

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И Интегральные многообразия дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой . . . . .	1597
Волин Ю. М., Островский Г. М. Принцип максимума для разрывных систем и его применение к задачам с фазовыми ограничениями . . . . .	1609
Гордион М. И., Плотников В. И. Необходимые условия оптимальности в задачах с ограничениями . . . . .	1622
Брусин В. А. Равномерные статистические оценки выходного процесса для одного класса нелинейных динамических систем . . . . .	1632
Шильман С. В. О применении $z$ -преобразования к исследованию линейных динамических систем с периодическими коэффициентами . . . . .	1645
Мальцев А. П. Построение периодических решений краевых задач для уравнений параболического типа методом прямых . . . . .	1657
Мальцев А. П. Применение метода прямых к отысканию положительных периодических решений задач параболического типа с граничными условиями Стефана — Больцмана . . . . .	1666
Коган В. Р. Асимптотика оператора Лапласа—Бельтрами на единичной сфере $S^{n-1}$ . . . . .	1675
Коган В. Р. Асимптотика оператора Лапласа — Бельтрами в $n$ -мерном шаре $E^n$ . . . . .	1681
Алексеев А. С., Макаров С. В. К исследованию динамики простейших нелинейных распределенных импульсных систем . . . . .	1690
Горюнов В. И. К вопросу о приближенном исследовании гладких точечных преобразований . . . . .	1700
Сорокин Г. П. Явление подпороговой суммации при запуске ждущих релаксационных устройств . . . . .	1706
Королев В. И., Постников Л. В. К теории синхронизации генератора автоколебаний. II . . . . .	1710
Симахин В. А. Непараметрический медианный обнаружитель для зависимых случайных процессов . . . . .	1714
Эйнгорина Т. Н., Эйнгорин М. Я. К вопросу о существовании полных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников . . . . .	1721
Эйнгорина Т. Н. К вопросу о существовании множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников . . . . .	1732
Эйнгорина Т. Н., Эйнгорин М. Я. К вопросу о существовании множеств прошивок многомерных запоминающих или дешифрующих устройств . . . . .	1740
Улитовский В. А. Анализ конструктивных методов снижения саморазогрева куба матричного ферритового запоминающего устройства . . . . .	1745

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Шорников Е. Е., Панков А. П., Елецкая Е. П., Катуркин Н. Н. Динамические модели электромагнитных управляющих элементов пневматических сервомеханизмов . . . . .	1749
---	------

УДК 517.91

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ФАЗОЙ

А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой. Предлагается новый подход к их исследованию. С помощью теорем об инвариантных многообразиях точечных отображений устанавливаются условия существования у систем дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой устойчивого гладкого тороидального интегрального многообразия. Полученные результаты применяются к исследованию системы слабо связанных осцилляторов.

Исследованию дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой посвящено значительное число работ, среди которых в первую очередь, следует указать работы Боголюбова и Митропольского [1-3], Хейла [4], Волосова и Моргунова [5] и многие другие\*. В этих работах используется и развивается метод усреднения. В настоящей статье предлагается другой подход, опирающийся на метод точечных отображений. С помощью теорем об инвариантных многообразиях точечных отображений [6] устанавливаются условия существования у дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой устойчивого гладкого тороидального интегрального многообразия, непрерывно зависящего от малого параметра  $\mu$ . Полученные результаты применяются к исследованию систем слабо связанных осцилляторов.

### 1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО ГЛАДКОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ТОРОИДАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ У СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ФАЗОЙ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой вида

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega + \mu \Phi(\varphi, \vartheta, \nu; \mu), \\ \dot{\vartheta} &= \mu \Theta(\varphi, \vartheta, \nu; \mu),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \mu H\nu + \mu V(\varphi, \vartheta, \nu; \mu),$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  —  $l$ - и  $m$ -мерные векторы, компонентами которых являются угловые переменные  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$  и  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ , в соответствии с чем все функции  $\Phi, \Theta$  и  $V$  зависят от них периодически с периодом  $2\pi$ ;  $\nu$  —  $n$ -мерный вектор с компонентами  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ ;  $\omega$  — постоянный вектор с компонентами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ , линейно независимыми над кольцом целых чисел;  $H$  — постоянная матрица, собственные значения которой имеют отрицательные действительные части;  $\mu$  — малый параметр. В отношении входящих в правые части системы (1) функций предпо-

\* Достаточно полная библиография содержится в работах [3, 4, 6, 7].

лагается, что они непрерывно дифференцируемы по всем аргументам и представимы в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi, \vartheta, v; \mu) &= \omega^* + \Phi_1(\vartheta) + \Phi_2(\varphi, \vartheta) + \Phi_3(\varphi, \vartheta, v; \mu), \\ \Theta(\varphi, \vartheta, v; \mu) &= \omega^{**} + \Theta_2(\varphi, \vartheta) + \Theta_3(\varphi, \vartheta, v; \mu), \\ V(\varphi, \vartheta, v; \mu) &= V_2(\varphi, \vartheta) + L(\varphi, \vartheta)v + V_3(\varphi, \vartheta, v; \mu),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\omega^*$  и  $\omega^{**}$  — постоянные векторы; средние значения функций  $\Phi_2(\varphi, \vartheta)$ ,  $\Theta_2(\varphi, \vartheta)$ ,  $V_2(\varphi, \vartheta)$  и матрицы  $L(\varphi, \vartheta)$  по переменной  $\varphi$  равны нулю; при достаточно малых  $\mu$  и  $v$  ( $|\mu| < \mu$  и  $\|v\| < \varepsilon_0$ ) и некотором  $M$

$$\begin{aligned}\|\Phi_3(\varphi, \vartheta, v; \mu)\| + \|\Theta_3(\varphi, \vartheta, v; \mu)\| + \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_3(\varphi, \vartheta, v; \mu) \right\| + \\ + \left\| \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_3(\varphi, \vartheta, v; \mu) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \Theta_3(\varphi, \vartheta, v; \mu) \right\| + \left\| \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Theta_3(\varphi, \vartheta, v; \mu) \right\| + \\ + \left\| \frac{\partial}{\partial v} V_3(\varphi, \vartheta, v; \mu) \right\| < M(|\mu| + \|v\|), \\ \|\Phi_3(\varphi, \vartheta, v; \mu)\| < M(|\mu| + \|v\|^2).\end{aligned}\quad (3)$$

Примем, что величина константы  $M$  одновременно является и оценкой норм значений правых частей, (а также отдельных их слагаемых в представлении (2)) системы (1) и их частных производных по переменным  $\varphi, \vartheta, v$  при  $|\mu| < \mu$  и  $\|v\| < \varepsilon_0$ .

*Теорема 1.* При сформулированных условиях система дифференциальных уравнений (1) допускает при достаточно малых  $\mu > 0$  в достаточно малой окрестности  $\|v\| < \varepsilon$  ( $l + m$ )-мерного тора  $v = 0$  единственное устойчивое гладкое интегральное тороидальное многообразие вида

$$v = f(\varphi, \vartheta; \mu), \quad (4)$$

где  $f(\varphi, \vartheta; \mu)$  обращающаяся в нуль вместе с  $\mu$  периодическая функция с периодом  $2\pi$  компонент векторов  $\varphi$  и  $\vartheta$ .

Фазовое пространство системы дифференциальных уравнений (1) представляет собой топологическое произведение пространств  $\Phi, \Theta$  и  $V$  векторов  $\varphi, \vartheta$  и  $v$ . Решения дифференциальных уравнений (1) порождают в этом пространстве  $\Phi \oplus \Theta \oplus V$  отображения сдвига  $T_\tau$ . Интегральная тороидальная поверхность (4), (если она существует) инвариантна по отношению к отображениям сдвига  $T_\tau$ . Обратно, если некоторая тороидальная поверхность вида (4) инвариантна по отношению к отображениям сдвига, то она является интегральной поверхностью уравнений (1). В силу этого доказательство теоремы 1 можно получить, установив существование у отображений сдвига  $T_\tau$  устойчивой инвариантной поверхности вида (4). Для доказательства существования инвариантной поверхности вида (4) у отображения сдвига  $T_\tau$  воспользуемся теоремой 2 работы [8]. Если фазовое пространство  $\Phi \oplus \Theta \oplus V$  представить себе как топологическое произведение пространства  $U = \Phi \oplus \Theta$  и пространства  $V$ , то, согласно работе [8], взаимно однозначное отображение  $T_\tau$ , преобразующее точку  $(u, v) = (\varphi, \vartheta, v)$  в точку  $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{\varphi}, \bar{\vartheta}, \bar{v})$ , имеет устойчивое инвариантное многообразие вида (4) при выполнении следующих условий:

1) при некотором  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  область  $\|v\| \leq \varepsilon$  преобразуется в себя;

2) любая поверхность вида ( $\|v\| \leq \varepsilon$  при  $u \in U$ )

$$v = v(u), \tag{5}$$

удовлетворяющая условию Липшица

$$\|v(u_1) - v(u_2)\| < K \|u_1 - u_2\|, \tag{6}$$

преобразуется в поверхность вида (5);

3) для отображения  $T_\tau$  в области  $\|v\| \leq \varepsilon$  имеют место оценки

$$\|\delta \bar{v}\| < q \|\delta v\| + \alpha \|\delta u\|,$$

$$\|\delta \bar{u}\| > p \|\delta u\| - \beta \|\delta v\|,$$

$$\|\delta \bar{u}\| < \gamma \|\delta v\| \quad (\delta u = 0), \tag{7}$$

в которых постоянные  $q, \alpha, p, \beta$  и  $\gamma$  удовлетворяют неравенствам

$$q + \frac{\alpha}{K} + \beta K < p, \quad q + \gamma K < 1. \tag{8}$$

Покажем, что отображение сдвига  $T_\tau$  при достаточно больших  $\tau$  и малых  $\mu\tau$  удовлетворяет всем этим требованиям.

От дифференциальных уравнений (1) перейдем к эквивалентным им интегральным уравнениям

$$\varphi(t+\tau) = \varphi(t) + \omega\tau + \mu \int_0^\tau \Phi(\varphi(t+\xi), \vartheta(t+\xi), v(t+\xi); \mu) d\xi,$$

$$\vartheta(t+\tau) = \vartheta(t) + \mu \int_0^\tau \Theta(\varphi(t+\xi), \vartheta(t+\xi), v(t+\xi); \mu) d\xi, \tag{9}$$

$$v(t+\tau) = e^{\mu\tau H} v(t) + \mu \int_0^\tau e^{\mu(\tau-\xi)H} V(\varphi(t+\xi), \vartheta(t+\xi), v(t+\xi); \mu) d\xi,$$

решение которых может быть получено при достаточно малых  $\mu$  методом последовательных приближений, исходя из соотношений

$$\varphi^{k+1}(t+\tau) = \varphi(t) + \omega\tau + \mu \int_0^\tau \Phi(\varphi^k(t+\xi), \vartheta^k(t+\xi), v^k(t+\xi); \mu) d\xi,$$

$$\vartheta^{k+1}(t+\tau) = \vartheta(t) + \mu \int_0^\tau \Theta(\varphi^k(t+\xi), \vartheta^k(t+\xi), v^k(t+\xi); \mu) d\xi, \tag{10}$$

$$v^{k+1}(t+\tau) = e^{\mu\tau H} v(t) + \mu \int_0^\tau e^{\mu(\tau-\xi)H} V(\varphi^k(t+\xi), \vartheta^k(t+\xi), v^k(t+\xi); \mu) d\xi.$$

В качестве исходного нулевого приближения примем

$$\varphi^0(t+\xi) = \varphi(t) + \omega\xi, \quad \vartheta^0(t+\xi) = \vartheta(t), \quad v^0(t+\xi) = v(t), \tag{11}$$

где  $\|v(t)\| \leq \varepsilon_0/2$ .

В соотношениях (10) и (11)  $t$  фиксировано,  $\xi$  и  $\tau$  — переменные, изменяющиеся от 0 до  $\tau^*$ .

В силу предположенной отрицательности действительных частей собственных чисел матрицы  $H$  в подходящем образом выбранной норме и при достаточно малых  $\mu\tau$  и некотором  $a > 0$



$$\| e^{\mu\tau H} \| < 1 - a\mu\tau. \quad (12)$$

Теперь из последнего соотношения (10) непосредственно видно, что

$$\| v^1(t+\tau) \| < (1-a\mu\tau) \| v(t) \| + M\mu\tau, \quad (13)$$

и поэтому при достаточно малом  $\mu\tau^*$   $\| v^1(t+\tau) \| \leq \varepsilon_0$  при всех  $0 \leq \tau \leq \tau^*$ . Далее по индукции устанавливаем, что при выбранном достаточно малом  $\mu\tau^*$  все последующие приближения  $v^2(t+\tau), \dots, v^k(t+\tau), \dots$  не превосходят по норме  $\varepsilon_0$ , и поэтому в силу сжимаемости отображения, определяемого формулами (10), при достаточно малых  $\mu\tau$  процесс последовательных приближений сходящийся.

Оценим ошибки нулевого и первого приближений. Из (9) непосредственно видно, что

$$\begin{aligned} \| \varphi(t+\tau) - \varphi(t) - \omega\tau \| &< M\mu\tau, \\ \| \vartheta(t+\tau) - \vartheta(t) \| &< M\mu\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\| v(t+\tau) - v(t) \| < M\mu\tau + [\exp(\mu\tau \| H \|) - 1] \| v(t) \|.$$

Далее на основании полученных неравенств (14) имеем

$$\begin{aligned} \| v(t+\tau) - v^1(t+\tau) \| &< \mu \int_0^\tau \| e^{\mu(\tau-\xi)H} \| \| V(\varphi(t+\xi), \vartheta(t+\xi), v(t+\xi); \mu) - \\ &- V(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t), v(t); \mu) \| d\xi < M\mu\tau \{ M\mu\tau + [\exp(\mu\tau \| H \|) - 1] \| v(t) \| \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим норму первого приближения  $v^1(t+\tau)$  при достаточно больших  $\tau$ , но по-прежнему малых  $\mu\tau$ . Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned} \| v^1(t+\tau) \| &< (1-a\mu\tau) \| v(t) \| + \mu \int_0^\tau \| e^{\mu(\tau-\xi)H} - E \| ( \| V_2(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) + \\ &+ L(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) v(t) \| ) d\xi + \mu \int_0^\tau \| V_2(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) \| d\xi + \\ &+ \mu \left\| \int_0^\tau L(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) d\xi \right\| \| v(t) \| + \\ &+ \mu \left\| \int_0^\tau e^{\mu(\tau-\xi)H} V_3(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t), v(t); \mu) d\xi \right\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как функция  $V_2(\varphi, \vartheta)$  и матрица  $L(\varphi, \vartheta)$  имеют нулевые средние по переменной  $\varphi$ , то

$$\left\| \int_0^\tau V_2(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) d\xi \right\| + \left\| \int_0^\tau L(\varphi(t)+\omega\xi, \vartheta(t)) d\xi \right\| < \delta(\tau)\tau, \quad (17)$$

где  $\delta(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  [10]. Поэтому, согласно (16), учитывая (17) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \| v^1(t+\tau) \| &< (1-a\mu\tau) \| v(t) \| + M\mu\tau [\exp(\mu\tau \| H \|) - 1] \times \\ &\times (1 + \| v(t) \|) + \mu\tau\delta(\tau)(1 + \| v(t) \|) + M\mu\tau(\mu + \| v(t) \|^2). \end{aligned} \quad (18)$$

При  $\| v(t) \| \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0/2$  из (15) и (18) следует, что

$$\|v(t+\tau)\| < \varepsilon + \mu\tau \{-a\varepsilon + M^2\mu\tau + \delta(\tau)(1+\varepsilon) +$$

$$+ [\exp(\mu\tau \|H\|) - 1](1+2\varepsilon)M + M(\varepsilon^2 + \mu)\}. \quad (19)$$

Выражение, стоящее в фигурной скобке, при достаточно большом  $\tau$  и малых  $\varepsilon$  и  $\mu\tau$  отрицательно. Это доказывает, что отображение сдвига  $T_\tau$  при достаточно большом  $\tau$  и малом  $\mu\tau$  преобразует достаточно малую окрестность  $\|v(t)\| \leq \varepsilon$   $(l+m)$ -мерного тора  $v=0$  в себя.

Покажем теперь, что для отображения сдвига  $T_\tau$  имеют место оценки (7).

Варьируя уравнения (9), найдем, что

$$\delta\varphi(t+\tau) = \delta\varphi(t) + \mu \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \delta\varphi(t+\xi) + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t+\xi) + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \delta v(t+\xi) \right\} d\xi,$$

$$\delta\vartheta(t+\tau) = \delta\vartheta(t) + \mu \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \delta\varphi(t+\xi) + \frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t+\xi) + \frac{\partial\Theta}{\partial v} \delta v(t+\xi) \right\} d\xi, \quad (20)$$

$$\delta v(t+\tau) = e^{\mu\tau H} \delta v(t) + \mu \int_0^\tau e^{\mu(\tau-\xi)H} \left\{ \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi(t+\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t+\xi) + \frac{\partial V}{\partial v} \delta v(t+\xi) \right\} d\xi.$$

Перейдем от уравнений (20) к уравнениям первого приближения, пожив в правых частях этих уравнений

$$\delta\varphi(t+\xi) = \delta\varphi(t), \quad \delta\vartheta(t+\xi) = \delta\vartheta(t), \quad \delta v(t+\xi) = \delta v(t),$$

$$\varphi(t+\xi) = \varphi(t) + \omega\xi, \quad \vartheta(t+\xi) = \vartheta(t), \quad v(t+\xi) = v(t), \quad (21)$$

в результате чего придем к соотношениям вида

$$\delta\varphi^1(t+\tau) = \delta\varphi(t) + \mu \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \delta\varphi(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \delta v(t) \right\} d\xi,$$

$$\delta\vartheta^1(t+\tau) = \delta\vartheta(t) + \mu \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \delta\varphi(t) + \frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t) + \frac{\partial\Theta}{\partial v} \delta v(t) \right\} d\xi, \quad (22)$$

$$\delta v^1(t+\tau) = e^{\mu\tau H} \delta v(t) + \mu \int_0^\tau e^{\mu(\tau-\xi)H} \left\{ \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi(t) + \frac{\partial V}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t) + \frac{\partial V}{\partial v} \delta v(t) \right\} d\xi.$$

Формулы (22) непосредственно связывают в линейном приближении вариации  $\delta\varphi^1$ ,  $\delta\vartheta^1$  и  $\delta v^1$ , являющиеся приближенными значениями вариаций  $\delta\bar{\varphi}$ ,  $\delta\bar{\vartheta}$  и  $\delta\bar{v}$ , с вариациями  $\delta\varphi$ ,  $\delta\vartheta$  и  $\delta v$ . Ошибку приближения можно при этом разбить на две части: одну, связанную с использованием первого приближения, и вторую, вызванную заменой в выражениях производных истинных значений аргументов на приближенные согласно (21). Первая часть ошибки может быть оценена по величине разности между первым и нулевым приближениями и коэффициентом сжатия, вторая часть ошибки скажется в изменении коэффициентов в получаемых ниже оценках на величину порядка  $o(\mu\tau)\mu\tau$ , где  $o(\mu\tau) \rightarrow 0$  вместе с  $\mu\tau$ . К таким же по порядку величины изменениям приводит и подмена значений  $\|\delta\bar{\varphi}\|$ ,  $\|\delta\bar{\vartheta}\|$  и  $\|\delta\bar{v}\|$  на их первые приближения.

Из (22) непосредственно находим, что

$$\begin{aligned}
 \|\delta\varphi^1(t+\tau)\| &\geq \|\delta\varphi(t)\| \left[ 1 - \mu \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} d\xi \right\| - \mu \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi} d\xi \right\| \right] - \\
 &- \mu \|\delta\vartheta(t)\| \left[ \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_1}{\partial\vartheta} d\xi \right\| + \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta} d\xi \right\| + \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_3}{\partial\vartheta} d\xi \right\| \right] - \\
 &- \mu \|\delta v(t)\| \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Phi_3}{\partial v} d\xi \right\| > \|\delta\varphi(t)\| \left[ 1 - \mu\tau o\left(\mu + \|v\| + \frac{1}{\tau}\right) \right] - \\
 &- \|\delta\vartheta(t)\| \left[ M\mu\tau + \mu\tau o\left(\mu + \|v\| + \frac{1}{\tau}\right) \right] - M\mu\tau \|\delta v(t)\|, \\
 \|\delta\vartheta^1(t+\tau)\| &\geq \|\delta\vartheta(t)\| \left[ 1 - \mu \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Theta_2}{\partial\vartheta} d\xi \right\| - \mu \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Theta_3}{\partial\vartheta} d\xi \right\| \right] - \\
 &- \|\delta\varphi(t)\| \mu \left[ \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Theta_2}{\partial\varphi} d\xi \right\| + \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Theta_3}{\partial\varphi} d\xi \right\| \right] - \mu \|\delta v(t)\| \left\| \int_0^\tau \frac{\partial\Theta_3}{\partial v} d\xi \right\| > \\
 &> \|\delta\vartheta(t)\| \left[ 1 - \mu\tau o\left(\mu + \|v\| + \frac{1}{\tau}\right) \right] - \|\delta\varphi(t)\| \mu\tau o\left(\mu + \|v\| + \frac{1}{\tau}\right) - \\
 &- M\mu\tau \|\delta v(t)\|, \\
 \|\delta v^1(t+\tau)\| &\leq (1-a\mu\tau) \|\delta v(t)\| + \mu \left\| \int_0^\tau (e^{\mu(\tau-\xi)H} - E) \left[ \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi(t) + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial V}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t) + \frac{\partial V}{\partial v} \delta v(t) \right] d\xi \left\| + \mu \left\| \int_0^\tau \left[ \frac{\partial V}{\partial\varphi} \delta\varphi(t) + \frac{\partial V}{\partial\vartheta} \delta\vartheta(t) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\partial V}{\partial v} \delta v(t) \right] d\xi \right\| < (1-a\mu\tau) \|\delta v(t)\| + \mu\tau o(\mu\tau) [\|\delta\varphi(t)\| + \|\delta\vartheta(t)\| + \\
 &+ \|\delta v(t)\|] + \mu\tau o\left(\mu + \|v\| + \frac{1}{\tau} + \mu\tau\right) [\|\delta\varphi(t)\| + \|\delta\vartheta(t)\| + \|\delta v(t)\|]
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \|\delta\bar{\varphi}^1\| &> \|\delta\varphi\| [1 - \mu\tau o(\rho)] - \|\delta\vartheta\| M\mu\tau - \|\delta v\| M\mu\tau, \\
 \|\delta\bar{\vartheta}^1\| &> \|\delta\vartheta\| [1 - \mu\tau o(\rho)] - \|\delta\varphi\| \mu\tau o(\rho) - \|\delta v\| M\mu\tau, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\|\delta\bar{v}^1\| < \|\delta v\| [1 - \mu\tau(a - o(\rho))] + \|\delta\varphi\| \mu\tau o(\rho) + \|\delta\vartheta\| \mu\tau o(\rho),$$

где ради сокращения через  $o(\rho)$  обозначена величина, неограниченно убывающая вместе с убыванием  $\mu + \varepsilon + 1/\tau + \mu\tau$ .

Вид оценок не изменится при изменении входящих в эти оценки коэффициентов на величины порядка  $\mu\tau o(\mu\tau)$ . В силу этого из неравенств (23) для величин  $\delta\bar{\varphi}$ ,  $\delta\bar{\vartheta}$  и  $\delta\bar{v}$  следуют оценки вида

$$\begin{aligned}
 \|\delta\bar{\varphi}\| &> [1 - \mu\tau o(\rho)] \|\delta\varphi\| - M\mu\tau \|\delta\vartheta\| - M\mu\tau \|\delta v\|, \\
 \|\delta\bar{\vartheta}\| &> [1 - \mu\tau o(\rho)] \|\delta\vartheta\| - \mu\tau o(\rho) \|\delta\varphi\| - M\mu\tau \|\delta v\|, \quad (24) \\
 \|\delta\bar{v}\| &< [1 - \mu\tau(a - o(\rho))] \|\delta v\| + \mu\tau o(\rho) (\|\delta\varphi\| + \|\delta v\|).
 \end{aligned}$$

Из найденных оценок (24) следуют требуемые неравенства (7), если в качестве переменной  $\mu$  взять совокупность переменных  $\varphi$  и  $\vartheta$ , приняв, что

$$\|u\| = \|\varphi\| + R\|\vartheta\|, \quad (25)$$

где  $R$  — достаточно большое число.

Действительно, согласно (24) и (25),

$$\|\delta\bar{u}\| > \left[ 1 - \mu\tau \frac{M}{R} - \mu\tau(R+1)o(\rho) \right] \|\delta u\| - \mu\tau M(R+1)\|\delta v\|, \quad (26)$$

$$\|\delta\bar{v}\| < \{1 - \mu\tau[a - o(\rho)]\} \|\delta v\| + \mu\tau o(\rho)\|\delta u\|.$$

Кроме того, непосредственно ясно, что при  $\delta u = 0$  ( $\delta\varphi = 0$  и  $\delta\vartheta = 0$ ) имеет место оценка

$$\|\delta\bar{u}\| < \mu\tau M(R+1)\|\delta v\|. \quad (27)$$

Оценки (26) и (27) совпадают по виду с оценками (7), причем

$$q = 1 - \mu\tau[a - o(\rho)], \quad p = 1 - \mu\tau \left[ \frac{M}{R} + o(\rho)(R+1) \right],$$

$$\alpha = \mu\tau o(\rho), \quad \beta = \gamma = \mu\tau M(R+1).$$

Неравенства (8) при этом принимают вид

$$1 - \mu\tau[a - o(\rho)] + \frac{\mu\tau o(\rho)}{K} + K\mu\tau M(R+1) < 1 - \mu\tau \left[ \frac{M}{R} + o(\rho)(R+1) \right], \quad (28)$$

$$1 - \mu\tau[a - o(\rho)] + K\mu\tau M(R+1) < 1.$$

Неравенства (28) выполняются, если выбраны достаточно большое  $R$ , достаточно малое  $K > 0$ , достаточно малое  $\rho$ , причем при этом выполняется неравенство  $q < p^2$ , являющееся достаточным для гладкости инвариантного тора.

Выполнение второго условия теоремы 1 следует из оценок (7) и (8).

Таким образом, для любого достаточно большого  $\tau$  и достаточно малого  $\mu > 0$ , от него зависящего, существует при  $\|v\| < \varepsilon$  единственная гладкая поверхность  $J(\tau, \mu)$ , инвариантная и устойчивая по отношению к отображению сдвига  $T_\tau$ . Вследствие взаимнооднозначности отображения  $T_\tau$  поверхность  $J(\tau, \mu)$  является инвариантной и единственной по отношению ко всем отображениям  $T_{n\tau}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ).

Выберем достаточно большие рациональные числа  $\tau_1$  и  $\tau_2$  и достаточно малое  $0 < \mu = \mu(\tau_1, \tau_2)$ . Найдутся целые числа  $n$  и  $m$ , такие, что  $n\tau_1 = m\tau_2$ . Следовательно, существует единственная гладкая поверхность  $J$ , инвариантная по отношению ко всем отображениям  $T_\tau$  с рациональными  $\tau$ , и, вследствие непрерывности  $T_\tau$ , с любыми  $\tau$ . Теорема доказана.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu X_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n; t; \mu) \quad (29)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $X_i$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам, кроме того, квазипериодические по  $t$  с частотами  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+m}$ , линейно независимыми в совокупности с  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .

Замена переменных

$$x_i = \rho_i \cos \varphi_i, \quad \dot{x}_i = -\rho_i \omega_i \sin \varphi_i$$

приводит систему (29) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i - \mu \frac{\cos \varphi_i}{\omega_i \rho_i} X_i[\rho_1 \cos \varphi_1, \dots, \rho_n \cos \varphi_n; -\omega_1 \rho_1 \sin \varphi_1, \dots, -\omega_n \rho_n \sin \varphi_n; \\ &\quad \psi_1, \dots, \psi_m; \mu], \\ \dot{\psi}_s &= \omega_{n+s}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= -\mu \frac{\sin \varphi_i}{\omega_i} X_i[\rho_1 \cos \varphi_1, \dots, \rho_n \cos \varphi_n; -\omega_1 \rho_1 \sin \varphi_1, \dots, -\omega_n \rho_n \sin \varphi_n; \\ &\quad \psi_1, \dots, \psi_m; \mu] \\ &(i = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Обозначив  $u = \varphi \oplus \psi$ , можно записать систему (30) в векторной форме

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega + \mu F(u, \rho; \mu), \\ \dot{\rho} &= \mu R(u, \rho; \mu). \end{aligned} \quad (31)$$

Обозначив через  $D(\rho)$  среднее значение по  $u$  функции  $R(u, \rho; 0)$ , представим функцию  $R(u, \rho; \mu)$  в виде

$$R(u, \rho; \mu) = D(\rho) + Q(u, \rho; \mu).$$

Будем предполагать, что существует состояние равновесия  $\rho = \rho^*$  с ненулевыми компонентами следующей системы уравнений:

$$\dot{\rho} = \mu D(\rho), \quad (32)$$

причем корни характеристического уравнения соответствующей линеаризованной системы имеют отрицательные действительные части. Сделав в системе (31) замену  $v = \rho - \rho^*$ , приведем ее к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega + \mu \Phi(u, v; \mu), \\ \dot{v} &= \mu H v + \mu V(u, v; \mu), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $H = \left. \frac{\partial D}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho^*}$  и векторные функции  $\Phi(u, v; \mu)$  и  $V(u, v; \mu)$  удовлетворяют условиям теоремы 1. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** При сделанных предположениях система (29) допускает при малом  $\mu > 0$  в достаточно малой окрестности состояния равновесия «усредненной» системы (32) устойчивое гладкое инвариантное тороидальное многообразие размерности  $n + m$  вида

$$x_i = f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; t; \mu) \cos \varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $f_i$  непрерывные по  $\mu$  и обращающиеся в  $\rho_i^*$  при  $\mu \rightarrow 0$  функции, периодические по переменным  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  с периодом  $2\pi$  и квазипериодические по  $t$  с частотами  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+m}$ .

Будем теперь предполагать, что существует периодическое решение относительно переменной  $\mu t$  системы (32)

$$\rho_i = \chi_i(\mu t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (34)$$

где  $\chi_i$  — дважды непрерывно-дифференцируемые функции и  $|\chi_i(\mu t)| \geq \chi_0 > 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Справедливы следующие тождества:

$$\frac{d\chi_i(\vartheta)}{d\vartheta} \equiv D_i(\chi_1(\vartheta), \chi_2(\vartheta), \dots, \chi_n(\vartheta)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

В достаточно малой окрестности периодического движения введем локальную систему координат [11]

$$\rho_i = \chi_i(\vartheta) + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{is}(\vartheta) w_s \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

После замены переменных (36) уравнения (31) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega + \mu \Phi(u, \vartheta, w; \mu), \\ \dot{\vartheta} &= \mu + \mu \Theta(u, \vartheta, w; \mu), \\ \dot{w} &= \mu B(\vartheta) w + \mu V(u, \vartheta, w; \mu). \end{aligned} \quad (37)$$

Нетрудно видеть, что функции  $\Phi(u, \vartheta, w; \mu)$ ,  $\Theta(u, \vartheta, w; \mu)$  и  $V(u, \vartheta, w; \mu)$  удовлетворяют условиям теоремы 1, а матрица  $B(\vartheta)$  не зависит от вида функции  $Q(u, \rho; \mu)$  и определяется системой (32).

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{X} = \mu B(\mu t) X. \quad (38)$$

Система (38) приводима. Следовательно, существует неособая периодическая матрица  $C(\mu t)$ , такая, что замена  $Y = CX$  преобразует систему (38) в систему с постоянной матрицей

$$\dot{Y} = \mu HY. \quad (39)$$

Периодическое решение (34) системы (32) будет устойчивым, если действительные части собственных значений матрицы  $H$  отрицательны, что и будем предполагать. Нетрудно видеть, что имеет место соотношение

$$HC - \frac{dC}{d(\mu t)} = CB. \quad (40)$$

Произведем в системе (37) замену  $v = C(\vartheta)w$ . Воспользовавшись соотношением (40), получим

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega + \mu \Phi(u, \vartheta, v; \mu), \\ \dot{\vartheta} &= \mu + \mu \Theta(u, \vartheta, v; \mu), \\ \dot{v} &= \mu H v + \mu V(u, \vartheta, v; \mu). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь сохранены прежние обозначения. Система уравнений (41) удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому имеет место следующая теорема.

*Теорема 3.* При сделанных предположениях система (29) допускает при малом  $\mu > 0$  в достаточно малой окрестности периодического движения (34) «усредненной» системы (32) устойчивое гладкое инвариантное тороидальное многообразие размерности  $n + m + 1$  вида

$$x_i = \left[ \chi_i(\vartheta) + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{is}^*(\vartheta) f_s(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \vartheta; t; \mu) \right] \cos \varphi_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где все функции—периодические по переменным  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \vartheta$  с периодом  $2\pi$ ; функции  $f_s$  квазипериодические по  $t$  с частотами  $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \dots, \omega_{n+m}$ , непрерывные по  $\mu$  и обращаются в нуль вместе с  $\mu$ .

Далее, пусть система дифференциальных уравнений (32) допускает семейство квазипериодических решений

$$\rho_i = R_i(\mu t + C_1, \mu t + C_2, \dots, \mu t + C_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (42)$$

зависящее от  $n-1$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ , где функции  $R_i$  дважды непрерывно дифференцируемые по всем аргументам и периодические по аргументам  $\mu t + C_1, \mu t + C_2, \dots, \mu t + C_{n-1}$  с периодами соответственно  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ . Предполагается, что частоты  $\lambda_s = 2\pi/T_s$  линейно независимы над кольцом целых чисел. Семейство (42) образует в фазовом пространстве системы уравнений (32) интегральную тороидальную поверхность  $J^*$ , параметрическое уравнение которой

$$\rho_i = R_i(\lambda_1^{-1} \vartheta_1, \lambda_2^{-1} \vartheta_2, \dots, \lambda_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (43)$$

где  $0 \leq \vartheta_j < 2\pi$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Введем в достаточно малой окрестности тора  $J^*$  новые координаты  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \omega$  согласно формулам

$$\rho_i = R_i(\lambda_1^{-1} \vartheta_1, \lambda_2^{-1} \vartheta_2, \dots, \lambda_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1}) + \alpha_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \omega, \quad (44)$$

где  $(-1)^{i+j} \alpha_i$  — определитель, получаемый вычеркиванием  $i$ -го столбца матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial R_1}{\partial \vartheta_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta_1}, & \dots, & \frac{\partial R_n}{\partial \vartheta_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial R_1}{\partial \vartheta_{n-1}}, & \frac{\partial R_2}{\partial \vartheta_{n-1}}, & \dots, & \frac{\partial R_n}{\partial \vartheta_{n-1}} \end{array} \right\|. \quad (45)$$

При этом предполагается, что ранг матрицы (45) равен  $n-1$ , и поэтому на торе  $J^*$  определено поле векторов  $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , нормальных к его поверхности [9].

В новых переменных  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}, \omega$  уравнения (31) примут вид

$$\dot{u} = \omega] + \mu F(u, \vartheta, \omega; \mu),$$

$$\dot{\vartheta}_j = \mu [\lambda_j + \alpha_j(u, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}) + \omega(\dots)]$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (46)$$

$$\dot{\omega} = \mu \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial \rho_i} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right) \omega +$$

$$+ \mu \alpha_n(u, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}) \omega + \mu \omega^2(\dots),$$

где функции  $\alpha_j(u, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) имеют нулевые средние значения по  $u$ .

В работах [8,9] показано, что по любому  $\bar{\varepsilon} > 0$  можно найти такую функцию  $Z(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1})$ , что замена переменной

$$w = v \exp [Z(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1})]$$

приводит систему (46) к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega + \mu \Phi(u, \vartheta, v; \mu), \\ \dot{\vartheta}_j &= \mu \lambda_j + \mu a_j(u, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}) + \mu v(\dots), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\dot{v} = \mu [\sigma_0 + b(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1})] v + \mu a_n(u, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1}) v + \mu v^2(\dots),$$

где  $|b(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-1})| < \bar{\varepsilon}$  и

$$\sigma_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial D_i}{\partial \rho_i} \right|_{R_s(\xi+C_1, \xi+C_2, \dots, \xi+C_{n-1})} d\xi. \quad (48)$$

Квазипериодические решения (42) системы (32) будут устойчивыми, если  $\sigma_0 < 0$ . В этом случае имеет место следующая теорема.

*Теорема 4.* При сделанных предположениях система (29) допускает при малом  $\mu > 0$  в достаточно малой окрестности инвариантного  $(n-1)$ -мерного тора (43) «усредненной» системы (32) устойчивое гладкое инвариантное тороидальное многообразие размерности  $2n + m - 1$  вида

$$\begin{aligned} x_i &= [R_i(\lambda_i^{-1} \vartheta_1, \dots, \lambda_{n-1}^{-1} \vartheta_{n-1}) + \alpha_i^*(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}) \times \\ &\quad \times f(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}; t; \mu)] \cos \varphi_i \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

где все функции периодические по переменным  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1}$  с периодом  $2\pi$  функция  $f$  квазипериодическая по  $t$  с частотами  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+m}$ , непрерывная по  $\mu$  и обращается в нуль вместе с  $\mu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, 1945.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Тр. симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.
4. Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир, М., 1966.
5. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Журнал вычислительной математики и математической физики, 8, № 2, 251 (1968).
6. В. М. Волосов, сб. Механика в СССР за 50 лет, 1, изд. Наука, М., 1968.
7. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, Институт математики АН УССР, Киев, 1968.
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 311, 321 (1967).
9. А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк, Дифференциальные уравнения, 5, № 5, 824 (1969).
10. Б. М. Левитан, Почти периодические функции, Гостехиздат, М., 1953
11. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М—Л, 1949.



INTEGRAL MANIFOLDS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FAST,  
ROTATING PHASE*A. S. Gurtovnik, Yu. I. Neimark*

Sets of differential equations with fast rotating phase are studied. A new approach to their investigation is suggested. Existence conditions of a stable smooth toroidal integral manifold for sets of differential equations with fast rotating phase are stated using theorems about point mappings invariant manifolds. The obtained results are applied to the loosely coupled oscillators system investigation.

---

УДК 62 — 505 : 51

## ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ю. М. Волин, Г. М. Островский

Рассматривается принцип максимума для систем, описываемых на последовательных интервалах времени различными системами дифференциальных уравнений с заданными условиями в точках стыка, и его применение к задаче, в которой имеются фазовые ограничения. Для последней задачи рассматривается алгоритм численного решения, основанный на применении метода Ньютона.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую оптимальную задачу. Имеется система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с начальным условием

$$\begin{aligned} \frac{dx^k}{dt} &= f^k(x^k, u^k), \quad x^1(t_0) = x^0, \\ x^k &= (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k), \quad u^k = (u_1^k, \dots, u_{m_k}^k), \\ t_{k-1} &\leq t \leq t_k \quad (k=1, \dots, N), \quad t_N = T, \end{aligned} \quad (1)$$

конечными соотношениями

$$R^k(x^k, u^k) \geq 0 \quad (R^k = (R_1^k, \dots, R_r^k)), \quad (2)$$

$$g^k(x^k(t_k - 0)) = 0 \quad (g^k = (g_1^k, \dots, g_{p_k}^k)), \quad (k = 1, \dots, N - 1), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x^{k+1}(t_k + 0) &= G^k(x^k(t_k - 0)) \quad (G^k = (G_1^k, \dots, G_{n_k}^k)), \\ &(k = 1, \dots, N - 1) \end{aligned} \quad (4)$$

и удовлетворяющая краевым условиям

$$\varphi(x^N(T)) = 0 \quad (\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)). \quad (5)$$

Требуется найти моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, N - 1$ ), кусочно-непрерывные управления  $u^k(t)$  и фазовые переменные  $x^k(t)$  ( $k = 1, \dots, N$ ),

для которых выполняются (1) — (5) и величина  $I = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_0^k(x^k, u^k) dt$

достигает максимума.

Функции  $f^k, f_0^k, f_{x^k}^k, f_{0x^k}^k, R^k, R_{x^k}^k, R_{u^k}^k, g^k, g_{x^k}^k, G^k, G_{x^k}^k, \varphi, \varphi_x$  предполагаются непрерывными по совокупности своих аргументов.

Для дальнейшего обозначим через  $u^k(x^k)$  множество всех  $u^k$ , для которых при данном  $x^k$  выполняется (2), и введем в рассмотрение матрицу  $\alpha^k(x^k, u^k)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^k &= 0 \quad (i \neq j), \quad \alpha_{ii}^k = 0 \quad (R_i^k > 0), \\ \alpha_{ii}^k &= 1 \quad (R_i^k = 0), \quad (1 \leq i, j \leq r_k). \end{aligned} \quad (6)$$

Предполагается, что матрица  $\alpha^k R_{u^k}^k$  ( $u^k \in U^k(x^k)$ ) имеет ранг, равный числу нулевых компонент вектора  $R^k$ .

Задачи в такой постановке возникают в химической технологии при оптимизации последовательности адиабатических реакторов с промежуточными теплообменниками или последовательности реакторов с «байпасированием» потока исходной смеси [1, 2]. В [3] подобная задача рассматривалась с точки зрения анализа чувствительности. Ниже для задачи (1)–(5) рассмотрены необходимые условия оптимальности и установлена связь этой задачи с оптимальной задачей для процессов с ограниченными фазовыми координатами. При этом удается уточнить результаты, связанные с условиями скачка и «сильного» максимума функции Понтрягина для граничного интервала оптимальной кривой.

А именно, оказывается, что для граничных интервалов область оптимизации в уравнении принципа максимума зависит от того, к какой точке (схода с ограничения или промежуточной точке) отнесен скачок функций сопряженной системы. Это обстоятельство не отмечалось ранее в литературе.

В последней части статьи рассматривается алгоритм численного решения оптимальной задачи с фазовыми ограничениями, основанный на идеях метода Ньютона.

## 2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Задача (1)–(5) может быть сведена к оптимальной задаче [4], что приводит к следующему результату (см. Приложение).

*Теорема 1.* Если  $u^k(t)$ ,  $x^k(t)$  — решение задачи (1)–(5), то существуют  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $\lambda^k(t)$ , такие, что

$$\frac{d\lambda^k}{dt} = - (H_{x^k}^k + \mu^k \alpha^k R_{x^k}^k) \quad (\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_{r_k}^k)); \quad (7)$$

$$H^k(\lambda_0, \lambda^k, x^k, u^k) = \lambda_0 f_0^k(x^k, u^k) + \lambda^k f^k(x^k, u^k); \quad (8)$$

$$\lambda^N(T) = d \varphi_x \quad (d = (d_1, \dots, d_l)); \quad (9)$$

$$H_{u^k}^k + \mu^k \alpha^k R_{u^k}^k = 0, \quad \mu^k \geq 0; \quad (10)$$

$$\lambda^k(t_k - 0) = \rho^k g_x^k + \lambda^{k+1}(t_k + 0) G_x^k \quad (\rho^k = (\rho_1^k, \dots, \rho_{p_k}^k)), \quad (11)$$

$$(k = 1, \dots, N - 1);$$

$$\lambda_0^2 + \|d\|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \|\rho^k\|^2 > 0; \quad (12)$$

$$H^1 = H^2 = \dots = H^N = \text{const}; \quad (13)$$

$$\dot{H}^k(\lambda_0, \lambda^k(t), x^k(t), u^k(t)) = \max_{u \in U^k(x^k(t))} H^k(\lambda_0, \lambda^k(t), x^k(t), u). \quad (14)$$

Векторы исходной системы  $x$  и  $u$  рассматриваются как векторы-столбцы, а сопряженной  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  — как векторы-строки.

## 3. ЗАДАЧА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Помимо самостоятельного интереса оптимальная задача (1)—(5) интересна и тем, что к ней легко сводится задача с фазовыми ограничениями [5—7], которую сформулируем в следующем виде.

Имеется система, закон движения которой определяется дифференциальным уравнением с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad x(t_0) = x^0 \quad (t_0 \leq t \leq T), \quad (15)$$

краевыми условиями (5) и ограничениями

$$R(x, u) \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad (16)$$

где  $R = (R_1, \dots, R_r)$ , а  $F$  — числовая функция (для простоты ограничимся случаем одного фазового ограничения). Требуется найти кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ , максимизирующее

$$I = \int_{t_0}^T f_0(x, u) dt.$$

Пусть  $\beta(x)$ ,  $P(x, u)$  определяются условиями

$$\beta(x) = 0 \quad (F(x) > 0), \quad \beta(x) = 1 \quad (F(x) \leq 0), \quad (17)$$

$$P(x, u) = F_x f(x, u). \quad (18)$$

Будем предполагать выполнение следующих двух свойств: 1) матрица  $(\alpha R_u, \beta P_u)$  в области  $F(x) \geq 0, R(x, u) \geq 0$  имеет ранг, равный числу ненулевых компонент вектора  $(R, F)$  (свойство регулярности, см. [5]); 2) матрица  $\varphi_x$  всюду имеет максимальный ранг. Из 1) легко вытекает 3):  $F_x \neq 0$  при  $F(x) = 0$ , если существует  $u$ , для которого  $R(x, u) \geq 0$ . Будем говорить, что точка  $t'$  есть точка выхода на ограничение, если существуют  $t'', t'''$  ( $t'' < t' < t'''$ ), такие, что

$$F(x(t)) > 0 \quad (t'' \leq t < t'),$$

$$F(x(t)) = 0 \quad (t' \leq t \leq t''').$$

Если же существуют  $t'', t'''$ , такие, что  $F(x(t'')) = 0, F(x(t)) > 0, (t'' \leq t < t', t' < t \leq t''')$ , то точку  $t'$  будем называть точкой отражения траектории. Аналогичным образом определяется точка схода с ограничения. При сделанных предположениях имеет место следующая теорема, доказательство которой помещено в Приложении.

**Теорема 2.** Если  $u(t), x(t)$  — решение задачи (5), (15), (16), и отрезок  $[t_0, T]$  распадается на конечное число интервалов  $I_1 = [t_0, t_1], \dots, I_N = [t_{N-1}, t_N = T]$  (точки  $t_k$  будем называть точками стыка), на каждом из которых  $\beta(t) = \text{const}$ , то существуют числовая функция  $\lambda_0(t)$ , вектор-функции  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  размерности  $n$  и  $r$  соответственно, числовая функция  $\nu(t)$  и вектор  $d = (d_1, \dots, d_l)$ , для которых справедливы следующие условия:  $\lambda_0(t) = \text{const} = \lambda_0^k$  на  $I_k$ ,  $\lambda(t)$  непрерывна, за исключением, быть может, точек стыка, и удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$\frac{d\lambda}{dt} = -(\lambda^T f_x + \mu \alpha R_x + \nu \beta P_x). \quad (19)$$

где

$$H = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i;$$

с краевыми условиями

$$\lambda(T) = d \varphi_x; \quad (20)$$

выполняются равенства

$$H_u + \mu \alpha R_u + \nu \beta P_u = 0 \quad (\mu \geq 0, \nu \geq 0); \quad (21)$$

на граничных интервалах ( $\beta(x(t)) = 1$ ,  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ ) выполняется условие нетривиальности решения

$$(\lambda_0, \lambda(t)) \neq (0, \gamma F_x); \quad (22)$$

в точках выхода на ограничение или отражения траектории имеет место одно из двух соотношений

$$(\lambda_0^{k+1}, \lambda(t_k + 0)) = (\lambda_0^k, \lambda(t_k - 0)) + (0, \rho_k F_x) \quad (23a)$$

или

$$(\lambda_0^k, \lambda(t_k - 0)) = (0, \gamma F_x); \quad (23b)$$

для констант  $\rho_k$ , определяющих величину скачка функции  $\lambda(t)$ , справедливы неравенства

$$\rho_k \leq 0 \quad (t_k \text{ — точка выхода на ограничение}), \quad (24a)$$

$$\rho_k \geq 0 \quad (t_k \text{ — точка отражения траектории}).$$

причем

$$\rho_k = 0, \quad (24b)$$

если  $t_k$  — точка отражения траектории и

$$P(x(t_k), u(t_k - 0)) = 0$$

или

$$P(x(t_k), u(t_k + 0)) = 0;$$

в точках схода с ограничения имеет место одно из двух соотношений

$$(\lambda_0^{k+1}, \lambda(t_k + 0)) = (\lambda_0^k, \lambda(t_k - 0)) \quad (25a)$$

или

$$(\lambda_0^{k+1}, \lambda(t_k + 0)) = (0, \gamma F_x); \quad (25b)$$

справедливо общее условие нетривиальности решения

$$\lambda_0^2(t) + \|\lambda(t)\|^2 \geq 0 \quad (t_0 \leq t \leq T); \quad (26)$$

выполняется условие максимума функции  $H$ : а) на внутренних интервалах

$$H(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U(x(t))} H(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u), \quad (27)$$

б) на граничных интервалах I рода (граничными интервалами первого рода будем называть граничные интервалы  $I_k$ , для которых  $(\lambda_0^{k-1}, \lambda(t_{k-1} - 0)) \neq (0, \gamma_{k-1} F_x)$ ,  $(\lambda_0^{k+1}, \lambda(t_k + 0)) \neq (0, \gamma_k F_x)$ ,

$$H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u(t)) = \max_{\substack{u \in U(\gamma t) \\ P(x(t), u) > 0}} H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u); \quad (28a)$$

на граничных интервалах II рода (граничными интервалами второго рода будем называть граничные интервалы, для которых  $(\lambda_0^{k-1},$

$$\lambda(t_{k-1} - 0) = (0, \gamma_{k-1} F_x) \text{ или } (\lambda_0^{k+1}, \lambda(t_k + 0)) = (0, \gamma_k F_x)$$

$$H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u(t)) = \max_{\substack{u \in U(x(t)) \\ P(x(t), u) = 0}} H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u); \quad (29)$$

выполняется условие постоянства функции  $H$  для каждого из интервалов  $I_k$ :

$$H(\lambda_0, \lambda(t), x(t), u(t)) = \text{const} \quad (t_{k-1} \leq t \leq t_k); \quad (30)$$

если среди интервалов  $I_{k-1}, I_k$  нет граничных интервалов II рода, то выполняются равенства

$$H_{k-1} = H_k, \quad \lambda_0^{k-1} = \lambda_0^k, \quad (31)$$

где  $H_k$  — общая для всех  $t$  величина  $H$  на  $I_k$ .

**З а м е ч а н и е 1.** В теореме 2 условие скачка (23 а) отнесено к точке выхода на ограничение. Можно отнести его к точке схода с ограничения, а в точке выхода на ограничение предполагать непрерывность  $(\lambda_0, \lambda)$  (или выполнение (23 б)). Тогда условие (28 а) заменится следующим (см. Приложение):

$$H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u(t)) = \max_{\substack{u \in U(x(t)) \\ P(x(t), u) < 0}} H(\lambda_0^k, \lambda(t), x(t), u). \quad (28б)$$

Наконец, можно относить скачок (23 а) к любой промежуточной точке  $\tilde{t}_k$  интервала  $I_k$ :  $t_{k-1} < \tilde{t}_k < t_k$ . В этом случае будет иметь место (28 б) при  $t_{k-1} \leq t < \tilde{t}_k$  и (28 а) при  $\tilde{t}_k < t \leq t_k$ .

В [6] в этом отношении имеется существенная неточность, поскольку утверждается, что скачок может быть отнесен к любой точке граничного интервала и при этом сохраняется условие (28 а). В [5] рассматриваются лишь условия «слабого» максимума (29), а не «сильного» (28 а).

**З а м е ч а н и е 2.** В нормальном случае  $\lambda_0 = \text{const} > 0$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ) и все граничные интервалы являются интервалом I рода.

#### 4. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Дополним полученные выше результаты рассмотрением одного алгоритма численного решения задачи с фазовыми ограничениями. Будем при этом предполагать нормальность задачи (и считать  $\lambda_0 = 1$ ), которая, по-видимому, является наиболее частым случаем в приложениях. Рассматриваемый алгоритм основан на применении метода Ньютона по начальным данным [8] к краевой задаче (5), (15), (19) — (21), (23 а), (25 а), (27), (28 а), (31).

Ранее в литературе метод Ньютона рассматривался применительно к оптимальной задаче без ограничений на управления [8, 9], либо при наличии ограничений на управления, но без фазовых ограничений [10].

В данном случае роль начальных данных, подлежащих определению, будут играть  $\lambda^0 = \lambda(t_0)$ ,  $\rho = (\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_s})$ , где  $\rho_{i_s}$  — величина скачка в  $s$ -й точке выхода на ограничение или отражения траектории. Предположим, что при заранее выбранном достаточно большом  $v$  каждый такой набор однозначно определяет  $u(t), x(t), \lambda(t), \mu(t), v(t)$  (при этом условимся считать  $\mu_i(t) = 0$ , если  $R_i(x(t), u(t)) > 0$ , и  $v(t) = 0$ , если  $P(x(t), u(t)) > 0$ ), удовлетворяющие (15), (16), (19), (21), (23 а), (25 а), (27), (28 а) и (31) (в точках схода с ограничения). Это предположение отвечает условию отсутствия у системы (15), (19) особых решений. Остановимся на условии (31). При интегрировании

системы (15), (19) точки выхода на ограничение определяются непосредственно. Более сложно обстоит дело с определением точек схода. В [11] для этих целей предлагается использовать поисковую процедуру. Условие (31) совместно с условиями (27), (28 а) фактически позволяет непосредственно определять точки схода с ограничения (при заданных  $\lambda^0, \rho$ ), как такие точки, в которых (28 а) переходит в (27). При сделанных предположениях  $x(t), \lambda(t)$  становятся функциями  $\lambda^0, \rho$ . Причем для определения неизвестных величин  $\lambda^0, \rho$  имеется адекватное количество условий (5), (20) и (31 а) (для точек  $t'_k$  — точки выхода на ограничение или отражения траектории).

Рассмотрим систему уравнений в вариациях, соответствующую системе (15), (19), (21), (23 а). На интервалах непрерывности управления  $u(t)$

$$\frac{d \delta z}{dt} = r_z \delta z + r_u \delta u + r_\mu \delta \mu^T + \delta v r, \quad (32)$$

где

$$z = (x, \lambda^T), \quad r = (f, - (H_x + \mu \alpha R_x + \nu \beta P_x)^T);$$

$$\delta z^T (H_{zu} + \mu \alpha R_{zu} + \nu \beta F_{zu}) + \delta u^T (H_{uu} + \mu \alpha R_{uu} + \nu \beta P_{uu}) + \delta \mu \alpha R_u + \delta \nu \beta P_u = 0; \quad (33)$$

$$\alpha (R_x \delta_x + R_u \delta_u) = 0, \quad \beta (P_x \delta_x + P_u \delta_u) = 0. \quad (34)$$

Верхний индекс «Т» означает, что берется вектор, транспонированный к исходному. Условия (33), (34) позволяют, вообще говоря, определить  $\delta u$  как функцию  $\delta z$ :

$$\delta u = A(t) \delta z. \quad (35)$$

В точках разрыва управления  $u(t)$ , (кроме точек  $t'_k$ )

$$\delta z^+ = \delta z^- + [r(z, u^-) - r(z, u^+)] \delta t, \quad (36)$$

$$\delta t = \frac{(H_z^+ + H_u^+ A^+ - H_z^- - H_u^- A^-) \delta z^-}{(H_z^- + H_u^- A^- - H_z^+ - H_u^+ A^+) r(z, u^-)}, \quad (37)$$

где  $u^- = u(t-0)$ ,  $u^+ = u(t+0)$ .

Тот же смысл имеют остальные обозначения этого вида. В точках  $t'_k$  (предполагая общий случай — траектория выходит на ограничение под углом к нему)

$$\tilde{\delta z}^+ = \delta z^- + [r(z, u^-) - r(z, u^+)] \delta t'_k,$$

$$\delta x^+ = \tilde{\delta x}^+, \quad (38)$$

$$\delta \lambda^+ = \tilde{\delta \lambda}^+ + \rho_k [\delta x^- + f(x, u^-) \delta t'_k]^T F_{xx} + \delta \rho_k F_x;$$

$$\delta t'_k = - \frac{F_x \delta x^-}{F_x f(x, u^-)}. \quad (39)$$

Доказательство формул (37) — (39) дано в Приложении. Система (32) — (39) должна решаться при краевых условиях

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \lambda(T) + \delta \lambda(T) = d[\varphi_x + \varphi_{xx} \delta x(T)] \quad (40)$$

и условиях для точек  $t'_k$

$$\delta t'_k = [(H_z^+ + H_u^+ A^+ - H_z^- - H_u^- A^-) \delta z^- + \delta \rho_k P^+ + \rho_k (P_x^+ + P_u^+ A^+) \delta x^- + H^+ - H^- + P^+] [(H_z^- + H_u^- A^- - H_z^+ - H_u^+ A^+) r(z^-, u^-) - \rho_k (P_x^+ + P_u^+ A^+) f(x, u^-)]^{-1}. \quad (41)$$

В случае, если  $t'_k$  — точка выхода на ограничение (а не точка отражения траектории),  $P(x(t'_k), u(t'_k + 0)) = 0$  и выражение (41) несколько упрощается:

$$\delta t'_k = \frac{(H_z^+ + H_u^+ A^+ - H_z^- - H_u^- A^-) \delta z^- + H^+ - H^-}{(H_z^- + H_u^- A^- - H_z^+ - H_u^+ A^+) r(z^-, u^-)}. \quad (42)$$

Доказательство формул (41), (42) дано в Приложении.

Решение системы (32)—(39) с краевыми и промежуточными условиями (40), (41), (42) означает, что в окрестности данной кривой  $u(t), x(t)$  решается оптимальная задача для системы (15), взятой в линейном приближении, с максимизируемым функционалом, взятым в квадратном приближении [9].

Новое приближение  $\tilde{\lambda}^0, \tilde{\rho}$  теперь определится по формулам

$$\tilde{\lambda}^0 = \lambda^0 + \delta \lambda^0, \quad \tilde{\rho} = \rho + \delta \rho. \quad (43)$$

Как известно, метод Ньютона сходится с быстротой геометрической прогрессии, если начальное приближение выбрано достаточно хорошим [12]. Поэтому алгоритм метода Ньютона целесообразно сочетать с каким-нибудь другим алгоритмом (например, градиентного типа), используемым для «грубого» решения задачи, позволяющим получить хорошее начальное приближение для метода Ньютона.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство теоремы 1.** Для каждого из интервалов  $[t_{k-1}, t_k]$  сделаем замену независимой переменной  $t$  по формуле

$$t = z^k \tau, \quad z^k > 0 \quad (k = 1, \dots, N), \quad (П.1)$$

где  $z^k = t_k - t_{k-1}$ , и введем дополнительно переменные  $x_{n_k+1}^k, \dots, x_{2n_k}^k$ . Легко видеть, что задача (1)—(5) эквивалентна следующей оптимальной задаче:

$$\frac{dx^k}{d\tau} = z^k f^k(x^k, u^k) \quad (0 \leq \tau \leq 1); \quad (П.2)$$

$$\frac{dx_i^k}{d\tau} = 0 \quad (0 \leq \tau \leq 1; i = n_k + 1, \dots, 2n_k), \quad (П.3)$$

$$\frac{dz^k}{d\tau} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^N z^k(1) = T; \quad (П.4)$$

$$g^k(x^k(1)) = 0 \quad (k = 1, \dots, N - 1); \quad (П.5)$$

$$x^1(0) = x^0, \quad \varphi(x^N(1)) = 0; \quad (П.6)$$



$$x_{n_{k+1}}^k(0) = x_i^k(0) \quad (i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N); \quad (\text{П.7})$$

$$x_{n_{k+1}+i}^{k+1}(1) = G_i^k(x^k(1)) \quad (i=1, \dots, n_{k+1}; k=1, \dots, N-1); \quad (\text{П.8})$$

$$R^k(x^k, u^k) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, N); \quad (\text{П.9})$$

$$I = \int_0^1 \sum_{k=1}^N z^k f_0^k(x^k, u^k) d\tau = \max. \quad (\text{П.10})$$

Задача (П.2)—(П.10) отличается от оптимальной задачи [5] наличием фазовых переменных в ограничениях (П.9). В [4], однако, было показано, что и в этом случае имеет место принцип максимума при видоизмененной форме уравнений сопряженной системы

$$\frac{d\lambda^k}{d\tau} = -(\bar{H}_{x^k}^k + \bar{\mu}^k \alpha^k R_{x^k}^k),$$

$$\frac{d\nu^k}{d\tau} = -H^k, \quad (\text{П.11})$$

$$\frac{d\lambda_{n_{k+1}+i}^k}{d\tau} = 0 \quad (i = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, N);$$

$$\bar{H}^k = z^k(\lambda_0 f_0^k + \lambda^k f^k) = z^k H^k. \quad (\text{П.12})$$

Условия трансверсальности, максимума  $\bar{H}^k$  и нетривиальности решения имеют при этом следующий вид:

$$\lambda^N(1) = d\varphi_x;$$

$$\lambda^k(1) = \rho^k g_x^k + e^k G_x^k, \quad (\text{П.13})$$

$$\lambda_{n_{k+1}+i}^{k+1} = -e_i^k \quad (i=1, \dots, n_{k+1}; k=1, \dots, N-1); \quad (\text{П.14})$$

$$\lambda_{n_k+i}^k(0) = \nu_i^k, \quad (\text{П.15})$$

$$\lambda_i^k(0) = -\nu_i^k \quad (i = 1, \dots, n_k; k=1, \dots, N);$$

$$\nu^k(0) = 0, \quad \nu^k(1) = 0 \quad (k = 1, \dots, N); \quad (\text{П.16})$$

$$\bar{H}_{u^k}^k + \bar{\mu}^k \alpha^k P_{u^k} = 0, \quad \bar{\mu}^k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, N); \quad (\text{П.17})$$

$$H^k(\lambda_0, \lambda^k(\tau), x^k(\tau), u^k(\tau)) = \max_{u \in U^k(x^k(\tau))} H(\lambda_0, \lambda^k(\tau), x^k(\tau), u); \quad (\text{П.18})$$

$$\lambda_0^2 + \|d\|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \|\rho^k\|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \|e^k\|^2 + \sum_{k=1}^N \|\nu^k\|^2 + a^2 > 0. \quad (\text{П.19})$$

Сделав теперь для каждого из интервалов  $[t_{k-1}, t_k]$  обратную замену независимой переменной ( $\tau = t/z^k$ ) и введя обозначение  $\mu^k = \bar{\mu}^k/z^k$ , получим условия (7)—(11), (14), (П.19) и условия

$$\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} H^k dt = a \quad (k = 1, \dots, N). \quad (\text{П.20})$$

Легко видеть также, что из (П.19) следует (12).

Нам осталось доказать условие (13). Поступим следующим образом. Рассмотрим разбиения  $A_s = \{t_k^s, k = 1, \dots, N_s\}$  отрезка  $[t_0, T]$ , такие, что точки  $t_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) входят в каждое из этих разбиений и

$$\max_{1 < k < N_s} (t_k^s - t_{k-1}^s) \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

Для точек  $t_k^s$ , отличных от  $t_k$ , условия (3) отсутствуют, а условия (4) выглядят следующим образом:  $x(t_k^s + 0) = x(t_k^s - 0)$ . Применяя к разбиению  $A_s$  доказанные результаты, имеем  $\lambda_0^s, d^s, (\rho^1)^s, \dots, (\rho^{N-1})^s, a^s$  и определяемую ими вектор-функцию  $\lambda^s(t)$ , для которых выполняются все утверждения теоремы 1, за исключением, быть может, (13). Можно предположить при этом, что вектор  $(\lambda_0^s, d^s, (\rho^1)^s, \dots, \rho^{N-1})^s, a^s)$  нормирован. В силу компактности шара в конечно-мерном пространстве существует подпоследовательность  $\{t_k^{i_s}\}$ , для которой

$$(\lambda_0^{i_s}, d^{i_s}, (\rho^1)^{i_s}, \dots, (\rho^{N-1})^{i_s}, a^{i_s}) \rightarrow (\lambda^0, d, \rho^1, \dots, \rho^{N-1}, a).$$

Тогда по непрерывности для  $(\lambda_0, d, \rho^1, \dots, \rho^{N-1}, a)$  и соответствующего  $\lambda(t)$  выполняются (7)–(12), (14) и в силу (П.20), стремления к нулю длин интервалов  $I_k^s$  и кусочной непрерывности  $H^k$  условие (13).

Справедлив и несколько более сильный результат, для любых  $\lambda_0, \lambda(t)$ , удовлетворяющих (7), (14), на интервале  $(t_{k-1}, t_k)$   $H^k = \text{const.}$  Этот результат доказывается по типу доказательства леммы 7 [5] с учетом замечаний [6].

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $u(t), x(t)$  — оптимальные управления и траектории. Обозначим через  $t_k'$  точки выхода на ограничение и точки отражения траектории и рассмотрим задачу (1)–(5) с уравнением (15) в качестве (1),  $R(x, u)$  в качестве  $R^k(x^k, u^k)$  на внутренних интервалах,  $(R(x, u), P(x, u))$  в качестве  $R^k(x^k, u^k)$  на граничных интервалах, условиями  $F(x(t_k')) = 0$  в качестве условий (3) и условиями  $x(t_k' + 0) = x(t_k' - 0)$  в качестве условий (4). Будем называть эту задачу вспомогательной оптимальной задачей.

Применяя к вспомогательной оптимальной задаче теорему 1, получим (19), (20), (21), (27), (28 а), (31) для всех  $k$ , условия скачка (23 а) в точках  $t_k'$  (при всех других  $t$   $\lambda(t)$  непрерывна) и условие нетривиальности

$$\lambda_0^2 + \|d\|^2 + \sum_k \rho_k^2 > 0. \quad (\text{П.21})$$

Покажем, что выполняется также (24). Пусть  $P(x(t_k'), u(t_k' + 0)) > 0$  (точка  $t_k'$  в этом случае, как легко видеть, является точкой отражения траектории). Имеем с учетом равенства

$$\lambda(t_k' + 0) = \lambda(t_k' - 0) + \rho_k F_x(x(t_k'))$$

(см. (28 а)) и условий (31):

$$H(\lambda_0, \lambda(t_k' + 0), x(t_k'), u(t_k' + 0)) = H(\lambda_0, \lambda(t_k' - 0), x(t_k'), u(t_k' + 0)) + \\ + \rho_k P(x(t_k'), u(t_k' + 0)) = H(\lambda_0, \lambda(t_k' - 0), x(t_k'), u(t_k' - 0)). \quad (\text{П.22})$$

Если  $\rho_k < 0$ , то

$$H(\lambda_0, \lambda(t_k' - 0), x(t_k'), u(t_k' + 0)) > H(\lambda_0, \lambda(t_k' - 0), x(t_k'), u(t_k' - 0)),$$

что противоречит (27).

Пусть теперь  $P(x(t'_k), u(t'_k + 0)) = 0$ . Имеем

$$H(\lambda_0, \lambda(t'_k - 0), x(t'_k); u) = H(\lambda_0, \lambda(t'_k + 0), x(t'_k), u) - \rho_k P(x(t'_k), u) \quad (\text{П.23})$$

$$\begin{aligned} \text{и} \\ H(\lambda_0, \lambda(t'_k - 0), x(t'_k), u(t'_k + 0)) = H(\lambda_0, \lambda(t'_k + 0), x(t'_k), u(t'_k + 0)) = \\ = H(\lambda_0, \lambda(t'_k - 0), x(t'_k), H(t'_k - 0)). \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Уравнения

$$\begin{aligned} \alpha R &= 0, \\ P &= \theta \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

В силу невырожденности определителя (условие 1)) определяют в окрестности нуля вектор-функцию  $u(\theta)$ , для которой  $u(0) = u(t'_k + 0)$  и выполнено (П.25). Обозначим

$$H(\lambda_0, \lambda(t'_k - 0), x(t'_k), u(\theta)) = H'(\theta),$$

$$H(\lambda_0, \lambda(t'_k + 0), x(t'_k), u(\theta)) = H''(\theta),$$

$$P(x(t'_k), u(\theta)) = P(\theta).$$

Равенство (П.23) может быть переписано следующим образом:

$$H'(\theta) = H''(\theta) - \rho_k P(\theta). \quad (\text{П.26})$$

При  $\theta > 0$   $P(\theta) > 0$  и в силу (28 а)

$$\left. \frac{dH''}{d\theta} \right|_{\theta=0} \leq 0.$$

Из (П.25) непосредственно следует также, что

$$\left. \frac{dP}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 1.$$

Отсюда очевидно, что при  $\rho_k > 0$   $H'(\theta)$  возрастает с убыванием  $\theta$  при  $\theta < 0$  и при малых отрицательных  $\theta$

$$H'(\theta) > H'(0) = H(\lambda_0, \lambda(t'_k - 0), x(t'_k), u(t'_k - 0)),$$

что противоречит (27).

Если при этом  $t'_k$  есть точка отражения траектории, то

$$\left. \frac{dH''}{d\theta} \right|_{\theta=1} = 0 \quad \text{в силу (27), и для выполнения неравенства } H'(\theta) \leq H'(0)$$

при малых  $\theta$  необходимо, чтобы  $\rho_k = 0$ .

Пусть, наконец,  $P(x(t'_k), u(t'_k - 0)) = 0$ . Аналогично предыдущему мы получаем

$$H''(\theta) = H'(\theta) + \rho_k P(\theta), \quad (\text{П.27})$$

где на этот раз

$$u(0) = u(t'_k - 0), \quad \left. \frac{dH'}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0$$

в силу (27). Если  $\rho_k > 0$ , то при малых положительных  $\theta$

$$H''(\theta) > H''(0) = H(\lambda_0, \lambda(t'_k + 0), x(t'_k), u(t'_k + 0)),$$

и  $P(\theta) = P(x(t'_k), u(\theta)) > 0$ ,

что противоречит (28 а). Следовательно,  $\rho_k \leq 0$ . Если  $t'_k$  есть точка отражения траектории, то одновременно должно выполняться  $\rho_k \geq 0$  (см. выше). Поэтому и в этом случае  $\rho_k = 0$ .

На некоторых  $I_k$  может быть  $(\lambda_0, \lambda) = 0$ , но хотя бы на одном  $I_k$  выполнено (26), так как в противном случае в силу условий 2), 3), (20) и (23 а) имело бы также место  $d = 0, \rho_k = 0$ , что противоречит (П.21).

Пусть на  $I_i, \dots, I_j$   $(\lambda_0, \lambda) = 0$ , а на  $I_{i-1}, I_{j+1}$  выполнено (26) (либо  $i = 1, j = N$ ). Тогда в силу (23 а)  $(\lambda_0, \lambda(t_{i-1} - 0)) = (0, \gamma_{i-1} F_x)$ ,  $(\lambda_0, \lambda(t_j + 0)) = (0, \gamma_j F_x)$ . Применив теперь к интервалу  $[t_i, t_j]$  теорему 1, получим для этого интервала новые  $(\lambda_0, \lambda)$ , причем хотя бы для одного  $I_k \subset [t_i, t_j]$  выполнено (26).

Поступая далее таким же образом, получим через конечное число шагов  $(\lambda_0, \lambda)$ , для которых выполняются все условия теоремы 2, за исключением, быть может, (22). Пусть для  $I_k$  в какой-либо точке  $(\lambda_0^k, \lambda(t)) = (0, \gamma F_x(x(t)))$ . Легко видеть (см. [5, 6]), что  $(0, \gamma F_x)$  удовлетворяет (19, 21) (при  $\mu = 0$ ). А отсюда, в силу единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений,  $(\lambda_0^k, \lambda(t)) = (0, \gamma F_x)$ . Для такого интервала поступим следующим образом. В силу 3)  $F_x(x(t)) \neq 0$  на  $I_k$ . Поэтому  $I_k$ , как легко показать, можно разбить на примыкающие друг к другу интервалы  $I_{k1}, \dots, I_{km}$ , такие, что на каждом  $I_{ks}$  ( $I_{ks} = [t_{k, s-1}, t_{ks}]$ ) можно выразить (с помощью  $F = 0$ )  $x_{i_{sn}}$  через  $x_{i_{s1}}, \dots, x_{i_{s, n-1}}$ . Будем рассматривать для  $I_k$  вместо (15) системы

$$\frac{dx_{i_{sj}}}{dt} = f_{i_{sj}}(x_{i_{s1}}, \dots, x_{i_{s, n-1}}, x_{i_{sn}}(x_{i_{s1}}, \dots, x_{i_{s, n-1}}), u) \quad (\text{П.28})$$

$$(t \in I_{ks}, j = 1, \dots, n-1)$$

и уравнения непрерывности для  $x_i$  в точках  $t_{ks}$  ( $s = 1, \dots, m-1$ ). Если теперь воспользоваться теоремой 1, то получим для  $I_k$  новые  $(\lambda_0, \lambda(t))$ , для которых будет выполнено (22), но условие максимума (28 а) заменится условием (29).

Для завершения доказательства теоремы нужно было бы показать что  $u(t), x(t)$  действительно является решением вспомогательной оптимальной задачи. Вообще говоря, это не так, поскольку могут существовать  $u(t), x(t)$ , удовлетворяющие условию вспомогательной оптимальной задачи и не удовлетворяющие условию  $F(x) \geq 0$ . Последнее условие обязательно выполняется на граничных интервалах, но может нарушаться на внутренних интервалах вблизи точек стыка. Однако при выводе необходимых условий оптимальности, как легко видеть, достаточно, чтобы  $u(t), x(t)$  были оптимальны «в малом» [5, 7] (т. е. доставляли  $\max I$  по сравнению со всеми близкими траекториями:  $|x(t) - x(t)| < \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ ). Учитывая это обстоятельство, поступим следующим образом.

Введем дополнительные точки разбиения траектории  $\tau'_k, \tau''_k: \tau'_k = t_k - \varepsilon$  (если  $t_k$  — точка выхода на ограничение или точка отражения траектории),  $\tau''_k = t_k + \varepsilon_1$  (если  $t_k$  — точка схода с ограничением или точка отражения траектории). Для интервалов  $[\tau'_k, t_k]$  будем рассматривать ограничения

$$R(x, u) \geq 0, \quad -P(x, u) \geq 0, \quad (\text{П.29})$$

а для интервалов  $[t_k, \tau''_k]$  — ограничения

$$R(x, u) \geq 0, \quad P(x, u) \geq 0. \quad (\text{П.30})$$

Пусть

$$\tilde{\varepsilon}_k = \min_{\tau''_{k-1} < t < \tau'_k} F(x(t)), \quad (\text{П.31})$$

$I_k$  — внутренний интервал и

$$\varepsilon = \min_k \tilde{\varepsilon}_k. \quad (\text{П.32})$$

В силу непрерывности  $x(t)$  и замкнутости  $[\tau''_{k-1}, \tau'_k]$ ,  $\tilde{\varepsilon}_k > 0$  и, следовательно,  $\varepsilon > 0$ . Задачу с условиями (П.29), (П.30) на интервалах  $[\tau'_k, t_k]$ ,  $[t_k, \tau''_k]$  будем называть модифицированной вспомогательной задачей. Для этой задачи по доказанному существуют

$$\lambda_0^k(\varepsilon_1), \lambda(t, \varepsilon_1), \rho_k(\varepsilon_1), d(\varepsilon_1),$$

для которых выполнены все условия теоремы 2, за исключением, быть может, (27) на интервалах  $(\tau'_k, t_k)$ ,  $(t_k, \tau''_k)$ . Очевидно, что  $\lambda(t, \varepsilon_1)$  определяется  $\lambda_0^k(\varepsilon_1)$ ,  $\rho_k(\varepsilon_1)$ ,  $d(\varepsilon_1)$ . Можно предполагать при этом вектор  $(\lambda_0^k, \rho_k, d; k = 1, \dots, N)$  нормированным.

Если теперь устремить  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  и воспользоваться теоремой о компактности сферы в конечномерном пространстве, то получим предельные значения  $\lambda_0^k, \rho_k, d$ , определяющие  $\lambda(t)$ , для которых по непрерывности выполнены все условия теоремы 2.

Для получения (28 б) надо рассмотреть задачу, в которой на граничных интервалах фигурирует  $(R(x, u), -P(x, u))$  в качестве  $R^k(x, u)$ , а в качестве (3) фигурируют условия  $F(x, t_k) = 0$  для точек схода с ограничения или точек отражения траектории. Если (3) отнесено к точке  $\tilde{t}_k: t_{k-1} < \tilde{t}_k < t_k$ , то для интервала  $(t_{k-1}, \tilde{t}_k)$  надо брать в качестве  $R^k(x, u)$  величину  $(R(x, u), -P(x, u))$ , а для  $(\tilde{t}_k, t_k)$  величину  $(R(x, u), P(x, u))$ :

**Доказательство формул (37)–(39), (41).** Пусть  $t + \delta t$  — точка переключения управления, соответствующая проварьированной траектории. Имеем

$$H(z + dz, u^- + du^-) = H(z + dz, u^+ + du^+). \quad (\text{П.33})$$

Разлагая (П.33) в ряд Тейлора, ограничиваясь членами линейного приближения, подставляя в полученное выражение

$$dz = \delta z^- + r(z, u^-) \delta t, \quad du^- = A^- dz, \quad du^+ = A^+ dz$$

и учитывая равенство  $H(z, u^-) = H(z, u^+)$ , получим (37).

Далее имеем для точки  $t'_k + \delta t'_k$  на проварьированной траектории

$$F(x(t'_k) + dx) = 0. \quad (\text{П.34})$$

Поступая аналогично предыдущему, получим (39). Формулы (38) легко получаются варьированием условия скачка (23 а) с учетом смещения  $t'_k$  на  $\delta t'_k$ .

Получим теперь формулу (41). В силу (31)

$$\begin{aligned} H(\lambda(t'_k - 0), x(t'_k), u(t'_k - 0)) &= H(\lambda(t'_k + 0), x(t'_k), u(t'_k + 0)) = \\ &= H(\lambda(t'_k - 0), x(t'_k), u(t'_k + 0)) + \rho_k P(x(t'_k), u(t'_k + 0)). \end{aligned}$$

Рассмотрим это равенство на проварьированной траектории:

$$\begin{aligned} & H(z^- + dz', u^- + du^-) = \\ & = H(z^- + dz^-, u^+ + du^+) + \rho_k P(x(t_k) + dx, u^+ + du^+). \end{aligned}$$

Разложив все члены полученного равенства в ряд Тейлора и ограничившись линейными членами, после подстановки

$$\begin{aligned} dz &= \delta z^- + r(z^-, u^-) \delta t_k', \\ dx &= \delta x^- + f(x, u^-) \delta t_k' \end{aligned}$$

получим (41).

Формула (42) является простым следствием (41).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Арис, Оптимальное проектирование химических реакторов, ИЛ, М., 1963.
2. Г. М. Островский, Ю. М. Волин, сб. Всесоюзная конференция по химическим реактивам, Новосибирск, 1965, стр. 339.
3. Е. Н. Розенwasser, Автоматика и телемеханика, № 3, стр. 52 (1967).
4. L. D. Berkovitz, J. Math. Anal. Appl., 3, № 1, 145 (1961).
5. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
6. В. П. Аноров, Автоматика и телемеханика, № 3, стр. 5 (1967).
7. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журнал вычислительной математики и математической физики, 5, № 3, стр. 395 (1965).
8. В. К. Исаев, В. В. Сонин, Журнал вычислительной математики и математической физики, 5, № 2, стр. 252 (1965).
9. J. V. Breakwell, J. L. Speyer, A. E. Bryson, J. Control Society for Industr. Appl. Math., ser. A, 1, № 2, 193 (1963).
10. Г. М. Островский, Ю. М. Волин, Техническая кибернетика, № 2, стр. 174 (1968).
11. А. Е. Брайсон, В. Ф. Денкам, Ракетная техника и космонавтика, № 1, стр. 34 (1964).
12. В. Е. Шаманский, Методы численного решения краевых задач, изд. АН УССР, Киев, 1963.

Научно-исследовательский  
физико-химический институт

Поступила в редакцию  
23 мая 1969 г.

#### MAXIMUM PRINCIPLE FOR DISCONTINUOUS SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO PROBLEMS WITH PHASE LIMITATIONS

*Yu. M. Volin, G. M. Ostrovsky*

The article treats the maximum principle for systems describable by various sets of differential equations in consecutive time intervals with given conditions in junction points and its application to the problem having phase limitations. For the latter problem a numerical solution algorithm based on the Newton method is considered.

УДК 62 — 505 : 51

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*М. И. Гордион, В. И. Плотников*

Рассматривается задача минимизации функционала вдоль траекторий обыкновенного векторного дифференциального уравнения при наличии ограничений на фазовые координаты типа многообразий с краем. Выводятся условия оптимальности управлений в классе измеримых ограниченных функций в форме принципа минимума.

В данной работе исследуется задача оптимального управления системой, описываемой при помощи обыкновенного векторного дифференцированного уравнения, с ограничениями на фазовые координаты в заданные, фиксированные моменты времени и ограничениями изопериметрического вида. Для этой задачи доказываются необходимые условия оптимальности в форме принципа минимума. Причем методика доказательства основных утверждений статьи отлична от известной (см., например, [1<sup>-4</sup>]), что позволяет расширить класс задач и считать, например, что многообразия, по которым скользят значения  $x_u(t_p)$ , являются ненулевыми многообразиями с краем. Такое расширение, безусловно, полезно для приложений. Данная методика также позволяет решать оптимальные задачи для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с недифференцируемой зависимостью правых частей от временного параметра.

### 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

где  $f$  — непрерывная по совокупности  $(x, u)$ , измеримая по  $t$  и непрерывно-дифференцируемая по  $x$  функция. Здесь  $x \in R^n$ . Будем считать, что зависимость  $f$  от  $t$  такова, что выполняются теоремы существования и единственности решения (1) в смысле Каратеодори при любой измеримой  $u(t)$  со значениями из некоторой ограниченной области  $U \subset R^r$  в некотором интервале  $(0, T)$ , зависящем, вообще говоря, от функции управления  $u(t)$ . Оптимальная задача состоит в переводе точки  $x_0$ , принадлежащей гладкому многообразию с краем, определяемому как пересечение множеств

$$E_n^i = \{x: r_n^i(x) = 0\} \quad (i = 1, \dots, n_1),$$

$$B_n^j = \{x: g_n^j(x) \leq 0\} \quad (j = 1, \dots, m_1),$$

в точку, принадлежащую многообразию такого же типа

$$E_k^i = \{x: r_k^i(x) = 0\} \quad (i = n_1 + 1, \dots, n_2),$$

$$B_k^j = \{x: g_k^j(x) \leq 0\} \quad (j = m_1 + 1, \dots, m_2),$$

по траектории системы (1) так, чтобы минимизировать функционал вида

$$J(u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(x(s), u(s); s), ds,$$

где  $T$  — конечный момент времени процесса — считаем фиксированным. Здесь  $g$  — непрерывно-дифференцируемая функция, а  $f_0$  удовлетворяет тем же условиям, что и компоненты вектора  $f$ . На траекторию системы (1) накладываются, кроме граничных, следующие ограничения. Зафиксируем некоторое конечное число моментов времени  $t_p$  ( $0 < t_p < T$ ). Каждому  $p$  поставим в соответствие набор соотношений типа равенств и неравенств.

$$P_k^p(x) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, k_p),$$

$$L_q^p(x) = 0 \quad (q = 1, \dots, q_p), \quad p = 1, \dots, \bar{p},$$

определяющих при каждом  $p$  некоторое многообразие с краем. Потребуем далее, чтобы в моменты  $t_p$  выполнялись соотношения

$$P_k^p(x_u(t_p)) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, k_p),$$

$$L_q^p(x_u(t_p)) = 0 \quad (q = 1, \dots, q_p),$$

где  $x_u(t_p)$  — решение системы (1) в момент  $t_p$ .

Кроме того, предположим, что выполняются ограничения изопериметрического типа

$$H_\alpha = \int_{\Delta_\alpha} h_\alpha(x(s), u(s), s) ds = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \alpha_1),$$

$$H_\beta = \int_{\Delta_\beta} h_\beta(x(s), u(s), s) ds \leq 0 \quad (\beta = 1, \dots, \beta_1).$$

Градиенты функций  $r_n^i, r_k^i, P_k^p, L_q^p, h_\alpha, h_\beta$  существуют, отличны от нуля и удовлетворяют соответственно тем же свойствам непрерывности, что и сами функции;  $\{\Delta_\alpha\}$  и  $\{\Delta_\beta\}$  — некоторые фиксированные наборы интервалов из  $(0, T)$ .

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для вывода необходимых условий в виде принципа минимума нужно сравнить значения функционалов задачи вдоль оптимальной и варьированной траекторий, являющихся решениями системы (1) при оптимальном управлении  $u(t)$  и оптимальном  $x_0 = x(0)$  и варьированном управлении  $u_\varepsilon(t)$  и начальном условии  $x_0 + \varepsilon \xi_0$  соответственно. Под вариацией  $u_\varepsilon(t)$  мы понимаем обычную многооточечную импульсную вариацию в правильных точках оптимального управления. Именно, если  $\{\tau_j\}$  — конечный набор правильных точек управления  $u(t)$ ,  $\{\alpha_j^i\}$  — набор неотрицательных чисел,  $\{\omega_j^i\}$  — набор точек, принадлежащих  $U$ , то

$$u_\varepsilon(t, \tau_j, \alpha_j^i, \omega_j^i) = \begin{cases} \omega_j^i & \text{при } t \in \left( \tau_j - \varepsilon \sum_{r=1}^j \alpha_r^i, \tau_j - \varepsilon \sum_{r=1}^{j-1} \alpha_r^i \right) = \Pi_j^i, \\ u(t) & \text{при } t \in (0; T) \setminus \bigcup_{j,i} \Pi_j^i \end{cases}$$



Вариации функционалов зависят не только от наборов  $\tau_j$ ,  $a_j^i$  и  $w_j^i$ , входящих в управление, но и от вектора  $\xi_0$ , указывающего направление вариации начальных условий. Первые вариации функционалов  $r_H^i$  и  $g_H^i$  находятся очевидным образом:

$$\delta r_H^i = \nabla_x r_H^i(x_0) \xi_0,$$

$$\delta g_H^i = \nabla_x g_H^i(x_0) \xi_0.$$

Вычислим первые вариации остальных функционалов. Пусть  $x_*(t)$  соответствующая  $u_*(t)$  и  $x_0 + \varepsilon \xi_0$  траектория системы (1). Уравнение для приращения траектории имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \Delta x(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1(t), u_*(t), t) \Delta x(t) + \delta_u f(x, t), \quad (2)$$

где  $\xi_1(t)$  — некоторая промежуточная точка между  $x(t)$  и  $x_*(t)$ ,  $\delta_u f(x, t) = f(x, u_*, t) - f(x, u, t)$  и  $\Delta x(0) = \varepsilon \xi_0$ .

Для вычисления первой вариации  $\delta J(u)$  запишем уравнение для вспомогательного вектора  $\psi_*(t)$ :

$$\dot{\psi}_*(t) = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, u_*, t) \right]^* \psi_*(t) - \nabla_x f_0(\xi_2, u_*, t), \quad (3)$$

$$\psi_*(T) = \nabla_x g(\xi_3),$$

$\xi_2(t)$  и  $\xi_3$  — промежуточные точки между  $x(t)$  и  $x_*(t)$  и  $x(T)$  и  $x_*(T)$ , соответственно определяемые из соотношений

$$f_0(x_*(t), u_*(t), t) - f_0(x(t), u_*(t), t) = \Delta_x f_0(\xi_2(t), u_*(t), t) \Delta x(t),$$

$$g(x_*(T)) - g(x(T)) = \nabla_x g(\xi_3) \Delta x(T).$$

Умножив (2) на  $\psi_*(t)$ , а (3) на  $\Delta x(t)$  и интегрируя по интервалу  $(0, T)$  сумму полученных равенств, находим выражение для

$$\nabla_x g(\xi_3) \Delta x(T) + \int_0^T \nabla_x f_0(\xi_2, u_*, t) \Delta x(t) dt,$$

и именно,

$$\begin{aligned} \nabla_x g(\xi_3) \Delta x(T) + \int_0^T \nabla_x f_0(\xi_2, u_*, t) \Delta x(t) dt = \\ = \varepsilon \psi_*(0) \xi_0 + \int_0^T \delta_u f(x, t) \psi_*(t) dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Delta J = \int_0^T \nabla_x f_0(\xi_2(t), u_*(t), t) \Delta x(t) dt + \\ + \nabla_x g(\xi_3) \Delta x(T) + \int_0^T \delta_u f_0(x(t), t) dt, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = \varepsilon \psi_*(0) \xi_0 + \int_0^T \delta_u f(x, t) \psi_*(t) dt + \\ + \int_0^T \delta_u f_0(x, t) dt. \end{aligned}$$

Так как правая часть уравнения (3) стремится по мере к правой части уравнения

$$\dot{\psi}(t) = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \psi(t) - \nabla_x f_0(x, u, t) \quad (4)$$

при  $\epsilon \rightarrow 0$ , а  $\psi_\epsilon(T) \rightarrow \nabla_x g(x(T))$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , то по теореме о непрерывной зависимости от начальных условий и теореме Каратеодори о непрерывной, в интегральном смысле, зависимости от правых частей решения системы (1) (см. [5])  $\psi_\epsilon(t) \rightarrow \psi(t)$  равномерно по  $t \in [0, T]$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Учитывая вышеизложенное и применяя теорему Лебега о дифференцировании (см. [6]), получим следующее выражение для первой вариации функционала:

$$\delta J = \psi(0) \xi_0 + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \{ f_0(x(\tau_j), w_j^l, \tau_j) - f_0(x(\tau_j), u(\tau_j), \tau_j) + [f(x(\tau_j), w_j^l, \tau_j) - f(x(\tau_j), u(\tau_j), \tau_j)] \psi(\tau_j) \},$$

где  $M$  — число выбранных точек Лебега управления  $u(t)$ . Тем же методом вычисляем вариации остальных функционалов, а именно,

$$\begin{aligned} \delta r_k^i &= \psi_{r_k^i}(0) \xi_0 + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \{ f_0(x(\tau_j), w_j^l, \tau_j) - \\ &- f_0(x(\tau_j), u(\tau_j), \tau_j) + [f(x(\tau_j), w_j^l, \tau_j) - \\ &- f(x(\tau_j), u(\tau_j), \tau_j)] \psi_{r_k^i}(\tau_j) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\psi_{r_k^i}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{r_k^i} &= - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \psi_{r_k^i}, \\ \psi_{r_k^i}(T) &= \nabla_x r_k^i(x(T)); \end{aligned}$$

$$\delta g_k^i = \psi_{g_k^i}(0) \xi_0 + \sum_{p=1}^M \sum_{l=1}^{l_p} \alpha_p^l \delta_{ul} f(x(\tau_p), \tau_p) \psi_{g_k^i}(\tau_p),$$

где  $\delta_{ul} f(x(\tau_p), \tau_p)$  обозначает квадратную скобку, входящую в (5), а  $\psi_{g_k^i}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{g_k^i} &= - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \psi_{g_k^i}, \\ \psi_{g_k^i}(T) &= \nabla_x g_k^i(x(T)); \end{aligned}$$

$$\delta P_k^p = \psi_{P_k^p}(0) \xi_0 + \sum_{j=1}^{\tau_j < t_p} \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \delta_{ul} f(x(\tau_j), \tau_j) \psi_{P_k^p}(\tau_j),$$

где  $\psi_{P_k^p}$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}_{P_k^p} = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \psi_{P_k^p}, \quad \psi_{P_k^p}(t_p) = \nabla_x P_k^p(x(t_p));$$

$$\delta L_q^p = \psi_{L_q^p}(0) \xi_0 + \sum_{j=1}^{\tau_j < t_p} \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \delta_u f(x(\tau_j), \tau_j) \psi_{L_q^p}(\tau_j),$$

$$\psi_{L_q^p} = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \psi_{L_q^p},$$

$$\psi_{L_q^p}(t_p) = \nabla_x L_q^p(x(t_p)).$$

Заметим, что

$$\Delta H_\alpha = \int_{\Delta_\alpha} \nabla_x h_x(\xi_4, u_\varepsilon, s) \Delta x(s) ds + \int_{\Delta_\alpha} \delta_u h_x(x(s), s) ds.$$

Здесь  $\xi_4(s)$  определяется из соотношения

$$h_x(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - h_x(x(s), u_\varepsilon(s), s) = \nabla_x h(\xi_4(s), u_\varepsilon(s), s) \Delta x(s).$$

Запишем соответствующее функционалу  $H_\alpha$  уравнение для  $\psi_{\varepsilon H_\alpha}$

$$\dot{\psi}_{\varepsilon H_\alpha} = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, u_\varepsilon, t) \right]^* \psi_{\varepsilon H_\alpha} - h_{\varepsilon \alpha}^*(t), \quad (6)$$

$$\psi_{\varepsilon H_\alpha}(T) = 0,$$

где

$$h_{\varepsilon \alpha}^*(s) = \begin{cases} \nabla_x h_x(\xi_4(s), u_\varepsilon(s), s) & (\text{при } s \in \Delta_\alpha) \\ 0 & (\text{при } s \in \bar{\Delta}_\alpha) \end{cases}.$$

Умножая (2) на  $\psi_{\varepsilon H_\alpha}$ , а (6) на  $\Delta x(t)$ , складывая и интегрируя на  $(0, T)$ , получим

$$\int_0^T h_{\varepsilon \alpha}^*(t) \Delta x(t) dt = \int_{\Delta_\alpha} \nabla_x h_x(t) \Delta x(t) dt =$$

$$= \varepsilon \psi_{\varepsilon H}(0) \xi_0 + \int_0^T \delta_u f(x, t) \psi_{\varepsilon H_\alpha}(t) dt.$$

Как и прежде, получаем

$$\delta H_x = \psi_{H_\alpha}(0) \xi_0 + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \delta_u f(x(\tau_j), \tau_j) \psi_{H_\alpha}(\tau_j) +$$

$$+ \sum_j \sum_{l=1}^{l_j} \alpha_j^l \delta_u h_x(x(\tau_j), \tau_j), \quad (7)$$

где суммирование в последнем слагаемом ведется по тем  $j$ , для которых  $\sigma_1 < \tau_j \leq \sigma_2$ ,  $\Delta_\alpha = [\sigma_1, \sigma_2]$ , а  $\psi_{H_\alpha}$  удовлетворяет (6), где  $\varepsilon = 0$  с теми же конечными условиями.

Формулы для первых вариаций функционалов  $H_\beta$  выводятся аналогично. Заметим, что в формулы первых вариаций числа  $\alpha_j^l$  входят линейно. Кроме того, если имеется конечное число векторов вариаций (компонентами которых служат первые вариации функционалов задачи), полученных при помощи различных наборов  $\{\tau_j\}^k$ ,  $\{\omega_j^l\}^k$ , то

можно считать эти наборы совпадающими. Линейная комбинация с положительными коэффициентами этих векторов представляет собой вектор вариации с тем же набором  $\{r_j\}$ ,  $\{\omega_j^i\}$ , но с числами  $\{\alpha_j^i\}$ , равными линейным комбинациям чисел  $\{\alpha_j^i\}^k$ . Таким образом, множество векторов вариаций представляет собой выпуклый конус, который мы назовем конусом вариации  $K$ . Без ограничения общности можно считать, что значения минимизируемого и ограничивающих функционалов на оптимальной траектории равны нулю. Обозначим через  $J^{(-)}$  подмножество из  $R^1$ , удовлетворяющее условию

$$J^{(-)} = \{c: c \leq 0\}.$$

Аналогичным образом определяются  $g_n^{i(-)}$ ,  $g_k^{i(-)}$ ,  $H_{\beta}^{(-)}$ ,  $P_k^{p(-)}$ . Введем обозначения

$$g_n^{(-)} = \{g_n^{1(-)} \times \dots \times g_n^{m(-)}\},$$

$$P^{(-)} = \{P_1^{1(-)} \times \dots \times P_{k_1}^{1(-)}\} \times \dots \times$$

$$\times \{P_1^{\bar{p}(-)} \times \dots \times P_{k_p}^{\bar{p}(-)}\}.$$

Таким же образом вводятся множества  $g_k^{(-)}$  и  $H^{(-)}$ . Обозначим, через  $Q^{(-)}$  следующее множество:

$$Q^{(-)} = \{J^{(-)} \times g_n^{(-)} \times g_k^{(-)} \times P^{(-)} \times H^{(-)}\};$$

$Q^{(-)}$  представляет собой выпуклый конус. Пусть размерность несущего  $Q^{(-)}$  подпространства равна  $\mu$ , а число ограничивающих функционалов равно  $\nu - 1$ . Отсюда следует, что число функционалов, участвующих в ограничениях типа равенства, равно  $\nu - \mu$ . Во взаимном расположении конуса вариаций и конуса  $Q^{(-)}$  возможны следующие случаи.

1) Не существует точки, принадлежащей конусу вариаций и являющейся одновременно внутренней для  $Q^{(-)}$  в топологии минимального несущего  $Q^{(-)}$  подпространства.

2) Существует точка  $K_0$ , принадлежащая конусу вариаций и в то же время принадлежащая внутренности  $Q^{(-)}$  в топологии минимального несущего  $Q^{(-)}$  подпространства.

В случае 2) возможны два варианта: а) проекция конуса вариаций на подпространство, дополнительное к  $R^{\mu}$  до  $R^{\nu}$ , не покрывает всего этого пространства; б) проекция конуса вариаций на  $R^{\nu-\mu}$  покрывает целиком все подпространство.

В случаях 1) и 2 а) конус вариаций отделяется от  $Q^{(-)}$  некоторой гиперплоскостью. Случай 2 б) невозможен, ибо ведет к противоречию с оптимальностью управления, вдоль которого вычисляются первые вариации функционалов. Действительно, поскольку конус вариаций проектируется на все пространство  $R^{\nu-\mu}$ , то точка нуль этого пространства будет внутренней точкой проекции конуса вариаций. Кроме того, в случае 2 б) легко построить выпуклое подмножество  $\bar{K} \subset K$  ( $K$  — конус вариаций), удовлетворяющее следующим соотношениям: если вектор  $\pi \in \bar{K}$ , то  $\max_j P_{g_n^i} \pi \leq -\rho$ ,  $\max_j P_{g_k^i} \pi \leq -\rho$  и т. д., где  $P$  означает проекцию на соответствующую ось из  $R^{\mu}$ . Следовательно, существует шар с центром в точке 0 на  $R^{\nu-\mu}$  и такой, что он целиком находится в проекции подмножества  $\bar{K} \subset K$ . Впишем в этот шар правильный тетраэдр  $\Delta$ . Пусть  $\lambda_s$  ( $s=0, \dots, \nu-\mu$ ) — координаты вершин этого тетраэдра. Тогда найдется такой набор точек  $\tau_j$  и  $u_j^i$  (общий для

всех  $\Lambda_s$ ), а также такие  $\xi_0^s$  и  $\beta_j^{sp}$  (свои для каждой вершины), что компоненты вершин  $\Lambda_s$  равны первым вариациям соответствующих функционалов в ограничениях типа равенства с набором  $(\xi_0^s, \beta_j^{sp}, \tau_j, u_j^p)$ , а вектор вариации, соответствующий этому набору, принадлежит подмножеству  $\bar{K}$ . Каждая точка, принадлежащая тетраэдру, может быть представлена в виде линейной комбинации вершин тетраэдра  $\Lambda$ :

$$\Lambda(\lambda) = \sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s \Lambda_s,$$

где  $\lambda_s \geq 0$ ,  $\sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s = 1$ . Множество точек  $R^{\nu-\mu+1}$ , координаты которых

удовлетворяют соотношению  $\lambda_s \geq 0$ ,  $\sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s = 1$ , представляет собой пирамиду, имеющую размерность  $\nu - \mu$ , текущую точку которой обозначим через  $\lambda$ . Введем следующие обозначения:  $\beta_j^p(\lambda) = \sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s \beta_j^{sp}$ ;

очевидно, что  $\beta_j^p(\lambda) \geq 0$ ,  $\xi_0(\lambda) = \sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s \xi_0^s$ . Через  $u(\lambda, \varepsilon, t)$  обозначим вариацию оптимального управления  $u(t)$  с набором  $\beta_j^p(\lambda)$ ,  $\tau_j$ ,  $w_j^p$  и  $\varepsilon$ . Запишем покоординатно следующее семейство отображений пирамиды

$\lambda_s \geq 0$ ,  $\sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s = 1$  в  $R^{\nu-\mu}$ :

$$f_i(\lambda, \varepsilon) = \frac{r_H^i(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda)) - r_H^i(x(0))}{\varepsilon} \quad (i = 1, \dots, n_1),$$

$$f_j(\lambda, \varepsilon) = \frac{r_K^j(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda), u(\lambda, \varepsilon, t)) - r_K^j(x(0), u(t))}{\varepsilon}$$

$$(i = n_1 + 1, \dots, n_2),$$

$$f_{pq}(\lambda, \varepsilon) = \frac{L_q^p(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda), u(\lambda, \varepsilon, t)) - L_q^p(x(0), u(t))}{\varepsilon}$$

$$(p = 1, \dots, \bar{p}, \quad q = 1, \dots, q_p),$$

$$f_\alpha(\lambda, \varepsilon) = \frac{H_\alpha(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda), u(\lambda, \varepsilon, t)) - H_\alpha(x(0), u(t))}{\varepsilon}$$

$$(\alpha = 1, \dots, a_1).$$

Здесь  $L_q^p(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda), u(\lambda, \varepsilon, t))$  есть значение функционала на траектории, полученной при помощи управления  $u(\lambda, \varepsilon, t)$ , со значением в начальный момент  $x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda)$ . Таким образом, на пирамиде

$\lambda_s \geq 0$ ,  $\sum_{s=0}^{\nu-\mu} \lambda_s = 1$  задано семейство векторных полей  $\bar{f}(\lambda, \varepsilon)$ . Так как

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  компоненты  $\bar{f}(\lambda, \varepsilon)$  стремятся к первым вариациям функционалов, полученных при помощи чисел  $\beta_j^p(\lambda)$  и  $\xi_0(\lambda)$ , и, следовательно, непрерывны по  $\lambda$  при  $\varepsilon \geq 0$ , меньшем достаточно малого  $\bar{\varepsilon}$ , то данное семейство является гомотонным по  $\varepsilon$  семейством вполне непрерывных

векторных полей на пирамиде  $\lambda_s \geq 0, \sum_{s=0}^{s=\mu} \lambda_s = 1$ . При  $\varepsilon = 0$  соответствующее векторное поле имеет единственный нулевой вектор, находящийся внутри пирамиды. Следовательно, индекс вращения векторного поля на границе пирамиды равен  $\pm 1$ .

Поскольку индекс вращения есть инвариант гомотонного семейства векторных полей, то при любом  $\varepsilon, \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , индекс вращения соответствующего векторного поля на границе пирамиды равен  $\pm 1$ , и, следовательно, внутри пирамиды найдется такая точка  $\lambda(\varepsilon)$ , что соответствующее данному  $\varepsilon$  векторное поле имеет нулевой вектор в  $\lambda(\varepsilon)$ . Отсюда

$$r_{\mathbb{H}}^i(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda(\varepsilon))) = 0 \quad (i = 1, \dots, n_1),$$

$$r_{\mathbb{K}}^i(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda(\varepsilon)), u(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, t)) = 0 \quad (i = n_1 + 1, \dots, n_2),$$

$$L_q^p(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda(\varepsilon)), u(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, t)) = 0 \quad (p = 1, \dots, \bar{p}, \quad q = 1, \dots, q_p),$$

$$H_\alpha(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda(\varepsilon)), u(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, t)) = 0$$

$$(\alpha = 1, \dots, \alpha_1).$$

Т. е. для каждого  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$  найдутся такие вариации начальных условий и управлений, которые допустимы по ограничениям типа равенства. Векторы вариаций, соответствующие этим  $\lambda(\varepsilon)$ , по-прежнему принадлежат множеству  $\bar{K}$ . Следовательно, для  $\varepsilon$ , меньших некоторого  $\bar{\varepsilon}$  ( $0 < \bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}$ ), значения функционалов  $J(x(0) + \varepsilon \xi_0(\lambda(\varepsilon)), u(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, t))$  и т. д. строго отрицательны, что противоречит оптимальности управления  $u(t)$ . Действительно, это означает, что нашлась такая вариация управления  $u(t)$  и начального условия  $x(0)$ , которая допустима по всем ограничениям. Тем не менее, значение минимизируемого функционала на траектории, соответствующей новому управлению и новым начальным условиям, меньше минимального. Таким образом, мы доказали, что существует гиперплоскость, отделяющая  $Q^{(-)}$  от конуса вариаций. Это означает, что существует такой набор неотрицательных чисел  $l_\gamma$  ( $\gamma = 1, \dots, m_2 + n_2$ ),  $l_{p_k}$ ,  $l_{z_p}$  ( $p = 1, \dots, \bar{p}; k = 1, \dots, k_p; q = 1, \dots, q_p$ )  $l_\alpha^a$  ( $\alpha = 1, \dots, \alpha_1$ ),  $l_{\beta^\beta}^{\beta}$  ( $\beta = 1, \dots, \beta_1$ ) и число  $l \geq 0$ , что скалярное произведение вектора, определяемого этими числами, с любым вектором  $\delta K$ , принадлежащим конусу вариаций, больше или равно нулю. Пусть  $\delta K$  получен вариацией только начальных условий. Тогда для любых таких вариаций справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} l_i \nabla_x r_{\mathbb{H}}^i(x_0) \xi_0 + \sum_{i=1}^{m_1} l_{i+n_2} \nabla_x g_{\mathbb{H}}^i(x_0) \xi_0 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} l_i \psi_{\mathbb{K}}^i(0) \xi_0 + \\ & + \left\{ \sum_{i=m_1+1}^{m_2} l_{i+n_2} \psi_{g_{\mathbb{K}}}^i(0) + l \psi(0) + \sum_{p=1}^{\bar{p}} \left[ \sum_{k=1}^{k_p} l_{p_k} \psi_{p_k}^{p_k}(0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{q=1}^{q_p} l_{z_q} \psi_{l_q}^{z_q}(0) \right] + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_1} l_\alpha^a \psi_{H_\alpha}^a(0) + \sum_{\beta=1}^{\beta_1} l_{\beta^\beta}^{\beta} \psi_{H_\beta}^{\beta}(0) \right\} \xi_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим  $\sum_{i=n_1+1}^{n_2} l_i \nabla_x r_{\mathbb{K}}^i(x(T)) + \sum_{i \parallel m+1}^{m_2} l_{i+n_2} \nabla_x g_{\mathbb{K}}^i(x(T)) + l \nabla_x g(x(T))$  через  $\eta$ ;

через  $h(t)$  обозначим  $l\nabla f_0 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_1} l_{\alpha}^{h_{\alpha}} h_{\alpha}^* + \sum_{\beta=1}^{\beta_1} l_{\beta}^{h_{\beta}} h_{\beta}^*$  и  $\sum_{k=1}^{k_p} L_{P_k} \nabla_x P_k^{PP}(x(t_p)) + \sum_{q=1}^{q_p} L_{L_q} \nabla_x L_q^{LP}(x(t_p))$  — через  $\rho_p$ .

Таким образом, учитывая произвольность  $\xi_0$ , получим следующее условие трансверсальности на левом конце траектории:

$$\sum_{i=1}^{n_1} l_i \nabla_x r_H^i(x(0)) + \sum_{i=1}^{m_1} l_{i+n_2} \nabla_x g_H^i(x(0)) = -\bar{\psi}(0),$$

где  $\bar{\psi}(t)$  — кусочно-непрерывная функция, заданная уравнением

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi}(t) = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, t) \right]^* \bar{\psi} - h(t) + \sum_{p=1}^{t_p} \delta(t - t_p) \rho_p,$$

$$\bar{\psi}(T) = \eta.$$

Равенство  $\bar{\psi}(T) = \eta$  является условием трансверсальности на правом конце траектории. Пусть теперь вектор вариации получается при помощи односточечной импульсной вариации управления  $u(t)$  в правильной точке управления  $\tau$  с числом, равным 1, и некоторым  $w \in U$ . Тогда в силу отделимости конуса вариаций от тела  $Q^{(-)}$  получаем

$$\begin{aligned} & \delta_u f(x(\tau), \tau) \bar{\psi}(\tau) + l \delta_u f_0(x(\tau), \tau) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_1} l_{\alpha}^{h_{\alpha}} \int_{\Delta_{\alpha}} \delta(t - \tau) \delta_u h_{\alpha}(x(t), t) dt + \\ & + \sum_{\beta=1}^{\beta_1} l_{\beta}^{h_{\beta}} \int_{\Delta_{\beta}} \delta(t - \tau) \delta_u h_{\beta}(x(t), t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} & f(x(\tau), u(\tau), \tau) \bar{\psi}(\tau) + l f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_1} l_{\alpha}^{h_{\alpha}} \int_{\Delta_{\alpha}} \delta(t - \tau) h_{\alpha}(x(t), u(t), t) dt + \\ & + \sum_{\beta=1}^{\beta_1} l_{\beta}^{h_{\beta}} \int_{\Delta_{\beta}} \delta(t - \tau) h_{\beta}(x(t), u(t), t) dt \end{aligned}$$

через  $H(x(\tau), u(\tau), \bar{\psi}(\tau), \tau)$ , запишем верхнее неравенство в виде

$$H(x(\tau), w, \bar{\psi}(\tau), \tau) \geq H(x(\tau), u(\tau), \bar{\psi}(\tau), \tau)$$

для всех  $w \in U$  и правильных точек  $\tau$  управления  $u(t)$ . Отсюда  $H(x(\tau), u(\tau), \bar{\psi}(\tau), \tau) = \inf_{w \in U} H(x(\tau), w, \bar{\psi}(\tau), \tau)$  для почти всех  $\tau \in [0, T]$ .

Таким образом, получены необходимые условия оптимальности вышепоставленной задачи в форме принципа минимума.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
2. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Ж. выч. мат. и матем. физики, 5, № 3, 395 (1965).
3. R. V. Gamkrelidze, Siam J. control, 3 (1965).
4. В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, изд. Наука, М., 1966.
5. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
6. С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 мая 1969 г.

## OPTIMALITY NECESSARY CONDITIONS IN PROBLEMS WITH LIMITATIONS

*M. I. Gordion, V. I. Plotnikov*

The paper deals with the problem of functional minimization along the trajectories of ordinary vectorial differential equation when phase coordinates limitations are manifolds with boundaries. Optimality conditions for controls in a class of measurable limited functions are derived in the form of minimum principle.

---



УДК 519.2 : 531.391

## РАВНОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЫХОДНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. А. Брусин

Рассматривается нелинейная динамическая система, фазовым пространством которой является абстрактный цилиндр. Исследуются некоторые, равномерные относительно классов нелинейностей, статистические свойства выходного процесса при подаче на вход случайного сигнала с определенными статистическими свойствами.

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим динамическую систему, фазовым пространством  $\{1\}$ , которой служит абстрактный цилиндр  $\{\Phi \times [0, \Omega], \Omega > 0, (\Phi, 0) = (\Phi, \Omega)\}$ , где  $\Phi$  — некоторое линейное (функциональное) пространство  $\{2\}$ , и предположим, что в этом фазовом пространстве существует абсолютно устойчивая замкнутая траектория этой динамической системы, охватывающая цилиндр, которой соответствует на выходе системы  $\Omega$ -периодический режим  $\vartheta(t)$ . Пусть теперь эта динамическая система подвергается действию «аддитивно приложенного» входного случайного процесса  $\{\xi(t)\}$   $\{3\}$ . Тогда на выходе системы к периодическому режиму  $y(t) = \vartheta(t)$  «добавится» случайный процесс  $\{\Delta y(t)\}$ . Выберем в качестве статистической нормы  $R_y$  этого процесса некоторый положительный функционал, определенный на этом процессе. Тогда при стремлении к нулю интенсивности входного процесса  $\{\xi(t)\}$  могут представиться три случая: 1) величина  $R_y$  стремится к нулю равномерно по всем начальным состояниям системы; 2) стремление к нулю имеет место, но оно неравномерное, и, наконец, 3) при некоторых начальных состояниях системы  $R_y$  не стремится к нулю. Первый случай имеет особое значение, поскольку он соответствует «стохастической  $R$ -устойчивости» периодического режима  $\vartheta(t)$ , и его желательно иметь в большинстве практических задач. В этом случае возникает и вопрос об оценке сверху величины  $R$  на основе известных статистических данных входного процесса. Этому вопросу и посвящается данная работа.

Если входной процесс имеет характер шума, то в целом ряде задач с достаточной степенью точности будут справедливы гипотеза о статистической независимости его значений, отстоящих друг от друга по времени на расстоянии, большем некоторой величины  $\nu$ , и гипотеза эргодичности  $\{3, 4\}$ . Такая информация о входном сигнале, как будет видно из настоящей работы, может быть использована при получении указанной выше оценки.

Настоящее исследование проводится для существенно нелинейных систем. Получаемые оценки являются равномерными относительно целого класса  $K$  нелинейностей.

Основные обозначения:  $\Phi, H$  — линейные нормированные (не обязательно полные) пространства;  $\|z\|_\Phi$  — норма элемента  $z \in \Phi$ ;  $\|h\|_H$  —

— норма элемента  $h \in H$ ;  $R^1$  — вещественная ось;  $\|T\|_{H \rightarrow \Phi}$  — норма линейного оператора, действующего из  $H$  в  $\Phi$ ;  $I$  — тождественный оператор на  $\Phi$ ;  $0_{\Phi} 0_H$  — нулевые элементы пространств  $\Phi$  и  $H$ . Для произвольных  $t_0 \in R^1$ ,  $T > 0$  обозначается через  $F(H; t_0, t_0 + T)$  — линейное пространство отображений  $[t_0, t_0 + T] \rightarrow H$ ;  $F(H) \equiv F(H; -\infty, \infty)$ ;  $\Delta_T$  — отображение  $F(H) \rightarrow F(H)$ :  $\{\Delta_T f\}(t) = f(t + T)$ ;  $P_{t_0, T}$  — отображение  $F(H) \rightarrow F(H; t_0, t_0 + T)$ :  $\{P_{t_0, T} f\}(t) = f(t)$ ;  $P_{t_0, T}^{-1}$  — отображение  $F(H; t_0, t_0 + T) \rightarrow F(H)$ :  $\{P_{t_0, T}^{-1} f\}(t) = \{0_H, \text{ если } t \in [t_0, T]; f(t), \text{ если } t \in [t_0, T]\}$ ;  $0_{FH}$  — нулевой элемент пространства  $F(H)$ ,  $\Gamma\{\tau\}$  — полугруппа неотрицательных сдвигов вещественной оси с обычной топологией: для  $\tau \in \Gamma$  и  $t \in R^1$   $\tau(t) = t + \tau$ ;  $e \in \Gamma$  — единичный элемент;  $Z(\Phi; t_0; t_0 + \tau_0)$  — линейное пространство отображений множества  $[t_0 + \tau, \tau \in \Gamma, \tau \leq \tau_0]$  в пространство  $\Phi$ ;  $Z(\Phi; t_0, \infty)$  — линейное пространство отображений множества  $\{t_0 + \tau, \tau \in \Gamma\}$  в пространство  $\Phi$ ;  $\|f(t)\|_{t_0, T, H}$  — положительный функционал  $F(H; t_0, t_0 + T) \rightarrow R^1$ ;  $\|z(t)\|_{t_0, \tau_0, \Phi}$  — положительный функционал  $Z(\Phi; t_0, t_0 + \tau_0) \rightarrow R^1$ , удовлетворяющий условию  $0 \leq \|z_1(t)\|_{t_0, \tau_0, \Phi} - \|z_2(t)\|_{t_0, \tau_0, \Phi}$ , если  $0 \leq \max_{t \in \Gamma_0} \{\|z_1(t)\|_{\Phi} - \|z_2(t)\|_{\Phi}\}$ , где  $\Gamma_0 = \{t \in R^1, t = t_0 + \tau, \tau \in \Gamma \text{ и } \tau \leq \tau_0, \text{ если } \tau_0 \neq \infty\}$ ;  $z_1^*(t), z_2(t)$  произвольные функции  $\in F(H, t_0, t_0 + T)$ .

Далее, будем обозначать

$$\sum_{\tau=\tau_0, \tau \in \Gamma}^N z(\tau) \equiv \sum_{\tau=\tau_0}^N E_{\Gamma}(\tau) z(\tau),$$

где

$$E_{\Gamma}(\tau) = \begin{cases} 1 & (\text{если } \tau \in \Gamma) \\ 0 & (\text{если } \tau \notin \Gamma) \end{cases}; \Delta_{1,2}^t y(t) \equiv y(t_1) - y(t_2).$$

## 2. НЕАВТНОМНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ

Рассмотрим однопараметрическое семейство операторов  $\{\Psi_{\tau}^{(t_0)}\}$ , где  $t_0$  — фиксированное действительное число,  $\tau$  пробегает значения из полугруппы  $\Gamma$ , и  $\Psi_{\tau}^{(t_0)}$  есть отображение  $\Phi \times F(H; t_0, t_0 + \tau) \rightarrow \Phi$ . Это семейство пусть удовлетворяет следующим условиям:

а) для любых  $f \in F(H)$  и  $z_0 \in \Phi$

$$\lim_{\tau \rightarrow e} \Psi_{\tau}^{(t_0)}(z_0, P_{t_0, \tau} f) = z_0^*; \quad (2.1)$$

б) для любых  $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma$ ,  $z_0 \in \Phi$ ,  $f \in F(H)$  имеет место равенство

$$\Psi_{\tau_1 + \tau_2}^{(t_0)}(z_0, P_{t_0, \tau_1 + \tau_2} f) = \Psi_{\tau_1}^{(t_0)}(\Psi_{\tau_2}^{(t_0)}(z_0, P_{t_0, \tau_2} f), P_{t_0, \tau_1} \Delta_{\tau_2} f). \quad (2.2)$$

Семейство операторов  $\{\Psi_{\tau}^{(t_0)}\}$ , удовлетворяющее этим условиям, мы будем называть неавтономной стационарной динамической системой  $\{\Phi, \Gamma, F(H)\}$ ; функцию  $f \in F(H)$  — входной функцией этой динамической системы, а функцию  $z(\tau) = \Psi_{\tau}^{(t_0)}(z_0, P_{t_0, \tau} f)$  ( $f \in F(H)$ ,  $z_0 \in \Phi$ ) — ее траекторией  $z(\tau; t_0, z_0, f(t))$ .

**Теорема 2.1.** Предположим, что А) существует такой элемент  $\theta = \theta(t_0) \in \Phi$ , что при любом  $\tau \in \Gamma$

\* Для дискретной полугруппы (группы) этот пункт автоматически выполняется, ибо любая функция на ней по определению непрерывна.

$$\Psi_{\tau}^{(t_0)}(\theta, P_{t_0, \tau} O_{F(H)}) = \theta; \quad (2.3)$$

Б) существуют неубывающие положительные функции  $\beta(\tau)$  и  $R(r)$  ( $\tau \in \Gamma, r > 0$ ), такие, что для любых  $\tau_0 \in \Gamma, f \in F(H)$

$$\|z(\tau; t_0, \theta, f) - \theta\|_{t_0, \tau_0, \Phi} \leq R(r) \beta(\tau_0), \quad (2.4)$$

если

$$\|f(t)\|_{t_0, \infty, H} \leq r; \quad (2.5)$$

В) существует функция  $\alpha(t)$  ( $t \geq 0$ ), монотонно стремящаяся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , такая, что

$$\|z(\tau; t_0, z_0, f) - z(\tau; t_0, z_1, f)\|_{\Phi} \leq \alpha(\tau) \|z_0 - z_1\|_{\Phi} \quad (2.6)$$

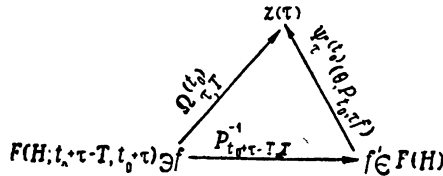
для любых  $\tau \in \Gamma, z_0, z_1 \in \Phi$  и  $f \in F(H)$ .

Тогда будет существовать такой оператор  $\Omega_{\tau, T}^{(t_0)}$  ( $F(H; 0, T) \rightarrow \Phi$ ), что

$$\|z(\tau; t_0, \theta, f) - \Omega_{\tau, T}^{(t_0)} P_{0, T} \Delta_{t_0 + \tau - T} f\|_{t_0 + T, \tau_0, \Phi} \leq C(r) \beta(\tau_0) \alpha(T), \quad (2.7)$$

если  $\|f(t)\|_{t_0, \infty, H} \leq r$ .

Доказательство. Для любого  $\tau \geq T$  ( $\tau, T \in \Gamma$ ) определим оператор  $\Omega_{\tau, T}^{(t_0)}$ , отображающий  $F(H; t_0 + \tau - T, t_0 + \tau)$  в  $\Phi$ , как оператор, замыкающий коммутативную диаграмму



В силу (2.1)—(2.3), (2.6) для любых  $f \in P(H)$

$$\begin{aligned} & \| \Psi_{\tau}^{(t_0)}(\theta, P_{t_0, \tau} f) - \Omega_{\tau, T}^{(t_0)} P_{t_0 + \tau - T, T} f \|_{\Phi} \leq \alpha(T) \times \\ & \times \| z(\tau - T; t_0, \theta, f) - \theta \|_{\Phi}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Откуда, в силу (2.4), (2.5), получаем

$$\| \Psi_{\tau}^{(t_0)}(\theta, P_{t_0, \tau} f) - \Omega_{\tau, T}^{(t_0)} P_{t_0 + \tau - T, T} f \|_{t_0 + T, \tau_0, \Phi} \leq \alpha(T) \beta(\tau_0) R(r). \quad (2.9)$$

Но, вследствие (2.1)—(2.3), значения оператора  $\Omega_{\tau, T}^{(t_0)}$  не будут зависеть от  $\tau$ , т. е.

$$\Omega_{\tau, T}^{(t_0)} P_{t_0 + \tau - T, T} \equiv \Omega_T^{(t_0)} P_{0, T} \Delta_{t_0 + \tau - T}. \quad (2.9a)$$

Теорема доказана.

Рассмотрим векторный эргодический [3, 4] случайный процесс  $\xi(t, \lambda)$  ( $\xi \in R^n, t > 0, \lambda \in A$ ), определенный на некотором вероятностном пространстве  $(\Delta, F, P)$ , и будем обозначать через  $E(\cdot)$  оператор математического ожидания, т. е. интеграл Лебега—Стилтьеса  $\int_{\Delta}(\cdot) dP$ . Мы

предположим, что  $E \|\xi(t, \lambda)\|_{R^n}^2 \leq \bar{\sigma}^2 < \infty$ .

**Теорема 2.2.** Предположим, что для динамической системы

$\Phi, \Gamma, F(R^n)$  выполняются условия теоремы 2.1 и, кроме того, при достаточно больших  $\bar{\tau} \in \Gamma^*$

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \sum_{\tau=0, \tau \in \Gamma}^{\bar{\tau}} \|\Psi_{\tau}^{(t_0)}(\theta, \xi)\|_{\Phi}^2 \leq R(r), \tag{2.10}$$

если

$$\frac{1}{\bar{\tau}} \int_{t_0}^{t_0+\bar{\tau}} \|\xi(s)\|_{R^n}^2 ds \leq r. \tag{2.10a}$$

Тогда для любого  $z_0 \in \Phi$  и для любого оператора  $\varphi_{t_0}(\Phi \rightarrow \Phi)$ , удовлетворяющего условию Липшица с некоторой константой  $K$ , справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0, \tau \in \Gamma}^N \|\varphi_{t_0} z(\tau; t_0, \theta, \xi(t, \lambda))\|_{\Phi}^2 = L = \text{const}. \tag{2.11}$$

(Знак  $(P)$  над равенством, или неравенством, означает, что это равенство, или неравенство, выполняется с вероятностью, равной единице.)

**Доказательство.**

1) Покажем сначала, что процесс  $\mu(\tau, \lambda) \equiv \varphi_{t_0} \Omega_{\tau, T}^{(t_0)}(\xi(t, \lambda))^* (\tau \geq T)$  — эргодический.

Обозначим через  $\{S_t\}$   $P$ -измеримую полугруппу сохраняющих меру точечных преобразований  $\Lambda \rightarrow \Lambda$ , которая порождает эргодический процесс  $\xi(t, \lambda)$  [4], т. е.  $\xi(t, \lambda) = h(S_t \lambda)$ , где  $h(\cdot)$  есть  $P$ -измеримое отображение  $\Lambda \rightarrow R^n$ . Обозначим далее через  $L^T$  множество, точками которого служат всевозможные функции, заданные на отрезке  $[0, T]$  со значениями в  $\Lambda$ , а через  $L_S^T \subset L^T$  — его подмножество, являющееся полным образом при отображении  $U^T (\Lambda \rightarrow L^T): \{U^T(\lambda)\}(\tau) = S_{\tau} \lambda$ . С помощью отображения  $U^T$  на  $L_S^T$  естественным образом определяется  $B$ -поле  $F^T$ . Вероятностная мера  $P^T$  на  $F^T$  определяется из условия инвариантности меры при отображении  $U^T$ . Таким образом, мера  $P^T$  есть образ меры  $P$  [5] и наоборот, т. е. эти меры эквивалентны. Наконец, полугруппа  $\{S_t\}$  индуцирует на  $L_S^T$  полугруппу сохраняющих меру  $P^T$  точечных преобразований  $\{S_t^T\}$ ; так что, если обозначить через  $\tilde{h}(\cdot)$  отображение  $L_S^T \rightarrow F(R^n; 0, T)$ , индуцированное отображением  $h(\cdot)$  ( $\Lambda \rightarrow R^n$ ), а через  $g_{\tau, T} (L_S^T \rightarrow R^n)$  — отображение  $\varphi_{t_0} \Omega_{\tau, T}^{(t_0)} \tilde{h}$ , получим, что

$$\tilde{\mu}(\tau, \tilde{\lambda}) \equiv \mu(\tau, (U^T)^{-1} \lambda) = g_{\tau, T} (S_{\tau-T}^T \tilde{\lambda}). \tag{2.12}$$

Отсюда, в силу свойства (2.9 а) оператора  $\Omega_{\tau, T}^{(t_0)}$ , будет следовать эргодичность процесса  $\tilde{\mu}(\tau, \tilde{\lambda})$  относительно меры  $P^T$ , а значит, и процесса  $\mu(\tau, \lambda)$  относительно исходной меры  $P$ .

\* В дальнейшем знак оператора  $P_{t_0, \tau}$  иногда будем опускать,

2) Покажем теперь справедливость равенства (2.11). Так как  $\mu(\tau, \lambda)$  — эргодический процесс, то, в частности,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0, \tau \in \Gamma}^N \|\mu(\tau, \lambda)\|_{R^n}^2 \stackrel{(R)}{=} E \|\mu(\tau, \lambda)\|_{R^n}^2 = \text{const.} \quad (2.13)$$

Определим в теореме 2 положительные функционалы следующим образом:

$$\|z(t)\|_{t_0, \infty, \Phi}^2 \equiv \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0, \tau \in \Gamma}^N \|z(\tau, t_0)\|_{\Phi}^2,$$

$$\|f(t)\|_{t_0, \infty, R^n}^2 \equiv \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0+T} \|f(s)\|_{R^n}^2 ds.$$

Тогда в силу (2.10)

$$\|z(\tau; t_0, \theta, \xi)\|_{t_0, \infty, \Phi} \stackrel{(P)}{\ll} \text{const}(\bar{\sigma}) < \infty,$$

и эта теорема, следовательно, справедлива с  $\beta(\tau) \equiv 1$ . Это нам дает

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0, \tau \in \Gamma}^N \|\varphi_{t_0} z(\tau; t_0, \theta, \xi(t)) - \\ & - \varphi_{t_0} \Omega_T^{(t_0)} P_{0, T} \Delta_{t_0+\tau-T} \xi(t)\|_{\Phi}^2 \leq q\alpha(T) \\ & (q \equiv C(\bar{\sigma})K). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда с учетом равенства (2.13) нетрудно завершить доказательство равенства (2.11) (методом от противного).

### 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ $\{\Phi, \Gamma, F(R^n)\}$ , ПОРОЖДЕННЫЕ АБСТРАКТНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, И НЕКОТОРЫЕ ИХ ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА, РАВНОМЕРНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СТАТИСТИЧЕСКОГО КЛАССА ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе рассмотрим один важный класс динамических систем  $\{\Phi, \Gamma, F(R^n)\}$ , где  $\Gamma = \Gamma_{\Omega} = \{\Omega k, k = 0, 1, \dots\}$ , а  $\Phi$  — линейное нормированное пространство со скалярным произведением  $\langle z_1, z_2 \rangle_{\Phi}$ . Для непрерывной однопараметрической совокупности динамических систем  $\{\Psi_{\tau}^{(t_0)}(z_0'(t_0), \xi(t))\}$  ( $0 \leq t_0 \ll \Omega$ ) определим функцию  $z(t; z_0, \xi(s))$  ( $t > 0, z_0 = z_0(0)$ ) следующим образом:

$$z(t; z_0, \xi(s)) \equiv \begin{cases} z_0(t_0) & (\text{при } t = t_0) \\ z(\tau; t_0, z_0(t_0), \xi(t)) & (\text{при } t = t_0 + \tau) \end{cases}$$

Мы будем предполагать [6], что эта функция  $z(t; z_0, \xi(s))$  при  $t > 0$  удовлетворяет в обобщенном смысле по переменному  $t$  абстрактному дифференциальному уравнению вида\*

\* В книге [9] речь идет о линейных уравнениях. Понятия решения, ослабленного решения задачи Коши для уравнения (3.1), считаем аналогичными тем, которые приводятся для линейных систем с постоянными операторами.

$$\frac{dz}{dt} = Pz + N_t z + \Psi(t) + H\xi(t, \lambda), \quad (3.1)$$

где  $P$  — линейный оператор  $D(p) \subset \Phi \rightarrow \Phi$ , имеющий хотя бы одну регулярную точку [6],  $N_t$  — нелинейный оператор,  $\Omega$  — периодический по  $t$  т. е.  $N_t z = N_{t+\Omega} z$ ;  $t > 0$ ,  $z \in \Phi$ , а  $\Psi(t)$  — фиксированное непрерывное  $\Omega$ -периодическое отображение  $R^1 \rightarrow \Phi$ ,  $H$  — линейный ограниченный замкнутый оператор  $R^n \rightarrow \Phi$ .

Естественно сказать в этом случае, что такая совокупность  $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\} (t_0 \in (0, \Omega])$  динамических систем  $\{\Phi, \Gamma_\Omega, F(R^n)\}$  порождена дифференциальным уравнением (3.1).

Фазовым пространством уравнения (3.1) является пространство  $\Phi \times R^1$  точек  $(z, t)$ . Функцию  $z(t; z_0, \xi(s))$  можно интерпретировать как проекцию на пространство  $\Phi$  полутраектории, выходящей из точки  $(z_0, 0)$ . При фиксированном  $t_0 \in [0, \Omega]$  динамическая система  $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\}$  из данного семейства эквивалентна бесконечной последовательности точечных отображений  $\Gamma_n \rightarrow \Gamma_{n+1}$ , осуществляемых траекториями уравнения (3.1), где  $\Gamma_n$  — гиперплоскость фазового пространства  $t = t_0 + n\Omega$ .

Как известно [6], функция  $z(t; z_0, \xi(s))$  удовлетворяет еще и интегральному уравнению

$$z(t; z_0, \xi) = U(t)z_0 + \int_0^t U(\tau) (N_{t-\tau} z(t-\tau, \xi) + \Psi(t-\tau) + H\xi(t-\tau, \lambda)) d\tau, \quad (3.2)$$

где  $\{U(t)\} (t > 0)$  — однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов  $\Phi \rightarrow \Phi$ , соответствующая однородной системе  $\frac{d}{dt} u(t) = Pu(t) (u \in \Phi)$ .

В случае, когда задача Коши для уравнения (3.1) не имеет решения в смысле [6], то интегральное уравнение (3.2) будет определением обобщенного решения задачи Коши для (3.1).

Мы будем предполагать, что выполнено условие

$$\|U(t)\|_{(\Phi \rightarrow \Phi)} \ll Me^{-\alpha t} \quad (3.3)$$

с некоторыми положительными константами  $M$  и  $\alpha$ . Далее мы предположим, что нелинейный оператор  $N_t$  при каждом фиксированном значении  $t \in [0, \Omega]$  принадлежит классу  $K(\Phi; A, B, C)^*$ .

**Определение 3.1.** Класс  $K(\Phi; A, B, C)$  состоит из операторов  $\Phi \rightarrow \Phi$ , удовлетворяющих 1) условию Липшица

$$\|N_t z_1 - N_t z_2\|_\Phi \leq \text{const} \|z_1 - z_2\|_\Phi \quad (z_1, z_2 \in \Phi);$$

2) неравенству

$$\rho(z_1, z_2; A, B, C) \equiv \text{Re} \{ \langle \Delta_{1,2}^z N_t z, A \Delta_{1,2}^z z \rangle_\Phi + \langle \Delta_{1,2}^z N_t z, B \Delta_{1,2}^z N_t z \rangle_\Phi \} - \|C \Delta_{1,2}^z N_t z\|_\Phi^2 \geq 0, \quad (3.4)$$

где  $A, B$  — линейные ограниченные замкнутые операторы  $\Phi \rightarrow \Phi$ ,  $C$  — линейный ограниченный оператор  $\Phi \rightarrow \Phi_1 \subset \Phi$ .

Введем некоторые обозначения. Для произвольной функции

$$x(t), x(t) \in Z(\Phi; t_0, t_0 + T), \int_{t_0}^{t_0+T} \|x(t)\| dt < \infty$$

\* Примеры таких классов для  $\Phi = R^n$  можно найти в статье [7], а также в других работах (см. обзоры работ в [8; 9]).

обозначим через  $F_{t_0, T}$  отображение Фурье  $Z(\Phi; t_0, t_0 + T) \rightarrow Z(\Phi; -\infty, \infty)$ :

$$\hat{x}(\omega) \equiv \{F_{t_0, T} x(t)\}(\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (3.5)$$

и для произвольного линейного ограниченного замкнутого оператора  $D(\Phi \rightarrow \Phi)$  через  $\hat{D}$  обозначим оператор, удовлетворяющий для любого  $x(t)$

$$x(t) \in Z(\Phi; t_0, t_0 + T), \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \|x(t)\|_{\Phi}^2 dt < \infty$$

и при любых  $t_0 \in R^1$  и  $T > 0$  равенству Парсеваля

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \langle x(t), Dx(t) \rangle_{\Phi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{x}(\omega), \hat{D}\hat{x}(\omega) \rangle_{\Phi} d\omega. \quad (3.5a)$$

При сделанных выше предположениях будет иметь место следующая теорема, доказательство которой мы опускаем ввиду его достаточной аналогии со случаем  $\Phi = R^{n*}$ .

**Теорема 3.1.** Пусть выполняются все сделанные выше предположения относительно уравнения (3.1), в частности, условия (3.4), (3.5) с  $C = \delta I$  ( $\delta > 0$ ). Кроме того, предположим, что для любых  $z_1, z_2 \in \Phi$  и любом  $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \langle \hat{A}R(j\omega, P) + \hat{B} \rangle \Delta_{1,2}^z F_{0,T} N_t z, \Delta_{1,2}^z F_{0,T} N_t z \rangle_{\Phi} \} d\omega \leq 0, \quad (3.6)$$

где  $R(\lambda, P)$  — резольвента оператора  $P$  [6]. Тогда для траекторий уравнения (3.1) будут справедливы следующие неравенства:

$$\|z(T; \theta, \xi_1(t)) - z(T; \theta, \xi_2(t))\|_{\Phi}^2 + \int_0^T \|z(t; \theta, \xi_1(s)) - z(t; \theta, \xi_2(s))\|_{\Phi}^2 dt \leq \operatorname{const} \int_0^T \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{R^n}^2 dt, \quad (3.7)$$

$$\|z(t; z_1^0, \xi(s)) - z(t; z_2^0, \xi(s))\|_{\Phi} \leq e^{-\lambda t} \|z_1^0 - z_2^0\|_{\Phi}, \quad (3.8)$$

$$z_{1,2}^0 \in \Phi, \quad \xi_{1,2}(t) \in F(R^n; 0, T), \quad \lambda > 0, \quad T > 0.$$

**Замечание 1.** Условие (3.6) в случае  $\Phi = R^n$  сводится к условию неположительности эрмитовой матрицы, соответствующей подынтегральному выражению в (3.6). Однако для целого ряда задач условие (3.6) трудно проверяемо. В таких случаях, особенно, когда  $P$  — дифференциальный оператор, более приемлемой может оказаться следующая форма неравенства (3.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \langle \hat{A}\hat{\omega}_T, (j\omega - P)\hat{\omega}_T \rangle_{\Phi} + \langle \hat{B}(j\omega - P)\hat{\omega}_T, (j\omega - P)\hat{\omega}_T \rangle_{\Phi} \} d\omega \leq 0. \quad (3.9)$$

\* Доказательство теоремы 3.1 для  $\Phi = R^n$  можно найти в статье [10].

где через  $\hat{w}_T(\omega)$  обозначено преобразование Фурье от функции  $w_T(t) \in F(\Phi; 0, \infty)$ , удовлетворяющей при нулевом начальном условии уравнению (3.1), в котором  $\Psi(t) \equiv 0_\Phi$ ,  $\xi(t) \equiv 0_{R^n}$  и вместо  $N_t z$  стоит функция  $(\Delta_{1,2}^z N_t z)_T = \{\Delta_{1,2}^z N_t z \text{ при } t \in [0, T]; 0_\Phi \text{ при } t \in [0, T]\}$ .

Отметим, что условие (3.9) для соответствующих частных вариантов уравнения (3.1) смыкается с условием (3.3) и с критерием абсолютной устойчивости, сформулированным в работе [11].

**Определение 3.2.** Классом  $S^+ H^n(\varepsilon)$  будем называть совокупность случайных функций  $\xi(t, \lambda)$ , заданных на вероятностном пространстве  $(\Lambda, F, P)$  и удовлетворяющих условиям

$$a) \quad \xi(t, \lambda) = \int_{-\infty}^t s_0(t - \tau) \eta(\tau, \lambda) d\tau + \sum_{i=1}^M s_i \eta(t - \alpha_i) \quad (t > 0),$$

где  $\alpha_1 < \dots < \alpha_M$  — неотрицательные числа,  $\eta \in R^n$ ,  $M$  — произвольное натуральное число,  $s_0(t)$  — матричная функция, абсолютно интегрируемая с показателями 1 и 2 на полуоси,  $s_i$  — матрицы  $(n \times n)$ ;

$$б) \quad E \{ \eta(t, \lambda) \mid \eta(\tau, \lambda), \tau \leq t - \nu \} = 0_{R^n*};$$

$$в) \quad \sup_t E \|\eta(t, \lambda)\|^2 = \sigma^2.$$

Обозначим через  $S(j\omega)$  преобразование Фурье функции  $s(t) = s_0(t) + \sum s_i \delta(t - \alpha_i)$  ( $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака) и, кроме того, обозначим\*\*

$$R_T(\omega; A, B, B', D, D', \varepsilon) \equiv \\ \equiv \text{Re } E \left\langle \left( \begin{array}{cc} \hat{A}R(j\omega, P) \hat{B}, & \hat{A}R(j\omega, P) + \hat{D}' \\ e^{-\varepsilon j\omega} \hat{A}R(j\omega, P) S(j\omega) + \hat{B}', & e^{-\varepsilon j\omega} \hat{A}R(j\omega, P) S(j\omega) + \hat{D} \end{array} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \begin{array}{c} \Delta_{1,0}^\lambda F_{0,T} N_{t-\varepsilon} z(t - \varepsilon, \lambda) \\ \Delta_{1,0}^\lambda F_{0,T} H\eta(t, \lambda) \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \Delta_{1,0}^\lambda F_{0,T} N_{t-\varepsilon} z(t - \varepsilon, \lambda) \\ \Delta_{1,0}^\lambda F_{0,T} H\eta(t, \lambda) \end{array} \right) \right\rangle_\Phi$$

где

$$\left\langle \left( \begin{array}{cc} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right) \right\rangle_\Phi \equiv \sum_{i,j=1}^2 \langle L_{ij} x_i, y_j \rangle_\Phi.$$

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 3.1 ( $N_t \in K(\Phi; A, B, \delta I)$ ) и, кроме того, для некоторых линейных ограниченных операторов  $B', D', D$  ( $\varepsilon > 0$ ) и для любого  $T > 0$ \*\*\*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_T(\omega; A, B, B', D, D', \varepsilon) d\omega \leq 0. \tag{3.10}$$

Тогда

\* Левая часть есть условное математическое ожидание случайной величины  $\eta(t, \lambda)$  при заданной предистории процесса  $\{\eta(t)\}$  до момента  $t - \nu$  [4].

\*\* Здесь и далее под  $\lambda_0$  понимается некоторая точка множества  $\Lambda$ , такая, что  $\xi(t, \lambda_0) \equiv 0$ ;  $\lambda_1$  — произвольная точка  $\Lambda$ .

\*\*\* Условие (3.10) включает в себя условие (3.6).



$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T \|\Delta_{1,0}^\lambda N_t z(t; \theta, \xi)\|_\Phi^2 dt \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \|D\|_{(\Phi \rightarrow \Phi)} \|H\|_{(R^n \rightarrow \Phi)}^2 \quad (3.11)$$

при  $\xi(t, \lambda) \in S^+ H_\nu^n(\sigma)$ , где число  $\nu > 0$  не превышает величины  $\varepsilon + \vartheta$ , а  $\vartheta \geq 0$  — число, определяющееся условием

$$\|s(t)\| = 0 \quad (\text{при } t \leq \vartheta), \quad \frac{d}{dt} \|s(t)\| > 0 \quad (\text{при } t = \vartheta). \quad (3.12)$$

**З а м е ч а н и е 2.** Все, что было сказано в замечании 1 относительно условия (3.6), остается справедливым и для условия (3.10). Это условие, очевидно, также может быть записано в форме, свободной от  $R(j\omega, P)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим

$$x_1(t) = \Delta_{1,2}^\lambda N_{t-\varepsilon} z(t - \varepsilon, \lambda), \quad x_2(t) = \Delta_{1,2}^\lambda H\eta(t, \lambda),$$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} U(t - \tau - \varepsilon) x_1(\tau) d\tau, \quad y_2(t) = \int_0^t U(t - \tau) \int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} s(\tau - \varepsilon - p) x(p) dp d\tau$$

и рассмотрим при любом  $T > 0$  выражение

$$S_T \equiv \operatorname{Re} \int_0^T E \left\langle \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & D' \\ B' & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle_\Phi dt. \quad (3.13)$$

На основании равенства Парсевала (3.5 а)

$$S_T = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(\omega; A, B, B', D, D', \varepsilon) d\omega \leq 0. \quad (3.14)$$

Далее, согласно пункту Б) определения 3.2 и указанному выше свойству числа  $\nu$ , для любого  $t - \varepsilon$  и любого (непрерывного) оператора  $\varphi_t: \Phi \rightarrow \Phi$  будет иметь место равенство

$$E \langle \varphi_t z(t, \lambda), H\eta(t, \lambda) \rangle^{(P)} = 0. \quad (3.15)$$

Используя теперь это равенство вместе с (3.2)—(3.4), (3.14) в правой части (3.13) и проводя оценки по неравенству Коши—Буняковского, мы и получим искомое неравенство (3.10).

#### 4. ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ТРАЕКТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (3.1) ПРИ ЭРГОДИЧЕСКОМ КЛАССЕ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

**Определение 4.1.** Динамическую систему  $\{\Psi_\tau^{(t_0)}(z_0, \xi(t))\}$  будем называть  $\delta$ -диссипативной, если для всех  $z_0 \in \Phi$  и для всех  $\xi(t) \in F(H; t_0, \infty)$ ,  $\sup_t \|\xi(t)\|_H \leq \delta$  выполняется условие

$$\overline{\lim}_{\substack{\tau \rightarrow \infty \\ \tau \in \Gamma}} \|\Psi_\tau^{(t_0)}(z_0, \xi(t))\|_\Phi \leq C(\delta, t_0) < \infty.$$

Если динамическая система порождена некоторым дифференциальным уравнением, то можно считать константу  $C$  не зависящей от  $t_0$ . Динамическая система, порожденная дифференциальным уравнением (3.1),

будет  $\delta$ -диссипативной, если, например, выполняется условие (3.3) и область значений оператора  $N_t$  равномерно ограничена по  $t$  в пространстве  $\Phi$ .

В дальнейшем нам понадобится только один факт, вытекающий из понятия диссипативности. Этот факт следует из теорем работы [12] и заключается в следующем. Если динамическая система вида (3.1) 0-диссипативна и если для ее траекторий выполняется условие (3.8), то при  $\xi(t) \equiv 0$  будет существовать периодическая траектория, асимптотически устойчивая в целом. Обозначим это  $\Omega$ -периодическое решение уравнения (3.1) с  $\xi(t) \equiv 0$  через  $\omega(t)$ , а через  $\vartheta(t)$  обозначим функцию  $N_t \omega(t)$ . Из теоремы 3.2 мы получим тогда, что для любого  $z_0 \in \Phi$

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T \|N_t z(t; z_0, \xi) - \vartheta(t)\|_{\Phi}^2 dt \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \|D\| \|H\|^2. \quad (4.1)$$

Обозначим через  $\{\tilde{\Psi}_t^{(\xi_0)} \Delta z, \xi(t)\}$  динамическую систему  $\{\Phi, \Gamma_{\Omega} F(R^n)\}$  порожденную уравнением

$$\frac{d}{dt} \Delta z = P \Delta z + \tilde{N}_t \Delta z - \vartheta(t) + H \xi(t, \lambda),$$

где

$$\tilde{N}_t \Delta z \equiv N_t(\Delta z + \omega(t)).$$

Очевидно, что, если  $N_t \in K(\Phi; A, B, \delta I)$ , то и  $\tilde{N}_t \in K(\Phi; A, B, \delta I)$ .

Пусть  $\{\xi(t, \lambda)\}$  — эргодический подкласс входных функций, принадлежащий классу  $S^+ H_{\sigma}^n(\sigma)$ , который мы будем обозначать через  $TS^+ H_{\sigma}^n(\sigma)$ . Тогда при выполнении условий теоремы 3.1 будем иметь

$$S_{\varphi}(\lambda) \equiv \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\varphi}_t \Delta z(t)\|_{\Phi}^2 dt \stackrel{(P)}{<} \infty, \quad (4.2)$$

где  $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\Omega}$  — периодическое продолжение оператора  $\varphi_t$  на  $R^1$ . Из (4.2), в свою очередь, следует, что почти для всех  $s \in [0, \Omega]$

$$S_{\varphi}(s, \lambda) \equiv \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \|\tilde{\varphi}_t \Delta z(s + n\Omega)\|_{\Phi}^2 \stackrel{(P)}{<} \infty, \quad (4.3)$$

ибо

$$S_{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} S_{\varphi}(s, \lambda) ds. \quad (4.4)$$

Итак, мы имеем следующее. При выполнении условия (3.6) теоремы 3.1 (а тем более при выполнении условия (3.10) теоремы 3.2) выполняется условие В) теоремы 2.1. Если динамическая система  $\{\Psi_t^{(\xi_0)}\}$  0-диссипативна, то для динамической системы  $\{\tilde{\Psi}_t^{(\xi_0)}\}$  выполняется условие А) теоремы 2.1 с  $\theta = 0_{\Phi}$ . Неравенство же (4.3) обеспечивает для этой динамической системы выполнение условия Б) теоремы 2.1 и условия (2.10) теоремы 2.2. Следовательно, для динамической системы  $\{\tilde{\Psi}_t^{(\xi_0)}\}$

выполняется равенство (2.11). Отсюда, полагая в этом равенстве  $\tilde{\varphi}_t \equiv N_t$  и учитывая (4.4), (4.1), мы получим, что

$$S_{N_t}(\lambda) \stackrel{(P)}{=} \text{const} \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \|D\| \|H\|^2.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Теорема 4.1.** Пусть динамическая система, порожденная уравнением (3.1) — (3.3), удовлетворяет следующим условиям:

- а) при  $\xi(t) \equiv 0$  существует периодическое решение  $z(t) = \omega(t)$ ,
- б)  $N_t \subset K(\Phi; A, B, \delta I)$ ,
- в)  $\xi(t, \lambda) \subset TS^+ H^n(\sigma)$ ,
- г) выполняется неравенство (3.10).

Тогда

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|N_t z(t, z_0, \xi) - N_t^* \omega(t)\|_{\Phi}^2 dt \leq \frac{\sigma^2}{\delta} \|D\| \|H\|^2. \quad (4.5)$$

**Замечание 3.** Можно дать полученному результату такую «физическую» интерпретацию. Предположим, что выходной величиной динамической системы (3.1) служит  $y(t) = N_t z(t)$ . Если внешний случайный сигнал отсутствует ( $\xi(t) \equiv 0$ ), то при сделанных выше предположениях в системе установится периодический режим, который, следуя классификации, принятой в теории колебаний, можно отнести к неавтоколебательному типу: при  $N_t = N$  он будет представлять вынужденные колебания, а при  $\Psi(t) = \text{const}$  параметрические [3]. Если теперь на вход динамической системы будет подан случайный процесс класса  $TS^+ H^n(\sigma)$ , то к этому периодическому режиму на входе добавится некоторый случайный сигнал-шум, оценку среднеквадратичной мощности которого и дает неравенство (4.5).

От неравенства (4.5) можно с помощью оценок правой части уравнения (3.2) перейти к оценке для  $z(t; z_0, \xi) - \omega(t)$ . Наконец, все вышеприведенные рассуждения можно повторить и для класса  $K(\Phi; A, B, C)$  с произвольным ограниченным оператором  $C$  и получить аналогичную оценку для  $CN_t z(t) - C\omega(t)$ .

**Замечание 4.** Можно рассмотреть ту же задачу для случая, когда  $\{\xi(t)\} = \{\xi_1(t)\} + \{\xi_2(t)\}$ , где  $\{\xi_1(t)\} \subset TS^+ H^n(\sigma)$ , а  $\{\xi_2(t)\}$  — эргодический процесс малой мощности, т. е.  $E \|\xi_2(t)\|^2 = 0(\sigma)$ . В этом случае можно утверждать, что окончательные оценки будут отличаться от соответствующих оценок при  $\{\xi_2(t)\} = 0$  на величину порядка  $0(\sigma)$ . Для случая  $\Phi = R^n$  это вытекает из результатов работы [13].

**Дополнение. Теорема об аппроксимации и  $\Gamma$ -почти-периодические траектории системы (3.1).** Пусть  $\Gamma$  — некоторая полугруппа одномерных сдвигов.

**Определение.** Назовем непрерывную функцию  $h(t) \in F(H)$   $\Gamma$ -почти-периодической, если полугруппа  $\Gamma$  предкомпактна [14] в метрике  $\rho_h$ :

$$\rho_h(\tau_1, \tau_2) = \sup_{t \in R^1} \|h(t + \tau_1) - h(t + \tau_2)\|_H \quad (\tau_1, \tau_2 \in \Gamma).$$

Данное определение эквивалентно определению почти-периодической функции на группе  $\tilde{\Gamma}$  в смысле Бохнера—Неймана—Морена [14], где  $\tilde{\Gamma} = \{\tau, -\tau; \tau \in \Gamma\}^*$ . Будем, как и раньше, обозначать через  $\Gamma_\sigma$

\* Если  $\tilde{\Gamma} = R^1$ , то получаем определение почти-периодической функции в смысле Бохнера—Неймана—Морена.

полугруппу  $\{\tau, \tau = \Omega n, n = 0, 1, \dots\}$  и рассмотрим  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодические функции\*.

**Теорема 1.** Предположим, что система (3.1) 0-диссипативна и для нее выполнены условия теоремы 3.1. Тогда, если  $h(t)$  —  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодическая функция, то будет существовать такая  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодическая функция  $z^*(t)$  ( $z \in \Phi$ ), что при некотором  $z_0 \in \Phi$

$$z(t; z_0, h(s)) = z^*(t).$$

**Доказательство.** Так как система (3.1) 0-диссипативна и выполняется условие (3.8), то, учитывая результаты работы [12], легко показать, что существует отображение  $\Pi (F(H) \rightarrow F(\Phi))$ , удовлетворяющее следующему условию: для любого  $\bar{t} \in R^1$  существует такое  $z_0(\bar{t}) \in \Phi$ , что для любого  $\bar{t} > 0$

$$\{\Pi h(s + \bar{t})\}(t) = z(t; z_0(\bar{t}), h(s + \bar{t})) = z^*(t; h(s + \bar{t})).$$

Обозначим через  $\Pi_\Gamma^{(t_0)} (t_0 \in [0, \Omega])$  отображение  $F(H) \rightarrow F(\Phi, \Gamma_\Omega)$ , удовлетворяющее условию

$$\{\Pi_\Gamma^{(t_0)} h\}(t_0 + \tau) = z^*(\tau; t_0, h(t)) \equiv z^*(t_0 + \tau), h(t).$$

Применяя теорему об аппроксимации раздела 2 и учитывая, что в данном случае (т. е. для динамической системы (3.1)) оператор  $\Omega_T^{(t)}$  будет непрерывным, получим, что отображение  $\Pi_\Gamma^{(t_0)}$  также непрерывно для  $t_0 \in [0, \Omega]$ . А отсюда немедленно вытекает, что функция  $z^*(t, h)$  —  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодическая.

**Следствие.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда, если  $h(t)$  — непрерывная,  $T$ -периодическая функция и  $T$  не соизмеримо с  $\Omega$ , то функция  $(\Pi h)(t)$  есть  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодическая функция.

Это утверждение вытекает из предыдущей теоремы и из теоремы Дирихле, утверждающей, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие натуральные числа  $m$  и  $n$ , что  $|m\Omega - nT| \leq \varepsilon$ , так что  $T$ -периодическая функция является также и  $\Gamma_\Omega$ -почти-периодической функцией.

**Теорема 2\*\*.** Если выполнены условия теоремы 1 и если  $h(t)$ -почти-периодическая функция в смысле Бохнера—Неймана—Морена, то будет существовать такая почти-периодическая функция  $z^*(t, h)$ , что при  $t > 0$

$$z^*(t, h) = z(t; z_0(h), h).$$

**Доказательство.** Так как операторные функции  $\Pi_\Gamma^{(t_0)}$  непрерывны (при  $t_0 \in [0, \Omega]$ ), то они и равностепенно непрерывны на этом отрезке. Отсюда вытекает, что отображение  $\Pi$  непрерывно и, следовательно, оно отображает почти-периодические функции в почти-периодические функции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Х. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

\* Характеристическим свойством таких функций, как это вытекает из общей теории почти-периодических функций на группах и теории представлений групп [14], является их разложимость в абсолютно-сходящиеся ряды вида

$$f(t_0 + n\Omega) = \sum_{\omega} a(\omega, t_0) e^{i\omega\Omega n}, \quad a(\omega, \Omega) = a(\omega, 0) e^{i\omega\Omega} \quad (t_0 \in [0, \Omega]).$$

\*\* Теорема 2 является перенесением известных результатов В. А. Якубовича о почти-периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений ([15]) на произвольные гильбертовы пространства.

2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, изд. Наука, М., 1965.
3. Д. ж. Х. Лэннинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958
4. Д. ж. Л. Дуб, Вероятностные процессы. ИЛ, М., 1956
5. Н. Бурбаки, Интегрирование, изд. Наука, М., 1967
6. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, изд. Наука, М., 1967.
7. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, № 6, 3 (1967)
8. В. А. Брусин, сб. Прикладная математика и кибернетика, Материалы к Всесоюзному межвузовскому симпозиуму по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967.
9. Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 6, 5 (1968).
10. В. А. Якубович, Вестник ЛГУ, № 7, 109 (1967).
11. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 321 (1969),
12. Ю. И. Неймарк, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 2, изд. Наука, М., 1965
13. А. Х. Гелиг, Автоматика и телемеханика, 27, № 3, 16 (1967).
14. К. Морен, Методы Гильбертова пространства, изд. Мир, М., 1965.
15. В. А. Якубович, Докл. АН СССР, 173, № 3, 533 (1966).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 апреля 1969 г.

## UNIFORM STATISTIC ESTIMATIONS OF OUTPUT PROCESS FOR ONE CLASS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

*V. A. Broosin*

The paper deals with a nonlinear dynamic system, an abstract cylinder being its phase space. Some statistic properties of the output process which are uniform with respect to nonlinearity classes are studied when input is fed with stochastic signal with certain statistic properties.

---

УДК 517.941.92

## О ПРИМЕНЕНИИ $z$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. В. Шильман

Излагается метод исследования устойчивости и определения собственных и вынужденных движений линейных систем с периодическими коэффициентами, основанный на использовании модифицированного  $z$ -преобразования и интегральных уравнений.

Известен целый ряд аналитических методов исследования линейных динамических систем с периодическими коэффициентами: метод возмущений в различных его формах [1, 2] и [3-5], метод Хилла [6, 7] и др. В работе [8] для исследования вынужденных колебаний и вычисления определителя Хилла использовались уравнения Фредгольма II рода.

В данной работе излагается метод решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, основанный на использовании модифицированного  $z$ -преобразования [9, 10]. С помощью этого преобразования задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода с матричным ядром, зависящим от комплексного параметра  $z$ . Доказывается, что элементы матрицы-резольвенты этого уравнения являются дробно-рациональными функциями от  $z$ . Находится характеристическая матрица системы дифференциальных уравнений, элементы которой представлены в виде разложения в ряды по параметру, сходящиеся при любых конечных значениях последнего. Рассматривается вопрос об определении мультипликаторов систем с малым параметром. С помощью теории вычетов устанавливается связь решений дифференциальных уравнений с решениями интегральных уравнений в более общем случае, чем в [8]. Показывается, что интегральные уравнения можно использовать для определения практически всех типов решений системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

### 1. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, имеющую в векторной форме вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \mu B(t)x + f(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, f$  — матрицы-столбцы,  $A$  — квадратная постоянная матрица,  $B(t)$  — квадратная матрица с  $T_0$ -периодическими ограниченными элементами,  $\mu$  — скаляр.

Обозначим

$$y = \mu B(t)x + f(t). \quad (2)$$

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + y, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) определяется выражением [15]

$$x(t) = K(t) x_0 + \int_0^t K(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где

$$K(t) = \begin{cases} e^{At} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}.$$

Подставив  $x(t)$  в виде (4) в (2), получим

$$y(t) - \mu \int_0^t B(t) K(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t) + \mu B(t) K(t) x_0. \quad (5)$$

Разобьем интервал интегрирования в (5) на отрезки длины  $T$ , где  $T = kT_0$  ( $k$ —натуральное число), и примем, что  $t = nT + \varepsilon T$ ,  $\tau = mT + \lambda T$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ;  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y(nT + \varepsilon T) - \mu \sum_{m=0}^n T \int_0^1 B(\varepsilon T) K(nT - mT + \varepsilon T - \lambda T) \times \\ \times y(mT + \lambda T) d\lambda = f(nT + \varepsilon T) + \mu B(\varepsilon T) K(nT + \varepsilon T) x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Применив к левой и правой частям (6) модифицированное  $z$ -преобразование [9, 10], получим интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\begin{aligned} Y^*(z, \varepsilon) - \mu \int_0^1 B(\varepsilon T) K^*(z, \varepsilon - \lambda) Y^*(z, \lambda) d\lambda = \\ = F^*(z, \varepsilon) + \mu B(\varepsilon T) K^*(z, \varepsilon) x_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$K^*(z, \varepsilon - \lambda) = \begin{cases} T \sum_{n=0}^{\infty} e^{AnT} z^{-n} e^{A(\varepsilon - \lambda) T} & (\varepsilon > \lambda) \\ T \sum_{n=1}^{\infty} e^{AnT} z^{-n} e^{A(\varepsilon - \lambda) T} & (\varepsilon < \lambda) \end{cases},$$

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + \varepsilon T) z^{-n}, \quad (8)$$

$$F^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \varepsilon T) z^{-n}.$$

Определим норму матрицы  $\|A\| = \max_{ij} |a_{ij}|$ . Тогда ряды (8) будут сходиться при  $|z| > \|e^{AT}\|$  и для этих  $z$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{AT} z^{-1})^n = z [Ez - e^{AT}]^{-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{AT} z^{-1})^n = z [Ez - e^{AT}]^{-1} - E = [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{AT},$$

где  $E$  — единичная матрица.

Таким образом,

$$K^*(z, \varepsilon - \lambda) = \begin{cases} Tz [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{A(\varepsilon - \lambda)T} & (\varepsilon > \lambda) \\ T [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{A(1 + \varepsilon - \lambda)T} & (\varepsilon \leq \lambda) \end{cases} \quad (9)$$

При  $\varepsilon = \lambda$   $K^*(z, 0)$  доопределена согласно (9).

Итак, мы получили интегральное уравнение вида

$$Y^*(z, \varepsilon) - \mu \int_0^1 G(z, \varepsilon, \lambda) Y^*(z, \lambda) d\lambda = \Phi^*(z, \varepsilon), \quad (10)$$

где

$$G(z, \varepsilon, \lambda) = B(\varepsilon T) K^*(z, \varepsilon - \lambda),$$

$$\Phi^*(z, \varepsilon) = F^*(z, \varepsilon) + \mu B(\varepsilon T) K^*(z, \varepsilon) x_0.$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение интегрального уравнения (10) можно представить в виде [11] (том 4)

$$Y^*(z, \varepsilon) = \Phi^*(z, \varepsilon) + \mu \int_0^1 \Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu) \Phi^*(z, \lambda) d\lambda, \quad (11)$$

где  $\Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu)$  — резольвента, являющаяся решением интегральных уравнений

$$\Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu) - \mu \int_0^1 G(z, \varepsilon, \gamma) \Gamma(z, \gamma, \lambda, \mu) d\gamma = G(z, \varepsilon, \lambda), \quad (12)$$

$$\Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu) - \mu \int_0^1 G(z, \gamma, \lambda) \Gamma(z, \varepsilon, \gamma, \mu) d\gamma = G(z, \varepsilon, \lambda). \quad (13)$$

При  $f(t) \equiv 0$  решение определяется равенством

$$Y^*(z, \varepsilon) = \left[ \mu G(z, \varepsilon, 0) + \mu^2 \int_0^1 G(z, \lambda, 0) \Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu) d\lambda \right] x_0.$$

В силу (13) имеем

$$Y^*(z, \varepsilon) = \mu \Gamma(z, \varepsilon, 0, \mu) x_0.$$

Общее решение имеет вид

$$Y^*(z, \varepsilon) = \mu \Gamma(z, \varepsilon, 0, \mu) x_0 + F^*(z, \varepsilon) + \mu \int_0^1 \Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu) F^*(z, \lambda) d\lambda. \quad (14)$$



*Теорема 1.* Элементы матрицы-резольвенты  $\Gamma(z, \varepsilon, \lambda, \mu)$  являются дробно-рациональными функциями  $z$ . Знаменатель резольвенты равен определителю матрицы

$$D(z, \mu) = Ez - e^{AT} - \mu T \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} \left[ E + \mu \int_{\lambda}^1 R(\gamma, \lambda, \mu) d\gamma \right] \times \\ \times B(\lambda T) e^{A\lambda T} d\lambda,$$

где

$$R(\gamma, \lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n K_n(\gamma, \lambda),$$

$$K_n(\gamma, \lambda) = \int_{\lambda}^{\gamma} K_0(\gamma, s) K_{n-1}(s, \lambda) ds,$$

$$K_0(\gamma, \lambda) = TB(\gamma T) e^{A(\gamma-\lambda)T}.$$

Ряд для  $R(\gamma, \lambda, \mu)$  сходится при любом конечном  $\mu$ .

*Доказательство.* Уравнение (11) можно записать следующим образом:

$$Y^*(z, \varepsilon) - \mu T \int_0^{\varepsilon} B(\varepsilon T) [Ez - e^{AT}]^{-1} z e^{A(\varepsilon-\lambda)T} Y^*(z, \lambda) d\lambda - \\ - \mu T \int_{\varepsilon}^1 B(\varepsilon T) [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{A(1+\varepsilon-\lambda)T} Y^*(z, \lambda) d\lambda = \Phi^*(z, \varepsilon). \quad (15)$$

Поскольку  $z [Ez - e^{AT}]^{-1} = E + [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{AT}$ , то уравнение (15) преобразуется к виду

$$Y^*(z, \varepsilon) - \mu T \int_0^{\varepsilon} B(\varepsilon T) e^{A(\varepsilon-\lambda)T} Y^*(z, \lambda) d\lambda - \\ - \mu T \int_0^1 B(\varepsilon T) [Ez - e^{AT}]^{-1} e^{A(1+\varepsilon-\lambda)T} Y^*(z, \lambda) d\lambda = \Phi^*(z, \varepsilon). \quad (16)$$

Из (16) видно, что исходный оператор Фредгольма разбивается на два: оператор Вольтерра, не зависящий от  $z$ , и вырожденный оператор Фредгольма. Считая последний известным, будем рассматривать (16) как интегральное уравнение Вольтерра II рода. Известно, что при любых конечных значениях  $\mu$  это уравнение имеет единственное решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений. Решив уравнение Вольтерра, получим вырожденное интегральное уравнение Фредгольма II рода. Последнее уравнение решим путем сведения к линейной алгебраической системе, тогда получим решение в виде, доказывающем утверждения теоремы.

Следуя указанной схеме, найдем  $Y^*(z, \varepsilon)$ . Используя представление решения интегрального уравнения Вольтерра II рода через резольвенту, получим

$$Y^*(z, \varepsilon) - \mu T \int_0^1 [B(\varepsilon T) e^{A\varepsilon T} + \mu \int_0^{\varepsilon} R(\varepsilon, \gamma, \mu) B(\gamma T) e^{A\gamma T} d\gamma] \times \\ \times e^{A(1-\lambda)T} [Ez - e^{AT}]^{-1} Y^*(z, \lambda) d\lambda = \Phi^*(z, \varepsilon) + \\ + \mu \int_0^{\varepsilon} R(\varepsilon, \lambda, \mu) \Phi^*(z, \lambda) d\lambda. \quad (17)$$

Здесь  $R(\gamma, \lambda, \mu)$  — резольвента интегрального уравнения Вольтерра с ядром  $TB(\varepsilon T) e^{A(\varepsilon-\lambda)T}$ :

$$R(\gamma, \lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n K_n(\gamma, \lambda),$$

$$K_n(\gamma, \lambda) = \int_{\lambda}^{\gamma} K_0(\gamma, s) K_{n-1}(s, \lambda) ds,$$

$$K_0(\gamma, \lambda) = TB(\gamma T) e^{A(\gamma-\lambda)T}.$$

Введя обозначения

$$N(\varepsilon) = B(\varepsilon T) e^{A\varepsilon T} + \mu \int_0^{\varepsilon} R(\varepsilon, \gamma, \mu) B(\gamma T) e^{A\gamma T} d\gamma,$$

$$\Psi(z, \varepsilon) = \Phi^*(z, \varepsilon) + \mu \int_0^{\varepsilon} R(\varepsilon, \lambda, \mu) \Phi^*(z, \lambda) d\lambda,$$

решение (16) можно представить в виде

$$Y^*(z, \varepsilon) = \Psi(z, \varepsilon) + \mu TN(\varepsilon) [Ez - e^{AT}]^{-1} C^*(z). \quad (18)$$

$C^*(z)$  определяется алгебраическим уравнением

$$\begin{aligned} C^*(z) - \mu T \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} N(\lambda) d\lambda [Ez - e^{AT}]^{-1} C^*(z) = \\ = \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} \Psi(z, \lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} C^*(z) = \left\{ E - \mu T \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} N(\lambda) d\lambda [Ez - e^{AT}]^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} \Psi(z, \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Подставив полученное  $C^*(z)$  в (18), найдем

$$\begin{aligned} Y^*(z, \varepsilon) = \Psi(z, \varepsilon) + \mu TN(\varepsilon) \{ [Ez - e^{AT}] D(z, \mu) [Ez - e^{AT}]^{-1} \}^{-1} \times \\ \times \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} \Psi(z, \lambda) d\lambda, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D(z, \mu) = Ez - e^{AT} - \mu T \int_0^1 e^{A(1-\lambda)T} \left[ E + \mu \int_{\lambda}^1 R(\gamma, \lambda, \mu) d\gamma \right] \times \\ \times B(\lambda T) e^{A\lambda T} d\lambda. \end{aligned}$$

Сравнивая (19) с (11), нетрудно найти выражение для резольвенты из которого следует, что ее элементы — дробно-рациональные функции  $z$ . Знаменателем резольвенты будет



Поскольку  $\Gamma(z, \varepsilon, 0, \mu)$  — дробно-рациональная функция с полюсами  $z_i$  кратности  $l_i$ , то

$$y(nT, \varepsilon T) = \mu \sum_i \operatorname{res}_{z=z_i} z^{n-1} \Gamma(z, \varepsilon, 0, \mu) x_0.$$

Учитывая (20), получим

$$y(nT, \varepsilon T) = \sum_i \sum_{m=1}^{m_i} \frac{\xi_{im}(\varepsilon)}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1} z^n}{dz^{m-1}} \right)_{z=z_i}, \quad (24)$$

где  $\xi_{im}(\varepsilon)$  являются решениями уравнений (21) и имеют вид (23).

Из формулы (24) следует, что для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни  $\det D(z, \mu) = 0$  были по модулю меньше единицы. Если хотя бы один из них будет по модулю превосходить единицу, то система будет неустойчивой. Таким образом,  $\det D(z, \mu) = 0$  является характеристическим уравнением.

Отметим следующие обстоятельства. Полученное характеристическое уравнение справедливо для любого конечного  $\mu$ , поскольку ряд для резольвенты сходится при всех  $|\mu| < \infty$ . Естественно, что его можно использовать для определения мультипликаторов  $u$  при малом  $\mu$  в том числе в тех случаях, когда  $\det D(z, 0) = 0$  имеет кратные корни, в частности, равные по модулю единице. Эта последняя задача имеет важное значение для гамильтоновых систем и рассматривалась в [13, 14]. Вопрос об определении характеристических показателей при малом  $\mu$  для общего класса систем с периодическими коэффициентами изучался в [3, 5] методом возмущений и в [6] с помощью определителя Хилла. Мы рассмотрим здесь эту задачу, используя приведенное характеристическое уравнение.

Пусть с помощью неособой квадратной матрицы  $P$  матрица  $A$  может быть приведена к жордановой форме  $J$ , т. е.

$$A = PJP^{-1}.$$

Тогда матрица  $D(z, \mu)$  может быть представлена в виде

$$D(z, \mu) = P\bar{D}(z, \mu)P^{-1},$$

где

$$\bar{D}(z, \mu) = Ez - e^{JT} - \mu T \int_0^1 e^{J(1-\lambda)\tau} P^{-1} [E + \mu \int_{\lambda}^1 R(\gamma, \lambda, \mu) d\gamma] B(\lambda T) P e^{J\lambda T} d\lambda.$$

Поскольку  $\det D(z, \mu) = \det \bar{D}(z, \mu)$ , в дальнейшем будем рассматривать  $\bar{D}(z, \mu)$ . Отметим, что входящая в выражение для  $\bar{D}(z, \mu)$  матрица  $\Phi(\lambda T) = P e^{J\lambda T}$  является фундаментальной для системы [15]:

$$\dot{x} = Ax, \quad t = \lambda T. \quad (25)$$

Столбцы матрицы  $P$  являются собственными векторами матрицы  $A$ . Другая матрица  $\Psi^c(t) = e^{-Jt} P^{-1}$  является сопряженной для фундаментальной матрицы  $\Psi(t)$  системы дифференциальных уравнений, сопряженной с (25). Столбцы  $Q = (P^c)^{-1}$  являются собственными векторами матрицы  $A^c$  ( $c$  — знак сопряженности). Характеристический определитель является рациональной функцией  $z$ . Используя известную формулу разложения определителя по степеням  $z$  [11], можно  $\det \bar{D}(z, \mu)$  представить в виде

$$(z - z_0)^n + S_{n-1}(\mu) (z - z_0)^{n-1} + \dots + S_1(\mu) (z - z_0) + S_0(\mu), \quad (26)$$

где  $z_0$  — некоторое фиксированное значение  $z$ ,  $S_k(\mu)$  — сумма всех главных миноров определителя  $\bar{D}(z_0, \mu)$  порядка  $n - k$ ,

$$S_k(\mu) = \sum_{p_1 < \dots < p_{n-k}} M_{n-k} \left( \mu, \begin{matrix} p_1, p_2, \dots, p_{n-k} \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-k} \end{matrix} \right).$$

Примем, что матрица  $A$  имеет группу сравнимых по модулю  $2\pi j/T$  собственных значений, т. е. представимых в виде

$$\lambda_k = \lambda_0 + \frac{2\pi j}{T} m_k \quad (k = 1, \dots, l), \quad (27)$$

где  $m_k$  — целые числа. Будем считать сначала, что все  $\lambda_k$  различны и что они являются первыми диагональными элементами  $J$ .

Тогда первые  $l$  строк  $\bar{D}(z_0, 0)$  будут нулевыми и, следовательно,  $z_0 = \exp(\lambda_0 T)$  будет  $l$  кратным корнем:  $\det \bar{D}(z, 0) = \det (Ez - e^{JT}) = 0$ . Будем искать приближенные значения  $l$  мультипликаторов, обращающихся при  $\mu \rightarrow 0$  в  $z = z_0 = \exp(\lambda_0 T)$ , используя уравнение (26). Эта задача фактически сводится к нахождению ветвей алгебраической функции в окрестности ее особых точек [16]. Будем искать  $z$  в виде

$$z(\mu) = z_0 + z_1 \mu^{\gamma_1} + z_2 \mu^{\gamma_2} + \dots,$$

где

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots$$

Определим сначала с помощью диаграммы Ньютона степень  $\gamma_1$ . Нетрудно увидеть, что младшая степень  $\mu$  в коэффициентах  $S_k(\mu)$  не менее  $l - k$  для  $k = 0, 1, \dots, l$ . Отсюда следует, что  $\gamma_1 = 1$  и  $z(\mu)$  имеет  $l$  ветвей в окрестности  $z_0$ . Найдем уравнение для  $z_1$ . Для этого поделим первые  $l$  строк  $\bar{D}(z, \mu)$  на  $\mu$  и обозначим полученную матрицу через  $C(z_0, \mu)$ . Новая матрица при  $\mu = 0$  будет содержать на месте нулевых строк  $D(z_0, 0)$  первые  $l$  строк матрицы

$$T e^{jT} \int_0^1 e^{-\lambda T} P^{-1} B(\lambda T) P e^{j\lambda T} d\lambda.$$

Отсюда следует, что  $S_k(\mu) = \mu^{l-k} [L_k(\mu) + 0(\mu)]$  ( $k = 0, 1, \dots, l$ ), где  $L_k(\mu)$  — сумма главных миноров  $(n - k)$ -го порядка матрицы  $C(z_0, \mu)$ , не содержащих  $k$  строк из первых  $l$ . Уравнение для  $z_1$  имеет вид

$$\chi(z_1) = \sum_{k=0}^l L_k(0) z_1^k = 0, \quad L_l(0) \neq 0.$$

Если  $\chi(z)$  поделить на  $L_l(0)$ , то новый полином будет равен

$$\det [E_l z_1 - C_l(z_0, 0)],$$

где  $C_l(z_0, 0)$  — матрица, состоящая из элементов  $c_{km}$ , стоящих на пересечении первых  $l$  строк и  $l$  столбцов матрицы  $C(z_0, 0)$ ,

$$c_{km} = T z_0 \int_0^1 \psi_k^c(\lambda T) B(\lambda T) \varphi_m(\lambda T) d\lambda.$$

Вектор-функции  $\varphi_m(\lambda T)$  и  $\psi_k(\lambda T)$  есть столбцы фундаментальных матриц  $\Phi(\lambda T)$  и  $\Psi(\lambda T)$ . Полученное уравнение совпадает с аналогичными уравнениями, полученными в [3, 5] другим методом.

Теперь пусть среди  $\lambda_k$  есть одинаковые, т. е. примем, что собственным числам  $\lambda_k$  указанной выше группы (27) соответствуют  $d$  первых клеток матрицы  $J$ , имеющих последовательно размеры  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_d$ ,

$\sum_{m=1}^d l_m = l$ . Тогда матрица  $\bar{D}(z_0, 0)$  будет клеточно-диагональной с первыми  $d$  клетками вида:

$$D_{l_m} = \begin{bmatrix} 0 & Tz_0 & \frac{z_0}{2} T^2 & \dots & \frac{z_0}{(l_m-1)!} T^{l_m-1} \\ 0 & 0 & z_0 T & \dots & \frac{z_0}{(l_m-2)!} T^{l_m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Остальные клетки аналогичны, но их диагональные элементы будут отличны от нуля. Отсюда видно, что  $\bar{D}(z_0, 0)$  содержит  $d$  нулевых строк и столбцов, а  $\bar{D}(z_0, \mu)$  столько же строк и столбцов порядка малости  $\mu$ . Поделив указанные строки на  $\mu$ , получим матрицу  $C(z_0, \mu)$ . Причем  $C(z_0, 0)$  отличается от  $\bar{D}(z_0, 0)$  тем, что на месте нулевых строк последней в  $C(z_0, 0)$  стоят соответствующие строки матрицы  $z_0 T \times \int_0^1 \exp(-\lambda T) P^{-1} B(\lambda T) P \exp(\lambda T) d\lambda$ . При этом на пересечении бывших нулевых строк и столбцов в каждой из первых  $d$  клеток  $C(z_0, 0)$  появится элемент вида  $z_0 T \int_0^1 q_{l_m}^c B(\lambda T) p_{l_m} d\lambda$ , где  $p_{l_m}(q_{l_m})$  — соответствующий вектор-столбец матрицы  $P(Q)$ .

Коэффициенты  $S_k(\mu)$  ( $k = 0, 1, \dots, l$ ) представим в виде:  $S_k(\mu) = \mu^{\alpha_k} [L_k(0) + O(\mu)]$ , где  $L_k(0) \neq 0$ . Примем далее, что  $\int_0^1 q_{l_m}^c B(\lambda T) p_{l_m} d\lambda \neq 0$ . Тогда  $\alpha$ , равна минимальному числу бывших нулевых строк, которые могут входить в главные миноры  $(n-\nu)$ -го порядка ( $\nu = \sum_{s=1}^m l_s$ ,  $m = 1, 2, \dots, d$ ) матрицы  $\bar{D}(z_0, \mu)$ . Величины  $L_\nu(0)$  равны сумме тех главных миноров  $(n-\nu)$ -го порядка матрицы  $C(z_0, 0)$ , которые содержат  $\alpha$  бывших нулевых строк,  $L_\nu(0) \neq 0$ . Отсюда получаем, что

$$S_0(\mu) = \mu^\alpha [L_0(0) + O(\mu)] \quad (L_0(0) \neq 0),$$

$$S_\gamma(\mu) = \mu^{\alpha+\beta_\gamma} [L_\gamma(0) + O(\mu)] \quad (\gamma = 1, \dots, l_1 - 1; \beta_\gamma \geq 0),$$

$$S_{l_1}(\mu) = \mu^{\alpha-1} [L_{l_1}(0) + O(\mu)].$$

Далее по индукции можно показать, что

$$S_\nu(\mu) = \mu^{\alpha-m+1} [L_\nu(0) + O(\mu)] \quad \left( \nu = \sum_{s=1}^{m-1} l_s \right),$$

$$S_{\nu+\gamma}(\mu) = \mu^{\alpha-m+\beta_{\nu+\gamma}} [L_{\nu+\gamma}(0) + O(\mu)]$$

$$(\gamma = 1, 2, \dots, l_m - 1; \beta_{\nu+\gamma} \geq 1),$$

$$S_{l_m}(\mu) = \mu^{\alpha-m} [L_{l_m}(0) + O(\mu)].$$

Используя диаграмму Ньютона, получаем, что  $z(\mu)$  имеет  $d$  круговых систем ветвей вида

$$z_m(\mu) = z_0 + \sum_{s=1}^{\infty} z_{ms} \mu^{sl/m}.$$

Пусть матрица  $\bar{D}(z_0, 0)$  имеет  $\sigma$  одинаковых клеток размером  $l_m$ . Тогда  $\sigma$  значений  $z_{m1}$  будут определяться уравнением

$$\sum_{s=0}^{\sigma} L_{\nu+l_m s}(0) z_{m1}^s = 0, \quad (28)$$

где

$$\nu = \sum_{s=1}^{m-1} l_s, \quad l_{m-1} < l_m.$$

Составим матрицу  $C_{l-\nu}(z_0, 0)$  ( $\nu = \sum_{s=1}^{m-1} l_s$ ), состоящую из элементов  $C(z_0, 0)$ , находящихся на пересечении  $l-\nu$  строк и  $l-\nu$  столбцов с номерами  $l-\nu, l-\nu+1, \dots, l$ . Можно убедиться в том, что уравнение (28) эквивалентно уравнению

$$\sum_{s=0}^{\sigma} M_{l_m s} z_{m1}^s = 0,$$

где  $M_{l_m s}$  — сумма всех главных миноров порядка  $l-\nu-l_m s$  матрицы  $C_{l-\nu}(z_0, 0)$ ,  $M_{l-\nu} = 1$ .

#### 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Полученное выше выражение (24) для решений системы дифференциальных уравнений позволяет найти любое собственное движение системы с помощью интегральных уравнений. Мы видим, что каждому корню характеристического уравнения соответствует одно или несколько решений вида

$$\sum_{m=1}^{m_i} \frac{\xi_{im}(\varepsilon)}{(m-1)!} \left( \frac{dz^{m-1}}{dz^{m-1}} \right)_{z=z_i}.$$

Векторные функции  $\xi_{ik}(\varepsilon)$  определяются системой интегральных уравнений (21) и имеют вид (23). Положив  $c_1$ , затем  $c_1$  и  $c_2$  и т. д. равными нулю, получим известную в теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами группу линейно независимых решений, соответствующую одной собственной вектор-функции интегрального уравнения (22). Число таких групп определяется рангом соответственного значения  $\mu$ .

Приняв  $c_1 = c_2 = \dots = c_{m_i-1} = 0$ , получим решение вида  $\xi_{i1}(\varepsilon) z_i^n$ , причем в силу (23)  $\xi_{i1}(\varepsilon) = c_{m_i} \varphi_1(\varepsilon)$ , где  $\varphi_1(\varepsilon)$  есть решение интегрального уравнения (22). Таким образом, собственные вектор-функции исходного интегрального уравнения при фиксированном  $z = z_i$  определяют решения дифференциальных уравнений вида

$$\xi_{i1}(\varepsilon) z_i^n.$$

Если  $z_i = 1$ , мы получаем уравнение для периодического решения периода  $T = kT_0$ .

Теперь рассмотрим задачу определения вынужденных движений (частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). Пусть  $F^*(z, \varepsilon)$  — дробно-рациональная вектор-функция от  $z$  с полюсами  $z = z_\gamma$  каждый кратности  $l_\gamma$ . Считаем, что  $z = z_\gamma$  не является полюсом  $G(z, \varepsilon, \lambda)$ . Тогда вынужденное движение системы по переменной  $y$  можно определить по формуле

$$y_\nu(nT, \varepsilon T) = \sum_{\gamma} \operatorname{res}_{z_\gamma} Y^*(z, \varepsilon) z^{n-1}.$$

Представим  $z^{-1} Y^*(z, \varepsilon)$  в области  $z$ , прилегающей к полюсу  $z_\gamma$ , в виде разложения Лорана. Тогда при указанных  $z$

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{m_\gamma} \frac{\eta_{\gamma m}(\varepsilon) z}{(z - z_\gamma)^m} + z \eta_{\gamma 0}(z, \varepsilon), \quad (29)$$

где  $\eta_{\gamma 0}(\varepsilon)$  — правильная часть разложения,  $m_\gamma \leq l_\gamma$ .

Поставим  $Y^*(z, \varepsilon)$  в виде (29) в уравнение (10) и, умножая его последовательно на  $z^{-1} (z - z_\gamma)^k$  ( $k = 0, 1, \dots, m_\gamma - 1$ ), будем вычислять вычеты от левой и правой частей полученного равенства. В результате получим интегральные уравнения относительно  $\eta_{\gamma m}(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \eta_{\gamma m}(\varepsilon) - \mu \int_0^1 \sum_{k=0}^{m_\gamma - m} \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^k G(z, \varepsilon, \lambda)}{\partial z^k} \right)_{z=z_\gamma} \times \\ \times \eta_{\gamma, m+k}(\lambda) d\lambda = F_{\gamma m}(\varepsilon) \\ (m = 1, 2, \dots, m_\gamma), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$F_{\gamma m}(\varepsilon) = \operatorname{res}_{z=z_\gamma} [(z - z_\gamma)^{m-1} z^{-1} F^*(z, \varepsilon)].$$

Систему (30) можно решать, находя последовательно  $\eta_{\gamma m_\gamma}(\varepsilon)$ ,  $\eta_{\gamma, m_\gamma-1}(\varepsilon)$ , ...,  $\eta_{\gamma 1}(\varepsilon)$ .

Если найдены  $\eta_{\gamma m}(\varepsilon)$ , то вынужденное движение находится согласно выражению

$$y_\nu(nT, \varepsilon T) = \sum_{\gamma} \sum_{m=1}^{m_\gamma} \frac{\eta_{\gamma m}(\varepsilon)}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1} z^n}{dz^{m-1}} \right)_{z=z_\gamma}. \quad (31)$$

В частном случае, когда  $z = z_\gamma$  есть простой полюс  $Y^*(z, \varepsilon)$ , ему соответствует решение вида  $\eta_\gamma(\varepsilon) z_\gamma^n$ , где  $\eta_\gamma(\varepsilon)$  является решением интегрального уравнения

$$\eta_\gamma(\varepsilon) - \mu \int_0^1 G(z_\gamma, \varepsilon, \lambda) \eta_\gamma(\lambda) d\lambda = \operatorname{res}_{z=z_\gamma} [F^*(z, \varepsilon) z^{-1}]. \quad (32)$$

При  $z_\gamma = 1$  получаем уравнение для определения периодического решения с периодом  $T = kT_0$ .

Следует указать, что соотношения (30), (31) справедливы и в тех случаях, когда полюс  $F^*(z, \varepsilon)$  совпадает с полюсом резольвенты. При



периодических и почти периодических воздействиях этот случай называется резонансным. Отсюда, в частности, легко получить известные условия существования периодических и почти периодических решений в резонансных случаях [3]. Причем само решение может быть найдено с помощью интегрального уравнения (32), где  $\mu$  есть собственное значение.

В заключение отметим, что интегральные уравнения для определения собственных и вынужденных составляющих  $x(t)$  легко получить из соотношений (21) и (30). Для этого нужно подставить в них соответствующие коэффициенты разложения  $x$  согласно равенствам  $y = \mu B(t) x$  — для определения собственных движений,  $y = \mu B(t) x + f(t)$  — для определения вынужденных движений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. З. Штокало, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, изд. АН УССР, Киев, 1960.
2. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, изд. АН БССР, Минск, 1963.
3. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
4. В. А. Якубович, Методы вычислений, вып. 3, изд. ЛГУ, 1966, стр. 51.
5. В. Н. Фомин, В. А. Якубович, Методы вычислений, вып. 3, изд. ЛГУ, 1966, стр. 76.
6. К. Г. Валеев, ПММ, 25, вып. 2, 314 (1961).
7. С. В. Шильман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 1, 179 (1963).
8. Е. Н. Розенвассер, ПММ, 25, вып. 2, 284 (1961).
9. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ГИФМЛ, М., 1963.
10. Э. Джурри, Импульсные системы автоматического регулирования, ГИФМЛ, М., 1963.
11. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3 (ч. 1), 4, Гостехиздат, М.—Л., 1957.
12. Э. Гурса, Курс математического анализа, ч. 2, 3, Гостехиздат, Л., 1934.
13. И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский, УМН, 10, вып. 1, 3 (1955).
14. М. Г. Крейн, Г. А. Любарский, Изв. АН СССР, серия математическая, 26, № 4, 549 (1962).
15. Э. А. Коддингтон, И. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
16. Б. А. Фукс, В. И. Левин, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения (специальные главы), Гостехиздат, Л., 1951.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
17 марта 1969 г.

#### ON USE OF $z$ -TRANSFORMATION TO STUDY LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

S. V. Shilman

This paper presents a method for investigation of stability and determination of natural and forced motions of linear systems with periodic coefficients which is based on modified  $z$ -transformation and integral equations.

УДК 518 · 517.944/947

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

А. П. Мальцев

Устанавливается сходимость и устойчивость метода прямых в применении к вычислению периодических решений уравнений параболического типа с нелинейными граничными условиями.

В работе методом прямых проводится построение периодического по  $t$  решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \Psi^0(t, u(0, t)) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + \Psi^1(t, u(1, t)) = 0,$$

где  $F, \Psi^j$  — периодические по  $t$  функции.

Ранее исследование уравнений (1), (2) методом прямых проводилось в работе [1] для смешанных задач в предположении, что  $F, F_u, F_p, \Psi_u^j > 0$  равномерно ограничены при

$$(x, t, u, p) \in \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t < \infty\} \times R^2.$$

Основные результаты, излагаемые ниже, можно сформулировать следующим образом: 1) аппроксимирующая задача (1), (2) система дифференциально-разностных уравнений при любом достаточно малом шаге  $\Delta x = h$  имеет единственное, равномерно ограниченное по  $h^*$  периодическое решение  $\overset{\circ}{u}_h(t)$ ; 2) при достаточно малом  $h$  и  $0 \leq t < \infty$  для аппроксимирующей системы существует единственное решение  $u_h(t, \varphi)$ , удовлетворяющее начальному условию  $u_h(0, \varphi) = \varphi$ ; 3) при  $h \rightarrow 0$   $\{\overset{\circ}{u}_h(t)\}$  сходится к периодическому решению задачи (1), (2); 4) для любого  $\varphi$  и достаточно малого  $h$   $u_h(t, \varphi)$  сходится к  $\overset{\circ}{u}_h(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ; 5) решение  $u_h(t, \varphi)$  устойчиво относительно возмущений данных задачи (1), (2) (функций  $F, \Psi^j$ ) и вектора  $\varphi$ . Таким образом, отыскание периодического по  $t$  решения задачи (1), (2) сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

\* Соответствующая постоянная здесь та же, что и в оценке модуля единственного периодического решения задачи (1), (2).





$b_i, c_i, 0 \leq i \leq n, q_{0,n} \geq 0$  — произвольные, непрерывные на  $[0, \tau]$  функции и  $h$  — параметр,  $0 < h < 2 \left[ \max_i \max_t |b_i(t)| \right]^{-1}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $u \in C^1[0, \tau]$  и на  $[0, \tau]$   $c_i(t) \leq 0$  ( $0 \leq i \leq n$ )  $L_h u < 0$ . Тогда  $u(t)$  не может принимать свое наименьшее отрицательное значение на  $[0, \tau]$  в точках  $t > 0$  ни при одном  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** Пусть  $t_0 = 0$  и  $u_i(t_0) = \min u(t) < 0$ . Так как при  $t = t_0$   $\frac{du_i}{dt} \leq 0$  и  $q_{0,n} \geq 0, (2 \pm hb_i) > 0$ , то  $L_h' u_i(t_0) \geq 0$ .

Получили противоречие

**Следствие 1.** Если  $u(t)$  удовлетворяет условиям леммы 1 и  $u(0) \geq 0, u(\tau) \geq 0$  на  $[0, \tau]$ .

**Следствие 2.** Если  $u(t)$  удовлетворяет условиям леммы 1  $u(0) = u(\tau)$ , то  $u(t) \geq 0$  на  $[0, \tau]$ .

**Лемма 2.** Пусть  $u \in C^1[0, \tau], u(0) = u(\tau), c_i(t) < -\sigma$  ( $0 \leq i \leq n$ ) и

$$L_h u = f(t), \quad (5)$$

где  $f \in C^0[0, \tau]$  и  $\max_{i,t} |f_i(t)| = M < \infty$ . Тогда  $\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \sigma^{-1} M$ .

**Доказательство.** Пусть  $u_k(t_0) = \max u(t) > 0$ , где  $0 \leq k \leq n, 0 < t_0 \leq \tau$ . Из (5) вытекает, что

$$u_k(t_0) \leq -\sigma^{-1} f_k(t_0) \leq \sigma^{-1} M. \quad (6)$$

Если  $t_0 = 0$ , то (6) имеет место в силу равенства  $u(0) = u(\tau)$ . Заменяя в (5)  $u$  на  $(-u)$ , будем иметь

$$u_i(t_1) = \min u(t) \geq -\sigma^{-1} M. \quad (7)$$

Объединяя (6) и (7), получим утверждение леммы.

**Следствие.** Если  $u(t)$  удовлетворяет условиям леммы 2 и  $\min_t q_k(t) \geq a > 0, \max_t h |b_k(t)| \leq 2 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  ( $k = 0, n$ ), то

$$\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \sigma^{-1} M; (a\varepsilon + \sigma h)^{-1} Mh \}.$$

**Лемма 3.** Пусть  $u \in C^1[0, \tau]$  удовлетворяет системе (5). Тогда

$$\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \|u(0)\|; \sigma^{-1} M \},$$

если  $c_i(t) < -\sigma$  ( $0 \leq i \leq n$ ) и

$$\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \|u(0)\|; M \exp[(\mu + 1)\tau] \},$$

если  $c_i(t) < \mu < \infty$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

**Доказательство леммы 3** аналогично доказательству леммы 2.

**Следствие.** Если  $u(t)$  удовлетворяет условиям леммы 3 и  $\min_t q_k(t) \geq a > 0, \max_t h |b_k(t)| \leq 2 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  ( $k = 0, n$ ), то

$$\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \|u(0)\|; \sigma^{-1} M; (a\varepsilon + \sigma h)^{-1} Mh \},$$

если  $c_i(t) < -\sigma$ ,

$$\|u\|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \|u(0)\|; M e^{(\mu+1)\tau}; (a\varepsilon + h)^{-1} M h e^{(\mu+1)\tau} \},$$

если  $c_i(t) < \mu < \infty$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

**Определение 3.** Пусть  $u_h^T(t) \in C^1[0, T]$  удовлетворяет при  $0 \leq t \leq T$  системе (3) и условию

$$u(0) = u(T). \quad (8)$$

Тогда вектор-функцию  $\overset{\circ}{u}_h(t) = u_h^T(t)$  при  $t \in [0, T]$ ,  $\overset{\circ}{u}_h(t) = u_h^T\left(t - \left[\frac{t}{T}\right]T\right)$  при  $t > T$  назовем периодическим решением системы (3) на  $[0, \infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** Из соотношений  $u_h^T(t) \in C^1[0, T]$ ,  $R_h u_{hi}^T(t) = 0$  на  $[0, T]$  ( $0 < i \leq n$ ) и  $u_h^T(0) = u_h^T(T)$  легко следует, что  $\overset{\circ}{u}(t) \in C^1[0, \infty)$ .

**Теорема 1.** Существует такое  $h_0$ , что при любом  $0 < h \leq h_0$  система (3) имеет решение  $\overset{\circ}{u}_h(t)$ . На множестве

$$S = \{u(t) : \|u\|_{C^0[0, T]} \leq \sigma^{-1} \max_{\bar{\Pi}_T} |F(x, t, 0, 0)|\}$$

это решение единственно.

**Теорема 2.** Для любого  $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  и  $0 < \tau < \infty$  найдется такое  $h_\varphi$ , что при всяком  $0 < h \leq h_\varphi$  на  $[0, \tau]$  система (3) имеет решение  $u_h(t, \varphi) \in C^1[0, \tau]$ , удовлетворяющее условию

$$u(0) = \varphi. \tag{9}$$

**З а м е ч а н и е.** Теорема 2 имеет место и в предположении, что при  $(x, t, u, p) \in \bar{\Pi} \times R^2$   $F_u < \mu < \infty$ .

Доказательства теорем 1, 2 вынесены в Приложение.

### 3. СХОДИМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА

**Теорема 3.** Последовательность  $\{\overset{\circ}{u}_h(t)\}$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно относительно  $t \in [0, \infty)$  сходится к  $\overset{\circ}{u}(x, t)$  со скоростью  $O(h)$ , а в случае, когда  $\Psi_u^j \geq a > 0$  ( $j = 0, 1$ ) при  $(t, u) \in [0, T] \times R^1$ , — со скоростью  $O(h^2)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вектор-функцию

$$\delta(t) = \{\delta_0(t), \delta_1(t), \dots, \delta_n(t)\}, \quad \delta_i(t) = u_T(x_i, t) - u_{hi}^T(t).$$

Очевидно, что  $\delta(t)$  удовлетворяет системе  $L_h \delta = f$  и условию (8), где  $f = \{O(h), O(h^2), \dots, O(h^2), O(h)\}$  и для  $q_{0, n}; b_i, c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) при  $h \leq h_0$  выполняются условия леммы 2. Поэтому  $\|\delta\|_{C^0[0, T]} \leq \leq \sigma^{-1} O(h)$ .

Пусть  $q_{0, n} \geq a > 0$ , тогда из следствия леммы 2 при тех  $h$ , для которых  $h|b_k| \leq 1$  ( $k = 0, n$ ), имеем

$$\|\delta\|_{C^0[0, T]} \leq \max\{a^{-1} O(h^2); \sigma^{-1} O(h^2)\}.$$

**Следствие.** При  $h \leq h_0$   $\|\Delta_h u_h^T(t)\|_{C^0[0, T]} \leq K_0$ , где  $K_0$  не зависит от  $h$ .

Пользуясь леммой 3 и следствием из нее, легко доказать утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть  $u, (x, t) \in C^{4,1}[0, \tau]$  — решение задачи (1), (2) в  $\bar{\Pi}_\tau$ , удовлетворяющее условию  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , и  $u_h(t, \varphi)$  — решение задачи (3), (9) на  $[0, \tau]$ , где  $\varphi_i = \varphi(x_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Тогда при  $h \rightarrow 0$  последовательность  $\{u_h(t, \varphi)\}$  сходится к  $u, (x, t)$  со скоростью  $O(h)$ , а в случае, когда  $\Psi_u^j \geq a > 0$  при  $(t, u) \in [0, \tau] \times R^1$  ( $j = 0, 1$ ), — со скоростью  $O(h^2)$ .

**Следствие.** При  $h \leq h_\varphi$   $\|\Delta_h u_h(t, \varphi)\|_{C^0[0, \tau]} \leq K_1$ , где  $K_1$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ .

**З а м е ч а н и е.** Утверждение 1 имеет место и в предположении, что при  $(x, t, u, p) \in \bar{\Pi} \times R^2$   $F_u < \mu < \infty$ .

**Теорема 4.** При любом  $t > 0$  и  $h \leq \min \{h_0, h_\varphi\}$

$$\|u_h(t, \varphi) - \overset{\circ}{u}_h(t)\| \leq \|\varphi - \overset{\circ}{u}_h(0)\| e^{-\sigma t}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим вектор-функцию  $w(t) = u_h(t, \varphi) - \overset{\circ}{u}_h(t)$ . Она удовлетворяет системе  $L_h w = 0$  и условию  $w(0) = \varphi - \overset{\circ}{u}_h(0)$ , где для  $q_0, n; b_i, c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) при  $h \leq \min \{h_0, h_\varphi\}$  выполняются условия леммы 1. Применяя  $L_h$  к  $w^\pm(t) = \{\omega_0^\pm(t), \omega_1^\pm(t), \dots, \omega_n^\pm(t)\}$ ,  $\omega_i^\pm(t) = \|\varphi - \overset{\circ}{u}_h(0)\| e^{-\sigma t} \pm w_i(t)$ , будем иметь  $L_h w^\pm < 0$ . Так как, кроме того,  $w^\pm(0) \geq 0$ , то, пользуясь следствием 1 из леммы 1, получим, что  $w^\pm(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ . Отсюда следует утверждение теоремы.

Пусть решение задачи (3), (9) вычисляется на  $[0, \tau]$  ( $0 \leq \tau < \infty$ ) при возмущенных значениях  $\hat{F}, \hat{\Psi}^j, \hat{\varphi}$ , которые удовлетворяют условиям а)–в). Для решения возмущенной задачи  $\hat{u}_h(t, \hat{\varphi})$  имеем

$$\|\hat{u}_h(t, \hat{\varphi})\|_{C^{[0, \tau]}} \leq \hat{M}^\varphi, \quad \|\Delta_h \hat{u}_h(t, \hat{\varphi})\|_{C^{[0, \tau]}} \leq \hat{K}_1,$$

где  $\hat{M}^\varphi$  и  $\hat{K}_1$  не зависят от  $h$  и  $\tau$ . Положим

$$u_h(t, \varphi) - \hat{u}_h(t, \hat{\varphi}) = \delta u, \quad \Psi^j(t, u) - \hat{\Psi}^j(t, u) = \delta \Psi^j \quad (j=0, 1),$$

$$F(x, t, u, p) - \hat{F}(x, t, u, p) = \delta F, \quad \varphi - \hat{\varphi} = \delta \varphi,$$

$$D_\Psi = \{0 \leq t \leq T; |u| \leq \max(M^\varphi, \hat{M}^\varphi)\},$$

$$D_F = \{(x, t) \in \bar{\Pi}_T; |u| \leq \max(M^\varphi, \hat{M}^\varphi); |p| \leq \max(K_1, \hat{K}_1)\}$$

и пусть

$$\max_{D_\Psi} |\delta \Psi^j| < \varepsilon \quad (j=0, 1), \quad \max_{D_F} |\delta F| < \varepsilon, \quad \|\delta \varphi\| < \varepsilon, \quad (10)$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число.

**Определение 4.** Будем говорить, что решение задачи (3), (9) равномерно (по  $h$  и  $t$ ) устойчиво, если при выполнении неравенств (10)

$$\|\delta u\|_{C^{[0, \tau]}} \leq \Delta \varepsilon, \quad (11)$$

где  $\Delta$  — постоянная, не зависящая от выбираемых  $h$  и  $\tau$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что решение задачи (3), (9) устойчиво, если оценка (11) имеет место, как только

$$\max_{D_\Psi} |\delta \Psi^j| < \varepsilon h \quad (j=0, 1), \quad \max_{D_F} |\delta F| < \varepsilon h, \quad \|\delta \varphi\| < \varepsilon h.$$

**Теорема 5.** Имеют место следующие утверждения.

$$1) \text{ Пусть } \max_{\Gamma_\Psi} |\delta \Psi^j| = 0 \quad (j=0, 1), \quad \max_{D_F} |\delta F|, \quad \|\delta \varphi\| < \varepsilon,$$

тогда решение задачи (3), (9) равномерно устойчиво.

2) Пусть выполняются неравенства (10), тогда решение задачи (3), (9) устойчиво.

3) Пусть при  $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^1$   $\Psi_u^j \geq a > 0$  ( $j=0, 1$ ) и выполняются неравенства (10), тогда решение задачи (3), (9) равномерно устойчиво.

**Доказательство.** Ошибка  $\delta u$  удовлетворяет системе  $L_h \delta u = f$  и условию  $\delta u(0) = \delta \varphi$ , где

$$f = \{2h^{-1} \delta\Psi^0 - \delta F_0, -\delta F_1, \dots, -\delta F_{n-1}, 2h^{-1} \delta\Psi^1 - \delta F_n\},$$

$$\delta\Psi^0 = \Psi^0(t, \hat{u}_{h0}(t, \hat{\varphi})) - \hat{\Psi}^0(t, \hat{u}_{h0}(t, \hat{\varphi})),$$

$$\delta\Psi^1 = \Psi^1(t, \hat{u}_{hn}(t, \hat{\varphi})) - \hat{\Psi}^1(t, \hat{u}_{hn}(t, \hat{\varphi})),$$

$$\delta F_i = F_i(t, \hat{u}_{hi}(t, \hat{\varphi}), \Delta_n \hat{u}_{hi}(t, \hat{\varphi})) - \hat{F}_i(t, \hat{u}_{hi}(t, \hat{\varphi}), \Delta_n \hat{u}_{hi}(t, \hat{\varphi}))$$

$$(0 \leq i \leq n),$$

и для  $q_{0,n}; b_i, c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) при достаточно малых  $h$  выполняются условия леммы 3. Следовательно,

$$\|\delta u\|_{C^{[0, \tau]}} \leq \max\{\|\delta\varphi\|; \sigma^{-1} \max_{DF} |\delta F| + 2(\sigma h)^{-1} \max_{j, D\Psi} |\delta\Psi^j|\}. \quad (12)$$

Пусть  $q_{0,n} \geq a > 0$ . Тогда пользуясь следствием из леммы 3, получим

$$\|\delta u\|_{C^{[0, \tau]}} \leq \max\{\|\delta\varphi\|; \max(\sigma^{-1}, a^{-1})[\max_{DF} |\delta F| + 2 \max_{j, D\Psi} |\delta\Psi^j|]\}. \quad (13)$$

Из оценок (12), (13) вытекают утверждения 1)–3) теоремы 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему

$$2h^{-2}(u_1 - u_0) + \{c_0(t, v_0) - h^{-1}q_0(t, v_0)[2 - hb_0(t, v_0, \Delta_h v_0)]\} u_0 -$$

$$- \frac{du_0}{dt} = -F_0(t, 0, 0),$$

.....,

$$\frac{1}{2} h^{-2} [2 + hb_i(t, v_i, \Delta_h v_i)] u_{i+1} + [c_i(t, v_i) - 2h^{-2}] u_i + \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{2} h^{-2} [2 - hb_i(t, v_i, \Delta_h v_i)] u_{i-1} - \frac{du_i}{dt} = -F_i(t, 0, 0)$$

$$(1 \leq i \leq n-1),$$

.....,

$$2h^{-2}(u_{n-1} - u_n) + \{c_n(t, v_n) - h^{-1}q_n(t, v_n)[2 + hb_n(t, v_n, \Delta_h v_n)]\} u_n -$$

$$- \frac{du_n}{dt} = -F_n(t, 0, 0),$$

где

$$v(t) = \{v_0(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\} \in S_h \subset C^1[0, T],$$

$$S_h = \{v(t) : v(0) = v(T); \|v\|_{C^{[0, T]}} \leq M^0; \|v\|_{C^{[0, T]}} \leq M_h^0\},$$

$M^0, M_h^0$  — некоторые постоянные, и установим вспомогательную лемму.

Лемма 4. Существует такое  $h^*$ , что при любых  $h \leq h^*$  и  $v \in S_h$  краевая задача (14), (8) имеет единственное решение.



Доказательство. Пусть  $b(x, t, u, p) = \int_0^1 F_p(x, t, u, \theta p) d\theta$ , тогда при  $(x, t, u) \in \bar{\Pi} \times R^1$  и достаточно больших  $|p|$

$$|b| \leq |p| [\varepsilon(|p|) + |p|^{-2} |F(x, t, u, 0)|] = |p| \varepsilon_1(|p|). \quad (15)$$

Положим

$$D_0 = \{0 \leq t \leq T; |u| \leq M^0\},$$

$$D_1 = \{(x, t) \in \bar{\Pi}_T; |u| \leq M^0; |p| \leq P^*\},$$

$N^* = \max |b|$  и выберем  $P^*$  так, что при  $|p| \geq P^*$  имеет место оценка (15),  $\varepsilon_1(P^*) < 2(M^0)^{-1}$  и  $\max_{D_0} |\Psi^j| \leq P^*$  ( $j = 0, 1$ ). Тогда при любых

$$h \leq h^* = \left( \left[ \frac{N^*}{2} \right] + 1 \right)^{-1} \text{ и } v \in S_h \text{ для коэффициентов системы (14)}$$

выполняются условия леммы 2. Следовательно, однородная задача, соответствующая задаче (14), (8), имеет лишь тривиальное решение. Отсюда вытекает утверждение леммы 4.

Существование решения. Из леммы 4 следует, что при любом  $0 < h \leq h^*$  на замкнутом ограниченном выпуклом множестве  $S_h$  определен оператор  $A_h: u(t) = A_h v(t)$ , переводящий элементы пространства  $C^1[0, T]$  в элементы того же пространства. Пусть  $M^0 = \sigma^{-1} \max_{\bar{\Pi}_T} |F(x, t, 0, 0)|$ , тогда из леммы 2 следует, что  $\|u\|_{C^0[0, T]} \leq M^0$ .

Из системы (14) и системы, получаемой дифференцированием (14) по  $t$ , соответственно имеем

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0[0, T]} \leq M_h^1, \quad \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{C^0[0, T]} \leq M_h^2.$$

Полагая  $M_h^0 = M^0 + M_h^1$ , получим, что оператор  $A_h$  отображает множество  $S_h$  в себя. Из равномерной ограниченности относительно  $t \frac{d^2u}{dt^2}$  следует, что  $A_h$  переводит  $S_h$  в компактное множество. Не-

трудно показать, что  $A_h$  непрерывен на  $S_h$ . По принципу Шаудера оператор  $A_h$  имеет на  $S_h$  неподвижную точку, т. е. существует решение задачи (4), (8).

Единственность решения на множестве  $S$  при достаточно малых  $h$  ( $h \leq h^{**}$ ) вытекает из леммы 2.

Полагая  $h_0 = \min(h^*, h^{**})$ , завершим доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Положим в системе (14)

$$0 \leq t \leq \tau, \quad v(t) \in S_h^{\varphi} \subset C^1[0, \tau],$$

$$S_h^{\varphi} = \{v(t): v(0) = \varphi; \|v\|_{C^0[0, \tau]} \leq M^{\varphi}; \|v\|_{C^1[0, \tau]} \leq M_h^{\varphi}\},$$

$M^{\varphi}$ ,  $M_h^{\varphi}$  — некоторые постоянные. Тогда доказательство теоремы 2 будет аналогично доказательству теоремы 1, если воспользоваться леммой 3.

Автор глубоко признателен А. Г. Сигалову за постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Будаков, Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1, № 6, 1105 (1961).
2. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 415 (1969).

3. Чжоу Юй-линь, Матем сб., 47 (89), 4, 431 (1959).

4. О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель, Матем. сб., 41 (83), 1, 105 (1957).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
7 января 1969 г.

LINE METHOD CONSTRUCTION OF PERIODIC SOLUTIONS  
OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

*A. P. Maltzev*

Convergence and stability of the line method as applied to evaluation of periodic solutions for parabolic equations with nonlinear boundary conditions are stated.

---

УДК 517.944.4

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ К ОТЫСКАНИЮ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СТЕФАНА—БОЛЬЦМАНА**

*А. П. Мальцев*

Даны некоторые рекомендации к вычислению положительных периодических решений краевых задач для уравнений параболического типа с граничными условиями Стефана—Больцмана.

Задача вычисления для уравнений параболического типа положительных периодических по  $t$  решений, удовлетворяющих граничным условиям Стефана—Больцмана, представляет существенный интерес для приложений. Известным примером такой задачи является проблема отыскания стационарного периодического теплового режима планет [1-4]. Интерес к изучению этих задач диктуется активно проводимыми в настоящее время расчетами на ЭЦВМ [5,6]. В работе [7] было показано, что к решению задач подобного типа применим метод Рунге, но он достаточно трудоемок с точки зрения вычислительной работы. В связи с этим представляется целесообразным исследовать метод прямых, где исходную задачу удастся свести к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Постановка задачи. Основные результаты.** В области  $\bar{\Pi} = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq t < \infty\}$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + u^4(1, t) = f(t), \quad (2)$$

где а)  $F(x, t, u, p)$ ,  $f(t)$  — периодические по  $t$  (с периодом  $T$ ), непрерывные и достаточно гладкие при любых  $(x, t, u, p) \in \bar{\Pi} \times R^2$  функции; б) при любых  $(x, t, u) \in \bar{\Pi} \times R^1$  и достаточно больших  $|p|$

$$|F|, |F_x|, |F_u| \leq |p|^2 \varepsilon(|p|), \quad |F_p| \leq |p| \varepsilon(|p|),$$

где  $\varepsilon(|p|)$  — положительная функция, монотонно стремящаяся к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$ ; в) при любых  $(x, t, u, p) \in \bar{\Pi} \times R^2$   $F_u < -\sigma < 0$ , где  $0 < \sigma < \infty$  — некоторая постоянная; г) при  $(x, t) \in \bar{\Pi}$   $f(t) \geq 0$ ,  $F(x, t, 0, 0) \geq 0$ .

Положим

$$\Pi_T = \{0 < x < 1; 0 \leq t \leq T\}, \quad \Gamma_T = \{x = 0, 1; 0 \leq t \leq T\}, \quad \bar{\Pi}_T = \Pi_T \cup \Gamma_T.$$

**Определение 1.** Функцию  $u_T(x, t) \in C^{4,1}(\bar{\Pi}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в  $\Pi_T$  и краевым условиям (2) на  $\Gamma_T$ , назовем положительным решением задачи (1), (2) в  $\bar{\Pi}_T$ . если  $u_T(x, 0) = u_T(x, T)$  при  $0 \leq x \leq 1$  и  $u_T(x, t) > 0$  в  $\bar{\Pi}_T$ .

*Определение 2.* Функцию  $\overset{\circ}{u}(x, t) = u_T(x, t)$  в  $\overline{\Pi}_T$ ,  $\overset{\circ}{u}(x, t) = u_T(x, t - \left[ \frac{t}{T} \right] T)$  в  $\overline{\Pi} \setminus \overline{\Pi}_T$  назовем положительным периодическим по  $t$  решением задачи (1), (2) в  $\overline{\Pi}^*$ .

Для приближенного отыскания решения  $\overset{\circ}{u}(x, t)$  заменим задачу (1), (2) системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$R_h^i u_i \equiv \Delta_h^2 u_i + F_i(t, u_i, \Delta_h u_i) - \frac{du_i}{dt} = 0 \quad (0 \leq i \leq n), \quad (3)$$

где  $n$  — произвольное натуральное число,  $h = n^{-1}$ ,

$$u_i = u(x_i, t), \quad x_i = ih, \quad F_i(t, u, p) = F(x_i, t, u, p),$$

$$\Delta_h u_0 = 0, \quad \Delta_h u_i = (2h)^{-1} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\Delta_h u_n = f - u_n^4, \quad \Delta_h^2 u_0 = 2h^{-2} (u_1 - u_0),$$

$$\Delta_h^2 u_i = h^{-2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\Delta_h^2 u_n = 2 [h^{-2} (u_{n-1} - u_n) + h^{-1} \Delta_h u_n].$$

Подставляя в (3)  $\overset{\circ}{u}(x, t)$ , получим  $R_h^i \overset{\circ}{u}(x_i, t) = O(h^k)$ , где  $k = 1$  при  $i = 0$  и  $n$  и  $k = 2$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Обозначим через  $C^k [0, \tau]$  ( $k \geq 0, 0 < \tau < \infty$ ) банахово пространство вектор-функций  $u(t) = \{u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ ,  $u_i(t) \in C^k [0, \tau]$  ( $0 \leq i \leq n$ ) с нормой

$$\|u\|_{C^k [0, \tau]} = \sum_{j=0}^k \max_{0 \leq i \leq n} \max_{0 \leq t \leq \tau} |u_i^{(j)}(t)|.$$

Будем говорить, что 1) вектор-функция  $u(t)$  принимает в точке  $t = t_0$  при  $i = l$  свое наибольшее (наименьшее) значение на  $[0, \tau]$ , если

$$u_l(t_0) = \max_{0 \leq i \leq n} \max_{0 \leq t \leq \tau} u_i(t) \equiv \max u(t) \quad (u_l(t_0) = \min u(t));$$

2) вектор  $u(t) \geq 0, u(t) \leq 0, u(t) = 0$ , если  $u_i(t) \geq 0, u_i(t) \leq 0, u_i(t) = 0$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

*Определение 3.* Пусть  $u_n^T(t) \in C^1 [0, T]$  удовлетворяет при  $0 \leq t \leq T$  системе (3) и условиям

$$u(0) = u(T), \quad (4)$$

$$u(t) > 0, \quad (5)$$

тогда вектор-функцию  $\overset{\circ}{u}_n(t) = u_n^T(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $\overset{\circ}{u}_n(t) = u_n^T\left(t - \left[ \frac{t}{T} \right] T\right)$  при  $t > T$  назовем положительным периодическим решением (3) на  $[0, \infty)$ . Имеют место утверждения\*\*.

*Теорема 1.* Существует такое  $h_0$ , что при любом  $0 < h \leq h_0$  и  $F(x, t, 0, 0) \neq 0$  (или  $f(t) \neq 0$ ) система (3) на  $[0, \infty)$  имеет положительное периодическое решение  $\overset{\circ}{u}_h(t)$ . На множестве

\* Используя методы работ [7-9], легко показать, что при выполнении условий а) — г) решение  $\overset{\circ}{u}(x, t)$  существует и единственно.

\*\* Доказательства приводимых ниже теорем вынесены в Приложение.

$$S = \{u(t): 0 \leq u(t) \leq M_0 = \max_{\bar{\Pi}_T} [\sigma^{-1} \max_{\bar{\Pi}_T} F(x, t, 0, 0); (\max_{0 < t < T} f(t))^{1/4}]\}$$

это решение единственно.

*Теорема 2.* Для любого неотрицательного вектора  $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  и  $0 < \tau < \infty$  найдется такое  $h_\varphi$ , что при всяком  $0 < h \leq h_\varphi$  система (3) на  $[0, \tau]$  имеет неотрицательное решение  $u_h(t, \varphi) \in C^1[0, \tau]$ , удовлетворяющее условию

$$u(0) = \varphi. \quad (6)$$

При этом

$$\|u_h(t, \varphi)\|_{C^0[0, \tau]} \leq M_\varphi = \max\{\|\varphi\|, M_0\}.$$

Следствие. Если  $\varphi \neq 0$ , то  $u_h(t, \varphi) > 0$  при  $t > 0$ .

*Теорема 3.* Последовательность  $\{\overset{\circ}{u}_h(t)\}$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно относительно  $t \in [0, \infty)$  сходится к  $\overset{\circ}{u}(x, t)$  со скоростью  $O(h)$ .

*Теорема 4.* Пусть  $u(x, t, \varphi) \in C^{4,1}(\bar{\Pi}_\tau)$  — положительное решение задачи (1), (2) в  $\bar{\Pi}_\tau$ , удовлетворяющее условию  $u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0^*$ , и  $u_h(t, \varphi)$  — решение задачи (3), (6) на  $[0, \tau]$ , где  $\varphi_i = \varphi(x_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Последовательность  $\{u_h(t, \varphi)\}$  при  $h \rightarrow 0$  сходится к  $u(x, t, \varphi)$  со скоростью  $O(h)$ .

Следствие. При  $h \leq h_\varphi$

$$\|\Delta_h u_h(t, \varphi)\|_{C^0[0, \tau]} \leq K_\varphi,$$

где  $K_\varphi$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ .

*Теорема 5.* При любых  $t > 0$ ,  $\varphi \geq 0$  и  $h \leq \min(h_\varphi, h_\varphi)$

$$\|u_h(t, \varphi) - \overset{\circ}{u}_h(t)\| \leq \|\varphi - \overset{\circ}{u}_h(0)\| e^{-\sigma t}. \quad (7)$$

При этом, если  $\varphi = 0$ , то  $u_h(t, \varphi) \leq \overset{\circ}{u}_h(t)$ ; если  $\varphi = M_0$ , то  $u_h(t, \varphi) \geq \overset{\circ}{u}_h(t)$ .

Пусть решение задачи (3), (6) вычисляется на  $[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ) при возмущенных значениях  $\hat{F}, \hat{f}, \hat{\varphi}$ , которые также удовлетворяют условиям а) — г). Обозначим решение возмущенной задачи  $\hat{u}_h(t, \hat{\varphi})$  и положим

$$\varphi - \hat{\varphi} = \delta\varphi,$$

$$f(t) - \hat{f}(t) = \delta f, \quad F(x, t, u, p) - \hat{F}(x, t, u, p) = \delta F,$$

$$u_h(t, \varphi) - \hat{u}_h(t, \hat{\varphi}) = \delta u,$$

$$D_F = \{(x, t) \in \bar{\Pi}_T; |u| \leq \max(M_\varphi, \hat{M}_\varphi); |p| \leq \max(K_\varphi, \hat{K}_\varphi)\}.$$

Постоянные  $\hat{M}_\varphi, \hat{K}_\varphi$  в возмущенной задаче определяются аналогично постоянным  $M_\varphi, K_\varphi$ . Пусть

$$\max_{0 < t < T} |\delta f| < \varepsilon, \quad \max_{D_F} |\delta F| < \varepsilon, \quad \|\delta\varphi\| < \varepsilon, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — произвольное число.

*Определение 4.* Будем говорить, что решение задачи (3), (6) равномерно (по  $h$  и  $t$ ) устойчиво, если при выполнении неравенств (8)

\* Используя методы работ [8, 9], легко показать, что при выполнении условий а) — г) решение  $u(x, t, \varphi)$  существует.

$$\| \delta u \|_{C^0[0, \tau]} < \alpha \epsilon, \tag{9}$$

где  $\alpha$  — постоянная, не зависящая от выбираемых  $h$  и  $\tau$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что решение задачи (3), (6) устойчиво, если оценка (9) имеет место, как только

$$\max_{0 < t < T} | \delta f | < \epsilon h, \quad \max_{D_F} | \delta F | < \epsilon h, \quad \| \delta \varphi \| < \epsilon h.$$

**Теорема 6.** Имеют место следующие утверждения:

1) пусть выполняются неравенства (8), тогда решение задачи (3), (6) устойчиво;

2) пусть  $\max_{0 < t < T} | \delta f | = 0$ ,  $\| \delta \varphi \| < \epsilon$ ,  $\max_{D_F} | \delta F | < \epsilon$ , тогда решение задачи (3), (6) равномерно устойчиво;

3) пусть  $u_{hn}, (t, \varphi) \geq d > 0$  и выполняются неравенства (8), тогда решение задачи (3), (6) равномерно устойчиво.

**Приложение.** Прежде чем перейти к доказательству теорем 1—6, установим три вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $u(t) \in C^1[0, \tau]$  ( $0 < \tau < \infty$ ) на  $[0, \tau]$  удовлетворяет системе уравнений  $L_h u(t) = \psi(t)$ , где

$$L_h u = \text{Colon} \{ L_h^0 u_0, L_h^1 u_1, \dots, L_h^n u_n \},$$

$$L_h^0 u_0 \equiv 2h^{-2}(u_1 - u_0) + \{c_0(t) - h^{-1}q_0(t)[2 - hb_0(t)]\} u_0 - \frac{du_0}{dt},$$

$$L_h^i u_i \equiv 2^{-1} h^{-2} [2 + hb_i(t)] u_{i+1} + [c_i(t) - 2h^{-2}] u_i + 2^{-1} h^{-2} [2 - hb_i(t)] u_{i-1} - \frac{du_i}{dt}$$

$$(1 \leq i \leq n - 1),$$

$$L_h^n u_n \equiv 2h^{-2}(u_{n-1} - u_n) + \{c_n(t) - h^{-1}q_n(t)[2 + hb_n(t)]\} u_n - \frac{du_n}{dt},$$

$\psi_i, b_i, c_i \leq 0$  ( $0 \leq i \leq n$ ),  $q_{0,n} \geq 0$  — произвольные непрерывные на  $[0, \tau]$  функции и  $h$  — параметр,  $0 < h \leq 2 [\max_{0 \leq i < n} \max_{0 < t < \tau} |b_i(t)|]^{-1}$ . Тогда имеют место утверждения\*.

1. Если 1)  $\max_{0 \leq i < n} \max_{0 < t < \tau} |\psi_i(t)| \leq M$  и  $c_i(t) < -\sigma$  ( $0 \leq i \leq n$ ) на  $[0, \tau]$ ;

2)  $u(0) = u(\tau)$ ; 3)  $\min_{0 < t < \tau} q_k(t) \geq a > 0$ ,  $\max_{0 < t < \tau} h |b_k| \leq 2 - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $k=0, n$ , то

а) при выполнении условия 1)

$$\| u \|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \| u(0) \|; \sigma^{-1} M \};$$

б) при выполнении условий 1), 2)

$$\| u \|_{C^0[0, \tau]} \leq \sigma^{-1} M;$$

в) при выполнении условий 1), 3)

$$\| u \|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \| u(0) \|; \sigma^{-1} M; (\alpha \epsilon + \sigma h)^{-1} M h \};$$

г) при выполнении условий 1), 2), 3)

$$\| u \|_{C^0[0, \tau]} \leq \max \{ \sigma^{-1} M; (\alpha \epsilon + \sigma h)^{-1} M h \}.$$

\* Доказательство утверждений I, II приведено в работе [10].

II. Если  $\psi_i \leq 0$ ,  $c_i < 0$  ( $\psi_i < 0$ ,  $c_i \leq 0$ ), ( $0 \leq i \leq n$ ) на  $[0, \tau]$  и  $u(0) \geq 0$  или  $u(0) = u(\tau)$ , то  $u(t) \geq 0$  на  $[0, \tau]$ .

III. Если  $\psi_i \leq 0$ ,  $c_i \leq 0$  ( $0 \leq i \leq n$ ) на  $[0, \tau]$  и  $u(t)$  принимает свое наименьшее неположительное значение на  $[0, \tau]$  в точке  $t = t_0 > 0$  при некотором  $0 \leq i \leq n$ , то  $u(t) \equiv \text{const}$  при всех  $t \leq t_0$ .

IV. Если  $\psi \leq 0$ ,  $c_i \leq 0$  ( $0 \leq i \leq n$ ) на  $[0, \tau]$ ,  $u(0) = u(\tau)$  и  $u(t)$  принимает свое наименьшее неположительное значение на  $[0, \tau]$  в какой-либо точке  $t \in [0, \tau]$  при некотором  $0 \leq i \leq n$ , то  $u(t) \equiv \text{const}$  всюду на  $[0, \tau]$ .

Доказательство утверждения III. Пусть

$$u_s(t_0) = \min u(t) = m \leq 0 \quad (0 < s < n), \quad hb_s(t_0) = \gamma.$$

Докажем, что  $u(t_0) = m$ . Так как  $|\gamma| < 2$ , то

$$2[u_{s+1}(t_0) - 2u_s(t_0) + u_{s-1}(t_0)] + \gamma[u_{s+1}(t_0) - u_{s-1}(t_0)] \leq 0. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при  $\gamma > 0$   $u_{s+1}(t_0) \leq u_{s-1}(t_0)$ , при  $\gamma < 0$   $u_{s+1}(t_0) \geq u_{s-1}(t_0)$  и при  $\gamma = 0$   $u_{s+1}(t_0) = u_{s-1}(t_0) = m$ . Пусть  $\gamma > 0$  (случай, когда  $\gamma < 0$ , рассматривается аналогично). Заменяя в (10)  $u_{s-1}(t_0)$  на  $u_{s+1}(t_0)$ , получим  $4[u_{s+1}(t_0) - u_s(t_0)] \leq 0$ , т. е.  $u_{s+1}(t_0) = m$ . Из равенства  $u_{s+1}(t_0) = u_s(t_0)$  и (10) следует, что  $(2 - \gamma)[u_{s-1}(t_0) - u_s(t_0)] \leq 0$ , т. е.  $u_{s-1}(t_0) = m$ . Если  $s = 0, n$ , то равенства  $u_1(t_0) = m$ ,  $u_{n-1}(t_0) = m$  очевидны. Из  $L_h^{s-1} u_{s-1}(t_0) \leq 0$ ,  $u_{s-1}(t_0) = u_s(t_0)$  и  $L_h^{s+1} u_{s+1}(t_0) \leq 0$ ,  $u_s(t_0) = u_{s+1}(t_0)$  соответственно имеем  $u_{s-2}(t_0) = m$  и  $u_{s+2}(t_0) = m$  и т. д. Таким образом,  $u(t_0) = m$ .

Докажем, что  $u(t) = m$  при любом  $t < t_0$ . Пусть это неверно. Тогда найдутся такие  $i = k$  и  $t_1 < t_0$ , что  $u_k(t_1) = m_k > m$ . Следовательно, и  $u(t_1) > m$ .

Обозначим  $\min_{0 \leq i < n} u_i(t_1) = l$  и на  $t_1 \leq t \leq t_0$  рассмотрим вектор-функцию  $\omega(t)$ :

$$\omega_i(t) = -m + (m - l) \exp[-\alpha(t - t_1)] + u_i(t) \quad (0 \leq i \leq n).$$

Очевидно,  $\omega(t_1) \geq 0$  и при достаточно большом  $\alpha = \alpha(h)$   $L_h \omega(t) \leq 0$ . Тогда из утверждения II следует, что  $\omega(t) \geq 0$  на  $[t_1, t_0]$ . Отсюда получим, что

$$u_s(t_0) \geq m - (m - l) \exp[-\alpha(t_0 - t_1)] > m.$$

Доказательство утверждения IV аналогично доказательству утверждения III.

Положим в (3)  $\Delta_h u_n = f(t) - q^3(t)u_n$ , где  $q(t)$  — произвольная неотрицательная периодическая (с периодом  $T$ ) достаточно гладкая функция, и рассмотрим соответствующую систему уравнений

$$R_h^{iq} u_i = 0 \quad (0 \leq i \leq n). \quad (11)$$

Для нее имеют место следующие леммы.

Лемма 2\*. Существует такое  $h_0$ , что при любом  $0 < h \leq h_0$  система (11) на  $[0, T]$  имеет решение  $u_h^q(t) \in C^1[0, T]$ , удовлетворяющее условию (4). На шаре

$$\|u\|_{C^0[0, T]} \leq M_1,$$

$$M_1 = \sigma^{-1} \{ \max_{0 \leq t < T} [(4 + \sigma)f(t) + |f'(t)|] +$$

\* Доказательство лемм 2, 3 непосредственно следует из теорем 1, 2 работы [10], если произвести замену  $u_i = \varphi_i + g_i$ ,  $g_i = (ih)^2 (ih - 1)f(t) \cdot (i=0, 1, \dots, n; nh=1)$ .

$$+ \max_{0 < h < h_0} \max_{\overline{D}_T} |F(x, t, x^2(x-1)f(t), (3x^2 - 2x + h^2)f(t))|,$$

это решение единственно.

*Лемма 3.* Для любого  $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  и  $0 < \tau < \infty$  найдется такое  $h_\varphi$ , что при всяком  $0 < h \leq h_\varphi$  система (11) на  $[0, \tau]$  имеет решение  $u_h^q(t, \varphi) \in C^1[0, \tau]$ , удовлетворяющее условию (6).

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 задача (11), (4) имеет единственное решение  $u_h^q(t)$ . Подставляя его в (11), получим, что

$$L_h u_h^q(t) \leq 0, \tag{12}$$

где

$$q_0 = 0, \quad q_n = q^3(t), \quad c_i = \int_0^1 F_{iu}(t, \theta u_{hi}^q(t), 0) d\theta < -\sigma,$$

$$b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, u_{hi}^q(t), \theta \Delta_n u_{hi}^q(t)) d\theta$$

$$(0 \leq i \leq n).$$

Так как  $\|u_h^q\|_{C^0[0, T]} \leq M_1$ , то в силу условия б) существует такое  $h^*$ , что при  $h \leq h^*$   $|hb_i| < 2$ . Таким образом, для (12) выполняются условия утверждения 2 леммы 1, откуда имеем, что  $u_h^q(t) \geq 0$ . На замкнутом выпуклом множестве  $Q = \{0 \leq q(t) \leq M_1\}$  непрерывных периодических функций  $q(t)$  рассмотрим оператор  $u_{hn}^q(t) = A_n q(t)$ . Нетрудно проверить, что  $A_n$  непрерывен и компактен на  $Q$  и отображает его в себя. Из принципа Шаудера следует, что при  $h \leq h^*$  задача (3), (4) имеет решение  $0 \leq u_h^T(t) \leq M_1$ . Подставляя  $u_h^T(t)$  в (3), получим, что при  $h \leq h^*$

$$2h^{-2}(u_{h1}^T - u_{h0}^T) + c_0 u_{h0}^T - \frac{du_{h0}^T}{dt} \equiv -F_0(t, 0, 0),$$

$$2^{-1} h^{-2}(2 + hb_i)u_{hi+1}^T + (c_i - 2h^{-2})u_{hi}^T + 2^{-1} h^{-2}(2 - hb_i)u_{hi-1}^T - \frac{du_{hi}^T}{dt} \equiv -F_i(t, 0, 0) \tag{13}$$

$$(1 \leq i \leq n - 1),$$

$$2h^{-2}(u_{hn-1}^T - u_{hn}^T) + c_n u_{hn}^T + [f - (u_{hn}^T)^4] (2 + hb_n) h^{-1} - \frac{du_{hn}^T}{dt} \equiv -F_n(t, 0, 0),$$

где

$$c_i = \int_0^1 F_{iu}(t, \theta u_{hi}^T(t), 0) d\theta < -\sigma,$$

$$b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, u_{hi}^T(t), \theta \Delta_n u_{hi}^T(t)) d\theta,$$

$$|hb_i| < 2 \quad (0 \leq i \leq n).$$



Из утверждения I б) леммы 1 следует, что  $u_h^T(t) \leq M_0$ . Перенося  $h^{-1} f(2 + hb_n)$  в последнее равенство (13) в правую часть и полагая  $q_0 = 0$ ,  $q_n = (u_{hn}^T)^3$ , будем иметь  $L_h u_h^T(t) \leq 0$ . Учитывая условие г) ( $F \geq 0$ ,  $f \geq 0$ ) из утверждения IV леммы 1, получим  $u_h^T(t) > 0$ .

Пусть существует такая последовательность  $h_k \rightarrow 0$ , что для каждого  $h_k$  задача (3), (4), (5) имеет, по крайней мере, два решения  $u^*$  и  $u^{**}$ . Тогда их разность  $z(t) = u^*(t) - u^{**}(t)$  удовлетворяет системе  $L_h z(t) = 0$  и условию (4), где

$$q_0 = 0, \quad q_n = (u_n^* + u_n^{**}) [(u_n^*)^2 + (u_n^{**})^2] > 0,$$

$$c_i = \int_0^1 F_{iu}(t, u_i^{**} + \theta(u_i^* - u_i^{**}), \Delta_h u_i^{**}) d\theta < -\sigma,$$

$$b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, u_i^*, \Delta_h u_i^{**} + \theta(\Delta_h u_i^* - \Delta_h u_i^{**})) d\theta$$

$$(0 \leq i \leq n).$$

Выберем положительное число  $P$  так, что  $\max f(t) + 3M_0^4 \leq P$  и при  $|p| \geq P$   $|F_p| < |p| \varepsilon(|p|)$ ,  $\varepsilon(P) < 2(3M_0)^{-1}$ . Пусть в области  $D = \{(x, t) \in \bar{\Pi}_T, |u| \leq M_0, |p| \leq P\}$   $\max_D |F_p(x, t, u, p)| \leq N$ . Тогда, полагая  $h^{**} = \left( \left[ \frac{N}{2} \right] + 1 \right)^{-1}$ , получим, что при  $h \leq h^{**}$   $|hb_i| < 2$ . Из

утверждения I б) леммы 1 следует  $z(t) \equiv 0$ . Доказательство теоремы 1 будет завершено, если положим  $h_0 = \min(h^*, h^{**})$ .

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, если воспользоваться леммой 3 и утверждением I а) леммы 1. Доказательство следствия из теоремы 2 непосредственно вытекает из утверждения III леммы 1.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим вектор-функцию

$$\delta(t), \delta_i(t) = u_T(x_i, t) - u_{hi}^T(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Очевидно, она удовлетворяет системе  $L_h \delta = \psi$ , где  $\psi = \{O(h), O(h^2), \dots, O(h^2), O(h)\}$ , условию (4), и для  $q_{0, n}$ ;  $b_i$ ,  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) при  $h \leq h_0$  выполняются условия утверждения I б) леммы 1. Поэтому  $\|\delta\|_{C^0[0, T]} \leq \leq \sigma^{-1} O(h)$ .

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3, если воспользоваться утверждением I а) леммы 1.

Доказательство следствия из теоремы 4 вытекает из неравенства

$$\|\Delta_h u_n(t, \varphi)\|_{C^0[0, \tau]} \leq (oh)^{-1} O(h) + \max_{\bar{\Pi}_\tau} \left| \frac{\partial u(x, t, \varphi)}{\partial x} \right| + O(h^2),$$

если воспользоваться оценкой  $\max_{\bar{\Pi}_\tau} \left| \frac{\partial u(x, t, \varphi)}{\partial x} \right|$ , данной в работе [8].

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим вектор-функции

$$w^\pm(t), w_i^\pm(t) = \|\varphi - \overset{\circ}{u}_n(0)\| e^{-\alpha t} \pm [u_{hi}(t, \varphi) - \overset{\circ}{u}_{hi}(t)]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Легко видеть, что  $w^\pm(0) \geq 0$  и  $L_h w^\pm < 0$ , где для  $q_{0n}$ ;  $b_i$ ,  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ )

при  $h \leq \min(h_0, h_\varphi)$  выполняются условия утверждения II леммы 1. Следовательно,  $\omega^\pm(t) \geq 0$ . Отсюда вытекает (7). Последующие утверждения теоремы 5 непосредственно следуют из утверждения III леммы 1.

Доказательство теоремы 6. При достаточно малых  $h \delta u$  удовлетворяет системе  $L_h \delta u = \psi$  и условию  $\delta u(0) = \delta \varphi$ , где

$$\psi = \{ -\delta F_0, -\delta F_1, \dots, -\delta F_{n-1}; -h^{-1} \delta f(2 + hb_n) - \delta F_n \},$$

$$\delta F_i = F_i(t, \eta_i, \Delta_h \eta_i) - \hat{F}_i(t, \eta_i, \Delta_h \eta_i),$$

$$c_i = \int_0^1 F_{iu}(t, \eta_i + \theta(\zeta_i - \eta_i), \Delta_h \eta_i) d\theta < -\sigma,$$

$$b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, \zeta_i, \Delta_h \eta_i + \theta(\Delta_h \zeta_i - \Delta_h \eta_i)) d\theta,$$

$$|hb_i| \leq 1 \quad (0 \leq i \leq n), \quad q_n = (\zeta_n + \eta_n)(\zeta_n^2 + \eta_n^2),$$

$$\eta_i = u_{hi}(t, \varphi), \quad \zeta_i = \hat{u}_{hi}(t, \hat{\varphi}).$$

Применяя к данной системе утверждения I а) в) леммы 1, получим

$$\begin{aligned} \|\delta u\|_{C^0[0, \tau]} &\leq \max \{ \|\delta \varphi\|; \sigma^{-1} \max_{DF} |\delta F| + \\ &+ 3(\sigma h)^{-1} \max_{t < \tau} |\delta f| \}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \|\delta u\|_{C^1[0, \tau]} &\leq \max \left\{ \|\delta \varphi\|; \max \left( \sigma^{-1}, \frac{1}{4} \alpha^{-3} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \max_{DF} |\delta F| + 3 \max_{0 < t < \tau} |\delta f| \right) \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Из оценок (14), (15) вытекают утверждения 1)–3) теоремы 6.

Автор глубоко признателен А. Г. Сигалову за постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, изд. Наука, М., 1964.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1966.
3. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, Астрон. ж., 40 (2), 297 (1963).
4. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81 (4), 588 (1963).
5. В. Н. Гольдберг, В. С. Троицкий, О. Б. Щуко, Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Рига, 1968.
6. В. Н. Гольдберг, В. С. Троицкий, О. Б. Щуко, Тезисы докладов симпозиума по физике планет, Киев, 1968.
7. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав., — Радиофизика, 12, № 3, 415 (1969).
8. Чжоу Юй-линь, Матем. сб., 47 (89), 431 (1959).
9. О. А. Олейник, Т. Д. Вентцель, Матем. сб., 41 (83), 105 (1957).
10. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав., — Радиофизика, 12, № 11, 1657 (1969).

APPLICATION OF THE LINE METHOD TO POSITIVE PERIODIC  
SOLUTIONS EVALUATION FOR PARABOLIC PROBLEMS WITH  
STEPHAN—BOLTZMANN BOUNDARY CONDITIONS

*A. P. Maltzev*

The article presents some suggestions on positive periodic solutions evaluation for boundary value problems for parabolic equations with the Stephan—Boltzmann boundary conditions.

---



дем обозначать через  $B_q$ , с координатами  $z$  — через  $B_z$ . Определим метрику в  $B_q$ , считая ее в слоях евклидовой, а в секущих поверхностях  $y = \text{const}$  — совпадающей с метрикой на  $S^{n-1}$ :

$$ds^2 = dy^2 + [(d\theta^{n-1})^2 + \sin^2 \theta^{n-1} \cdot (d\theta^{n-2})^2 + \sin^2 \theta^{n-1} \cdot \sin^2 \theta^{n-2} \cdot (d\theta^{n-3})^2 + \dots + \sin^2 \theta^{n-1} \cdot \dots \cdot \sin^2 \theta^2 \cdot (d\theta^1)^2]. \quad (1.2)$$

С помощью (1.2) можно определить оператор Лапласа—Бельтрами [2] в  $B_q$ . Рассмотрим асимптотику собственных функций и собственных значений этого оператора

$$\left( \nabla^i \nabla_i + \frac{d^2}{dy^2} + \bar{k}^2 \right) u = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.3)$$

при  $\bar{k} \rightarrow \infty$ . Граничные условия для краевой задачи (1.3) зададим в виде  $u|_{\partial B_q} = 0$ .

Будем искать решение (1.3) в виде

$$u = u_1(y) u_2(\theta), \quad (1.4)$$

где  $u_1(y)$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$u_1|_{y=\pm a} = 0, \quad u_1|_{y=0} = 1. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и разделяя переменные, находим

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} + u_1 = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla^i \nabla_i u_2 + k^2 u_2 = 0. \quad (1.7)$$

Постоянную разделения мы выбрали равной единице (что для нас несущественно) и обозначили  $k^2 = \bar{k}^2 - 1$ . Очевидно, решение (1.6) с условиями (1.5) есть  $u_1 = \cos(\pi y/2a)$ .

Решение (1.7) ищем в виде

$$u_2 = A(\theta) e^{i k S(\theta)} \quad (1.8)$$

Подставим (1.8) в (1.7) и приравняем нулю сумму коэффициентов при большом параметре  $k^2$ , найдем

$$\nabla^i S \cdot \nabla_i S = 1 \quad (\text{уравнение эйконала}). \quad (1.9)$$

Легко видеть, что (1.9) справедливо на всех секущих поверхностях  $y = C$  нормального пучка  $B_q$ .

Введем новые переменные  $y = p_y$ ,  $\nabla_i S = p_i$  и подставим в (1.9). Уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{1}{2} g^{ik} p_i p_k = 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Это есть уравнение Гамильтона—Якоби для вариационной задачи с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \left[ p_{n-1}^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta^{n-1}} \left( p_{n-2}^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta^{n-2}} \left( p_{n-3}^2 + \dots + \frac{1}{\sin^2 \theta^3} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left( p_2^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta^2} p_1^2 \right) \right) \right) \right] = \frac{1}{2}. \quad (1.10)$$

Гамильтонова система

$$\frac{d\theta^i}{dt} = g^{ik} H_{p_i} \quad \frac{dy}{dt} = p_y; \quad (1.11a)$$

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = -H_{\theta^i}, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0 \quad (1.11б)$$

описывает трансверсальный поток единичных ковариантных векторов на секущих поверхностях нормального пучка  $B_q$ . Первые интегралы системы (1.11).

$$p_y = 0,$$

$$y = C,$$

$$p_1^2 = \alpha_1^2,$$

$$p_2^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta^2} = \alpha_2^2, \quad (1.12)$$

$$p_3^2 + \frac{\alpha_2^2}{\sin^2 \theta^3} = \alpha_3^2,$$

.....

$$p_{n-1}^2 + \frac{\alpha_{n-2}^2}{\sin^2 \theta^{n-1}} = \alpha_{n-1}^2 = 1.$$

Выберем последовательность постоянных  $\alpha_i$  такую, чтобы выполнялось  $\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_{n-1}^2$ .

Из результатов работ [2, 4] и формулы (1.12) следует, что фазовое многообразие потока (1.11) есть прямое произведение  $W = I \times T_\theta$ ,  $T_\theta$  —  $(n-1)$ -мерный лагранжев тор. Очевидно,  $I$  односвязна и образующие гомотопической группы многообразия  $W$  совпадают с образующими  $\pi^1(T_\theta)$ . Отсюда и из [2] следует теорема.

*Теорема 1.* Асимптотика собственных чисел  $k$  уравнения (1) дается формулой

$$k = l + \frac{1}{2} (n-2) \quad (1.13)$$

( $l$  — целое число).

## 2. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Обозначим  $\theta_1^i = \arcsin(\alpha_{i-1}/\alpha_i^*); \theta_2^i = \pi - \theta_1^i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$ ; канонически сопряженные переменные координатам  $z$  обозначим через  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$ . Преобразование  $F$  (1.1) индуцирует преобразование компонент векторного поля  $p$  над  $B_q$  по формулам  $p_i^* = p_j \frac{\partial q^j}{\partial z^i}$ .

Замену переменных в кокасательном расслоении над  $B_q$   $(p; q) = (p; \theta, y) = (p; \theta, r-1) \rightarrow (p^*; z)$  будем обозначать через  $F$ . Применяя преобразование  $F$  к (1.12), мы получим фазовое многообразие системы (1.11) в координатах  $(p^*; z)$ . Условимся обозначать атласы, многообразия, локальные координаты и т. п. при  $y = 0$  индексом «0» внизу, эти же величины, относящиеся к моменту времени  $t = 0$ , будем обозначать индексом «0» вверху.

Рассмотрим асимптотику  $u(\theta)$  в области  $Q_0 \subset B_q$ :

$$0 \leq \theta^1 < 2\pi, \quad \theta_1^i \leq \theta^i \leq \theta_2^i, \quad y = 0.$$

Пусть  $W_0^0$  — лагранжево подмногообразие  $W$ , задаваемое уравнением  $\theta_2^{n-1} = \frac{\pi}{2}$ ;  $\chi^0 = (\alpha_1, 0, \dots, 0, 0; 0, \theta_2^2, \dots, \theta_2^{n-1}, 0)$  — точка на  $W$ ;  $W_0^0$  выберем в качестве начального многообразия для системы (1.11). Очевидно,  $W$  — инвариантное многообразие для (1.11). Через  $W_{z_0}^t$  обозначим многообразие, получаемое из  $W_0^0$  сдвигом вдоль траекторий системы (1.11) в момент времени  $t$ . Атлас  $H_0^t$  многообразия  $W_{z_0}^t$  состоит из карт  $\Omega_{m_0}$  с локальными координатами  $[^1]v_{m_0}^t = \tilde{p}_1^*, \tilde{p}_2^*, \dots, \tilde{p}_m^*; \tilde{z}^{m+1} \dots \tilde{z}^{n-2}$ , где  $(n-m-2)$  — ранг якобиана отображения  $h_0^*: (\tilde{p}^*, \tilde{z}) \rightarrow z$  в точках  $x_0^* = (\tilde{p}^*; \tilde{z}) \in \Omega_{m_0}$ .

Обозначим  $\sigma = \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-2}$  — локальные координаты на  $W_0^0$ ;  $d\mu_0$  и  $d\nu_{m_0}^t$  — меры на многообразиях  $W_0^0$  и  $W_{z_0}^t$ . Из формул (1.12) следует, что в качестве  $\sigma$  мы можем выбрать  $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 \dots \tilde{p}_\xi; \tilde{\theta}^{\xi+1} \dots \tilde{\theta}^{n-2}$  ( $1 \leq \xi \leq n-3$ ), где  $(n-2-\xi)$  — ранг якобиана проекции  $h_0^*: (p, \theta) \rightarrow \theta$ .

Пусть  $\varphi[\sigma(v_{m_0}^t)]$  — финитная функция на  $W_0^0$ , принадлежащая гильбертову пространству функций  $L^2(W_0^0)$ ,  $e^j(v_{m_0}^t)$  — разбиение единицы, соответствующее атласу  $H_0^t$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Существует асимптотическая серия собственных функций уравнения (1), сосредоточенных в области  $Q_0$ . Асимптотика функций из этой серии дается формулой

$$u(\theta) = e^{i\gamma} F^{-1} \sum_{j=1}^{l(L^{-1}\theta)} \exp \left[ - \left( i \frac{\pi}{2} \right) \text{Ind } l[\chi^0, \chi^j] \right] \Phi^{\tilde{p}_m^*} e^j(v_{m_0}^t) \times \quad (2.1)$$

$$\times \left| \frac{D\nu_{m_0}^t}{D\mu_0} \right|^{-1/2} \varphi[\sigma(v_{m_0}^t)] \exp \left[ ik \left( \int_{l[\chi^0, h_0^{-1}\theta]} p_i d\theta^i - \sum_{i=1}^m \tilde{p}_i^* \tilde{z}^i \right) \right].$$

Здесь  $\Phi^{\tilde{p}_m^*}$  — преобразование Фурье по первым  $m$  переменным  $\tilde{p}_m^*$ ,  $\gamma$  — некоторая постоянная,  $\text{Ind } l[\chi^0, \chi^j]$  — индекс Маслова пути, соединяющего центральные точки  $\chi^0, \chi^j$ , суммирование распространено на номера тех карт атласа  $H_0^t$ , пересечение которых с плоскостью  $h^{-1}\theta$  непусто;  $\left| \frac{D\nu_{m_0}^t}{D\mu_0} \right|$  — производная меры  $d\nu_{m_0}^t$  по мере  $d\mu_0$ .

**Доказательство.**  $(\sigma, y) = (\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-2}, y)$  суть локальные координаты на  $W^0$ . Поскольку преобразование (1.1) регулярно в каждой точке  $Q$  и ранг дифференциала  $dh^*$  не зависит от вида координат в базе, то мы можем на  $W_z^t$  выбрать в качестве локальных координат  $v_m^t = \tilde{p}_1^*, \dots, \tilde{p}_m^*; \tilde{z}^{m+1}, \dots, \tilde{z}^{n+1}$  с тем же номером  $m$ , что и на  $W_{z_0}^t$ . На прямом произведении  $W^0 = T_0^0 \times I$  стандартным образом определим меру  $d\mu = d\mu_0 \times dy$ . Через  $d\nu_m^t$  обозначим меру на  $W_z^t$  и продолжим начальную функцию  $\varphi(\sigma)$  на  $W^0$ , полагая ее постоянной в слое  $I$ :  $\varphi(\sigma, y) \equiv \varphi(\sigma)$ .

Из результатов работы Маслова [1] и (1.4) получаем, что асимптотика уравнения (1.3) описывается формулой

$$u(\theta, y) = \cos \frac{\pi y}{2a} e^{t_1} F^{-1} \sum_{l=i(h^{-1}q)} \exp \left[ - \left( i \frac{\pi}{2} \right) \text{Ind } l [\chi^0, \chi^j] \right] \times \quad (2.2)$$

$$\times \Phi \bar{p}_m^* e^j (v_m^t) \left| \frac{Dv_m^t}{D\mu} \right|^{-1/2} \varphi [\sigma(v_m^t)] \exp \left[ ik \left( \int_{l[\chi^0, h_j^{*-1}z]} p_i^* dz^i - \sum_{i=1}^m \bar{p}_i^* \bar{z}^i \right) \right].$$

Так как определитель  $\frac{Dv_m^t}{D\mu}$  непрерывен по  $y$ , то в силу известного свойства интеграла Фурье функция

$$\Phi \bar{p}_m^* e^j (v_m^t) \left| \frac{Dv_m^t}{D\mu} \right|^{-1/2} \varphi [\sigma(v_m^t)] \exp \left[ ik \left( \int_{l[\chi^0, h_j^{*-1}z]} p_i^* dz^i - \sum_{i=1}^m \bar{p}_i^* \bar{z}^i \right) \right]$$

также непрерывна по  $y$ .

Переходя к пределу  $y \rightarrow 0$ , получаем утверждение теоремы.

Вычислим асимптотику  $u(\theta)$  в частном случае, когда  $\theta$  принадлежит области  $0 \leq \theta^1 < 2\pi$ ,  $\theta_1^i < \theta^i < \theta_1^i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ).

Легко сообразить, что  $h^{-1}q$  принадлежит  $2^{n-2}$  неособым (т. е. взаимно однозначно проектирующимся на базу) картам атласа  $H^t$ . Так же, как и в [2], находим решение (1.11 а)

$$\theta^1 \pm \arcsin \frac{\text{ctg } \theta^2}{\text{ctg } \theta_1^2} = \beta_1,$$

$$\mp \arcsin \frac{\cos \theta^i}{\cos \theta_1^i} \pm \arcsin \frac{\text{ctg } \theta^{i+1}}{\text{ctg } \theta_1^{i+1}} = \beta_i \quad (2.3)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-2),$$

$$\mp \arcsin \frac{\cos \theta^i}{\cos \theta_1^i} - t = \beta_{n-1},$$

$$y = C.$$

В силу выбора  $W_0^0$  имеем  $\beta_{n-1} = 0$ . Локальные координаты  $v_m^t$  принимают вид  $v_m^t = z^1, z^2, \dots, z^n$ . Для вычисления якобиана

$$\left| \frac{Dz}{D\sigma} \right| = \left| \frac{Dz}{Dq} \right| \left| \frac{Dq}{D\sigma} \right|$$

воспользуемся известной формулой

$$\left| \frac{Dz}{Dq} \right| = (1+y)^{n-1} \cdot \sin^{n-2} \theta^{n-1} \cdot \sin^{n-3} \theta^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin \theta^2. \quad (2.4)$$

Используя лемму Соболева [1], получаем

$$\frac{Dq}{D\sigma} = \frac{D(t)}{D(0)}, \quad (2.5)$$

где

$$D(t) = \frac{D(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, y)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, C, t)}.$$



Из (2.1) с учетом (2.3)—(2.5) находим

$$u(\theta) = e^{i\gamma} (\sin^{n-3} \theta^{n-1} \cdot \sin^{n-4} \theta^{n-2} \dots \sin \theta^3)^{-1/2} \times \\ \times \prod_{i=2}^{n-1} \left( \sin^2 \theta^i - \frac{\alpha_{i-1}^2}{\alpha_i^2} \right)^{-1/4} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2^{n-2}} \exp \left[ - \left( i \frac{\pi}{2} \right) \text{Ind } l [\chi^0, \chi^j] \right] \exp \left( ik \int_{l[\chi^0, \theta]} p_i d\theta^i \right) e^j(\theta) \varphi(\theta).$$

Автор выражает благодарность С. И. Альберу за ряд критических замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
2. В. Р. Коган, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, (1969)
3. С. И. Альбер, ДАН СССР, 178, № 1, 13 (1968)
4. В. И. Арнольд, Сиб. мат. ж., 4, № 2, 471 (1963)

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
13 февраля 1969 г.

#### ASYMPTOTICS OF THE LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR ON UNIT SPHERE $S^{n-1}$

V. R. Kogan

The article studies asymptotics of the Laplace-Beltrami operator on a unit  $(n-1)$ -dimensional sphere in the geometrical optics approximation. Explicit asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of this operator are obtained.

УДК 517.946 42

## АСИМПТОТИКА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА—БЕЛЬТРАМИ В $n$ -МЕРНОМ ШАРЕ $E^n$

В. Р. Коган

Получены новые асимптотические разложения для серии собственных функций оператора Лапласа—Бельтрами, сосредоточенных в некоторой окрестности  $n$ -мерного шара. Из этих формул, как частный случай (при  $n = 3$ ), следуют асимптотические формулы для функций Бесселя. Полученные разложения равномерны по  $(\theta, r)$  в указанной окрестности шара.

В настоящей работе исследуется асимптотика оператора Лапласа—Бельтрами в  $n$ -мерном единичном шаре. В отличие от задач, рассмотренных в [1], здесь появляется индекс Маслова краевой задачи. Основным результатом состоит в следующем: доказано существование асимптотической серии собственных функций, сосредоточенных в некоторой окрестности границы шара; для этой серии получены явные асимптотические разложения собственных функций и собственных значений.

В частном случае 3-мерного шара  $E^3$  подобный результат был получен Келлером и Рубиновым [2] с помощью сформулированного ими метода «геометрической концепции лучей».

### 1. СВЯЗЬ АСИМПТОТИКИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА—БЕЛЬТРАМИ С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ В $E^n$

Введем в  $E^n$  сферические координаты  $q = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, r)$ ,  $0 \leq \theta^1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta^i < \pi$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . Пусть  $u(\theta, r)$  — функция класса  $C^2$  на  $E^n$  и  $g_{ij}(\theta, r)$  — метрический тензор эвклидова пространства  $R^n$  в координатах  $(\theta, r)$ . Оператор Лапласа—Бельтрами в  $E^n$  определяется как

$$\nabla^i \nabla_i u = g^{ij} \nabla_j \nabla_i u,$$

где  $g^{ij}$  — тензор, обратный тензору  $g_{ij}$ ;  $\nabla_i$  — ковариантная производная.

Рассмотрим асимптотику (при  $k \rightarrow \infty$ ) решения уравнения

$$(\nabla^i \nabla_i + k^2) u = 0 \quad (1.1)$$

в шаре  $E^n$ . Будем решать эту задачу с граничными условиями двух типов

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{S^{n-1}} = 0, \quad (1.2)$$

$$u \Big|_{S^{n-1}} = 0. \quad (1.3)$$

Ищем решение (1.1) в виде [1]

$$u(\theta, r) = \varphi(\theta, r) e^{ikS(\theta, r)}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и приравнявая нулю коэффициенты при  $k^2$  и  $k$ , будем иметь [1]



Выберем последовательность  $\alpha_i$  такую, что

$$\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_n^2 = 1. \quad (1.12)$$

Система уравнений геодезических принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^i}{dt} &= \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta^{n-1} \cdot \sin^2 \theta^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin^2 \theta^{i+1}} p_i, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} \theta^i}{r^2 \cdot \sin^2 \theta^{n-1} \cdot \sin^2 \theta^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin^2 \theta^i} \alpha_{i-1}^2, \\ \frac{dr}{dt} &= p_n, \quad \frac{dp_n}{dt} = \frac{\alpha_{n-1}^2}{r^3} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь надо положить  $\alpha_{-1} = 0$ ,  $\sin^2 \theta^n = 1$ . Фазовое пространство системы (1.13) есть кокасательное расслоение  $\mathcal{W}$  над  $E^n$ , т. е. множество пар  $\omega = (x, \bar{p})$ , где  $x$  с евклидовыми координатами  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  принадлежит  $E^n$ ;  $\bar{p}$  — совокупность единичных касательных ковекторов к  $E^n$  в точке  $x$ . Каждый элемент  $\omega$  определяет некоторую геодезическую в  $E^n$ . Уравнения (1.11) выделяют в  $\mathcal{W}$  многообразие  $\bar{\mathcal{W}}$  элементов, определяющих геодезические, которые касаются сферического слоя  $B \left( 0 \leq \theta^1 \leq 2\pi, \theta_1^i \leq \theta^i \leq \theta_2^i, \theta_1^i = \arcsin \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \theta_2^i = \pi - \theta_1^i, i = 2, 3, \dots, \right.$

$\left. n-1 \right)$  на сфере  $S_{\alpha_{n-1}}^{n-1}$  радиуса  $\alpha_{n-1}$  с центром в начале. Многообразие  $\bar{\mathcal{W}}$

есть кокасательное подрасслоение единичных ковекторов над областью шарового слоя  $X$  ( $\alpha_{n-1} \leq r \leq 1, \theta \in B$ ). Перенесем параллельно вдоль определяемой элементом  $\omega \in \bar{\mathcal{W}}$  геодезической ковектор  $\bar{p}$  в точку касания геодезической со сферическим слоем  $B$ . Получим отображение

$f: \bar{\mathcal{W}} \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}, \tilde{\mathcal{W}}$  — подрасслоение единичных касательных ковекторов к  $S^{n-1}$ . При этом отображении геодезический поток на  $X$  переходит в гладкий геодезический поток на  $B$ . Через  $f_1, f_2, \dots, f_n$  обозначим первые интегралы в (1.11). Пользуясь условием (1.12), легко найти, что  $\operatorname{grad} f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) в каждой точке  $\theta \in B$  линейно независимы.

Из теоремы Арнольда [4] и независимости первых  $(n-1)$  интегралов (1.11) от  $r, p_n$  следует, что фазовое многообразие геодезического

потока  $\tilde{\mathcal{W}}$  есть  $(n-1)$ -мерный тор  $T^{n-1}$ . При условиях (1.7), (1.8) проекция  $\varphi_n$  фазового многообразия системы (1.13) на плоскость  $(r, p_n)$  гомеоморфна окружности. Так как переменные  $r$  и  $\theta$  разделились, то фазовое многообразие системы (1.13) является прямым произведением  $T^{n-1} \times \varphi_n = T^n$ , т. е.  $n$ -мерным тором.

Пусть  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  — глобальные координаты на  $T^n$  (существование таких координат очевидно из (1.11)). Уравнение тора  $T^n$  в параметрической форме тогда принимает вид  $p = p(\sigma), q = q(\sigma)$ .

Обозначим через  $\Gamma$  подмногообразие  $T^n$ , выделяемое уравнением  $r = 1$ . В каждой точке  $\Gamma$  касательная плоскость к  $T^n$  в пространстве  $(x, \bar{p})$  определена неоднозначно. Множество точек  $T^n$ , лежащих над границей  $X$ , будем считать принадлежащим многообразию особенностей  $M$ . Точное определение этого многообразия дано в разделе 3, из этого определения следует, что  $\Gamma$  принадлежит  $M$ .

Так как переменные в уравнении Гамильтона—Якоби разделились, то скобки Лагранжа от  $p(\sigma), q(\sigma)$



2. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Из результатов работы [1] следует, что существует асимптотическая серия собственных значений  $k$  уравнения (1.1), которая находится из условий «квантования»:

$$\frac{2k}{\pi} \oint_{\gamma^s} p_i dq^i = l_s \pmod{4} + O(1/k)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n),$$

$\gamma^s$  —  $s$ -я образующая фундаментальной группы многообразия  $T^n$ ;  $l_s \pmod{4}$  — индекс Маслова цикла  $\gamma^s$  по модулю 4.

Обозначим через  $\varphi_i$  естественную проекцию тора  $T^n$  на плоскость  $(p_i; q^i)\varphi_i: (p_1 p_2 \dots p_n; q^1 q^2 \dots q^n) \rightarrow (p_i; q^i)$ . Образ отображения  $\varphi_i$  определяется  $i$ -м уравнением системы (1.11). Выберем кривые  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$  в качестве  $\gamma^s$ . Условия «квантования» при этом примут вид

$$\frac{2k}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_1 d\theta^1 = l_1 \pmod{4},$$

$$\frac{4k}{\pi} \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} \alpha_{i-1} \frac{(\alpha_i^2 \alpha_{i-1}^{-2} \sin^2 \theta^2 - 1)^{1/2}}{\sin \theta^i} d\theta^i = l_i \pmod{4}, \tag{2.1}$$

. . . . .

$$\frac{4k}{\pi} \int_{\alpha_{n-1}}^1 \left(1 - \frac{\alpha_{n-1}^2}{r^2}\right)^{1/2} dr = l_n \pmod{4}.$$

Здесь  $\theta_1^i = \arcsin \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}$ ,  $\theta_2^i = \pi - \theta_1^i$ .

С помощью (1.11) находим  $l_1 \pmod{4} = 4m_1$ ,  $l_i \pmod{4} = 2 + 4m_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ). Из [2] следует

$$l_n \pmod{4} = \begin{cases} 1, & \text{если используются граничные условия (1.7),} \\ 3, & \text{с использованием граничных условий (1.8).} \end{cases}$$

Система (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} k\alpha_1 &= m_1, \\ k(\alpha_2 - \alpha_1) &= m_2 + 1/2, \\ k(\alpha_3 - \alpha_2) &= m_3 + 1/2, \\ &\dots \dots \dots \\ k(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) &= m_{n-1} + 1/2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\frac{4k}{\pi} [(1 - \alpha_{n-1}^2)^{1/2} - \alpha_{n-1} \arccos \alpha_{n-1}] = \begin{cases} 1 + 4m_n \\ 3 + 4m_n \end{cases}$$

Сложим первые  $(n-1)$  уравнений (2.2) и обозначим  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{n-1} = l$ . Окончательный результат сформулируем в виде леммы.

**Лемма.** Существует асимптотическая серия собственных значений  $k$  уравнения (1.1) — (1.7, 1.8), которая с точностью до  $O(1/k)$  находится из уравнений

$$k\alpha_{n-1} = l + (1/2)(n - 2),$$

$$\frac{4k}{\pi} [(1 - \alpha_{n-1}^2)^{1/2} - \alpha_{n-1} \arccos \alpha_{n-1}] = \begin{cases} 1 + 4m_n \\ 3 + 4m_n \end{cases} \quad (2.3)$$

### 3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Тор  $T^n$  лежит в кокасательном пучке над  $X$ . Рассмотрим проекцию  $g: T^n \rightarrow X$ . Точка  $T^n$ , в которой ранг дифференциала  $dg$  меньше  $n$  либо не определен, называется особой точкой отображений  $g$ . Это определение особой точки инвариантно относительно замены евклидовых координат  $x \rightarrow (\theta, r)$  в базе  $X$ . Множество особых точек образует подмногообразие особенностей  $M$  на  $T^n$ . Из (1.11) следует, что  $T^n$  находится в общем положении относительно проекции  $g$ . В [1] показано, что в этом случае  $M$  есть неориентированный цикл коразмерности 1, лежащий в  $T^n$  двусторонне. Пусть ранг  $dg$  в некоторой точке  $z \in T^n \setminus M$  равен  $(n - h)$  ( $0 \leq h \leq n$ ), тогда в окрестности  $z$  на лагранжевом многообразии  $T^n$  можно в качестве локальной системы координат выбрать [1]  $\tilde{y}_h = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \dots \tilde{p}_h; \tilde{x}^{h+1}, \tilde{x}^{h+2}, \dots, \tilde{x}^h$ . Окрестность  $\Omega_h$  точки  $z$  на  $T^n$  с координатами  $y_h$  будем называть локальной картой многообразия  $T^n$ . Совокупность окрестностей  $\Omega_h$  составляет атлас  $H$  многообразия  $T^n$ . Некоторую точку локальной карты  $\Omega_h$ , в которой ранг  $dg$  равен  $(n - h)$ , обозначим через  $\gamma^j$  и будем называть центральной точкой карты. Центральную точку  $\gamma^0$  с координатами  $(p, q) = (\alpha_1, 0, \dots, 0, 0; 0, \theta_2^2, \theta_2^3, \dots, \theta_2^{n-1}, \sigma_{n-1})$  будем считать начальной точкой атласа  $H$ . Используя двусторонность цикла особенностей, граничные условия (1.7) или (1.8) и условия (1.11), мы можем вычислить индексы Маслова путей, соединяющих центральные точки карт [1].

Уравнение  $r = \alpha_{n-1}$  выделяет на  $T^n$  лагранжево подмногообразие  $(n - 1)$ -мерный тор  $T_0^{n-1}$ . Пусть финитная функция  $\varphi(\sigma)$  определена на  $T_0^{n-1}$  и принадлежит гильбертову пространству функций  $L_2(T_0^{n-1})$ ;  $e^j[\sigma(\tilde{y}_h), 1/k]$  — разбиение единицы, отвечающее атласу  $H_0$  тора  $T_0^{n-1}$ , индуцированному атласом  $H$ . Рассмотрим решение  $u(\theta, r)$  уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$u(\theta, r) \Big|_{T_0^{n-1}} = FK_{T_0^{n-1}, 1/k}^{\gamma, \gamma^0} \varphi[\sigma(\tilde{y}_h)] \Big|_{T_0^{n-1}},$$

где  $K_{T_0^{n-1}, 1/k}^{\gamma, \gamma^0} \varphi[\sigma(\tilde{y}_h)]$  — так называемый канонический оператор,

введенный в [1], он отображает пространство функций  $\varphi(\tilde{y}_h)$ , заданных на  $T_0^{n-1}$ , на пространство функций, заданных на  $R^n$ ; оператор  $F$  действует на функцию  $\psi(x)$  по формуле  $F\psi(x) = \psi(Fx) = \bar{\psi}(\theta, r)$ .

Пусть  $d\tilde{y}_h, d\sigma$  — меры на подмногообразиях  $T_t^{n-1}$  и  $T_0^{n-1}$ . Из результатов работы [1] следует теорема.

*Теорема.* Асимптотика уравнения (1.1) с условиями (1.7), (1.8), (3.1) дается формулой

$$u(\theta, r) = FK_{T_t^{n-1}, 1/k}^{\gamma, \gamma^0} \varphi(\sigma) = e^{i\tau} F \sum_{l=l(x)} \exp \left[ - \left( i \frac{\pi}{2} \right) \text{Ind } l[\chi^0, \chi^j] \right] \times$$

$$\times \Phi_{\tilde{p}_h}^{\tilde{p}_h} e^j[\sigma_j(\tilde{y}_h), 1/k] \Big| \frac{D\tilde{y}_h}{D\sigma} \Big|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left[ ik \left( \int_{l[\chi^0, g^{-1}x]} \bar{p}_i dx^i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \tilde{x}^i \right) \right] \varphi[\sigma(\tilde{y}_h)]|_x + O(1/k). \quad (3.2)$$

Здесь  $\gamma$  — некоторая постоянная;  $j(x)$  — совокупность номеров тех карт атласа  $H_i$  подмногообразия  $T_i^{n-1}$ , которые содержат точки  $g^{-1}x$ ;

$\frac{D\tilde{y}_h}{D\sigma}$  — производная меры  $d\tilde{y}_h$  по мере  $d\sigma$ ;  $\Phi^{\tilde{p}_h}$  — преобразование Фурье

по переменным  $\tilde{p}_h$ . Так как на лагранжевом многообразии  $T^n \setminus \Gamma$ , выполнены условия (2.2), то асимптотика  $u(\theta, r)$  с точностью до  $O(1/k)$

не зависит от выбора атласа  $H$ , разбиения единицы  $e^j[\sigma(\tilde{y}_h)]$ , выбора начальной точки  $\chi^0$  и путей  $l[\chi^0, \chi^j]$ ,  $l[\chi^0, g^{-1}x]$ . Формула (3.2) описывает асимптотику собственных функций  $u(\theta, r)$ , сосредоточенных в области

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &\leq r < 1, \\ \theta_1^i &\leq \theta^i \leq \theta_2^i, \\ 0 &\leq \theta^1 \leq 2\pi \\ (i &= 2, 3, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Найдем из (3.2) асимптотику  $u(\theta, r)$  для одного частного, но важного случая, когда  $(\theta, r)$  лежит строго внутри области  $X$ :  $\alpha_{n-1} < r < 1$ ,  $\theta_1^i < \theta^i < \theta_2^i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ). В этом случае плоскость  $g^{-1}x$  пересекает  $T^n$  в  $2^{n-1}$  неособых точках  $z^j$ . Выберем эти точки в качестве центральных точек нового атласа  $\bar{H}$ , картами которого будем считать открытые окрестности точек  $z^j$ , взаимно однозначно проектирующиеся на  $X$ . Начальной точкой атласа  $\bar{H}$  по-прежнему будем считать  $\chi^0$ . Очевидно, интеграл  $\int \bar{p}_i dx^i$  инвариантен относительно замены  $x \rightarrow (\theta, r)$ , следовательно, мы можем положить в формуле (3.2)

$$\int_{l[\chi^0, z^j]} \bar{p}_i dx^i = \int_{l[\chi^0, z^j]} p_i dq^i.$$

Имеем из (3.2)

$$\begin{aligned} u(\theta, r) &= e^{i\gamma} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \exp \left[ - \left( i \frac{\pi}{2} \right) \text{Ind } l[\chi^0, z^j] \right] \left| \frac{Dx}{D(\theta, r)} \right|^{-1/2} \times \\ &\times \left| \frac{D(\theta, r)}{D\sigma} \right|^{-1/2} \exp \left( ik \int_{l[\chi^0, z^j]} p_i dq^i \right) e^j[\sigma_j(\theta, r)] \varphi[\sigma(\theta, r)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычислим  $\left| \frac{D(\theta, r)}{D\sigma} \right|$ . Пользуясь леммой Соболева [1], нетрудно показать, что

$$\frac{D(\theta, r)}{D\sigma} = \frac{D(t)}{D(0)},$$

где

$$D(t) = \frac{D(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}, r)}{D(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, t)},$$



$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1}$  определены (1.16) и  $\beta_n = \text{const}$ . Из (1.11), (1.17) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{(r^2 - \alpha_{n-1}^2)^{1/2}}{r}, & \frac{\partial r}{\partial \beta_r} &= 0, \\ \frac{\partial \theta^i}{\partial \beta_r} \frac{\alpha_i}{p_i} - \frac{\alpha_i}{\sin^2 \theta^{i+1} p_{i+1}} \frac{\partial \theta^{i+1}}{\partial \beta_r} &= \delta_r^i, \\ \frac{\partial \theta^{n-1}}{\partial \beta_r} \frac{\alpha_{n-1}}{p_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-1}}{r (r^2 - \alpha_{n-1}^2)^{1/2}} \frac{\partial r}{\partial \beta_r} &= \delta_r^{n-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$(r = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n-2).$

С помощью (3.5)  $D(t)$  приводится к виду

$$D(t) = \prod_{i=1}^n \frac{p_i}{\alpha_i} = \frac{(r^2 - \alpha_{n-1}^2)^{1/2}}{r} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{(\sin^2 \theta^i - \alpha_{i-1}^2 \alpha_i^{-2})^{1/2}}{\sin \theta^i}. \quad (3.6)$$

Определитель  $\left| \frac{Dx}{D(\theta, r)} \right|$  известен [5]:

$$\left| \frac{Dx}{D(\theta, r)} \right| = r^{n-1} \cdot \sin^{n-2} \theta^{n-1} \cdot \sin^{n-3} \theta^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin \theta^2. \quad (3.7)$$

Учитывая (3.6), (3.7), решение  $u(\theta, r)$  записываем в виде

$$\begin{aligned} u(\theta, r) &= e^{i\gamma r} r^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} (r^2 - \alpha_{n-1}^2)^{-1/4} \sin^{-\left(\frac{n-3}{2}\right)} \theta^{n-1} \cdot \sin^{-\left(\frac{n-4}{2}\right)} \times \\ &\times \theta^{n-2} \cdot \dots \cdot \sin^{-1/2} \theta^3 \prod_{i=2}^{n-1} \left( \sin^2 \theta^i - \frac{\alpha_{i-1}^2}{\alpha_i^2} \right)^{-1/4} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \exp \left[ -\left( i \frac{\pi}{2} \right) \times \right. \\ &\left. \times \text{Ind } l [\chi^0, z^j] \right] \exp \left( ik \int_{l[\chi^0, z^j]} p_i dq^i \right) e^j [\theta, r] \varphi [\theta, r]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из формулы (3.8) получим асимптотику  $u(\theta, r)$  в частном случае при  $n = 3$ . Рассмотрим точку  $x$  с координатами  $(\varphi, \theta, r)$ , лежащую внутри  $X$ . Атлас  $H$  состоит из четырех 3-мерных неособых карт. Центральными точками этих карт выберем

$$\begin{aligned} \chi^1 &= (\alpha_1, p_2, p_3, \varphi, \theta, r), & \chi^2 &= (\alpha_1, p_2, -p_3, \varphi, \theta, r), \\ \chi^3 &= (\alpha_1, -p_2, p_3, \varphi, \theta, r), & \chi^4 &= (\alpha_1, -p_2, -p_3, \varphi, \theta, r). \end{aligned}$$

Здесь

$$p_2 = \left( \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2 \theta^2} \right)^{1/2}, \quad p_3 = \left( 1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

Начальной точкой атласа  $H$  будем считать  $\chi^0 = (\alpha_1, 0, 0, 0, \theta_2, \alpha_2)$ . Индексы путей, соединяющих точку  $\chi^0$  с центральными точками, легко вычисляются

$$\begin{aligned} \text{Ind } l [\chi^0, \chi^1] &= 1, & \text{Ind } l [\chi^0, \chi^2] &= 0, \\ \text{Ind } l [\chi^0, \chi^3] &= 2, & \text{Ind } l [\chi^0, \chi^4] &= 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (1.11), (2.2) находим

$$S_1 = \pm \alpha_1 \varphi,$$

$$S_2 = \int_{\theta_2}^{\theta} p_2 d\theta = \pm \alpha_1 \left[ \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta}{(\alpha_2^2 \alpha_1^{-2} \sin^2 \theta - 1)^{1/2}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{arcsin} \frac{\cos \theta}{(1 - \alpha_1^2 \alpha_2^{-2})^{1/2}} \right] \pm \frac{\pi}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm \alpha_2 \left( \operatorname{arccos} \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \operatorname{arccos} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta_2} \right), \quad (3.10)$$

$$S_3 = \int_{\alpha_2}^r p_3 dr = \pm \left[ (r^2 - \alpha_2^2)^{1/2} - \operatorname{arccos} (\alpha_2/r) \right],$$

где  $\sin \theta_1 = \alpha_1/\alpha_2$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ . С помощью (2.2), (3.9), (3.10) окончательно получаем

$$u(\theta, r) = \frac{4\varphi(\sigma)}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ k^2 r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-1/4} \left[ \sin^2 \theta - \frac{m_1^2}{(l + 1/2)^2} \right]^{-1/4} \times \\ \times \exp(\pm im_1 \varphi) \cos \left\{ \left[ k^2 r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left( l + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \times \operatorname{arccos} \frac{l + 1/2}{kr} - \frac{\pi}{4} \left. \right\} \cos \left\{ \left( l + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arccos} \frac{(l + 1/2) \cos \theta}{[(l + 1/2)^2 - m_1^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - m_1 \operatorname{arccos} \frac{m_1 \operatorname{ctg} \theta}{[(l + 1/2)^2 - m_1^2]^{1/2}} - \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (3.11)$$

Полагая в (3.11)  $\varphi(\sigma) = \sqrt{k}/4$ , мы получаем формулу Келлера и Рубинова [2].

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность С. И. Альберу за постоянную помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
2. Т. В. Keller, S I Rubinow, Ann. Phys., 9, № 1, 24 (1960).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, изд. Наука, М., 1965.
4. В. И. Арнольд, Сиб. мат. ж., 4, № 2, 471 (1963).
5. Н. Я. Вилленкин, Специальные функции и теория представлений групп, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 ноября 1968 г.

#### ASYMPTOTICS OF THE LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR IN $n$ -DIMENSIONAL SPHERE $E^n$

V. R. Kogan

New asymptotic decompositions are obtained for a series of the Laplace-Beltrami operator eigenfunctions, lumped in a certain neighbourhood of  $n$ -dimensional sphere. As a particular case (when  $n=3$ ) from these formulas there follow asymptotic ones for the Bessel functions. The decompositions obtained are uniform with respect to  $(r, \theta)$  in the mentioned neighbourhood.

УДК 62.504.52

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ ПРОСТЕЙШИХ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

А. С. Алексеев, С. В. Макаров

Аналогично случаю системы с сосредоточенными параметрами методом точечных преобразований в бесконечномерном фазовом пространстве (коэффициентов Фурье) исследуется динамика одноконтурной нелинейной импульсной системы с интегрирующим звеном и простейшим распределенным звеном, описываемым уравнением теплопроводности. Основное внимание уделено исследованию периодических движений и их устойчивости.

Рассмотрим нелинейную импульсную распределенную систему, представляющую собой замкнутый контур, состоящий из последовательно соединенных идеального импульсного элемента, интегрирующего звена, статического нелинейного звена с нелинейностью класса  $C^1(R^1)$  и линейного, для простоты одномерного, распределенного (по координате  $0 \leq x \leq l$ ) звена, которое описывается уравнением теплопроводности. При этом распределенное звено пусть подсоединено к системе так, что его входом является граничное условие при  $x = 0$ , а выходом—значение распределения в нем  $u(t, x)$  в заданной точке  $x = x$ , где  $0 < x \leq l$ .

Мгновенное состояние рассматриваемой системы определяется, очевидно, значением координаты интегрирующего звена и функцией координаты  $x$ , удовлетворяющей краевой задаче,—мгновенным распределением в распределенном звене. Поэтому в качестве фазового пространства рассматриваемой системы может быть взято топологическое произведение одномерного евклидова пространства, функционального пространства и полупрямой  $t \geq 0$ .

Учитывая то, что система оказывается замкнутой лишь в моменты времени  $t = j\tau$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), когда появляется импульс в идеальном импульсном элементе, аналогично случаю сосредоточенной системы [1, 2], уместно свести изучение ее динамики к исследованию точечных преобразований сечений указанного пространства при  $t = j\tau$  друг в друга. Однако ниже решение уравнения распределенного звена в системе ищется методом Фурье, поэтому вместо функционального пространства, аналогично известному рассмотрению релейных систем [3, 4], используется бесконечномерное (гильбертово) пространство коэффициентов Фурье разложения соответствующих распределений по собственным функциям краевой задачи.

1. Динамика указанной системы описывается следующими уравнениями относительно функции  $u(t', x')$  и  $\mu(t')$ :

$$\begin{aligned} u_{t'} &= a^2 u_{x'x'}, & u(t', 0) &= \varphi(\mu), \\ u_{x'}(t', l) &= 0, & \dot{\mu} &= \sum_{i=1}^{\infty} u(t', x_i) \delta(t' - j\tau) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при начальных условиях  $u(0, x') = u^0(x')$ ,  $\mu(0) = \mu^0$ .

После замены переменных

$$x = \frac{x'}{l}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{x}'}{l}, \quad t = \frac{a^2}{l^2} t', \quad \tau = \frac{a^2}{l^2} \tau' \quad (1.2)$$

система (1.1) примет вид

$$u_t = u_{xx}, \quad u(t, 0) = \varphi(\mu), \quad u_x(t, 1) = 0, \quad (1.3)$$

$$\dot{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} u(t, \bar{x}) \delta(t - j\tau),$$

где  $\varphi(\mu)$ —указанная функция (класса  $C^1(R^1)$ ) нелинейного звена,  $u(0, x) = u^0(x)$ ,  $\mu(0) = \mu^0$ —начальные условия.

Применяя метод Фурье, нетрудно получить общее решение системы (1.3) в виде

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ a_i^0 \exp(-\lambda_i^2 t) + 2\lambda_i \int_0^t \varphi(\mu(s)) \exp[-\lambda_i^2(t-s)] ds \right\} \times \quad (1.4)$$

$$\times \sin(\lambda_i x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \Phi_i(x),$$

$$\mu(t) = \mu^0 + \sum_{j=0}^{\infty} u(j\tau, \bar{x}) 1(t - j\tau), \quad (1.5)$$

где  $\Phi_i(x) = \sin(\lambda_i x)$ —собственные функции краевой задачи,  $a_i^0$ —коэффициенты фурье-разложения начального условия  $u^0(x)$  по этим функциям,

$$\lambda_i = \frac{2i + 1}{2} \pi \quad (1.6)$$

—собственные числа краевой задачи,  $0 < \bar{x} \leq 1$ —фиксированное значение  $x$ , такое, что  $u(t, \bar{x})$ —выходная координата распределенного звена,  $\tau$ —период в идеальном импульсном элементе.

Вводя обозначения

$$\mu(j\tau - 0) \equiv \mu^j, \quad u(j\tau - 0, x) \equiv u^j(x), \quad (1.7)$$

$$u^j(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} u_i^j \Phi_i(x)$$

и пользуясь тем, что  $\varphi(\mu(t))$  постоянна на полуинтервалах  $j\tau \leq t < (j+1)\tau$ , нетрудно из (1.4) и (1.5), аналогично [1, 2], получить при произвольном  $j = 1, 2, 3, \dots$  соотношения

$$\mu^j = \mu^{j-1} + u^{j-1}(\bar{x}) = \mu^{j-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i^{j-1} \Phi_i(\bar{x}), \quad (1.8)$$

$$u_i^j = u_i^{j-1} \exp(-\lambda_i^2 \tau) + \frac{2}{\lambda_i} [1 - \exp(-\lambda_i^2 \tau)] \varphi(\mu^j) \quad (1.9)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots),$$

которые представляют собой последовательность однократных точечных преобразований, соответствующих движению изображающей точки в фазовом пространстве и полностью характеризующих динамику рассматриваемой системы.

Методом индукции из (1.8) и (1.9) нетрудно получить любое многократное точечное преобразование, соответствующее движению изображающей точки за время  $t = m\tau$ , т. е.

$$\mu^m = \mu^0 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\bar{x}) \sum_{j=0}^{m-1} u_i^j, \tag{1.10}$$

$$u_i^m = \exp(-m\lambda_i^2\tau) u_i^0 + \frac{2}{\lambda_i} [1 - \exp(-\lambda_i^2\tau)] \times \\ \times \sum_{j=1}^m \exp[-(m-j)\lambda_i^2\tau] \varphi(\mu^j), \tag{1.11}$$

где значения функции  $\varphi(\mu^j)$  должны находиться из (1.8), (1.9) при  $j = 1, 2, \dots, m-1$ , а начальное значение  $j$  без ограничения общности выбрано нулевым.

2. Если теперь в рассматриваемой системе существует периодическое движение с периодом  $T_m = m\tau$ , то у точечного преобразования (1.10), (1.11) должна существовать инвариантная точка, не являющаяся точкой меньшей кратности, т. е., в частности, должны выполняться условия

$$\mu^m = \mu^0 \equiv \mu^{*m}, \quad u_i^m = u_i^0 \equiv u_i^{*m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \tag{2.1}$$

что совместно с (1.8) — (1.11) определяет координаты изображающей точки на этом периодическом движении в моменты времени  $k\tau$ ,  $(k+1)\tau, \dots, (k+m-1)\tau$  при произвольном целом числе  $k$ . Устойчивость этого периодического движения [3-5] определяется принадлежностью внутренним точкам единичного круга корней характеристического уравнения

$$\Delta_m(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu^m}{\partial \mu^0} - z & \frac{\partial \mu^m}{\partial u_0^0} & \frac{\partial \mu^m}{\partial u_1^0} & \frac{\partial \mu^m}{\partial u_2^0} & \dots \\ \frac{\partial u_0^m}{\partial \mu^0} & \frac{\partial u_0^m}{\partial u_0^0} - z & \frac{\partial u_0^m}{\partial u_1^0} & \frac{\partial u_0^m}{\partial u_2^0} & \dots \\ \frac{\partial u_1^m}{\partial \mu^0} & \frac{\partial u_1^m}{\partial u_0^0} & \frac{\partial u_1^m}{\partial u_1^0} - z & \frac{\partial u_1^m}{\partial u_2^0} & \dots \\ \frac{\partial u_2^m}{\partial \mu^0} & \frac{\partial u_2^m}{\partial u_0^0} & \frac{\partial u_2^m}{\partial u_1^0} & \frac{\partial u_2^m}{\partial u_2^0} - z & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \tag{2.2}$$

представляющего собой равенство нулю бесконечного детерминанта, в котором производные взяты в исследуемой инвариантной точке.

Используя условия существования в системе  $m$ -тактного периодического движения (2.1), из (1.10) и (1.11) для соответствующей ему инвариантной точки получим уравнения

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\bar{x}) \sum_{j=1}^m u_i^{*j} = 0, \tag{2.3}$$

$$u_i^{*m} = \frac{2}{\lambda_i} \frac{1 - \exp(-\lambda_i^2 \tau)}{1 - \exp(-m\lambda_i^2 \tau)} \sum_{j=1}^m \exp[-(m-j)\lambda_i^2 \tau] \varphi(\mu^{*j}) \quad (2.4)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots),$$

в которых величины  $\mu^{*j}$  определяются из (1.8), (1.9) при  $j=1, 2, \dots, m-1$ . Складывая при этих значениях  $j$  уравнения (1.9), написанные для рассматриваемого периодического движения, получим

$$\sum_{j=1}^m u_i^{*j} = u_i^{*m} \frac{1 - \exp(-m\lambda_i^2 \tau)}{1 - \exp(-\lambda_i^2 \tau)} + \frac{2}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{m-1} \{1 - \exp[-(m-j)\lambda_i^2 \tau]\} \varphi(\mu^{*j})$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots).$$

Используя далее равенства (2.4), получим

$$\sum_{j=1}^m u_i^{*j} = \frac{2}{\lambda_i} \sum_{j=1}^m \varphi(\mu^{*j}). \quad (2.5)$$

Поэтому равенство (2.3) может быть записано в виде

$$\sum_{j=1}^m \varphi(\mu^{*j}) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{\lambda_i} \Phi_i(\bar{x}) = 0, \quad (2.6)$$

свидетельствующем о том, что в тех значениях  $\bar{x}$ , для которых ряд

$$\sum_{j=0}^m \frac{2}{\lambda_i} \Phi_i(\bar{x}) \neq 0, \quad (2.7)$$

для  $m$ -тактных периодических движений выполняется условие

$$\sum_{j=1}^m \varphi(\mu^{*j}) = 0, \quad (2.8)$$

заменяющее уравнение (2.3) и, как и в [1, 2], отражающее «симметрирующую» роль интегрирующего звена.

Кроме того, здесь, так же как и в [1, 2], легко получить в общем виде выражение для свободного члена характеристического уравнения (2.2). С этой целью, положив в детерминанте (2.2)  $z = 0$ , заметим, что матрица линеаризованного в инвариантной точке (2.1) точечного преобразования (1.10), (1.11) есть произведение в обратном порядке  $m$  матриц  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), т. е. матриц однократных преобразований (1.8), (1.9), линеаризованных в той же точке. Поэтому свободный член характеристического уравнения (2.2) равен нулю, так как в силу (1.6)

$$\exp\left(-m\tau \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2\right) = 0. \quad (2.9)$$

Действительно, для  $j = 1, 2, \dots, m$  в обозначениях

$$a_i \equiv \exp(-\lambda_i^2 \tau), \quad k_i \equiv 2(1 - a_i)/\lambda_i, \quad \varphi'_j \equiv \varphi'(\mu^{*j}), \quad (2.10)$$

$$\det D_j = \begin{vmatrix} 1 & \Phi_0(\bar{x}) & \Phi_1(\bar{x}) & \Phi_2(\bar{x}) & \dots \\ k_0 \varphi_j' & a_0 + k_0 \varphi_j' \Phi_0(\bar{x}) & k_0 \varphi_j' \Phi_1(\bar{x}) & k_0 \varphi_j' \Phi_2(\bar{x}) & \dots \\ k_1 \varphi_j' & k_1 \varphi_j' \Phi_0(\bar{x}) & a_1 + k_1 \varphi_j' \Phi_1(\bar{x}) & k_1 \varphi_j' \Phi_2(\bar{x}) & \dots \\ k_2 \varphi_j' & k_2 \varphi_j' \Phi_0(\bar{x}) & k_2 \varphi_j' \Phi_1(\bar{x}) & a_2 + k_2 \varphi_j' \Phi_2(\bar{x}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{\infty} a_i, \quad (2.11)$$

в чем нетрудно убедиться, вычитая из последующих строк матрицы детерминанта в (2.11) первую строку, умноженную слева на левый столбец без верхнего элемента, т. е. столбец, который в транспонированном виде представляет собой  $\varphi_j'$  ( $k_0 k_1 k_2 \dots$ ).

Проведенное рассмотрение показывает, что матрица  $D_j$  является суммой-диагональной матрицы  $E_a$  и матрицы ранга единицы  $B_a^i$ , где

$$E_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad B_a^i = \begin{vmatrix} 1 \\ k_0 \varphi_j' \\ k_1 \varphi_j' \\ k_2 \varphi_j' \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} \parallel 1 \Phi_0(\bar{x}) \Phi_1(\bar{x}) \Phi_2(\bar{x}) \dots \parallel. \quad (2.12)$$

Это облегчает [1] составление характеристического детерминанта (2.2). Заметим еще, что среди решений системы (2.4), (2.8) содержатся и состояния равновесия, как периодические движения с любым периодом.

3. В качестве примера рассмотрим процесс исследования периодических движений системы (1.3) с периодами  $T_1 = \tau$  и  $T_2 = 2\tau$ . Ради простоты в дальнейшем будем предполагать, что  $\bar{x} = 1$ , т. е. значения  $\Phi_i(1)$  будут равны  $(-1)^i$  и неравенство (2.7) также окажется выполненным.

Из (2.3) и (2.8) для инвариантной точки при  $m = 1$  получим

$$\varphi(\mu^{*1}) = 0, \quad u_i^{*1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение (2.2) в этом случае легко получить из (2.11), положив в нем  $\Phi_j(\bar{x}) = (-1)^j$  ( $j = 1$ ) и составив детерминант  $\Delta_1(z) = \det(D_1 - zE)$ . Этот детерминант легко раскрывается, так что в обозначениях (2.10) характеристическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$\Delta_1(z) = \prod_{i=0}^{\infty} (a_i - z) \left[ 1 - z - z \varphi_1' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{a_i - z} \right] = 0. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что  $z = a_i$  не являются корнями уравнения (3.2), следовательно, корни определяются последним множителем.

Для построения границ  $D$ -разбиения по параметрам  $\varphi_1'$  и  $\tau$  получим следующие выражения: при  $z = 1$

$$\varphi_1' = 0, \quad (3.3)$$

при  $z = -1$

$$\varphi'_1 = -\frac{2}{\alpha(\tau)}, \quad \alpha(\tau) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{1+a_i}, \quad (3.4)$$

наконец, при  $z = e^{i\theta} = x + jy$  ( $x^2 + y^2 = 1$ ) получим систему

$$1 + \varphi'_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i k_i}{(a_i + x)^2 + y^2} = 0, \quad (3.5)$$

$$1 + \varphi'_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i a_i k_i}{(a_i + x)^2 + y^2} = 0.$$

При исследовании периодических движений системы с периодом  $T_2 = 2\tau$  из (2.4) и (2.8) при  $m = 2$  для соответствующей инвариантной точки получим

$$\varphi(\mu^{*2} + \mu^{*2}) + \varphi(\mu^{*2}) = 0, \quad (3.6)$$

$$\mu_i^{*2} = a_i \varphi(\mu^{*2}), \quad a_i \equiv \frac{k_i}{1+a_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

Очевидно, уравнение (3.6) имеет при нечетной функции  $\varphi(\mu)$  решение (см. (3.4))

$$\mu^{*2} = -\frac{1}{2} \alpha(\tau) \varphi(\mu^{*2}), \quad (3.8)$$

а в случае полиномиального задания функции  $\varphi(\mu)$  при отыскании решений может быть повторена процедура, использованная в [1].

Характеристическое уравнение для исследования устойчивости найденных инвариантных точек может быть получено из (1.10), (1.11), согласно (2.2), в виде

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} 1 + A \varphi'_1 - z & 1 + A \varphi'_1 + a_0 & -1 - A \varphi'_1 - a_1 & \dots \\ l_0 & a_0^2 + l_0 + a_0 k_0 \varphi'_2 - z & -l_0 - a_1 k_0 \varphi'_2 & \dots \\ l_1 & l_1 + a_0 k_1 \varphi'_2 & a_1^2 - l_1 - a_1 k_1 \varphi'_2 - z & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

где, кроме (2.10), введены обозначения

$$A \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i k_i, \quad l_i \equiv k_i [a_i \varphi'_1 + \varphi'_2 (1 + A \varphi'_1)] \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Детерминант в (3.9) может быть раскрыт, как показано в Приложении, и уравнение (3.9) представлено в виде

$$\prod_{i=0}^{\infty} (a_i^2 - z) \left\{ \left[ 1 + A \varphi'_1 - z - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{l_i(z + a_i)}{a_i^2 - z} \right] \left[ 1 + \varphi'_2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{a_i^2 - z} \right] + \varphi'_2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i l_i}{a_i^2 - z} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(a_i + z)}{a_i^2 - z} \right\} = 0, \quad (3.11)$$

из которого вновь следует, что  $z = a_i^2$  не являются корнями (3.11). Поэтому после некоторых преобразований с использованием обозначения



ний (3.10) характеристическое уравнение (3.9) может быть получено в двух видах:

$$F_2(z) = 1 - z - z(\varphi'_1 + \varphi'_2) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{a_i^2 - z} +$$

$$+ \varphi'_1 \varphi'_2 z \left\{ z \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{a_i^2 - z} \right]^2 - \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{a_i^2 - z} \right]^2 \right\} = 0, \quad (3.12)$$

$$F_2(z) = 1 - z - z(\varphi'_1 + \varphi'_2) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{a_i^2 - z} +$$

$$+ \varphi'_1 \varphi'_2 z \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\sqrt{z-a_i}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\sqrt{z+a_i}} = 0. \quad (3.13)$$

Пользуясь методом  $D$ -разбиения по параметрам

$$\eta = \varphi'_1 + \varphi'_2, \quad \nu = \varphi'_1 \varphi'_2, \quad (3.14)$$

для  $z = 1$  получим границу

$$F_2(1) = \eta + \nu\alpha(\tau) = 0, \quad (3.15)$$

для  $z = -1$  — границу

$$F_2(-1) = 2 + \eta\beta(\tau) + \nu\gamma(\tau) = 0, \quad (3.16)$$

где

$$\beta(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{1+a_i^2}, \quad \gamma(\tau) = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{1+a_i^2} \right]^2 +$$

$$+ \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{1+a_i^2} \right]^2. \quad (3.17)$$

Наконец, для границы  $z = e^{i\theta}$  из (3.13) получим систему уравнений

$$\operatorname{Re} F_2 = 1 + \eta \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i a_i^2 (1+a_i)}{\delta_i} + \nu \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{\delta_{1i}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{\delta_{2i}} - \frac{k}{2 \cos(\theta/2)} \right] = 0, \quad (3.18)$$

$$\operatorname{Im} F_2 = 1 + \eta \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{\delta_i} + \nu \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\delta_{1i}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\delta_{2i}} + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{2 \cos(\theta/2)} \right] = 0, \quad (3.19)$$

в которой обозначено

$$\delta_i \equiv (\cos \theta - a_i^2)^2 + \sin^2 \theta, \quad \delta_{1i} \equiv [\cos(\theta/2) - a_i]^2 + \sin^2(\theta/2),$$

$$\delta_{2i} \equiv [\cos(\theta/2) + a_i]^2 + \sin^2(\theta/2), \quad (3.20)$$

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{\delta_{1i}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\delta_{2i}} - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{\delta_{1i}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{\delta_{2i}}.$$

При  $\theta = 0$  из (3.18)–(3.20) получим точку, лежащую на прямой (3.15),

$$\frac{1}{2\nu} = \alpha(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)(1+a_i^2)}{(1-a_i^2)^2} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{(1-a_i)^2} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i}{(1+a_i)^2} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{(1-a_i)^2} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i k_i}{(1+a_i)^2},$$
(3.21)

$$\eta = -\nu\alpha(\tau),$$
(3.22)

а при  $\theta = \pi$  — точку, лежащую на прямой (3.16),

$$\frac{1}{\eta} = - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{(1+a_i^2)^2},$$
(3.23)

$$\nu = - \left[ 2 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{(1+a_i^2)^2} - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{1+a_i^2} \right] \times$$

$$\times \left[ \gamma(\tau) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_i(1+a_i)}{(1+a_i^2)^2} \right]^{-1}.$$
(3.24)

В заключение приведем (рис. 1) зависимости  $\alpha(\tau)$  (3.4),  $\beta(\tau)$  и  $\gamma(\tau)$  (3.17), полученные численным счетом. На рисунке для удобства изображены зависимости  $-\operatorname{sgn} A \lg |A|$ , где величина  $A$  является одной из этих функций.

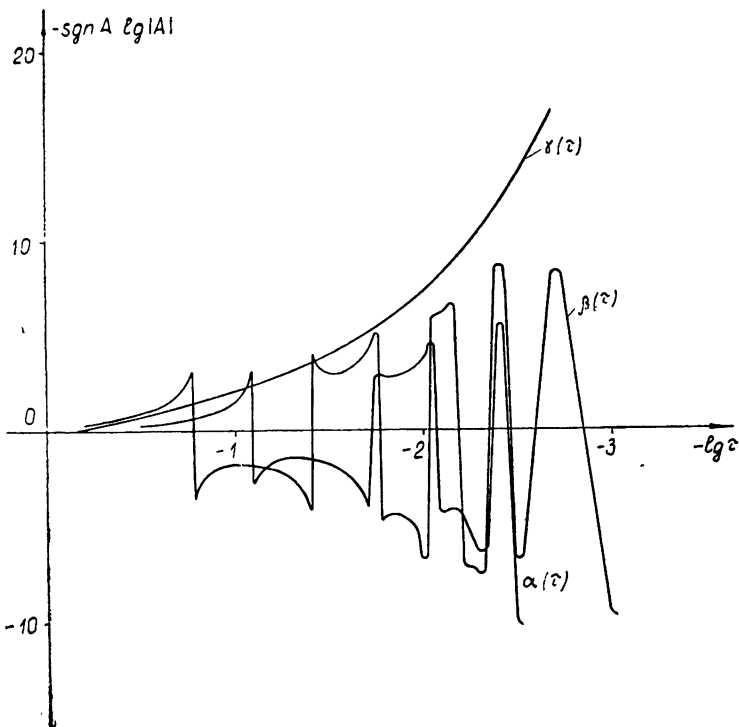


Рис. 1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для раскрытия определителя (3.9) вычтем из его матрицы без первого столбца этот столбец, умноженный справа на строку  $(1, -1, 1, \dots)$ , затем из всех его строк, начиная со второй, вынесем величины  $k_{i-2}\varphi'_2$ , где, как и всюду ниже,  $i$  — номер строки, тогда получим

$$\prod_{i=0}^{\infty} (k_i \varphi'_2) \begin{vmatrix} 1 + A\varphi'_1 - z & a_0 + z & -a_1 - z & a_2 + z & \dots \\ \frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & \frac{a_0^2 - z}{k_0 \varphi'_2} + a_0 & -a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{l_1}{k_1 \varphi'_2} & a_0 & \frac{a_1^2 - z}{k_1 \varphi'_2} - a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{l_2}{k_2 \varphi'_2} & a_0 & -a_1 & \frac{a_2^2 - z}{k_2 \varphi'_2} + a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{П.1})$$

В определителе (П.1), начиная с последней строки, будем вычитать из последующей предыдущую, останавливая этот процесс на второй строке, тогда получим, опуская множитель перед (П.1),

$$\begin{vmatrix} 1 + A\varphi'_1 - z & a_0 + z & -a_1 - z & a_2 + z & \dots \\ \frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & \frac{a_0^2 - z}{k_0 \varphi'_2} + a_0 & -a_1 & a_2 & \dots \\ \frac{l_1}{k_1 \varphi'_2} - \frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & -\frac{a_0^2 - z}{k_0 \varphi'_2} & \frac{a_1^2 - z}{k_1 \varphi'_2} & 0 & \dots \\ \frac{l_2}{k_2 \varphi'_2} - \frac{l_1}{k_1 \varphi'_2} & 0 & -\frac{a_1^2 - z}{k_1 \varphi'_2} & \frac{a_2^2 - z}{k_2 \varphi'_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{П.2})$$

Сложим каждую строку номера  $i$  ( $i = 4, 5, \dots$ ) со всеми предыдущими до третьей включительно. Тогда вместо (П.2) получим

$$\begin{vmatrix} z - 1 - A\varphi'_1 & -a_0 - z & a_1 + z & -a_2 - z & \dots \\ -\frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & \frac{z - a_0^2}{k_0 \varphi'_2} - a_0 & a_1 & -a_2 & \dots \\ -\frac{l_1}{k_1 \varphi'_2} + \frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & -\frac{z - a_0^2}{k_0 \varphi'_2} & \frac{z - a_1^2}{k_1 \varphi'_2} & 0 & \dots \\ -\frac{l_2}{k_2 \varphi'_2} + \frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} & -\frac{z - a_0^2}{k_0 \varphi'_2} & 0 & \frac{z - a_2^2}{k_2 \varphi'_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{П.3})$$

Из каждой строки, начиная с третьей, вынесем выражение  $(z - a_{i-2}^2)/k_{i-2}\varphi'_2$ , вычтем из первой строки все строки, начиная с третьей, умножая их предварительно на  $(-1)^i (a_{i-2} - z)$ . Кроме того, вычтем из второй строки все строки, начиная с третьей, умножен-

ные предварительно на  $(-1)^i a_{i-2}$ , после чего из (П.3), опуская множитель  $\prod_{i=1}^{\infty} (z - a_i^2)/k_i \varphi'_2$ , получим

$$\begin{vmatrix} z-1-A\varphi'_1 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_0}{k_0}\right) \bar{K}_i & -(a_0+z) - \frac{z-a_0^2}{k_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \bar{K}_i & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{l_0}{k_0 \varphi'_2} - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{l_i}{k_i} - \frac{l_0}{k_0}\right) \tilde{K}_i & \frac{z-a_0^2}{k_0 \varphi'_2} - a_0 - \frac{z-a_0^2}{k_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \tilde{K}_i & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\left(\frac{l_1}{k_1} - \frac{l_0}{k_0}\right) \frac{k_1}{z-a_1^2} & -\frac{(z-a_0^2)k_1}{k_0(z-a_1^2)} & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -\left(\frac{l_2}{k_2} - \frac{l_0}{k_0}\right) \frac{k_2}{z-a_2^2} & -\frac{(z-a_0^2)k_2}{k_0(z-a_2^2)} & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \tag{П.4}$$

где  $\bar{K}_i = \frac{k_i(a_i+z)}{z-a_i^2}$ ,  $\tilde{K}_i = \frac{k_i a_i}{z-a_i^2}$ .

Раскрывая определитель (П.4) и вводя всюду под суммы нулевые члены, получим (3.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев, Т. Б. Макарова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 11, 1664 (1968)
2. А. С. Алексеев, ДАН СССР, 184, № 2, 307 (1969).
3. Ю. И. Неймарк, И. М. Кубланов, Автоматика и телемеханика, 14, № 1, 34 (1953).
4. Ю. И. Неймарк, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М, 1955, стр. 242.
5. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, изд. ЛВВА, Л, 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете Поступила в редакцию 31 января 1969 г.

TO THE DYNAMIC ANALYSIS OF THE SIMPLEST NONLINEAR DISTRIBUTED IMPULSE SYSTEMS

A. S. Alekseyev, S. V. Makarov

Dynamics of one-loop nonlinear impulse system with integrator and the simplest distributed link described by a heat-conduction equation is investigated analogously to the case of lumped-parameter system by the method of point transformations in an infinitely dimensional phase space (of the Fourier coefficients). Primary attention is centred on the periodic motions and their stability investigation.

УДК 531.391

## К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ГЛАДКИХ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. И. Горюнов

Доказывается теорема о существовании, единственности и устойчивости неподвижной точки гладкого точечного преобразования  $n$ -мерного пространства в себя в случае приближенного задания преобразования.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: пусть  $T$  — гладкое точечное преобразование области  $G$  линейного нормированного пространства  $X$  в себя, определяемое равенствами

$$\bar{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

и пусть с помощью формул

$$\tilde{x}_i = \tilde{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

задано приближение  $\tilde{T}$  преобразования  $T$ , такое, что для любых точек области  $G$  удовлетворяются условия

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - \tilde{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq L(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| \leq S(\epsilon) \quad (4)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $L(\epsilon)$  и  $S(\epsilon)$  определяют точность задания функций и их частных производных [1].

Допустим, что точечное преобразование  $\tilde{T}$  имеет неподвижную точку с определенным характером устойчивости.

Требуется выяснить условия, при выполнении которых соответствующая неподвижная точка точечного преобразования  $T$  существует и имеет тот же характер устойчивости, что и неподвижная точка преобразования  $\tilde{T}$ . Следует также оценить расстояние между этими точками.

Рассмотрение этой задачи для случая, когда все корни характеристического полинома, определяющего устойчивость неподвижной точки приближенного преобразования, по абсолютной величине либо больше, либо меньше единицы, содержится в работе [1].

В настоящем исследовании, обобщающем результаты работы [2] на  $n$ -мерный случай, предполагается, что корни характеристического полинома, определяющего устойчивость неподвижных точек приближенного преобразования, могут лежать как внутри, так и вне единичного круга.

Вопросы существования и единственности неподвижной точки точечного преобразования  $T$  рассматриваются в разделе 3 работы. Характер устойчивости неподвижной точки рассматривается в разделе 4. Разделы 1 и 2 работы являются вспомогательными.

1. Пусть для любых точек  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  в области  $G$  функции  $f_i$  и их частные производные удовлетворяют условиям

$$|f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)| \leq K\rho(M, M') \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial x'_j} \right| \leq N\rho(M, M') \quad (6)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n),$$

где  $K, N$  — положительные константы, а расстояние между точками

$$M \text{ и } M' \text{ определяется формулой } \rho(M, M') = \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|.$$

Тогда можно получить неравенства

$$|D_1 - D^*| \leq n! [(N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n - e_{\max}^n], \quad (7)$$

$$|D_2 - D_1| \leq n! [(S(\epsilon) + N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n - (N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n], \quad (8)$$

где  $D^* = \det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(M^*) \right\|$ ,  $D_1 = \det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(M_i) \right\|$ ,  $D_2 = \det \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(M_i) \right\| -$

определители  $n$ -го порядка [3], величины  $e_{\max} = \max_{i, j} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(M^*) \right| \right\}$ ,

$e = \min_i \left\{ \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M^*) \right| \right\}$ , а функции  $\varphi_i$  и  $\Phi_i$  в произвольной точке  $M$

$$\varphi_i(M) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_i \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\Phi_i(M) = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_i \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

При выводе неравенств (7), (8) используются соотношения (1)–(6) и оценки абсолютных величин разностей развернутых определителей [3]  $D^*, D_1, D_2$ . Для  $n = 2$  вывод подобных неравенств приведен в работе [2].

2. Пусть  $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  — неподвижная точка преобразования  $\tilde{T}$  и характеристический полином, определяющий ее устойчивость, не имеет корней, лежащих на окружности единичного круга [4], и, кроме того, элементы главной диагонали определителя  $D^*$  не обращаются в нуль. Тогда, согласно теореме о существовании и свойствах неявной функции [5], в некоторой окрестности точки  $M^*$  уравнение  $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  определяет однозначную гладкую поверхность  $x_i = \varphi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Обозначим эту окрестность через  $D = (x_1^* - b, x_1^* + b; \dots; x_n^* - b, x_n^* + b)$  и покажем, что в качестве величины  $b$  можно взять

$$b = a \min \{1, \alpha(e - Nna)/K(n-1)\}, \quad (11)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,

$$a = \frac{1}{Nn} \min \left\{ \alpha e, \left( e_{\max}^n + \frac{\alpha}{n!} |D^*| \right)^{1/n} - e_{\max} \right\}. \quad (12)$$

Рассмотрим множество параллелепипедов  $D_i = (x_1^* - b, x_1^* + b; \dots, x_{i-1}^* - b, x_{i-1}^* + b; x_i^* - a, x_i^* + a; x_{i+1}^* - b, x_{i+1}^* + b; \dots; x_n^* - b, x_n^* + b)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), содержащих точку  $M^*$ . В силу (5), (6), в области  $D_i$  выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M) \right| \geq \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M^*) \right| - \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M^*) \right| \geq \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M^*) \right| - Nna, \quad (13)$$

$$|\varphi_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* \pm a, x_n^*)| \geq \left( \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M^*) \right| - Nna \right), \quad (14)$$

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^* \pm a, x_{i+1}, \dots, x_n)| \geq a(e - Nna) - K(n-1)b. \quad (15)$$

Отсюда следует, что уравнение  $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  в области  $D_i$ , а следовательно, и в области  $D$  определяет однозначную гладкую поверхность  $x_i = \varphi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Для любых точек  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) области  $D = \bigcap_{i=1}^n D_i$ , в силу соотношения (7), имеет место неравенство

$$|D_i - D^*| \leq n! [(Nnb + e_{\max})^n - e_{\max}^n] \leq \alpha |D^*| < |D^*|, \quad (16)$$

из которого следует, что  $D_i \neq 0$ . Это означает, что нормали к поверхностям  $x_i = \varphi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  в области  $D$  взаимно не параллельны.

**3.** Выясним, при каких условиях в окрестности  $D$  неподвижной точки  $M^*$  преобразования  $\tilde{T}$  лежит единственная неподвижная точка точного точечного преобразования  $T$ . Сначала покажем, что при определенных величинах  $L(\epsilon)$  и  $S(\epsilon)$  существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования  $T$ .

Из формулы

$$|\varphi_i(M)| - |\Phi_i(M)| \leq |\varphi_i(M) - \Phi_i(M)| \leq L(\epsilon) \quad (17)$$

и соотношения (15) следует, что при  $|x_j - x_j^*| \leq b$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $j \neq i$ ),  $x_i = x_i^* \pm a$

$$|\Phi_i(M)| \geq a(e - Nna) - K(n-1)b - L(\epsilon). \quad (18)$$

Кроме того, из неравенства

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M) \right| - \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(M) \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(M) \right| \leq S(\epsilon) \quad (19)$$

и соотношения (13) получаем, что в области  $D_i$

$$\left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(M) \right| \geq \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(M) \right| - S(\epsilon) \geq e - Nna - S(\epsilon). \quad (20)$$

Допустим, что величины  $L(\epsilon)$  и  $S(\epsilon)$  таковы, что правые части неравенств (18), (20) положительны. Тогда уравнение  $\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  в окрестности  $D_i$  точки  $M^*$  определяет однозначную гладкую поверхность  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  [5].

Для того, чтобы поверхности  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  в области  $D$  пересекались только в одной общей точке, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$L(\epsilon) < b(e - Nna - S(\epsilon)) \min \left\{ 1, \left( \frac{(1 - \alpha) |D^*| + n! (Nnb + e_{\max})^n}{n! (e_{\max} + Nnb + S(\epsilon))^n} - 1 \right) \right\}. \quad (21)$$

При выполнении неравенства (21) и соотношений

$$|\Phi_i(M^*)| = |\Phi_i(M^*) - \varphi_i(M^*)| \leq L(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

в области  $D$  существует такая точка пересечения поверхности  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  с прямой  $x_j = x_j^* (j \neq i)$ ,  $x_i$  — любое, которая лежит от точки  $M^*$  на расстоянии, меньшем  $b$ . Поэтому всякая точка поверхности  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  в области  $D$  принадлежит хотя бы одной из плоскостей

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} (M_i) (x_j - x_j^* + \Delta x_j \delta_{ij}) = 0, \quad (23)$$

где  $M_i$  — любая точка, лежащая в области  $D$  на поверхности  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, а величина

$$|\Delta x_j| \leq L(\epsilon) (e - Nna - S(\epsilon))^{-1} < b. \quad (24)$$

Используя неравенство (8) и условия (21), (24), можно убедиться, что величина  $\max_i \{|x_i - x_i^*|\}$ , определяемая из системы уравнений (23) при  $i = 1, 2, \dots, n$ , меньше  $b$ . В силу непрерывности поверхностей  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  это означает, что в области  $D$  имеется хотя бы одна точка их пересечения.

Убедимся теперь, что эта точка единственна. Принимая во внимание неравенства (7), (8) и (16), получаем соотношение

$$|D_2 - D^*| \leq |D_2 - D_1| + |D_1 - D^*| \leq n! (S(\epsilon) + Nnb + e_{\max})^n - n! (Nnb + e_{\max})^n + \alpha |D^*|, \quad (25)$$

из которого, в силу (21), следует, что величина  $|D_2|$  в области  $D$  отлична от нуля. Это означает, что нормали к поверхностям  $x_i = \Phi_i^0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  взаимно не параллельны, и, следовательно, точка пересечения указанных поверхностей в области  $D$  может быть только одна.

Из всего сказанного убеждаемся, что в области  $D$  существует единственная неподвижная точка точного точечного преобразования  $T$ .

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости неподвижной точки преобразования  $T$ . Пусть

$$Q_n(z) = b_0^0 z^n + b_1^0 z^{n-1} + \dots + b_{n-1}^0 z + b_n^0 \quad (26)$$

— характеристический полином, определяющий устойчивость неподвижной точки точечного преобразования  $T$ , и пусть задан характеристический полином

$$P_n(z) = a_0^0 z^n + a_1^0 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}^0 z + a_n^0, \quad (27)$$

определяющий устойчивость неподвижной точки  $M^*$  точечного преобразования  $\tilde{T}$ .



Выражая коэффициенты полиномов (26), (27) через элементы соответствующих вековых определителей [6] и используя неравенство (8), можно убедиться, что

$$\max_k |b_k^0 - a_k^0| \leq \varepsilon_0 = \max_k \{k! C_n^k [(S(\varepsilon) + Nnb + M)^k - (Nnb + M)^k]\}, \quad (28)$$

где

$$M = \max_{i,j} \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (M^*) \right| \right\}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Допустим, что величина  $S(\varepsilon)$  такова, что удовлетворяются соотношения

$$\varepsilon_j < \beta_j - \alpha_j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (29)$$

где  $\varepsilon_0$  задается формулой (28), а величины остальных  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) определяются рекуррентной формулой

$$\varepsilon_{j+1} = (1 + ((\alpha_j + \beta_j) M_j + \beta_j (\alpha_j + \varepsilon_j) (\beta_j (\beta_j - \varepsilon_j))^{-1}) \varepsilon_j. \quad (30)$$

В формуле (30) приняты обозначения:  $M_j = \max_k |a_k^j|$ ,  $\alpha_j = \min \{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\}$ ,  $\beta_j = \max \{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\}$ , а величины  $a_k^j$  ( $k = 0, 1, \dots, n-j$ ) определяются рекуррентными соотношениями

$$a_k^j = a_{k+1}^{j-1} - (a_0^{j-1}/a_{n-j+1}^{j-1}) a_{n-j-k}^{j-1} \quad \text{при } |a_0^{j-1}| < |a_{n-j+1}^{j-1}|, \quad (31)$$

$$a_k^j = a_k^{j-1} - (a_{n-j+1}^{j-1}/a_0^{j-1}) a_{n-j-k+1}^{j-1} \quad \text{при } |a_{n-j+1}^{j-1}| < |a_0^{j-1}|. \quad (32)$$

Тогда при выполнении неравенств (29) полином (26) имеет столько же корней внутри и вне единичного круга, сколько и полином (27) [7]. Это означает, что характер устойчивости неподвижной точки точечного преобразования  $T$  совпадает с характером устойчивости неподвижной точки  $M^*$  точечного преобразования  $\tilde{T}$ .

Приведенные в работе рассуждения доказывают следующую теорему.

*Теорема.* Пусть  $M^*$  — неподвижная точка приближенного точечного преобразования  $\tilde{T}$ , и удовлетворяются соотношения (21), (29) и, кроме того,

$$L(\varepsilon) < a(e - Nna) - K(n-1)b, \quad (33)$$

$$S(\varepsilon) < e - Nna. \quad (34)$$

Тогда в кубе  $|x_i - x_i^*| < b$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) существует единственная неподвижная точка точного точечного преобразования  $T$ . Характер устойчивости этой неподвижной точки совпадает с характером устойчивости неподвижной точки  $M^*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Баталова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 1002 (1965).
2. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 425 (1969).
3. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, М., 1962, стр. 146.
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).
5. Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, 2, Гостехиздат, М., 1957, стр. 185.
6. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1960, стр. 402.
7. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 7, 1083 (1969).

---

TO THE PROBLEM OF APPROXIMATE ANALYSIS OF SMOOTH  
POINT TRANSFORMATIONS

*V. I. Goryunov*

The article presents a proof for a theorem of existence, uniqueness and stability of a stationary point of smooth point transformation of  $n$ -dimensional space into itself when the transformation is given approximately.

---

УДК 531.391

## ЯВЛЕНИЕ ПОДПороГОВОЙ СУММАЦИИ ПРИ ЗАПУСКЕ ЖДУЩИХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ УСТРОЙСТВ

Г. П. Сорокин

Методами фазовой плоскости рассмотрен процесс опрокидывания спускового устройства типа кипп-реле под воздействием импульсов, амплитуда которых ниже пороговой. Определены условия запуска кипп-реле подпороговыми импульсами в зависимости от характеристик кипп-реле и параметров импульсной последовательности. Более подробно рассмотрен случай, когда последовательность состоит из двух импульсов одинаковой амплитуды.

При исследовании динамики некоторых спусковых схем [1,2], а также работы спусковых устройств в самом общем виде [3] было установлено, что порог срабатывания спусковых устройств не является величиной постоянной. Порог срабатывания зависит как от параметров спускового устройства, так и от параметров опрокидывающего импульса.

Пороговая кривая делит координатную плоскость параметров опрокидывающего импульса на три области: область, лежащая над пороговой кривой и характеризующая импульсы, безусловно вызывающие срабатывание спусковой схемы; область, лежащая ниже статического порога (область несрабатывания); и область между пороговой кривой и статическим порогом срабатывания, которую мы назовем областью подпороговой суммации. В наших работах было выявлено, что одиночный импульс с характеристиками, свойственными области подпороговой суммации, не может вызвать опрокидывание спускового устройства, однако, при определенных условиях, несколько импульсов, относящихся к подпороговой области, могут вызвать опрокидывание спускового устройства.

Эти представления могут внести определенные коррективы в расчет помехоустойчивости аппаратуры, принимающей импульсные сигналы и использующей спусковые пороговые устройства.

Рассмотрим схему кипп-реле, исследованную в работе [1]. В этой работе были определены условия опрокидывания схемы при воздействии одного надпорогового импульса. Полученные в [1] формулы (2.2) и (3.2) для «быстрых» движений позволяют рассмотреть поведение схемы при воздействии подпороговых импульсов.

Для определенности рассмотрим случай  $x_{11} > D$ . Пусть подпороговый импульс ( $z_1 > z_{\min}$ ,  $\tau_{n_1} < (\tau_{n_1})_{\min}$ , где  $z_1$  — амплитуда запускающего импульса,  $z_{\min}$  — статический порог,  $\tau_1$  — длительность запускающего импульса,  $(\tau_{n_1})_{\min}$  — пороговая длительность запускающего импульса амплитуды  $z_1$ ) подан на вход кипп-реле. В этом случае  $x(\tau_{n_1}) > x_3$  (рис. 1) и после окончания импульса изображающая точка по траектории «быстрых» движений стремится к равновесному состоянию (рис. 2). Если второй подпороговый импульс с параметрами  $z_2 > z_{\min}$ ,  $\tau_{n_2} < (\tau_{n_2})_{\min}$  поступает на кипп-реле в момент, когда  $x(\tau_2) < x_0$  (где  $\tau_{3_1}$  — время задержки второго импульса), то  $x(\tau_{n_2}) =$

$= \varphi(z_2, \tau_2, x(\tau_{3,1}))$ . Если  $x(\tau_{n_2}) < x_3$ , то схема не опрокинется (рис. 3). При подаче  $i$ -го импульса координата  $x(\tau_{n_i})$  изображающей точки найдется из уравнения

$$x(\tau_{n_i}) = [D - k(x_{2i} - x_{1i})] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{n_i}}{\lambda}\right) \right] + x(\tau_{3(i-1)}) \exp\left(-\frac{\tau_{n_i}}{\lambda}\right), \quad (1)$$

где

$$x(\tau_{3(i-1)}) = \frac{kx_{20} - D}{k - 1} + \left[ x(\tau_{n(i-1)}) - \frac{kx_{20} - D}{k - 1} \right] \exp\left(\frac{k-1}{\lambda} \tau_{3(i-1)}\right) \quad (2)$$

(полагая при этом, что  $x(\tau_{n(i-1)}) > x_{20}$ ), полученного интегрированием (3.2)  $i$  раз для  $z(t) \equiv z_i$  и  $(i-1)$  раз для  $z(t) \equiv z_0$  при соответствующих начальных условиях.

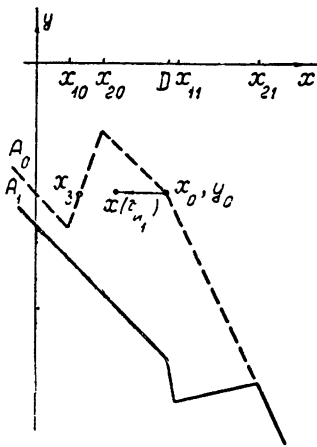


Рис. 1.

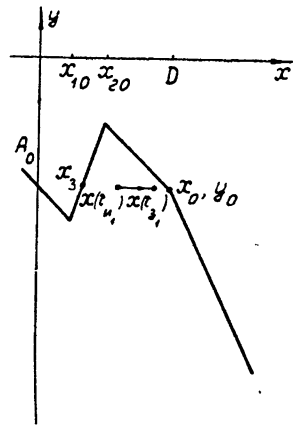


Рис. 2.

Опрокидывание спускового устройства произойдет при выполнении условия срабатывания (рис. 4)

$$x(\tau_{n_i}) \Big|_{i=n} = x_3. \quad (3)$$

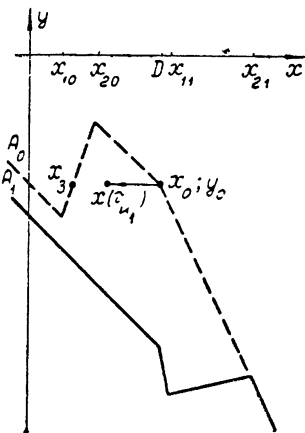


Рис. 3.

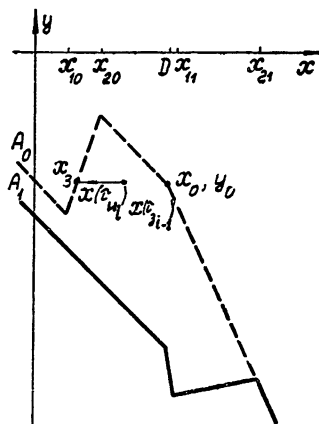


Рис. 4.

Решая совместно (1), (2), (3), получим уравнение

$$F(z_1, \dots, z_n; \tau_{n_1}, \dots, \tau_{n_2}; \tau_{s_1}, \dots, \tau_{s_{(n-1)}}) = 0, \quad (4)$$

связывающее параметры импульсной последовательности, вызывающей опрокидывание спускового устройства, и параметры самого устройства. Условия подпороговой суммации выполняются на некоторой поверхности (4)  $(3n-1)$ -мерного пространства. Если параметры импульсной последовательности и кипп-реле известны, то система (4) может быть решена при помощи ЭВМ.

Рассмотрим решение уравнения (3) при следующих упрощающих предположениях:

$$n = 2, \quad z_1 = z_2, \quad \tau_{n_1} = \tau_{n_2}, \quad x_{11} > D. \quad (5)$$

Пусть  $z_1 > (z_1)_{\min}$ ,  $\tau_{n_1} < (\tau_{n_1})_{\min}$ . Здесь могут быть два случая.

$$1) x(\tau_{n_1}) > x_{20} > x_3, \quad (6)$$

$$2) x_3 < x(\tau_{n_1}) < x_{20}. \quad (7)$$

1) При выполнении условия (6), интегрируя (2.2) от 0 до  $\tau_3$  на отрезке  $x_{20} - x_0$ , а затем (3.2) от 0 до  $\tau_{n_2}$  на всем отрезке  $x_3 - x_0$ , при выполнении (4), получим

$$z_1 = \frac{\gamma(D-x_{20})}{(k-1)(1-\gamma^2)} \left\{ 1 - \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{n_1}}{\lambda}\right) \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(\frac{\tau_3}{\lambda}\right) \right\} \exp\left(-\frac{\tau_{n_2}}{\lambda}\right) \right\}^{-1} - 1. \quad (8)$$

2) Пусть условия (7) выполняются в течение времени  $\xi$  движения изображающей точки при  $t > \tau_{n_1}$ . Здесь возможны случаи:

$$а) \xi \leq \tau_3. \quad (9)$$

Здесь при движении вправо точка пересекает границу  $x_{20}$ . Интегрируя (2.2) на отрезке  $x_{20} - x_0$ , получим

$$\xi = \frac{\lambda}{k-1} \ln \frac{(D-x_{20})/(k-1)}{D-k(x_{21}-x_{11})[1-\exp(-\tau_{n_1}/\lambda)] - [(kx_{20}-D)/(k-1)]}. \quad (10)$$

Решая (2.2) на отрезке  $x_{20} - x_0$  и (3.2) на отрезке  $x_3 - x_0$  при условии (4), получим

$$\frac{k(1-\gamma^2)}{\gamma}(1-z_1) = \frac{D-x_{20}}{k-1} \frac{k-(k-1)\exp[(-1/\lambda)(\tau_3+\tau_{n_1}-\xi)]}{1-\exp(-\tau_{n_1}/\lambda)}. \quad (11)$$

$$б) \xi > \tau_3. \quad (12)$$

Здесь (2.2) и (3.2) интегрируются на отрезке  $x_3 - x_{20}$ , поскольку  $x(\tau_{n_1}) > x_{20}$  и  $x(\tau_{s_1}) > x_{20}$  одновременно. В результате получим

$$z_1 = \left\{ \gamma \left( D - \frac{kx_{20}-D}{k-1} \right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{n_1}}{\lambda}\right) + \exp\left(-\frac{\tau_{n_1}}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{k-1}{\lambda} \tau_3\right) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ k(1-\gamma^2) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{n_1}}{\lambda}\right) \right] \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{n_1}}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{k-1}{\lambda} \tau_3\right) \right] \right\}^{-1} - 1.$$

Таким образом, условия подпороговой суммации при сделанных допущениях (5) выполняются на трехмерной поверхности, определяемой уравнением (8) при условии (6), уравнениями (10) и (11) при выполнении условий (7) и (9) и уравнением (13) при выполнении условий (7) и (12). Куски поверхностей (8), (11), (13) переходят друг в друга непрерывно.

Поверхность (8), (11), (13) была построена по данным, полученным с помощью ЭВМ. Были произведены просчеты для различных вариантов изменения параметров кipp-реле и импульсной последовательности.

Учет явления подпороговой суммации может оказаться полезным при рассмотрении ряда вопросов, связанных с исследованием воздействия сигнала и шума на пороговые устройства. Мы полагаем, что дальнейшее рассмотрение этого явления для случайных импульсных последовательностей могло бы дать дополнительный материал для анализа помехоустойчивости радиоприемных устройств и систем автоматики и телемеханики.

Автор выражает свою признательность И. М. Романову за интерес, проявленный к настоящей работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. А. Железцов, сб. Памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955.
- 2 М. И. Фейгин, сб. Памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955.
- 3 Г. П. Сорокин, Тезисы докладов II Зонального симпозиума по бионике, Минск, 1967.

Казанский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 мая 1968 г.

#### SUBTHRESHOLD SUMMATION PHENOMENON WHEN TRIGGERING DELAY FLOPS

*G. P. Sorokin*

Reversing of the kipp relay type trigger under the influence of subthreshold—amplitude impulses is studied by the phase plane methods. Conditions for triggering a kipp relay by subthreshold impulses as a function of kipp relay characteristics and impulse train parameters are determined. A more detailed consideration is given to the case when impulse train is combined of two equi—amplitude impulses.

УДК 531.391

## К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ ГЕНЕРАТОРА АВТОКОЛЕБАНИЙ. II

*В. И. Королев, Л. В. Постников*

Исследуется разбиение плоскости «амплитуда внешней силы — расстройка» на области синхронизации.

В работе [1] рассмотрено явление синхронизации генератора автоколебаний. Для гладких нелинейностей дано подробное исследование амплитудно-частотных характеристик  $K = K(\xi)$ , где  $\xi$  — расстройка между частотой внешней силы  $\omega$  и собственной частотой генератора  $\omega_0$ ,  $K$  — амплитуда вынужденных колебаний.

Показано, что режим синхронизации генератора определяется распределением действительных положительных корней четырех алгебраических уравнений. Вид этих уравнений зависит от одной нелинейной функции.

Проведено разбиение плоскости  $\xi K$  на области с различными типами состояний равновесия. Области, точкам которых соответствуют состояния равновесия типа седла, расположены внутри кривой, определяемой равенством\*

$$\xi^2 + F(F + 2KF') = 0. \quad (I.10a)$$

Уравнение границы, разделяющей устойчивые состояния равновесия от неустойчивых, имеет вид

$$F + KF' = 0 \quad (I.12a)$$

и определяет множество прямых, параллельных оси  $\xi$ .

Амплитудно-частотные характеристики генератора описываются уравнением вида

$$\xi^2 + F^2(K) = \varepsilon^2/K. \quad (I.8)$$

Рассмотрен пример, в котором нелинейный элемент аппроксимируется полиномом седьмой степени. Для этого случая на плоскости  $\xi K$  выделены области синхронизации и области биений.

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней исследуется разбиение плоскости  $\varepsilon \xi$ , где  $\varepsilon$  — амплитуда внешней силы, на области «захватывания» генератора.

Режим синхронизации генератора определяется двумя неравенствами

$$F(F + 2KF') + \xi^2 > 0, \quad (1)$$

$$F + KF' > 0 \quad (I.12)$$

и уравнением

$$\xi^2 + F^2(K) = \varepsilon^2/K. \quad (I.8)$$

\* (I. 10a) и т. д. — ссылки на формулы работы [1].

Уравнение (1.8) и неравенство (1.12) определяют на плоскости  $\epsilon\xi$  область синхронизации для достаточно большой амплитуды внешнего воздействия.

Как нетрудно видеть, уравнение (1.8) представляет семейство гипербол с линейными асимптотами

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{K}} \epsilon$$

и справедливо для тех действительных положительных значений  $K$ , которые удовлетворяют неравенству (1.12). Эти значения  $K$  могут быть найдены непосредственно из графиков (см. рис. 2 в [1]).

Если разрешить уравнение (1.8) относительно  $K$  и подставить полученное выражение в неравенство (1), получим неравенство, определяющее на плоскости  $\epsilon\xi$  область, соответствующую синхронизации генератора для достаточно малых амплитуд внешнего воздействия. При разрешении уравнения (1.8) относительно  $K$  полученное уравнение может оказаться неоднозначным, при этом границы неоднозначности можно получить, приравняв производную по  $K$  от левой части уравнения

$$K[\xi^2 + F^2(K)] = \epsilon^2 \quad (2)$$

к нулю.

При этом получим

$$\frac{d}{dk} [K(\xi^2 + F^2)] = \xi^2 + F(F + 2KF') = 0.$$

Отсюда видно, что граница неоднозначности совпадает с границей области захватывания.

Уравнение границы можно записать в параметрической форме

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{-2K^2FF'}, \\ \xi &= \pm \sqrt{-F(F + 2KF')}, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда получаем, что

$$\frac{d\xi}{d\epsilon} = \pm \sqrt{\frac{F'}{2(F + 2KF')}}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что производная всюду знакопостоянна в соответствии со знаком расстройки  $\xi$  и обращается в бесконечность при тех значениях  $K$ , при которых выражение  $F + 2KF'$  обращается в нуль.

Чтобы выяснить расположение границ неоднозначности для конкретных случаев, показанных на рис. 2 в [1], исследуем уравнение

$$\xi^2 + F^2(K) = \epsilon^2/K$$

при постоянных  $\xi$ .

Для получения этой зависимости можно пользоваться непосредственно рис. 2 в [1]. Например, для случая рис. 2з в [1] эта зависимость приведена на рис. 1.

Аналогичные кривые могут быть построены для всех рассмотренных в [1] случаев.

На основании этих графиков проведено разбиение плоскости  $\epsilon\xi$  на области синхронизации. Вид областей приведен на рис. 2 а, б, в, г, д, е, ж, з.



Неоднозначность плоскости  $\epsilon\xi$  связана с наличием нескольких стационарных режимов при одних и тех же значениях параметров  $\epsilon$  и  $\xi$ . Из рис. 2 б, з следует, что даже в мягком режиме возбуждения генератора при некоторых значениях  $\epsilon$  и  $\xi$  возможны два устойчивых стационарных режима.

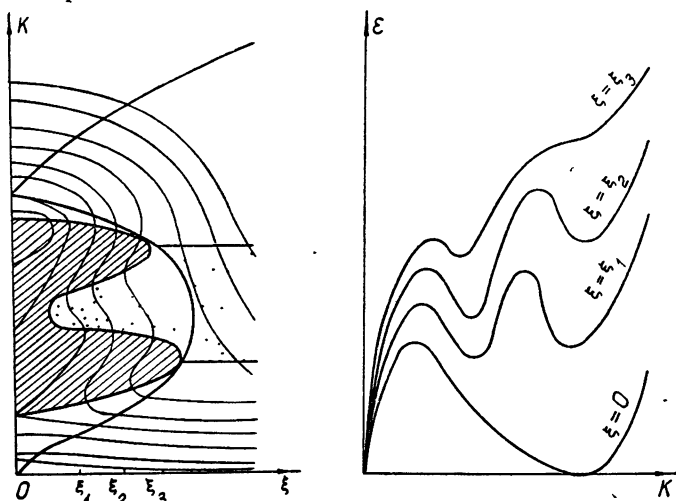


Рис. 1.

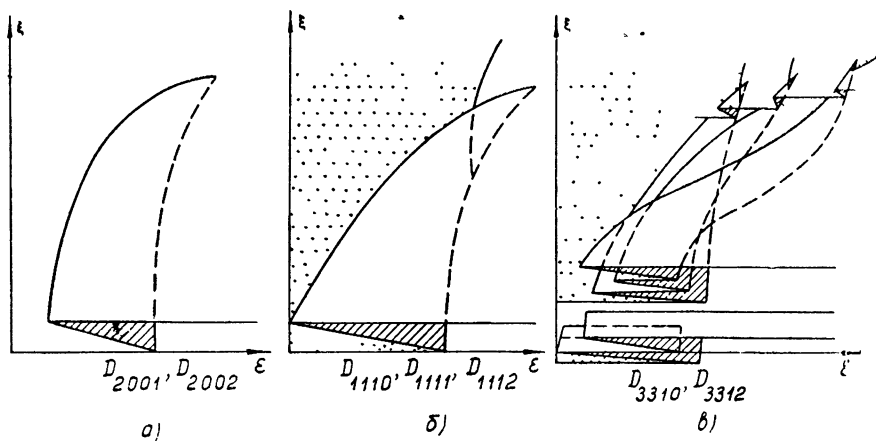


Рис. 2 а, б, в

Это обстоятельство не отмечено в работе [2], по-видимому, потому, что там зависимость ширины полосы захватывания исследовалась только в двух предельных случаях: при  $\epsilon$  достаточно малых и при  $\epsilon$  достаточно больших\*. Кроме того, следует отметить, что зависимость ширины полосы захватывания от расстройки, полученная в [2] для достаточно больших  $\epsilon$  в виде  $\xi = \sqrt{2\epsilon}$ , справедлива только для кубической аппроксимации нелинейности.

Рис. 2 д, ж показывают разбиение плоскости  $\epsilon\xi$  на области захватывания в случае жесткого режима возбуждения генератора, а рис. 2 в, г, е—для случая сложно-жесткого режима возбуждения.

\* Неоднозначность зависимости ширины полосы захватывания от амплитуды внешней ЭДС отмечалась в работе [2].

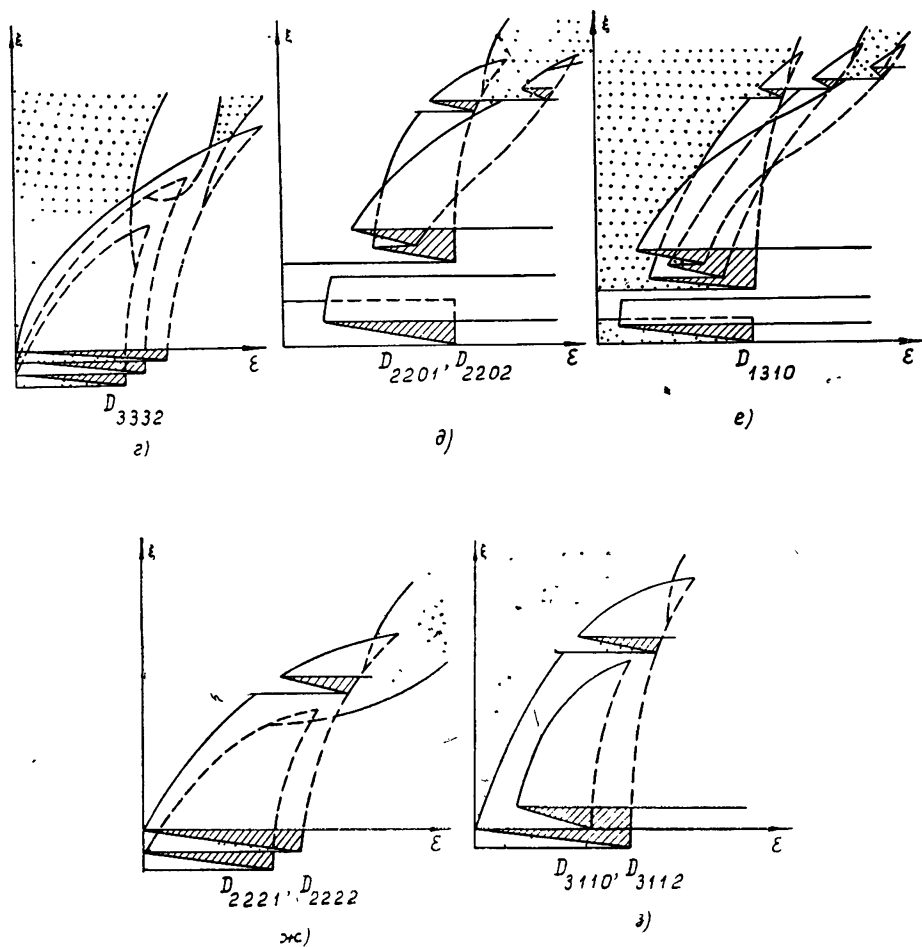


Рис. 2 г, д, е, ж, з.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 406 (1969).
2. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов, А. А. Витт, Г. С. Горелик, С. Э. Хайкин, Новые исследования нелинейных колебаний, Гос. изд. по вопросам радио, М, 1936
3. Д. Ж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, М., 1952.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
12 февраля 1969 г.

TO THE THEORY OF AUTO-OSCILLATIONS GENERATOR  
SYNCHRONIZATION. II

V. I. Korolev, L. V. Postnikov

Decomposition of „external force amplitude-mismatch“ plane into synchronization regions is studied.

УДК 5192

## НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕДИАННЫЙ ОБНАРУЖИТЕЛЬ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. А. Симахин

Исследуется алгоритм обнаружения, обеспечивающий инвариантность уровня ложных тревог для широкого класса распределений шумов в случае зависимых выборок. Единственно требуемой информацией о статистике канала связи является медиана распределения шума в отсутствие сигнала. Производится сравнение данного обнаружителя с обнаружителями, действующими по методу максимального правдоподобия, и с непараметрическим обнаружителем, использующим независимые выборочные значения.

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось много работ, в которых рассматривается использование непараметрических статистик для обнаружения сигналов в шумах. Обзор этих методов, а также их краткая характеристика даны в работе [3]. Но, как правило, все рассмотренные обнаружители используют предположение о независимости получаемых выборочных значений. Однако часто в практике такое предположение невыполнимо. Также в случае, когда интервал времени наблюдения ограничен, мы можем не набрать требуемое количество независимых наблюдений для обеспечения заданной эффективности, и поэтому обнаружитель может оказаться неэффективным. В данной работе рассматривается использование метода совпадений для непараметрического обнаружения сигнала в шуме. Использование метода совпадений для обнаружения полезных сигналов в шуме хорошо известно [1, 2].

Привлекательность и перспективность данного метода для практики вытекает из того, что он основан на построении функций от двоичных случайных величин, получение которых легко реализуемо, а вычисление функций от них сводится к простому подсчету числа единиц. Непараметрический обнаружитель, использующий метод совпадений, в случае независимых выборок довольно подробно исследован в [1]. В данной работе исследуется обнаружитель, работающий на статистике, рассмотренной в [1], в предположении, что выборочные значения не являются независимыми. Единственно требуемой информацией о статистике канала является медиана шума в отсутствие сигнала. Обнаружитель выдает решение о наличии или отсутствии полезного сигнала, определяя изменение медианы входного процесса  $y(t)$ , при этом предполагается, что такое изменение медианы возникает в результате присутствия сигнала.

Показывается, что такой обнаружитель является асимптотически непараметрическим для широкого класса стационарных  $m$ -зависимых входных шумовых процессов.

При этом делаются следующие предположения:

- 1) шум представляет собой стационарный  $m$ -зависимый случайный процесс с неизвестной функцией распределения  $F_0(n(t))$ ;
- 2) имеется возможность получать выборку  $y_1, \dots, y_n$  из случайного процесса на выходе канала;

3) вследствие стационарности случайные величины  $y_1, \dots, y_n$ , представляющие собой амплитуды в моменты  $t_1, \dots, t_n$ , в отсутствие сигнала обладают одним и тем же маргинальным распределением  $F_0(y)$ ;

4) распределение в отсутствие сигнала отличается от распределения в присутствии сигнала только параметром отношения сигнал/шум  $\theta$ . Такое предположение справедливо для многих задач обнаружения.

### 1. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ОБНАРУЖИТЕЛЯ

Исследуемый в данной работе медианный обнаружитель основан на использовании следующей статистики:

$$S_n(M) = \sum_{i=1}^n c(y_i - M), \quad (1.1)$$

где  $M$  представляет собой известную медиану распределения шума. Функция  $c(z)$  определяется как

$$c(z) = \begin{cases} 1 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}.$$

С помощью статистики  $S_n(M)$  выносится решение о наличии или отсутствии полезного сигнала путем определения разности между выборочной медианой и известной медианой шума. Затем статистика  $S_n(M)$  сравнивается с порогом  $c_1$ , если  $S_n(M) > c_1$ , то выносится решение о наличии полезного сигнала, при  $S_n(M) < c_1$  выносится решение об отсутствии полезного сигнала.

Блок-схема обнаружителя представлена на рис. 1.

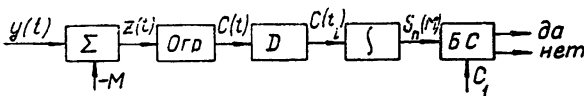


Рис. 1. Блок-схема обнаружителя:  $\Sigma$  — сумматор; Орд — полупериодный ограничитель; D — дискретизатор;  $\int$  — двойной интегратор; БС — блок сравнения с порогом.

### 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБНАРУЖИТЕЛЯ

Исследование обнаружителя будем производить по относительной асимптотической эффективности ( $AIRE$ ) [5, 6], которая является мерой относительной скорости передачи информации для заданных значений вероятности ложной тревоги и  $\theta$ , стремящегося к нулю. Известно [1, 4], что  $AIRE$  для рассматриваемого здесь случая слабых сигналов является явной функцией константы  $K$ , называемой эффективностью статистики.

Эффективность  $K$  статистики  $S_n(M)$  определяется как

$$K[S_n(M)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{dE_\theta[S_n(M)]}{d\theta} \bigg|_{\theta=0} / \sigma_\theta^2[S_n(M)] \bigg|_{\theta=0} \right]^2, \quad (2.1)$$

где  $E_\theta[S_n(M)]$  и  $\sigma_\theta^2[S_n(M)]$  представляют, соответственно, среднее значение и дисперсию  $S_n(M)$  в случае наличия сигнала.

Анализ  $AIRE$  и  $K$  можно найти в [1]. Найдем среднее значение и дисперсию  $S_n(M)$  в случае отсутствия сигнала. Используя условие стационарности и то, что  $F_0(M) = 1/2$ , будем иметь

$$E_0 [S_n(M)] = n/2,$$

а

$$\sigma_0^2 [S_n(M)] = n\zeta_0 + 2n \sum_{h=1}^m \zeta_h - \frac{(2m+1)n}{4}, \quad (2.2)$$

где

$$\zeta_h = \text{cov} \{c(y_i - M), c(y_{i+h} - M)\} \quad (2.3)$$

$$(h = 0, \dots, m)$$

и знак  $E$  обозначает математическое ожидание. Как видно из (2.2), дисперсия  $S_n(M)$  зависит от модели  $m$ -зависимого случайного процесса. Но если мы определим величину

$$V_0^2 = b_0 + 2 \sum_{h=1}^m b_h - (2m+1)(\tau/n)^2, \quad (2.4)$$

где

$$b_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-h} c(y_i - M) c(y_{i+h} - M),$$

и  $\tau$  — число  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) превысивших порог  $M$ , то  $V_0^2$ , как следует из [4], будет состоятельной и не зависящей от распределения  $F_0(y)$ , для класса стационарных  $m$ -зависимых распределений  $\{F_0(y)\}$ , оценкой  $\sigma_0^2 [S_n(M)]$ . Поэтому в дальнейшем вместо  $\sigma_0^2$  будем пользоваться ее непараметрической оценкой  $V_0^2$ . Таким образом, получаем, что среднее значение и дисперсия  $S_n(M)$  в отсутствие сигнала известны и не зависят от статистических свойств канала, причем статистика  $S_n(M)$  будет асимптотически нормальной со средним  $n/2$  и дисперсией  $V_0^2 n$  (это следует из теоремы 2.3 [4] и [7]). Поскольку вероятность ложной тревоги полностью определяется распределением статистики  $S_n(M)$  в отсутствие сигнала, то медианный обнаружитель, использующий  $m$ -зависимые выборки, будет асимптотически непараметрическим. Как известно, вероятность ложной тревоги  $\alpha$  определяется как

$$\alpha = Pr_0 \{S_n(M) > c_1\}.$$

Асимптотически

$$\alpha \rightarrow 1 - \Phi \left\{ \frac{c_1 - n/2}{\sqrt{n} V_0} \right\}, \quad (2.5)$$

где  $\Phi(x)$  — стандартное нормальное распределение. Так как  $\Phi(x)$  — непрерывная и монотонная функция, то из (2.5) можно найти  $c_1$  как функцию  $\alpha$ .

Среднее значение  $S_n(M)$  при наличии сигнала равно

$$E_\theta [S_n(M)] = n - \sum_{i=1}^n G_{\theta_i}(M). \quad (2.6)$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$G_{\theta_i}(M) = F_0(M) + \theta_i \left[ \frac{dG_\theta(M)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_i} \right]. \quad (2.7)$$

Здесь  $F_0(y)$  и  $G_{\theta_i}(y)$  — распределения вероятностей входного процесса обнаружителя в отсутствие и в присутствии полезного сигнала в момент  $t_i$ . Параметр  $\theta_i$  определяет отношение входного сигнала к шуму в момент  $t_i$  и  $0 < \hat{\theta} < \theta_i$ . Подставляя (2.7) в (2.6) и рассматривая случай слабых сигналов, будем иметь

$$E_{\theta} [S_n(M)] = E_0 [S_n(M)] - \bar{\theta} n \left[ \frac{dG_{\theta}(M)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \right], \quad (2.8)$$

где  $\bar{\theta} = (\hat{1}/n) \sum_{i=1}^n \theta_i$ . Используя (2.8), (2.2) для нахождения  $K[S_n(M)]$  и переходя в (2.1) к пределу, получим, что

$$K[S_n(M)] = \left[ \frac{dG_{\theta}(M)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \right]^2 \frac{n}{\sigma_0^2}. \quad (2.9)$$

Дальше рассмотрим некоторые случаи обнаружения синусоидального сигнала в аддитивном гауссовском шуме.

### 3. КОГЕРЕНТНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА В АДДИТИВНОМ ГАУССОВСКОМ ШУМЕ

В этой задаче сигналом является синусоида с известной фазой и выборки производятся всегда в момент ее пиков, поэтому их можно считать эквивалентными сигналу с постоянной амплитудой. Отношение сигнал/шум в момент  $t_i$  определяется как

$$\theta_i = A/\sigma_i,$$

где  $A$  — амплитуда синусоиды,  $\sigma_i^2$  — среднееквадратичное значение шума в момент  $t_i$ . Распределения вероятностей в отсутствие сигнала  $F_0(y)$  и в присутствии сигнала  $G_{\theta}(y)$  связаны соотношением

$$G_{\theta}(y) = F_0(y - \theta). \quad (3.1)$$

Следовательно,

$$\frac{dG_{\theta}(M)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -f_0(M), \quad (3.2)$$

а  $f_0(y)$  — плотность вероятностей в отсутствие сигнала. Для случая нормированного гауссовского шума будем иметь

$$K[S_n(M)] = \frac{1}{2\pi \left( \frac{1}{4} + 2 \sum_{h=1}^m \zeta_h - \frac{m}{2} \right)}, \quad (3.3)$$

где

$$\zeta_h = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{(1 - \rho_h^2)^{1/2}}{\rho_h} \right] \right\} \quad (h = 1, \dots, m) \quad (3.4)$$

и  $\rho_h$  — коэффициент корреляции между выборочными значениями  $y_i$  и  $y_{i-h}$ .

Случай неограниченного времени наблюдения. Сравнение данного обнаружителя будем производить с обнаружителем правдоподобия, вывод которого дан в Приложении. Константа эффективности обнаружителя правдоподобия, работающего на статистике  $L_n^*$ , как показано в Приложении, равняется единице. Тогда ARE медианного обнаружителя по отношению к обнаружителю правдоподобия будет

$$L = \frac{K[S_n(M)]}{K[L_n^*]},$$

т. е.  $L$  будет определяться выражением (3.3).

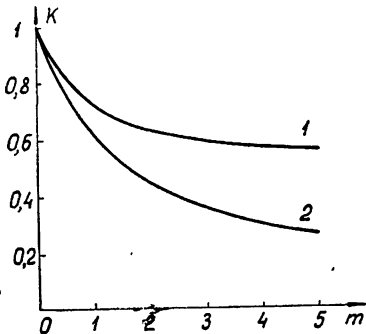


Рис. 2. Зависимость  $K[S_n(M)]$  от  $m$  и вида  $\rho_h^*$ . Кривые 1) —  $\rho_h = \exp(-h)$ , 2) —  $\rho_h = (m-h)/m$ .

На рис. 2 приведены графики функции  $K[S_n(M)]$  в зависимости от вида  $\rho_h$  и  $m$ .

Как видно из (3.3), при  $\rho_h \rightarrow 0$

$$K[S_n(M)] \rightarrow 2/\pi = 0,637,$$

т. е. к эффективности непараметрического медианного обнаружителя в случае независимых выборок [1].

Случай ограниченного времени наблюдения. Рассмотрим теперь случай, когда интервал времени наблюдения  $T$  ограничен, и покажем, что в этом случае ARE медианного обнаружителя  $S_n(M)$  может быть увеличена в  $I$  раз (где  $I$  будет определено ниже) по отношению

к непараметрическому обнаружителю [1], работающему на независимых выборках.

Для случая слабых сигналов и аддитивного  $m$ -зависимого гауссовского шума с нулевым средним вероятность правильного обнаружения обнаружителя  $S_n(M)$  асимптотически запишется как

$$\beta \rightarrow 1 - \Phi \left\{ \frac{-2\sqrt{n}\delta}{\sqrt{4\zeta}} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

$$\zeta = \frac{1}{4} + 2 \sum_{h=1}^m \zeta_h - \frac{m}{2}$$

и  $\zeta_h$  определено выражением (3.4). Поскольку  $\sqrt{4\zeta} \rightarrow 1$  при  $\rho_h \rightarrow 0$  ( $h = 1, \dots, m$ ), то в качестве эквивалентного числа независимых выборок  $n_q$  можно взять

$$n_q = n/4\zeta. \quad (3.6)$$

Пусть  $\lambda$  — максимальное число независимых выборок, полученных в течение интервала наблюдения  $T$ , тогда ARE, вычисленная для независимых выборок, может быть увеличена в  $I$  раз, где

$$I = n_q/\lambda = (m+1)/4\zeta. \quad (3.7)$$

Для случая, когда дискретизация ведется с очень большой частотой, отношение  $n_q/\lambda$  примерно равно

$$I \simeq \frac{1}{8\lambda/T \int_0^{T/\lambda} \zeta(x) dx - 2}. \quad (3.8)$$

При слабой зависимости между выборочными значениями, т. е. при  $\rho_h$  ( $h = 1, \dots, m$ ), близких к нулю, из (3.4) и (3.6) следует, что  $I \simeq m$ , т. е. ARE медианного обнаружителя, использующего зависимые выборочные значения, примерно в  $m$  раз больше, чем обнаружителя, использующего независимые выборочные значения. Для  $\rho_h = e^{-h}$  ( $h = 1, \dots, 5$ )  $I \simeq 3$  и  $\rho_h = (m - h)/m$  ( $h = 1, \dots, 5$ )  $I \simeq 1,8$ .

На рис. 3 приведены графики зависимости  $I$  от вида  $\rho_h$  и  $m$ .

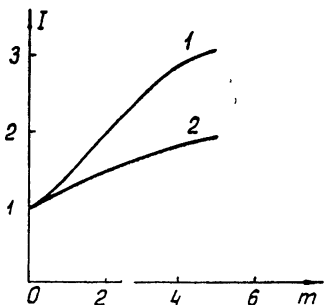


Рис. 3. Зависимость  $I$  от  $m$  и вида  $\rho_h$ .  
Кривые 1) —  $\rho_h \exp(-h)$ , 2) —  $\rho_h = (m-h)/m$ .

В работе рассмотрен медианный обнаружитель, использующий для своей работы зависимые выборки. Обнаружитель является асимптотически непараметрическим по отношению к широкому классу входных  $m$ -зависимых случайных процессов. Существенное преимущество такого обнаружителя состоит в том, что для его работы не требуется независимости выборок входных процессов. Данный обнаружитель менее эффективен по отношению к обнаружителю на независимых выборках в случае, когда интервал времени наблюдения не ограничен. При  $\rho_h = e^{-h}$  ( $h = 1, \dots, 5$ ) он примерно в два раза менее эффективен, чем обнаружитель [1] (рис. 2). Но эффективность обнаружителя может быть существенно выше, чем обнаружителя [1] в случае ограниченного интервала времени наблюдения (рис. 3). Для  $\rho_h = e^{-h}$  ( $h = 1, \dots, 5$ )  $I \simeq 3$ . Так что обнаружитель, использующий зависимые выборки, более эффективен для практически важного случая ограниченного времени наблюдения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Обнаружитель правдоподобия выносит свое решение, используя статистику правдоподобия

$$L_n = \frac{g_\theta(y_1, \dots, y_n)}{f_0(y_1, \dots, y_n)},$$

где  $\theta$  — параметр отношения сигнал/шум,  $f_0(\mathbf{y})$  и  $g_\theta(\mathbf{y})$  — плотности



вероятностей на входе обнаружителя при отсутствии и наличии полезного сигнала на входе обнаружителя соответственно. При слабом сигнале и при условии, что производная по  $\theta$  функции  $g_\theta(\mathbf{y})$  существует и непрерывна при  $\theta=0$ , статистика отношения правдоподобия эквивалентна

$$L_n^* = b'(\mathbf{y})/f_0(\mathbf{y}),$$

где

$$b'(\mathbf{y}) = \left. \frac{dg_\theta(\mathbf{y})}{d\theta} \right|_{\theta=0}.$$

Для случая аддитивного гауссовского шума с нулевым средним значением и корреляционной матрицей  $R$  статистика отношения правдоподобия будет иметь вид

$$L_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_{ii} y_i \quad (\text{П.1})$$

и ее эффективность будет

$$K[L_n^*] = 1. \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $Q = R^{-1}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Г. Лениотис, Дж. К. Хенкок, Зарубежная радиоэлектроника, № 6, 36 (1965).
2. M. Schwartz, IRE Trans., IT-2, 135 (1956).
3. Дж. В. Карлил, Дж. Б. Томас, Зарубежная радиоэлектроника, № 11, 49 (1964).
4. P. K. Sen, Calcutta Statist. Association Bull., 12, 69 (1963).
5. M. G. Kendall, A. Stuart, The advanced theory of statistics, 2, Hafner Publishing Co., N.-Y., 1961.
6. D. A. S. Fraser, Nonparametric methods in statistics, N.-Y., Wiley, 1957.
7. R. K. Sen, J. Amer. Statist. Assoc., 60, № 309, 131 (1965).

Сибирский научно-исследовательский  
физико-технический институт при  
Томском университете

Поступила в редакцию  
14 октября 1968 г.

#### A NON-PARAMETMIC MEDIAN DETECTOR FOR DEPENDENT STOCHASTIC PROCESSES

V. A. Simakhin

A detection algorithm is studied which provides the invariant level of false alarm for a wide class of noise distribution in case of dependent samples. The only required information on the communication channel's statistics is the median of noise distribution when there is no signal. This detector is compared with those whose operation is based on the maximum likelihood method and with a non-parametric detector using independent sample values.

УДК 681.142.01

## К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛНЫХ МНОЖЕСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ ГИПЕРПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Т. Н. Эйнгорина, М. Я. Эйнгорин

Формулируется ряд теорем о существовании полных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  и дается способ их построения для некоторых наборов  $n_i$  (1, 2, ..., N) при произвольных N.

Задача о существовании и нахождении максимального множества прошивок в многомерных запоминающих устройствах тесно связана с задачей о существовании и построении полных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников [1-3]. При этом ясно, что условия существования ортогональных латинских гиперпрямоугольников во второй задаче переходят в условия однозначности чтения и записи информации в первой задаче. Таким образом, решение второй из этих двух задач позволяет решить первую. Настоящая работа посвящена решению второй задачи. Ранее этот вопрос рассматривался только для случая  $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n$  и в работах [1-3] давался способ их построения для  $n = p^\alpha \geq 3$ , где  $p$  — любое простое число,  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ . В этой статье будет рассмотрена более общая задача о существовании полных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  и о представлении этих множеств с помощью таблиц определенного вида.

**Теорема 1.** Пусть дано множество, состоящее из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ . Тогда  $t \leq$

$$\leq \sum_{j=1}^N \left( \prod_{i=j+1}^N n_i - 1 \right), \quad \text{где } \prod_{i=N+1}^N n_i = 1.$$

**Доказательство.** Любой латинский гиперпрямоугольник порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  можно представить в виде совокупности

$\prod_{i=1}^c n_i$   $(N-c)$ -мерных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=c+1, c+2, \dots, N}$  с помощью прямоугольных таблиц размера  $(n'_1 \times n'_2)$ ,

где  $n'_1 = \prod_{i=c+1}^N n_i$  и  $n'_2 = n_c$  [1]. Очевидно, такое представление ортогональных латинских гиперпрямоугольников возможно самое большее  $(n'_1 - 1)$  таблицами.

Поскольку  $c = 1, 2, \dots, N$ , то

$$t \leq \left( \prod_{i=2}^N n_i - 1 \right) + \left( \prod_{i=3}^N n_i - 1 \right) + \dots + (n_N - 1) = \sum_{j=1}^N \left( \prod_{i=j+1}^N n_i - 1 \right) \quad (1)$$

при условии, что  $\prod_{i=N+1}^N n_i = 1$  по определению.

*Определение 1.* Если в (1) имеет место равенство, то соответствующее множество ортогональных латинских гиперпрямоугольников назовем полным.

Латинский гиперпрямоугольник можно представить в виде плоской таблицы размера  $(n'_1 \times n'_2)$ , где  $n'_1 = \prod_{i=1}^N n_i$  и  $n'_2 = n_g$  ( $g = 1, 2, \dots, N$ ).

Условимся в дальнейшем, для определенности, представлять латинские гиперпрямоугольники порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  в виде прямоугольных таблиц  $A_j$  размера  $(n'_1 \times n'_2)$ , где  $n'_1 = \prod_{i=2}^N n_i$  и  $n'_2 = n_1$  [1].

Кроме того, можно представить латинский гиперпрямоугольник и в виде одного столбца  $B_j$  длины  $\prod_{i=1}^N n_i$ . В самом деле, запишем первую строку  $A_j$ , состоящую из  $n_1$  элементов, в виде столбца длины  $n_1$ , ниже припишем вторую строку  $A_j$  также в виде столбца и т. д. Помня правило записи, легко сделать и обратное, т. е. представить любой такой столбец  $B_j$  в виде таблицы  $A_j$  размера  $(n'_1 \times n'_2)$ .

Рассмотрим таблицу  $2 \parallel a_{md} \parallel$  размера  $(\prod_{i=1}^N n_i \times (N + t))$ ,

где  $a_{md}$  — элемент матрицы (2) с координатами  $m$  и  $d$ ;  $1 \leq m \leq \prod_{i=1}^N n_i$ ;  $1 \leq d \leq N + t$ .

*Теорема 2.*  $(N + j)$ -й столбец таблицы (2) представляет собой запись латинского гиперпрямоугольника порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , если столбцы (2) удовлетворяют следующим требованиям:

$$1) \quad [a_{m_1, 1}; a_{m_1, N+j}] \neq [a_{m_2, 1}; a_{m_2, N+j}],$$

$$a_{m_1, 1}; a_{m_2, 1} = 1, 2, \dots, \prod_{i=2}^N n_i,$$

$$m_1, m_2 = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^N n_i, \quad j = 1, 2, \dots, t; \quad (3)$$

$$2) \quad [a_{m, r}; a_{m, N+j}] \neq [a_{m+l s_r, r}; a_{m+l s_r, N+j}],$$

$$s_r = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^N n_i, \quad r = 2, 3, \dots, N, \quad l = 1, \dots, n_r - 1,$$

$$m = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^N n_i - s_r, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

*Доказательство.* Согласно правилу, сформулированному выше, из  $(N + j)$ -го столбца таблицы (2) построим таблицу  $A_{N+j}$  разме-



ра  $\left(\prod_{i=2}^N n_i \times n_1\right)$  следующим образом: первая строка  $A_{N+j}$  состоит из первых  $n_1$  элементов столбца  $(N+j)$  таблицы (2), вторая строка  $A_{N+j}$  состоит из следующих  $n_1$  элементов столбца  $(N+j)$  таблицы (2) и т. д. Тогда, согласно [1] и в силу требований (3),  $A_{N+j}$  является латинским гиперпрямоугольником порядка  $\{n_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ . В самом деле, по виду первого столбца таблицы (2) устанавливаем, что ни одна строка таблицы  $A_{N+j}$  (в действительности, эта строка соответствует координатному направлению  $i_1$  [1, 4]) не содержит одинаковых элементов. А по виду следующих  $(N-1)$  столбцов таблицы (2) заключаем, что последовательности элементов столбцов таблицы  $A_{N+j}$ , являющиеся строками, соответствующими координатным направлениям  $i_2, i_3, \dots, i_N$  [1-4], не содержат одинаковых элементов.

Легко установить и обратное: каждому латинскому гиперпрямоугольнику порядка  $\{n_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ , представленному с помощью таблицы размера  $\left(\prod_{i=2}^N n_i \times n_1\right)$ , однозначно соответствует таблица (2), удовлетворяющая требованиям (3).

**Определение 2.** Таблицу вида (2), столбцы которой удовлетворяют требованиям (3), назовем таблицей типа  $L$  (ее первые  $N$  столбцов проверяют свойство гиперпрямоугольника «быть латинским»).

**Теорема 3.** Множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1,\dots,N}^{\times t}$  эквивалентно таблице типа  $L$  размера  $\left(\prod_{i=1}^N n_i \times (N+t)\right)$ , для которой выполняются следующие условия:

1) условия (3) теоремы 2,

$$2) \quad [a_{m_1, N+j_1}; a_{m_1, N+j_2}] \neq [a_{m_2, N+j_1}; a_{m_2, N+j_2}], \quad (3a)$$

$$m_1, m_2 = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^N n_i; \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, t;$$

$$m_1 \neq m_2; \quad j_1 = j_2.$$

Доказательство очевидно.

**Определение 3.** Таблицу типа  $L$ , удовлетворяющую требованиям теоремы 3, назовем таблицей типа  $LO$ . (Она проверяет свойства для  $tN$ -мерных гиперпрямоугольников быть латинскими и ортогональными.)

**Теорема 4.** Существует полное множество ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  для  $n_j = p^{\alpha_j}$ , где  $j = 1, 2, \dots, N$ ;  $p$  — любое простое число;  $n_i \geq 3$ ,  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_N$  — любые натуральные числа;  $N \geq 2$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы может быть проведено с помощью поля Галуа  $GF\left(\prod_{j=2}^N n_j\right)$ , элементы которого служат тем набором различных объектов, из которых строятся латинские гиперпрямоугольники.

Если обозначить элементы поля Галуа  $GF\left(\prod_{i=2}^N n_i\right)$  следующим образом [5]:

$$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2; a_3; \dots; a_N, \quad \prod_{j=2}^N n_j^{-1},$$

то латинские гиперпрямоугольники можно представить в виде таблиц  $A_{e_\gamma}$  размера  $(n'_1 \times n'_2)$ , где  $n'_1 = \prod_{j=2}^N n_j$ ,  $\gamma = 1, \dots, N-1$  и  $n'_2 = n_1$ , следующим образом:

$$1) \quad A_{e_1} = \| a_{i_1 j_1}^{(e_1)} \|, \quad a_{i_1 j_1}^{(e_1)} = a_{e_1} a_{i_1} + a_{j_1}, \quad (4)$$

где  $a_{i_1 j_1}^{(e_1)}$  — элемент таблицы  $A_{e_1}$  с координатами  $i_1, j_1$ ;

$$i_1 = 0, 1, \dots, \prod_{j=2}^N n_j - 1; \quad j_1 = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad e_1 = 1, 2, \dots, \prod_{j=2}^N n_j - 1;$$

$$2) \quad A_{e_\gamma} = \| | a_{i_\gamma j_\gamma}^{(e_\gamma)} | \|; \quad a_{i_\gamma j_\gamma}^{(e_\gamma)} = a_k, \quad (5)$$

где  $a_{i_\gamma j_\gamma}^{(e_\gamma)}$  — элемент таблицы  $A_{e_\gamma}$  с координатами  $i_\gamma, j_\gamma$ ,

$$k = 0, 1, \dots, \prod_{j=2}^N n_j - 1;$$

$$k = \tilde{i}_\gamma + E \left( \frac{i_\gamma}{n_1 \prod_{j=\gamma+1}^N n_j} \right) n_1 \prod_{j=\gamma+1}^N n_j + j_\gamma \prod_{j=\gamma+1}^N n_j, \quad (6)$$

$E \frac{i_\gamma}{n_1 \prod_{j=\gamma+1}^N n_j}$  означает целую часть числа  $\frac{i_\gamma}{n_1 \prod_{j=\gamma+1}^N n_j}$ ,

$$a_{i_\gamma} = \bar{a}_{e_\gamma} \bar{a}_{i_\gamma \bmod \prod_{j=\gamma+1}^N n_j} + \bar{a}_{j_\gamma}, \quad (7)$$

$$\tilde{j}_\gamma = E \left[ \frac{i_\gamma \bmod \left( n_1 \prod_{j=\gamma+1}^N n_j \right)}{\prod_{j=\gamma+1}^N n_j} \right], \quad (8)$$

при

$$\gamma = 2, 3, \dots, N-1; \quad i_\gamma = 0, 1, \dots, \prod_{j=2}^N n_j - 1; \quad j_\gamma = 0, 1, \dots, n_1 - 1;$$

$$e_\gamma = 1, \dots, \prod_{j=\gamma+1}^N n_j - 1.$$

Заметим, что формулы (4) — (8) определяют принцип построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ . Номер элемента поля Галуа  $GF \left( \prod_{j=2}^N n_j \right)$  в искомой таблице  $A_{e_\gamma}$  с координатами  $(i_\gamma, j_\gamma)$  определяется с помощью элементов подполей первоначального поля Галуа  $GF \left( \prod_{j=2}^N n_j \right)$  [5]. Назовем их вспомогательными полями

Галуа  $GF\left(\prod_{j=\gamma+1}^N n_j\right)$ . На каждом шаге  $\gamma = 2, 3, \dots, N-1$  будет единственным такое вспомогательное поле Галуа  $GF\left(\prod_{j=\gamma+1}^N n_j\right)$  и  $\bar{a}_{e_\gamma}$ ;  $\bar{a}_{i_\gamma \bmod \prod_{j=\gamma+1}^N n_j}$ ;  $\bar{a}_{j_\gamma}$  будут элементами этого поля. Нумерация элементов каждого вспомогательного поля Галуа  $GF\left(\prod_{j=\gamma+1}^N n_j\right)$  будет своей, независимой от нумерации элементов первоначального поля Галуа  $GF\left(\prod_{j=2}^N n_j\right)$  и других вспомогательных полей Галуа:

$$\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\prod_{j=\gamma+1}^N n_j - 1}.$$

Используя теоремы 1, 2, 3, легко доказать, что все определенные таким образом матрицы  $A_{e_\gamma}$  являются латинскими гиперпрямоугольниками порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , ортогональными друг другу, и множество всех этих гиперпрямоугольников будет полным.

Подчеркнем общность способа построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , рассмотренного в теореме 4.

1) Латинские гиперпрямоугольники порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  представляются с помощью таблиц размера  $\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N n_i \times n_j\right)$ . В теореме 4 для определенности выбрано  $n_j = n_1$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Доказательство можно провести и для любого  $j \neq 1$ .

2) Полное множество латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  представлено с помощью  $t = \sum_{\gamma=1}^{N-1} t_\gamma$  таблиц  $A_{e_\gamma}$ , из которых

а) первые  $t_1$  таблиц получают из полного множества ортогональных латинских квадратов порядка  $\left\{\prod_{j=2}^N n_j\right\}$  с помощью отсечения от каждого из них последних  $\left(\prod_{j=2}^N n_j - n_1\right)$  столбцов; латинские

квадраты порядка  $\left\{\prod_{j=2}^N n_j\right\}$  строят любым известным способом (см. например, [3, 6-8]); б) любые другие  $t_\gamma$  таблиц ( $\gamma = 2, 3, \dots, N-1$ ) получают из полного множества ортогональных латинских квадратов

порядка  $\left\{\prod_{j=\gamma+1}^N n_j\right\}$  с помощью отсечения от каждого из них последних  $\left(\prod_{j=\gamma+1}^N n_j - n_1\right)$  столбцов.

Пусть  $t_\gamma^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, \prod_{s=\gamma+1}^N n_s - 1$ ) —  $j$ -й латинский квадрат из полного множества ортогональных латинских квадратов порядка

$\left\{ \prod_{s=\gamma+1}^N n_s \right\}$  на  $\gamma$ -м шаге. Если обозначить через  $1 \leq k \leq \prod_{s=2}^{\gamma} n_s$  индекс

числа различных последовательностей длины  $\prod_{s=\gamma+1}^N n_s$  из элементов  $a_0, \dots, a_N$ ; принимающих участие в построении искомой таблицы, то  $t_{\gamma, k}^{(j)}$  обозначает латинский квадрат  $t_{\gamma}^{(j)}$ , элементы которого соответственно заменены элементами последовательности  $k$ . Для построения каждого столбца искомой таблицы будет использовано

$\frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1}$  столбцов  $\frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} = \sigma$  таблиц  $t_{\gamma, k}^{(j)}$ . Тогда схема

$$\frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} = n_1 \text{ столбцов } \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} = \sigma \text{ таблиц } t_{\gamma, k}^{(j)}. \text{ Тогда схема}$$

$$\prod_{s=\gamma+1}^N n_s \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1}$$

построения  $t_{\gamma} = \left( \prod_{s=\gamma+1}^N n_s - 1 \right)$  таблиц будет иметь вид, указанный

в табл. 1.

**Теорема 5.** Существует полное множество ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  для чисел  $n_i$  удовлетворяющих следующим условиям: 1)  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_N$ ; 2) каждое из чисел  $1, 2, \dots, (n_i - 1)$  взаимно просто с  $\prod_{j=i+1}^N n_j$ , где натуральное число  $N \geq 2$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Доказательство теоремы 5 можно провести аналогично доказательству теоремы 4, только строить таблицы  $A_{e_{\gamma}}$  будем по схеме, указанной в замечании к теореме 4, для которой все вспомогательные латинские прямоугольники размера  $\left( \prod_{j=\gamma+1}^N n_j \times n_{\gamma} \right)$  легко получить способом «кручения» [1, 3] т. е. в виде матриц  $\| a_{xy} \|$ , где

$$a_{xy} = 1 + [y + \omega_{\gamma}(x - 1) - 1] \bmod \prod_{j=\gamma+1}^N n_j \quad (\text{для } 1 \leq \gamma \leq N - 1),$$

$a_{xy}$  — номер элемента с координатами  $(x, y)$ ,  $x$  — номер столбца;  $1 \leq x \leq n_{\gamma}$ ,  $y$  — номер строки;  $1 \leq y \leq \prod_{\substack{j=\gamma+1 \\ j \neq \gamma}}^N n_j$ ;  $\omega_{\gamma}$  — номер таблицы на  $\gamma$ -м шаге  $1 \leq \omega_{\gamma} \leq \prod_{j=\gamma+1}^N n_j - 1$ ,  $n_{\gamma}$  — величина ребра гиперпрямоуголь-

ника, параллельного  $\gamma$ -му координатному направлению;  $\gamma$  — номер шага;  $1 \leq \gamma \leq N - 1$ ,  $N$  — размерность пространства, в котором ведется рассмотрение.

Причем, поскольку все  $n_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) не имеют общих множителей, столбцы таблиц  $t_{\gamma, k}^{(j)}$  необходимо брать неравное число раз в разных столбцах искомой таблицы, а именно.



Таблица 1.

1-й столбец	2-й столбец	...	$n_1$ -й столбец
1-й столбец $t_{\gamma, 1}^{(I)}$	1-й столбец $t_{\gamma, \sigma+1}^{(I)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+1}^{(J)}$
2-й столбец $t_{\gamma, 1}^{(I)}$	2-й столбец $t_{\gamma, \sigma+1}^{(I)}$	...	2-й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+1}^{(J)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, 1}^{(I)}$	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, \sigma+1}^{(I)}$	...	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+1}^{(J)}$
1-й столбец $t_{\gamma, 2}^{(I)}$	1-й столбец $t_{\gamma, \sigma+2}^{(I)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+2}^{(J)}$
2-й столбец $t_{\gamma, 2}^{(I)}$	2-й столбец $t_{\gamma, \sigma+2}^{(I)}$	...	2-й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+2}^{(J)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, 2}^{(I)}$	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, \sigma+2}^{(I)}$	...	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, (n_1-1)\sigma+2}^{(J)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
1-й столбец $t_{\gamma, \sigma}^{(I)}$	1-й столбец $t_{\gamma, 2\sigma}^{(I)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, n_1\sigma}^{(J)}$
2-й столбец $t_{\gamma, \sigma}^{(I)}$	2-й столбец $t_{\gamma, 2\sigma}^{(I)}$	...	2-й столбец $t_{\gamma, n_1\sigma}^{(J)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, \sigma}^{(I)}$	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, 2\sigma}^{(I)}$	...	$n_1$ -й столбец $t_{\gamma, n_1\sigma}^{(J)}$

где

1) В 1-м, 2-м, ...,  $[b_0 = \left(\prod_{s=2}^{\gamma} n_s\right) \bmod n_1]$ -м столбцах искомой таб-

лицы  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\left[ b_1 = E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1 \right]$ . Для  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\left\{ b_2 = \left( \prod_{s=2}^{\gamma} n_s \right) \times \right.$   
 $\left. \times \bmod \left[ E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1 \right] \right\}$  в соответствующих таблицах  $t_{\gamma, k}^{(I)}$  надо

$$\text{взять } \left\{ b_3 = E \left[ \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1} \right] + 1 \right\} \text{ столбцов, а для } k =$$

$$= \left\{ b_k = \left[ \left( \prod_{s=2}^{\gamma} n_s \right) \bmod E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1 \right] + 1 \right\}, \dots, \left[ E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1 \right]$$

в соответствующих таблицах  $t_{\gamma, k}^{(j)}$  необходимо взять  $(b_3 - 1)$  столбцов.

2) В  $(b_5 = b_0 + 1), \dots, n_1$ -м столбцах искомой таблицы  $k=1, 2, \dots,$

$$\dots, \left[ b_6 = E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) \right]. \text{ Для } k=1, 2, \dots, \left\{ \left[ \left( \prod_{s=2}^{\gamma} n_s \right) \bmod E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) \right] = b_7 \right\}$$

в соответствующих таблицах  $t_{\gamma, k}^{(j)}$  надо взять  $b_8 = E \left[ \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) + 1} \right] + 1$

столбцов, а для  $k = \left\{ b_9 = 1 + \left( \prod_{s=2}^{\gamma} n_s \right) \bmod \left[ E \left( \frac{\prod_{s=2}^{\gamma} n_s}{n_1} \right) \right] \right\}, \dots, b_6$

в соответствующих таблицах  $t_{\gamma, k}^{(j)}$  необходимо взять  $(b_8 - 1)$  столбцов в каждой.

Или это можно записать так:

1) Для  $j = 1, 2, \dots, b_0; i = 1, \dots, \prod_{s=2}^N n_s$

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{xy} + (j - 1) b_1 r + E \left( \frac{i - 1}{b_3 r} \right) r & (\text{для } 1 \leq i \leq b_2 b_3 r) \\ a_{xy} + (j - 1) b_1 r + (b_2 - 1) r + E \left[ \frac{i - 1 - b_2 b_3 r}{(b_3 - 1) r} \right] r & (\text{для } b_2 b_3 r + 1 \leq i \leq \prod_{s=2}^N n_s). \end{cases}$$

где  $x = i - E \left( \frac{i - 1}{r} \right) r; y = 1 + E \left[ \frac{(i - 1) \bmod (b_3 r)}{r} \right]; r = \prod_{s=\gamma+1}^N n_s.$

2) Для  $j = b_0 + 1, \dots, n_1$

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{xy} + (j-1)b_1r + E\left(\frac{i-1}{b_8r}\right)r & (\text{для } 1 \leq i \leq b_7b_8r) \\ a_{xy} + (j-1)b_1r + (b_7-1)r + E\left[\frac{i-1-b_7b_8r}{(b_8-1)r}\right]r & \\ & (\text{для } b_7b_8r+1 \leq i \leq \prod_{s=1}^N n_s), \end{cases}$$

где  $E\left(\frac{i-1}{b_8r}\right)$  означает целую часть числа  $\frac{i-1}{b_8r}$ ;  $a_{xy}$  — элементы, из которых строится полное множество ортогональных латинских квадратов порядка  $\{r \times r\}$ .

Кроме того, схема построения таблиц  $A_{e_1}$  приведена в табл. 2.

Следствие 1. Теорема 5 применима в случае, когда все  $n_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — простые числа, удовлетворяющие соотношению порядка  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_N$ .

Следствие 2. Теорема 5 применима в случае, когда  $n_i = p_i^{\alpha_i}$ , где все  $n_i < n_{i+1}$ ;  $p_i$  — простые числа и  $p_i < p_{i+1}$ ;  $\alpha_i$  — натуральные числа, большие нуля.

Следствие 3. Теорема 5 применима для  $N = 2$  в случае, когда  $n_1$  — простое число, а  $n_2 = \prod_{s=1}^H p_s^{\alpha_s}$ , где  $p_s$  — простые числа,  $n_1 < p_s$ ,  $H$  — любое натуральное число;  $\alpha_s = 1, 2, \dots$ .

Следствие 4. Теорема 5 применима в случае, когда все  $n_i = \prod_{j=1}^{s(i)} p_j^{(i)}$ , где  $p_j^{(i)}$  — простые числа, но  $\prod_{j=1}^{s(i)} p_j^{(i)} < p_j^{(i+1)}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

**Теорема 6.** Существует полное множество ортогональных латинских прямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1,2}$  для  $n_1 \leq n_2$ , где  $n_2$  — любая степень простого числа.

**Доказательство.** Согласно третьей теореме Манна [6, 8], можно построить полное множество из  $(n_2 - 1)$  ортогональных латинских квадратов порядка  $\{n_i\}_{i=1,2}$ . Отсекая у каждого такого квадрата последние  $(n_2 - n_1)$  столбцов, получим утверждение теоремы 6. Заметим, что  $n_1$  — любое натуральное число ( $n_1 \leq n_2$ ).

Следствие. Теорема 6 применима, когда  $n_1 = p_1^{\alpha_1}$  и  $n_2 = p_2^{\alpha_2}$ , где  $p_1^{\alpha_1} \leq p_2^{\alpha_2}$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  — натуральные числа;  $p_1, p_2$  — любые простые числа.

Все результаты, полученные для латинских гиперпрямоугольников, могут быть применены для построения максимального множества прошивок в многомерных запоминающих устройствах с одной только поправкой: если существует полное множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ , то существует максимальное множество из  $(t + N)$  прошивок, где  $N$  — число координатных прошивок, в  $N$ -мерной запоминающей матрице размера  $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N)$ .

Таблица 2

Построение латинских гиперпрямоугольников в случае, когда  $n_i (i=1, 2, \dots, N)$  удовлетворяют условиям теоремы 5

1-й столбец	2-й столбец	...	$b_0$ -й столбец	$b_5$ -й столбец	...	$n_1$ -й столбец
1-й столбец $t_{\gamma, 1}^{(j)}$	1-й столбец $t_{\gamma, b_1+1}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+1}^{(j)}$	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + 1}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + 1 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮
$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, 1}^{(j)}$	$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, b_1+1}^{(j)}$	...	$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+1}^{(j)}$	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	$b_8$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + 1}^{(j)}$	...	$b_8$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + 1 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
1-й столбец $t_{\gamma, b_2}^{(j)}$	1-й столбец $t_{\gamma, b_1+b_2}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+b_2}^{(j)}$	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_7}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_7 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, b_2}^{(j)}$	$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, b_1+b_2}^{(j)}$	...	$b_3$ -й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+b_2}^{(j)}$	⋮	...	⋮
1-й столбец $t_{\gamma, b_4}^{(j)}$	1-й столбец $t_{\gamma, b_1+b_4}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+b_4}^{(j)}$	$b_8$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_7}^{(j)}$	...	$b_8$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_7 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
⋮	⋮	...	⋮	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_9}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_9 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_4}^{(j)}$	$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_1+b_4}^{(j)}$	...	$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, (b_0-1)b_1+b_4}^{(j)}$	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	$(b_8-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_9}^{(j)}$	...	$(b_8-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_9 + (n_1 - b_5) b_6}^{(j)}$
1-й столбец $t_{\gamma, b_1}^{(j)}$	1-й столбец $t_{\gamma, 2b_1}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1}^{(j)}$	⋮	...	⋮
⋮	⋮	...	⋮	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_6}^{(j)}$	...	1-й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + (n_1 - b_5 + 1) b_6}^{(j)}$
⋮	⋮	...	⋮	⋮	...	⋮
$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_1}^{(j)}$	$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, 2b_1}^{(j)}$	...	$(b_3-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1}^{(j)}$	$(b_8-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + b_6}^{(j)}$	...	$(b_8-1)$ -й столбец $t_{\gamma, b_0 b_1 + (n_1 - b_5 + 1) b_6}^{(j)}$

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1569 (1967).
2. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1576 (1967).

3. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 1020 (1966).
4. Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их применение, ГИФМЛ, М., 1960.
5. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 1, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
6. Н. В. Манн, App. Math. Stat., 14, 401 (1943).
7. Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, изд. Мир, М., 1966.
8. Н. В. Манн, Analysis and design of Experiments, The Dover Series, Dover publications inc., New York, 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

TO THE EXISTENCE OF THE COMPLETE SETS OF ORTHOGONAL  
LATIN HYPER-RECTANGLES

*T. N. Eyngorina, M. Ya. Eyngorin*

A number of existence-theorems for complete sets of orthogonal Latin hyper-rectangles of  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  order are formulated and the method to construct them is provided for some sets of  $n_i (i=1, 2, \dots, N)$  for arbitrary  $N$ .

---

УДК 681.142.01

## К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОЖЕСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ ГИПЕРПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Т. Н. Эйнгорина

Доказан ряд теорем о существовании множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  для любых натуральных чисел  $N, n_1, n_2, \dots, n_N$ .

Исследование вопроса о существовании и нахождении множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  приобретает большое значение в связи с созданием теории многомерных запоминающих устройств. Именно, теория многомерных ЗУ потребовала ответа на вопрос не только о существовании полных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , но и о существовании неполных множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников с числом их большим  $N$  для любых значений  $n_i$ . Этой последней задаче и посвящена настоящая работа. Ранее был рассмотрен вопрос о существовании неполных множеств ортогональных латинских квадратов [1].

В дальнейшем, считая известными как определение латинского гиперпрямоугольника порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , определение ортогональности латинских гиперпрямоугольников одного порядка, так и различные способы табличного представления множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников [2, 3], сформулируем следующие результаты.

Теорема 1. Если существует  $s$  множеств из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i^{(j)}\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , то существует множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{k_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где  $k_i = \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$ .

Доказательство. Представим  $s$  множеств из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i^{(j)}\}_{i=1, 2, \dots, N}$  с помощью  $s$  таблиц типа  $LO$  [3] — таблиц  $A_j$  размера  $\left[ \prod_{i=1}^N n_i^{(j)} \times (N+t) \right]$  из элементов  $1, 2, \dots, \prod_{\gamma=2}^N n_{\gamma}^{(j)}$ , где  $j = 1, 2, \dots, s$ . Тогда  $\gamma^{(j)}$ -я строка  $A_j$  имеет вид

$$a_{\gamma^{(j)}, 1}; a_{\gamma^{(j)}, 2}; \dots; a_{\gamma^{(j)}, \beta}; \dots; a_{\gamma^{(j)}, N+t}, \quad (1)$$

где

$$\gamma^{(j)} = 1; 2, \dots, \prod_{i=1}^N n_i^{(j)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, N+t.$$

Объединим  $s$  строк вида (1) в одну строку из  $(N + t)$  элементов:

$$\{a_{\tau(1), 1}^{(1)}; a_{\tau(2), 1}^{(2)}; \dots; a_{\tau(s), 1}^{(s)}\}; \dots; \{a_{\tau(1), \beta}^{(1)}; a_{\tau(2), \beta}^{(2)}; \dots; a_{\tau(s), \beta}^{(s)}\}; \dots$$

$$\dots; \{a_{\tau(1), N+t}^{(1)}; a_{\tau(2), N+t}^{(2)}; \dots; a_{\tau(s), N+t}^{(s)}\}. \quad (2)$$

Тогда  $\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$  строк вида (2) образуют таблицу  $A_{1, 2, \dots, s}$  размера

$$\left[ \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^s n_i^{(j)} \times (N + t) \right] \text{ из } \prod_{j=1}^s \prod_{i=2}^N n_i^{(j)} \text{ элементов вида}$$

$$\{a_{1(1), 1}^{(1)}; a_{1(2), 1}^{(2)}; \dots; a_{1(s), 1}^{(s)}\}; \{a_{1(1), 1}^{(1)}; a_{1(2), 1}^{(2)}; \dots; a_{1(s), 2}^{(s)}\}; \dots$$

$$\dots; \left\{ a_{\prod_{i=1}^N n_i^{(1), N+t}}^{(1)}; a_{\prod_{i=1}^N n_i^{(2), N+t}}^{(2)}; \dots; a_{\prod_{i=1}^N n_i^{(s), N+t}}^{(s)} \right\}. \quad (3)$$

Из построения  $A_{1, 2, \dots, s}$  видно, что эта таблица является таблицей типа  $LO$ , откуда заключаем по теореме 3 работы [3], что таблица  $A_{1, 2, \dots, s}$  эквивалентна множеству из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{k_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где  $k_i = \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$ .

Следствие. Если существует  $s$  множеств из  $t_j$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i^{(j)}\}_{i=1, 2, \dots, N}$  каждое, то существует множество из  $t = \min_{1 \leq j < s} t_j$  ортогональных латинских

гиперпрямоугольников порядка  $\{k_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где  $k_i = \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$ .

Дополним разложение каждого из чисел  $n_i$  на простые множители  $(\sigma - r_i)$  единицами таким образом, чтобы  $p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  стояли на тех местах в (4), которые соответствуют месту  $p_{ji}$  в последовательном ряду простых чисел. Например, пусть какое-то  $n_i = 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$  и  $\sigma = 8$ , тогда новое разложение  $n_i$  будет иметь вид

$$n_i = 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 1 \cdot 1.$$

Обозначим новое разложение  $n_i$  так:

$$n_i = \prod_{j=1}^{\sigma} \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Для всех натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$  существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

$$t = \sum_{k=2}^N \min_{1 \leq i < \sigma} \left( \prod_{i=k}^N \tilde{p}_{ii}^{\alpha_{ii}} - 1 \right), \quad (5)$$

$\sigma = \max_{1 \leq i < N} r_i$ ;  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение  $n_i$  по натуральным степеням всех по порядку простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i} \neq 0$ .

Доказательство. Латинские гиперпрямоугольники порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  будем представлять с помощью таблиц размера  $(\prod_{i=2}^N n_i \times n_1)$ . Для каждого из чисел  $n_i$  существует по теореме 1.5 [1]  $t_i = \min_{1 < j < r_i} (p_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1)$  ортогональных латинских квадратов порядка  $\{n_i\}$ .

Тогда существует  $t_2 = \min_{1 < i < \sigma} (\prod_{i=2}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1)$  ортогональных латинских квадратов порядка  $\left\{ \prod_{i=2}^N n_i \right\}$ . Учитываются только те минимумы, которые

больше нуля. Аналогично существует  $t_k = \min_{1 < i < \theta} (\prod_{i=k}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1)$  ортогональных латинских квадратов порядка  $\left\{ \prod_{i=k}^N n_i \right\}$ . Теперь, используя способ построения ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , предложенный в теореме 5 [3], можно заключить, что существует множество из  $t = \sum_{k=2}^N \min_{1 < j < \sigma} (\prod_{i=k}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1)$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ .

Следствие 1. Если  $n_i = \prod_{j=1}^r p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ , то существует множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

$$t = \sum_{k=2}^N \min_{1 < i < r} \left( \prod_{i=k}^N p_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right). \quad (6)$$

Следствие 2. Если  $n_i = p^{\alpha_i}$ , где  $p$  — любое простое число, то существует множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

$$t = \sum_{k=2}^N \left( \prod_{i=k}^N p^{\alpha_i} - 1 \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \left( \prod_{i=j+1}^N n_i - 1 \right). \quad (7)$$

Следствие 3\*. Если все  $n_i = p^{\alpha} = n$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ , то существует множество из  $t$  ортогональных  $N$ -мерных латинских квадратов порядка  $\{n\}$ , где

$$t = \sum_{k=2}^N \left( \prod_{j=k}^N p^{\alpha} - 1 \right) = \sum_{j=1}^{N-1} (n^j - 1). \quad (8)$$

Теорема 3. Для любых натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

\* Результаты следствий 2 и 3 совпадают соответственно с результатами теоремы 4 [3], где дан способ построения этих множеств.



$$t = \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n_s-1} \left\{ \left[ E \left( \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=s+1}^N n_i}{k} \right] - 1 \right\} \right\}. \quad (9)$$

Доказательство теоремы 3 основано на способе «кручения» [2, 3]. В самом деле, искомые латинские гиперпрямоугольники мы представим в виде таблиц размера  $\left[ \prod_{i=2}^N n_i \times n_1 \right]$ . На первом шаге таких таб-

лиц будет  $\min_{1 \leq k \leq n_1-1} \left\{ \left[ E \left( \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right] - 1 \right\}$ . Действительно, чтобы

получить каждую новую таблицу, мы сдвигаем второй столбец предыдущей таблицы циклически вверх на один элемент, третий—на два и т. д.,  $n_1$ -й столбец сдвигается циклически вверх на  $(n_1 - 1)$  эле-

ментов. Если  $\prod_{i=2}^N n_i$  и  $k$  таковы, что целая часть  $E \left( \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right)$  не равна

частному от деления  $\prod_{i=2}^N n_i$  на  $k$ , где  $k = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ , то максимальное число таблиц будет  $\left( \prod_{i=2}^N n_i - 1 \right)$ . Если же  $\prod_{i=2}^N n_i$  и  $k$  имеют общие делители, то таблиц будет не менее, чем

$$\min_{1 \leq k \leq n_1-1} \left\{ \left[ E \left( \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right] - 1 \right\}.$$

Все сказанное будет справедливо для всех  $(N - 1)$  шагов. Учитывая все сказанное выше и способ построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , данный в теореме 5 работы [3], приходим к выводу, что существует множество из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

$$t = \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n_s-1} \left\{ \left[ E \left( \frac{\prod_{i=2}^N n_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=s+1}^N n_i}{k} \right] - 1 \right\} \right\}.$$

Следствие. Теорема 3 применима в случае, когда  $n_i \leq n_{i+1}$  и числа  $2, \dots, (n_i - 1)$  взаимно просты с  $\prod_{j=i+1}^N n_j$ . Тогда  $t = \sum_{s=1}^{N-1} \left( \prod_{i=s+1}^N n_j - 1 \right)$ .

В этом случае теорема 3 совпадает с теоремой 5 работы [3].

**Теорема 4.** Для всех натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$ , где

$$t = \min_{1 < j < \sigma} \sum_{r=2}^N \left( \prod_{i=r}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right), \quad (10)$$

$\sigma = \max_{1 < i < N} r_i$ ;  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение  $n_i$  по натуральным степеням всех по порядку простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i i} \neq 0$ .

Доказательство. Дополним разложение всех  $n_i$  по степеням простых чисел так же, как в теореме 2,  $(\sigma - r_i)$  единицами и обозначим новое разложение  $n_i$  так:  $n_i = \prod_{j=1}^{\sigma} \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}$ . Тогда при фиксированном  $j$

и  $i = 1, 2, \dots, N$  существует для последовательности чисел  $\tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}$ ;  $\tilde{p}_{j2}^{\alpha_{j2}}$ ; ...;  $\tilde{p}_{jN}^{\alpha_{jN}}$  полное множество из  $t_j$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка

$$\{\tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}\}_{i=1, 2, \dots, N}, \text{ где } t_j = \sum_{r=2}^N \left( \prod_{i=r}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right).$$

Таких множеств будет, очевидно,  $\sigma$ . Применив к ним следствие к теореме 1, мы получаем существование, по крайней мере,  $t = \min_{1 < j < \sigma} t_j$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка

$\left\{ \prod_{j=1}^{\sigma} \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} \right\}_{i=1, 2, \dots, N}$ . Теорема доказана.

Следствия к теореме 4 аналогичны следствиям к теореме 2.

**Теорема 5.** Множество ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  не может состоять более, чем из

$$t = \sum_{r=1}^{N-1} \left( \prod_{j=r+1}^N n_j - 1 \right) \quad (11)$$

гиперпрямоугольников.

Доказательство теоремы 5 с очевидностью следует из теоремы 1 работы [3].

Следствие 1. Число  $\rho$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  лежит в пределах

$$\sum_{k=2}^N \min_{1 < j < \sigma} \left( \prod_{i=k}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right) \leq \rho \leq \sum_{r=1}^{N-1} \left( \prod_{j=r+1}^N n_j - 1 \right). \quad (12)$$

Это утверждение получено из теорем 2 и 5. А учитывая следствие 4 теоремы 2 и теорему 5, мы имеем право утверждать, что для  $N \geq 2$

$$N - 1 \leq \rho \leq \sum_{r=1}^{N-1} \left( \prod_{j=r+1}^N n_j - 1 \right). \quad (13)$$

Совершенно ясно, что на месте нижней границы значения  $\rho$  в (12) может стоять величина числа  $t$ , взятого из теоремы 3, или теоремы 4.

Итак, мы доказали ряд предложений, которые позволяют строить множества ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  для произвольной последовательности натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_N$ , при этом для одного набора чисел  $n_i$  большее число гиперпрямоугольников позволяет построить теорема 2, для другого—теорема 3, для третьего—теорема 4.

Далее мы сформулируем и докажем ряд теорем, которые позволяют строить множества ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_i\}_{i=1, 2, \dots, \sigma}$  для последовательности натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_N$ , где  $\sigma$ , вообще говоря, может быть любым натуральным числом, не равным  $N$ .

Дополним разложение  $n_i$  по степеням простых чисел  $(\sigma - r_i)$  множителями единица таким образом, чтобы число всех множителей в разложении  $n_i$  было равно  $\sigma$ :

$$n_i = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{(\sigma - r_i) \text{ раз}} \cdot \bar{p}_{\sigma - r_i + 1, 1}^{\alpha_{\sigma - r_i + 1, 1}} \cdot \dots \cdot \bar{p}_{\sigma i}^{\alpha_{\sigma i}}, \quad (14)$$

где  $\bar{p}_{\sigma - r_i + 1, 1}^{\alpha_{\sigma - r_i + 1, 1}} = p_{1i}^{\alpha_{1i}}; \dots; \bar{p}_{\sigma i}^{\alpha_{\sigma i}} = p_{r_i i}^{\alpha_{r_i i}}$ ; в разложении  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$ .

**Теорема 6.** Если  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) есть разложение произвольного натурального числа  $n_i$  по степеням всех по порядку различных простых чисел  $p_{ji}$ , имеющих  $\alpha_{ji} \neq 0$ , до наибольшего простого числа, имеющего

$$\alpha_{r_i i} \neq 0, \quad (15)$$

$$p_{ji}^{\alpha_{ji}} \leq \prod_{s=j+1}^{r_i} p_{si}^{\alpha_{si}}, \quad (16)$$

$$\sigma = \max_{1 < i < N} r_i, \quad (17)$$

$$t_i = \sum_{j=2}^{\sigma} \min_{j < k < \sigma} (\bar{p}_{ki}^{\alpha_{ki}} - 1), \quad (18)$$

$$t = \min_{1 < i < N} t_i, \quad (19)$$

то существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1, 2, \dots, \sigma}$ , где

$$m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Пусть  $r_i \neq r_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ) и  $\sigma = \max_{1 < i < N} r_i$ .

Итак, теперь

$$n_i = \prod_{j=1}^{\sigma} \bar{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}. \quad (21)$$

Тогда, если представить для каждого  $n_i$  латинский гиперпрямоугольник порядка  $\{\bar{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}\}_{j=1, 2, \dots, \sigma}$  в виде таблицы размера  $\left(\prod_{j=2}^{\sigma} \bar{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} \times \bar{p}_{1i}^{\alpha_{1i}}\right)$ , то, используя способ построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{\bar{p}_{ji}^{\alpha_{ji}}\}_{j=1, 2, \dots, \sigma}$  предложенный в теореме 5 [3], и теорему 1.5 [1], мы получим для каждого  $n_i$  существование, по крайней мере,  $t_i$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка

$\{\bar{p}_{ji}^{\alpha}\}_{j=1,2,\dots,\sigma}$ , причем учитываются только  $\min_{i < k < \sigma} (\bar{p}_{ki}^{\alpha} - 1) > 0$ . Поскольку это утверждение справедливо для каждого  $i = 1, 2, \dots, N$ , то согласно следствию к теореме 1 существует множество из  $t = \min_{1 < i < N} t_i$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1,2,\dots,\sigma}$ , где  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha}$ . Теорема доказана.

**Теорема 7.** Если 1)  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) есть разложение произвольного натурального числа  $n_i$  по степеням всех по порядку различных простых чисел  $p_{ji}$ , имеющих  $\alpha_{ji} \neq 0$ , до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i i} \neq 0$ ; 2)  $p_{ji}^{\alpha} \leq \prod_{s=i+1}^N p_{si}^{\alpha}$ ; 3)  $\sigma = \max_{1 < i < N} r_i$ ; 4)  $t = \sum_{k=2}^{\sigma} \min_{1 < j < t_k} (u_{jk}^{\gamma} - 1)$ , то существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1,2,\dots,\sigma}$ , где  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha}$ .

**Доказательство.** Пусть существуют  $r_i \neq r_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) и  $\sigma = \max_{1 < i < N} r_i$ . Представим разложение  $n_i$  на простые множители так

же, как в теореме 6, в виде (21):  $n_i = \prod_{j=1}^{\sigma} \bar{p}_{ji}^{\alpha}$ . Построим новые натуральные числа  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha}$  и  $\prod_{s=k}^{\sigma} m_s$ , где  $k = 2, 3, \dots, \sigma$ . Пусть  $\prod_{s=k}^{\sigma} m_s =$

$= \prod_{j=1}^{t_k} u_{jk}^{\gamma}$  есть разложение натуральных чисел  $\prod_{s=k}^{\sigma} m_s$  ( $k = 2, 3, \dots, \sigma$ ) по натуральным степеням  $\gamma_{jk}$  простых чисел  $u_{jk}$ . Тогда, если представить искомые латинские гиперпрямоугольники порядка  $\{m_s\}_{s=1,2,\dots,\sigma}$

в виде таблиц размера  $\left[ \prod_{s=2}^{\sigma} m_s \times m_1 \right]$  то, используя способ построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1,2,\dots,\sigma}$ , предложенный в теореме 5 работы [3] и теорему 1.5 работы [1], мы получим существование  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка

$\{m_s\}_{s=1,2,\dots,\sigma}$ , где  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha}$  и  $t = \sum_{k=2}^{\sigma} \min_{1 < j < t_k} (u_{jk}^{\gamma} - 1)$ . Теорема доказана.

**Теорема 8.** Если  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha}$  есть разложение (14);

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j; \quad \sigma = \max_{1 < i < N} r_i;$$

$$t = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \left\{ \min_{1 < k < m_{s-1}} \left[ E \left( \frac{\prod_{i=s+1}^{\sigma} m_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=s+1}^{\sigma} m_i}{k \dots} \right] - 1 \right\},$$

то существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1, 2, \dots, \sigma}$ , где  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}$ .

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 3.

Если  $\prod_{i=2}^{\sigma} m_i$  и  $k$  таковы, что целая часть  $E \left( \frac{\prod_{i=2}^{\sigma} m_i}{k} \right) \neq \frac{\prod_{i=2}^{\sigma} m_i}{k}$ ,

где  $k = 1, 2, \dots, m_1 - 1$ , то максимальное число таблиц будет  $\left( \prod_{i=2}^{\sigma} m_i - 1 \right)$ .

Если же  $\prod_{i=2}^{\sigma} m_i$  и  $k$  имеют общие делители, то таблиц будет не менее, чем

$$\min_{1 < k < m_1 - 1} \left\{ \left[ E \left( \frac{\prod_{i=2}^{\sigma} m_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=2}^{\sigma} m_i}{k} \right] - 1 \right\}.$$

Все сказанное справедливо для всех  $(\sigma - 1)$  шагов. Учитывая также способ построения латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1, 2, \dots, \sigma}$ , данный в теореме 5 работы [3], приходим к выводу, что существует множество, по крайней мере, из  $t$  ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{m_s\}_{s=1, 2, \dots, \sigma}$ , где  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}$ ,

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, изд. Мир, М., 1966
2. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1569, 1576 (1967).
3. Т. Н. Эйнгорина, М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, (1969).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

#### TO THE EXISTENCE OF SETS OF ORTHOGONAL LATIN HYPER-RECTANGLES

*T. N. Eyngorina*

A number of existence theorems for sets of orthogonal Latin hyper-rectangles of  $\{n_i\}_{i=1, 2, \dots, N}$  order for arbitrary natural numbers  $N, n_1, n_2, \dots, n_N$  are proved.

УДК 681.142.6

## К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОЖЕСТВ ПРОШИВОК МНОГОМЕРНЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ ИЛИ ДЕШИФРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Т. Н. Эйнгорина, М. Я. Эйнгорин

Рассмотрена задача о существовании множеств прошивок многомерных запоминающих или дешифрующих устройств для произвольных натуральных чисел  $N$  и  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

Одним из путей, ведущих к улучшению основных параметров электронных вычислительных машин, является построение многомерных запоминающих устройств и дешифраторов.

К множеству задач, возникающих в теории многомерных запоминающих и дешифрующих устройств, принадлежит задача об отыскании максимального числа и вида прошивок многомерной запоминающей матрицы любого порядка, элементы которых удовлетворяют условиям однозначности чтения и записи информации.

Задача эта рассматривалась ранее только для случая плоской квадратной матрицы [1-6]. Кроме того, основным требованием, которое предъявлялось к искомому множеству прошивок, было требование простоты его дешифрации. Например, в работе [4] показывалось, что в случае плоской матрицы размера  $(n \times n)$  с учетом требования простоты дешифрации таких систем прошивок в совокупности не может быть более, чем  $\min_{1 \leq i \leq s} (p_i + 1)$ , где  $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$  есть разложение

числа  $n$  по натуральным степеням  $\alpha_i$  простых чисел  $p_i$ . Работа [5] посвящена отысканию метода построения геометрии прошивок (обладающих более простой дешифрацией, чем в [4]) квадратной ферритовой матрицы порядка  $n=2^m$  для запоминающего устройства с  $K$ -кратным совпадением токов для  $K \leq 2m + 1$  при помощи аппарата вектор-функций алгебры логики.

В работе [6] дан способ построения максимальной системы прошивок для случая  $n$ , являющегося простым числом.

Наша же задача—задача отыскания максимального числа и вида прошивок многомерной запоминающей матрицы любого порядка, элементы которых удовлетворяют условиям однозначности чтения и записи информации. Она непосредственно связана с задачей о существовании и нахождении множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников того же порядка, что и запоминающие матрицы. Эта связь была установлена в работах [7-9].

Авторами были найдены способы построения полного и максимального множества элементов прошивок  $\{M\}_N$  для значений  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), удовлетворяющих следующим условиям:

1)  $n_i = p^{\alpha_i}$ , где  $p$ —любое простое число,  $\alpha_i = 1, 2, \dots$ ,  $n_1 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq n_N$ ;

2) числа  $2, 3, \dots, (n_i - 1)$  взаимно просты с  $\prod_{j=i+1}^N n_j$  и  $n_1 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq n_N$ ;  
 3)  $n_2$  — степень любого простого числа, а  $n_1$  — любое натуральное число  $n_1 \leq n_2$ .

В этой статье будут найдены для практически произвольных натуральных чисел  $n_i$  и  $N \geq 2$  полные множества элементов прошивок  $\{M\}_N$ , обладающие одной общей особенностью, — число прошивок, получающихся из этих множеств, всегда больше  $N$ . Мы рассматриваем общий случай, когда запоминающая матрица  $\{M^*\}_N$  состоит из  $\prod_{i=1}^N n_i$  запоминающих элементов (ЗЭ), а элементы прошивок — из  $n_i$  ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_N$ .

В работах [7–9] была установлена связь между ортогональными латинскими гиперпрямоугольниками порядка  $\{n_i\}_{i=1,2, \dots, N}$  и прошивками многомерных запоминающих матриц того же порядка, т. е. был предложен способ построения системы прошивок для многомерных запоминающих матриц размера  $\{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N\}$  с помощью множества ортогональных латинских гиперпрямоугольников порядка  $\{n_i\}_{i=1,2, \dots, N}$ .

В работе [10] были рассмотрены теоремы о существовании множеств ортогональных латинских гиперпрямоугольников любого порядка. Таким образом, учитывая результаты работы [10], с одной стороны, и результаты работ [7–9, 11] с другой, легко провести доказательство аналогичных теорем о существовании множеств прошивок запоминающего или дешифрующего гиперпрямоугольника любого порядка.

**Теорема 1.** Если существует  $s$  полных множеств  $\{M_j\}_N$ , элементы которых состоят из  $n_i^{(j)}$  ЗЭ матрицы  $\{M_j^*\}_N$  и составляют соответственно каждое  $K$  прошивок, то существует полное множество  $\{\widetilde{M}\}_N$ , элементы которого состоят из  $b_i = \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$  ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_N = \prod_{j=1}^s \{M_j^*\}_N$ , содержащей  $\prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^N n_i^{(j)}$  элементов и составляют  $K$  прошивок, где  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**Следствие.** Если существует  $s$  полных множеств  $\{M_j\}_N$ , элементы которых состоят из  $n_i^{(j)}$  ЗЭ матрицы  $\{M_j^*\}_N$  и составляют соответственно каждое  $K_j$  прошивок, то существует полное множество  $\{M\}_N$ , элементы которого состоят из  $b_i$  ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_N = \prod_{j=1}^s \{M_j^*\}_N$ , содержащей  $\prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^N n_i^{(j)}$  элементов и составляют  $K$  прошивок, где  $K = \min_{1 < j < s} K_j$ ,  $b_i = \prod_{j=1}^s n_i^{(j)}$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**Теорема 2\*.** Для всех натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , существует множество  $\{M\}_N$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + N)$  прошивок, где

\* Числа  $\widetilde{p}_{jt}^{\alpha}$  в теоремах 2, 4 взяты из формулы (4) работы [10].

$$t = \sum_{r=2}^N \min \left( \prod_{i=r}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right), \quad \sigma = \max_{1 < i < N} r_i,$$

$n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение  $n_i$  по натуральным степеням всех по порядку простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i i} \neq 0$ .

Следствие 1. Теорема 2 применима в случае, когда все  $n_i = \prod_{j=1}^r p_{ji}^{\alpha_{ji}}$ ; тогда

$$t = \sum_{s=2}^N \min \left( \prod_{i=s}^N p_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right).$$

Следствие 2. Теорема 2 применима в случае, когда  $n_i = p^{\alpha_i}$ , где  $p$  — любое простое число,  $\alpha_i = 1, 2, \dots$ ; тогда

$$t = \sum_{j=1}^{N-1} \left( \prod_{i=j+1}^N n_i - 1 \right).$$

Следствие 3. Теорема 2 применима в случае, когда  $n_i = p^\alpha = n$ ; тогда

$$t = \sum_{j=1}^{N-1} (n^j - 1).$$

Теорема 3\*. Для любых натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ ,

где  $i = 1, 2, \dots, N$ , существует множество  $\{M\}_N$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + N)$  прошивок, где

$$t = \sum_{s=1}^{N-1} \left\{ \min_{1 < k < n_{s-1}} \left\{ E \left( \frac{\prod_{i=s+1}^N n_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=s+1}^N n_i}{k} \right\} - 1 \right\}.$$

Следствие. Теорема 4 применима в случае, когда  $n_1 \leq \dots \leq n_N$  и числа  $2, \dots, (n_i - 1)$  взаимно просты с  $\prod_{j=i+1}^N n_j$ . Тогда  $t = \sum_{s=1}^{N-1} \left( \prod_{i=s+1}^N n_i - 1 \right)$

и  $k = \sum_{j=1}^N \prod_{i=j+1}^N n_i$ , если  $\prod_{i=1}^N n_i = 1$ .

Теорема 4. Для любых натуральных чисел  $n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , существует множество  $\{M\}_N$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + N)$  прошивок, где

$$t = \min_{1 < j < \sigma} \sum_{r=2}^N \left( \prod_{i=r}^N \tilde{p}_{ji}^{\alpha_{ji}} - 1 \right), \quad \sigma = \max_{1 < i < N} r_i,$$

\* Преимуществом теоремы 3 по сравнению с теоремой 2 является простота способа построения  $K$  прошивок методом «кручения».



$n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение  $n_i$  по натуральным степеням всех по порядку простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i} \neq 0$ .

З а м е ч а н и е. Следствия к теореме 4 аналогичны следствиям к теореме 2.

*Теорема 5.* Любое полное множество  $\{M\}_N$  содержит элементы  $K$  прошивок, где

$$(2N - 1) \leq K \leq \sum_{s=1}^N \prod_{i=s+1}^N n_i, \text{ где } \prod_{i=N+1}^N n_i = 1.$$

*Теорема 6.* При  $N \rightarrow \infty$  для произвольных  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )  $K \rightarrow K_{\max}$ , где  $K_{\max} = \sum_{s=1}^N \prod_{i=s+1}^N n_i$ . Доказательство легко провести методом «кручения».

*Теорема 7\*.* Если  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение произвольного натурального числа  $n_i$  по степеням всех по порядку различных простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего простого числа, имеющего  $\alpha_{r_i} \neq 0$ ,  $p_{ji}^{\alpha_{ji}} \leq \prod_{s=j+1}^{r_i} p_{si}^{\alpha_{si}}$ , то существует множество  $\{M\}_\sigma$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + \sigma)$  прошивок, каждый из которых состоит из  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}$  ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_\sigma$ ,

где

$$t = \min_{1 < i < N} t_i, \quad t_i = \sum_{j=2}^{\sigma} \min_{j < k < \sigma} (\bar{p}_{ki}^{\alpha_{ki}} - 1), \quad \sigma = \max_{1 < i < N} r_i, \quad s = 1, 2, \dots, \sigma.$$

*Теорема 8\*.* Если  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) есть разложение произвольного натурального числа  $n_i$  по степеням всех по порядку различных простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего, имеющего  $\alpha_{r_i} \neq 0$ ,

$$p_{ji}^{\alpha_{ji}} \leq \prod_{s=j+1}^{r_i} p_{si}^{\alpha_{si}},$$

то существует множество  $\{M\}_\sigma$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + \sigma)$  прошивок, каждый из которых состоит из  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}$

ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_\sigma$ , где  $t = \sum_{k=2}^{\sigma} \min_{1 < j < t_k} (u_{jk}^{\gamma_{jk}} - 1)$ ,  $\sigma = \max_{1 < i < N} r_i$ ,  $\prod_{s=k}^{\sigma} m_s =$

$= \prod_{j=1}^{t_k} u_{jk}^{\gamma_{jk}}$  есть разложение натуральных чисел  $\prod_{s=k}^{\sigma} m_s$  ( $k = 2, 3, \dots, \sigma$ ) по натуральным степеням  $\gamma_{jk}$  простых чисел  $u_{jk}$ ,  $s = 1, 2, \dots, \sigma$ .

\* Числа  $\bar{p}_{ik}^{\alpha_{ik}}$  в теоремах 7—9 взяты из формулы (14) работы [10].

**Теорема 9\*.** Если  $n_i = \prod_{j=1}^{r_i} p_{ji}^{\alpha_{ji}}$  есть разложение произвольного натурального числа  $n_i$  по степеням всех по порядку различных простых чисел  $p_{ji}$  до наибольшего, имеющего  $\alpha_{r_i i} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$n_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j,$$

то существует множество  $\{M\}_\sigma$ , содержащее элементы, по крайней мере,  $K = (t + \sigma)$  прошивок, каждый из которых состоит из  $m_s = \prod_{i=1}^N \bar{p}_{si}^{\alpha_{si}}$

ЗЭ матрицы  $\{M^*\}_\sigma$ , где  $s = 1, 2, \dots, \sigma$ ,

$$\sigma = \max_{1 < i < N} r_i, \quad t = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \left\{ \min_{1 < k < n_s - 1} \left\{ E \left( \frac{\prod_{i=s+1}^{\sigma} m_i}{k} \right) = \frac{\prod_{i=s+1}^{\sigma} m_i}{k} \right\} - 1 \right\}.$$

Доказательство теорем легко провести, опираясь на результаты работ [7-10]. Заметим только, что доказательство теорем 2, 4, 7, 8 и построение прошивок основано на факте существования полей Гаула для любой целой положительной степени простого числа. Доказательство теорем 3, 9 основано на способе «кручения», который позволяет строить прошивки запоминающей матрицы размера  $(n_1 \times \dots \times n_N)$  в виде таб-

лиц  $\|a_{xy}\|$  размера  $\left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N n_i \times n_j \right)$ , где  $i, j = 1, \dots, N$ , причем строки

таблиц являются элементами соответствующей прошивки. Элементы  $a_{xy}$  находятся по следующему правилу:

$$a_{xy} = \begin{cases} 1 + \prod_{j=i+1}^N n_j (x-1 + kn_j) + [\bar{y} + (\omega_i - 1)(x-1) - 1] \bmod \prod_{j=i+1}^N n_j & \text{для } 1 \leq i \leq N-1 \\ (y-1)n_N + x & \text{для } i = N \end{cases},$$

где  $a_{xy}$  — элемент с координатами  $(x, y)$  в таблице  $\|a_{xy}\|$ ,  $x$  — номер столбца,  $1 \leq x \leq n_i$ ,  $y$  — номер строки,  $1 \leq y \leq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N n_j$ ,  $i$  — номер шага;

$1 \leq i \leq N$ ;  $y$  — значение  $a_{1y}$ ; если  $y = k \prod_{j=i+1}^N n_j + s$ , то  $\bar{y} = k \prod_{j=i}^N n_j + s$ ;

$1 \leq s \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ ;  $0 \leq k \leq \prod_{j=1}^{i-1} n_j - 1$ ; если  $i = 1$ , то  $y = \bar{y}$  и  $k = 0$ ;

$\omega_i$  — номер таблицы на  $i$ -м шаге;  $1 \leq \omega_i \leq \prod_{j=i+1}^N n_j$ ;  $N \geq 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. N. M. Blachman, IRE Trans. Electronic Comput., 5, № 1, 19 (1956).
2. А. Хальд, Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, М., 1956 стр. 434.

3. H. B. Mann, Analysis and design of Experiments, The Dover Series, Dover publications inc., New York, 1949.
4. R. L. Ashenurst, R. C. Minnick, Harvard Computation Laboratory, Bell Laboratories Report, Theory of Switching, № 4 (1953).
5. В. И. Собельман, Проблемы кибернетики, вып. 6, Физматгиз, М., 1961.
6. Ю. Л. Кетков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 1, 173 (1961).
7. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1569 (1967)
8. М. Я. Эйнгорин, Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1576 (1967).
9. Т. Н. Эйнгорина, М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, (1969).
10. Т. Н. Эйнгорина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, (1969),
11. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 7, 1015 (1967).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете.

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.

## TO THE EXISTENCE OF SETS OF STITCHES FOR MULTIDIMENSIONAL ' MEMORIES OR DECODERS

*T. N. Eyngorina, M. Ya. Eyngorin*

The paper presents the consideration of existence problem for sets of stitches for multidimensional memories or decoders for arbitrary natural numbers  $N$  and  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

---

УДК 681.327 66 + 536.24

**АНАЛИЗ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТОДОВ СНИЖЕНИЯ САМОРАЗОГРЕВА КУБА МАТРИЧНОГО ФЕРРИТОВОГО ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА**

*В. А. Улитовский*

Анализируется температурное поле саморазогрева куба запоминающего устройства при наличии пластин теплового заземления.

Анализ саморазогрева куба матричного запоминающего устройства (ЗУ) при равномерном опросе адресов показал [3], что температура периферии куба  $\Theta_c(L_0)$  и перегрев центра куба относительно его периферии могут быть найдены из соотношений

$$\Theta_c(L_0) = \frac{W_p}{\pi} \left( \frac{F_2 \gamma_{уд}^{13/8}}{A_1 D^{3/8} \gamma_{рд}^2} + \sqrt{\frac{z}{A_1 F_1 \lambda}} \frac{\gamma_n F_4 F_3}{D^{3/16}} \right),$$

$$\Theta_c(0) - \Theta_c(L_0) = \frac{W_p}{\pi} \left[ \frac{z \gamma_n^2 F_2}{2 \gamma_{рд}^2 \lambda} + \sqrt{\frac{z}{A_1 F_1 \lambda}} \frac{\gamma_n F_3 (1 - F_4)}{D^{3/16}} \right], \tag{1}$$

где  $W_p$  — погонная плотность источника тепловой мощности в разрядной шине,  $z$  — адресность ЗУ,  $\lambda$  — теплопроводность материала шин,  $A_1$  — конвективный параметр охлаждающей среды [1],  $D$  — наружный диаметр ферритового сердечника,  $\gamma_n$  — отношение шага между тороидами к диаметру  $D$ ,  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  — безразмерные функции конструктивных параметров ЗУ.

Величина  $\Theta_c(L_0)$  зависит от  $A_1$  и может быть существенно уменьшена при использовании соответствующих охлаждающих сред. Основная часть величины  $\Theta_c(0) - \Theta_c(L_0)$  не зависит от  $A_1$  и ее уменьшение достигается введением в конструкцию куба ЗУ теплового заземления в виде передающих тепло стержней, сеток, плоских пластин, связанных с периферией куба ЗУ.

Проанализируем роль теплового заземления в виде плоской пластины толщиной  $h = \gamma_2 D$ , параллельной плоскости разрядных плат куба ЗУ. На рис. 1 представлена правая часть центрального сечения разрядной платы с началом координат в центре платы. Вдоль шины  $P_{ш}$  действует распределенный источник

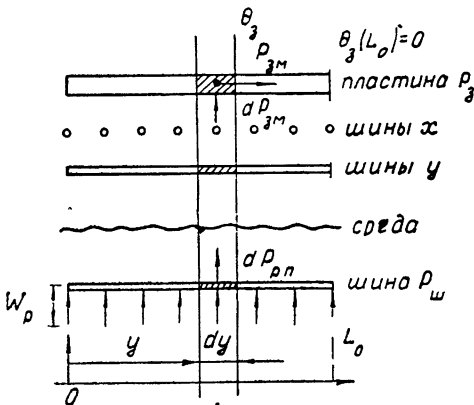


Рис. 1. Распространение тепловой мощности в центральном сечении разрядной платы при наличии пластины теплового заземления.

тепловой мощности с погонной плотностью

$$W_p = \pi \cdot 10^{-6} \rho f_n^2 \frac{QS_{W3D}^2 \eta}{(2 - \xi_{3D})^2} \frac{f}{f_n} \frac{(1 + \gamma)^2}{\gamma_{рд}^2}, \quad (2)$$

где  $f_n$  и  $f$  — номинальная и фактическая частоты обращения к ЗУ,  $Q$  — номинальная скважность координатного импульса тока записи,  $S_{W3D}$  — коэффициент скорости переключения феррита в режиме матричного ЗУ,  $\xi_{3D}$  — отношение максимально допустимого поля возбуждения к полю старта,  $\eta$  — доля нулей в кодах разряда,  $\gamma$  — отношение внутреннего диаметра тороида к внешнему,  $\rho = 0,0175 \text{ ом} \cdot \text{мм}^2 \cdot \text{м}^{-1}$ .

Пластина теплового заземления  $P_3$  обладает большой тепловой проводимостью, что позволяет существенно облегчить анализ процессов, пренебрегая проводимостью всех шин возбуждения. Условие пренебрежимости проводимостью шины  $P_{ш}$   $P_{рп} = 0$  соответствует  $\theta_c \neq f(\gamma_{рд})$ , что выполняется при  $\gamma_{уд} \rightarrow \infty$  [3]. Условие  $\gamma_{уд} \rightarrow \infty$  означает высокую теплопроводность шин и их малое конвективное сопротивление. Второе условие не является необходимым для  $P_{рп} \rightarrow 0$ . Следовательно, необходимым и достаточным является лишь условие высокой теплопроводности. При наличии пластины  $P_3$  это условие сводится к уравнению

$$\lambda_3 \gamma_2 \gamma_{л} D^2 \gg \frac{\pi}{4} \gamma_{уд}^2 D^2 \lambda, \quad (3)$$

что при металлической пластине  $P_3$  обычно выполняется достаточно хорошо. Условие  $P_{рп} = 0$  позволяет сократить порядок дифференциальных уравнений с четвертого до второго.

Процесс передачи мощности из шины  $P_{ш}$  в пластину  $P_3$  можно представить как процесс передачи тепла в ограниченном пространстве в узких щелях. Поверхностью, испускающей тепло, является тонкая сеть проводников  $P_{ш}$ . Поверхностью, принимающей тепловую мощность, является пластина  $P_3$ . Поскольку форма этих двух поверхностей весьма различна, рассмотрим отдельно передачу тепла этими поверхностями. Поверхность шин  $P_{ш}$  является весьма редкой сеткой цилиндрических стержней. Передача мощности из шин  $P_{ш}$  в среду может быть определена из условий передачи тепла уединенными цилиндрическими стержнями в бесконечной среде

$$dP_{рк} = W_p dy = \alpha_{кр} (\theta_p - \theta_c) \pi D \gamma_{рд} dy, \quad (4)$$

где  $\alpha_{кр}$  — конвективный коэффициент стержня круглого сечения [1]

$$\alpha_{кр} = A_1 (\theta_p - \theta_c)^{1/8} D^{-5/8} \gamma_{рд}^{-5/8}, \quad (5)$$

$\theta_p$ ,  $\theta_c$  — температура шины  $P_{ш}$  и среды.

Представим передачу мощности из среды в пластину  $P_3$  в соответствии с моделью передачи тепла в щелях [1]

$$dP_{зм} = K (\theta_1 - \theta_3) D \gamma_{л} dy, \quad (6)$$

где  $dP_{зм}$  — поток конвективной мощности в пластине  $P_3$  на элементарном участке  $D \gamma_{л} dy$ ,  $\theta_1$  — температура воображаемой противоположной пластины, образующей щель с пластиной  $P_3$ . Для двух симметричных пластин

$$\theta_1 - \theta_3 = 2(\theta_c - \theta_3). \quad (7)$$

Мощность в узких щелях передается по нормали к поверхностям, что сводит условие непрерывности потока мощности к уравнению

$$dP_{зм} = dP_{рк} = W_p dy. \quad (8)$$

Эквивалентная теплопроводность среды в щелях  $K$  при критериальном условии  $(Gr \cdot Pr) > 1000$ , соответствующем передаче тепла в любом направлении, кроме вертикально вниз, определяется формулой

$$K = A_4 \lambda_f \sqrt[4]{\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{l}} \simeq A_4 \lambda_f \sqrt[4]{\frac{2(\Theta_c - \Theta_3)}{\gamma_3 D}}, \quad (9)$$

где  $A_4$  — функция физических параметров среды [1],  $\lambda_f$  — теплопроводность среды,  $l \simeq \gamma_3 D$  — ширина щели. Для воздуха произведение  $A_4 \lambda_f = 0,453 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-7/4} \cdot \text{град}^{-5/4} \simeq \text{const}$  в диапазоне  $0-1000^\circ\text{C}$ .

Подставляем (7)–(9) в (6) и, используя (2), получим

$$\begin{aligned} \Theta_c - \Theta_3 &= \frac{W_p^{4/5} \gamma_3^{1/5}}{2(A_4 \lambda_f)^{4/5} D^{3/5} \gamma_n^{4/5}} = \\ &= \left[ \pi \cdot 10^{-6} \rho f_n^2 \frac{Q S_{W3D}^2 \eta}{(2 - \xi_{3D})^2} \frac{f}{f_n} \frac{(1 + \gamma)^2}{\gamma_{pд}^2} \right]^{4/5} \times \\ &\quad \times \frac{\gamma_3^{1/5}}{2(A_4 \lambda_f)^{4/5} D^{3/5} \gamma_n^{4/5}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что (8) не содержит  $y$ , что соответствует постоянству разности температур  $\Theta_c - \Theta_3$  в плоскости платы (10).

Найдем температурное поле пластины  $P_3$ . Квадратная пластина  $P_3$  имеет распределенный по ее плоскости источник тепловой мощности

$$W_s = W_p / D \gamma_n. \quad (11)$$

Температура периферии пластины равна температуре среды, окружающей куб ЗУ,  $\Theta_3(L_0) = 0$ . Процесс распространения тепловой мощности в пластине с источниками описывается уравнением Пуассона и условиями на границе [2]

$$\frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial y^2} = - \frac{W_s}{\lambda_3 D \gamma_2}. \quad (12)$$

С целью решения задачи в общем виде (в ущерб точности) рассмотрим два вырожденных случая уравнения Пуассона, содержащего одну переменную: процесс в пластине бесконечной длины вдоль оси  $x$  и шириной  $2L_0$  вдоль оси  $y$  и процесс в круглом диске с радиусом  $L_0$ . В длинной пластине выделим участок вдоль оси  $y$  шириной  $dx$  и рассмотрим в нем элемент  $dx dy$ :

$$dP_y = W_s dx dy, \quad (13)$$

$$d\Theta_{пл} = - P_y \frac{dy}{\lambda_3 D \gamma_2 dx} = - W_s \frac{y dy}{\lambda_3 D \gamma_2}. \quad (14)$$

Интегрируя (14), получим

$$\Theta_{пл} = \frac{W_p (L_0^2 - y^2)}{2\lambda_3 D^2 \gamma_2 \gamma_n}. \quad (15)$$

Для круглого диска рассмотрим тороидальный элемент радиуса  $r$  и шириной  $dr$ . Решение уравнения для круглого диска имеет вид, отличающийся от (15) лишь постоянным множителем. Представим объединенное решение в виде

$$\Theta_j = \frac{W_p M_j}{\lambda_3 D^2 \gamma_2 \gamma_n} (L_0^2 - y^2), \quad (16)$$

где  $M_j$  для пластины  $M_{пл}$  равно 1/2, для круга  $M_{кр}$  равно 1/4. Квадрат занимает промежуточное положение между кругом и удлиненной пластиной. Будем считать, что процессы в центральном сечении квадрата списываются (16) при условии  $M_{кв} \approx 1/3$ . Подставим (2) в (16) и, учитывая

$$L_0 = \frac{\sqrt{z} D \gamma_{л}}{2}, \quad (17)$$

получим для центрального сечения

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= \frac{W_p M_{кв}}{\lambda_3 D^2 \gamma_2 \gamma_{л}} (L_0^2 - y^2) \approx \\ &\approx \left[ \pi \cdot 10^{-6} \rho f_n^2 \frac{QS_{W3D}^2 \eta}{(2 - \xi_{3D})^2} \frac{f}{f_n} \frac{(1 + \gamma)^2}{\gamma_{рл}^2} \right] \frac{1}{3 \lambda_3 \gamma_2 \gamma_{л}} \left( \frac{z \gamma_{л}^2}{4} - \frac{y^2}{D^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Температура среды и ферритов в ЗУ с пластиной теплового заземления равна

$$\Theta_c = (\Theta_c - \Theta_3) + \Theta_3. \quad (19)$$

Анализируя (10) и (18), видим, что  $\Theta_c$  состоит из суммы двух величин, одна из которых  $\Theta_c - \Theta_3$  не зависит от координаты точки на плате ЗУ и зависит от конвективных свойств среды  $A_4 \lambda_f$ , а другая подчиняется параболическому закону и зависит от свойств теплового заземления  $\lambda_3 \gamma_2$ .

Рассмотрим частный случай — многоотверстная ферритовая пластина в роли теплового заземления. Представим (3) при условии  $\gamma_2 = \gamma_1$ , где  $\gamma_1$  — отношение высоты тороида к его внешнему диаметру, в виде

$$\frac{4 \lambda_3 \gamma_1 \gamma_{л}}{\pi \gamma_{уд}^2 \lambda} \approx \frac{4 \cdot 1 \cdot 0,35 \cdot 2}{\pi \cdot 10^{-2} \cdot 380} = 0,24. \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует, что ферритовая пластина — весьма плохое тепловое заземление. В первом приближении по материалу пластины распространяется около 19% мощности, более точные результаты дает решение уравнений (1) и (19). Если печатной обмоткой является шина  $P_{ш}$ , то пластина имеет температуру этой шины, что увеличивает ее саморазогрев.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Дульнев, Теплообмен в радиоэлектронных устройствах, ГЭИ, М., 1963.
2. А. В. Лыков, Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1952.
3. В. А. Улитовский. Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), вып. 78, 55 (1968).

Ленинградский электротехнический институт  
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию  
16 сентября 1968 г.

AN ANALYSIS OF CONSTRUCTIVE METHODS TO REDUCE  
SELF-UPWARMING OF A STACK OF A FERRITE MEMORY MATRIX

V. A. Ulitovsky

This article presents an analysis of self-upwarming temperature-field of a memory stack with thermal earthing plates.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 531.391

**ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СЕРВОМЕХАНИЗМОВ**

*Е. Е. Шорников, А. П. Панков, Г. П. Елецкая, Н. Н. Катуркин*

В пневматических сервомеханизмах широко применяется пропорциональный электромеханический преобразователь (ЭМП), представляющий собой динамическую систему и содержащий электромагнит (ЭМ). При проектировании сервомеханизмов для рационального выбора конструкции электромагнита ЭМП необходимо иметь зависимость его статических и динамических характеристик от конструктивных параметров для различных схем магнитной цепи.

Типичные схемы ЭМП приведены на рис. 1, где приняты обозначения:  $\alpha$  — угол поворота якоря ЭМ;  $J$  — момент инерции якоря;  $f$  — коэффициент демпфирования;  $U_0$ ,

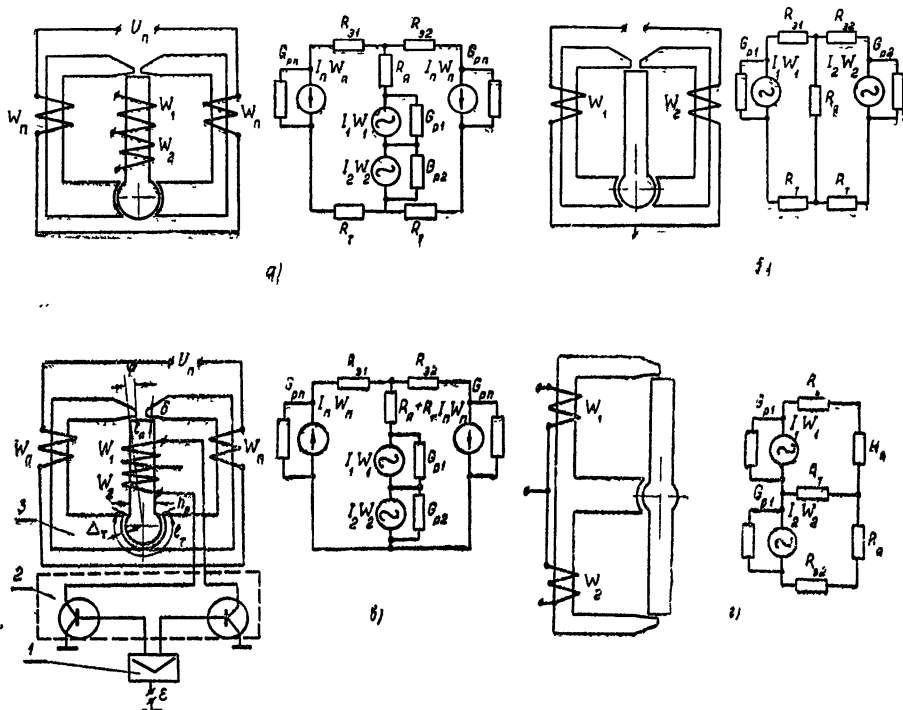


Рис. Конструкции и схемы замещения магнитных цепей электромеханического преобразователя: 1—усилитель напряжения с коэффициентом усиления  $k_u$ , 2—усилитель мощности с коэффициентом усиления  $\mu$ , 3—электромагнит.

$U_1, U_2, U_n, I_1, I_2, I_n$  — напряжения и токи обмоток;  $\epsilon$  — ошибка рассогласования сервомеханизма;  $\varphi, l_T, \Delta_T, \delta, h_{я}, l_{я}, d_{я}$  — конструктивные размеры ЭМ;  $r_1, r_2, r_n$  — сопротивления обмоток,  $E_n, R_n$  — ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока поляризации;  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_{1n}, \Psi_{2n}$  — потокоцепления обмоток;  $R_{я}, R_T, R_n$  — магнитные сопротивления,  $W_1, W_2, W_n$  — числа витков обмоток, индексы 1, 2, n означают параметры первой, второй обмоток управления и обмотки поляризации; 0 — значения



параметров в нейтральном установившемся состоянии;  $\gamma$ ,  $t$ ,  $\varepsilon$  — параметры якоря, технологического и эквивалентных рабочих зазоров.

Построим динамическую модель ЭМП при следующих допущениях [1, 2]: электрические и магнитные цепи заменим эквивалентными линейными; пренебрежем магнитным сопротивлением статора, потерями на вихревые токи и гистерезис; рассеяние обмоток учтем введенным проводимостями  $G_p$ , а выпучивание — введением эквивалентного начального угла охвата якоря  $\varphi_3$ ; магнитные поля рабочих зазоров будем считать плоскопараллельными; усилитель мощности заменим эквивалентным генератором с внутренним сопротивлением  $R$  и ЭДС  $U_0 \pm \mu k_y \varepsilon$ . Тогда работа ЭМП может быть описана системой дифференциальных уравнений, полученной методом Лагранжа—Максвелла [3]. Обобщенные координаты и силы для наиболее общей схемы ЭМП (рис. 1) запишутся в виде табл. 1.

Таблица 1

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$q_k$	$\alpha$	$q_1$	$q_2$	$q_n$
$\dot{q}_k$	$\dot{\alpha}$	$I_1$	$I_2$	$I_n$
$P_k$	$J\dot{\alpha}$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_{1n} + \Psi_{2n}$
$-f_k$	0	$U_1$	$U_2$	$U_n$
$Q_k$	0	$U_0 + \mu k_y \varepsilon$	$U_0 - \mu k_y \varepsilon$	$E_n$

Здесь  $q_k$ ,  $P_k$ ,  $f_k$  — соответственно обобщенные координаты, импульсы и силы;  $Q_k$  — движущие силы. Лагранжиан системы

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \int_0^{I_1} \Psi_1 dI_1 + \int_0^{I_2} \Psi_2 dI_2 + \int_0^{I_n} (\Psi_{1n} + \Psi_{2n}) dI_n,$$

диссипативная функция

$$F = \frac{1}{2} f \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (r_1 + R) I_1^2 + \frac{1}{2} (r_2 + R) I_2^2 + \frac{1}{2} (r_n + R_n) I_n^2,$$

система дифференциальных уравнений

$$J \ddot{\alpha} + f \dot{\alpha} = M_n,$$

$$L_1 \dot{I}_1 + M_{12} \dot{I}_2 + M_{1n} \dot{I}_n + K_{e1} \dot{\alpha} + I_1 (r_1 + R) = U_0 + \mu k_y \varepsilon,$$

$$L_2 \dot{I}_2 + M_{21} \dot{I}_1 + M_{2n} \dot{I}_n + K_{e2} \dot{\alpha} + I_2 (r_2 + R) = U_0 - \mu k_y \varepsilon, \tag{1}$$

$$L_n \dot{I}_n + M_{n1} \dot{I}_1 + M_{n2} \dot{I}_2 + K_{en} \dot{\alpha} + I_n (r_n + R_n) = E_n,$$

где

$$M_n = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \int_0^{I_1} \Psi_1 dI_1 + \int_0^{I_2} \Psi_2 dI_2 + \int_0^{I_n} (\Psi_{1n} + \Psi_{2n}) dI_n \right],$$

$$L_i = \frac{d\Psi_i}{dI_j} \quad (i = j), \quad M_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial I_j} \quad (i \neq j), \quad (i, j = 1, 2, n).$$

Выражения для  $\Psi_i$  получены на основании линейных схем замещения магнитных цепей ЭМ (рис. 1) и имеют вид:

схема «а»

$$\Psi_1 = 2I_n W_n W k_{c1} G C \alpha - 2(I_2 - I_1) W^2 k_{c1} \varphi_3 G C - 2W^2 k_{c1} R_T G (I_2 - I_1) \times \\ \times (\varphi_3^2 - \alpha^2) + W^2 k_{c3} G_{p1} I_1,$$

$$\Psi_2 = -2I_n^2 W_n W k_{c1} G C \alpha + 2(I_2 - I_1) W^2 k_{c1} \varphi_3 G C + 2(I_2 - I_1) W^2 k_{c1} R_T G \times \\ \times (\varphi_3^2 - \alpha^2) + I_2 W^2 k_{c3} G_{p2},$$

$$\Psi_{1n} + \Psi_{2n} = 2I_n W_n^2 \varphi_9 k_{c2} GC + 2I_n W_n^2 k_{c2} (R_T + 2R_R) (\varphi_9^2 - \alpha^2) G - \\ - 2(I_2 - I_1) W W_n G C k_{c2} \alpha + 2I_n W_n^2 k_{c4} G_{p1};$$

схема «б»

$$\Psi_1 = I_1 W^2 k_{c1} GC (\varphi_9 + \alpha) + I_1 W^2 k_{c1} G (\varphi_9^2 - \alpha^2) (R_T + R_R) + \\ + I_2 W^2 k_{c1} R_R G (\varphi_9^2 - \alpha^2) + I_1 W^2 k_{c2} G_{p1},$$

$$\Psi_2 = I_2 W^2 k_{c1} GC (\varphi_9 - \alpha) + I_2 W^2 k_{c1} G (\varphi_9^2 - \alpha^2) (R_T + R_R) + \\ + I_1 W^2 k_{c1} R_R G (\varphi_9^2 - \alpha^2) + I_2 W^2 k_{c2} G_{p2};$$

схема «в»

$$\Psi_1 = 2I_n W_n W k_{c1} GC \alpha + 2W^2 k_{c1} (I_1 - I_2) GC \varphi_9 + I_1 W^2 k_{c3} G_{p1},$$

$$\Psi_2 = -2I_n W_n W k_{c1} GC \alpha - 2W^2 k_{c1} (I_1 - I_2) GC \varphi_9 + I_2 W^2 k_{c3} G_{p2},$$

$$\Psi_{1n} + \Psi_{2n} = 2I_n W_n^2 k_{c2} GC \varphi_9 + 4I_n W_n^2 k_{c2} G (R_T + R_R) (\varphi_9^2 - \alpha^2) + \\ + 2W W_n k_{c2} (I_1 - I_2) GC \alpha + 2I_n W_n^2 k_{c4} G_{p1};$$

схема «г»

$$\Psi_1 = I_1 W^2 k_{c1} GC (\varphi_9 + \alpha) + I_1 W^2 k_{c1} G (\varphi_9^2 - \alpha^2) (R_T + R_R) + \\ + I_2 W^2 k_{c1} R_T G (\varphi_9^2 - \alpha^2) + I_1 W^2 k_{c2} G_{p1},$$

$$\Psi_2 = I_2 W^2 k_{c1} (\varphi_9 - \alpha) GC + I_2 W^2 k_{c1} G (\varphi_9^2 - \alpha^2) (R_T + R_R) + \\ + I_1 W^2 k_{c1} R_T G (\varphi_9^2 - \alpha^2) + I_2 W^2 k_{c2} G_{p2},$$

где  $k_{c1}$ ,  $k_{c2}$ ,  $k_{c3}$ ,  $k_{c4}$  — коэффициенты связи рабочих потоков и потоков рассеяния с обмотками ЭМ;  $\mu_B$ ,  $\mu_r$  — магнитные проницаемости воздуха и стали;  $W_1 = W_2 = W$ .

$$G = \frac{1}{[C + 2\varphi_9(R_T + R_R)]C}, \quad C = \frac{\delta}{\mu_B l_\alpha d_\alpha}, \quad R_T = \frac{\Delta_T}{\mu_\alpha l_T d_\alpha}, \quad R_R = \frac{l_R}{\mu_B \mu_r h_\alpha d_\alpha}.$$

Линеаризуя систему уравнений (1) при малых отклонениях координат относительно нейтрального установившегося состояния и проведя преобразования, аналогичные [2], получим линейное дифференциальное уравнение ЭМП вида

$$a_0 \Delta \ddot{\alpha} + a_1 \Delta \dot{\alpha} + a_2 \Delta \alpha + \Delta \alpha = K \Delta \varepsilon, \quad (2)$$

где

$$a_0 = \frac{J(L + M)}{K_\alpha(R + r)}, \quad a_1 = \frac{J}{K_\alpha} + \frac{L + M}{R + r} \frac{f}{K_\alpha}, \quad r_1 = r_2 = r,$$

$$a_2 = \frac{L + M}{R + r} + \frac{f}{K_\alpha} + \frac{2K_i K_e}{K_\alpha(r + R)}, \quad K = \frac{2\mu k_y K_i}{K_\alpha(R + r)}.$$

Выражения коэффициентов в уравнении (2) для различных схем ЭМП приведены в табл. 2.

Таблица 2

	а	б	в	г
$K_i$	$2 I_n W_n W k_{c1} GC$	$I_0 W^2 k_{c1} GC$	$2 I_n W_n W k_{c1} GC$	$I_0 W^2 k_{c1} GC$
$K_\alpha$	$2 k_{c1} I_n^2 W_n^2 G \times \\ \times (R_T + 2R_R)$	$2 I_0^2 W^2 k_{c1} G \times \\ \times (R_T + 2R_R)$	$4 I_n^2 W_n^2 k_{c1} G \times \\ \times (R_T + R_R)$	$2 I_0^2 W^2 k_{c1} G \times \\ \times (R_R + 2R_T)$
$L + M$	$4 W^2 k_{c1} G \varphi_9 \times \\ \times (C + R_T \varphi_9) + \\ + W^2 k_{c3} G_p$	$W^2 k_{c1} G \varphi_9 \times \\ \times (C + R_T \varphi_9) + \\ + W^2 k_{c3} G_p$	$4 W^2 k_{c1} GC \varphi_9 + \\ + W^2 k_{c3} G_p$	$W^2 k_{c1} G \varphi_9 \times \\ \times (C + R_R \varphi_9) + \\ + W^2 k_{c3} G_p$
$K_e$	$2 I_n W_n W k_{c1} GC$	$I_0 W^2 k_{c1} GC$	$2 I_n W_n k_{c1} G WC$	$I_0 W^2 k_{c1} GC$

В качестве примера рассчитаны и приведены на рис. 2 частотные характеристики ЭМП для разных схем. Таким образом, при проектировании пневматических сервомеханизмов, анализируя динамику и статику ЭМП, можно выбрать наиболее удовлетворяющую заданным требованиям схему.

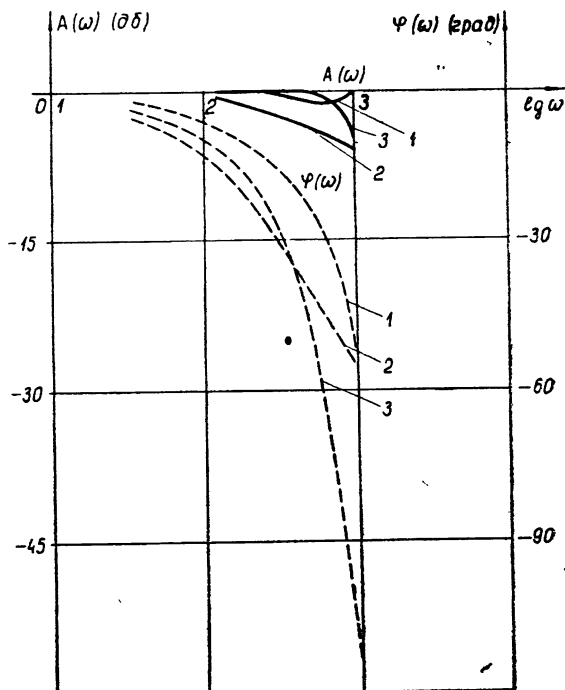


Рис. 2. Частотные характеристики электромеханических преобразователей, рассчитанные при  $l_n = 1,5$  см,  $l_T = 0,6$  см,  $\delta = 0,01$  см,  $\Delta_T = 0,005$  см,  $h_n = 0,32$  см,  $d_n = 1,3$  см,  $\varphi_3(a, b, v) = 0,088$ ,  $\varphi_3(\gamma) = 0,095$ ,  $\mu_r = 300$ ,  $W_n = W_1 = W_2 = W = 525$ ,  $l_n = 1_0 = 0,33$  а,  $J(a, b, v) = 4 \cdot 10^{-6}$  кг·см·сек<sup>2</sup>,  $J(\gamma) = 8 \cdot 10^{-6}$  кг·см·сек<sup>2</sup>,  $r = 20$  ом,  $R = 80$  ом,  $k_{c1} = k_{c3} = 0,9$ ,  $k_{c3} = k_{c4} = 0,95$ ,  $G_p(a, v) = 0,47 \cdot 10^7$  гн,  $G_p(\gamma) = 0,35 \cdot 10^{-7}$  гн,  $f(\gamma) = 0,0027$  кг·см·сек,  $f(a, b, v) = 0,0013$  кг·см·сек; 1—с электромагнитом типа б, 2—с электромагнитом типа а, 3—с электромагнитом типа г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. К. Буль, Основы теории и расчета магнитных цепей, изд. Энергия, М.—Л., 1964.
2. Е. Е. Шорников, Электромеханика, № 6, 684 (1968).
3. Д. Уайт, Г. Вудсон, Электромеханическое преобразование энергии, изд. Энергия, М.—Л., 1964.

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию  
9 декабря 1968 г.