированного сигнала (гипотеза H_1).

Оптимальное последовательное правило решения, как известно [1-3], можно сформулировать следующим образом: принимается гипотеза H_0 , если для n -го наблюдения

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} < \ln l(r_1, \dots, r_k) < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$\ln l(r_1, \dots, r_n) \leq \ln \frac{\beta}{1-\alpha} < 0,$$
(1)

и принимается гипотеза H_1 , если для n -го наблюдения

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} < \ln l(r_1, \dots, r_k) < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$\ln l(r_1, \dots, r_n) \geq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} > 0,$$
(2)

где α и β — вероятности ошибок соответственно 1 и 2 рода, $\ln(r_1, \dots, r_n)$ — логарифм отношения правдоподобия, который может быть записан в следующем виде [3]:

$$\ln l(r_1, \dots, r_n) = \sum_{k=1}^n \ln I_0(r_k a_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (3)$$

Здесь $a_k = a(\pi k / \Delta) / \sigma$ — отношение амплитуды детерминированного узкополосного сигнала в момент времени $t = \pi k / \Delta$ к среднеквадратичному значению шума.

Поскольку использование последовательной процедуры для обнаружения слабых сигналов сопряжено, как правило, с большими объемами выборки ($n \gg 1$), можно полагать, что логарифм отношения правдоподобия (3) в этом случае распределен приближенно по нормальному закону с параметрами [3]

$$m_1 \{\ln l(r_1, \dots, r_n) | H_0\} = -s_n^2, \quad m_1 \{\ln l(r_1, \dots, r_n) | H_1\} = s_n^2, \\ M_2 \{\ln l(r_1, \dots, r_n) | H_0\} = M_2 \{\ln l(r_1, \dots, r_n) | H_1\} = s_n^2, \quad (4)$$

где обозначено $s_n^2 = (1/4) \sum_{k=1}^n a_k^4$.

Приближенное выражение распределения длительности последовательной процедуры обнаружения слабого сигнала можно получить в удобном для практического использования виде, если пренебречь в первом приближении статистической зависимостью между отдельными членами случайной последовательности сумм $\sum_{k=1}^n \ln I_0(a_k r_k)$.

В этом случае распределения $P_1(n|H_0)$ и $P_1(n|H_1)$ длительности последовательной процедуры при справедливости гипотез H_0 и H_1 выражаются через интеграл вероятности $F(x)$:

$$P_1(n | H_0) = \left\{ 1 - F \left[\frac{\ln [(1-\beta)/\alpha]}{s_n} + s_n \right] + F \left[\frac{\ln [\beta/(1-\alpha)]}{s_n} + s_n \right] \right\} \times \\ \times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ F \left[\frac{\ln [(1-\beta)/\alpha]}{s_k} + s_k \right] - F \left[\frac{\ln [\beta/(1-\alpha)]}{s_k} + s_k \right] \right\}; \quad (5)$$

$$P_1(n | H_1) = \left\{ 1 - F \left[\frac{\ln [(1-\beta)/\alpha]}{s_n} - s_n \right] + F \left[\frac{\ln [\beta/(1-\alpha)]}{s_n} - s_n \right] \right\} \times \\ \times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ F \left[\frac{\ln [(1-\beta)/\alpha]}{s_k} - s_k \right] - F \left[\frac{\ln [\beta/(1-\alpha)]}{s_k} - s_k \right] \right\}, \quad (6)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

При равенстве вероятностей ошибок 1 и 2 рода $\alpha = \beta$ из (5) и (6) можно получить следующее выражение для $P_1(n) = P_1(n | H_0) = P_1(n | H_1)$:

$$P_1(n) = \left\{ F \left[\frac{\ln [\alpha/(1-\alpha)]}{s_n} + s_n \right] + F \left[\frac{\ln [\alpha/(1-\alpha)]}{s_n} - s_n \right] \right\} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - F \left[\frac{\ln [\alpha/(1-\alpha)]}{s_k} + s_k \right] - F \left[\frac{\ln [\alpha/(1-\alpha)]}{s_k} - s_k \right] \right\}. \quad (7)$$

С другой стороны, из анализа (5) и (6) следует, что распределение длительности последовательной процедуры обнаружения $P_1(n|H_0)$ при справедливости гипотезы H_0 и при вероятностях ошибок 1 и 2 рода $\alpha = a$ и $\beta = b$ совпадает с распределением длительности последовательной процедуры $P_1(n|H_1)$ при справедливости гипотезы H_1 и при противоположных значениях вероятностей ошибок $\alpha = b$ и $\beta = a$.

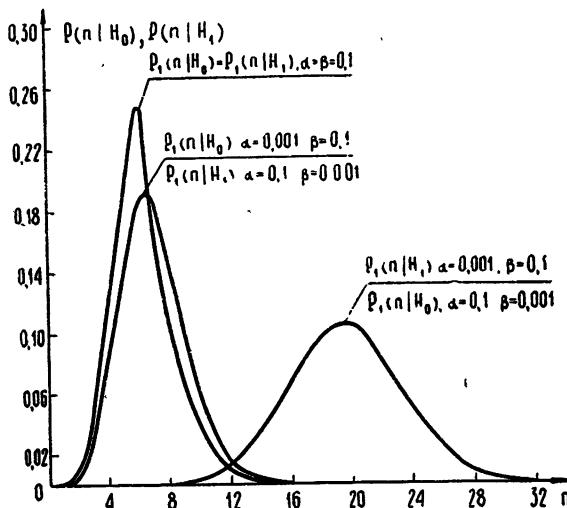


Рис. 1.

На рис. 1 приведены результаты вычисления распределения длительности последовательной процедуры обнаружения детерминированного сигнала, в качестве которого для простоты выбрано гармоническое колебание постоянной амплитуды, равной среднеквадратичному значению шума, для значений вероятностей ошибок, равных $\alpha = \beta = 0,1$ (симметричные пороги), $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$ и $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,001$ (асимметричные пороги)*. Как видно из рисунка, при сравнительно больших значениях допустимых вероятностей ошибок 1 и 2 рода $\alpha = \beta = 0,1$ продолжительность процедуры последовательного анализа оказывается весьма малой, причем распределение $P_1(n)$ является достаточно компактным. Распределения $P_1(n|H_0)$ при $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$ и $P_1(n|H_1)$ при $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,001$ отличаются от указанного распределения $P_1(n)$ незначительно. Однако распределения $P_1(n|H_1)$ при $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$ и $P_1(n|H_0)$ при $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,001$ существенно отличаются от этих распределений меньшей компактностью и смещением наибольшего значения в область больших значений n . Математические ожидания распределений, вычисленных по приближенным формулам (5) — (7), в основном, согласуются с результатами вычисления среднего значения продолжительности последовательной процедуры по известным формулам, которые с учетом (4) могут быть приведены к следующему виду:

* Выбор сигнала (в особенности, его амплитуда, которая, в принципе, должна быть малой) в примере продиктован соображениями наглядности получаемых результатов, которая сравнительно легко обеспечивается при небольших значениях n .

$$m_1[n | H_0] = -\frac{4}{a_1^4} \left[(1-\alpha) \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \right]; \quad (8)$$

$$m_1[n | H_1] = \frac{4}{a_1^4} \left[\beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \right]. \quad (9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вальд, Последовательный анализ, Физматгиз, М., 1960.
2. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман, Методы статистического последовательного анализа и их применения, изд. Сов. радио, М., 1962.
3. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2, изд. Сов. радио, М., 1968.
4. Б. Р. Левин, Я. А. Фомин, Радиотехника, 20, № 10, 1 (1965).
5. Я. А. Фомин, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 10, № 1, 54 (1969).

Поступила в редакцию
17 марта 1969 г.

A SUCCESSIVE PROCEDURE OF DETECTING A DETERMINATE WEAK SIGNAL

Ya. A. Fomin

A successive procedure of detecting the determinate weak signal is analysed according to realizations of the envelope of the random process observed. The approximate expression of the distribution of the successive procedure duration when detecting the weak signal is obtained and derived. The results of calculating this distribution for symmetric and asymmetric thresholds are given.

УДК 538.56 : 519.25

ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ВЫБРОСОВ ОТРЕЗКА НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

B. A. Геранин

Получено выражение дисперсии числа пересечений на интервале $[t, t + T]$ мультиплективно нестационарного гауссова процесса (1) с аддитивно нестационарным гауссовым уровнем (2). Частным случаем полученных результатов являются известные выражения для дисперсии числа выбросов отрезка гауссова процесса за детерминированный уровень.

В [1] найдено математическое ожидание числа пересечений $N(t, T)$ на интервале времени $[t, t + T]$ случайных процессов

$$\xi(t) = a(t) \varepsilon(t) \quad (1)$$

и

$$y(t) = g(t) + \zeta(t), \quad (2)$$

где $a(t)$ и $g(t)$ — детерминированные, а $\varepsilon(t)$ и $\zeta(t)$ — независимые стационарные центрированные гауссовые процессы. Практическая значимость результатов анализа пересечений указанных моделей нестационарных процессов показана в [1].

Ниже получено выражение дисперсии случайной величины $N(t, T)$.

Поскольку выбросы нестационарного случайного процесса (1) за случайный уровень (2) эквивалентны выбросам процесса

$$\eta(t) = \xi(t) - \zeta(t) = a(t) \varepsilon(t) - \zeta(t) \quad (3)$$

за детерминированный уровень $g(t)$, дисперсия $N(t, T)$ равна (см., например, [2])

$$\sigma_N^2(t, T) = \langle N(t, T) \rangle - [\langle N(t, T) \rangle]^2 + \int_t^{t+T} \int_t^{t+T} S(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (4)$$

где

$$S(t_1, t_2) = \int_{\dot{g}(t_1)}^{\infty} \int_{\dot{g}(t_2)}^{\infty} [\dot{\eta}(t_1) - \dot{g}(t_1)] [\dot{\eta}(t_2) - \dot{g}(t_2)] \times \\ \times w_4[\dot{g}(t_1), \dot{\eta}(t_1), \dot{g}(t_2), \dot{\eta}(t_2)] d\dot{\eta}(t_1) d\dot{\eta}(t_2), \quad (5)$$

$w_4[\eta(t_1), \dot{\eta}(t_1), \eta(t_2), \dot{\eta}(t_2)]$ — совместная плотность вероятности процесса $\eta(t)$ и его производной $\dot{\eta}(t)$ в два момента времени.

Значение $\langle N(t, T) \rangle$ — известно (см. [1], формула (14)). Основные трудности на пути к получению $\sigma_N^2(t, T)$ связаны с интегрированием выражения (5). Покажем, как они могут быть преодолены.

Так как случайный процесс $\eta(t)$ гауссов, то

$$S(t_1, t_2) = (2\pi)^{-2} D^{-1/2} [\sigma_\eta(t_1) \sigma_\eta(t_2)]^{-1} \sigma_{\dot{\eta}}(t_1) \sigma_{\dot{\eta}}(t_2) \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2D} (D_{11} h_1^2 + D_{22} h_2^2 + 2D_{12} h_1 h_2) \right] \times$$

$$\times \int_{\lambda_1}^{\infty} \int_{\lambda_2}^{\infty} (x_1 - \lambda_1)(x_2 - \lambda_2) \exp \left[-\frac{1}{2D} (D_{33}x_1^2 + D_{44}x_2^2 + \right. \\ \left. + 2D_{13}h_1x_1 + 2D_{14}h_1x_2 + 2D_{23}h_2x_1 + 2D_{24}h_2x_2 + 2D_{34}x_1x_2) \right] dx_1 dx_2. \quad (6)$$

Здесь

$$h_j = \frac{g(t_j)}{\sigma_{\eta}(t_j)}, \quad \lambda_j = \frac{\dot{g}(t_j)}{\sigma_{\dot{\eta}}(t_j)}, \quad x_j = \frac{\dot{\eta}(t_j)}{\sigma_{\ddot{\eta}}(t_j)} \quad (j = 1, 2);$$

D_{ik} — алгебраическое дополнение элемента R_{0k} детерминанта корреляционной матрицы, составленной из коэффициентов корреляции случайных величин $\eta(t_1), \eta(t_2), \dot{\eta}(t_1), \dot{\eta}(t_2)$. Значения D_{ik} приведены в Приложении.

Замена переменных

$$x_1 - \lambda_1 = u + m,$$

$$x_2 - \lambda_2 = v + n$$

при

$$m = \frac{KD_{34} - GD_{44}}{D_{33}D_{44} - D_{34}^2},$$

$$n = \frac{GD_{34} - KD_{33}}{D_{33}D_{44} - D_{34}^2}$$

дает

$$S(t_1, t_2) = A \exp \left[-\frac{1}{2D} (B + E) \right] (mnI_1 + I_2), \quad (7)$$

где

$$I_1 = \int_{u=-m}^{\infty} \int_{v=-n}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2D} (D_{33}u^2 + 2D_{34}uv + D_{44}v^2) \right] du dv, \quad (8)$$

$$I_2 = \int_{u=-m}^{\infty} \int_{v=-n}^{\infty} (uv + mv + nu) \exp \left[-\frac{1}{2D} (D_{33}u^2 + 2D_{34}uv + D_{44}v^2) \right] du dv, \quad (9)$$

$$A = (2\pi)^{-2} D^{-1/2} [\sigma_{\eta}(t_1) \sigma_{\eta}(t_2)]^{-1} \sigma_{\dot{\eta}}(t_1) \sigma_{\dot{\eta}}(t_2),$$

$$B = D_{13}h_1^2 + 2D_{12}h_1h_2 + 2D_{13}h_1\lambda_1 + 2D_{14}h_1\lambda_2 + D_{22}h_2^2 +$$

$$+ 2D_{23}h_2\lambda_1 + 2D_{24}h_2\lambda_2 + D_{33}\lambda_1^2 + 2D_{34}\lambda_1\lambda_2 + D_{44}\lambda_2^2,$$

$$E = 2Gm + 2Kn + D_{33}m^2 + 2D_{34}mn + D_{44}n^2,$$

$$G = D_{13}h_1 + D_{23}h_2 + D_{33}\lambda_1 + D_{34}\lambda_2,$$

$$K = D_{14}h_1 + D_{24}h_2 + D_{34}\lambda_1 + D_{44}\lambda_2.$$

Интеграл I_1 легко преобразуется к виду

$$I_1 = \frac{\beta_1^2 2\pi \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{D_{33}D_{44}}} \left[\Phi \left(\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}} \right) - I \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}} ; \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}} ; \rho \right) \right], \quad (10)$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{D}{1 - \rho^2}}, \quad \rho = \frac{D_{34}}{\sqrt{D_{33} D_{44}}},$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Интеграл

$$I(a; b; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_a^\infty \int_b^\infty \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right] dx dy$$

табулирован в [3].

Интеграл I_2 после замены переменных

$$y_1 = (D_{33}u + D_{34}v) D_{33}^{-1/2},$$

$$y_2 = (D_{33}D_{44} - D_{34}^2)^{1/2} D_{33}^{-1/2} v$$

принимает вид

$$I_2 = (D_{33}D_{44} - D_{34}^2)^{-1} \int_{y_1=l}^{\infty} \int_{y_2=p}^{(y_1+\beta)/\alpha} [-py_1 + y_1 y_2 + (mD_{33}^{1/2} - nD_{34}D_{33}^{-1/2}) y_2 - \alpha y_2^2] \exp\left[-\frac{1}{2D}(y_1^2 + y_2^2)\right] dy_1 dy_2, \quad (11)$$

где

$$l = -(mD_{33} + nD_{34}) D_{33}^{-1/2},$$

$$p = -n(D_{33}D_{44} - D_{34}^2)^{1/2} D_{33}^{-1/2},$$

$$\alpha = D_{34}(D_{33}D_{44} - D_{34}^2)^{-1/2},$$

$$\beta = mD_{33}^{1/2}.$$

Теперь легко убедиться, что

$$I_2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (12)$$

причем

$$S_1 = \frac{n^2 \sqrt{2\pi} D^{3/2}}{p D_{33} \sqrt{1+\alpha^2}} [1 - \Phi(\gamma)] \exp\left[-\frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)}\right]; \quad (13)$$

$$S_2 = -\frac{n^2 D^2}{p^2 D_{33}} \left\{ \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \exp\left[-\gamma^2 - \frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)}\right] - \frac{\beta\alpha}{1+\alpha^2} \left[\frac{2\pi}{D(1+\alpha^2)} \right]^{1/2} [1 - \Phi(\gamma \sqrt{2})] \exp\left[-\frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)}\right] - \exp\left(-\frac{p^2 + l^2}{2D}\right) \right\}; \quad (14)$$

$$S_3 = - \frac{n^2 \sqrt{2\pi} D^{3/2}}{p^2 D_{33}} \left(m \sqrt{D_{33}} - n \frac{D_{34}}{\sqrt{D_{33}}} \right) \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} [1 - \Phi(\gamma)] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[- \frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)} \right] - \left[1 - \Phi \left(\frac{l}{\sqrt{D}} \right) \right] \exp \left(- \frac{p^2}{2D} \right) \right\}; \quad (15)$$

$$S_4 = - \frac{n^3 \sqrt{2\pi} D^{3/2} D_{34}}{p^3 D_{33}^{3/2}} \left\{ -p \left[1 - \Phi \left(\frac{l}{\sqrt{D}} \right) \right] \exp \left(- \frac{p^2}{2D} \right) + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{D}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \exp(-\gamma^2) - \frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)^3}} \{1 - \Phi(\gamma\sqrt{2})\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} \{1 - \Phi(\gamma)\} \right] \exp \left[- \frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)} \right] + \frac{\beta_1^2 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}{\sqrt{DD_{33}D_{44}}} \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi \left(\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}} \right) - I \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}}; \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}}; \rho \right) \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\gamma = -p \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{D}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{D(1+\alpha^2)}}.$$

Заметим, что каждая из сумм S_1, S_2, S_3 и S_4 — результат вычисления интегралов, образующих I_2 (см. (11)).

С учетом соотношений (7) — (16) получаем

$$S(t_1, t_2) = \frac{A \sqrt{2\pi} \frac{n^2 D^{3/2}}{p^2 D_{33}} \left\{ n \sqrt{D_{44}} [1 - \Phi(\gamma)] \times \right.}{\left. \times \exp \left[- \frac{\beta^2}{2D(1+\alpha^2)} \right] + m \sqrt{D_{33}} \left[1 - \Phi \left(\frac{l}{\sqrt{D}} \right) \right] \exp \left(- \frac{p^2}{2D} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{D}{2\pi}} \exp \left(- \frac{p^2 + l^2}{2D} \right) + \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\rho^2) DD_{33} D_{44}}} \left(\frac{m}{n} p^2 D_{33} - DD_{34} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi \left(\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}} \right) - I \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}}; \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}}; \rho \right) \right] \right\} \times \\ \left. \times \exp \left[- \frac{1}{2D} (B + E) \right]. \right. \quad (17)$$

Результаты известных исследований дисперсии числа выбросов случайного процесса за детерминированный уровень следуют из (17) как частные случаи.

При $a(t) = c_0 + c_1 \psi_1(t)$, $\zeta(t) = 0$, $g(t) = \psi(t) - c_2 \psi_2(t)$ (17) сводится к полученному в [4] выражению дисперсии числа выбросов за детерминированный уровень $\psi(t)$ отрезка нестационарного случайного процесса

$$Y(t) = [c_0 + c_1 \psi_1(t)] e(t) + c_2 \psi_2(t),$$

где c_0, c_1, c_2 — константы, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — детерминированные процессы.

Полагая $a(t) = 1$, $\zeta(t) = 0$, $g(t) = H$, легко прийти к выражению (6) из работы [5], где рассмотрены выбросы стационарного гауссова процесса $e(t)$ за фиксированный уровень H .

Наконец, приняв $a(t) = 1$, $\zeta(t) = 0$, $g(t) = 0$, придем к основному результату работы [6]. Кстати, в каждом из трех упомянутых здесь частных случаев, приведенные в Приложении значения R_{ik} сводятся к найденным в [7].

Автор благодарен Н. Г. Гаткину и М. И. Карновскому за внимание к работе и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгебраические дополнения определителя D корреляционной матрицы, составленной из коэффициентов корреляции случайных величин $\eta(t_1)$, $\eta(t_2)$, $\eta(t_1)$, $\eta(t_2)$, имеют вид

$$D_{11} = 1 + 2R_{23}R_{24}R_{34} - R_{23}^2 - R_{24}^2 - R_{34}^2,$$

$$D_{12} = R_{12}(R_{34}^2 - 1) + R_{23}(R_{13} - R_{24}R_{34}) + R_{14}(R_{24} - R_{14}R_{23}),$$

$$D_{13} = R_{13}(R_{24}^2 - 1) + R_{12}(R_{23} - R_{24}R_{34}) + R_{14}(R_{34} - R_{23}R_{24}),$$

$$D_{14} = R_{14}(R_{23}^2 - 1) + R_{12}(R_{24} - R_{23}R_{34}) + R_{13}(R_{34} - R_{24}R_{23}),$$

$$D_{22} = 1 + 2R_{13}R_{14}R_{34} - R_{14}^2 - R_{34}^2 - R_{13}^2,$$

$$D_{23} = R_{23}(R_{14}^2 - 1) + R_{24}(R_{34} - R_{13}R_{14}) + R_{12}(R_{13} - R_{14}R_{34}),$$

$$D_{24} = R_{24}(R_{13}^2 - 1) + R_{23}(R_{34} - R_{13}R_{14}) + R_{12}(R_{14} - R_{13}R_{34}),$$

$$D_{33} = 1 + 2R_{12}R_{14}R_{24} - R_{12}^2 - R_{14}^2 - R_{24}^2,$$

$$D_{34} = R_{34}(R_{12}^2 - 1) + R_{14}(R_{13} - R_{12}R_{23}) + R_{24}(R_{23} - R_{12}R_{13}),$$

$$D_{44} = 1 + 2R_{12}R_{13}R_{23} - R_{12}^2 - R_{13}^2 - R_{23}^2.$$

Здесь

$$R_{12} = [a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} \times \\ \times [a(t_1) a(t_2) \sigma_e^2 R_{ee}(\tau) + \sigma_\zeta^2 R_\zeta(\tau)],$$

$$R_{13} = [a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [a^2(t_1) \sigma_e^2 + a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} \times \\ \times a(t_1) \dot{a}(t_1) \sigma_e^2,$$

$$R_{14} = [a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [a^2(t_2) \sigma_e^2 + a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} \times \\ \times [a(t_1) \dot{a}(t_2) \sigma_e^2 R_{ee}(\tau) + a(t_1) a(t_2) \sigma_e \sigma_e R_{ee}(\tau) + \sigma_e \sigma_\zeta R_{\zeta\zeta}(\tau)],$$

$$R_{23} = [a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [a^2(t_1) \sigma_e^2 + a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} \times \\ \times [a(t_2) \dot{a}(t_1) \sigma_e^2 R_{ee}(\tau) - a(t_1) a(t_2) \sigma_e \sigma_e R_{ee}(\tau) - \sigma_e \sigma_\zeta R_{\zeta\zeta}(\tau)],$$

$$R_{24} = [a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [a^2(t_2) \sigma_e^2 + a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} a(t_2) \dot{a}(t_2) \sigma_e^2,$$

$$R_{34} = [\dot{a}^2(t_1) \sigma_e^2 + a^2(t_1) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} [\dot{a}^2(t_2) \sigma_e^2 + a^2(t_2) \sigma_e^2 + \sigma_\zeta^2]^{-1/2} \times \\ \times [\dot{a}(t_1) \dot{a}(t_2) \sigma_e^2 R_{ee}(\tau) + \dot{a}(t_1) a(t_2) \sigma_e \sigma_e R_{ee}(\tau) - a(t_1) \dot{a}(t_2) \sigma_e \sigma_e R_{ee}(\tau) + \\ + \sigma_\zeta^2 R_{\zeta\zeta}(\tau) + a(t_1) a(t_2) \sigma_e^2 R_{ee}(\tau)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 8, 1123 (1967).
2. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 9, 371 (1964).
3. Biometrika, London, 19, 354 (1927).
4. В. А. Геранин, Труды II Всесоюзного симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей», 1, 215 (1969).
5. В. А. Геранин, Радиотехника и электроника, 12, 788 (1967).
6. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 9, 45 (1964).
7. В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 1, 23 (1956).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
18 марта 1969 г.DISPERSION OF THE NUMBER OF OVERSHOOOTS FOR THE INTERVAL
OF A NONSTATIONARY RANDOM PROCESS*V. A. Geranin*

The expression of the dispersion of the number of crossings in the interval $[t, t+T]$ of multiplicatively nonstationary Gauss process (1) with additively nonstationary Gauss level (2) is derived. The known expressions for the dispersion of the blips above the determined level are a particular case of the results obtained.

УДК 621.396.67

ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН МЕТОДОМ ОПТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НЕКОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ

B. A. Зверев, E. F. Орлов, Э. M. Салина, Г. A. Шаронов

Рассматриваются методы оптической обработки информации в некогерентном свете применительно к моделированию антенн. Приводятся результаты измерений диаграмм направленности синфазных антенн различной конфигурации.

Необходимость моделирования антенн возникает в первую очередь при разработке антенн больших размеров. Однако моделирование таких антенн и исследование их характеристик в радиодиапазоне связано с рядом трудностей. В этих условиях представляет интерес использование методов оптической обработки информации. Оптическая обработка вследствие двумерности оптической информации и высокой скорости обработки позволяет довольно простыми методами решать целый ряд задач антенной техники, например, определение диаграмм направленности антенн по измерениям поля на раскрыве, измерение интегральных характеристик антенн, синтезирование антенн большой апертуры. Для этих целей в последнее время находят широкое применение методы когерентной оптики и голографии [1-3].

В данной работе описывается метод оптического моделирования антенн в некогерентном свете. Этот метод позволяет определять диаграмму направленности антенн по распределению поля на раскрыве, осуществляя двумерное преобразование Фурье. По сравнению с аналогичными системами когерентной оптики в данном случае не требуются когерентные источники света и предъявляются меньшие требования к оптической записи поля на транспарант из-за отсутствия влияния фазовых шумов фотопленки. Кроме того, некогерентные оптические системы могут быть выполнены из оптических элементов сравнительно невысокого класса точности.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН ПРИ ПОМОЩИ ОПТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Известно, что если задано поле на раскрыве антенны $F(X, Y)$, то в пределах применимости принципа Гюйгенса—Кирхгофа диаграмма направленности такой антенны $G(\theta, \varphi)$ запишется в виде

$$G(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(X, Y) \exp [ik_0 \sin \theta (X \cos \varphi + Y \sin \varphi)] dXdY, \quad (1)$$

где X, Y — координаты на плоскости раскрыва антенны, θ, φ — углы в сферической системе координат, связанной с антенной, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число. Таким образом, операция нахождения диаграммы направленности $G(\theta, \varphi)$ сводится к двумерному фурье-преобразованию распределения поля на раскрыве, которое может быть выполнено оптическими методами. Для этого необходимо записать распределение поля $F(X, Y)$,

которое в общем случае описывается комплексной функцией, на транспарант. Амплитудно-фазовое распределение поля $F(X, Y)$ может быть зарегистрировано голографическим способом записи при помощи опорного когерентного излучения, создаваемого вспомогательным источником, или опорного электрического сигнала, имитирующего плоскую волну, нормально падающую на раскрытия антены. При этом на транспарант в виде переменной прозрачности $f(x, y)$ записывается интерференционная картина поля на раскрытии, которая несет информацию как об амплитудном, так и о фазовом распределении поля на раскрытии.

Оптическая схема, осуществляющая двумерное преобразование фурье-функции прозрачности транспаранта $f(x, y)$ при некогерентном освещении, представлена на рис. 1. Параллельный пучок света, создаваемый источником 1 и коллиматором 2, модулируется в пространстве последовательно транспарантом 3 и перестраиваемым эталоном 4, который представляет собой муаровую структуру, образованную скрещенными оптическими решетками [4]. Тем самым осуществляется умножение функции $f(x, y)$ на пространственную синусоидальную функцию вида $\cos(kx + \psi)$, после чего световой поток собирается линзой 5 на катод фотоприемника 6.

Рис. 1. Схема оптической установки для снятия диаграммы направленности.

умножителя 6, т. е. выполняется операция пространственного интегрирования. Такая оптическая схема позволяет осуществить следующую математическую операцию:

$$I(k) = I_0 \int \int_S [\alpha_0 + \alpha f(x, y)] [\beta_0 + \beta \cos(kx + \psi)] dx dy, \quad (2)$$

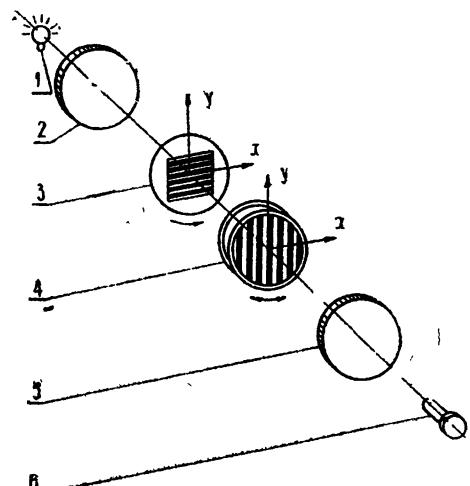
где $I(k)$ — величина светового потока, регистрируемого фотоумножителем, I_0 — постоянный световой поток, падающий на транспарант, α_0 и β_0 — постоянные коэффициенты пропускания транспаранта и эталона частоты соответственно, α и β — коэффициенты пространственной модуляции светового потока, $k = 2\pi/\lambda$ и ψ — волновое число и фаза синусоидальной пространственной структуры, S — поверхность интегрирования, определяемая размерами пучка света.

При регистрации $I(k)$ фаза эталона частоты ψ пробегает все возможные значения от 0 до 2π и выделяется переменная составляющая светового потока I_{\sim} , которую можно записать в виде

$$I_{\sim}(k) = \left| \gamma \int \int_S f(x, y) e^{ikx} dx dy + I_0 \alpha_0 \beta \int \int_S e^{ikx} dx dy \right|, \quad (3)$$

где $\gamma = I_0 \alpha \beta$ — коэффициент пропорциональности. Второй интеграл, соответствующий отклику на постоянную составляющую прозрачности транспаранта с записью сигнала, при достаточно больших апертурах можно не учитывать.

Если транспарант или синусоидальную пространственную структуру



поворнуть друг относительно друга на некоторый угол φ , то, делая замену переменных с учетом поворота, для интенсивности I_{\sim} получим

$$I_{\sim}(k, \varphi) = \gamma \left| \iint_S f(x, y) e^{ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx dy \right|. \quad (4)$$

Из сравнения (1) и (4) видно, что функция $I_{\sim}(k, \varphi)$ с точностью до постоянного множителя описывает диаграмму направленности антенны с распределением поля $F(X, Y)$ в измененном масштабе. Изменение масштаба возникает, во-первых, при записи поля на транспарант (появляется коэффициент уменьшения масштаба m ; $x=mX$, $y=mY$), во-вторых, при регистрации; поскольку $k = (k_0/m)\sin \theta$, для угла θ получим

$$\theta = \arcsin \frac{km}{k_0}. \quad (5)$$

Таким образом, в результате оптической обработки определяется функция $I_{\sim}(k, \varphi)$, пропорциональная двумерному фурье-преобразованию интерференционной картины поля $f(x, y)$, которое в определенной области углов, зависящей от способа записи на транспарант, дает модуль диаграммы направленности антенны $G(\theta, \varphi)$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения диаграмм направленности антенн методом оптического моделирования были выполнены на установке, схема которой представлена на рис. 1. Результаты двумерного спектрального анализа регистрировались в плотностном виде на фотопленке при помощи фототелеграфного аппарата «Нева», в котором движение пленки было синхронизировано с движением перестраиваемого эталона пространственной частоты и поворотом транспаранта. Кроме того, регистрировались сечения диаграммы направленности при фиксированных углах φ или θ .

Для исследования возможностей методов оптической обработки в некогерентном свете были получены диаграммы направленности антennы с равномерным синфазным возбуждением при различной конфигурации раскрыва. В этих случаях исследуемые записи поля — транспаранты — представляли собой диафрагмы соответствующей формы и размеров с синусоидальным распределением прозрачности вдоль одной из координат с волновым вектором $k_1 = k_0/m$. Вид транспарантов, соответствующих квадратному, треугольному и кольцевому раскрывам антennы, представлен на рис. 2а, б, в. На рис. 3а, б, в показаны соответ-

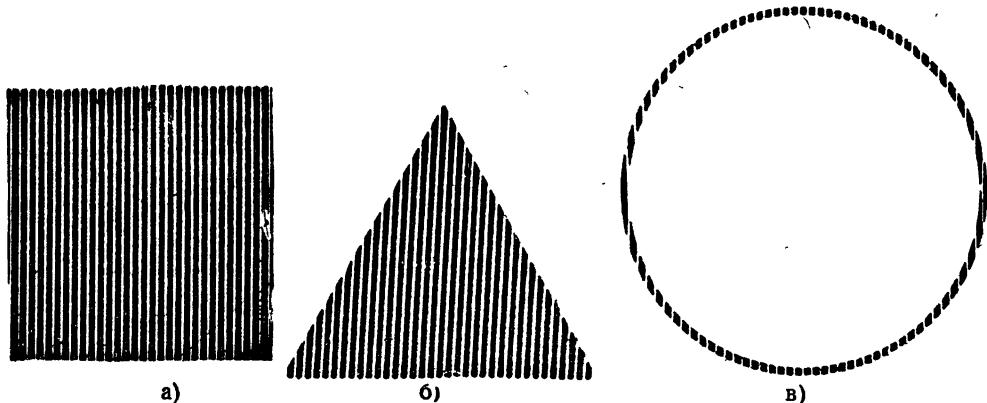
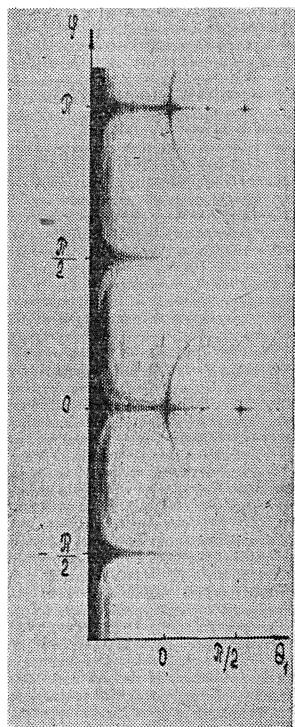
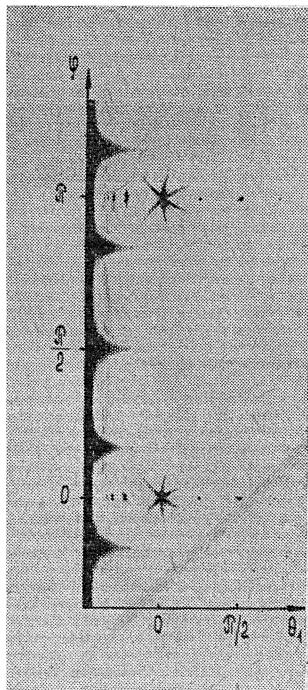


Рис. 2. Вид транспарантов, соответствующих различным раскрывам антennы:
а) квадратному, б) треугольному, в) кольцевому.

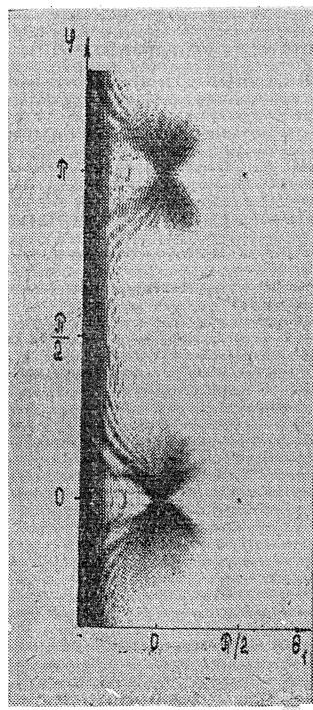
ствующие диаграммы направленности, в координатах φ и $\theta_1 = \arcsin[(k - k_1)/k_1]$, зарегистрированные в плотностном виде. Значения $\theta_1 = \varphi = 0$ на рисунках соответствуют максимумам диаграмм



а)



б)



в)

направленности. В окрестностях этих точек видны лепестки, характерные для исследуемых раскрытий. Сигнал в левой части рисунков обусловлен наличием постоянной составляющей прозрачности транспаранта. Дополнительные максимумы по оси θ_1 при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ являются следствием нелинейных искажений при получении транспаранта и эталона частоты. Указанные факторы исключаются, если пространственная частота синусоидального распределения прозрачности транспаранта существенно превышает пространственный спектр, соответствующий диаграмме направленности моделируемой антенны. Сечения диаграмм направленности в главных

Рис. 3. Диаграммы направленности $G(\theta_1, \varphi)$ различных раскрытий антенн:
а) квадратного, б) треугольного, в) кольцевого.

сечениях при $\varphi = 0$ и $\theta_1 = 0$ представлены на рис. 4 а, б, в и 5 а, б, в.

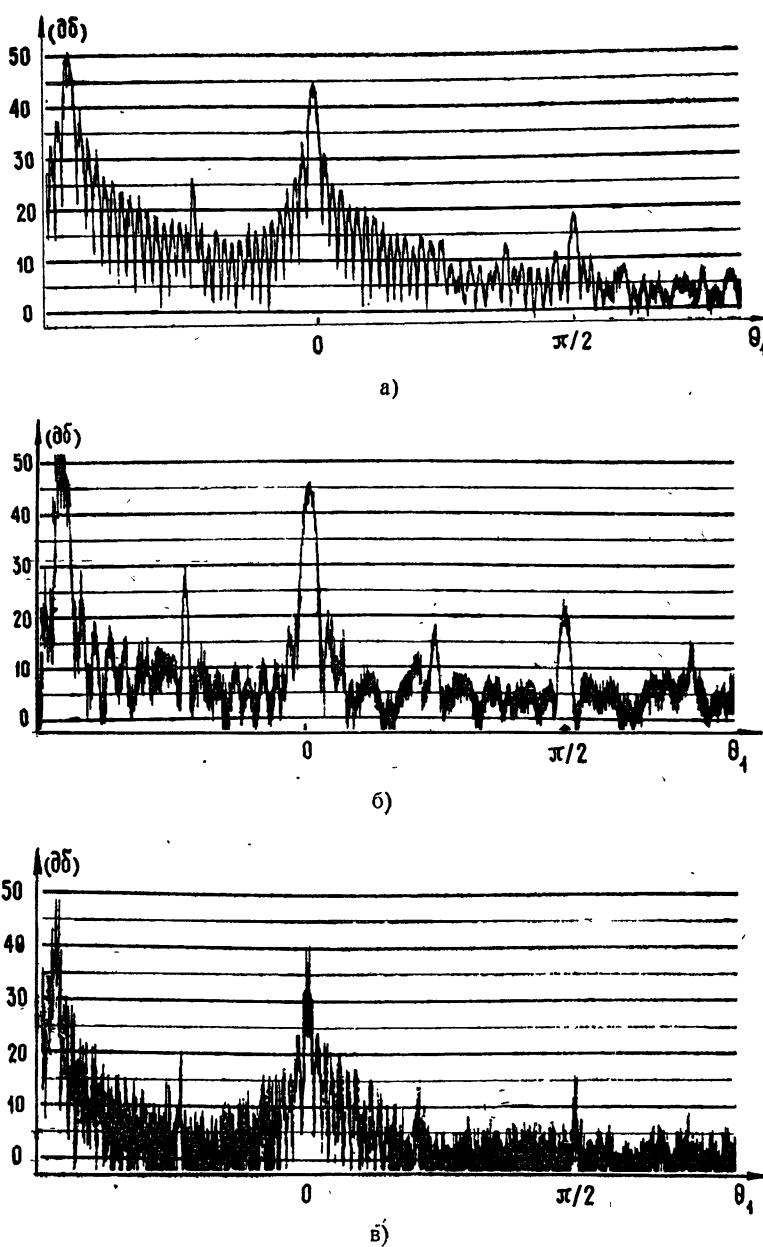


Рис. 4. Сечение диаграмм направленности $G(\theta_1, \varphi)$ при $\varphi=0$
различных раскрытий антенн:
а) квадратного, б) треугольного, в) кольцевого.

На рис. 4 и 5 по оси x отложено значение углов φ или θ_1 в радианах, по оси y — напряжение сигнала с выхода фотоумножителя в децибелах. Теоретические значения диаграммы направленности в главном сечении для синфазной квадратной антенны, рассчитанные по формуле $(\sin z/z)^2$, показаны на рис. 6. На кривую нанесены измеренные величины. Как видно из рисунков, имеет место хорошее соответствие между результатами измерений и данными расчета.

Основные характеристики использованного устройства оптической обработки в некогерентном свете следующие: динамический диапазон по входу и выходу, который определяется в основном свойствами фотопленки, составляет ~ 35 дБ; динамический диапазон на выходе при регистрации сечений диаграмм ~ 50 дБ, максимальное отношение размеров моделируемой антенны к длине волны ~ 300 . Разрешающая способность по углу $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ радиан.

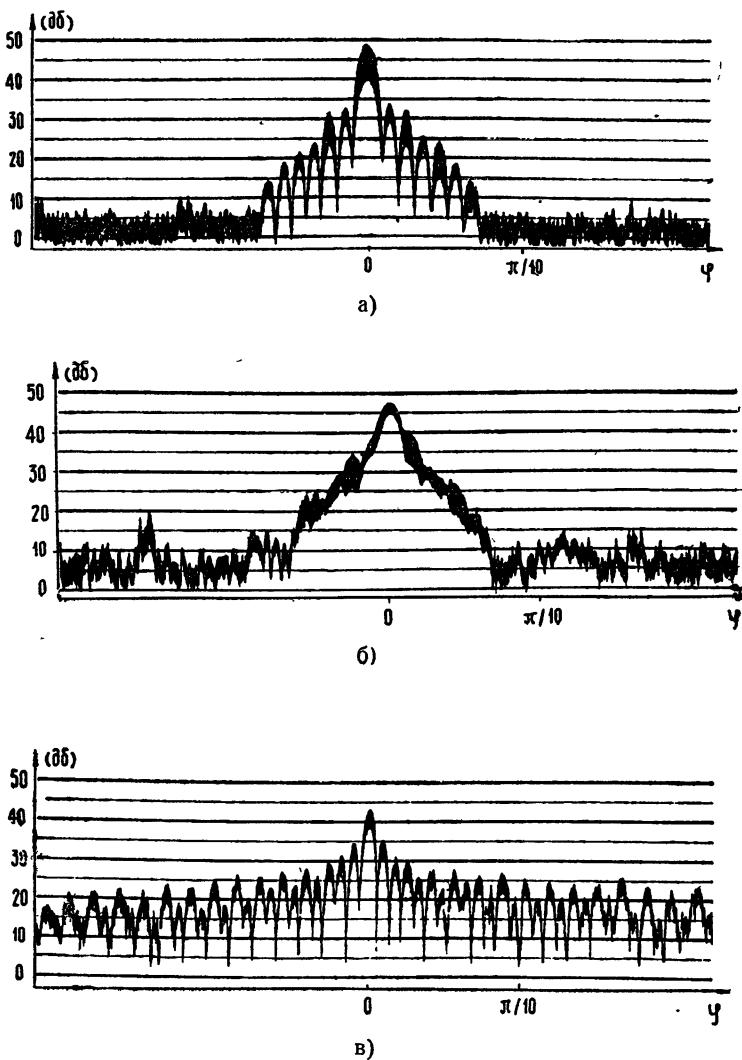


Рис. 5. Сечения диаграмм направленности $G(\theta_1, \varphi)$ при $\theta_1 = 0$
различных раскрытий антены:
а) квадратного, б) треугольного, в) кольцевого.

В заключение отметим, что по полученным двумерным диаграммам направленности можно определить некоторые интегральные характеристики антенн, как например, коэффициент направленного действия и коэффициент рассеяния. Для этого необходимо измерить световой поток, прошедший через полученную диаграмму направленности и соответствующий фильтр пространственных частот в виде специальной диафрагмы.

Поскольку описанная система обработки выполняет операцию двумерного фурье-преобразования, она позволяет также частично решать задачу синтеза плоских антенн, определяя распределение поля на раскрыве по заданной диаграмме направленности.

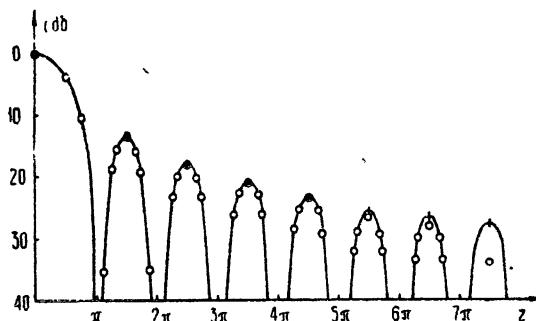


Рис. 6. Диаграмма направленности в главном сечении для квадратного раскрыва антенны. Точки—измеренные величины интенсивности для главного сечения диаграммы при $\theta_1=0$, крестики—измеренные величины при $\varphi=0$. Кривая рассчитана по формуле $G(z)=20 \lg (\sin z/z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Бахрах, О. Н. Владимирова, А. П. Курочкин, Г. А. Соболев, Г. Х. Фридман, сб. Антенны, вып. 2, 33 (1967).
2. А. П. Курочкин, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1169 (1968).
3. Г. Б. Гельфридх, А. Н. Коржавин, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1175 (1968).
4. В. А. Зверев, И. В. Мосалов, Е. Ф. Орлов, В. Л. Сибиряков, ПТЭ, № 1; 110 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 февраля 1969 г.

MEASUREMENTS OF ANTENNA RADIATION PATTERNS BY THE METHOD OF OPTICAL MODELLING IN INCOHERENT LIGHT

V. A. Zverev, E. F. Orlov, E. M. Salina, G. A. Sharonov

The methods of optical processing of information in incoherent light are considered in application to modelling antennas. The results of measuring the radiation pattern of cophased antennas of different configuration are presented.

УДК 538.57

СТРУКТУРА ПОЛЯ В БЛИЗИ КАУСТИК В СРЕДЕ С ФЛУКТУАЦИЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман

Рассмотрена задача о распространении волн в регулярно-неоднородной среде с флуктуациями диэлектрической проницаемости. Получены асимптотические выражения, пригодные для описания среднего поля и средней плотности энергии в местах нарушения геометрической оптики

Цель настоящей работы состоит в оценке влияния случайных неоднородностей среды на структуру поля в областях фокусировки геометрооптических лучей (прикаустические зоны). Рассмотрение проводится в рамках метода Маслова [1, 2], который является одним из обобщений геометрической оптики и приводит к равномерным асимптотическим решениям, хорошо описывающим поля вблизи каустик любого порядка. Для простоты решается двумерная скалярная задача, однако обобщение на трехмерный случай и векторные поля проводится очевидным образом.

1. Пусть скалярное поле $u(x, z)$ описывается уравнением

$$\Delta u + k_0^2 [\varepsilon_0(x, z) + \varepsilon_1(x, z)] u = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0(x, z)$ — среднее значение диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_1(x, z)$ — флуктуации диэлектрической проницаемости. Предполагается, что характерный масштаб регулярных неоднородностей L , размер случайных неоднородностей l и длина волны в среде λ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$L \gg l \gg \lambda. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) ищется в виде

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(z, p) \exp(i k_0 x p) dp. \quad (3)$$

Метод Маслова заключается в том, что в (3) подставляется геометрооптическая асимптотика пространственной фурье-трансформанты поля $\tilde{u}(z, p)$:

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, p) \exp\{ik_0[xp + \varphi(z, p)]\} dp + O\left(\frac{1}{k_0}\right), \quad (4)$$

где функция $\varphi(z, p)$ определяется из функционального уравнения [2]

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon_0\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}, z\right) + \varepsilon_1\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}, z\right) - p^2. \quad (5)$$

Уравнение для весового множителя $A(z, p)$ приведено в [2].

Представим $\varphi(z, p)$ в виде суммы двух членов

$$\varphi(z, p) = \varphi_0(z, p) + \varphi_1(z, p), \quad (6)$$

где $\varphi_0(z, p)$ есть среднее значение эйконала в фазовом пространстве, $\varphi_1(z, p)$ — отклонение от среднего значения. При достаточно малых флуктуациях диэлектрической проницаемости ($\epsilon_i^2 \ll \epsilon_0^2$) можно пренебречь отклонениями среднего эйконала от невозмущенного значения и флуктуациями весового множителя $A(z, p)$ *.

Для вычисления среднего поля и среднего квадрата поля предположим, что случайная величина $\varphi_1(z, p)$ распределена по нормальному закону. Это предположение оправдано, если длина трассы много больше размеров случайных неоднородностей. Усредняя (4), получаем**

$$\bar{u}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z, p) \exp \left\{ -\frac{1}{2} k_0^2 \bar{\varphi}_1^2(z, p) + ik_0[xp + \varphi_0(z, p)] \right\} dp; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{|u|^2} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z, p_1) A_0(z, p_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} k_0^2 D_{\varphi_1} + ik_0[x(p_2 - p_1) + \varphi_0(z, p_2) - \right. \\ & \left. - \varphi_0(z, p_1)] \right\} dp_1 dp_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $D_{\varphi_1} = [\varphi_1(z, p_2) - \varphi_1(z, p_1)]^2$ — структурная функция флуктуаций эйконала.

2. Разлагая величину $\bar{\varphi}_1^2(z, p)$ в интеграле (7) в ряд Тейлора вблизи точки p_0 , лежащей внутри области, существенной для интегрирования, и оставляя только члены первого порядка по $(p - p_0)$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, z) = & \exp \left[-\frac{1}{2} k_0^2 \bar{\varphi}_1^2(z, p_0) + ik_0 x p_0 \right] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} A(z, p) \exp \{ ik_0[(x+i\alpha)(p-p_0)+\varphi_0(z, p)] \} dp + 0 \left[\left| \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1^2}{\partial p^2} \right| / \Lambda_x^2 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha = \frac{1}{2} k_0 \frac{\partial}{\partial p} \bar{\varphi}_1^2(z, p_0)$; Λ_x — характерный масштаб неоднородности поля в направлении x .

Из (9) видно, что

$$\bar{u}(x, z) \simeq \exp \left[-\frac{1}{2} k_0^2 \bar{\varphi}_1^2(z, p_0) + k_0 \alpha p_0 \right] u_0(x + i\alpha, z), \quad (10)$$

где $u_0(x, z)$ — решение невозмущенной задачи, которое вблизи гладкой каустики, например, достаточно хорошо описывается функцией Эйри [3]

$$u_0(\xi) = g_0 v(\xi/\Lambda). \quad (11)$$

Здесь ξ — координата, нормальная к каустике ($\xi = 0$ соответствует точке на каустике), Λ — характерный масштаб, зависящий от длины волны и радиусов кривизны каустики и касательного к ней луча. В этом случае среднее поле будет описываться функцией Эйри от комплексного аргумента

* Малость флуктуаций $A(z, p)$ не означает малости флуктуаций исходного поля.

** Чертой сверху обозначается усреднение по ансамблю реализаций

$$\bar{u}(\xi) \simeq g_0 \exp \left[-\frac{1}{2} k_0^2 \varphi_1^2(z_k, p_{\xi_0}) \right] v \left(\frac{\xi + i\alpha}{\Lambda} \right). \quad (12)$$

Сдвиг каустики среднего поля в комплексную область приводит к тому, что исчезает граница «свет»—«тень». В области $\xi > 0$, где поле экспоненциально убывало, появляется «бегучесть».

На рис. 1 приведены графики модуля функции $v[(\xi + i\alpha)/\Lambda]$ для различных значений параметра $\tau = \alpha/\Lambda$.

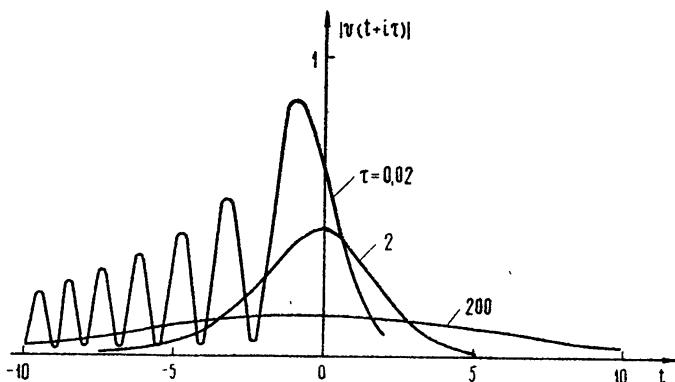


Рис. 1. Амплитуда среднего поля вблизи гладкой каустики, нормированная на экспоненциальный фактор $\exp \left(-\frac{1}{2} k_0^2 \varphi_1^2 \right)$.

3. Разлагая структурную функцию $D_{\varphi_1}(z, p_1, p_2)$ в (8) в двумерный ряд Тейлора вблизи p_0 и отбрасывая члены четвертого порядка и выше по $(p_2 - p_1)$, получаем асимптотическую формулу для $|\bar{u}|^2$:

$$\begin{aligned} |\bar{u}|^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} A_0(z, p_1) A_0(z, p_2) \times \\ & \times \exp \{ -\beta(p_2 - p_1)^2 + ik_0 [x(p_2 - p_1) + \varphi_0(z, p_2) - \varphi_0(z, p_1)] \} dp_1 dp_2 + \\ & + O(\lambda_0^6 \beta^2 / \varphi_1^2 \Lambda_x^4), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} k_0^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \right)_{p=p_0}^2.$$

Главный член разложения (13) удовлетворяет диффузионному уравнению

$$\frac{\partial^2 |\bar{u}|^2}{\partial x^2} = k_0^2 \frac{\partial |\bar{u}|^2}{\partial \beta} \quad (14)$$

с начальными условиями

$$|\bar{u}(x, z, \beta = 0)|^2 = u_0^2(x, z). \quad (15)$$

Следовательно,

$$|\bar{u}(x, z)|^2 = \frac{k_0}{2 \sqrt{\pi \beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{k_0^2(x-y)^2}{4\beta} \right] u_0^2(y, z) dy. \quad (16)$$

Величина β пропорциональна среднеквадратичному смещению луча

в направлении x . Действительно, уравнение случайного луча $x_{\text{сл}}(z, p_0)$ имеет вид

$$x_{\text{сл}} - x_0 = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \Big|_{p=p_0}. \quad (17)$$

Возводя (17) в квадрат и усредняя, получаем

$$\beta = \frac{1}{2} k_0^2 (\Delta x)^2. \quad (18)$$

Выражение (16) для среднего квадрата поля вблизи каустики с β , определяемой по формуле (18), было получено в работе [4] из качественных соображений о поведении случайных каустик. В [4] предполагалось, что решение (16) справедливо при $\Delta x^2 \ll l^2$. Такое ограничение является излишним.

На рис. 2 приведены графики $\bar{|u|^2}$ вблизи гладкой каустики при различных значениях параметра $\sigma = \Delta x^2 / \Lambda^2$.

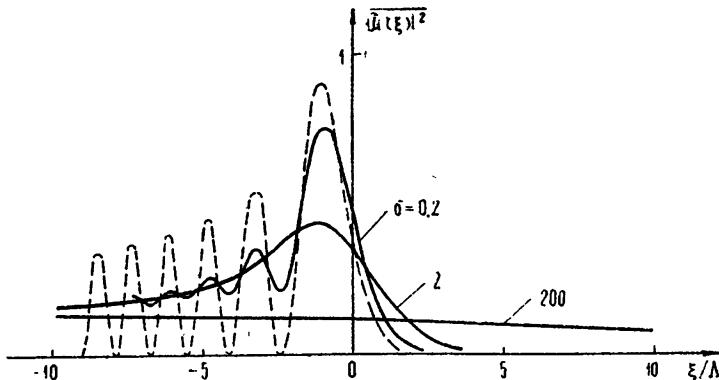


Рис. 2. Средний квадрат поля вблизи гладкой каустики (пунктиром изображен квадрат функции Эйри).

4. В ряде случаев бывает необходимо вычисление следующих приближений для среднего поля и средней плотности энергии. Это можно сделать как для интеграла (7), так и для интеграла (8), пользуясь искусственным приемом, примененным в предыдущем параграфе, т. е. составлением диффузионных уравнений. Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для следующих приближений (по сравнению с (10) и (16)):

$$\bar{u}_1(x, z) = \exp \left(-\frac{1}{2} k_0^2 \bar{\varphi}_1^2 + k_0 \alpha p \right) \frac{k_0}{2 \sqrt{\pi \gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{k_0^2 (x+i\alpha-y)^2}{4\gamma} \right] u_0(y, z) dy, \quad (19)$$

где $\gamma = \frac{1}{4} k_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \bar{\varphi}_1^2(z, p_0)$,

$$\bar{|u_1(x, z)|^2} = \frac{1}{2 \sqrt{\pi \delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\beta-v)^2}{4\delta} \right] K(x, z, v) dv, \quad (20)$$

где $\delta = k_0^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \right)^2 \right]^2 / 16 \bar{\varphi}_1^2$, а $K(x, z, \beta)$ — интеграл, стоящий в правой

части (16). Аналогичным образом можно отыскивать и следующие поправки.

5. В предыдущих разделах получены формулы, выражающие среднее поле и средний квадрат поля через решение соответствующей регулярной задачи и величины $\bar{\varphi}_1'(z, p)$ и $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right)^2$. Нахождение последних сопряжено с определенными трудностями. Обычно применяется метод последовательных приближений по степеням ε_1^2 . Приведем здесь функцию корреляции случайной фазы, полученную в первом приближении из уравнения (5) (функция корреляции флуктуаций ε_1 предполагается гауссовой):

$$\Gamma_{\varphi_1}(p_1, p_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \varepsilon_1^2 l \int_{z_0}^z \varepsilon_0^{-1/2} \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1}, z \right) \left[\varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1}, z \right) - p_1^2 \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1}, z \right) - p_1^2}{l^2 \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1}, z \right)} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial p}(p_2) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial p}(p_1) \right]^2 \right\} dz. \quad (21)$$

Формулой (21) для определения $\bar{\varphi}_1^2$ и $\bar{\Delta x^2}$ можно пользоваться при следующем ограничении на длину трассы распространения (L_{tp}) и величину флуктуаций:

$$\bar{\varepsilon}_1 \ll (l/L_{tp})^3, \quad (22)$$

т. е. при среднеквадратичных поперечных смещениях луча, меньших размера случайных неоднородностей. Выполнение условия (22) предполагалось и в работе [4], но здесь оно связано лишь с методом вычислений статистических моментов случайной фазы и не является принципиальным.

6. Полученные решения учитывают многократное рассеяние волн на флуктуациях диэлектрической проницаемости. Для иллюстрации этого утверждения приведем выражение для среднего квадрата поля, которое можно получить из (8) для гладкой каустики, поле вблизи которой описывается функцией Эйри:

$$|\bar{u}|^2 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta}{k_0^2 \Lambda^2} \right)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} v^2(x). \quad (23)$$

Аналогичное выражение можно получить и для среднего поля. Как видно из (23), решение действительно представляется в виде ряда по степеням параметра β , пропорционального флуктуациям.

В заключение заметим, что полученные в работе асимптотические формулы (10), (16), (19), (20) связывают статистические характеристики флуктуирующего поля с решением соответствующей регулярной задачи точным либо найденным одним из асимптотических методов. Асимптотическое разложение Маслова не имеет в этом смысле особых преимуществ и использовано нами лишь как достаточно общее представление волнового поля, удобное для разделения регулярных и статистических эффектов.

Авторы выражают признательность И. Г. Зарницаиной за проведение вычислений на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
2. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, № 1, 1 (1968).
3. Т. Pearcey, Phil. Mag., 37, 311 (1946).
4. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1500 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 апреля 1969 г.

THE FIELD STRUCTURE NEAR CAUSTIC IN A MEDIUM WITH FLUCTUATIONS OF THE DIELECTRIC PERMITTIVITY

G. V. Permitin, A. A. Fraiman

The propagation of waves in a regular-inhomogeneous medium with fluctuations of the dielectric permittivity is considered. There are obtained the asymptotic expressions convenient for describing the average field and the average energy density in the places of distortion of the geometrical optics.

УДК 621.396.67.095.11

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

A. Г. Рамм

Рассматривается один из методов решения задачи синтеза линейной антенны при условиях, исключающих «сверхнаправленность»

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что заданы некоторая функция $h(\theta)$ в интервале углов $0 \leq \theta \leq \pi$, длина $2l$ линейной антенны, а также ограничения на распределение тока в антenne, гарантирующие отсутствие нежелательных эффектов, характерных для сверхнаправленных антенн. Требуется найти распределение тока в линейной антenne, порождающее диаграмму направленности, возможно более близкую к функции $h(\theta)$.

Сформулируем математическую постановку задачи. Распределение тока $j(z)$ порождает диаграмму направленности

$$F(\theta) = \frac{\sin \theta}{A} \int_{-l}^l j(z) \exp(ik_0 z \cos \theta) dz \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (1)$$

где θ — угол, отсчитываемый от оси z , вдоль которой течет ток, до радиус-вектора, идущего на точку наблюдения, $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$, ω — частота колебаний, λ — длина волны, c — скорость распространения колебаний, A — нормирующая постоянная. Вводя переменную $k = k_0 \cos \theta$ и обозначение $AF(\theta)(\sin \theta)^{-1} = f(k)$, запишем (1) в виде

$$f(k) = \int_{-l}^l j(z) \exp(ikz) dz \quad (-k_0 \leq k \leq k_0). \quad (2)$$

Назовем функцию $f(k)$ (как и $F(\theta)$) диаграммой направленности, порожденной током $j(z)$. Задача заключается в отыскании функции $j(z)$, минимизирующей интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |g(k) - f(k)|^2 dk, \quad (3)$$

где

$$g(k) = \frac{Ah(\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos \frac{k}{k_0}$$

при условиях

$$\int_{-l}^l |j(z)|^2 dz \leq M_0, \quad \int_{-l}^l |j'(z)|^2 dz \leq M_1. \quad (4)$$

Указанные условия исключают сверхнаправленность, так как означают, что амплитуда и скорость изменения тока в среднем ограничены.

Постоянные M_0 и M_1 должны быть заданы при расчете антенны. Множество функций $j(z)$, удовлетворяющих условиям (4), обозначим $\Omega(M_0, M_1)$. Это выпуклое и компактное в $L_2(-l, l)$ множество [1]. Хотя задача синтеза антенны посвящена обширная литература (см. [2, 3] и библиографию, указанную в этих статьях), тем не менее оптимизация метода решения, по-видимому, не проводилась. На ее актуальность указано в работе [2].

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Поставленная задача оптимизаций может быть решена путем сведения к задаче выпуклого программирования методами вариационного исчисления, основанными на уравнении Эйлера, и прямыми методами вариационного исчисления, например, методом Ритца. Рассмотрим эти возможности.

1) Обозначим через $\tilde{g}(z)$ функцию

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \exp(-ikz) dk. \quad (5)$$

Применив к интегралу (3) равенство Парсеваля, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} J &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(z) - j(z)|^2 dz = \int_{|z|>l} |\tilde{g}(z)|^2 dz + \\ &+ \int_{-l}^l |\tilde{g}(z) - j(z)|^2 dz = \delta(g, l) + J_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\delta(g, l)$ зависит только от длины антенны и данной функции $g(k)$, но не от тока j . Поэтому интегралы J и J_1 достигают минимума на одной и той же функции $j(z)$, в связи с чем поставленная в разд. 1 задача эквивалентна нахождению распределения тока $j(z) \subset \Omega(M_0, M_1)$, минимизирующего интеграл J_1 .

Приведем поставленную задачу к исследованной задаче выпуклого программирования. Для облегчения понимания метода предположим вначале, что $j(l) = j(-l)$. Указанное предположение выполнено, например, в случае вертикальной антенны над проводящей плоскостью (это следует из метода изображений). Ниже мы освободимся от этого предположения. Разложим функции $\tilde{g}(z)$ и $j(z)$ в ряд Фурье:

$$j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n \frac{\exp(in\pi z/l)}{\sqrt{2l}}, \quad \tilde{g}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{\exp(in\pi z/l)}{\sqrt{2l}}. \quad (7)$$

Заметим сразу же, что предположение $j(l) = j(-l)$ будет использовано лишь в одном месте: оно позволит дифференцировать ряд Фурье функции $j(z)$ почленно. Подставляя ряды (7) в интеграл J_1 и условия (4) и пользуясь равенством Парсеваля, получаем

$$J_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |j_n - \tilde{g}_n|^2 = \min, \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |j_n|^2 \leq M_0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} |j_n|^2 \leq M_1. \quad (9)$$

Проблема минимизации J_1 при условиях (9) представляет собой задачу выпуклого программирования. Если ввести пространство последовательностей l_2 с нормой $\|j\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |j_n|^2$, то (8) и (9) можно

интерпретировать как задачу об отыскании среди всех элементов выпуклого компакта $\Omega(M_0, M_1)$, определенного неравенствами (9), такого элемента, который наименее удален от данного элемента $\tilde{g}_n \subset l_2$. Существование и единственность решения этой задачи доказывается обычным рассуждением: минимизирующая функционал J_1 последовательность элементов компакта $\Omega(M_0, M_1)$ содержит сходящуюся подпоследовательность, которая ввиду замкнутости $\Omega(M_0, M_1)$ удовлетворяет неравенствам (9), и потому является решением задачи (8), (9). Единственность решения следует из равномерной выпуклости функционала (8) [1]. Чтобы решить проблему (8), (9) численно, рассмотрим аппроксимирующую задачу с конечным числом переменных

$$J_{1N} = \sum_{n=-N}^N |j_n - \tilde{g}_n|^2 = \min; \quad (10)$$

$$\sum_{n=-N}^N |j_n|^2 \leq M_0, \quad \sum_{n=-N}^N n^2 |j_n|^2 \leq M_2 \equiv M_1 \frac{l^2}{\pi^2}. \quad (11)$$

Программа для численного решения задачи (10), (11) приведена в [4]. Ниже мы сведем (10), (11) к задаче решения двух нелинейных уравнений, что даст другой метод численного решения. Но вначале покажем, что при $N \rightarrow \infty$ решение $j^{(N)} = \{f_n^{(N)}\}$ ($|n| \leq N$) задачи (10), (11) стремится к решению $j = \{j_n\}$ ($-\infty < n < \infty$) задачи (8), (9). Задача (10), (11) в силу приведенных выше рассуждений имеет единственное решение $j^{(N)}$. Обозначим $J_{1N}(j^{(N)}) \equiv \delta_N$. Через j обозначим решение задачи (8), (9) и положим

$$J_1(j) = d, \quad \sum_{n=-N}^N |j_n - \tilde{g}_n|^2 = d_N, \quad \sum_{|n|>N} |\tilde{g}_n|^2 = \varepsilon_N(\tilde{g}) = \varepsilon_N.$$

Так как $d \leq d_N + \varepsilon_N$, а $\delta_N \leq d_N$, то $\delta_N \leq d$. Очевидно, что $\delta_N \leq \delta_{N+1}$. Обозначим $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = \delta$. Ясно, что $\delta \leq d$. Последовательность $j^{(N)}$ сходится к элементу $j^{(\infty)} \subset \Omega(M_0, M_1)$, причем $J_{1\infty}(j^{(\infty)}) = J_1(j^{(\infty)}) = \delta \leq d$. В силу определения d отсюда следует, что $\delta = d$, а в силу единственности решения задачи (8), (9) следует, что $j^{(\infty)} = j$. Следовательно, доказано, что $\lim_{N \rightarrow \infty} j^{(N)} = j$.

Если функция $\tilde{g}(z)$ удовлетворяет условиям (4), то решение задачи (8), (9) тривиально; оно дается равенствами $j_n = \tilde{g}_n$, откуда следует, что $j(z) = \tilde{g}(z)$. Практически этот случай представляет небольшой интерес, так как означает, что функция $g(k)$ — реализуемая диаграмма.

Пусть хотя бы одно из условий (4) не выполнено для функции $\tilde{g}(z)$,

тогда для элемента $\{\tilde{g}_n\}$ не выполнено хотя бы одно из условий (9), т. е. $\{\tilde{g}_n\}$ не принадлежит выпуклому множеству $\Omega(M_0, M_1)$. Из геометрических соображений ясно, что элемент $\{j_n\} \subset \Omega(M_0, M_1)$, который наименее удален от элемента $\{\tilde{g}_n\}$, лежит на границе множества $\Omega(M_0, M_1)$, т. е. неравенства (9) для такого элемента переходят в равенства. Поэтому, если $\tilde{g}(z) \in \Omega(M_0, M_1)$, задачи (3), (4) и (8), (9) эквивалентны следующим задачам:

$$J_1(j) = \int_{-l}^l |j(z) - \tilde{g}(z)|^2 dz = \min, \quad \int_{-l}^l |j|^2 dz = M_0, \quad \int_{-l}^l |j'|^2 dz = M_1; \quad (12)$$

$$J_1(j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |j_n - \tilde{g}_n|^2 = \min, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |j_n|^2 = M_0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |j_n|^2 = M_1. \quad (13)$$

Аналогичное утверждение верно и для задачи (10), (11), которая, если $\{\tilde{g}_n\} \subset \Omega(M_0, M_1)$, эквивалентна задаче

$$J_{1N}(j^{(N)}) = \sum_{n=-N}^N |j_n - \tilde{g}_n|^2 = \min, \quad \sum_{n=-N}^N |j_n|^2 = M_0, \quad \sum_{n=-N}^N n^2 |j_n|^2 = M_1. \quad (14)$$

Задача (14) с помощью метода неопределенных множителей приводится к решению уравнений относительно $2N + 1$ переменных j_n и двух множителей Лагранжа λ, μ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial j_n} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial j_n^*} = 0 \quad (-N \leq n \leq N), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} j_n^* j_n &= |j_n|^2, \\ \Phi &= \sum_{n=-N}^N |j_n - \tilde{g}_n|^2 + \lambda \left(\sum_{n=-N}^N |j_n|^2 - M_0 \right) + \\ &\quad + \mu \left(\sum_{n=-N}^N n^2 |j_n|^2 - M_1 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Система (15) имеет диагональную матрицу и легко решается:

$$j_n = \frac{\tilde{g}_n}{1 + \lambda + \mu n^2} \quad (-N \leq n \leq N). \quad (17)$$

Параметры λ и μ находятся из двух нелинейных уравнений связи

$$\sum_{n=-N}^N \frac{|\tilde{g}_n|^2}{(1 + \lambda + \mu n^2)^2} = M_0, \quad \sum_{n=-N}^N \frac{n^2 |\tilde{g}_n|^2}{(1 + \lambda + \mu n^2)^2} = M_1, \quad (18)$$

которые следует решать численными методами.

2) Задача (12) есть изопериметрическая задача вариационного исчисления и может быть решена классическим методом. Уравнения Эйлера и естественные граничные условия для задачи (12) имеют вид [1]

$$(1 + \lambda) j(z) - \mu j''(z) = \tilde{g}(z) \quad (-l \leq z \leq l); \quad (19)$$

$$j'(-l) = j'(l) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) легко интегрируется в явном виде, после чего параметры λ , μ могут быть определены из условий связи (12). Мы не выписываем соответствующих формул, так как уравнения для нахождения λ и μ получаются громоздкими. Однако при изложенном подходе, в отличие от предыдущего, сразу получается само распределение тока, а не его коэффициенты Фурье. Кроме того, виден характер функции, дающей оптимальное распределение тока

$$j(z) = C_1(\gamma) e^{\gamma z} + C_2(\gamma) e^{-\gamma z} - \frac{1}{\mu} \int_{-l}^l \tilde{g}(t) \frac{\sinh \gamma(z-t)}{\gamma} dt, \quad \gamma^2 \equiv \frac{1+\lambda}{\mu}. \quad (21)$$

3) Задачу (12) можно решать прямыми методами вариационного исчисления. Отметим здесь только следующее. Если воспользоваться методом Ритца [1] и в качестве пробных функций брать функции вида

$$j^{(N)} = \sum_{n=-N}^N j_n \frac{\exp(in\pi z/l)}{\sqrt{2l}},$$

где j_n — подлежащие нахождению коэффициенты, то система Ритца для определения этих коэффициентов примет вид (15), и таким образом решение задачи (14) эквивалентно нахождению N -го приближения при решении задачи (12) методом Ритца с системой пробных функций $\{\exp(in\pi z/l)/\sqrt{2l}\}$.

4) Ниже мы освободимся от условия $j(l) = j(-l)$, принятого в п. 3 при доказательстве эквивалентности задач (12) и (13).

Напомним, что если $j(l) \neq j(-l)$, то даже при гладкой функции $j(z)$ в промежутке $[-l, l]$ коэффициенты Фурье j_n этой функции имеют порядок $O(1/n)$, поэтому коэффициенты Фурье функции $j'(z)$ не могут быть вычислены по формуле $j'_n = i\pi n j_n/l$. Дело в том, что если $j(l) \neq j(-l)$, то периодически продолженная (с периодом $2l$) гладкая функция $j(z)$ оказывается разрывной на концах периода.

Чтобы обойти указанную трудность, воспользуемся полной и ортогональной на промежутке $[-l, l]$ системой функций $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$. Указанная система функций представляет собой систему собственных функций задачи

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (-l \leq z \leq l), \quad y'(-l) = y'(l) = 0. \quad (22)$$

Коэффициент Фурье функции $j(z)$ вычисляется по формуле

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l j(z) \cos \left(n \frac{\pi}{2l} z + n \frac{\pi}{2} \right) dz. \quad (23)$$

Система собственных функций задачи (22) имеет существенные достоинства с точки зрения нашей задачи, так как для гладкой на промежутке $[-l, l]$ функции коэффициент c_n имеет порядок $O(1/n^2)$ при $n \rightarrow \infty$ (а не $O(1/n)$, как в случае коэффициента j_n).

Поэтому разложение Фурье дифференцируемой функции по системе функций $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$ можно почленно дифференцировать. Если

$$j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{\delta_n l}} \cos \left(n \frac{\pi}{2l} z + n \frac{\pi}{2} \right), \quad \delta_n = \begin{cases} 2 & (n=0), \\ 1 & (n>0), \end{cases} \quad (24)$$

то

$$j'(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{2l} c_n \frac{1}{\sqrt{\delta_n l}} \sin \left(n \frac{\pi}{2l} z + n \frac{\pi}{2} \right). \quad (25)$$

Система функций $\{(1/\sqrt{l}) \sin(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$ — это система собственных функций задачи

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (-l \leq z \leq l), \quad y(-l) = y(l) = 0, \quad (26)$$

и поэтому является полной ортогональной системой, что позволяет применять к разложениям (24), (25) равенство Парсеваля. Отметим, что целесообразность введения граничных условий (22) объясняется тем, что это естественные граничные условия [1] для вариационной задачи (12).

Задача

$$J_1(j) = \int_{-l}^l dz |\tilde{g}(z) - j(z)|^2 = \min, \quad j(z) \subset \Omega(M_0, M_1) \quad (27)$$

приводится, как и выше, к следующей задаче:

$$J_1(j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n - \tilde{d}_n|^2 = \min, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq M_0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < 4M_2, \quad (28)$$

где c_n и \tilde{d}_n — коэффициенты Фурье функций $j(z)$ и $\tilde{g}(z)$ по системе $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$. Дальнейшие рассуждения совпадают с изложенными в п. 1 и поэтому опускаются. Уравнения для нахождения коэффициентов аппроксимирующей задачи совпадают с уравнениями (17), (18) после замены $j_n \rightarrow c_n$, $\tilde{g}_n \rightarrow \tilde{d}_n$, $M_2 \rightarrow 4M_2$. Интересно отметить, что эти уравнения получаются при решении вариационной задачи (12) методом Ритца с использованием (в качестве пробных) функций $(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)$.

Сходимость разложения Фурье функции $j(z)$ по системе функций $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$, вообще говоря, лучше, чем сходимость разложения по системе $\{(1/\sqrt{2l}) \exp(i n \pi z/l)\}$, так как функции первой системы удовлетворяют естественным граничным условиям (20). Можно было бы ввести систему функций $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + n\pi/2)\}$ уже в п. 2, но мы предпочли вначале продемонстрировать метод на более привычной системе функций $\{(1/\sqrt{2l}) \exp(i n \pi z/l)\}$.

3. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ РЕШАЮТСЯ УКАЗАННЫМ МЕТОДОМ

1) Задача о директорной антенне. В монографии [5] дано описание указанной антенны. Оптимизация распределения токов по системе вибраторов Герца, непрерывно распределенных с некоторой плотностью $\rho(x)$ на промежутке $[-l, l]$ оси x при условии, что в них текут токи, ориентированные вдоль оси x и сверхнаправленность исключается, приводит к следующей задаче:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-l}^l \rho(x) j(x) \exp(ikx) dx - g(k) \right|^2 dk = \min, \quad j \subset \Omega(M_0, M_1), \quad (29)$$

где $j(x)$ — комплексная амплитуда тока и приняты обозначения разд. 1. Можно считать $\rho(x)$ заданной, тогда задача (29) по существу не отличается от задачи (27) и решается тем же методом. Можно считать $|j(x)|$ заданным и оптимизацию вести по функции $\rho(x)\exp(i\arg j(x))$ — менять плотность расположения вибраторов и фазу тока в них. Эта задача также аналогична задаче (27).

2) Задача о синтезе сферической антенны по заданной диаграмме направленности $h(\theta, \varphi)$ приводится к следующей математической задаче по форме, совпадающей с уже рассмотренными:

$$J(j) = \min, \quad j \subseteq \Omega(M_0, M_1). \quad (30)$$

Здесь

$$J(j) = \| a^2 \int_S \exp [-ik_0 a(s_0, s)] j(s) dS - h(s_0) \|,$$

$\|h\|^2 = \int_S |h|^2 dS$, S — единичная сфера, $dS = \sin \theta d\theta d\varphi$, $s_0 = (\theta, \varphi)$, $s = (\theta', \varphi')$ — точки единичной сферы, a — радиус сферы, $|h|$ — длина вектора $h = h(\theta, \varphi)$. Условие $j \subseteq \Omega(M_0, M_1)$ имеет вид

$$\int_S |j|^2 dS \leq M_0, \quad \int_S |\nabla_S j|^2 dS \leq M_1, \quad (31)$$

где ∇_S — градиент на единичной сфере. Задача (29) решается указанным в разд. 2 методом. Вместо системы функций $\{(1/\sqrt{l}) \cos(n\pi z/2l + \pi l/2)\}$ теперь следует брать сферические функции $Y_{nl}(\theta, \varphi)$. Для определения коэффициентов j_{nl} разложения вектор-функции $j(s)$ по сферическим функциям получим уравнения, вполне аналогичные уравнениям (17), (18).

Число примеров можно было бы увеличить. Заметим в заключение, что о некоторых результатах настоящей работы сообщалось в [6] (см. также [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, 5, ГИФМЛ, М., 1958—1959.
2. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, сб Современные проблемы антенно-волноводной техники, изд. Наука, М., 1967, стр. 5
3. Е. Г. Зелкин, сб Современные проблемы антенно-волноводной техники, изд. Наука, М., 1967, стр. 23.
4. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева, Линейное и выпуклое программирование, изд. Наука, М., 1967, стр. 315.
5. В. В. Никольский, Антенны, изд. Связь, М., 1966
6. А. Г. Рамм, Докл АН СССР, 180, 1071 (1968).
7. А. Г. Рамм, Оптика и спектроскопия, 27, 508 (1969).

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Поступила в редакцию
14 февраля 1968 г.

AN OPTIMAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF LINEAR ANTENNA SYNTHESIS

A. G. Ramm

One of the methods of solving the problem of the synthesis of a linear antenna is considered excluding the conditions of superdirective.

УДК 538.574.6

К ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

E. A. Иванов, Г. М. Луханина

В предположении, что цилиндры достаточно «толстые», решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на двух параллельных круговых идеально проводящих цилиндрах конечной длины, поперечные размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Получены формулы, описывающие переизлученное цилиндрами поле в волновой зоне. Для некоторых значений параметров вычислено радиолокационное поперечное сечение.

Известно, что если размеры идеально проводящего конечного кругового цилиндра (радиус a , длина L) достаточно велики по сравнению с длиной возбуждающей его плоской электромагнитной волны, то тогда можно пренебречь влиянием торцов цилиндра на рассеянное поле — распределение поверхностного тока на таком «толстом» цилиндре очень близко к распределению тока на соответствующей части бесконечного цилиндра того же радиуса. В этом случае можно произвести расчет поля, рассеянного на цилиндре конечной длины, взяв в качестве его источника токи на конечной части бесконечного цилиндра того же радиуса [1] (в [2] эта задача исследована более полно другим методом).

Если и в случае двух параллельных круговых цилиндров конечной длины, возбуждаемых плоской волной, считать цилиндры толстыми настолько, что взаимодействием возмущений токов у торцов каждого из них можно пренебречь, то расчет поля, рассеянного на таких цилиндрах, можно произвести, взяв в качестве его источника токи на соответствующих конечных частях двух параллельных бесконечно длинных цилиндров. Решению этой задачи и посвящена данная заметка. Так как оно основано на использовании идей из [1] и уже известных результатов, связанных с решением задачи дифракции на двух цилиндрах бесконечной длины (см., например, [3, 4]), то мы ограничились здесь лишь кратким описанием схемы решения и формулы, позволяющей вычислять радиолокационное поперечное сечение для двух конечных цилиндров. Кроме того, в качестве иллюстраций метода приводятся некоторые численные результаты, полученные с помощью ЭВМ.

Задача решается следующим образом.

Цилиндры радиусов $r_s = a_s$ ($s = \pm 1$) и длины L расположены в неограниченном однородном изотропном пространстве с электромагнитными постоянными ϵ , μ , σ ($\sigma = 0$) так, что их оси параллельны (рис. 1). Координатные системы $Oxyz$ и $O_s x_s y_s z_s$ ($s = \pm 1$) введены как это показано на рис. 1 (одновременно вводятся цилиндрические системы координат r, φ, z с началом в точке O и локальные координаты r_s, φ_s, z_s с началом в точках O_s ($s = \pm 1$), в которых поверхность s -го цилиндра задается уравнениями $r_s = a_s$, $z_s = z = \pm L/2$ ($s = \pm 1$)).

Цилиндры возбуждаются плоской волной

$$E^0 = e E \exp(ik(nR)) \quad (1)$$

($k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}/c$, множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опускается), поляризованной в направлении единичного вектора \vec{e} и распространяющейся в на-

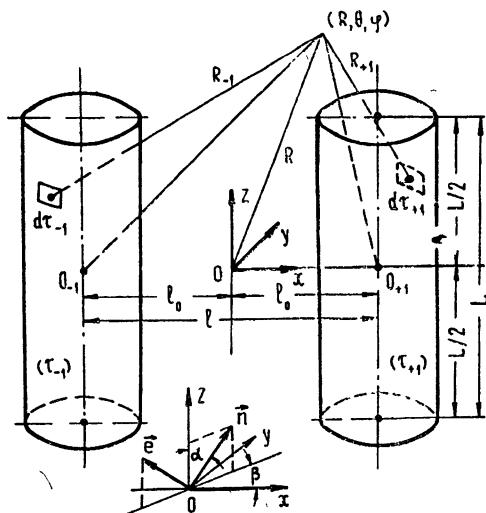


Рис. 1. Геометрия задачи.

правлении единичного вектора \vec{n} , образующего угол α с осью z . Проекция вектора \vec{n} на плоскость Oxy образует угол β с положительным направлением оси x . Поэтому $(\vec{n} \cdot \vec{R}) = z \cos \alpha + \rho \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$.

Поле E^1, H^1 , рассеянное на цилиндрах, находится из уравнений

$$H^1 = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A, \quad E^1 = \frac{ic}{\omega\epsilon\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} A, \quad (2)$$

где вектор-потенциал A задается формулой

$$A = \sum_{s=\pm 1} A^s, \quad A^s = \frac{\mu}{c} \int_{(\tau_s)} j^s \frac{\exp(ikR_s)}{R_s} d\tau_s. \quad (3)$$

Здесь j^s — вектор плотности поверхностных токов, наведенных на s -м цилиндре ($s = \pm 1$). Интегрирование производится по боковой поверхности (τ_s) s -го цилиндра (влияние торцов не учитывается); R_s — расстояние от элемента $d\tau_s$ боковой поверхности s -го цилиндра до точки наблюдения.

На основании сказанного выше, вектор j^s определяется из решения задачи дифракции волны (1) на двух параллельных бесконечных цилиндрах с радиусами $r_s = a_s$ ($s = \pm 1$). Из [3] известно, что закон распределения плотности поверхностных токов на s -м цилиндре бесконечной длины задается формулой

$$j_z^s(\varphi_s, z) = -\frac{E\omega\epsilon}{2\pi^2 k^2 a_s \sin \alpha} e^{ikz \cos \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^s \exp(in\varphi_s) \quad (4)$$

($j_\rho^s = j_\varphi^s = 0$), где x_n^s находится как решение бесконечной системы линейных уравнений

$$x_n^s + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{nm}^{-s, s} x_m^{-s} = f_n^s \quad (s = \pm 1, n = 0, \pm 1, \dots), \quad (5)$$

в которой

$$\alpha_{nm}^{-s, s} = \frac{J_m(x_s)}{H_n^{(1)}(x_s)} H_{m-n}^{(1)}(kl \sin \alpha) \exp [i(m-n)\varphi_{-s, s}]; \quad (6)$$

$$f_n^s = -\frac{i^n}{H_n^{(1)}(x_s)} \exp (-in\beta + iskl_0 \sin \alpha \cos \beta) \quad (7)$$

$(\varphi_{-1, +1} = 0, \varphi_{+1, -1} = \pi, x_s = ka_s \sin \alpha, J_n(x) \text{ и } H_n^{(1)}(x) — \text{функции Бесселя}).$

Система (5) описана достаточно полно в [3, 4]. Она разрешима методом усечения.

Подставляя (4) в соотношение (3) и рассматривая последнее в волновой зоне ($R, \approx R - sl_0 \sin \theta \cos \varphi - z \cos \theta - a_s \sin \theta \cos (\varphi_s - \varphi)$; здесь R, θ, φ — сферические координаты точки наблюдения с началом в O , а φ_s — угловая координата текущей точки на поверхности s -го цилиндра), найдем после несложных выкладок, подобных приведенным в аналогичной задаче [1] для одного цилиндра, что в приближении волновой зоны

$$A_z^s = -\frac{e^{ikR}}{R} \frac{2\mu\omega E \sin(kL\delta/2)}{c\pi k^3 \delta \sin \alpha} \exp(-iskl_0 \sin \theta \cos \varphi) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n x_n^s J_n(ka_s \sin \theta) e^{in\varphi} \quad (\delta = \cos \theta - \cos \alpha). \quad (8)$$

Формула (8) вместе с формулами (2) полностью описывают переизлученное электромагнитное поле в волновой зоне. В частности, так как в рассматриваемом приближении $H_\varphi^1 = \frac{1}{\mu} \sin \theta \frac{\partial}{\partial R} A_z^s$, то радиолокационное поперечное сечение в случае двух цилиндров конечной длины может быть вычислено при помощи формулы

$$\sigma_B = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left| \frac{H_\varphi^1}{H_\varphi^0} \right|^2 = \\ = \frac{4 \sin^2(kL \cos \alpha)}{\pi k^2 \cos \alpha} \left| \sum_{s=\pm 1} \exp(iskl_0 \sin \alpha \cos \beta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n x_n^s J_n(ka_s \sin \alpha) e^{in\beta} \right|^2. \quad (9)$$

(в плоскости падения волны (1) в направлении на источник, когда $\theta = \pi - \alpha, \varphi = \pi + \beta$). При нормальном падении волны (плоскость $Oxz, \alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$)

$$\sigma_B = \frac{4L^2}{\pi} \left| \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x_n^s J_n(ka_s) \right|^2. \quad (10)$$

Как и в случае одного цилиндра, формулами (8), (9) можно пользоваться лишь при углах α , не близких к нулю.

Обсудим теперь некоторые из результатов вычисления σ_B , полученные с помощью ЭВМ (заметим, что вопросы, связанные с вычислением величин x_n^s из (5), были обсуждены нами раньше в [4]).

Прежде всего отметим, что при значениях α, λ, L , удовлетворяющих равенству

$$\frac{2L}{\lambda} \cos \alpha = n, \quad (11)$$

где n — целое число, отличное от нуля ($\alpha \neq \pi/2$), $\sigma_B \equiv 0$ (как и в случае одного цилиндра).

На рис. 2 приведены графики величины $\sigma_n = \sigma_B/\sigma_B^{\max}$, рассматривая-

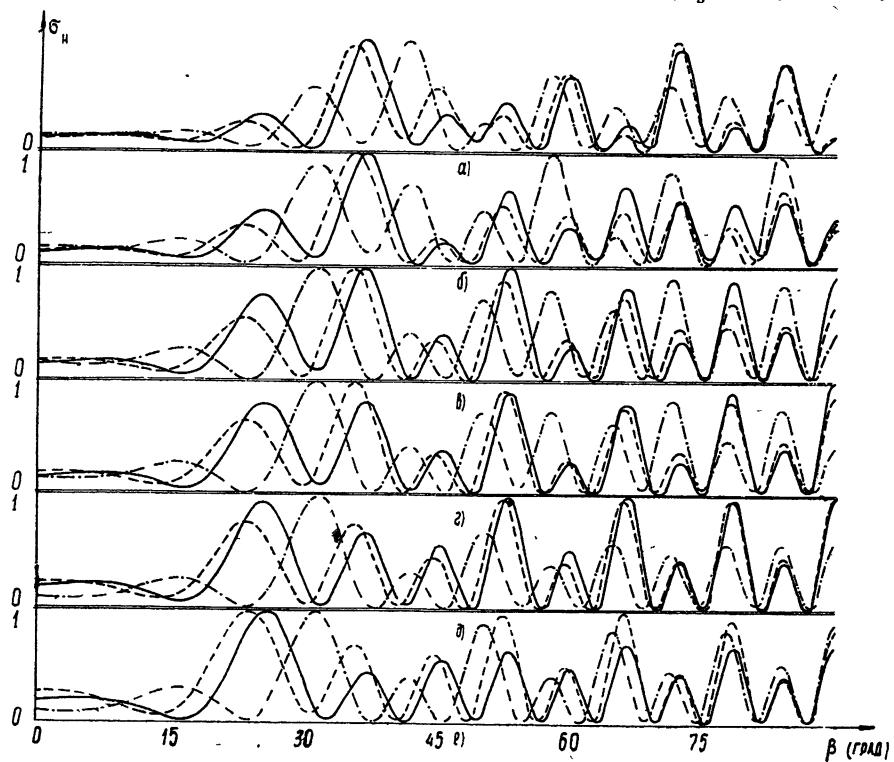


Рис. 2. Графики функции σ_n , когда $kL = 30\pi$, $kl = 10\pi$. а) $ka = \pi$, б) $ka = 4$, в) $ka = 1,5\pi$, г) $ka = 5$, д) $ka = 2\pi$, е) $ka = 8$. Сплошная линия отвечает случаю $\alpha = 90^\circ$, штриховая — $\alpha = 80^\circ$ и штрих-пунктирная — $\alpha = 70^\circ$.

ваемой при заданных значениях параметров ka ($ka = ka_{-1} = ka_{+1}$), kL , kl и α как функция угла β (мы ограничились значениями β из промежутка $[0, \pi/2]$, так как для других значений β величина σ_n может быть найдена из приведенных, на основе симметрии σ_n относительно O и плоскости Oyz). Через σ_B^{\max} нами обозначается максимальное значение σ_n , отвечающее тому набору значений параметров, для которых строится данный график. Графики на рис. 2 отвечают значениям $ka = \pi; 4; 1,5\pi; 5; 2\pi$ и 8 , когда $kL = 30\pi$, $kl = 10\pi$, а угол $\alpha = 90, 80, 70^\circ$ (при $\alpha = 60^\circ$ и $kL = 30\pi$ значение $\sigma_B \equiv 0$ в силу (11)). Значения σ_B^{\max} , которые были взяты нами в качестве нормирующих величин, выписанные с точностью до третьего десятичного знака, приведены ниже в таблице*.

α	$ka = \pi$	$ka = 4$	$ka = 1,5\pi$	$ka = 5$	$ka = 2\pi$	$ka = 8$
90°	$0,167 \cdot 10^6$	$0,166 \cdot 10^6$	$0,230 \cdot 10^6$	$0,235 \cdot 10^6$	$0,349 \cdot 10^6$	$0,482 \cdot 10^6$
80°	$0,187 \cdot 10^3$	$0,237 \cdot 10^3$	$0,321 \cdot 10^3$	$0,344 \cdot 10^3$	$0,54 \cdot 10^3$	$0,654 \cdot 10^3$
70°	$0,710 \cdot 10^2$	$0,104 \cdot 10^3$	$0,105 \cdot 10^3$	$0,104 \cdot 10^3$	$0,146 \cdot 10^3$	$0,220 \cdot 10^3$

Графики дают наглядное представление о характере изменения функций σ_n с изменением ka и α . В частности, из рис. 2 видно, что

* В таблице приведены значения $(\pi k^2/4)\sigma_B^{\max}$.

Функция σ_n в случае двух цилиндров конечной длины является осциллирующей с ярко выраженнымами максимумами (минимумами). В секторе направлений падения волны (1), ограниченном лучом $\beta = 0$ (вектор n , либо его проекция на плоскость Oxy направлена вдоль линии центров кругов сечения цилиндров) и лучом $\beta \leq \arcsin(a/l_0)$ (углу $\beta = \arcsin(a/l_0)$ отвечает направление, совпадающее в плоскости Oxy с направлением внутренней касательной к сечению цилиндров), когда один из цилиндров дифрагирующей системы полностью либо частично затеняется другим, функция σ_n почти не осциллирует. Ее колебания начинают заметно проявляться при углах падения $\beta > \arcsin(a/l_0)$.

Очевидно, что функция σ_n осциллирует и с изменением угла α при фиксированном значении β . В частности, из рис. 2 видно, что с изменением α происходит заметное смещение относительных экстремумов функции σ_n в направлении убывания угла β (от 90° до 0°).

С увеличением значения ka (при данном α и kl) положение максимумов (минимумов) почти не меняется. Однако в данном случае меняется относительная величина максимумов. В этом отношении интересно изменение первых максимумов, наблюдаемых при углах, близких к $\beta = \arcsin(a/l_0)$. Так, например, если $ka = \pi$, главный максимум функции σ_n наблюдается при $\beta \approx 27^\circ$ ($\alpha = 90^\circ$). Проследившая изменение величины σ_n , происходящее с ростом ka при $\beta \approx 27^\circ$, можно заметить монотонность убывания σ_n . Аналогичная картина с изменением первых максимумов функции σ_n наблюдается и при углах $\alpha = 80^\circ$, $\alpha = 70^\circ$.

На рис. 3 приведены графики функции σ_n , построенные для случая



Рис. 3. Графики функции σ_n , когда $ka = 10$, $kL = 30\pi$, $kl = 60$. Сплошная линия отвечает случаю $\alpha = 90^\circ$, штрих-пунктирная — $\alpha = 80^\circ$.

$ka = 10$, когда $kL = 30\pi$, $kl = 60$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 80^\circ$ (при $\alpha = 90^\circ$ $(\pi k^2/4)\sigma_{\text{в}}^{\max} = 0,530 \cdot 10^6$, а при $\alpha = 80^\circ$ $(\pi k^2/4)\sigma_{\text{в}}^{\max} = 0,644 \cdot 10^3$). Из них видно, что с увеличением расстояния между цилиндрами происходит обычное в таких случаях явление — увеличивается частота осцилляций. Как и в предыдущих случаях первые максимумы наблюдаются при углах, близких к $\beta = \arcsin(a/l_0)$. Как и раньше, с изменением α происходит сдвиг экстремальных значений функции σ_n , уменьшающейся по мере увеличения угла β .

Как это видно из приведенной выше таблицы, во всех рассмотренных нами случаях происходит заметное уменьшение величины $(\pi k^2/4)\sigma_{\text{в}}^{\max}$ с уменьшением угла α от 90° до 70° (для каждого ka).

Все графики на рис. 2, 3, построенные для угла $\alpha = 90^\circ$, совпадают с нормированными графиками функции $\sigma_{\text{в}}$, соответствующей случаю двух бесконечно длинных круговых цилиндров радиусов $r = a$, находящихся на расстоянии l друг от друга (это видно из сравнения формулы (10), например, с формулой (6.3.48) из [3]).

ЛИТЕРАТУРА

- Дж. Р. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
- П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1962.

3. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
4. Е. А. Иванов, Г. М. Коблова, Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, № 4, 47 (1968).

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию
14 мая 1968 г

ON DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON TWO CIRCULAR CYLINDERS OF THE FINITE LENGTH

E. A. Ivanov, G. M. Lukhanina

The problem on diffraction of a plane electromagnetic wave on two parallel circular perfectly conducting cylinders of the finite length with transverse dimensions of sufficient large as compared with the wavelength is solved in the assumption that the cylinders are "thick" enough. The formulae describing the field reradiated by the cylinder in the wave zone are derived. The radar cross-section has been calculated for some values of the parameters.

УДК 621.372.826

ВЫТЕКАЮЩИЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ИЗ ДВУХ РАЗДЕЛЕННЫХ СЛОЕВ

В. П. Мальцев, Е. И. Нефёдов, В. В. Шевченко

Исследуется спектр волн (поверхностных, собственных комплексных и несобственных, в частности, вытекающих) волновода, образованного двумя плоскими диэлектрическими или изотропными плазменными слоями, разделенными воздушным промежутком. Как частный случай рассмотрены также волны в одиночном плоском диэлектрическом волноводе. Наиболее внимание уделено несобственным вытекающим волнам. Дисперсионные уравнения численно решены на ЭВМ. Результаты представлены в виде дисперсионных кривых в комплексной плоскости поперечного волнового числа как функцией значения диэлектрической проницаемости.

1. В качестве направляющих систем слоистые, а также трубчатые волноводы рассматривались ранее в основном как волноводы поверхностных волн. Однако в последнее время было показано [1-9], что такие волноводы могут также направлять волны других типов, в частности, так называемые квазиволноводные или, что то же самое, вытекающие волны. Эти последние не полностью направляются системой. Просачиваясь сквозь слои и, следовательно, излучаясь, они затухают вдоль оси волновода. Однако в ряде случаев затухание может быть достаточно слабым. Например, в случае трубы большого сечения для нескольких первых типов вытекающих волн затухание невелико, так как в бриллюэновском представлении плоская волна в этом случае падает на стенку трубы под скользящим углом и, следовательно, отражается с коэффициентом отражения, близким к единице [10, 9]. В волноводах, содержащих плазменные слои, кроме поверхностных и вытекающих волн имеют место еще так называемые комплексные волны [2, 7].

Задачей настоящей работы является рассмотрение двумерных E -волн в плоском симметричном относительно плоскости $y = 0$ волноводе, образованном двумя разделенными воздушным промежутком слоями (рис. 1), включая поверхностные, собственные комплексные и выте-

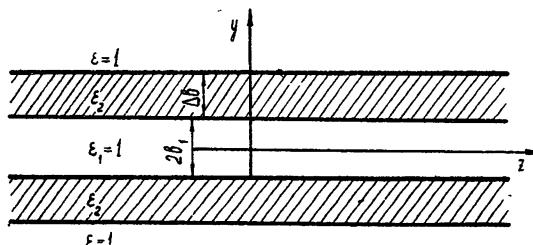


Рис. 1. Волновод из двух разделенных слоев.

кающие волны. Основное внимание при этом будет уделено вытекающим волнам. Рассматривается волновод как из диэлектрических, так и из плазменных слоев, т. е. относительная диэлектрическая проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы.

Основные результаты данной работы были включены в обзорный доклад по вытекающим волнам [10].

2. Приведем дисперсионные уравнения для E -волн ($E_z \neq 0$, z — продольная координата) в трехслойном плоском симметричном открытом волноводе. Для четных волн уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos(g_1 b_1) \cos(g_2 \Delta b) - \frac{g_1 \varepsilon_2}{g_2 \varepsilon_1} \sin(g_1 b_1) \sin(g_2 \Delta b) + \\ + i \frac{g_1}{\kappa \varepsilon_1} \sin(g_1 b_1) \cos(g_2 \Delta b) + i \frac{g_2}{\kappa \varepsilon_2} \cos(g_1 b_1) \sin(g_2 \Delta b) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для нечетных волн —

$$\begin{aligned} \sin(g_1 b_1) \cos(g_2 \Delta b) + \frac{g_1 \varepsilon_2}{g_2 \varepsilon_1} \cos(g_1 b_1) \sin(g_2 \Delta b) - \\ - i \frac{g_1}{\kappa \varepsilon_1} \cos(g_1 b_1) \cos(g_2 \Delta b) + i \frac{g_2}{\kappa \varepsilon_2} \sin(g_1 b_1) \sin(g_2 \Delta b) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь имеется в виду четность и нечетность функции поперечного сечения $\Psi(y) \sim H_x$ [7]. Дополнительными к ним являются уравнения связи между поперечными волновыми числами

$$\begin{aligned} g_1^2 = \kappa^2 + k^2(\varepsilon_1 - 1), \\ g_2^2 = \kappa^2 + k^2(\varepsilon_2 - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — волновое число, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительные диэлектрические проницаемости центрального и боковых слоев, $g_{1,2} = g_{1,2}' + ig_{1,2}''$ — поперечные волновые числа в слоях, $\kappa = \kappa' + i\kappa''$ — поперечное волновое число вне волновода, b_1 — полутолщина центрального слоя, Δb — толщина боковых слоев.

Из теории слоистого симметричного открытого волновода [7] следует, что основные свойства направляемых волн определяются положением поперечного волнового числа κ в комплексной плоскости κ . Дисперсионные уравнения решались методом Ньютона в следующих частных случаях трехслойного волновода: 1) для двух разделенных воздушным промежутком ($\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=\varepsilon$) диэлектрических или плазменных слоев; 2) для одиночного диэлектрического слоя ($b_1=0$) (плазменный слой подробно рассмотрен в работе Тамира и Олинера [2]). Были построены дисперсионные кривые в комплексной плоскости κ , которые являются траекториями движения поперечных волновых чисел при изменении диэлектрической проницаемости боковых слоев (в первом случае) или диэлектрической проницаемости одиночного слоя (во втором случае).

3. Рассмотрим случай одиночного диэлектрического слоя. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые четных волн при $k\Delta b = 5$ ($\Delta b \sim \lambda$), где Δb — половина толщины слоя. При уменьшении ε , начиная с больших положительных значений, каждая дисперсионная кривая идет из $-i\infty$ по мнимой нижней полуоси. Этот участок кривой соответствует поверхности волне. Далее, перейдя на положительную мнимую полуось, при некотором значении ε кривая выходит в первый квадрант комплексной плоскости κ . В месте выхода в плоскость рассматриваемая кривая встречается с соответствующей ей дисперсионной кривой, опускающейся сверху по мнимой оси. Эта встречная кривая выходит в левую комплексную полуплоскость и располагается симметрично рассматриваемой.

ваемой кривой (на графиках встречные кривые не показаны). Из общей теории следует, что картина встречи и расхождения кривых имеет такой вид, как схематически показано на рис. 2. Заметим, что кривая,

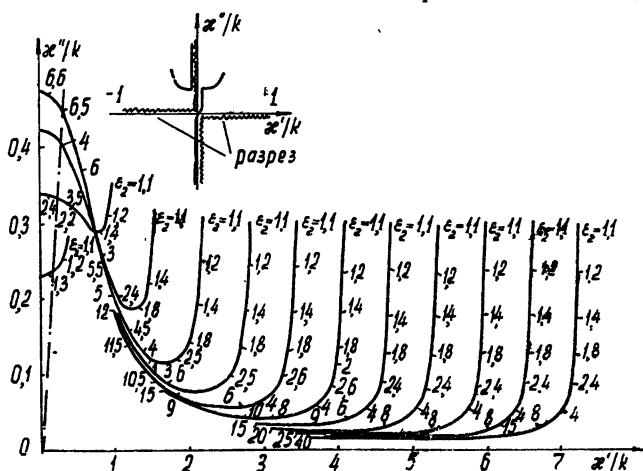


Рис. 2. Дисперсионные кривые четных волн в комплексной плоскости x для одиночного слоя при $k\Delta b = 5$, $\epsilon_2 = \epsilon > 1$ (штрих-пунктирная кривая—граница быстрых и медленных волн $h' = k$).

поднимающаяся снизу, соответствует прямой волне ($h' > 0$), а опускающаяся сверху — обратной ($h' < 0$), где $h = h' + ih''$ — продольное волновое число.

Выйдя в комплексную плоскость и перейдя границу медленных и быстрых несобственных волн (штрих-пунктирная кривая), дисперсионные кривые располагаются периодически вдоль положительной действительной полуоси.

Следует отметить, что, по-видимому, реально существуют (имеют область существования внутри волновода и в некоторой области вне его) только быстрые несобственные волны, которые называются вытекающими. Медленные несобственные волны не имеют области существования, т. е. они не имеют области в пространстве (по крайней мере вне волновода), где бы их можно было рассматривать как самостоятельные волновые структуры.

Рассмотрим волны, направляемые плоским диэлектрическим волноводом, с помощью концепции Бриллюэна. Вытекающую волну в таком волноводе можно интерпретировать как волну, образованную внутри слоя двумя плоскими волнами Бриллюэна, которые в отличие от случая поверхностной волны отражаются от границы слоя не полностью, а с некоторым просачиванием через границы (угол падения выходит за пределы угла, когда имеет место полное внутреннее отражение).

В связи с таким представлением направляемых волн интересно проследить поведение угла падения волны Бриллюэна на границу со свободным пространством при изменении диэлектрической проницаемости (рис. 3) на основании полученных численных результатов. Угол падения φ может быть найден из соотношений $g = k\sqrt{\epsilon} \cos \varphi$ и (3):

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right). \quad (4)$$

Учитывая, что граничный с областью полного внутреннего отражения угол φ_0 удовлетворяет уравнению

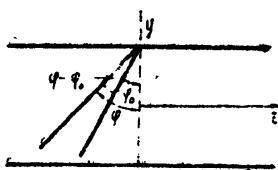


Рис. 3.

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon},$$

ПОЛУЧИМ

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0 &= \sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{ix}{k} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) видно, что при прохождении x_n по мнимой оси через начало координат с нижней полусоси на верхнюю (рис. 2) угол φ сначала приближается к φ_0 ($\varphi - \varphi_0 \rightarrow 0$), а затем удаляется от него. При этом φ как будто бы снова попадает в область полного внутреннего отражения. Однако вместо экспоненциального спадания для поля волны вне волновода после перехода x_n на верхнюю полусось имеет место экспоненциальное возрастание.

Далее, как уже говорилось выше, χ_n сходит с мнимой оси в плоскость. Угол φ при этом становится комплексным. И только после перехода χ_n через границу быстрых и медленных несобственных волн вне волновода появляется волна, которую можно интерпретировать как плоскую (неоднородную) волну, высвечивающуюся из слоя под некоторым углом. Таким образом, при рассмотрении слоев с различными ε обнаруживается участок значений ε (для каждого типа волн, соответствующего одной кривой, свой участок), заключенный между участками, где волны являются либо поверхностными, либо вытекающими, в пределах которого структуру поля волны вне (а, следовательно, и внутри) волновода с физической точки зрения объяснить не удается.

Заметим, что поверхностная волна низшего типа в несобственную не превращается. Соответствующая ей дисперсионная кривая при $\epsilon \rightarrow 1$ приходит в начало координат ($x_0 \rightarrow x = 0$), что соответствует превращению поверхностной волны в плоскую волну свободного пространства.

Дисперсионные кривые нечетных волн качественно ведут себя также, как четные, поэтому графики для них не приводятся. Кривые лишь сдвинуты вдоль действительной оси и располагаются между соответствующими дисперсионными кривыми четных волн.

Перейдем к волноводу из двух слоев, разделенных воздушным промежутком. На рис. 4 приведены дисперсионные кривые для случая

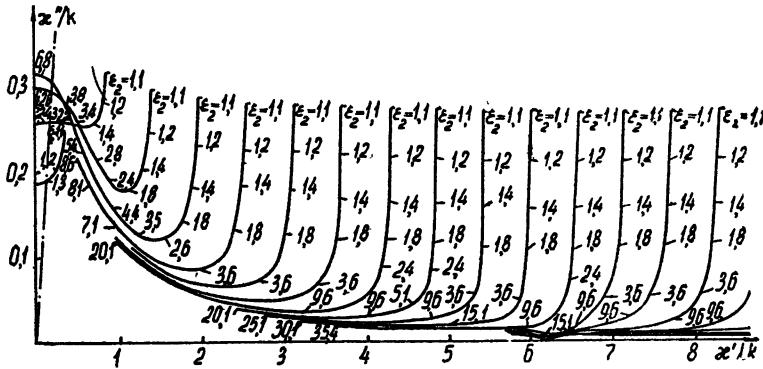


Рис. 4. Дисперсионные кривые четных волн в плоскости x при $k\lambda b=5$:
 $kb_1=0,5$; $\epsilon_2=\epsilon > 1$ (диэлектрические слои).

узкой центральной щели: $kb_1 = 0,5$ ($b_1 \sim 0,1\lambda$) и $k\Delta b = 5$ ($\Delta b \sim \lambda$). Наличие щели несколько изменяет дисперсионные кривые. Они отличаются

ются от кривых предыдущего случая вблизи значений $x_m = m\pi/b_1$ ($m=1, 2, \dots$), которые соответствуют спектру четных волн закрытого волновода. Вблизи этих точек кривые приближаются к действительной оси, и скорость движения x_n при изменении ϵ около этих точек существенно уменьшается. Это соответствует резонансу в центральном слое. При дальнейшем увеличении диэлектрической проницаемости кривые уходят от этих точек и идут на мнимую ось, т. е. в пределе при достаточно больших значениях ϵ волны становятся поверхностными. Их поле сосредоточивается в боковых слоях.

Дисперсионные кривые нечетных волн приближаются к действительной оси около точек $x_m = (2m-1)\pi/2b_1$, которые соответствуют спектру нечетных волн закрытого волновода.

В случае, когда толщина боковых слоев такого же порядка как ширина щели, т. е. $k\Delta b = kb_1 = 0,5$ ($\Delta b = b_1 \sim 0,1\lambda$) (рис. 5), дисперсионные

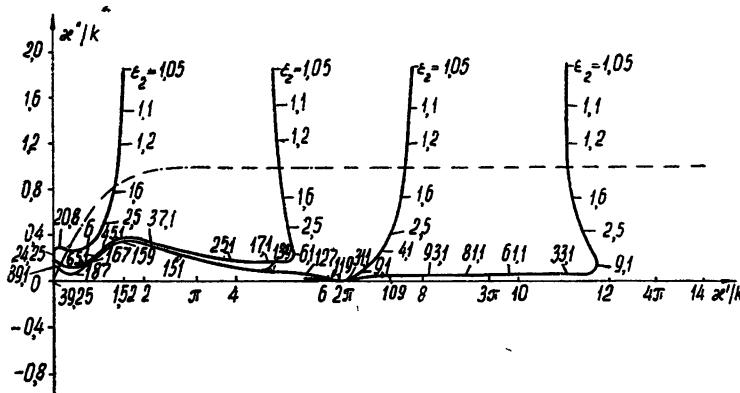


Рис. 5. Дисперсионные кривые четных волн в плоскости x при $k\Delta b = kb_1 = 0,5$; $\epsilon_2 = \epsilon > 1$.

кривые разделяются по внешнему виду на два типа. Кроме того, поскольку боковые слои в этом случае являются более тонкими, ухудшаются отражательные и направляющие свойства и мнимая часть поперечных волновых чисел при тех же значениях ϵ больше по величине.

Интересно отметить закономерность расположения поперечных волновых чисел x_n при $\epsilon \rightarrow 1$. Мнимая часть $x_n'' \rightarrow \infty$ из-за уменьшения отражения от границ слоев. Для четных волн действительная часть $x_n' \rightarrow (2n-1)\pi/2(b_1 + \Delta b)$ или, что то же самое, $\cos[x_n'(b_1 + \Delta b)] \rightarrow 0$. Для нечетных волн $x_n' \rightarrow n\pi/(b_1 + \Delta b)$ или $\sin[x_n'(b_1 + \Delta b)] \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 1$. Эта закономерность была обнаружена при численном расчете дисперсионных кривых для третьего случая ($kb_1 = k\Delta b = 0,5$) и существенно облегчила расчет кривых для первых двух случаев ($k\Delta b = 5$, $kb_1 = 0$ и $k\Delta b = 5$, $kb_1 = 0,5$).

Начальными точками счета в третьем случае были точки вблизи x_m (поперечные волновые числа закрытого волновода), а ϵ выбиралась равной нескольким десяткам. После того, как была обнаружена указанная закономерность, были рассчитаны кривые для случая более толстых боковых слоев и для одиночного слоя (отсутствие щели: $kb_1 = 0$), причем начальными точками счета были точки x_n при $\epsilon \rightarrow 1$ (мнимая часть бралась несколько меньше, чем в случае $kb_1 = k\Delta b = 0,5$).

Рассмотрим плазменные слои. На рис. 6 представлены дисперсионные кривые для случая $kb_1 = k\Delta b = 0,5$ ($b_1 = \Delta b \sim 0,1\lambda$). Оказалось, что при $\epsilon = 0$ некоторые дисперсионные кривые проходят через точки $x_j = (2j-1)\pi/2b_1$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) в плоскостях x , которые соответствуют спектру волноводных волн, распространяющихся между слоями; другие

кривые проходят через точки $g_j = j\pi/\Delta b$ в плоскости g (плоскость g здесь не показана), которые соответствуют спектру волноводных

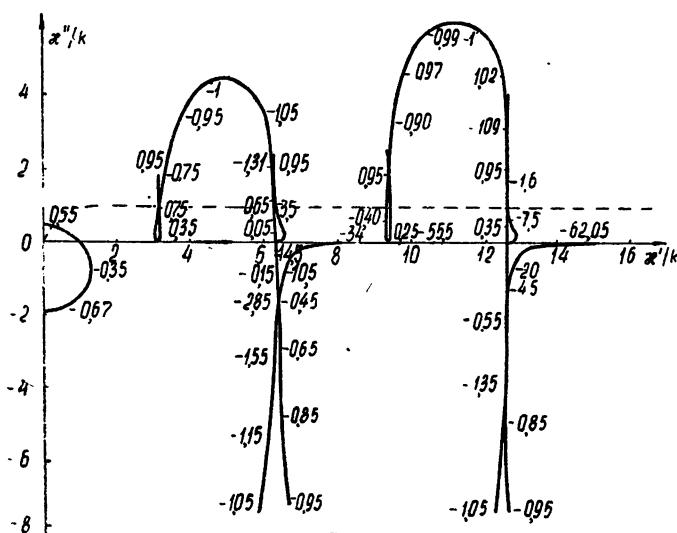


Рис. 6. Дисперсионные кривые четных волн в плоскости x при $k\Delta b = kb_1 = 0.5$; $\epsilon_2 = \epsilon < 1$ (плазменные слои).

волн, распространяющихся в слоях. Тем самым, волны как бы распадаются на два класса: волны, поле которых при ϵ , близких к нулю, в основном концентрируется между слоями (волны A), и волны, поле которых при ϵ , близких к нулю, в основном концентрируется в слоях (волны B). Следует отметить, что при $\epsilon = 0$, строго говоря, внутри слоя реализуется только безмагнитное решение: $H_x = 0$, $E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$ (см. [3]). Однако при ϵ , близких к нулю, для электромагнитной волны, по-видимому, можно пользоваться указанной интерпретацией.

Для волны типа A $x'' > 0$ как при $\epsilon > 0$, так и при $\epsilon < 0$, т. е. волны A являются всегда несобственными. Волны типа B при $\epsilon < 0$ становятся собственными комплексными. Заметим, что собственные комплексные волны в слоистых волноводах могут существовать только при наличии плазменных слоев с $\epsilon < 0$ [7].

Особым случаем является первая дисперсионная кривая. При больших отрицательных значениях ϵ соответствующая ей волна является поверхностью.

Казалось бы, можно ожидать, что в случае диэлектрических слоев также должны существовать два класса волн: поле одних при $\epsilon \rightarrow \infty$ должно концентрироваться в слоях (соответствующие им дисперсионные кривые в плоскости x стремятся к бесконечности по отрицательной мнимой оси), поле других при $\epsilon \rightarrow \infty$ должно концентрироваться между слоями (соответствующие кривые должны при $\epsilon \rightarrow \infty$ приходить в плоскости x в точки $x_m = m\pi/b_1$ — для четных волн и $x_m = (2m-1)\pi/2b_1$ — для нечетных волн ($m = 1, 2, \dots$), которые соответствуют спектру волн между идеально отражающими слоями).

Однако при решении дисперсионных уравнений вторые кривые не были обнаружены. По-видимому, если бы рассматривалась среда с поглощением ($\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$), то при $\epsilon'' \rightarrow \infty$ дисперсионные кривые в плоскости x заканчивались бы в точках, соответствующих спектру волн закрытого волновода (между идеально отражающими слоями). Заметим, что хотя при $\epsilon = \epsilon' \rightarrow \infty$ не были обнаружены такого рода кривые, это не означает, что при больших значениях ϵ нет волн, поле

которых концентрируется между слоями (если там расположен источник). Дело в том, что при любом как угодно большом значении ϵ вблизи точек x_m всегда имеется достаточно корней дисперсионного уравнения.

При дальнейшем увеличении ϵ корни уходят от этих точек, но на их место приходят новые корни. Причем каждый последующий корень проходит все ближе к значению x_m . Можно сказать, что предельный переход к точкам x_m имеет место не вдоль одной дисперсионной кривой, а скачкообразно с одной кривой на другую. Такое различие в предельных переходах, вероятно, связано с отличающимися способами концентрации поля в слоях и между слоями при $\epsilon \rightarrow \infty$. В первом случае поле вне слоя локализуется вблизи границы (экспоненциальное спадание), а во втором — увеличивается коэффициент отражения от границы, но локализация внешнего поля отсутствует.

Полученные результаты для поперечных волновых чисел x и, следовательно, для продольного волнового числа $h = \sqrt{k^2 - x^2}$ дают возможность вычислить фазовые скорости и другие характеристики направляемых волн. Эти результаты могут быть использованы, в частности, при конструировании генераторов и усилителей, использующих излучение Черенкова на вытекающих волнах [1].

Авторы выражают благодарность В. А. Ирикову, принимавшему участие в разборе и обсуждении части работы, касающейся одиночного диэлектрического слоя, И. Г. Кондратьеву, Г. А. Маркову и М. А. Миллеру за критические замечания, касающиеся физической интерпретации полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Oliner, Electromagnetic Theory and Antennas, part 2, Pergamon Press 837, 1963.
2. Т. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, 317 (1963).
3. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 1, 176 (1964).
4. А. Е. Кагбвиак, Proc. IEE, 111, 1781 (1964).
5. G. Meltz, R. A. Shore, IEEE Spectrum, 1, 109 (1964).
6. E. A. Markatili, R. A. Schmetzger, BSTJ, 43, 1783 (1964).
7. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).
8. В. А. Романовский, Радиотехника, 22, 101 (1967).
9. Ю. Н. Казанцев, Радиотехника и электроника, 12, 1107 (1967).
10. В. А. Ириков, В. П. Мальцев, Е. И. Нefедов, В. В. Шевченко, Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Д—194, Харьков, 1967.
11. I. Palocz, A. A. Oliner, Proc. of symposium on quasi-optics, Polytechnic Press, 1964, N. Y. (перевод, сб. Квазиоптика, под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко, изд. Мир, 1966, стр. 167; Proc. IEEE, 53, 24 (1965)).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
12 июня 1967 г.,
после доработки
10 мая 1969 г.

LEAKY WAVES IN A WAVEGUIDE OF TWO SEPARATED LAYERS

V. P. Mal'tsev, Ye. I. Nefyodov, V. V. Shevchendo

The spectrum of waves (surface, proper complex and improper, particular, leaky) of the waveguide formed by two plane dielectrics or isotropic plasma layers separated by air gaps is investigated. As a particular case there are also considered the waves in a single plane dielectric waveguide. A special attention is paid to improper, leaky waves. The dispersion equation is numerically solved using an electron digital computer. The results are represented as dispersion curves in a complex plane of the transverse wave number as a functions of the value of the dielectric permittivity.

УДК 538.574.4

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ТЕЛАХ КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Г. Д. Малушкин

Рассматривается задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на импедансном конусе конечных размеров. Первичная волна падает в направлении вершины конуса. Поверхностный импеданс является произвольной функцией продольной координаты конуса. Распределение тока находится методом интегральных уравнений 1-го рода с различными областями изменения точек наблюдения и интегрирования. Приводятся результаты расчета поля рассеяния для различных размеров конуса и величин поверхностного импеданса.

Решению задачи о дифракции и рассеянии электромагнитных волн на идеально проводящих и диэлектрических телах посвящено большое количество работ. Достаточно полная библиография имеется в [1, 2]. Целью настоящей работы является исследование поля рассеяния конечных тел конической формы с импедансной поверхностью при падении на них плоской электромагнитной волны в направлении оси вращения.

При решении рассматриваемой задачи в зависимости от размеров тела, на котором дифрагирует падающая волна, пользуются различными методами. Когда характерный размер тела во много раз больше (высокочастотная область) либо меньше (низкочастотная область) длины волны, применимы асимптотические методы соответственно лучевой (волновой) оптики, либо квазистатическое приближение (метод Рэлея).

При размерах тела, соизмеримых с длиной волны (резонансная область), наиболее эффективным является метод интегральных уравнений, составляемых относительно поверхностной плотности тока на теле. Основное преимущество этого метода заключается в практическом отсутствии ограничений на форму исследуемого объекта, а использование электронных вычислительных машин позволяет получить исключительно высокую точность расчета в области, где асимптотические методы не применимы. К недостаткам метода следует отнести невозможность получения, вследствие ограниченного объема памяти ЭВМ, решения для тел больших размеров. Обычно значительные трудности встречаются уже при решении задач для тел с длиной образующей порядка 10λ , хотя имеется сообщение о решении задачи рассеяния на бесконечном импедансном цилиндре с периметром в 150λ [3].

Рассматриваемая здесь задача формулируется следующим образом. На импедансный конус конечных размеров в направлении оси вращения падает плоская электромагнитная волна с вектором напряженности электрического поля $E^{\text{пад}}$, создаваемая сторонним источником в виде электрического вибратора, находящегося на достаточно большом от конуса расстоянии d (рис. 1). В результате на поверхности конуса возбуждаются поверхностные электрические и магнитные токи, создающие рассеянное (вторичное) поле $E^{\text{рас}}$, которое и является неизвестной функцией координат ϑ, ϕ .

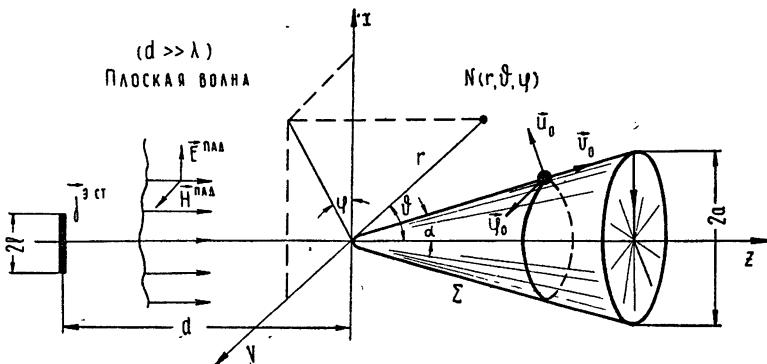


Рис. 1. Геометрия задачи.

В соответствии с [4] составляющие E_ϑ^{pac} и E_φ^{pac} могут быть рассчитаны по формулам

$$E_\vartheta^{\text{pac}} = e^{i\vartheta} \frac{e^{-ir}}{r} W_0 \int_v \left\{ J_{1\vartheta}^s \cos \vartheta \frac{J_1(x)}{x} + J_{1v}^s \left[-\sin \Theta \sin \vartheta J_1(x) + i \cos \Theta \cos \vartheta \frac{dJ_1(x)}{dx} \right] + \frac{i}{W_0} J_{1\vartheta}^m \frac{dJ_1(x)}{dx} + \frac{1}{W_0} J_{1v}^m \cos \Theta \frac{J_1(x)}{x} \right\} e^{iz \cos \vartheta} R dv; \quad (1)$$

$$E_\varphi^{\text{pac}} = e^{i\varphi} \frac{e^{-ir}}{r} W_0 \int_v \left\{ -J_{1v}^s \cos \Theta \frac{J_1(x)}{x} + J_{1\vartheta}^s i \frac{dJ_1(x)}{dx} - \frac{1}{W_0} J_{1\vartheta}^m \cos \Theta \frac{J_1(x)}{x} + \frac{1}{W_0} J_{1v}^m \left[-\sin \Theta \sin \vartheta J_1(x) + i \cos \Theta \cos \vartheta \frac{dJ_1(x)}{dx} \right] \right\} e^{iz \cos \vartheta} R dv. \quad (2)$$

Здесь J_{1v}^s и $J_{1\vartheta}^s$ — продольная и поперечная составляющие поверхностной плотности электрического тока, возбуждаемого на конусе (J_{1v}^m и $J_{1\vartheta}^m$ — соответствующие составляющие магнитного тока), Θ — угол между внешней нормалью к поверхности конуса и осью z , $J_1(x) = J_1(R \sin \vartheta)$ — функция Бесселя, $W_0 = 120\pi \text{ ом}$. Остальные обозначения ясны из рис. 1. В (1), (2) и далее все линейные размеры нормированы, т. е. умножены на волновое число $k = 2\pi/\lambda$.

Таким образом, $E^{\text{pac}}(\vartheta, \varphi)$ при заданной форме тела является функцией его размеров, вида и величины поверхностного импеданса. Исследованию этих вопросов и посвящено дальнейшее рассмотрение.

Интегральное уравнение относительно вектора поверхностной плотности возбуждаемого на конусе электрического тока J^s имеет вид [5]

$$\int_{\Sigma} (E_B - Z[nH_B]) J^s d\sigma = - \int_W E_B J^s \text{ct} dw, \quad (3)$$

где Σ — поверхность конуса, E_B , H_B — некоторое вспомогательное поле, выбираемое из сопротивления получения корректного интегрального уравнения, $J^s \text{ct}$ — объемная плотность стороннего электрического тока,

отличного от нуля в некотором объеме W , $Z = \begin{vmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{vmatrix}$ — тензор поверхностного импеданса, в котором $Z_1 = J_{\varphi}^m / J_v^s$ — продольный и $Z_2 = -J_v^s / J_{\varphi}^m$ — поперечный импедансы. Полагается, что Z_1 и Z_2 могут быть произвольными, не зависящими друг от друга функциями продольной координаты v , но постоянные по азимутальной координате φ .

В качестве возбуждающего источника используется электрический вибратор длиной $2l$ с синусоидальным распределением тока вдоль него $j_v^{st} = I_0 \sin(l - R)$, который находится настолько далеко от возбуждаемого тела, что можно считать падающую на конус волну плоской. Критерий для выбора расстояния d анализируется в [6], и ниже мы его оценим количественно.

Возбуждаемый на теле электрический ток, изменяющийся по азимутальной координате по закону $e^{i\varphi}$, имеет продольную J_{1v}^s и поперечную $J_{1\varphi}^s$ составляющие. Чтобы показать это, достаточно доказать, что стороннее поле плоской волны $E^{пад}$ полностью определяется составляющими E_{1v} и $E_{1\varphi}$. Действительно, после представления вектора $E^{пад} = E_1 e_1$ (рис. 2) в виде

$$\begin{aligned} E^{пад} &= E_v - E_{\varphi} = E_1 \cos \varphi e_v - E_1 \sin \varphi e_{\varphi} = \\ &= (E_{1v} e^{i\varphi} + E_{1v} e^{-i\varphi}) e_v + (E_{1\varphi} e^{i\varphi} - E_{1\varphi} e^{-i\varphi}) e_{\varphi}, \end{aligned}$$

Рис. 2. Поле плоской волны в координатах вращения.

где e_1, e_v, e_{φ} — координатные единичные векторы, видно, что для любой точки плоскости равных фаз разложение падающего поля в ряд Фурье по азимутальной координате приводит к необходимости определения только E_{1v} и $E_{1\varphi}$, т. е. можно считать, что возбуждаться на теле будет только первая гармоника.

Вообще для m -й азимутальной гармоники интегральное уравнение (3) относительно составляющих может быть представлено как

$$\begin{aligned} \int_v [(E_z \sin \Theta - E_R \cos \Theta - Z_1 H_{\varphi}) J_{mv}^s + (E_{\varphi} + Z_2 (H_z \sin \Theta - \\ - H_R \cos \Theta)) J_{m\varphi}^s] R dv = - \int_S (E_z \sin \Theta - E_R \cos \Theta) j_{mv}^{st} R ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Вспомогательное поле записано здесь в цилиндрической системе координат z, R, φ . В левой части (4) интегрирование ведется по образующей тела v , в правой — по поверхности S в меридиональной плоскости, занимаемой сторонним током после разложения его в ряд Фурье по азимутальной координате.

Для нахождения двух неизвестных функций J_{mv}^s и $J_{m\varphi}^s$ необходимо использование двух вспомогательных источников. Как показано в [5], в случае произвольного тела вращения оптимальными являются рамки с v -м и φ -м магнитными токами. Для рамки с v -м магнитным током вспомогательное поле записывается в виде

$$E_z = im \frac{\cos \Theta'}{R'} S_m e^{-im\varphi},$$

$$E_R = im \frac{\vec{B}}{RR'} S_m e^{-im\varphi},$$

$$E_\varphi = \left[B \left(\frac{m}{RR'} S_m + S_{m-1}^I \right) + R \sin \Theta' S_m^I \right] e^{-im\varphi}, \quad (5)$$

$$H_z = \frac{i}{W_0} \left[\left(\frac{B}{R'} + 2 \sin \Theta' \right) S_m^I + \frac{R}{z - z'} \left(B \frac{\partial^2 S_{m-1}}{\partial R \partial z} + \sin \Theta' \frac{\partial^2 S_m}{\partial R \partial z} \right) \right] e^{-im\varphi},$$

$$H_R = - \frac{i}{W_0} \left[\frac{(z - z') \cos \Theta'}{RR'} S_m^I + \cos \Theta' \frac{\partial^2 S_{m-1}}{\partial z^2} + \sin \Theta' \frac{\partial^2 S_m}{\partial R \partial z} \right] e^{-im\varphi},$$

$$H_\varphi = \frac{1}{W_0} \left\{ \left[\frac{B(z - z')}{RR'} + \frac{R}{R'} \cos \Theta' \right] S_m^I - \cos \Theta' S_{m-1}^I \right\} e^{-im\varphi},$$

где $B = R' \sin \Theta' - (z - z') \cos \Theta'$, R, φ, z и R', φ', z' — цилиндрические координаты точки интегрирования и точки нахождения вспомогательного источника, Θ' — угол между нормалью к направлению v -го тока вспомогательного источника и осью z , S_m — m -й коэффициент разложения функции Грина для свободного пространства в ряд Фурье по φ , $S_m^I = [1/(z - z')] (\partial S_m / \partial z)$.

Подставляя (5) в (4) при $m = 1$, получим требуемое интегральное уравнение, которое мы не выписываем из-за его громоздкости. Второе уравнение для φ -го вспомогательного тока приведено в [4]. В данной работе используется v -й вспомогательный источник в связи с рассмотрением тел конической формы, так как z -й вспомогательный источник дает хорошие результаты только для тел цилиндрической формы. В противном случае вид ядра интегрального уравнения оказывается неприемлемым, что приводит при решении к большим вычислительным ошибкам.

Решение полученной выше системы интегральных уравнений осуществляется путем сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений, которая с успехом решается на ЭВМ. Пример вида получающихся функций распределения составляющих поверхностной плотности тока $J_{1v}^3 = |J_{1v}| \times \exp(i\psi_{1v})$ (сплошные кривые) и $J_{1\varphi}^3 = |J_{1\varphi}| \exp(i\psi_{1\varphi})$ (пунктирные кривые) приведен на рис. 3 для двух значений импеданса $Z_1 = Z_2 = 0$ и $Z_1 = Z_2 = i1$ (кривые с точками). После расчета токов, которые используются здесь как промежуточный результат, в машину вводится программа для расчета диаграмм рассеяния по формулам (1), (2) и вычисляются компоненты $E_\varphi^{\text{рас}}$ и $E_\varphi^{\text{рас}}$.

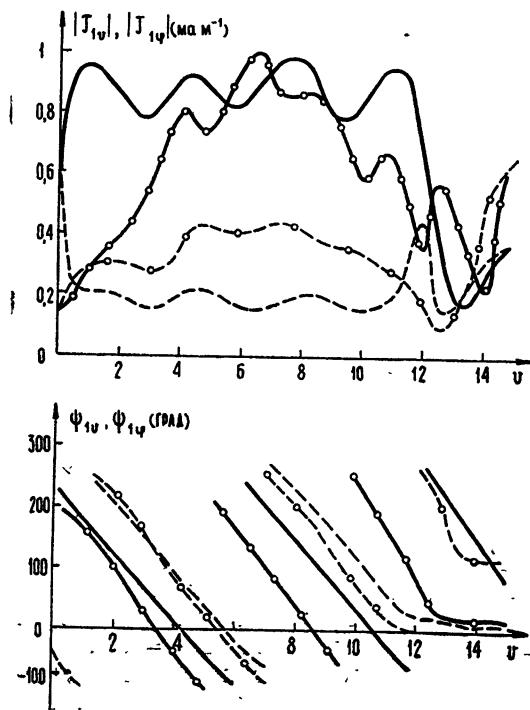


Рис. 3. Распределение поверхностной плотности электрического тока на конусе с радиусом основания $a=3,15$.

Результаты расчета диаграмм рассеяния изложенным методом при падении плоской волны в направлении с вершины представлены на рис. 4 и 5. Диаграммы нормированы к 1 и коэффициент нормировки указывается на рисунках. Расчеты проводились для конуса с углом при вершине $2\alpha = 30^\circ$. Вершина конуса и место перехода от конической части к плоскому основанию имели небольшие скругления (радиус $r_0 = 0,1$). Возбуждающий вибратор с синусоидальным распределением тока имел длину $2l = \lambda/2$.

На рис. 4 показаны диаграммы рассеяния идеально проводящего ($Z_1 = Z_2 = 0$) конуса при изменении его размеров. В случае малых размеров конуса (нормированный радиус основания $a = 1,31$) поле рассея-

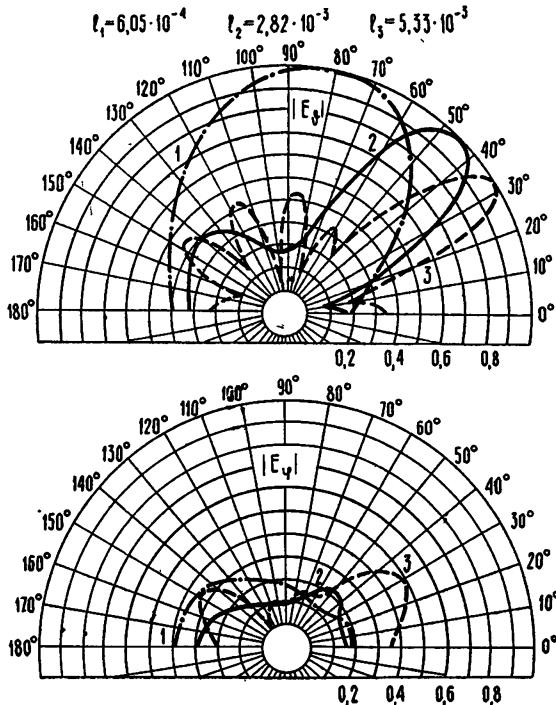


Рис. 4. Диаграммы рассеяния идеально проводящего конуса с углом при вершине $2\alpha = 30^\circ$ при различных радиусах основания:

- 1) $a = 1,31$, 2) $a = 3,15$, 3) $a = 5,01$; $l_1 = 6,05 \cdot 10^{-4}$, $l_2 = 2,82 \cdot 10^{-3}$, $l_3 = 5,33 \cdot 10^{-3}$.

ния относительно равномерно. С увеличением размеров происходит формирование главного лепестка диаграммы, и при достаточно большой величине конуса (кривая 3) главный максимум получается направленным под углом 30° , что соответствует закону зеркального отражения.

Влияние поверхностного реактивного (индуктивного) и комплексного (изотропных) импедансов на диаграммы рассеяния конуса с $a = 3,15$ показано на рис. 5.

Наличие индуктивного импеданса на конусе приводит к увеличению поля рассеяния в осевом направлении за счет возникновения поверхностной волны, отражение которой от кромки зависит от радиуса основания. Действительная часть импеданса характеризует активные потери. Можно отметить, что существенных изменений диаграммы рассеяния с ростом реактивного импеданса не претерпевают, однако увеличение уровня поля в направлениях $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ приводят к значительному изменению поперечного сечения рассеяния σ .

Поперечное сечение рассеяния определяется формулой

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{|S_{\text{рас}}|}{|S_{\text{max}}|}, \quad (6)$$

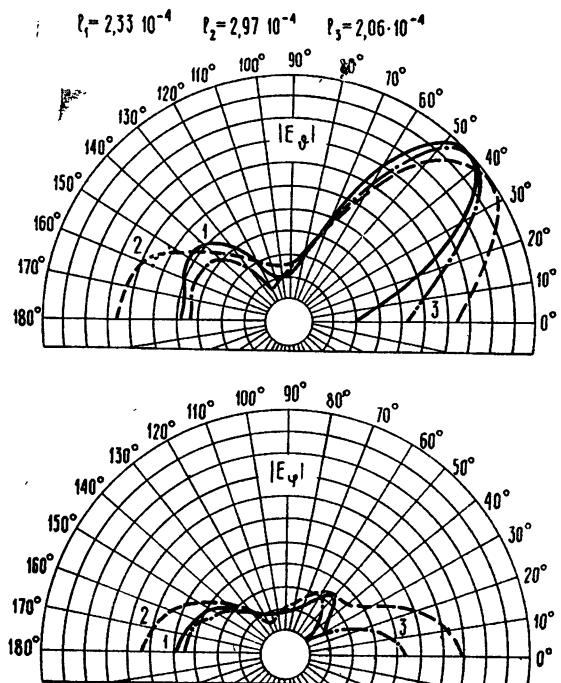


Рис. 5. Диаграммы рассеяния импедансного конуса с радиусом основания $a=3,15$ для значений импедансы:

- 1) $Z_1=Z_2=i0,1$, 2) $Z_1=Z_2=i0,3$, 3) $Z_1=Z_2=0,1+i0,1$;
 $l_1=2,33 \cdot 10^{-4}$, $l_2=2,97 \cdot 10^{-4}$,
 $l_3=2,06 \cdot 10^{-4}$.

где $|S_r^{\text{pac}}| = (|E_\theta^{\text{pac}}|^2 + |E_\phi^{\text{pac}}|^2)/2W_0$ — плотность потока рассеянной мощности на расстоянии r от рассеивателя (для обратного сечения рассеяния $|E_\theta^{\text{pac}}| = |E_\phi^{\text{pac}}|$), $|S^{\text{пад}}| = |E^{\text{пад}}|^2/W_0$ — плотность потока мощности падающей плоской волны.

Рассчитанная указанным методом зависимость обратного поперечного сечения рассеяния σ импедансного конуса при падении плоской волны с вершины от величины импедансы и рассеяния d приводится в табл. 1.

Таблица 1

$d \backslash Z_1=Z_2$	0	$i0,1$	$i0,3$	$0,01+i0,01$	$0,1+i0,1$
6,28	2,95	6,6	26,6	3,06	4,1
45	18	—	—	—	—
62,8	21,2	42	140	22	28,1
450	28,8	56,7	177	30,7	38,1
628	29,8	57,5	181	31,2	38,4
6280	31,2	61,5	187	33	39,7

Видно, что σ практически не изменяется для нормированного расстояния $d > 450$. Если использовать для выбора этого расстояния известную формулу работы [6]:

$$d = \frac{(ka)^2}{\Psi}, \quad (7)$$

где Ψ — сдвиг фазы на кромке конуса относительно центра основания (отличие падающей волны от плоской), то для величины Ψ получается

значение $\Psi = 0,63^\circ$, т. е. необходимо, чтобы отклонение фазы было меньше 1° . В противном случае величина радиолокационного поперечного сечения получается заниженной.

В заключение отметим, что изложенным методом легко определяются и другие характеристики рассеяния (полное сечение рассеяния, коэффициент полезного действия, под которым понимается отношение отраженной от объекта мощности к падающей, и т. д.).

Автор весьма признателен Г. П. Барановой, принимавшей участие в расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р. Менцер, Дифракция и рассеяния радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
2. Н. А. Соггнер, В. О. Ругоп, Proc. IEEE, 53, № 8, 1025 (1965).
3. М. Г. Andreassen, Proc. IEEE, 53, № 8, 812 (1965).
4. Г. Д. Малушков, сб. Антенны, Связьиздат, вып. 2, 1967, стр. 117.
5. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалунин, ЖТФ, 37, № 3, 431 (1967).
6. R. G. Kouyoumjian, L. Peters, Proc. IEEE, 53, № 8, 920 (1965).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
6 января 1969 г.

SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON BODIES OF A CONICAL FORM

G. D. Malushkov

The scattering of a plane electromagnetic wave on an impedance cone of finite dimensions is considered. The primary wave is incident along the direction from the vertex of the cone. The surface impedance is the arbitrary function of the longitudinal coordinate of the cone. The distribution of the current is found by the method of the 1-st kind integral equations with different regions of variations of observation and integration points. The calculation results of the scattering field are presented for different dimensions of the cone and the values of the surface impedance.

УДК 534 — 8

**К ТЕОРИИ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ЗАТУХАНИЯ УЛЬТРАЗВУКА
В ПОЛУПРОВОДНИКЕ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Э. М. Эпштейн

Вычислен коэффициент поглощения ультразвука электронами проводимости в полупроводнике при наличии сильного высокочастотного электрического поля и перпендикулярного к нему постоянного магнитного поля. Как и в отсутствие магнитного поля, зависимость коэффициента поглощения при изменении амплитуды электрического поля носит характер «гигантских» осцилляций. При совпадении частоты электрического поля с электронной циклотронной частотой период осцилляций значительно уменьшается. Это позволяет использовать для наблюдения осцилляций в магнитном поле гораздо более слабые электрические поля, чем в изотропном случае.

В работе [1] было показано, что при наличии сильного однородного высокочастотного электрического поля (ВЧЭП) зависимость коэффициента поглощения ультразвука электронами проводимости в полупроводнике от амплитуды ВЧЭП и частоты звука носит осцилляторный характер, причем амплитуда осцилляций порядка самой осциллирующей величины («гигантские» осцилляции). Цель настоящей статьи — выяснить, как влияет на этот эффект постоянное (неквантующее) магнитное поле, перпендикулярное к направлению звукового потока.

Будем предполагать, что взаимодействие электронов со звуковой волной носит деформационный характер. Положим также, что длина звуковой волны $\lambda = 2\pi/q$, где q — волновой вектор, много больше длины свободного пробега электрона l , и ограничимся приближением изотропной среды. Тогда исходная система уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - s_0^2 \nabla^2 u = \frac{\Lambda}{\rho} \nabla n; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = \frac{e}{m} E + \omega_H [vh] - \frac{kT}{mn} \nabla n - \frac{v}{\tau} - \frac{\Lambda}{m} \nabla(\nabla u); \quad (3)$$

$$\times(\nabla E) = 4\pi e(n - n_0), \quad (4)$$

где u — смещение в звуковой волне, E — электрическое поле, n — концентрация электронов, n_0 — равновесное значение концентрации, v — гидродинамическая скорость электронов, s_0 — неперенормированная скорость звука, ρ — плотность кристалла, Λ — константа деформационного потенциала, T — температура электронов, m — эффективная масса, \times — решеточная диэлектрическая проницаемость, τ — время релаксации импульса электронов, ω_H — электронная циклотронная частота,

\hbar — единичный вектор в направлении магнитного поля. Полное электрическое поле E слагается из внешнего однородного ВЧЭП $\tilde{E}(t) = -E_0 \exp(\delta t) \sin(\Omega t)$ и электрического поля, создаваемого звуковой волной ($\delta \rightarrow +0$ есть параметр адиабатического включения внешнего поля при $t = -\infty$). В уравнениях (1)–(4) мы не учитываем попечерной компоненты электрического поля, созданного звуковой волной, поскольку, как показывают оценки (см., например, [2]), она дает вклад порядка $(s_0/c)^2 \ll 1$ (c — скорость света).

Для упрощения выкладок в дальнейшем будем рассматривать только случай $q \parallel E_0$, который при $\omega_H \rightarrow 0$ переходит в случай, рассмотренный в работе [1].

Будем искать решение системы уравнений (1)–(4) в виде

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \tilde{E}(t) + \exp(iqr) E_1(t), \\ \tilde{v}(r, t) &= \tilde{v}(t) + \exp(iqr) v_1(t), \\ n(r, t) &= n_0 + \exp(iqr) n_1(t), \\ u(r, t) &= \exp(iqr) u_1(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tilde{v}(t)$ — гидродинамическая скорость электронов в отсутствие звуковой волны. Из уравнения (3) следует

$$q\tilde{v}(t) = a \Omega \exp(\delta t) \sin(\Omega t + \psi); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{eE_0 q \tau}{m \Omega} [(1 - \Omega^2 \tau^2 + \omega_H^2 \tau^2)^2 + 4 \Omega^2 \tau^2]^{-1} \times \\ &\times [(1 + \Omega^2 \tau^2 + \omega_H^2 \tau^2)^2 + \Omega^2 \tau^2 (1 + \Omega^2 \tau^2 - \omega_H^2 \tau^2)^2]^{1/2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{\Omega \tau (1 + \Omega^2 \tau^2 - \omega_H^2 \tau^2)}{1 + \Omega^2 \tau^2 + \omega_H^2 \tau^2}. \quad (8)$$

Будем считать звуковую волну слабой и производить линеаризацию по величинам с индексом 1.

Подставляя (5), (6) в (1)–(4) и переходя к компонентам Фурье, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2) \xi(\omega) &= -i \frac{\Lambda^2}{\rho} q^4 n_0 \tau \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp[i(p-l)\psi] J_p(a) J_l(a) \times \\ &\times F(\omega + p\Omega) \xi(\omega - l\Omega + p\Omega), \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_p(x)$ — функции Бесселя от вещественного аргумента,

$$F(\omega) = \left[\omega \left(1 + \frac{\omega_H^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) + i \left(\omega_c + D q^2 - \frac{\omega^4 \tau^3}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q u_1(t) e^{i\omega t} dt, \quad (11)$$

$$\omega_0 = s_0 q, \quad \omega_c = \frac{4\pi e^2 n_0 \tau}{\pi m}, \quad D = \frac{kT \tau}{m}.$$

Взаимодействие электронов со звуковой волной обычно бывает

весьма слабым, и к нему приложима теория возмущений. Поэтому с точностью до членов более высокого порядка по константе электромеханической связи можно, во-первых, заменить в правой части уравнения (9) ω на ω_0 , а во-вторых, оставить там только члены с $p = l$. Тогда будем иметь следующее дисперсионное уравнение для звуковой волны:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = -i \frac{\Lambda^2}{\rho} q^4 n_0 \tau \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p^2(a) F(\omega_0 + p\Omega). \quad (12)$$

Коэффициент поглощения звука электронами равен

$$\alpha = -\frac{2}{s_0} \operatorname{Im} \omega = \frac{\Lambda^2}{\rho s_0^2} q^3 n_0 \tau \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p^2(a) \operatorname{Re} F(\omega_0 + p\Omega). \quad (13)$$

Из (10) следует, что при $\Omega \gg \omega_0$ и $\Omega \gg \omega_c + Dq^2$ или $\omega_H \tau \gg 1$ из всего ряда в правой части (13) остается лишь член с $p = 0$, т. е.

$$\alpha = \frac{\Lambda^2}{\rho s_0^2} q^3 n_0 \frac{\omega_0 \tau (1 + \omega_H^2 \tau^2) J_0^2(a)}{\omega_0^2 (1 + \omega_H^2 \tau^2)^2 + (\omega_c + Dq^2)^2} = \alpha_0 J_0^2(a), \quad (14)$$

где α_0 — коэффициент поглощения звука в отсутствие ВЧЭП (ср. [2]); мы воспользовались здесь соотношением $\omega_0 \tau \ll q\tau \ll 1$.

Таким образом, влияние ВЧЭП, как и при отсутствии магнитного поля [1], в случае $\Omega \gg \omega_0$ сводится к появлению в формуле для коэффициента поглощения дополнительного множителя $J_0^2(a)$. Однако в данном случае выражение для a имеет более сложный вид (см. (7)).

При $\omega_H \tau \ll 1$ получается результат работы [1]:

$$a = \frac{eE_0 q}{m \Omega^2} \frac{\Omega \tau}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}}. \quad (15)$$

В обратном предельном случае $\omega_H \tau \gg \max(1, \Omega \tau)$ имеем

$$a = \frac{eE_0 q}{m \Omega^2} \frac{\Omega \sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}}{\omega_H^2 \tau}. \quad (16)$$

В случае циклотронного резонанса, когда $\tau^{-1} \ll \omega_H = \Omega$, получаем

$$a = \frac{eE_0 q \tau}{2m \Omega} = \left(\frac{eE_0 q}{m \Omega^2} \right) \left(\frac{\omega_H \tau}{2} \right). \quad (17)$$

Таким образом, в случае циклотронного резонанса величина a будет в $\omega_H \tau / 2 \gg 1$ раз больше, чем в отсутствие магнитного поля при той же частоте ВЧЭП. Это позволяет использовать для наблюдения осцилляций затухания ультразвука гораздо более слабое электрическое поле.

Автор признателен В. Л. Бонч-Бруевичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Эпштейн, ФТТ, 10, № 10, 2945 (1968).
2. Y. Abe, N. Mikoshiba, Japán J. Appl. Phys., 7, № 8, 881 (1968).

**THE THEORY OF OSCILLATIONS OF ULTRASOUND ATTENUATION IN
A SEMICONDUCTOR IN A HIGH-FREQUENCY ELECTRIC FIELD***E. M. Epshtein*

The coefficient of absorption of ultrasound by conduction electrons in a semiconductor in the presence of a strong high-frequency electric field and a constant magnetic field perpendicular to it is calculated. As in the absence of the magnetic field, the dependence of the absorption coefficient, when the amplitude of the electric field is changed, is of the character of giant oscillations. The period of oscillations is considerably decreased when the frequency of the electric field coincides with the electron cyclotron frequency. Due to this, in order to observe oscillations in the magnetic field, it is possible to use much weaker electric fields than in the isotropic case.

УДК 621.385.64

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ ФЛУКТУАЦИЙ В МАГНЕТРОННОМ ДИОДЕ

M. I. Кузнецов

Оценивается роль дальних электрон-электронных соударений в механизме флюктуаций в магнетронном диоде. Показано, что они вызывают коррелированные рассеяния траекторий больших групп электронов, которые, в конечном счете, приводят к флюктуациям тока с интенсивностью, превышающей дробовую на 4—6 порядков.

Известно, что в магнетронном диоде в режиме отсечки с током, ограниченным пространственным зарядом, наблюдаются чрезвычайно интенсивные флюктуации. В настоящей работе рассматривается случайный процесс, который, по-видимому, является их основным источником. Он связан с некоторыми особенностями регулярной части электронного облака* магнетронного диода, и поэтому вначале следует напомнить эти особенности.

Измерения характеристик электронного облака магнетронного диода электронно-оптическими методами и посредством зондов показали, что регулярная часть электронного облака магнетронного диода состоит из двух слоев примерно одинаковой толщины. Во внутреннем слое, т. е. в слое, расположенном ближе к катоду, состояние пространственного заряда близко к такому теоретическому двухпоточному состоянию, при котором вершины траекторий электронов находятся на внешней границе этого слоя.

Состояние пространственного заряда во внешнем слое близко к бриллюэновскому, а его внешняя граница почти совпадает с теоретической границей электронного облака, рассчитанной в предположении, что облако находится в бриллюэновском состоянии.

Слои разделяются областью, обладающей свойствами виртуального катода: в этой области радиальные скорости и ускорения равны нулю [1—4]. Подавляющее большинство электронов, находящихся в этой области, влетает туда из двухпоточного слоя и возвращается обратно к катоду. Только незначительная часть — электроны с достаточно большими начальными скоростями — проходит через область виртуального катода во внешний бриллюэновский слой.

Распределение потенциала в регулярной части электронного облака хорошо отображается при помощи модели, состоящей из двух слоев равной толщины — внутреннего двухпоточного и внешнего бриллюэновского слоя. Эта модель правильно отражает распределение заряда, если при расчете плотности заряда в двухпоточном слое учитывается распределение электронов по начальным скоростям. Кроме того, она хорошо передает электродинамические свойства регулярной части элек-

* Здесь и ниже регулярной называется та часть электронного облака магнетронного диода, в которую электроны, вылетающие из катода, могут попадать без помощи нерегулярных полей. Ее существование было экспериментально установлено в [1, 2].

тронного облака магнетронного диода [5]. Эта модель и будет использоваться ниже.

Исходным звеном ряда явлений, из которых складывается рассматриваемый процесс, служит коррелированное рассеяние азимутальных скоростей относительно больших групп электронов, пролетающих от катода до области виртуального катода и обратно к катоду, обусловленное полями случайных возмущений плотности заряда, которые вызываются флуктуациями тока эмиссии. Иными словами, оно представляет собой возмущения скоростей этих групп электронов, обусловленные дальними электрон-электронными взаимодействиями.

Следующее звено заключается в трансформации возмущений азимутальной скорости электронов в возмущения их радиальной скорости, происходящей на пути электронов от точки, где появились эти возмущения, до поверхности катода. Механизм этой трансформации обусловлен тем, что при движении электронов в регулярных полях магнетронного диода величина возмущения его азимутальной скорости ΔV_x остается постоянной (для упрощения расчетов мы рассматриваем квазиплоский магнетронный диод).

Не изменяется и возмущение кинетической энергии электрона, обусловленное возмущением его азимутальной скорости:

$$\Delta W m^{-1} = \omega_H y \Delta V_x + \frac{(\Delta V_x)^2}{2} \simeq \omega_H y \Delta V_x \quad (1)$$

(y — расстояние от поверхности катода до точки, где произошло возмущение азимутальной скорости электронов). Следовательно, кинетическая энергия электрона, возвратившегося из междуэлектродного пространства обратно к катоду, на его поверхности, т. е. в конце траектории, равна

$$W m^{-1} = \frac{(V_{x0} + \Delta V_x)^2}{2} + \frac{V_{yk}^2}{2} = \frac{1}{2} V_{x0}^2 + \omega_H y \Delta V_x + \frac{1}{2} V_{y0}^2, \quad (2)$$

где V_{x0} , V_{y0} — начальные скорости электрона, V_{yk} — радиальная скорость электрона в конце траектории.

Из (2) следует, что

$$V_{yk}^2 = 2(\omega_H y + V_{x0}) \Delta V_x + V_{y0}^2 \simeq 2\omega_H y \Delta V_x + V_{y0}^2; \quad (3)$$

$$\sqrt{\Delta V_{yk}^2} = \sqrt{V_{yk}^2 - V_{y0}^2} \simeq \sqrt{2\omega_H y \Delta V_x}. \quad (3a)$$

Очевидно, что $\sqrt{\Delta V_{yk}^2} \gg \Delta V_x$, если точка, в которой электрон получил возмущение азимутальной скорости, расположена не слишком близко к катоду.

Третье и последнее звено рассматриваемого процесса заключается в рассортировке электронов, подлетающих к катоду, между потоком электронов, возвращающихся на катод, и восходящим потоком. Те из электронов, для которых правая часть выражения (3) больше нуля, возвращаются на катод. Остальные переходят в восходящий поток электронов.

Из изложенного выше очевидно, что коррелированные возмущения азимутальных скоростей электронов, обусловленные дальними электрон-электронными взаимодействиями, в конечном счете вызывают флуктуации тока в двухпоточном слое регулярной части электронного облака магнетронного диода. Приступая к оценке интенсивности этих флуктуаций, полезно учесть, что согласно расчетам, выполненным в [6], интенсивность флуктуаций поля, обусловленных случайным характером рас-

пределения электронов в пространстве, почти пропорциональна плотности заряда. Следовательно, в области виртуального катода они значительно больше, чем в остальной части двухпоточного слоя, так как плотность заряда в этой области значительно выше. Кроме того, флуктуации поля в области виртуального катода более существенны для рассматриваемого процесса еще и потому, что согласно (3 а) обусловленные ими возмущения азимутальных скоростей электронов вызывают наиболее сильные возмущения радиальных скоростей электронов у поверхности катода, поскольку виртуальный катод находится дальше от катода, чем остальные точки двухпоточного слоя.

Принимая во внимание последние два замечания, при оценке интенсивности флуктуаций тока в магнетронном диоде, обусловленных рассматриваемым процессом, можно не учитывать электрон-электронные взаимодействия, происходящие вне области виртуального катода. Это существенно упрощает вычисления.

Как уже было упомянуто, при расчете дальних электрон-электронных взаимодействий в области виртуального катода мы будем предполагать, что флуктуации плотности заряда в этой области обусловлены флуктуациями тока эмиссии в восходящем потоке электронов. Учтем, что в режиме с током, ограниченным пространственным зарядом, флуктуации тока эмиссии в восходящем потоке сопровождаются вторичными возмущениями, вызванными реакцией прикатодного минимума потенциала на эти флуктуации.

Если случайные возмущения тока эмиссии приводят к тому, что через плоскость прикатодного минимума потенциала в момент времени $t = t_0$ пролетает дополнительный заряд q , то из-за реакции минимума потенциала на это возмущение за ним следует импульс тока, изображаемый функцией

$$i_q = \frac{1,34 q}{\tau_0} \exp \left[-\frac{0,615(t-t_0)}{\tau_0} \right] \sin \frac{0,923(t-t_0)}{\tau_0}, \quad (4)$$

где $\tau_0 = k T_k e_0 / u_m e j$, k — постоянная Больцмана, T_k — температура катода, j — плотность тока в восходящем потоке электронов, $u_m = (2kT)^{3/4} e_0^{1/2} 2,55 / (2\pi m)^{1/4} e^{1/2} j^{1/2}$ — расстояние от катода до минимума потенциала. (Предполагается, что плотность тока эмиссии много больше тока в восходящем потоке электронов [7, 8].)

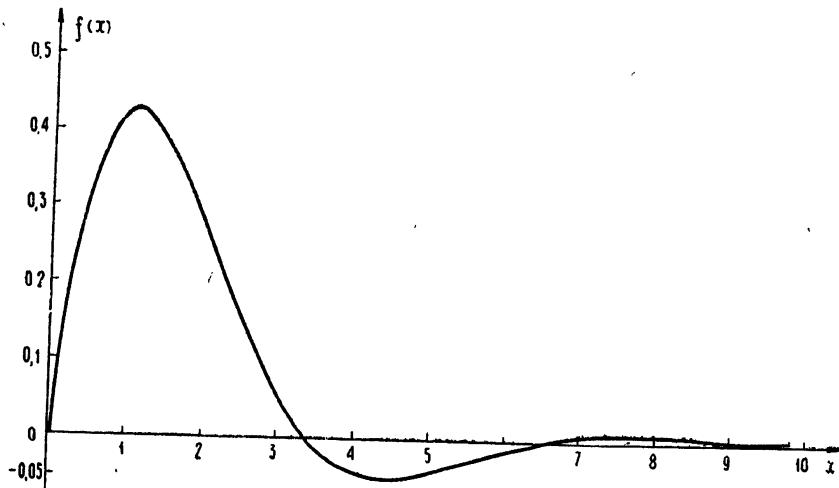


Рис. 1,

Полный заряд указанного импульса равен заряду q , но имеет противоположный знак. Его график изображен на рис. 1 ($f(x) = i_q \tau_0 / q$, $x = (t - t_0) / \tau_0$). Для упрощения расчета мы будем аппроксимировать его узким импульсом с зарядом $-q$, возникающим в момент $t = t_0 + 1,5 \tau_0$. Иными словами, мы будем считать, что в окрестности прикатодного минимума потенциала возмущения заряда в восходящем потоке состоят из случайно возникающих пар импульсов противоположного знака. В каждой паре импульсы следуют друг за друга через интервал времени $\Delta t = 1,5 \tau_0$. Заряд каждого импульса равен e . Среднее число пар импульсов, возникающих в единицу времени на единице поверхности прикатодного минимума потенциала, равно j/e .

На пути от катода до виртуального катода из-за явлений, связанных с волнами пространственного заряда, возмущения заряда в восходящем потоке претерпевают некоторые изменения. Чтобы оценить величину последних, рассчитаем, как изменяют упомянутые явления поле одного элементарного возмущения — тонкого двойного слоя в восходящем электронном потоке, параллельного поверхности катода, — при его движении от прикатодного минимума потенциала к катоду. Рассчитываемые изменения обусловлены тем, что поле двойного слоя возмущает движение находящихся внутри него электронов, а эти возмущения, в свою очередь, приводят к изменениям исходного поля.

Пусть в момент $t = t_1$, когда сформировался двойной слой, его поле было равно некоторой величине E_0 . Из-за возмущения движения электронов, расположенных внутри слоя, формируется дополнительное возмущение со знаком, противоположным знаку исходного поля E_0 :

$$\Delta E = -\frac{\rho_{\text{восх}}(y)}{\epsilon_0} y_b(t),$$

где $\rho_{\text{восх}}$ — плотность заряда в восходящем потоке, $y_b(t)$ — функция, изображающая возмущение движения упомянутых электронов. Эта функция должна удовлетворять уравнению

$$\ddot{y}_b(t) + \omega_H^2 y_b = -\frac{e}{m} (E_0 + \Delta E)$$

или

$$\ddot{y}_b(t) + \omega_H^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2(y)}{\omega_H^2} \right) y_b = -\frac{e}{m} E_0, \quad (5)$$

где

$$\omega_p^2(y) = -\frac{(e/m) \rho_{\text{восх}}(y)}{\epsilon_0}.$$

В нашей модели $\omega_p^2 = 0,5 \omega_H^2 / [1 - \cos(\omega_H t)]$, где t — время пролета электрона от катода до точки наблюдения. В практически интересных случаях значения t , соответствующие рассматриваемой области, заключены в следующих пределах:

$$\frac{\pi}{6\omega_H} \div \frac{\pi}{10\omega_H} < t < \frac{3\pi}{2\omega_H} \div \frac{7\pi}{4\omega_H}. \quad (6)$$

Принимая во внимание (6), можно привести (5) к виду

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(1 - \frac{0,5}{1 - \cos z} \right) = 1,$$

где $W = y_b \omega_H / (e/m) E_0$. Легко убедиться, что $E_0 + \Delta E = E_0 [1 - 0,5 W / (1 - \cos z)]$. Графики функции $(E_0 + \Delta E)/E_0 = 1 - 0,5 W / (1 - \cos z)$, полу-

ченные на ЭВМ, изображены на рис. 2. Как видно из этих графиков, за время движения рассматриваемого двойного слоя из прикатодной области до области виртуального катода его поле, действительно, несколько изменяется. Но эти изменения относительно невелики. К моменту влета двойного слоя в область виртуального катода они составляют не более 30% исходного поля. Следовательно, при расчете флюктуаций поля в области виртуального катода с точностью до 30% можно не принимать во внимание трансформацию возмущений плотности заряда в восходящем потоке, обусловленную его колебательными свойствами.

Возмущения плотности заряда должны изменяться вследствие волновых явлений и в области виртуального катода. Принимая во внимание, что область виртуального катода является нижней границей верхнего бриллюэновского слоя, можно рассчитать эти изменения с помощью соотношений, полученных в [9, 10] при изучении волноводных свойств «подвешенного» бриллюэновского слоя. При этом следует предполагать, что $\omega \gg \omega_H$, так как подавляющая часть спектра флюктуаций, обусловленных дробовым эффектом в восходящем потоке электронов, расположена значительно выше циклотронной частоты. В [9] было показано, что возмущения с такими частотами распространяются в виде двух наборов волн. Один из них представляет волны, бегущие вдоль верхней границы электронного облака со скоростью, близкой к скорости электронов, находящихся на этой границе:

$$\beta_1 y_{v\Gamma} = \frac{\omega}{\omega_H} + 0,54,$$

где $y_{v\Gamma}$ — расстояние верхней границы от катода. Второй состоит из волн, бегущих вдоль нижней границы электронного облака и имеющих скорости, близкие к скорости электронов, находящихся на нижней границе:

$$\beta_2 y_{n\Gamma} = \frac{\omega}{\omega_H} - 0,54, \quad (6a)$$

где $y_{n\Gamma}$ — расстояние нижней границы от катода*.

Волны на нижней границе электронного облака практически не связаны с волнами на верхней границе из-за большой разницы в их фазовых скоростях. Поэтому исходные возмущения, скорости которых в области виртуального катода близки к скоростям нижнего набора волн, возбуждают только волны, распространяющиеся вдоль нижней

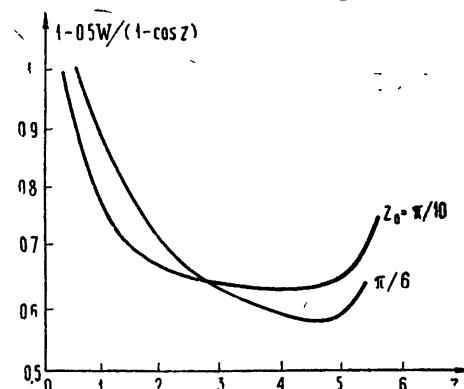


Рис. 2.

* Точнее, $\beta_{1,2} y_{v,n\Gamma} = \omega/\omega_H \pm 0,54 \pm 0,065j$. Однако мы не будем учитывать усиления и затухания волн, обусловленных наличием последнего члена, потому что за время пребывания электронов, составляющих исследуемое возмущение плотности заряда в рассматриваемой области, величина последнего из-за наличия этого члена практически не изменяется.

границы и, следовательно, могут рассматриваться как суперпозиция только этих волн.

Пусть спектр исследуемого возмущения плотности заряда в точке его влета в область виртуального катода представляется функцией $\rho(\omega)$. Из (6 а) следует, что в точке, находящейся на расстоянии x от исходной, спектр этого возмущения изображается функцией $\rho(\omega) \exp(j0,54x/y_{нг})$ (без учета запаздывания), т. е. импульс плотности заряда в этой точке представляет собой исходный импульс, умноженный на $\cos(0,54x/y_{нг})$. Максимальное значение величины x , очевидно, близко к длине участка траектории электронов, расположенных в области виртуального катода. Эта длина для практически интересных случаев меньше, чем $1,5y_{нг}^*$, т. е. $\cos(0,54x/y_{нг}) \geq \cos 0,81 = 0,7$. Следовательно, величина возмущений плотности заряда электронов, поступающих из восходящего потока в области виртуального катода, за время пребывания этих возмущений в области виртуального катода уменьшается не более, чем на 30%, т. е. без существенной ошибки ее можно считать постоянной. Иными словами, трансформация возмущений пространственного заряда волнами пространственного заряда может не учитываться и в области виртуального катода**.

На пути от прикатодного минимума потенциала до виртуального катода возмущения плотности заряда несколько расплюются из-за разброса начальных скоростей электронов. Величина расплывания этих сгустков вдоль магнитного поля равна

$$\Delta z = V_T \frac{2\pi}{\omega_H} = 2\pi \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{вк}} \right)^{1/2} y_v,$$

где V_T — средняя начальная скорость электронов, $\varphi_T = \sqrt{kT_k/e}$, $\varphi_{вк}$ — потенциал области виртуального катода. Расплывание их в азимутальном направлении из-за наличия магнитного поля значительно меньше

$$\Delta x \simeq \frac{V_T}{\omega_H} = \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{вк}} \right)^{1/2} y_v.$$

Принимая во внимание, что $\tau_0 = kT_k \epsilon_0 / y_m e j$, где

$$y_m = \frac{(2kT)^{3/4} \epsilon_0^{1/2} 2,55}{(2\pi m)^{1/4} e^{1/2} j^{1/2}}, \quad j = \frac{y_v \omega_H^3 \epsilon_0}{4\pi(e/m)},$$

можно вычислить расстояние x_1 , на которое в области виртуального катода удалены друг от друга сгустки и разрежения плотности заряда, соответствующие паре импульсов возмущений тока в плоскости прикатодного минимума потенциала: $x_1 = \tau_0 \omega_H y_v$, где $y_v = y_{нг}$ — расстояние виртуального катода от катода, или

$$x_1 = \frac{2\sqrt{\pi}}{2,55} \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{вк}} \right)^{1/4} y_v. \quad (7)$$

* Действительно, $x_v = \omega_H \tau_v y_{нг}$, где τ_v — время пребывания электрона в области виртуального катода. Согласно формуле (11), которая приводится ниже, $1,5y_{нг} > x_v > 1,1y_{нг}$, если $100 \leq \varphi_{вк} < 1000$ в.

** Однако следует иметь в виду, что рассматриваемый нами процесс модуляции скорости электронов флуктуационными полями пространственного заряда по существу представляет собой переход случайной модуляции плотности заряда в электронном потоке в соответствующую модуляцию скорости, обусловленную волнами пространственного заряда. Применяемая нами кинематическая трактовка этого процесса допустима лишь потому, что эффективная длина рассматриваемой области мала по сравнению с длиной волны пространственного заряда.

Нетрудно убедиться, что для практически интересных случаев, когда $100 \text{ в} < \varphi_{вк} < 1000 \text{ в}$, $x_1 \gg \Delta x_1$, $1,25 < x_1/\Delta z < 2,2$, т. е. $x_1 \approx \Delta z$. С учетом разброса начальных скоростей электронов в указанных режимах ширина области виртуального катода может быть приближенно вычислена по формуле*

$$2l = V\pi \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{вк}} \right)^{3/8} y_b. \quad (8)$$

Следовательно, $0,13 < 2l/x < 0,4$ и расплыванием импульсов возмущений плотности заряда в азимутальном направлении можно пренебречь. Но в осевом направлении они расплюются на длину, примерно равную расстоянию, на которое разнесены в области виртуального катода возмущения плотности заряда, непосредственно обусловленные отклонениями тока эмиссии от среднего значения, и соответствующие им импульсы, обусловленные реакцией прикатодной области на эти отклонения. Принимая во внимание указанное обстоятельство, можно приближенно считать, что поле каждого элементарного возмущения плотности заряда в области виртуального катода представляет собой поле плоского конденсатора, пластины которого параллельны плоскости xz и имеют размеры $x_1 \times 2l$. Расстояние между пластинами равно x_1 . Легко убедиться, что при указанном допущении функция корреляции напряженности азимутального поля в точках области виртуального катода с координатами $x, y, z, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ равна

$$\overline{E(x, y, z) E(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)} = \\ = \frac{e\rho}{x_1^2 \epsilon_0^2 l} \begin{cases} (x_1 - |\Delta x|)(x_1 - |\Delta z|) & (|\Delta x| < x_1) \\ 0 & (|\Delta z| > x_1) \end{cases}. \quad (9)$$

Таким образом, средняя квадратичная величина азимутального поля в области виртуального катода равна $\overline{E_y^2} = e\rho/\epsilon_0^2 l$, а радиус корреляции примерно равен половине x_1 . Очевидно, что средняя квадратичная величина возмущения азимутальной скорости электрона в области виртуального катода соответственно равна

$$\overline{\Delta V_x^2} = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{e\rho}{\epsilon_0^2 l} \tau_b^2, \quad (10)$$

где τ_b — время пребывания электрона в области виртуального катода. Величина τ_b может быть оценена следующим образом. Естественно считать границей виртуального катода ту плоскость, в которой радиальная скорость электрона, вычисленная без учета начальной скорости, составляет половину средней радиальной скорости электрона в области виртуального катода, вычисленной с учетом распределения начальных скоростей электронов

$$\frac{y_b \omega_H}{2\pi} \left[1 - \cos \left(\omega_H \frac{\tau_b}{2} \right) \right] = \frac{V \omega_H y_b V_T}{y},$$

откуда

$$\tau_b = 2 \frac{V\pi}{\omega_H} \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{вк}} \right)^{1/8}. \quad (11)$$

* Формула (8) легко получается из выражения для времени пребывания электрона в области виртуального катода, которое выводится несколько ниже, и формулы средней радиальной скорости электрона в области виртуального катода $\overline{V_{y_{вк}}} = \sqrt{\omega_H y_b V_T}/2$.

В указанном выше интервале значений потенциала виртуального катода $1,5/\omega_H > \tau_v > 1,15/\omega_H$. Из (3), (10) и (11) следует, что

$$\Delta V_x^2 = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{e\rho}{\epsilon_0^2 l} \simeq 8 \frac{e}{m} \frac{e\sqrt{\pi}}{\epsilon_0 y_v} \left(\frac{\varphi_{v,k}}{\varphi_T} \right)^{1/8}, \quad (12)$$

так как $\rho = \omega_H^2 \epsilon_0 / em^{-1}$ или

$$\Delta V_x^2 = 4 \frac{e\sqrt{\pi}}{\epsilon_0 y_v} \left(\frac{\varphi_{v,k}}{\varphi_T} \right)^{1/8} \text{эв.}$$

При $100 \text{ в} < \varphi_{v,k} < 1000 \text{ в}$ и $y_v = 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4} \text{ эв} < \Delta V_y^2 < 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ эв.}$

Очевидно, что радиус корреляции величины ΔV_y в плоскости виртуального катода равен радиусу корреляции азимутального поля, т. е. примерно равен половине величины x_1 . Следовательно, дисперсия величины возмущения азимутальной скорости электронов, усреднённой по группе электронов, пролетающих через область виртуального катода на расстояниях друг от друга, меньших чем x_1 , примерно равна ΔV_x^2 (см., например, [11]). Соответственно, согласно (3), дисперсия величины возмущения квадрата радиальной скорости, усредненной по таким группам электронов, в момент их возвращения на катод равна

$$\overline{[(\Delta V_{y,k})^2]^2} = 16 \varphi_{v,k} \frac{eV\pi}{\epsilon_0 y_v} \left(\frac{\varphi_{v,k}}{\varphi_T} \right)^{1/8} (\text{эв})^2.$$

(Знак \sim означает усреднение по группе электронов, знак $-$ — по ансамблю групп). Легко убедиться в том, что для практически интересных случаев она существенно больше, чем квадрат среднего значения квадрата начальной тепловой радиальной скорости электрона. Таким образом, можно считать, что все электроны каждой из рассматриваемых групп либо возвращаются на катод, либо, не долетая до виртуального катода, начинают двигаться по направлению к аноду. Следовательно, примерно половина восходящего потока электронов состоит из сгустков зарядов величиной $\rho x_1^2 2l$, беспорядочно следующих друг за другом. Очевидно, что спектральная плотность этой части потока на частотах, меньших $\omega_H/2\pi$, равна

$$\bar{i_f^2} = j \circ \rho x_1^2 2l = 2jeM \circ,$$

где \circ — площадь катода, $M = 4\pi^{3/2} \varphi_{v,k}^{1/8} \varphi_T^{7/8} y_v \epsilon_0 / e (2,55)^2$ (см., например, [11]). При $T_k = 1000^\circ\text{K}$ $M = 2,2 \cdot 10^7 y_v \varphi_{v,k}^{1/8}$. Если $100 \text{ в} < \varphi_{v,k} < 1000 \text{ в}$, то $4 \cdot 10^7 y_v < M < 5,3 \cdot 10^7 y_v$. Обычно $y_v = 10^{-3} - 10^{-4}$, т. е. $M = 5 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^5$.

Таким образом, рассмотренный выше механизм флюктуаций в магнетронном диоде создает флюктуационный ток в двухпоточном слое, спектральная плотность которого по крайней мере на пять порядков выше, чем спектральная плотность «чистого» дробового эффекта. Это совпадает с оценками спектральной плотности интенсивности флюктуаций тока в магнетроне, выполненнымными в [6] на основании экспериментальных данных. Следовательно, можно предполагать, что этот механизм является основным механизмом флюктуаций в магнетронном диоде.

В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность А. В. Гапонову и В. И. Беспалову за обсуждение работы и важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1104 (1961).
2. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 167 (1966).
3. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 998 (1966).
4. Л. М. Грошков, С. В. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 154 (1967).
5. М. И. Кузнецов, Э. Г. Васильев, С. В. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1770 (1967).
6. Магнетроны сантиметрового диапазона, 1, изд. Сов. радио, 1950.
7. А. Е. Siegm an, S. Bloom, Trans. IRE (RGED), 4, 295 (1957).
8. S. Bloom, Noise convection current at the potential minimum, RCA, Lab. Rept., 1965.
9. О. Банеман, сб. Электронные СВЧ приборы со скрещенными полями, 1, 1961, стр. 310.
10. G. G. McFarlane, H. G. Hay, Phys. Soc., 63B, 409 (1950).
11. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.

A MECHANISM OF FLUCTUATIONS IN A MAGNETRON DIODE

M. I. Kuznetsov

The role of far electron-electron collisions in the mechanism of fluctuations in a magnetron diode is evaluated. It is shown that they produce the correlated scattering of the trajectories of the large groups of electrons which lead, in the long run, to the current fluctuations with the intensity exceeding the shot one by 4—6 orders.

УДК 621.385.6

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА ПЛОСКОГО МАГНЕТРОНА. I

B. I. Вигдорчик, B. M. Конторович

Исследованы свойства плоского магнетронного диода с плотностью заряда на катоде, меньшей бриллюэновской, на основе кинетической бесстолкновительной модели движения электронного газа в скрещенных полях. Использование канонических персменных — энергии поперечного движения и y -компоненты обобщенного импульса — и малого параметра — отношения теплового циклотронного радиуса к зазору анод—катод — позволило изучить распределение плотности и решить уравнение Пуассона. Показано, что в случае ускоряющего электрического поля на катоде состояние электронного облака близко к двухпоточному. Рассмотрено влияние внешних полей на свойства пространственного заряда.

При теоретическом исследовании статического режима магнетрона на основе механических моделей движения электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях (без учета теплового разброса начальных скоростей) [1—5] возникают трудности принципиального характера, не разрешимые в рамках этих моделей. Например, на основе однопоточной (бриллюэновской) теории невозможно описать процесс эмиссии электронов с катода, а в двухпоточной (бидромической) модели появляются бесконечные значения плотности электронов на истинном и виртуальном катодах. Более детальное описание, свободное от этих трудностей, можно получить, используя кинетическую бесстолкновительную модель движения электронного газа в скрещенных полях.

Кинетическая теория плоского диода без магнитного поля построена в работах [6—8]. Наличие магнитного поля усложняет задачу, делая ее существенно неодномерной. Главным образом по этой причине кинетическая модель статического режима магнетрона еще не может считаться окончательно разработанной. В ряде работ (см. [9, 10], где приведена библиография) обсуждалось влияние теплового разброса скоростей электронов эмиссии только на анодный ток, который при определенных условиях не зависит от распределения потенциала внутри электронного облака. В работе Твисса [11] изучалось влияние теплового разброса отдельно нормальной и тангенциальной компонент скорости на распределение потенциала в плоском магнетронном диоде, а в общем случае Лазаревым и Филимоновым [12] была решена несамосогласованная задача*.

Наиболее полное изучение кинетической модели плоского магне-

* В кратком сообщении тех же авторов [13] приведены выражения для плотности заряда и тока, а также для среднего квадрата скорости электронов в цилиндрическом магнетронном диоде, справедливые при более общих предположениях о поведении потенциала, чем в [12]. Ряд формул п 3 настоящей работы может быть в принципе получен из этих выражений предельным переходом к плоскому магнетрону. Однако в [13] не исследуется уравнение Пуассона и, следовательно, не решается самосогласованная задача. Не обсуждаются также характерные особенности и границы существования изучаемого режима, вообще говоря, не единственного даже при наложенных ограничениях на потенциал. В [12, 13] не рассматривается кинетическое уравнение, анализа которого представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

трана проведено Линдссеем в работах [14–18]. При решении этой задачи можно выделить два этапа. На первом этапе находится решение кинетического уравнения Больцмана для функции распределения электронов в магнетроне и плотность пространственного заряда. В работах [14–16] плотность представлена в виде двукратных интегралов от функции распределения по скоростям v_x, v_y со сложными пределами, зависящими от потенциала.

На втором этапе решения рассматривается уравнение Пуассона. Авторы работ [17, 18] ограничились численным интегрированием этого уравнения для некоторых значений внешних параметров магнетрона (плотности тока эмиссии, температуры катода, анодного напряжения, магнитного поля и зазора анод — катод).

В настоящей работе использованы два физических обстоятельства, позволившие провести исследование уравнения Пуассона в аналитической форме. На первом этапе мы воспользовались тем, что решение кинетического уравнения имеет наиболее простой вид, если в качестве независимых переменных взять интегралы движения — энергию поперечного движения E и y -компоненту обобщенного импульса P_y (электрическое и магнитное поля направлены соответственно вдоль осей x и z)*. В дальнейшем исследуется режим с плотностью заряда на катоде, меньшей бриллюэновской (1.12), (1.13). При этом выражение для плотности сводится к однократным интегралам по E , а уравнение Пуассона оказывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

При исследовании уравнения Пуассона использовано то обстоятельство, что в магнетроне средняя тепловая скорость электронов эмиссии v_T обычно мала по сравнению со скоростями, приобретаемыми во внешних полях, а магнитное поле достаточно велико, так что соответствующий циклотронный радиус v_T/ω_c много меньше зазора анод — катод (см. (2.9), (1.11)). Использование этого физически малого параметра (см. также [12, 13]), позволяет провести существенное упрощение уравнения Пуассона, в ряде предельных случаев получить его в аналитической форме, не содержащей интегралов, и найти соответствующее распределение потенциала.

В настоящей статье рассмотрен случай ускоряющего поля на катоде (3.1). Исследовано изменение свойств пространственного заряда в зависимости от внешних параметров, и определены условия, при которых электронное облако может находиться в состоянии, близком к двухпоточному.

1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Бесстолкновительное кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения $f(v_x, v_y, x)$ электронного газа в скрещенных полях в статическом случае имеет вид

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{|e|}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \omega_c v_y \right) \frac{\partial f}{\partial v_x} + \omega_c v_x \frac{\partial f}{\partial v_y} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v}(v_x, v_y)$ — скорость электрона, а $\varphi(x)$ — потенциал в точке x между катодом $x = 0$, $\varphi(0) = 0$ и анодом $x = d$, $\varphi(d) = \varphi_a$ плоского магнетронного диода, φ_a — анодное напряжение, $\omega_c = |e| H / mc$ — циклотронная частота в магнитном поле H , направленном вдоль оси z . Здесь использована однородность плоского диода вдоль осей y и z .

* Канонические переменные E и P_y использованы при анализе кинетического уравнения цилиндрического магнетрона в работе [19], где рассматривается кривая греческих,

Пренебрегая термоэмиссией с анода, а также вторичной эмиссией и отражениями, запишем граничные условия на $f(v_x, v_y, x)$ следующим образом:

$$f(v_x, v_y, 0)|_{v_x > 0} = f_e(v_x, v_y), \quad f(v_x, v_y, d)|_{v_x < 0} = 0, \quad (1.2)$$

где

$$f_e(v_x, v_y) = \frac{2|j_e|}{|e|\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2)\right]$$

— функция распределения электронов, эмиттируемых катодом, j_e — плотность эмиссионного тока.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{d}, \quad u = \frac{v}{\omega_c d}, \quad \eta(\xi) = \frac{2|e|\varphi(x)}{m\omega_c^2 d^2}, \quad (1.3)$$

$$\epsilon = u_x^2 + u_y^2 - \eta(\xi), \quad p = u_y - \xi, \quad (1.4)$$

где $\epsilon = 2E/m\omega_c^2 d^2$ — безразмерная энергия поперечного движения, $p = P_y/m\omega_c d$ — безразмерная y -компоненты обобщенного импульса.

В переменных (ϵ, p, ξ) кинетическое уравнение (1.1) для функции распределения $f(\epsilon, p, \xi)$ существенно упрощается. Действительно, $\dot{u} \frac{\partial f}{\partial u} = \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + p \frac{\partial f}{\partial p}$, где точка означает полную производную по безразмерному времени $\omega_c t$. Поскольку ϵ и p являются интегралами движения в рассматриваемой системе, то $\dot{\epsilon} = 0$, $\dot{p} = 0$, и уравнение (1.1) сводится к

$$u_x \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{\epsilon, p} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$u_x = \pm \sqrt{\epsilon - \epsilon_\xi(p)} \quad \epsilon_\xi(p) = (p + \xi)^2 - \eta(\xi). \quad (1.6)$$

Как видно из (1.5), двум знакам скорости u_x соответствуют две ветви решения кинетического уравнения

$$f(\epsilon, p, \xi) = \begin{cases} f_+(\epsilon, p) & (u_x > 0) \\ f_-(\epsilon, p) & (u_x < 0) \end{cases}, \quad (1.7)$$

каждая из которых непрерывна по ϵ и p в области $\epsilon > \epsilon_\xi(p)$ и является константой по ξ . Зависимость f от ξ появляется на поверхности поворота $\epsilon = \epsilon_\xi(p)$, где функция распределения имеет разрыв (см. рис. 2) и удовлетворяет условию сопряжения

$$f_+(\epsilon_\xi(p), p) = f_-(\epsilon_\xi(p), p). \quad (1.8)$$

Очевидно, в области $\epsilon < \epsilon_\xi(p)$ (см. (1.6)) электроны находиться не могут и

$$f_\pm(\epsilon, p) = 0 \quad (\epsilon < \epsilon_\xi(p)). \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.5) должно удовлетворять граничным условиям (1.2), которые в новых переменных имеют вид

$$f_+|_{\xi=0} = f_e(\epsilon), \quad f_-|_{\xi=1} = 0, \quad (1.10)$$

где $f_e = A \exp(-x^2/a^2)$, $A = 2x^3 |j_e|/\omega_c d |e| \sqrt{\pi}$. Параметр

$$a^2 = m\omega_c^2 d^2 / 2kT \quad (11.1)$$

представляет собой обратную безразмерную температуру катода T (квадрат отношения зазора анод — катод d к тепловому циклотронному радиусу $\sqrt{2kT/m\omega_c^2}$).

В общем случае функция $\epsilon_\xi(p)$ (см. (1.6)) может иметь максимумы, наличие которых усложняет вид $f(\epsilon, p, \xi)$. Рассмотрим наиболее простой режим с достаточно малым током эмиссии, когда пространственный заряд не создает максимума $\epsilon_\xi(p)$ вблизи катода. При этом единственным потенциальным барьером для электронов, вылетающих с катода, является барьер, обусловленный действием магнитного поля. Положение и высота барьера зависят от p , а при $p < p_{0\xi}(1)$ (см. рис. 1)

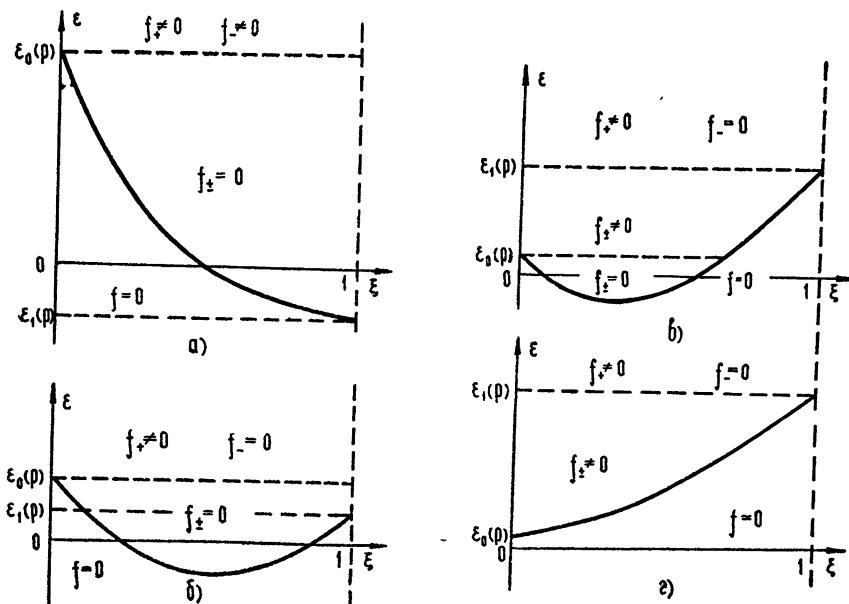


Рис. 1 Область определения функции $f(\epsilon, p, \xi)$ на плоскости $(\epsilon, \xi, p = \text{const})$ и линии разрыва (качественно) $\epsilon = \epsilon_\xi(p)$: а) $-\infty < p < p_m(1)$; б) $p_m(1) < p < p_{0\xi}(1)$; в) $p_{0\xi}(1) < p < p_m(0)$; г) $p_m(0) < p < \infty$ ($p_{0\xi}(\xi) = (\eta - \xi^2)/2\xi$, $p_m(\xi) = (1/2)\eta' - \xi$).

барьер отсутствует. Эти предположения эквивалентны выполнению неравенства $\frac{\partial \epsilon_\xi(p)}{\partial \xi} \geq 0$, если $\epsilon_\xi(p) \geq \epsilon_0(p)$, из которого следует, что $(\epsilon_0(p) \equiv \epsilon_\xi(p)|_{\xi=0})$

$$\frac{1}{\xi^2} [\xi \eta'(\xi) - \eta(\xi) - \xi^2] \leq 0. \quad (1.12)$$

Это условие на потенциал было получено Линдсеем в [15] (режим с «ограничением тока магнитным полем»). При $\xi \rightarrow 0$ из (1.12) следует (штрих означает дифференцирование по ξ)

$$\eta''(0) \leq 2. \quad (1.13)$$

а в размерных величинах

$$(\omega_p(0)/\omega_c)^2 \leq 1, \quad (1.13a)$$

где $\omega_p(0) = 4\pi e^2 n(0)/m$ — плазменная частота, $n(0)$ — плотность элек-

тронов на катоде. На основании (1.13 а) режим, в котором выполняются неравенства (1.12) и (1.13), можно также назвать режимом с малым пространственным зарядом*.

На рис. 1 показаны линии разрыва $\varepsilon = \varepsilon_\xi(p)$ на плоскости $(\varepsilon, \xi; p = \text{const})$ при различных значениях p и указаны области, в которых $f \neq 0$ **. Те же области показаны на рис. 2 в плоскости $(\varepsilon, p; \xi = \text{const})$. Границные значения p на рис. 1 ($p_{0\xi} = (\eta - \xi^2)/2\xi$, $p_m = (1/2)\eta' - \xi$) определяются переменой знака разности $\varepsilon_\xi(p) - \varepsilon_0(p)$ и производной $\frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon_\xi(p)$.

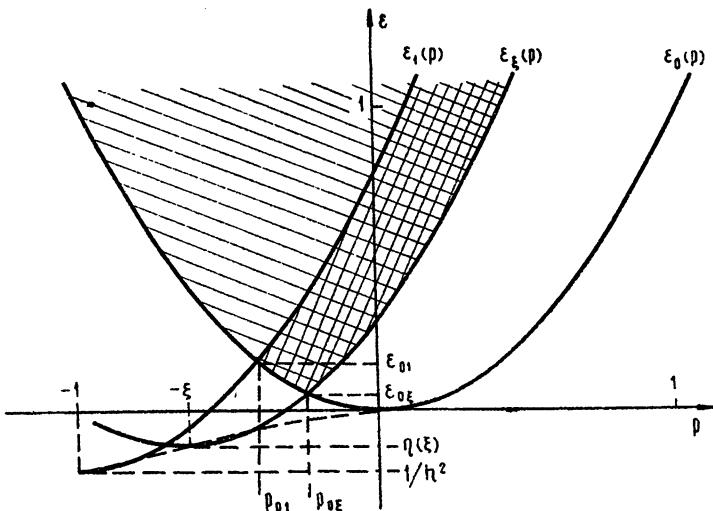


Рис. 2. Область определения $f(\varepsilon, p, \xi)$ на плоскости $(\varepsilon, p, \xi = \text{const})$ (заштрихована). Двойной штриховкой указана часть области, где $f_\pm \neq 0$. Вершина параболы $\varepsilon_\xi(p) = (p + \xi)^2 - \eta(\xi)$, находящаяся в точке $\varepsilon = -\eta(\xi)$, $p = -\xi$, движется по кривой $\varepsilon = -\eta(-p)$ (пунктир).

Используя условие сопряжения (1.8) и граничные условия (1.10), запишем решение кинетического уравнения магнетрона с малым пространственным зарядом (1.12) в виде (см. также (1.9))

$$f(\varepsilon, p, \xi) = \begin{cases} f_+ = f_e(\varepsilon) \theta(\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)) \theta(\varepsilon - \varepsilon_0(p)) & (u_x > 0) \\ f_- = f_e(\varepsilon) \theta(\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)) \theta(\varepsilon - \varepsilon_0(p)) \theta(\varepsilon_1(p) - \varepsilon) & (u_x < 0) \end{cases}, \quad (1.14)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & (z > 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

— разрывная θ -функция,

$$\varepsilon_0(p) \equiv \varepsilon_\xi(p)|_{\xi=0} = p^2, \quad \varepsilon_1(p) \equiv \varepsilon_\xi(p)|_{\xi=1} = (p + 1)^2 - \eta(1). \quad (1.15)$$

* Уравнение Пуассона в этом режиме оказывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В общем же случае оно является сложным дифференциально-функциональным уравнением.

** Качественные кривые на рис. 1 построены при условии $\eta''(\xi) < 0$, которое является более жестким, чем (1.12), но совпадает с ним на катоде (см. (1.13)).

2. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ ПЛОСКОГО МАГНЕТРОНА

Зная решение кинетического уравнения $f = f(\varepsilon, p, \xi)$, можно найти распределение пространственного заряда в плоском магнетроне $n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f du_x du_y$ и преобразовать уравнение Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi |e| n(x).$$

Границные условия на потенциал имеют в новых переменных (1.3) вид

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(1) = 1/h^2, \quad (2.1)$$

где параметр

$$h = H/H_c \quad (2.2)$$

представляет собой отношение магнитного поля H к критическому $H_c = \sqrt{2mc^2\varphi_a/|e|a^2}$.

Подставляя вместо f найденное выражение (1.14) и переходя в интегrale в правой части уравнения Пуассона от переменных (u_x, u_y) к (ε, p) по формулам (1.4) (якобиан перехода равен $(1/2)[\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)]^{-1/2}$), получим в явном виде*

$$\eta''(\xi) = \frac{Q\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{p_{0\xi}} \int_{\varepsilon_0(p)}^{\infty} + \int_{p_{0\xi}}^{\infty} \int_{\varepsilon_\xi(p)}^{\infty} + \int_{p_{01}}^{p_{0\xi}} \int_{\varepsilon_0(p)}^{\varepsilon_1(p)} + \int_{p_{0\xi}}^{\infty} \int_{\varepsilon_\xi(p)}^{\varepsilon_1(p)} \right] \frac{\exp(-\alpha^2\varepsilon) d\varepsilon dp}{\sqrt{\varepsilon + \eta - (p + \xi)^2}} \right\}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$Q = \frac{8\pi |e| |j_e|}{m \omega_c^3 d} \quad (2.4)$$

— безразмерный параметр плотности пространственного зоряда. Смысл обозначений

$$p_{0\xi}(\xi) = \frac{\eta(\xi) - \xi^2}{2\xi}, \quad p_{01} \equiv p_{0\xi}(1) = \frac{1/h^2 - 1}{2}, \quad \varepsilon_{0\xi} = p_{0\xi}^2, \quad \varepsilon_{01} = p_{01}^2 \quad (2.5)$$

ясен из рис. 2 и определения парабол $\varepsilon_0(p)$ и $\varepsilon_1(p)$ (1.15), где $\eta(1) = 1/h^2$ (см. (2.1)).

Для вычисления интегралов в правой части уравнения (2.3) изменим в них порядок интегрирования. При этом интегралы по p выражаются через элементарные функции, а последующее интегрирование по частям в интегралах по ε приводит к уравнению

$$\eta''(\xi) = 2Q\alpha\sqrt{\pi} \left[\exp(\alpha^2\eta)\theta(-p_{0\xi} - \xi) + \frac{1}{2\pi}(I_0 - K_0 - K_1) \right], \quad (2.6)$$

где

$$I_0 = I_0^- + I_0^+, \quad K_0 = K_0^- + K_0^+, \quad K_1 = - \int_{\varepsilon_{01}}^{\infty} \exp(-\alpha^2\varepsilon) \varphi_1(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$I_0^- = 2 \left[\int_{\varepsilon_{0\xi}}^{\infty} + \theta(p_{0\xi}) \int_0^{\varepsilon_{0\xi}} \right] \exp(-\alpha^2\varepsilon) \varphi_0^-(\varepsilon) d\varepsilon, \quad I_0^+ = -2\theta(p_{0\xi}) \int_0^{\varepsilon_{0\xi}} \exp(-\alpha^2\varepsilon) \varphi_0^+(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.7)$$

* Тот же результат можно было бы получить с помощью замены (1.4) в уравнении, найденном в [15].

$$K_0^- = \left[\int_{\varepsilon_0}^{\infty} + \theta(p_{01}) \int_0^{\varepsilon_0} \right] \exp(-\alpha^2 \varepsilon) \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon, \quad K_0^+ = -\theta(p_{01}) \int_0^{\varepsilon_0} \exp(-\alpha^2 \varepsilon) \varphi_0^+(\varepsilon) d\varepsilon;$$

$$\varphi_0^\pm(\varepsilon) = \frac{\xi \sqrt{\varepsilon - \eta}}{2 \sqrt{2\xi\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \sqrt{p_{0\xi} \mp \sqrt{\varepsilon + 1/h^2}}}, \quad (2.8)$$

$$\varphi_1(\varepsilon) = -\frac{\eta - 1/h^2 + (1 - \xi) \sqrt{\varepsilon + 1/h^2}}{2 \sqrt{\varepsilon + 1/h^2} (\varepsilon + \eta) [\eta - 1/h^2 - (1 - \xi)^2 + 2(1 - \xi) \sqrt{\varepsilon + 1/h^2}]^{1/2}},$$

причем

$$\eta''(0) = \eta''(\xi) |_{\xi \rightarrow +0}.$$

В физически интересном случае достаточно малой температуры катода, такой, что параметр*

$$\frac{1}{\alpha^2} \ll 1 \quad (2.9)$$

(см. (1.11)), для интегралов I_0^\pm , K_0^\pm и K_1 , могут быть найдены асимптотические выражения с помощью метода «седловой точки» (см., например, [20]). При этом главный вклад в интегралы дают окрестности нижних концов интервалов интегрирования и те особые точки, которые оказываются вблизи этих концов.

Как видно из (2.7) и (2.8), пределы интегрирования и положение особых точек зависят не только от внешнего параметра h , но и от значений ξ , $\eta(\xi)$ и $p_{0\xi}(\xi) = |\eta(\xi) - \xi^2|/2\xi$, т. е. от распределения потенциала. Поэтому в различных участках межэлектродного пространства необходимо пользоваться соответствующими предельными выражениями для правой части в (2.6). Как показывает анализ интегралов (2.7), существенное влияние на свойства пространственного заряда оказывает поведение потенциала в прикатодной области, так как при изменении знака электрического поля на катоде $\eta'(0)|_{\eta(\xi) \rightarrow 0} \approx \eta'(0)\xi$; $\eta_0(\xi)|_{\xi \rightarrow 0} \approx (1/2)\eta'(0) - (1/4)[2 - \eta''(0)/\xi]$ меняется не только положение, но и характер особенностей $\varphi_0^\pm(\varepsilon)$ и $\varphi_1(\varepsilon)$ в (2.8).

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА

В настоящей работе мы рассмотрим предельный случай относительно большого ускоряющего поля на катоде магнетрона**

$$(\alpha\eta'(0))^2 \gg 1, \quad \eta'(0) > 0, \quad (3.1)$$

который находится в закритическом режиме $H > H_c$ (см. (2.2)):

$$h^2 > 1, \quad \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{h^2} \right)^2 \gg 1. \quad (3.2)$$

Последнее ограничение не является принципиальным, однако физически указанный режим наиболее интересен. В этом случае эффективный потенциал [1]

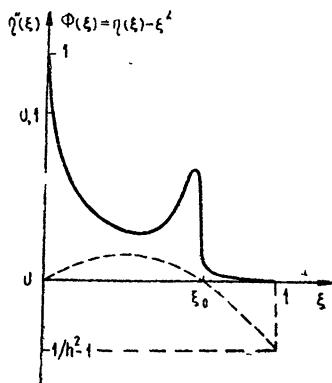
$$\Phi(\xi) = \eta(\xi) - \xi^2 \quad (3.3)$$

* При обычно используемых магнитных полях $H \sim (10^2 \div 10^3)$ э, размерах прибора $d \sim (10^{-1} \div 1)$ см и температуре катода $T \sim 1000^\circ\text{K}$ получим $\alpha^{-2} \sim (10^{-2} \div 10^{-6})$.

** Возможность существования различных типов распределения потенциала в плоском магнетронном диоде показана в качественном исследовании Янкиной [2].

имеет два корня $\xi = 0$ ($\eta(0) = 0$) и $\xi = \xi_0$, причем на аноде $\Phi(1) = -1/h^2 - 1 < 0$ (рис. 3 — пунктирная кривая). Указанное поведение $\Phi(\xi)$ в режиме малого пространственного заряда связано с тем, что основное условие применимости уравнения (2.6) (см. (1.12)) эквивалентно неравенству $\frac{d}{d\xi} p_{0\xi}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\Phi}{2\xi} \right) \leq 0^*$. Отметим также, что второй нуль $\Phi(\xi)$ ($\eta(\xi_0) = \xi_0^2 = 0$) совпадает по определению с границей электронного облака в механической модели [2-5].

Рис. 3. Распределение плотности пространственного заряда $\eta''(\xi)$ (сплошная кривая) и эффективного потенциала $\Phi(\xi) = \eta(\xi) - \xi^2$ (пунктир) в случае ускоряющего поля на катоде магнетрона с малым пространственным зарядом ($\Phi''(\xi) = \eta''(\xi) - 2 < 0$) в закритическом режиме $h > 1$.



Рассмотрим различные участки межэлектродного пространства магнетрона, начиная с прикатодной области:

$$\xi \ll 1, \quad \eta(\xi) \ll 1, \quad (\alpha p_{0\xi})^2 \gg 1. \quad (3.4a)$$

В этой области $\eta(\xi) \sim \eta'(0)\xi$, $p_{0\xi} \sim \eta'(0)/2 > 0$ (см. (3.1)), и интегралы в (2.7) имеют не более двух точек ветвления $\varepsilon = \varepsilon_{0\xi}$ и $\varepsilon = 0^{**}$. Использование для вычисления правой части уравнения (2.6) метода «седловой точки» [20] дает

$$\begin{aligned} \eta''(\xi) = 2Q\alpha \sqrt{\frac{\pi\eta}{\eta - \xi^2}} \exp(\alpha^2\eta) (1 - \operatorname{erf}\sqrt{\alpha^2\eta}) \left[1 + O\left(\frac{1}{\alpha^2}, \eta\right) \right] + \\ + 0[\exp(-\alpha^2\varepsilon_{0\xi}), \exp(-\alpha^2\varepsilon_{01})], \end{aligned} \quad (3.4b)$$

где $\operatorname{erf} z$ — интеграл вероятности [22].

Внутри облака $0 < \xi < \xi_0$ $\eta(\xi)$ и $p_{0\xi}(\xi)$ положительны и не малы:

$$\alpha^2\eta \gg 1, \quad (\alpha p_{0\xi})^2 \gg 1. \quad (3.5a)$$

Уравнение (2.6) после вычисления интегралов (2.7) указанным выше методом ($\varepsilon = 0$ — точка ветвления для $\varphi_0^\pm(\varepsilon)$) принимает вид

$$\eta''(\xi) = \frac{2Q}{\sqrt{\eta - \xi^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^2\eta}, \frac{1}{\alpha^2 p_{0\xi}^2}\right) \right] + 0[\exp(-\alpha^2\varepsilon_{0\xi}); \exp(-\alpha^2\varepsilon_{01})]. \quad (3.5b)$$

* Приведенное неравенство удовлетворяется, если прямая, проходящая через начало координат плоскости (Φ, ξ) , пересекает график функции $\Phi(\xi)$ не более одного раза (отсутствие «затенений»).

** При $\xi \rightarrow +0$ подынтегральные функции в (2.8) могут иметь полюс $\varepsilon = 0$, совпадающий с точкой ветвления.

Вблизи границы облака $\xi \approx \xi_0$, где

$$\alpha^2 \eta \gg 1, |p_{0\xi}| \ll 1, \quad (3.6a)$$

вклад в интеграл дают точки ветвления $\epsilon = 0$, $\epsilon = \epsilon_{0\xi}$. При этом правая часть уравнения Пуассона (2.6) выражается через $D_{-1/2}(z)$ — функцию параболического цилиндра [22]*:

$$\begin{aligned} \eta''(\xi) = Q \sqrt{\frac{\alpha \sqrt{2}}{\xi}} \exp\left[-\frac{(\alpha p_{0\xi})^2}{2}\right] D_{-1/2}(-\alpha p_{0\xi} \sqrt{2}) \left[1 + O\left(|p_{0\xi}|, \frac{1}{\alpha}\right)\right] + \\ + 0 [\exp(-\alpha^2 \epsilon_{01})]. \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Вычисление интегралов в области, лежащей вне облака $\xi_0 < \xi \leq 1$, где

$$\eta(\xi) \sim 1, \alpha^2 p_{0\xi}^2 \gg 1, p_{0\xi} < 0, \quad (3.7a)$$

и особенность в интегралах — точка ветвления $\epsilon = \epsilon_{0\xi}$, показывают, что плотность электронов в ней экспоненциально мала и убывает с ростом ξ :

$$\eta''(\xi) = Q \lambda(\xi, \eta) \exp(-\alpha^2 p_{0\xi}^2) + 0 \left[\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha^2 \epsilon_{01}), \frac{1}{\alpha^2} \exp(-\alpha^2 \epsilon_{0\xi}) \right], \quad (3.7b)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta) = \frac{2 \xi^2}{\eta + \xi^2} \sqrt{\frac{2}{|\eta - \xi^2|}} - \frac{[2\eta + \xi(1 - 1/h^2)] \sqrt{\xi(1 - 1/h^2) + \xi^2 - \eta}}{\xi(1 - 1/h^2) [4\eta + (1 - 1/h^2)^2]} \times \\ \times [1 - \operatorname{erf} \sqrt{\alpha (\epsilon_{01} - \epsilon_{0\xi})}] \end{aligned}$$

Как видно из уравнений (3.4 б) — (3.7 б), их решение дает возможность найти распределение потенциала во всем межэлектродном пространстве, поскольку области применимости этих уравнений (3.4 а) — (3.7 а) попарно перекрываются. Однако некоторые общие свойства потенциала и плотности можно указать, не решая самих уравнений, а исходя только из их вида.

В непосредственной близости от катода, где $\xi^2 \ll \eta \ll 1$ и $\xi \ll \eta'(0)$ (поскольку $\eta(\xi) \sim \eta'(0)\xi \ll 1$), из (3.4 б) получим уравнение

$$\eta''(\xi) = 2 Q \alpha \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 \eta) (1 - \operatorname{erf} \sqrt{\alpha^2 \eta}) \left[1 + O\left(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{\xi}{\eta'(0)}\right)\right], \quad (3.4b)$$

которое с точностью до обозначений и коэффициента 2 в правой части совпадает с уравнением Пуассона для плоского диода ($H = 0$) с монотонно возрастающим потенциалом [10, 14].

Внутри облака при $0 < \xi < \xi_0$ уравнение (3.5 б) совпадает с уравнением Пуассона, найденным в [2-5] при изучении бидромической модели плоского магнетрона. Феноменологическая постоянная j , используемая в этой модели, приобретает смысл удвоенного тока эмиссии. Появление в (3.5 б) и (3.4 в) множителя 2 связано с тем, что пространственный заряд внутри облака и вблизи катода в закритическом режиме (см. (3.2)) создается не только электронным потоком, вылетающим с катода, но и почти равным ему потоком электронов на катод.

* Формула (3.6б) соответствует формулам (14), (15) в [12], если учесть тождество $D_{-1/2}(z) = (\sqrt{\pi} |z|/2) [I_{-1/4}(z^2/4) - \operatorname{sgn} z I_{1/4}(z^2/4)]$, где $I_{\pm 1/4}(z^2/4)$ — функции Бесселя 2-го рода, связь которых с $D_{-1/2}(z)$ может быть установлена через вырожденную гипергеометрическую функцию [22].

Вблизи «механической» границы облака $\xi \approx \xi_0$ плотность электронов (3.6 б) имеет максимум, который сдвинут относительно ξ_0 в глубину облака на величину порядка $1/\alpha^*$:

$$\xi_m = \xi_0 \left[1 - \frac{z_m \sqrt{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha \Phi'(\xi_0)} + 0 \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) \right], \quad (3.8)$$

где $\Phi'(\xi_0) = \eta'(\xi_0) - 2\xi_0 < 0$, $z_m \approx -0.8$ — корень функции $D_{1/2}(z)$. Значение плотности в максимуме $(\eta''(\xi_m) \sim Q \sqrt{\alpha/\xi_0})$ оказывается в $\sqrt{\alpha \xi_0} \gg 1$ раз меньше, чем на катоде, где $\eta''(0) = 2Qa\sqrt{\pi}$ (см. (3.4 б)).

Распределение плотности $\eta''(\xi)$ в случае положительного поля на катоде (3.1) показано качественно сплошной линией на рис. 3. В прикатодной области $\left(\xi \ll \frac{1}{\alpha^2 \eta'(0)} \ll \eta'(0) \right) \eta''(\xi) \approx 2Qa\sqrt{\pi} (1 - 2\alpha\sqrt{\eta'(0)\xi/\pi} + \dots)$.

Внутри облака плотность (3.7б) имеет минимум, расположенный там же, где максимальен эффективный потенциал $\Phi(\xi) = \eta - \xi^2$ (см. пунктир). В этой области плотность в $\alpha\sqrt{\Phi}$ раз меньше, чем на катоде. Ширина максимума плотности вблизи $\xi \approx \xi_0$ порядка $1/\alpha$. Вне облака плотность экспоненциально мала (3.7 б).

Как видно из анализа уравнения Пуассона (2.6) и рис. 3, распределение плотности в плоском магнетронном диоде с малым пространственным зарядом (1.12) и ускоряющим полем на катоде (3.1) при $h > 1$ (3.2) напоминает распределение, рассматриваемое в механической двухпоточной модели [2-5]. Сходство это тем сильнее, чем ниже температура эмиттируемых электронов при неизменной плотности тока j_e . При этом возрастают максимумы плотности на катоде ($\sim T^{-1/2}$) и вблизи границы облака ($\sim T^{-1/4}$), ширина их уменьшается как $\sim T^{1/2}$, а внутри облака плотность не зависит от T .

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Выше мы получили выражения для плотности электронов, справедливые в возможно более широких областях по координате ξ . Для того, чтобы найти распределение потенциала в аналитическом виде, необходимо рассмотреть уравнения (3.4 б) — (3.7 б) в более узких областях, чем (3.4 а) — (3.7 а), где эти уравнения могут быть проинтегрированы. При этом ширина областей оказывается все же достаточной, чтобы они попарно перекрывались, а решения соответствующих уравнений допускали сшивку.

Прежде всего заметим, что в области $\xi^2 \ll \eta$ ($\xi \ll \eta'(0)$) уравнение (3.4б) можно заменить на (3.4в), которое совпадает с (3.5б) в области $\xi^2 \ll \eta$, $\eta \gg 1/\alpha^2$ ($1/\alpha^2 \eta'(0) \ll \xi \ll \eta'(0)$).

Вместо уравнения (3.6 б) можно рассматривать уравнение

$$\eta''(\xi) = Q \sqrt{\frac{\alpha \sqrt{\frac{2}{\alpha}}}{\xi_0}} \exp \left[-\frac{(\alpha \Phi)^2}{8 \xi_0^2} \right] D_{-1/2} \left(-\frac{\alpha \Phi}{\xi_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}}} \right) \left[1 + 0 \left(\frac{|\Phi|}{2\xi_0}, \frac{1}{\alpha} \right) \right] + 0 [\exp(-\alpha^2 \varepsilon_{01})], \quad (3.6в)$$

которое получено из (3.6б) простой заменой в правой части координаты ξ (под корнем и в знаменателе $P_{0\xi} = \Phi/2\xi$), медленно меняющейся по

* Для определения ξ_m достаточно приравнять $\eta'''(\xi) = 0$ и решить это уравнение, используя связь [22]

$$\frac{d}{dz} [\exp(-z^2/4) D_v(z)] = -\exp(-z^2/4) D_{v+1}(z).$$

сравнению с $\Phi(\xi)$ и $D_{-1/2}(-\alpha\Phi/\xi\sqrt{2})$, на $\xi_0(\Phi(\xi_0)=0)$. В области $\alpha\Phi/\xi_0 \gg 1$ это уравнение совпадает с (3.5 б) с точностью до малых порядка $(\alpha p_{0\xi})^{-2} \ll 1$.

Вне облака, вдали от его границы $\xi_0 < \xi \leq 1$ ($(\alpha p_{0\xi})^2 \gg 1$, $p_{0\xi} < 0$) плотность экспоненциально мала, и уравнение (3.7 б) можно заменить уравнением Лапласа

$$\eta''(\xi) = 0. \quad (3.7\text{в})$$

Уравнение (3.4 в) и уравнения (3.5 б), (3.6 в) и (3.7 в) (после замены $\eta = \Phi + \xi^2$) оказываются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} = F(f); f = \eta(\xi) \text{ или } f = \Phi(\xi) = \eta - \xi^2,$$

первые интегралы и решения которых записываются в квадратурах:

$$\frac{df}{d\xi} = \pm \sqrt{C + 2 \int^f F(z) dz}, \quad \xi = \xi_c \pm \int^f \frac{dw}{\sqrt{C + 2 \int^w F(z) dz}}. \quad (4.1)$$

Постоянные интегрирования C и ξ_c , а также выбор знака определяются из граничных условий на потенциал (2.1) и условий непрерывности поля и потенциала в тех областях, где уравнения Пуассона переходят друг в друга.

Производя сшивку первых интегралов уравнений попарно в областях «перекрытия», получим, что все постоянные C одинаковы с точностью до малых порядка $(\alpha\eta'(0))^{-2} \ll 1$ (см. (3.1))*:

$$C = (\eta'(0))^2 \left\{ 1 + 0 \left[\frac{1}{(\alpha\eta'(0))^2} \right] \right\}.$$

Постоянные ξ_c находим из условия непрерывности решений уравнений (3.4 в), (3.7 в) в указанных выше областях и граничных условий $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1/h^2$. В результате такой сшивки получим решение уравнения Пуассона с точностью до малых порядка $1/(\alpha\eta'(0))^2 \ll 1$.

Близи катода из (3.4 в) найдем

$$\xi = \frac{1}{\eta'(0)} \left\{ \eta - \frac{2Q\sqrt{\pi}}{(\alpha\eta'(0))^3} \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\alpha^2\eta)^{3/2} - \alpha^2\eta + \psi(\alpha^2\eta) \right] \right\} (0 \leq \xi \leq \eta'(0)), \quad (4.2)$$

где

$$\psi(z) = 2\sqrt{z/\pi} - 1 + e^z(1 - \operatorname{erf}\sqrt{z}).$$

Внутри облака из (3.5 б) получим решение в двух областях, определяемых знаком $\Phi'(\xi)$ (см. (4.1)):

$$\xi = \mu(\Phi), \quad \frac{1}{\alpha^2\eta'(0)} \ll \xi \leq \xi_m^{(0)} \quad (\Phi'(\xi) > 0); \quad (4.3\text{а})$$

$$\xi = 2\xi_m^{(0)} - \mu(\Phi), \quad \xi_m^{(0)} \ll \xi < \xi_0, \quad |\xi - \xi_0| \gg \frac{\xi_0}{\alpha|\Phi'(\xi_0)|} \quad (\Phi'(\xi) < 0), \quad (4.3\text{б})$$

где $\xi_m^{(0)} = \eta'(0)/2 + Q(\pi/2 + 2Q/\eta'(0))$ — максимум эффективного потенциала,

* Из ограничения (1.13) на величину $\eta''(0) \approx 2Q\alpha\sqrt{\pi} \ll 2$ (см. (3.4 в) при $\xi = 0$) следует, что малыми того же порядка оказываются члены с $Q/\alpha(\eta'(0))^2 \approx \pi^{-1/2}(\alpha\eta'(0))^{-2} \ll 1$. Заметим также, что при оценках достаточно положить $\xi_0 \sim \eta'(0)$ (см. ниже).

$$\mu(\Phi) = \frac{1}{2} \eta'(0) - \sqrt{\left(\frac{\eta'(0)}{2}\right)^2 + 2Q\sqrt{\Phi - \Phi_0}} + Q \left[\arcsin 2 \frac{\sqrt{\Phi - \Phi_0}}{\eta'(0)} + \arcsin \frac{2Q}{\eta'(0)} \right]$$

— известное решение для двухпоточного режима [4], но с граничным условием $\eta'(0) > 0$.

Вблизи границы облака решение уравнения (3.6 в) имеет вид

$$\xi = \xi_0 - \frac{1}{2} \left[\eta'(0) - \sqrt{(\eta'(0))^2 - 4\Phi} \right] + \frac{4Q(\xi_0/\alpha)\sqrt{2}}{(\eta'(0))^3} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\Phi}{2\xi_0} \right)^2 \right] \times D_{-5/2} \left(-\frac{\alpha\Phi}{\xi_0\sqrt{2}} \right) - D_{-5/2}(0) \right\}, \quad \left| \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \right| \ll 1. \quad (4.4)$$

Вне облака из (3.7 в) получим

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{(\eta'(0))^2 - 4\Phi} - \frac{1}{2} \sqrt{(\eta'(0))^2 + 4\left(1 - \frac{1}{h^2}\right)}, \quad (4.5)$$

$$\xi_0 < \xi \ll 1, \quad |\xi - \xi_0| \ll \frac{\xi_0}{\alpha|\Phi'(\xi_0)|}.$$

Величины ξ_0 и $\eta'(0)$ связаны с внешними параметрами α , Q и $1/h^2$ соотношениями

$$\eta'(0) = 1/h^2 - Q\pi(2 - 1/h^2) - O(1/\alpha^2); \quad (4.6a)$$

$$\xi_0 = 1/h^2 - Q\pi(1 - 1/h^2) + O(1/\alpha^2) \quad (4.7a)$$

или, в размерных величинах (см. (1.3), (1.11), (2.4)):

$$d\varphi/dx|_{r=0} = \varphi_a/d - (4\pi^2 |j_e|/\omega_c) (2 - 2|e|\varphi_a/m\omega_c^2 d^2); \quad (4.6b)$$

$$x_0 = 2|e|\varphi_a/m\omega_c^2 d - (8\pi^2 |e||j_e|/m\omega_c^3) (1 - 2|e|\varphi_a/m\omega_c^2 d^2). \quad (4.7b)$$

Как следует из этой связи, поле на катоде уменьшается с ростом тока эмиссии, а граница облака при этом сдвигается к катоду. Следует отметить, что при магнитном поле, равном критическому ($h = 1$), из (4.7 а) следует точное значение $\xi_0 = 1$, хотя эта формула является приближенной. Положение максимума плотности определяется из (3.8) и (4.4):

$$\xi_m = \xi_0 + z_m \sqrt{2}/\alpha. \quad (4.8)$$

Подставляя значение поля на катоде (4.6 а) в неравенство (3.1), получим условие, при выполнении которого в магнетроне может установиться режим с ускоряющим полем на катоде:

$$(a/h^2)^2 \gg 1 \text{ или } 2(|e|\varphi_a)^2/m\omega_c^2 d^2 kT \gg 1. \quad (4.9)$$

Как видно из (4.9) и (4.7 а), в рассматриваемом случае граница облака не может быть слишком близка к катоду: $(\alpha\xi_0)^2 \gg 1$.

Используя найденное в разд. 3 выражение для плотности электронов вблизи катода $\eta''(\xi)$ (3.4 в), запишем основное неравенство (1.13), при выполнении которого в магнетронном диоде может реализоваться режим с плотностью заряда на катоде, не больше бриллюэновской, в виде*

* Неравенство (4.10) приводится в [11] без физического обсуждения.

$$Q \alpha \sqrt{\pi} \leq 1 \text{ или } |j_e| \leq j_k = (m \omega_c^2 / 8\pi |e|) \sqrt{2kT/\pi m}. \quad (4.10)$$

В заключение следует указать, что режим с ускоряющим электрическим полем на катоде (3.1) не является единственным возможным в магнетронном диоде с малым пространственным зарядом (см. также [21]). Однако анализ других режимов выходит за рамки настоящей работы и явится предметом отдельного сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Бриллюэн, Теория магнетрона, изд. Сов. радио, М., 1946.
2. С. Я. Брауде, ЖТФ, 6, 1048 (1936).
3. L. Page, N. I. Adams, Phys. Rev., 69, 492 (1946).
4. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
5. L. Brillouin, Advan. Electr. Electron Phys., 3, 85 (1951).
6. I. Langmuir, Phys. Rev., 21, 419 (1923).
7. Л. А. Вайнштейн, Сборник научных трудов, изд. Сов. радио, М., 1948.
8. Л. Э. Паргаманик, ЖЭТФ, 33, 251 (1957).
9. С. В. Беллюстин, ЖТФ, 9, 1188 (1939).
10. С. В. Беллюстин, ЖЭТФ, 10, 190 (1940).
11. R. Q. Twiss, Advan. Electr. Electron Phys., 5, 247 (1953).
12. А. В. Лазарев, Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника, 6, 1316 (1961).
13. Г. Ф. Филимонов, А. В. Лазарев, Радиотехника и электроника, 7, 911 (1962).
14. P. A. Lindsay, Advan. Electr. Electron Phys., 13, 181 (1961).
15. P. A. Lindsay, J. Electron. Control, 8, 177 (1960); 9, 241 (1960).
16. P. A. Lindsay, J. Electron. Control, 17, 67 (1964).
17. P. A. Lindsay, J. Appl. Phys., 33, 3298 (1962).
18. P. A. Lindsay, R. S. Goodel, J. Appl. Phys., 36, 411 (1965).
19. В. П. Галайко, Дипломная работа, рук. Л. Э. Паргаманик, ХГУ, 1958.
20. Van der Varden, Appl. Sci. Res., B.2, 33 (1951).
21. А. А. Янкина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 2, 246 (1959).
22. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производственных, Физматгиз, М., 1962.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
6 января 1969 г.

THE KINETIC THEORY OF THE STATICAL REGIME OF A PLANE MAGNETRON. I

V. I. Vigdorchik, V. M. Kontorovich

The properties of a plane magnetron diode with the density of charge on the cathode, less than Brillouin's one, are investigated on the basis of a kinetic collisionless model of electron gas motion in crossed fields. The use of canonical variables—the energy of transverse motion and y-component of the generalized pulse—and a small parameter of the ratio of the thermal cyclotron radius to anode—cathode gap gave allowance for studying the density distribution and solving Poisson equation. It is shown that in the case of a positive electric field on the cathode, the state of the electron cloud is close to double-flow. The effect of external fields on the properties of the spatial charge is considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.378.32

ОКГ НА СТЕКЛЕ С Nd^{3+} В РЕЖИМЕ ГИГАНТСКОГО ИМПУЛЬСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ВЫНУЖДАЮЩЕГО СИГНАЛА

А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривоощеков, В. А. Смирнов

В работах [1-4] нами были проведены некоторые исследования спектральных и временных характеристик гигантского импульса ОКГ на рубине, работающего под действием высшего сигнала. Сигнал вводился в резонатор во время линейного развития генерации. Было показано, что при определенной интенсивности внешнего сигнала (более 10^{-2} вт) спектр излучения ОКГ полностью совпадает со спектром внешнего сигнала. При использовании одночастотного ОКГ (режим свободной генерации с селекцией типов колебаний) в качестве источника внешнего сигнала была получена мощная генерация на одном продольном типе колебаний [3, 4]. Такая генерация имела место на R_2 -линии рубина при запуске генератора внешним сигналом с частотой, соответствующей этой линии.

Подобные исследования были начаты нами с использованием ОКГ на стекле с Nd^{3+} с целью выяснения возможности создания одномодового ОКГ с перестраиваемой частотой излучения в пределах линии люминесценции активной среды. Предварительные эксперименты проведены на установке, изображенной на рис. 1. Источником внешнего сигнала служил ОКГ (в дальнейшем будем называть его первым) с модулируемой добротностью резонатора. Добротность включалась на длительное время для того, чтобы можно было работать при небольших коэффициентах усиления генератора. В резонатор первого ОКГ помещались две призмы с общей дисперсией $3 \text{ угл. сек} \cdot \text{\AA}^{-1}$. Поворотом зеркала M_4 можно было менять частоту первого генератора, а зеркало M_3 — частоту второго генератора.

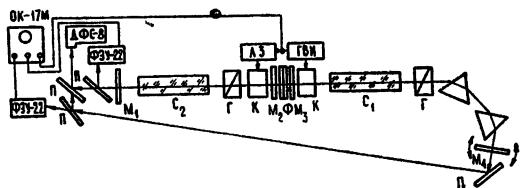


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
 С₁С₂—неодимовые стекла марки КГСС-5; М₁, М₂, М₃, М₄—зеркала резонаторов; Ф—фильтры, ослабляющие интенсивность вводимого излучения; П—зеркала, направляющие излучение на регистрирующие приборы; Г—призмы Грана-Томсона; К—электрооптические ячейки; ЛЗ—линия задержки; ГВИ—генератор, подающий высоковольтный импульс на электрооптическую ячейку.

Качка генераторов "осуществлялась одновременно. Высоковольтный импульс, включающий добротность второго ОКГ, подавался на ячейку Поккельса с задержкой, равной времени линейного развития генерации первого генератора. Таким образом, в момент включения добротности второго ОКГ в его резонатор поступало излучение первого генератора. Регистрация спектрограмм обоих генераторов производилась одновременно с помощью спектрографа ДФС-8 с электронно-оптическим преобразователем.

На рис. 2а приведена спектрограмма излучения первого (внизу) и второго (вверху) генераторов для случая, когда между генераторами ставился непрозрачный экран. Рис. 2б соответствует случаю, когда интенсивность внешнего сигнала составляла $3 \cdot 10^3 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$. Очевидно, что второй генератор в этом случае генерирует в том же спектральном интервале, что и первый.

Так как первый генератор работал в режиме с модулируемой добротностью, нам не удалось получить достаточно узкую спектральную линию его излучения, а также перестроить частоту его генерации в широких пределах. Для более детального исследования необходимо использовать в качестве источника внешнего сигнала ОКГ в свободном режиме генерации с селекцией типов колебаний.

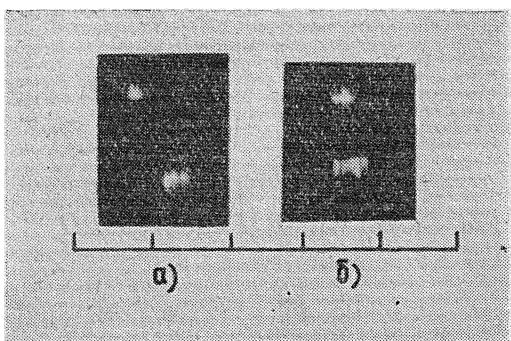


Рис. 2. Спектрограммы излучения генераторов. Цена деления шкалы—60 Å.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Бондаренко, К. Г. Фолин, В. А. Смирнов, В. В. Анциферов, Письма в ЖЭТФ, 6, 692 (1967).
2. А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. А. Смирнов, К. Г. Фолин, ЖЭТФ, 55, 111, (1968).
3. А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. А. Смирнов, Письма в ЖЭТФ, 9, 100 (1969).
4. А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. А. Смирнов, ЖЭТФ (в печати).
5. М. С. Соскин, В. И. Кравченко, О. Н. Погорелый, Н. Ф. Прокопюк, Украинский физический журнал, 13, № 1, 28 (1968).

Институт физики полупроводников
СОАН СССР

Поступила в редакцию
21 апреля 1969 г.

УДК 539.143.42

ОПТИМАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СПИНОВ В РАБОЧЕМ ВЕЩЕСТВЕ МАГНИТОРЕЗОНАНСНЫХ УСТРОЙСТВ С ДИНАМИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ЯДРАМИ

Б. Ф. Алексеев

При использовании методов динамической поляризации ядер (ДПЯ) [1] для усиления сигналов ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в рабочий образец растворением подходящей парамагнитной примеси вводят электронные спины. Высокочастотная мощность, поглощаемая при ДПЯ ядрами в условиях малого насыщения ЯМР, определяется формулой

$$P = \gamma_n \omega_0 H_{1n}^2 T_{2n} M_d, \quad (1)$$

где γ_n — гиромагнитное отношение ядер, ω_0 — частота прецессии ядер, H_{1n} — амплитуда ВЧ-поля, индуцирующего ядерные переходы, T_{2n} — время поперечной ядерной релаксации, M_d — стационарное значение макроскопического ядерного магнитного момента при ДПЯ, равное для $I = 1/2$ (I — ядерный спин)

$$M_d \approx 1/2 \gamma_n n \hbar \rho (\Pi - \Pi_0) f. \quad (2)$$

В выражении (2) n — концентрация ядерных спинов, ρ — коэффициент [3], зависящий от механизма связи ядерных и электронных спинов, P — электронная поляризация, P_0 — термически равновесная электронная поляризация, f — фактор утечки [2], определяемый соотношением

$$f = \frac{T_{1n} - T_{10}}{T_{10}}. \quad (3)$$

Здесь T_{1n} и T_{10} — времена продольной ядерной релаксации раствора и чистого растворителя соответственно.

Из выражений (1) и (2) видно, что величина мощности, поглощаемой при ДПЯ ЯМР-системой, при постоянных прочих условиях возрастает с увеличением произведения $T_{2n}f$. Это произведение входит также в выражения, характеризующие условия самовозбуждения ядерно-резонансных генераторов типа мазер [3] или типа Шмельцера [4]. Наилучшие условия самовозбуждения указанных генераторов соответствуют максимальному значению $T_{2n}f$.

Известно, что тенденции изменения множителей T_{2n} и f при изменении концентрации N электронных спинов противоположные. Так при увеличении N время T_{2n} уменьшается, а фактор утечки f возрастает. Следовательно, имеется некоторое оптимальное значение $N = N_{\text{опт}}$, при котором произведение $T_{2n}f$ максимально.

Задача нахождения $N_{\text{опт}}$ может быть строго решена для жидких растворов парамагнитных солей. В таких растворах зависимость времен ядерной релаксации от концентрации N ионов хорошо описывается выражениями [5], справедливыми в сравнительно широком интервале изменения N :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{1n}} &\simeq \frac{1}{T_{10}} + \alpha_1 N, \\ \frac{1}{T_{2n}} &\simeq \frac{1}{T_{20}} + \alpha_2 N, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_1 и α_2 — довольно громоздкие функции, почти не зависящие от N , явные выражения для которых можно найти в работе Пфайфера [5].

Учитывая (4), для произведения $T_{2n}f$ получаем выражение

$$T_{2n}f \simeq \frac{\alpha_1 T_{10} T_{20} N}{(1 + \alpha_1 T_{10} N)(1 + \alpha_2 T_{20} N)}. \quad (5)$$

Используя (5) и условие $\partial(T_{2n}f)/\partial N = 0$, находим оптимальную концентрацию

$$N_{\text{опт}} = (\alpha_1 \alpha_2 T_{10} T_{20})^{-1/2}, \quad (6)$$

при которой произведение $T_{2n}f$ максимально и равно

$$(T_{2n}f)_{\text{ макс}} \simeq \frac{\sqrt{\alpha_1 T_{10} T_{20}}}{\sqrt{\alpha_2}(2 + \sqrt{\alpha_1 T_{10}/\alpha_2 T_{20}} + \sqrt{\alpha_2 T_{20}/\alpha_1 T_{10}})}. \quad (7)$$

При $N_{\text{опт}}$ времена ядерной релаксации и фактор утечки соответственно равны

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T_{1n}}\right)_{\text{опт}} &\simeq \frac{1}{T_{10}} + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2 T_{10} T_{20}}}, \\ \left(\frac{1}{T_{2n}}\right)_{\text{опт}} &\simeq \frac{1}{T_{20}} + \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 T_{10} T_{20}}}, \\ f_{\text{опт}} &\simeq \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\alpha_2 T_{20}}{\alpha_1 T_{10}}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

По приведенным формулам можно рассчитать, например, $N_{\text{опт}}$ и другие величины для водных растворов двухвалентного марганца. Данные о коэффициентах α_1 и α_2 для такого образца имеются в работе [5].

В жидкых растворах парамагнитных примесей для значений магнитных полей, при которых справедливо неравенство $(\omega_e \tau_e)^2 \ll 1$ (ω_e и τ_e — ларморова частота и время

релаксации электронных спинов соответственно), обычно $\alpha_1 \approx \alpha_2$. Если растворитель является маловязкой жидкостью, тщательно очищенной от посторонних примесей и, в особенности, от растворенного кислорода, то обычно $T_{10} \approx f_{20}$. В этом случае выражения (6) — (8) упрощаются и приобретают вид

$$\begin{aligned} N_{\text{опт}} &\approx (\alpha_1 T_{10})^{-1}, \quad (T_{2n}f)_{\text{max}} \approx 0,25 T_{10}, \\ (T_{1n})_{\text{опт}} &\approx (T_{2n})_{\text{опт}} \approx 0,5 T_{10}, \quad f_{\text{опт}} \approx 0,5. \end{aligned} \quad (9)$$

Если численное значение коэффициента α_1 (или α_2) для данного растворителя и растворяемой примеси не известно, то в рассматриваемом частном случае, как следует из (9), $N_{\text{опт}}$ можно легко найти экспериментально как τ значение N , при котором отношение времен ядерной релаксации чистого растворителя и раствора равно двум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Р. Хуцишвили, УФН, 71, 9 (1960).
2. W. Müller-Wagnleitner, Z. f. Naturforschung, 15a, 927 (1960).
3. К. В. Владимирский, ЖЭТФ, 33, 532 (1957).
4. А. А. Морозов, сб. Ядерный магнитный резонанс, изд. ЛГУ, вып. 1, 138 (1965).
5. H. Pfeifer, Hochfrequenzspektroskopie, Akademie-Verlag, Berlin, 1961, S. 58.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
17 марта 1969 г.

УДК 621.378

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НОВОМ НЕЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ — ДИГИДРОАРСЕНАТЕ ЦЕЗИЯ

В. Д. Волосов, В. Г. Дмитриев, П. И. Зудков, Е. М. Швом, Н. В. Шкунов

В работе [1] сообщалось о наблюдении генерации второй гармоники в новом нелинейном кристалле — дигидроарснате цезия (СДА), входящем в группу воднорасторимых кристаллов типа КДР. Ниже обсуждаются результаты экспериментальных исследований кристаллов СДА в качестве удвоителей частоты. Нами были исследованы зависимости относительной мощности второй гармоники от угла поворота кристалла относительно оптической оси, определены углы синхронизма и их ширина, экспериментально измерены коэффициенты преобразования мощности во вторую гармонику в кристаллах КДР и СДА, возбуждаемых плоскими и сфокусированными пучками.

Для возбуждения второй гармоники в кристаллах использовался лазер на стекле с неодимом в режиме модуляции добротности насыщающимся фильтром; плотность мощности составляла величину $\sim 20 \text{ Mвт}\cdot\text{см}^{-2}$ при расходимости $\sim 3'$.

Экспериментальные графики зависимости коэффициента преобразования η во вторую гармонику от угла θ между направлением луча и оптической осью кристалла, для КДР (а) и СДА (б) представлены на рис. 1 (длина обоих кристаллов $\sim 3 \text{ мм}$). Нетрудно видеть, что длина (угол) когерентного взаимодействия в кристалле СДА существенно больше, чем в кристалле КДР; из рис. 1 следует, что для длины кристаллов 3 мм полуширина синхронизма $2\alpha_{\text{КОГ}}^{\text{КДР}} = 42'$, в то время как $2\alpha_{\text{КОГ}}^{\text{СДА}} = 5,5^\circ$. Углы синхронизма для обыкновенной волны лазера и необыкновенной волны гармоники в СДА равны 87° и 93° при комнатной температуре (22°C). При нагревании кристалла до $\sim 31^\circ\text{C}$ эти области синхронного взаимодействия сливаются в одну, а угол синхронизма оказывается равным 90° [2], последнее соответствует полному отсутствию двулупереломления волн при генерации второй гармоники. Оценки, по данным рис. 1, величины квадратичной поляризуемости для СДА показывают, что, по-видимому, вследствие $\chi^{(2)}$ СДА в 1,6 — 2,0 раза меньше, чем для КДР.

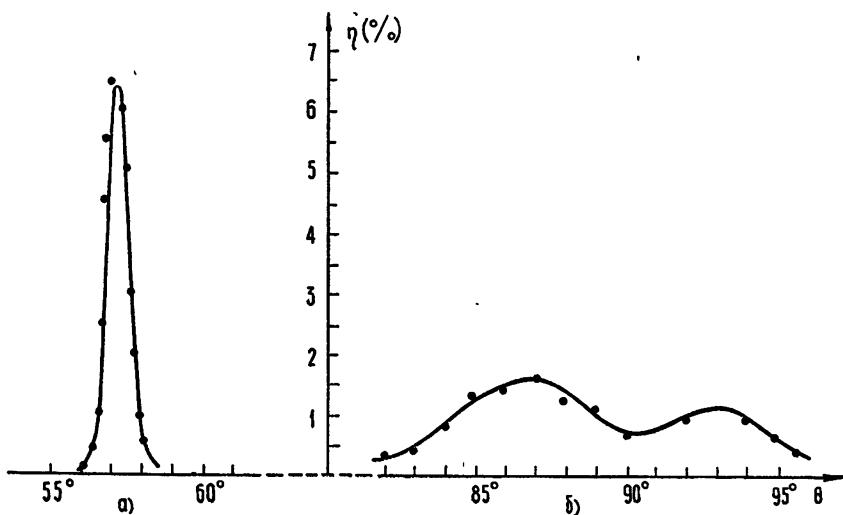


Рис. 1.

Следовало ожидать, что кристалл СДА, обладая большей, чем КДР, шириной области синхронизма, окажется более эффективным, чем КДР, при возбуждении его сфокусированными лазерными пучками. Для эксперимента были выбраны образцы кристаллов СДА и КДР длиной 7 мм ; полуширина углов синхронизма составляла $\sim 3^\circ$ и $20'$ соответственно. Для фокусировки излучения внутрь кристаллов использовалась линза с фокусным расстоянием $\approx 100 \text{ мм}$ (расходимость излучения $\sim 2^\circ$, что меньше полуширины синхронизма для СДА). Коэффициенты преобразования во вторую гармонику в этих условиях оказались равными 3% (СДА) и 1% (КДР).

Для возбуждения кристалла СДА нами использовался также лазер на алюминиттриевом гранате с неодимом, работающий с модуляцией добротности и частотой повторения до 100 гц (плотность мощности $\sim 0.6 \text{ Мвт}\cdot\text{см}^{-2}$). При фокусировке излучения этого генератора внутрь кристалла СДА длиной 3 мм линзой с фокусным расстоянием 70 мм коэффициент преобразования в гармонику составил $\sim 1\%$.

Из сказанного выше следует, что новый нелинейный кристалл — дигидроарсенат цезия (СДА) — обладает, по крайней мере, двумя преимуществами по сравнению с другими кристаллами группы КДР. Это, во-первых, значительно большая полуширина углов синхронизма, что может быть использовано для осуществления эффективной генерации гармоники при сравнительно малых уровнях мощности основной частоты с использованием фокусировки излучения сферическими линзами, параметрической генерации в сферических резонаторах и т. д. Во-вторых, это возможность легкого осуществления синхронной генерации гармоники под углом 90° к оптической оси, что соответствует отсутствию двулучепреломления и связанных с ним апертурных эффектов, существенно уменьшающих (при больших длинах взаимодействия) коэффициент преобразования.

Авторы благодарны И. С. Резу, В. Н. Непомнящей и В. С. Суворову за предложение кристаллов и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Дмитриев, П. И. Зудков, В. Н. Непомнящая, В. С. Суворов, И. С. Рез, Е. М. Швом, Аннотации докладов IV Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1968, стр. 83.
2. В. С. Суворов, И. С. Рез, Оптика и спектроскопия (в печати).

Поступила в редакцию
18 апреля 1969 г.

Самсон Давыдович Гвоздовер

После тяжелой болезни 29 октября скончался Самсон Давыдович Гвоздовер, коммунист, профессор физического факультета МГУ.

Научная и педагогическая деятельность Самсона Давыдовича, известного ученого, специалиста в области радиофизики, электронники сверхвысоких частот и квантовой радиофизики, — выше сорока лет была связана с Московским Университетом.

С. Д. Гвоздовер родился 23 января 1907 года. В 1922 году он поступил на физико-математический факультет МГУ, который окончил в 1927 году и был принят в аспирантуру. В 1939 году С. Д. Гвоздовер защитил докторскую диссертацию и был избран профессором кафедры общей физики. С 1947 г., в течение двадцати лет, он возглавлял созданную им кафедру физики сверхвысоких частот (ныне кафедра радиотехники).

Всю свою жизнь Самсон Давыдович вел интенсивную научную работу. Он является автором более пятидесяти работ в области электронники СВЧ, теории ядерного магнитного резонанса и квантовой радиофизики, автором ряда изобретений. Круг научных интересов Самсона Давыдовича был очень широк, и в каждой области им проведены интересные и оригинальные исследования. Первый период его научной деятельности связан с газовой электроникой, с исследованием функций распределения электронов в газовом разряде. Существенным вкладом в высокочастотную электронику явились работы, посвященные теории клистронных генераторов. Под руководством С. Д. Гвоздовера были проведены одни из первых в Советском Союзе теоретические и экспериментальные исследования ядерного магнитного резонанса. Результаты работ Самсона Давыдовича широко известны как в нашей стране, так и за рубежом. В 1956 г. вышла в свет написанная им фундаментальная монография «Теория электронных приборов сверхвысоких частот». Монография переведена на английский язык.

С. Д. Гвоздовер был прекрасным организатором. Являясь одним из инициаторов создания на физическом факультете отделения радиофизики, он возглавлял это отделение и с 1946 г. по 1963 г. был председателем Ученого Совета отделения. В 1959 г. по инициативе С. Д. Гвоздовера на физическом факультете была организована проблемная лаборатория квантовой радиофизики, в которой под его руководством был выполнен ряд интересных работ.

Своими знаниями Самсон Давыдович щедро делился с учениками. Под его руководством выполнено и защищено выше 30 кандидатских диссертаций, многие из учеников С. Д. Гвоздовера стали докторами наук. Самсон Давыдович в течение ряда лет активно работал в редакции журнала «Радиофизика».

Самсон Давыдович был принципиальным коммунистом, энергичным руководителем и, вместе с тем, простым и чутким человеком. Своей отзывчивостью, пониманием интересов каждого и неистощимым оптимизмом Самсон Давыдович завоевал любовь и уважение всех тех, кто у него учился и работал.

Последние годы жизни Самсона Давыдовича можно назвать подвигом. Пройденный болезнью к постели, с трудом держа в руке перо, Самсон Давыдович продолжал работать, опубликовал ряд интересных статей в области СВЧ электроники.

Жизнь Самсона Давыдовича Гвоздовера всегда будет примером для его учеников и товарищей.

ГРУППА ТОВАРИЩЕЙ.

