

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. Радиоастрономический метод измерений величины поглощения радиоволн в ионосфере	1439
Бренгауз В. Д. О распространении магнитозвуковых волн в неоднородной среде	1455
Гребенюк Ю. В., Грачев А. И. Статистические характеристики сигнала, рассеянного на неоднородностях нижней ионосферы	1461
Грачев А. И., Гребенюк Ю. В. Рассеяние радиоволн нижней ионосферой на частоте 30 Мгц	1467
Шахов В. О. Экспериментальные исследования переходных процессов в молекулярном генераторе	1472
Максимов Ю. М., Таланов В. И. О некоторых факторах, влияющих на образование нитей при самофокусировке света	1477
Жуковский А. П. Случайное электромагнитное поле и его моменты распределения при отражении волн от протяженной шероховатой поверхности	1482
Гельфер Э. И., Кияшко Б. В., Маркус Ф. А. Расчет помех, вызываемых нелинейностью канала передачи сигнала, принятого на синтезированной антенну	1494
Баранов В. А., Кравцов Ю. А. О флуктуациях каустической поверхности в среде со случайными неоднородностями	1500
Кляцкин В. И. О функциональном описании характеристик плоской световой волны, распространяющейся в среде со случайными неоднородностями показателя преломления	1506
Докучаев В. П., Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. Излучение элементарного диполя в хаотически неоднородной среде	1512
Басс Ф. Г., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Среднее поле точечного источника в волноводе с шероховатыми стенками	1521
Аверков С. И., Фурашов Н. И. Дифракционные резонаторы	1532
Ваганов Р. Б. Демпфирование раскочки пучка в диафрагмированном лучевом	1546
Якушкин И. Г. Метод суммирования комплексных лучевых полей в применении к задаче о возбуждении колебаний в отражающем слое	1552
Макаров Т. В. Распространение аналога волны H_{01} круглого волновода в изгибе крестообразного волновода	1557
Масунов Э. С. Излучение заряженной частицы в волноводе, заполненном диэлектриком	1566
Гутоп Ю. В., Медведев Ю. А. Об электромагнитном поле, возникающем при ионизации воздуха точечным источником гамма-излучения в электрическом поле Земли	1573
Огородников С. Н. О применении функций комплексного переменного в теории формирования потоков одноименно заряженных частиц при наличии магнитного поля	1577
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Крупнов А. Ф., Герштейн Л. И., Шустров В. Г., Поляков В. В. Определение вращательной постоянной изотопного аммиака $N^{15}H_3$	1584
Ривлин Л. А., Уиц А. Б., Шильдяев В. С. Волноводный усилитель света на полупроводниковых лазерах	1586
Каликинская М. П. Излучение заряда при периодическом движении по оси круглого отверстия в бесконечном экране	1588

УДК 538.56

РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЙ ВЕЛИЧИНЫ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов

(Обзор)

1. ОСНОВЫ МЕТОДА

Основным источником сигнала при измерениях величины поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим методом является космическое радиоизлучение. При прохождении через ионосферу радиоизлучение ослабляется из-за поглощения, и уровень его интенсивности равен

$$I = I_0' \exp(-\Gamma), \quad (1)$$

где I_0 — интенсивность сигнала за пределами ионосферы, Γ — величина интегрального поглощения радиоволн. Для нахождения величины Γ необходимо знать интенсивности I_0 и I .

На опыте непосредственно измеряется только уровень сигнала I после прохождения его через ионосферу. При постоянном значении «первичной» интенсивности I_0 вариации уровня сигнала будут определяться лишь изменениями в поглощении радиоволн. В спокойных условиях ионосферы величина поглощения становится минимальной ночью (в предутренние часы). Наибольшие значения интенсивности радиоизлучения в эти часы и принимаются в радиоастрономическом методе в качестве значений «первичной» интенсивности I_0 . Таким образом, радиоастрономическим методом определяется, вообще говоря, не абсолютная величина поглощения, а ее приращение относительно некоторого (хотя и весьма небольшого) «остаточного» ночного поглощения.

Космическое радиоизлучение распределено неравномерно по небосводу. Поэтому из-за вращения Земли во время наблюдений появляются вариации «первичной» интенсивности $I_0(t)$ с периодом, равным продолжительности звездных суток*. В звездном времени t' суточная зависимость $I_0(t')$ является стационарной кривой, зависящей от параметров антенны и широты места наблюдений. На практике кривая $I_0(t')$ находится следующим образом [1–3]. Результаты измерений интенсивности сигнала за длительный (порядка одного года) период наблюдений наносится на один график в зависимости от звездного времени t' . Каждому моменту времени t' на таком графике будут соответствовать значения I , полученные в различные интервалы времени солнечных суток. Наибольшие значения I для каждого момента времени берутся в качестве I_0 . Кривая $I_0(t')$ получается либо путем проведения верхней огибающей точек данного графика $I(t')$, либо путем проведения кривой на уровне 90% точек для каждого интервала времени [4].

В качестве примера, поясняющего нахождение «звездной» кривой $I_0(t')$ и последующее определение величины поглощения радиоволн в ионосфере, на рис. 1а, б приведены результаты измерений относитель-

* Звездные сутки короче солнечных суток на 3' 56".

ной интенсивности космического радиоизлучения на частоте 9 Мгц в феврале 1965 г. (рис. 1 а) и декабре 1964 г. (рис. 1 б). Наблюдения велись в Зименках (вблизи г. Горького, $\varphi = 56^\circ$) с помощью антенны, состоящей из 6 волновых диполей и имеющей расчетную диаграмму направленности порядка $25 \times 35^\circ$ по уровням половинной мощности. По оси ординат на рис. 1а, б отложены значения величины $10 \lg I/I_{шг}$ характеризующие уровень сигнала в децибелах, где $I_{шг}$ — уровень сигнала калибровочного генератора, а по оси абсцисс — звездное время суток, «приведенное» к 1 января (т. е. условно принято, что полночь 1 января совпадает с полночью по солнечному времени). Кривая А на рис. 1а, б является «звездной» кривой. Видно, что большая часть ее (отмеченная сплошной линией) могла быть получена по данным наблюдений только декабря и февраля месяцев. Отклонения вниз от «звездной» кривой пропорциональны величине поглощения. Разброс точек в ночные часы (порядка $\pm (0,20 \div 0,25)$ дб) обуславливается в первую очередь случайными ошибками измерений (см. об этом ниже). В дневные часы суток* разброс точек, достигающий в феврале $\pm 0,75$ дб, вызван, главным образом, вариациями поглощения ото дня ко дню.

На рис. 1 в показаны результаты измерений интенсивности сигнала на частоте 13 Мгц в декабре 1964 г., а на рис. 1д, е — аналогичные данные на частотах 13 и 25 Мгц в мае 1964 г. Соответствующие «звездные» кривые отмечены индексами Б и В. Сравнивая рис. 1 в и 1 е, легко видеть, как наблюдения в мае и декабре взаимно дополняют друг друга с точки зрения нахождения зависимости $I_0(t')$. Из показанных примеров очевидно также, что для построения «звездной» кривой достаточно наносить на график $I(t')$ только результаты ночных наблюдений. Некоторые замечания, касающиеся точности нахождения звездной кривой, будут сообщены позднее.

Часто интересуются лишь аномальным поглощением Γ_a радиоволн в ионосфере, величина которого определяется по изменению уровня сигнала относительно его невозмущенного («спокойного») состояния I_n :

$$\Gamma_a = 10 \lg I_n/I. \quad (2)$$

При кратковременных четко выраженных возмущениях нахождение величины аномального поглощения не вызывает каких-либо затруднений, так как обычно используется линейная интерполяция невозмущенного уровня сигнала.

Если аномальная ионизация происходит в течение нескольких часов (или даже суток, как это бывает в полярных районах), для определения величины аномального поглощения необходимо знать суточную зависимость $I_n(t)$ (опорную кривую), соответствующую нормальным условиям в ионосфере. Эту зависимость находят усреднением результатов наблюдений в соседние «спокойные» дни, а для зоны полярных сияний, где возмущенное состояние ионосферы встречается почти ежедневно, опорную кривую получают усреднением за «спокойные» интервалы времени в течение месяца наблюдений.

Для приема космического радиоизлучения используют частоты f , значительно превышающие критические частоты ионосферы $f_0 F2$, т. е.

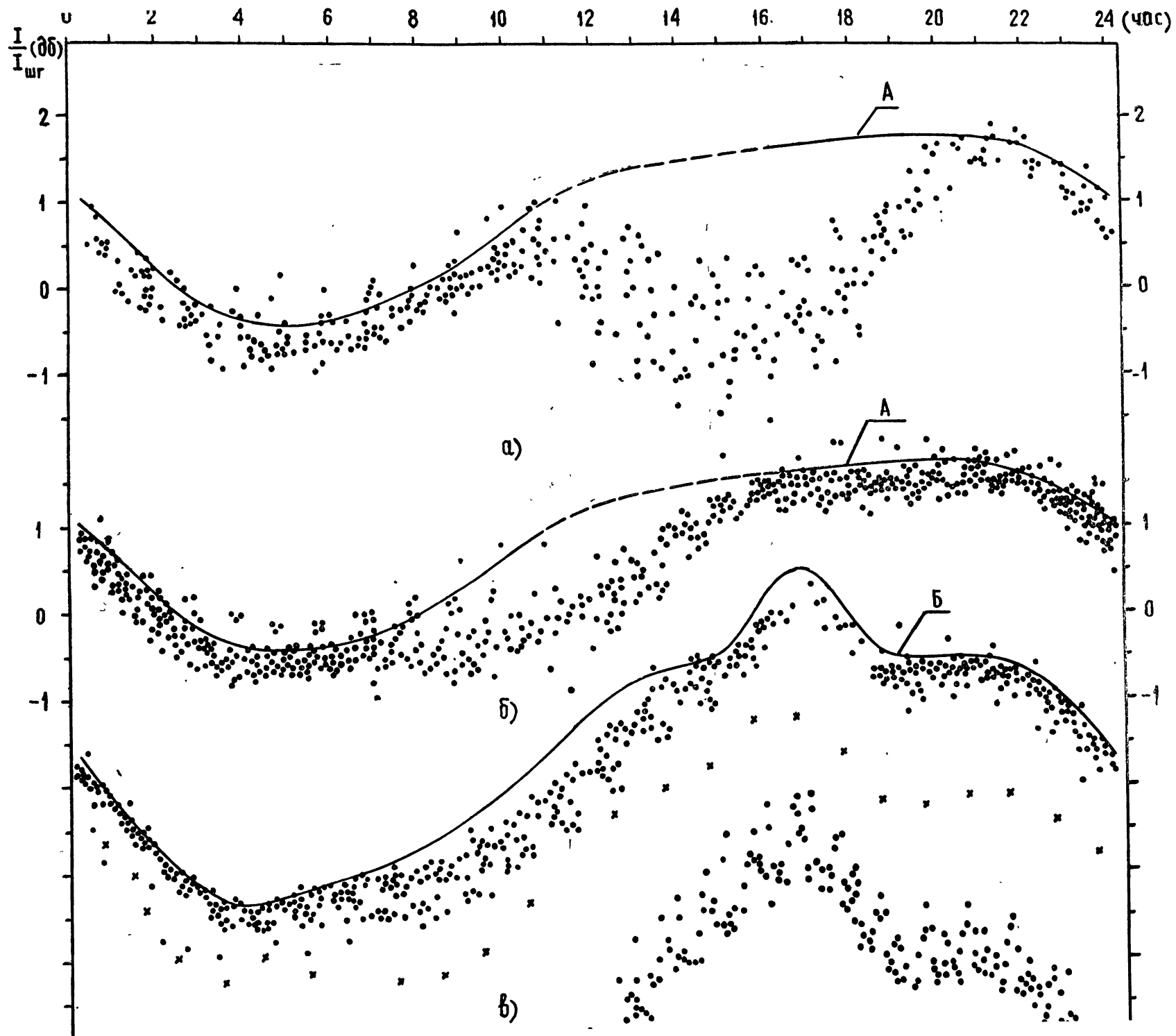
$$f^2 \gg (f_0 F2)^2. \quad (3а)$$

Поскольку при этом, как правило,

$$f^2 \gg f_H^2, \quad (3б)$$

где f_H — гирочастота ионосферы, и показатель преломления близок к единице, то показатель поглощения равен [146]

* Полдень в феврале соответствует на рис. 1а, б 14—16 часам, а полдень в декабре — 10—12 часам.



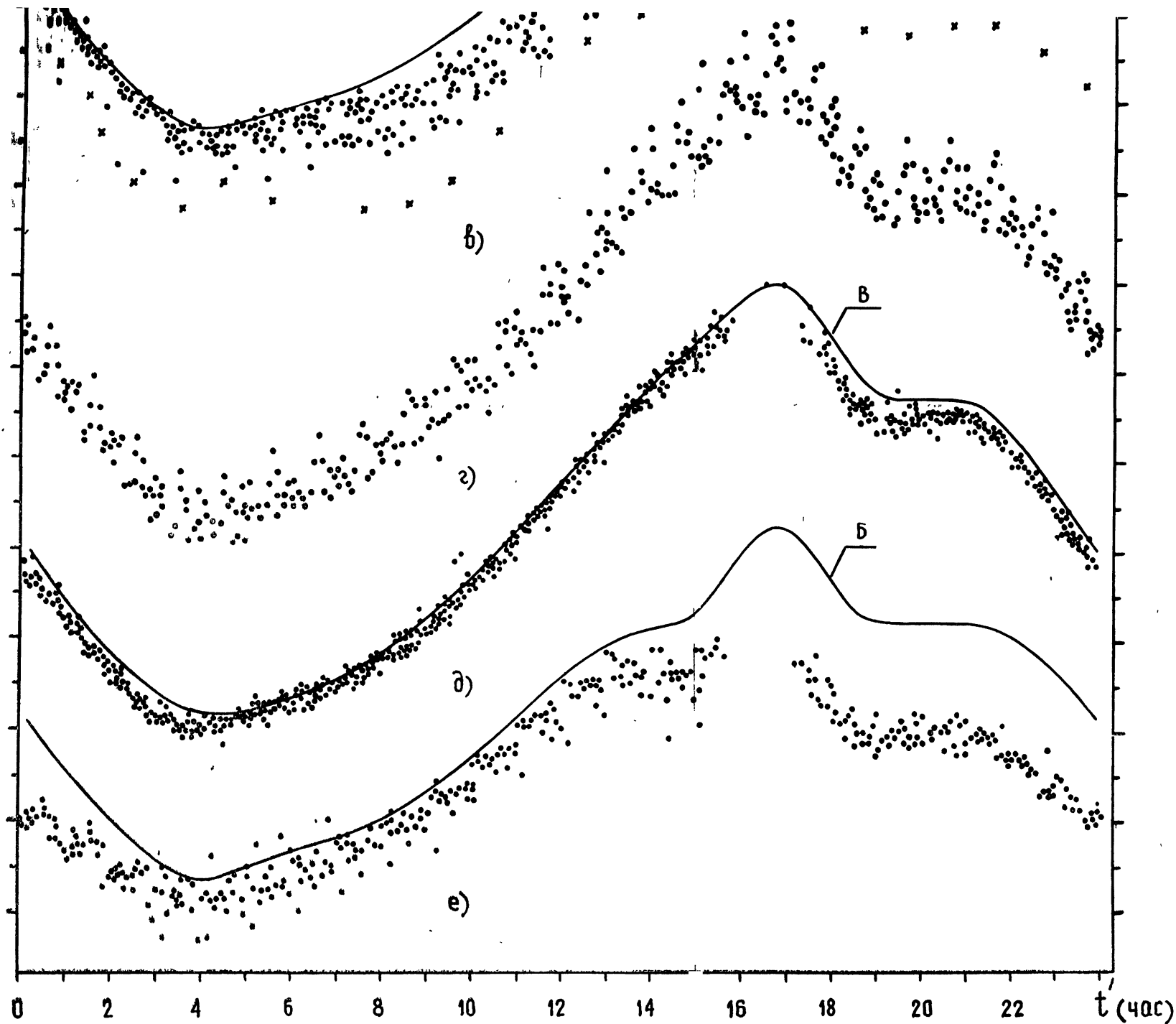


Рис. 1. а) $f=9$ МГц, 9–28 февраля 1965 г.; б) $f=9$ МГц, 1–30 декабря 1964 г.; в) $f=13$ МГц, 1–25 декабря 1964 г.; г) $f=25$ МГц, 12–30 декабря 1964 г.; д) $f=25$ МГц, 4–31 мая 1964 г.; е) $f=13$ МГц, 4–20 мая 1964 г.

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)}. \quad (4a)$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$ — круговая плазменная частота и $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений электронов с ионами и молекулами. При необходимости учитывать магнитное поле Земли в квазипродольном приближении

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega[(\omega \pm \omega_L)^2 + \nu_{\text{эфф}}^2]}, \quad (4б)$$

где индексы 1, 2 и знаки \pm относятся к разным нормальным компонентам волны, а $\omega_L = \omega_H \cos \alpha = 2\pi f_H \cos \alpha$, α — угол между направлением распространения волны и направлением магнитного поля.

Интегральное поглощение равно

$$\Gamma = 2 \frac{\omega}{c} \int \kappa dl = \frac{1}{c} \int \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2} dl \quad (5a)$$

или, в квазипродольном приближении,

$$\Gamma = \frac{1}{c} \int \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{(\omega \pm \omega_L)^2 + \nu_{\text{эфф}}^2} dl, \quad (5б)$$

где интегрирование производится по траектории волны. При необходимости можно учесть и отличие показателя преломления n от единицы, вводя вместо (5 а) и (5 б) более сложные формулы.

Во всей ионосфере, кроме самой нижней части D -слоя, при выполнении условий (3 а) и (3 б) $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$. Вклад нижней части D -слоя, где $\omega \sim \nu_{\text{эфф}}$, в интегральное поглощение при отсутствии аномальной ионизации настолько невелик, что в первом приближении

$$\Gamma \sim \frac{1}{\omega^2 c} \int \omega_0^2 \nu_{\text{эфф}} dl. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что величина поглощения существенно растет с уменьшением ω , в связи с чем при прочих равных условиях желательнее применение возможно более низких рабочих частот. Использование низких частот одновременно с высокими частотами весьма полезно также для определения частотной зависимости аномального поглощения радиоволн в нижней части D -слоя ионосферы, где $\omega \sim \nu_{\text{эфф}}$.

Нижняя граница рабочих частот определяется условием прохождения радиоволн через ионосферу, в связи с чем в пренебрежении сферичностью Земли должно выполняться неравенство

$$f > \frac{f_0 F 2}{\cos \vartheta_{\text{max}}}, \quad (7)$$

где ϑ_{max} — максимальный зенитный угол в пределах диаграммы направленности антенны*. Обычно $f \geq (1,5 \div 3) f_0 F 2_{\text{max}}$. В умеренных широтах максимальные значения $f_0 F 2$ поднимаются в некоторые периоды времени до 12—15 Мгц, и, следовательно, рабочие частоты должны находиться в диапазоне от 18—20 Мгц и выше. В первых изме-

* При этом необходимо учитывать, что, если максимальный зенитный угол ϑ_{max} определять только по главному лепестку диаграммы направленности антенны, могут возникнуть некоторые ошибки при определении поглощения за счет эффекта экранировки ионосферой боковых лепестков диаграммы направленности антенны.

рениях, проведенных в Маркоси [5] и Хорнсби [1], применялись частоты 29,5 и 18,3 Мгц. В этом же диапазоне частот велись наблюдения в период МГГ и в последующие годы [4, 6–10].

При умеренной и слабой активности Солнца, когда максимальные значения f_oF_2 невелики, появляется возможность использовать более низкие частоты. Так, например, в 1960–1965 гг. измерения интегрального поглощения в Горьком успешно проводились на частоте 13 Мгц, а в 1963–1965 гг. одновременно и на частоте 9 Мгц [11]. В 1961 году удалось измерить интегральное поглощение радиоволн на частоте ~ 6 Мгц [12]. На ряде частот, в том числе и $f = 6$ Мгц, регистрировались внезапные ионосферные возмущения в Горьком в 1961–1963 гг. [13]. В Колледже в 1961 г. исследования аномального поглощения радиоволн в зоне полярных сияний велись на частотах, в числе которых были 5 и 10 Мгц [14, 15]. С некоторыми ограничениями во времени наблюдений низкие частоты могут быть, вообще говоря, применены и в период повышенной активности Солнца.

Большим недостатком радиоастрономического метода измерений полного интегрального поглощения радиоволн в ионосфере является требование длительных, порядка одного года, наблюдений с неизменной и стабильной аппаратурой. В этой связи заслуживают внимания некоторые варианты метода, применение которых позволяет определять величину поглощения сравнительно быстро, но менее точно. Простейший вариант метода заключается в том, что стараются создать антенну, имеющую диаграмму направленности в виде тела вращения. Если направить такую антенну на полюс Мира, то при вращении Земли интенсивность «первичного» космического радиоизлучения I_0 будет оставаться постоянной, и изменения уровня сигнала будут происходить только за счет вариаций величины поглощения. Достаточно несколько дней наблюдений на такой установке, чтобы определить максимальный уровень сигнала, принимаемого за значение I_0 .

Реальные антенны в декаметровом диапазоне волн не обладают полной осевой симметрией, и неравномерное распределение источников космического радиоизлучения вызывает заметную «модуляцию» интенсивности I_0 при направлении антенн на полюс Мира. Поэтому без нахождения «звездной» кривой такого рода наблюдения позволяют получить лишь довольно приближенную величину интегрального поглощения радиоволн. При этом данные о поглощении относятся к наклонному прохождению радиоволн через ионосферу, что не всегда удобно. На практике установки с антеннами, направленными на полюс Мира, используются в основном для регистрации аномального поглощения радиоволн на высоких широтах.

В умеренных и экваториальных широтах для приближенной оценки величины интегрального поглощения радиоволн в ионосфере при сравнительно кратковременных наблюдениях был применен двухчастотный метод [16–18]. Если отношение интенсивностей космического излучения I_{01}/I_{02} , принимаемого антенной на частотах f_1 и f_2 , остается постоянным при прохождении диаграммой направленности отдельных участков небосвода, то из (1) и (6) получаем

$$\Gamma_1 = \frac{\ln I_{01}'/I_{02} - \ln I_1/I_2}{1 - (f_1/f_2)^2},$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1(f_1/f_2)^2. \quad (8)$$

Отношение I_{01}/I_{02} при этом определяется, как и в основном варианте метода, по наблюдениям в ночные часы, когда поглощение становится минимальным. В действительности I_{01}/I_{02} не остается постоянным при переходе от одного участка небосвода к другому, что приводит к ошиб-

кам в определении величины поглощения. Степень погрешности, вообще говоря, зависит от размеров диаграммы направленности антенн, выбора рабочих частот и пути перемещения диаграммы направленности по небосводу*. В декаметровом диапазоне волн изменения в относительных значениях I_{01}/I_{02} появляются в первую очередь из-за поглощения радиоволн в ионизированных облаках водорода, концентрирующихся в Галактической плоскости. Поэтому наименьших ошибок следует ожидать в том случае, когда диаграммы направленности антенн не захватывают участки Млечного пути. Для примера укажем, что измерения величины поглощения двухчастотным методом, проведенные на $f_1 = 18,6$ МГц и $f_2 = 25$ МГц в 1959 г. в Горьком «зенитными» антеннами, имеющими размеры диаграмм направленности порядка $25 \times 35^\circ$ по уровням половинной мощности, имели дополнительную ошибку по указанной причине $\sim 0,2-0,3$ дБ.

На достаточно низких частотах (меньших $10-15$ МГц) возможно применение поляризационного метода, основанного на различии в поглощении обыкновенной и необыкновенной компонент радиоволн при учете магнитного поля Земли [19]. «Первичное» космическое радиоизлучение не имеет избранной поляризации в декаметровом диапазоне волн. После прохождения ионосферы интенсивности обыкновенной I^+ и необыкновенной I^- компонент будут отличаться друг от друга. Их отношение

$$\frac{I^+}{I^-} = \exp[\Gamma^+ - \Gamma^-] \quad (9a)$$

или отношение их линейных комбинаций, как например,

$$\frac{I^+ - I^-}{I^+ + I^-} = \text{th} \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} \quad (9b)$$

не зависят от интенсивности «первичного» радиоизлучения I_0 . Вместе с тем, используя связь между величиной поглощения обыкновенной Γ^+ и необыкновенной Γ^- компонент, можно определить и сами значения Γ^+ и Γ^- . При величинах поглощения, характерных для спокойных условий ионосферы (меньших $3-5$ дБ на частотах $6-9$ МГц), с достаточной степенью точности

$$\Delta\Gamma = \Gamma^- + \Gamma^+ = \Delta I/I, \quad (10)$$

где $\Delta I = I^+ - I^-$ и $2I = I^+ + I^-$. С другой стороны, в квазипродольном приближении при выполнении условий (3а), (3б)

$$\Delta\Gamma = 2 \frac{\omega}{c} \int (x^- - x^+) dl = \frac{2}{c} \int \frac{\omega_0^2 \omega_L \nu_{эфф}}{\omega^4} dl = 4 \frac{\bar{\omega}_L}{\omega} \bar{\Gamma}, \quad (11)$$

где $\bar{\omega}_L$ — средняя величина $\omega_H \cos \alpha$,

$$2\bar{\Gamma} = \Gamma^+ + \Gamma^-.$$

Измеряя ΔI и I , можно, таким образом, определять интегральные соотношения, аналогичные соотношению (6) «обычного» метода. На прак-

* Отличия в распределениях $I_{0i}(t')$ на разных частотах видны, в частности, из сравнения «звездных» кривых А, Б, В на рис. 1а-1е. Кривая А получена на частоте 9 МГц с антенной, имеющей размеры около $25 \times 35^\circ$ по уровням половинной мощности, а кривые Б и В (частоты 13 и 25 МГц) — при диаграммах направленности антенн с размерами $\sim 25 \times 18^\circ$. Все антенны были направлены в зенит, наблюдения проводились на широте $\varphi \sim 56^\circ$.

тике поляризационный метод был применен только на частотах 5 и 10 *Мгц* в Колледже [20], где использована несколько иная методика определения величины поглощения.

2. АППАРАТУРА

Определение величины поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим методом основано, как указывалось выше, на измерениях уровня интенсивности распределенного космического радиоизлучения. Соответствующие установки, называемые риометрами (по начальным буквам выражения *Relative Ionospheric Opacity Meter*), имеют ряд типичных для радиоастрономической аппаратуры элементов — антенные системы, приемники, шумовые генераторы и т. п. Вместе с тем следует отметить специфические особенности риометров. С одной стороны в диапазоне 5—40 *Мгц*, в котором проводятся наблюдения методом А2, эффективная температура космического радиоизлучения достаточно велика (от $5 \cdot 10^3 \text{°K}$ до $\sim 10^6 \text{°K}$), и поэтому обычно не возникает типичной для радиоастрономии проблемы выделения космического радиоизлучения на фоне собственных шумов аппаратуры*. К тому же для выполнения задачи требуется измерять (хотя и весьма точно) лишь относительные изменения в уровне сигнала. С другой стороны, однако, риометры предназначены для весьма продолжительной непрерывной работы, в течение которой параметры аппаратуры должны выдерживаться с возможно большей стабильностью. Аппаратура должна быть сравнительно простой, надежной и удобной в эксплуатации и иметь средства защиты от радиопомех.

Существенным элементом риометров являются антенные системы. Выбор типа антенн зависит от непосредственной задачи наблюдений и диапазона рабочих частот. Желательно, чтобы диаграммы направленности антенн имели малый уровень боковых лепестков, а электрическая схема и конструкция антенных систем, включая фидерные линии, были бы возможно проще. Последние требования вызваны, в частности, тем обстоятельством, что в процессе эксплуатации параметры антенн (например, их КПД) фактически не контролируются, в связи с чем следует уменьшить вероятность их изменений во времени.

На практике часто используют антенны, состоящие из одного или двух полуволновых диполей, расположенных на высоте $\sim \lambda/4$ над металлизированной землей (см., например, [21, 22]). Широкое распространение в диапазоне 25—40 *Мгц* получили 3—5-элементные антенны типа «волновой канал», направленные в зенит или на полюс Мира (см. [10, 24—27] и др.). Несколько реже встречаются многоэлементные антенны [28—33]. Они применяются в первую очередь для исследования пространственной структуры областей аномальной ионизации. Относительно «сложные» антенные системы используются для раздельного приема обыкновенной и необыкновенной компонент радиоволн, а также для создания достаточно узкой диаграммы направленности, позволяющей работать на частотах, сравнительно близких к критическим частотам ионосферы.

Антенны должны быть хорошо согласованы с фидерной линией и на низких частотах иметь полосу пропускания Δf на уровне КСВ, равного 1,1, не менее 0,1—0,2 *Мгц*, что необходимо для обеспечения перестройки рабочей частоты в некоторых пределах. В качестве фидеров обычно используются коаксиальные кабели. Максимальная длина фидера определяется допустимой величиной затухания сигнала в нем и ошибками, вносимыми фидером в тепловые шумы аппаратуры при изменениях температуры окружающей среды.

* В диапазоне 5—40 *Мгц* легко достигается шум/фактор приемников $\sim 2—5$.

В риометрах применяются два основных варианта регистрации сигнала, упрощенные блок-схемы которых показаны на рис. 2 а, б. В первом варианте сигнал, поступающий из антенно-фидерной системы, усиливается, детектируется, и его уровень интенсивности непосредственно регистрируется на записывающем устройстве. Для калибровки сигнала используется шумовой генератор, периодически подключающийся вместо антенны на вход приемника. Уровень собственных шумов аппаратуры определяется при замене антенны на «холодную» эквивалентную нагрузку.

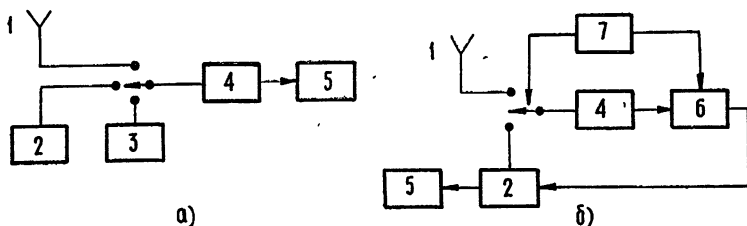


Рис. 2. Блок-схемы измерительной аппаратуры:

1—антенна, 2—шумовой генератор, 3—холодный эталон, 4—приемник, 5—регистрирующее устройство, 6—синхронный детектор, 7—генератор опорного напряжения.

Риометры, работающие по этому принципу, описаны в [23, 27, 28, 34, 35]. Их недостатком является нестабильность коэффициента усиления, что, вообще говоря, понижает точность измерений. Этот недостаток устранен в другом варианте аппаратуры, где применен модуляционно-нулевой метод регистрации уровня сигнала. Принцип работы модуляционно-нулевого риометра заключается в следующем (см. блок-схему на рис. 2 б).

Вход приемника с помощью опорного генератора, имеющего частоту от нескольких единиц до 1000 $\mu\text{ц}$, поочередно подключается то к антенне, то к шумовому генератору. На выходе приемника с помощью синхронного детектора выделяется сигнал, пропорциональный разности между интенсивностями шумов, идущих от антенны и генератора. Этот разностный сигнал используется в схеме управления током шумового генератора для автоматической подстройки мощности генератора под уровень интенсивности измеряемого сигнала. На самописце регистрируется сила тока шумового генератора, соответствующая интенсивности космического радиоизлучения. Очевидно, что в этом случае нестабильность коэффициента усиления аппаратуры мало влияет на результаты измерений. Анализ работы модуляционно-нулевого измерителя слабых шумовых сигналов приведен в работе [36]. Различные варианты работающих по этому принципу риометров описаны в [37—42].

Диапазон частот, охватываемый риометрическими наблюдениями, насыщен большим количеством разнообразных радиопомех. Для защиты от помех импульсного характера применяются специальные ограничители (минимальные детекторы), реагирующие на минимальную величину сигнала (см., например, [23]). Они удовлетворительно работают при умеренной частоте повторения и небольшой длительности импульсов.

Другим видом помех являются помехи от радиопередатчиков. Для борьбы с ними применяются сравнительно узкие полосы пропускания приемников по промежуточной частоте и производится перестройка рабочей частоты в некоторых пределах для поиска свободных от радиостанций участков. В диапазоне 25—40 Мгц обычно используют полосы пропускания $\sim 10\text{—}20$ кгц . В этом диапазоне часто применяют автоматическое сканирование рабочей частоты в пределах ± 50 кгц , что превра-

щает сигналы передатчиков в квазиимпульсные помехи, ограничивающиеся минимальным детектором. На частотах, меньших 20—25 Мгц, из-за возрастания числа радиостанций применяются полосы $\sim 1-3$ кгц и, как правило, ручная отстройка от радиостанций.

Следует обратить внимание на то, что модуляционно-нулевая аппаратура более чувствительна к помехам, что вызвано переходными процессами при быстрых переключениях [43]. В основном по этой причине модуляционные риометры, успешно применяющиеся в диапазоне 20—40 Мгц, не распространены на более низких частотах, где уровень помех существенно выше*.

В ряде случаев в риометрах используются профессиональные связанные приемники. Большое внимание уделяется стабилизации источников питания в варианте с непосредственной регистрацией сигнала. Для экспедиционных условий созданы малогабаритные риометры на батарейном питании. Имеются установки, позволяющие вести наблюдения одновременно на нескольких фиксированных частотах.

3. ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕЛИЧИНЫ ПОГЛОЩЕНИЯ МЕТОДОМ А2

В нескольких работах был проведен анализ погрешностей измерений величины поглощения методом А2 на частотах порядка 25—40 Мгц применительно, в первую очередь, к наблюдениям аномального поглощения [3, 47—49]. Рассматривались ошибки, вызванные естественными флуктуациями сигнала, флуктуациями коэффициента усиления аппаратуры, погрешностями записывающего прибора, ошибками при обработке лент и построении «непоглощенного» уровня сигнала, погрешностями, определяемыми изменением температуры фидеров. Среднеквадратичная ошибка измерений, обусловленная этими причинами, составляет, по данным работ [3, 47—49], около 0,2—0,3 дб при величинах аномального поглощения порядка 5 дб. При этом определяющими являются аппаратные погрешности. Ряд авторов при изложении результатов своих исследований оценивают ошибки измерений аномального поглощения в 0,1 дб.

В этой связи можно сделать следующее замечание. При обработке лент фактически происходит усреднение записи не за 3—10 сек (соответствующих эффективной постоянной времени выходных устройств риометра), а за больший промежуток времени (порядка нескольких минут), что уменьшает ошибки, вызванные кратковременными флуктуациями сигнала. При определении величины аномального поглощения во время непродолжительных ионосферных возмущений появляется возможность избежать ошибок, вызванных неточностью построения «непоглощенного» уровня сигнала. Очевидно, что в этих случаях мало сказываются и температурные ошибки. Поэтому оценку точности в 0,1 дб при измерениях аномального поглощения с величиной порядка 5 и менее дб при кратковременных возмущениях не следует считать чрезмерно завышенной.

Если возмущения продолжают часами или сутками, погрешность измерений увеличивается за счет ошибок в нахождении «опорной» кривой I_n , соответствующей спокойным условиям ионосферы. Кривая I_n находится по результатам наблюдений в «спокойные» интервалы времени в течение месяца. Точность ее построения на частотах $f \geq 25$ Мгц оценивается в $\pm (0,05 \div 0,10)$ дб. На более низких частотах ошибки

* Несомненно, однако, что дальнейшее совершенствование помехозащитности ристетров позволит применять модуляционный метод и на низких частотах. Отметим, в частности, предложение Брука [44], касающееся подавления переходных процессов, корреляционно-нулевой измеритель и схему фазочувствительного детектора, работающего с подавлением импульсных помех [45, 46].

нахождения I_n возрастают до $\pm 0,2$ дб. Одна из причин этого роста заключается в том, что на низких частотах становится существенным влияние нормального поглощения на форму опорной кривой.

Следует обратить внимание на то, что во время наблюдений могут появиться дополнительные причины, вызывающие искажение результатов измерений. К ним, в первую очередь, относятся радиопомехи. При отсутствии слухового контроля и автоматической девиации частоты не всегда удается достаточно надежно исключить из обработки записи, содержащие помехи от радиостанций. При значительной (порядка нескольких секунд) постоянной времени уровень сигнала может заметно повыситься во время частых промышленных и грозových разрядов, а также при пылевых и снеговых бурях. Помехи, вызванные спорадическим радиоизлучением Солнца и другими природными источниками радишумов, легко выделяются на фоне основного сигнала, если они носят характер кратковременных всплесков. Встречаются, однако, случаи продолжительного повышенного радиоизлучения Солнца, когда определить уровень космического радиоизлучения по риометрическим записям весьма затруднительно. Не исключено наличие вариаций интенсивности синхротронного излучения электронов в радиационных поясах Земли [50] и т. д. При работе с многоэлементными антеннами могут оказаться существенными изменения КПД и согласования антенн во время дождя, мокрого снега и обледенения. Так, например, было замечено существенное ослабление сигнала на $f = 13$ Мгц в один из дней декабря 1964 г., когда элементы антенно-фидерной системы оказались покрыты толстой «шапкой» мокрого снега (соответствующие значения обозначены на рис. 1 в крестиках).

При работе с узкими диаграммами направленности могут появиться ошибки в определении уровня сигнала, если в диаграмму направленности антенны попадают мощные дискретные источники радиоизлучения (отсчет уровня сигнала в этом случае затруднителен из-за флуктуаций интенсивности радиоизлучения источников, вызванных неоднородностями электронной концентрации в ионосфере). Именно этим обстоятельством обусловлено малое число результатов измерений в интервале 16—17 часов на рис. 1 в—1 е, когда близко к зениту проходил источник Кассиопея-А.

Большая продолжительность времени, необходимого для измерений полной интегральной величины поглощения радиоволн в ионосфере, вызывает появление дополнительных ошибок. Даже весьма малые, но не контролируемые или частично контролируемые изменения в параметрах аппаратуры, накапливающиеся в течение года, могут привести в конечном итоге к погрешностям, сравнимым или даже превышающим случайные ошибки одиночных измерений*. Так, в работе [51] сообщалось о том, что «регулярное» поглощение не могло быть измерено из-за отсутствия достаточной стабильности приемника и трудностей калибровки аппаратуры; в [8] указывалось на появление медленного «дрейфа» в показаниях одного из риометров, что привело к существенному завышению измеренной величины поглощения; на нестабильность параметров аппаратуры, как на один из заметных источников при определении «полного» поглощения, обращалось внимание в [52].

Другим источником систематических погрешностей являются ошибки при определении «звездной» кривой. Как уже указывалось выше, «звездные» кривые $I_0(t')$ находятся в виде верхней огибающей всех

* Очевидно, что не полностью могут быть восстановлены параметры аппаратуры при ее ремонте, смене отдельных элементов и блоков. Заметим, что некоторая систематическая ошибка может появиться из-за сезонных вариаций в КПД антенно-фидерной системы (вследствие изменений в проводимости почвы и температуре окружающей среды).

измеренных значений уровня интенсивности сигнала, нанесенных на один график в зависимости от звездного времени. Разброс результатов наблюдений для одного и того же момента звездного времени вызван как вариациями величины поглощения от дня ко дню, так и случайными ошибками измерений. Очевидно, что верхняя огибающая расположена выше истинной кривой $I_0(t')$, причем разность между ними превышает среднеквадратичную ошибку. Таким образом, появляется систематическая погрешность, тем большая, чем больше случайные ошибки измерений. Проведение «звездной» кривой на уровне 90% точек не устраняет, а лишь несколько уменьшает эту погрешность.

Если считать, что среднеквадратичная ошибка σ составляет 0,2 дб, то систематическая погрешность может достигать 0,3—0,5 дб. Если к тому же значения σ изменяются по тем или иным причинам в течение года, соответственно появляются вариации и величины систематической ошибки. Вполне возможно, что указанное обстоятельство может быть одной из причин расхождения результатов одновременных измерений поглощения в нескольких пунктах наблюдений [52].

Вместе с тем длительные наблюдения, проведенные одновременно на нескольких фиксированных частотах [11], позволяют сделать вывод о том, что в умеренных широтах при «спокойном» состоянии ионосферы и критических частотах $f_0F2 \leq 5-6$ Мгц вариации величины поглощения в послеполуночные часы весьма малы на частотах, больших 18—25 Мгц, а разброс значений уровня сигнала в эти часы для одного и того же момента звездного времени определяется, в основном, случайными ошибками измерений. Поэтому в указанном диапазоне частот само космическое радиоизлучение может быть использовано в качестве индикатора как стабильности аппаратуры, так и величины случайных ошибок измерений [52]. В этих целях следует выбрать те ночные интервалы времени наблюдений, когда ионосфера не возмущена и значения f_0F2 невелики, построить для каждого часа (по звездному времени) гистограмму распределения уровней сигнала и найти средние значения I . Целесообразно эту операцию сделать для каждого месяца в отдельности. Тогда значения \bar{I} , полученные для одного и того же момента звездного времени в течение нескольких соседних месяцев, позволяют судить о долговременной стабильности аппаратуры, а гистограммы значений I — о случайных ошибках измерений. Если значения \bar{I} не меняются от месяца к месяцу, то их совокупность непосредственно определяет «звездную» кривую $I_0(t')$.

При наличии заметных вариаций \bar{I} следует вводить поправки как при построении кривой $I_0(t')$, так и при вычислении поглощения. Более подробно аналогичная методика изложена в [53]. Следует иметь в виду, однако, что в [53] речь идет о нахождении «формы» звездной кривой, и в дальнейшем предлагается полученную кривую $\bar{I}(t')$ поднять, не меняя «формы», до уровня огибающей (на $\sim 0,4$ дб, если судить по представленным в [53] графикам). Разумеется, некоторое повышение кривой допустимо, если иметь в виду то обстоятельство, что измерение поглощения радиоволн радиоастрономическим методом проводится с точностью до некоторого «остаточного» (минимального) уровня. Однако этот «остаточный» уровень составляет, согласно расчетам [54], не более 0,2 дб на частотах выше 18 Мгц при $f_0F2 \leq 6$ Мгц.

В связи с изложенным обратимся к примерам, показанным на рис. 1 а, е. Разброс точек на частоте 25 Мгц в мае 1964 г. (рис. 1 д) не превышал $\pm 0,15$ дб, что соответствует ожидаемым ошибкам измерений. С другой стороны, в декабре 1964 г. (рис. 1 г) на этой же частоте разброс увеличился в два раза. Мы считаем, что это увеличение было вызвано не природными эффектами, а появившейся неисправностью

в аппаратуре. Действительно, одновременные наблюдения на более низкой частоте 13 Мгц (см. рис. 1 в, е) не обнаружили существенных изменений в величине ΔI для ночных часов при переходе от мая к декабрю. Более того, практически почти отсутствовала корреляция между вариациями сигнала на разных частотах в эти часы. Наконец, после проведения профилактического ремонта и смены некоторых деталей разброс значений ΔI на $f = 25$ Мгц вновь стал порядка $\pm 0,15$ дб. Очевидно, что, если бы была проведена формальная обработка результатов наблюдений, включая и данные декабря, полученные величины поглощения на $f = 25$ Мгц были бы искажены.

Звездная кривая на рис. 1 д была построена без учета декабря 1964 г., а ее уровень был поднят по сравнению с $\bar{I}(t')$ не более чем на 0,1 дб.

Следует сказать, что на низких частотах разброс точек в ночные часы, по крайней мере, в период минимума активности Солнца также определяется, в первую очередь, ошибками измерений. Действительно, как уже было упомянуто, вариации уровня сигнала в ночные часы обычно были некоррелированы на разных частотах, а разброс точек в основном соответствует ожидаемым ошибкам измерений (порядка $\pm 0,2$ — $0,3$ дб). Следовательно, при построении звездных кривых на низких частотах тоже нужно было бы использовать описанную выше процедуру. Кривые А и Б на рис. 1 а—1 д находились, однако, методом огибающей. В данном частном случае это не повлекло за собой появления существенных систематических ошибок, поскольку поднятие звездной кривой на 0,2—0,3 дб по сравнению с кривой $\bar{I}(t')$ соответствует величине ожидаемого «остаточного» поглощения в диапазоне частот 9—13 Мгц (на частоте 25 Мгц нами принято, что «остаточное» поглощение составляет около 0,05—0,1 дб).

Необходимо обратить внимание на то, что наблюдения на частотах порядка 25 Мгц и выше дают весьма ограниченную информацию о поглощении радиоволн в умеренных широтах при $f_0 F2 \leq 8$ —10 Мгц. В самом деле, значения величины поглощения в этом диапазоне частот даже в полдень не превышают обычно ~ 1 дб, а в период минимума солнечной активности полуденные значения Γ не превосходят 0,3—0,5 дб*. Ошибки измерений получаются сравнимыми с самими измеряемыми величинами. Использование средних (за месяц) результатов не устраняет систематических погрешностей, которые могут быть значительными. Применение более низких частот улучшает положение. Обращаясь к рис. 1 а—1 е, мы видим, что, несмотря на малый разброс значений I в мае 1964 г. на частоте $f = 25$ Мгц (рис. 1 д) и удовлетворительную точность нахождения звездной кривой ($\sim 0,1$ дб), представленные на рис. 1 д результаты пригодны лишь для грубой оценки величины поглощения ($\Gamma_{25} = 0,25$ — $0,3$ дб). В то же время данные наблюдений на $f = 13$ Мгц (рис. 1 е) позволяют четко определить суточный ход $\Gamma(t)$. Аналогичные выводы можно сделать, рассматривая рис. 1 а—1 в.

В связи с обсуждением ошибок измерений величины поглощения обратим внимание на точность определения частотной зависимости поглощения, которая обычно характеризуется показателем n в соотношении

$$\Gamma_1/\Gamma_2 = (f_2/f_1)^n. \quad (12)$$

Среднеквадратичная ошибка δn при заданных погрешностях $\delta \Gamma$ будет равна

* В некоторых работах, однако, приводятся величины поглощения, достигающие 1,5—2 дб в диапазоне 25—30 Мгц (см., например, [8, 10, 55]).

$$\delta n \approx \sqrt{2} \frac{\delta \Gamma}{\Gamma} \frac{0,43}{\lg f_2/f_1}. \quad (13)$$

При $\Gamma \sim 1$ дб и $\delta \Gamma \geq 0,1$ дб $\delta n \geq 0,35$ для пары частот, отличающихся в 1,5 раза. При $\Gamma \sim 3$ дб $\delta n \geq 0,1$.

Из этого примера видно, что при анализе отдельных случаев частотной зависимости (например, SCNA или ППС) следует с очень большой осторожностью интерпретировать полученные данные при небольших ($\Gamma \leq 2-3$ дб) величинах поглощения, что далеко не всегда выполняется. Вопрос о точности нахождения частотной зависимости поглощения $\Gamma(f)$ имеет большое значение, в частности, при расчетах профиля электронной концентрации $N(h)$ в нижней ионосфере по известной частотной зависимости $\Gamma(f)$. Если имеется набор существенно разнесенных рабочих частот, то даже в оптимальном случае на высокочастотном участке величины поглощения будут малы, а на низкочастотном, наоборот, велики, и ошибки измерений как величины поглощения, так и $\Gamma(f)$ будут неравномерно распределены по рабочему диапазону частот.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Выше мы неоднократно выделяли две задачи, при решении которых применялся метод А2: определение «полного» интегрального поглощения радиоволн в ионосфере и измерение величины аномального поглощения радиоволн в периоды ионосферных возмущений. В обоих случаях радиоастрономический метод имеет свои достоинства по сравнению с другими известными методами измерений поглощения радиоволн. В самом деле, методы, основанные на приеме отраженных от ионосферы радиоволн (А1 и А3), в принципе не дают возможности получить сведения о поглощении радиоволн выше максимума слоя F2, а использование сигналов ИСЗ в этих целях встречает серьезные технические трудности и не получило заметного практического применения. Метод А2 оказался фактически единственным методом измерений «полного» поглощения радиоволн, прошедших через всю толщу ионосферы.

При исследованиях аномального поглощения радиоволн методы А1 и А3 в ряде случаев вообще не могут дать сведения о величине поглощения из-за пропадания отраженного сигнала при больших возмущениях (блэкаутах), а в других случаях они дают информацию либо усредненную за довольно значительный промежуток времени (5—15 минут при вертикальном зондировании), либо усредненную по протраженной трассе прохождения радиоволн (в методе А3). В то же время радиоастрономические наблюдения позволяют измерять величину поглощения даже при очень сильных ионосферных возмущениях и за малый промежуток времени, исчисляемый долями минуты. Учитывая, кроме того, сравнительную простоту изготовления и обслуживания аппаратуры, вполне понятно широкое распространение метода А2 при исследованиях аномального ионосферного поглощения, особенно в полярных районах. Разумеется, радиоастрономический метод не универсален и не может заменить другие методы при решении ряда задач, в которых существенную роль играет поглощение радиоволн в ионосфере. Слабые стороны метода А2 упоминались выше.

Перечислим основные направления исследований с применением метода А2 (см. также обзоры [56—58]). Полное интегральное поглощение в «спокойной» ионосфере («регулярное» поглощение) измерялось в различных пунктах земного шара в разные периоды активности Солнца [1, 4—12, 16—18, 22, 59—77]. Были получены суточные, сезонные, а в

[11, 55, 75] и более долговременные вариации величины поглощения. Проводилось сопоставление результатов измерений с различными гелио- и геофизическими параметрами и с теоретическими расчетами. Определялся вклад основных слоев ионосферы как на основе зависимости поглощения от критических частот ионосферы [1, 6, 8, 63], так и при помощи одновременных наблюдений методами A1 и A2 [16, 77]. Сравнение расчетов с измеренной величиной поглощения в слое F2 использовалось для определения электронной температуры и эффективного числа соударений в этом слое [72, 75, 76]. В ряде исследований указывается на существование так называемой «экстра» составляющей ослабления космического радиоизлучения, не связанной с обычным механизмом поглощения радиоволн в плазме [8, 78]. Некоторыми авторами отмечалась связь вариаций поглощения с появлением $F_{\text{диф}}$ или с уровнем магнитной возмущенности [1, 4, 6, 62]. Проведен ряд измерений поглощения радиоволн во время солнечных затмений [17, 78—84].

Наблюдения за уровнем интенсивности космического радиоизлучения применялись для обнаружения и изучения внезапных вспышек поглощения (Sudden Cosmic Noise Absorption, сокращенно SCNA или ВВП). Рассматривалось воздействие рентгеновского излучения Солнца на ионосферу, статистика появления вспышек, сопоставление с параметрами солнечных хромосферных вспышек и радиоизлучением Солнца, определение эффективного коэффициента рекомбинации по временной зависимости $\Gamma(t)$ и т. д. [13, 21, 85—105]. В работах [13, 21, 97, 98, 101, 103] находилась частотная зависимость $\Gamma(f)$ аномального поглощения по одновременным наблюдениям на нескольких фиксированных частотах с целью получения информации о характере спектра всплесков рентгеновского излучения Солнца, ответственных за внезапные ионосферные возмущения.

Наибольшее применение метод A2 получил при исследованиях явлений аномального поглощения в высоких широтах — поглощения в зоне полярных сияний (Auroral Absorption, сокращенно ППС или АА) и поглощения в полярной шапке (Polar Cap Absorption, сокращенно ППШ или РСА). Результаты исследований ППС и ППШ приведены в обзоре Хульквиста [57]. Значительное число работ по этому вопросу проведено после опубликования этого обзора [106—145]. Изучались пространственно-временные вариации и особые виды аврорального поглощения [106—121], частотная зависимость [122, 123], связь ППС с магнитной активностью, полярными сияниями и результатами наблюдений корпускулярных потоков на спутниках и ракетах [124—130]. Уделялось внимание исследованиям ППС в магнитосопреженных точках [131, 132] и в умеренных широтах [51, 133, 134]. Новые сведения о ППШ опубликованы в [137—145]. Отметим, что в настоящее время разработан метод определения $N(h)$ -профиля по частотной зависимости поглощения. Основное применение этого метода базируется на многочастотных измерениях поглощения методом A2 [135, 136].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. P. Mitra, C. A. Shain, *J. Atm. Terr. Phys.*, **4**, 204 (1953).
2. C. G. Little, *Ann. JGJ*, **3**, 2 (1957).
3. Инструкция по обработке записей интенсивности космического радиоизлучения, под ред. В. М. Дрицкого, ААНИИ, Л., 1965.
4. P. F. Checcacci, M. T. de Giorgio, *J. Atm. Terr. Phys.*, **26**, 899 (1964).
5. E. G. Blum, G. F. Denisse, G. L. Steinberg, *C. R. Acad. Sci.*, **238**, 1695 (1954).
6. R. V. Bhonsle, K. R. Ramanathan, *J. Geophys. Res.*, **64**, 1635 (1959).
7. R. W. Morris, *Proc. Phys. Soc.*, **75**, 937 (1960).
8. B. Lusignan, *J. Geophys. Res.*, **65**, 3895 (1960); *J. Atm. Terr. Phys.*, **23**, 126 (1961).

9. A. Fredriksen, R. B. Duce, J. Geophys. Res., **65**, 1177 (1960); J. Atm. Terr. Phys., **23**, 106 (1961).
10. Н. П. Бенькова, Г. Н. Васильев, Ю. С. Хунджау. сб. Ионосферные исследования, № 3, 402 (1964).
11. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, **8**, 162 (1968).
12. Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 1, 186 (1965).
13. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, **6**, 940 (1966).
14. R. Parthasarathy, F. T. Berkeley, J. Geophys. Res., **70**, 89 (1965).
15. R. Parthasarathy, F. T. Berkeley, J. Res. NBS, **69D**, № 3, 415 (1965).
16. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, № 6, 957 (1960).
17. Г. М. Артемьева, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, Ю. С. Коробков, Геомагнетизм и аэрономия, **2**, 58 (1962).
18. Ю. С. Коробков, В. В. Писарева, Геомагнетизм и аэрономия, **5**, 173 (1965).
19. Е. А. Бенедиктов, Радиотехника и электроника, **1**, 1201 (1959).
20. C. G. Little, G. M. Lerfald, R. Parthasarathy, J. Res. NBS, **68D** 859 (1964).
21. S. Ziauddin, P. A. Forsyth, J. Geophys. Res., **66**, 2315 (1961).
22. W. R. Steiger, J. N. Warwick, J. Geophys. Res., **66**, 57 (1961).
23. R. H. Lee, Electronics, **30**, № 3, 162 (1957).
24. Ю. С. Бончковская, Г. В. Васильев, сб. Доклады научного симпозиума по ионосфере, изд. РГУ, 1961, стр. 80.
25. Л. М. Белкина, В. И. Бочаров, Тр. СФТИ, вып. 45, 120 (1964).
26. S. M. Radicella, M. A. Sette, J. Geophys. Res., **70**, № 23, 5970 (1965).
27. E. L. Vogan, Canad. J. Phys., **42**, № 7, 1332 (1964).
28. В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 8, 1127 (1968).
29. A. Kavadas, J. Atm. Terr. Phys., **23**, 170 (1961).
30. Z. A. Ansari, Proc. IEEE, **53**, 530 (1965).
31. R. D. Sears, J. Geophys. Res., **70**, № 23, 5967 (1965).
32. W. L. Ecklund, J. K. Hargreaves, J. Atm. Terr. Phys., **30**, 265 (1968).
33. Z. A. Ansari, J. Geophys. Res., **69**, 4493 (1964).
34. M. Laffineur, L. D. Whitehead, J. Atm. Terr. Phys., **9**, 347 (1956).
35. А. Н. Абраменко, Ю. И. Нешпор, Изв. КРАО, **26**, 145 (1961).
36. K. E. Mackin, M. A. Ryle, D. D. Vonberg, Proc. IEE, **99**, 127 (1952).
37. J. F. Zettler, Deference Research Telecommun. Estab Rept., № 1084 (1962).
38. Ч. Л. Ходжа-Ахмедов, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, **7**, 381 (1964).
39. Jan Smilauer, Geofysik sb., **12**, 449 (1964).
40. H. Urbarz, Elektrotechnische Zeitschrift, **A85**, 8 (1964).
41. H. A. Buchmaster, Canad. J. Phys., **43**, № 9, 1678 (1965).
42. C. G. Little, H. Leinbach, Proc. IRE, **47**, 315 (1959).
43. R. E. Clapp, J. Res. NBS, **69D**, 1425 (1965).
44. Ю. М. Брук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
45. В. С. Воюцкий, А. М. Слуцковский, Радиотехника, **13**, 25 (1958).
46. R. L. Dowden, Proc. IRE, **51**, 275 (1963).
47. C. G. Little, H. Leinbach, Proc. IRE, **46**, 336 (1958).
48. Ч. Л. Ходжа-Ахмедов, Тр. ААНИИ, **280**, 127 (1966).
49. И. И. Федякина, сб. Проблемы Арктики и Антарктики, вып. 24, 59 (1966).
50. Операция «Морская звезда», Атомиздат, М., 1964.
51. P. R. Lichtenstein, J. Geophys. Res., **71**, 1899 (1966).
52. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. В. Гвишвили, Н. А. Коченова, М. Д. Флигель, Геомагнетизм и аэрономия, **9**, № 2, 286 (1969).
53. R. Heisler, L. G. Hower, J. Geophys. Res., **72**, № 21, 5485 (1967).
54. G. R. A. Ellis, Austr. J. Phys., **16**, 411 (1963).
55. W. Lippert, Vorträge der Sommerschule, Untere Ionosphäre, Kühlungsborn/Heiligendamm, 28. 9.—9.10. 1964, Reihe II, Heft 1, Berlin, 1965, S. 31.
56. V. Hultquist, Radio Astronomical and Satellite Studies of the Atmosphere (ed. by J. Aarons), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1963, p. 163.
57. V. Hultquist, Space Science Rev., **5**, 771 (1966).
58. P. Simon, Ann. Geophys., **22**, № 2, 300 (1966).
59. C. A. Shain, Austr. J. Sci. Res., **4A**, 258 (1951).
60. S. Bhagavantam, M. Krishnamurthi, S. Ramakrishna, J. Ind. Inst. Science, **43**, 97 (1961).
61. R. V. Bhonsle, K. R. Ramanathan, J. Sci. Ind. Res. India, **17A**, 40 (1958).
62. J. S. Shirka, Proc. Indian Acad. Sci., **A56**, № 4, 165 (1962).
63. R. V. Bhonsle, K. R. Ramanathan, J. Geophys. Res., **64**, № 10, 1635 (1959).

64. M. Anastassiades, *Space Res.*, **3**, 265 (1963).
65. A. P. Mitra, K. A. Sarada, *Some Ionosph. Res. Obtained Dur. Intern. Geophys. Years*, Amsterdam—London—New York—Princeton, 1960, p. 270.
66. A. P. Mitra, R. A. Sarada, *J. Atm. Terr. Phys.*, **23**, 348 (1962).
67. P. F. Checcacci, M. T. de Giorgio, *J. Atm. Terr. Phys.*, **26**, 899 (1964).
68. R. V. Bhonsle, S. S. Degaonkar, K. R. Ramanathan, *J. Geophys. Res.*, **66**, № 9, 2763 (1961).
69. M. A. Abdu, S. S. Degaonkar, K. R. Ramanathan, *J. Geophys. Res.*, **72**, № 5, 1547 (1967).
70. Л. М. Белкина, В. И. Бочаров, Т. К. Яковец, сб. Результаты наблюдений и исследований в период МГСС, вып. 2, 159 (1966).
71. K. H. Ohle, *Gerlandes Beitr. Geophys.*, **76**, 5 (1967).
72. M. Krishnamurthi, S.B.S Subrahmanya Sarma, *Austr. J. Phys.*, **20**, № 4, 455 (1967).
73. M. Krishnamurthi, S.B.S Subrahmanya Sarma, *Austr. J. Phys.*, **20**, 463 (1967).
74. M. A. Abdu, S. S. Degaonkar, *J. Atm. Terr. Phys.*, **30**, № 4, 555 (1968).
75. M. A. Abdu, S. S. Degaonkar, *J. Geophys. Res.*, **72**, 5559 (1967).
76. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **4**, № 1, 44 (1961).
77. Г. П. Комраков, Л. А. Скребкова, А. В. Толмачева, сб. Ионосферные исследования (в печати).
78. U. Hense, J. Taubenheim, *Ann. Geophys.*, **22**, № 2, 320 (1966).
79. W. Lippert, J. Taubenheim, *Gerlands Beitr. Geophys.*, **74**, № 2, 89 (1965).
80. J. K. Hargreaves, G. M. Lurfald, J. M. Watts, *J. Res. NBS*, **D69**, № 7, 939 (1965).
81. R. D. Sears, *J. Geophys. Res.*, **70**, № 23, 5967 (1965).
82. E. L. Vogan, *Canad. J. Phys.*, **42**, № 7, 1382 (1964).
83. W. Lippert, *Gerlands Beitr. Geophys.*, **73**, № 4, 199 (1964).
84. K. H. Ohle, J. Taubenheim, *J. Atm. Terr. Phys.*, **29**, № 12, 1633 (1967).
85. A. P. Mitra, C. A. Shain, *J. Atm. Terr. Phys.*, **5**, 316 (1954).
86. K. A. Sarada, *J. Atm. Terr. Phys.*, **13**, 192 (1958).
87. M. N. Ioshi, A. P. Mitra, K. A. Sarada, N. V. G. Sarma, *J. Scient. and Industr. Res.*, **A17**, № 12, 74 (1958).
88. O. Hachenberg, A. Krüger, *J. Atm. Terr. Phys.*, **17**, 20 (1959).
89. R. V. Bhonsle, *Proc. Indian. Acad. Sci.*, **A51**, № 4, 189 (1960).
90. Ю. И. Нешпор, *Солнечные данные*, № 9, 86 (1960).
91. Е. Е. Гончарова, *Тр. ИЗМИРАН*, вып. 19 (29), 43 (1961).
92. D. W. Swift, *J. Atm. Terr. Phys.*, **23**, 29 (1961).
93. J. Taubenheim, *J. Atm. Terr. Phys.*, **23**, 191 (1961).
94. M. Krishnamurthi, T. S. Rao, G. Sivarama Sastry, *Austr. J. Phys.*, **15**, № 1, 20, (1962).
95. R. V. Bhonsle, S. S. Degaonkar, *J. Phys. Soc. Japan.*, **17**, Suppl. A-1, 286 (1962).
96. W. Lippert, *Abh. Geomagn. Inst. Potsd.*, № 29, 159 (1962).
97. S. Goldman, S. Horowitz, *Nature*, **199**, № 4899, 1147 (1963).
98. P. Halley, *The Effect of Disturbances of Solar Origin of Communication* (ed. G. J. Gassman), Oxford—London—New York—Paris, 1963, p. 1.
99. M. Anastassiades, *Radio Astronomical and Satellite Studies of the Atmosphere*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, p. 238.
100. O. Holt, *Radio Astronomical and Satellite Studies of the Atmosphere*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, p. 502.
101. Ю. И. Нешпор, *Изв. КрАО*, **29**, 152 (1963), **26**, 1956 (1961).
102. P. Gioleas, D. Jeias, M. Anastassiades, *Arctic Communications*, Oxford—London—Edinburg—New York—Paris—Frankfurt, Pergamon Press, 1954, p. 47.
103. V. C. Jain, A. P. Mitra, C. V. Subrahmanjam, *Radio Science*, **1**, 1188 (1966).
104. В. М. Дриацкий, Б. С. Моисеев, *Тр. ААНИИ*, **280**, 86 (1966).
105. Е. А. Бенедиктов, *Геомагнетизм и аэрономия*, **8**, № 5, 874 (1968).
106. В. М. Дриацкий, *Геомагнетизм и аэрономия*, **6**, № 6, 1061 (1966).
107. В. М. Дриацкий, *Информ. бюллетень Советской антарктической экспедиции*, № 54, 5 (1965).
108. В. М. Дриацкий, *Геомагнетизм и аэрономия*, **6**, № 2, 361 (1966).
109. В. М. Дриацкий, *Геомагнетизм и аэрономия*, **8**, № 1, 42 (1968).
110. Т. И. Шука, *Геомагнетизм и аэрономия*, **5**, № 5, 941 (1965).
111. В. М. Лукашкин, В. Б. Смирнов, *Тр. ААНИИ*, **280**, 57 (1966).
112. А. П. Никольский, *Тр. ААНИИ*, **280**, 76 (1966).

113. В. М. Дриацкий, Л. Н. Жигалов, Информ. бюллетень Советской антарктической экспедиции, № 62, 68 (1967).
114. О. Е. Дубатовко, М. И. Пудовкин, О. И. Шумплов, Геомагнетизм и аэрномия, 8, № 2, 303 (1968).
115. В. В. Беликович, А. А. Белобородова, Е. А. Бенедиктов, Г. А. Петрова, З. М. Пятси, З. Ц. Рапопорт, А. В. Толмачева, сб. Ионосферные исследования (в печати).
116. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, З. Ц. Рапопорт, сб. Комплексные исследования полярной ионосферы (в печати).
117. R. H. Eather, F. Jacka, Austral. J. Phys., 19, № 2, 215 (1966).
118. J. L. Hook, Trans. American Geophys. Union, 48, № 1, 85 (1967).
119. J. Reid, Nature, 214, № 5095, 1321 (1967).
120. A. Bewersdorf, J. Legrand, G. Kremser, W. Riedler, Arkiv Geophys., 5, № 2, 115 (1967).
121. Е. А. Бенедиктов, А. В. Толмачева, Геомагнетизм и аэрномия, 8, № 5, 957 (1968).
122. Ч. Л. Ходжа-Ахмедов, Геомагнетизм и аэрномия, 5, № 2, 348 (1965); 6, № 1, 80 (1966).
123. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Г. А. Петрова, З. Ц. Рапопорт, Геомагнетизм и аэрномия, 9, № 3, 485 (1969).
124. В. В. Смирнов, сб. Проблемы Арктики и Антарктики, вып. 24, 64 (1966).
125. В. М. Дриацкий, Геомагнетизм и аэрномия, 7, № 5, 891 (1967).
126. J. K. Hargreaves, Planet and Space Sci., 14, № 10, 991 (1966).
127. R. J. Earhart, R. E. Honston, J. Geophys. Res., 71, № 23, 5762 (1966).
128. F. T. Berkey, J. Geophys. Res., 73, № 1, 319 (1968).
129. D. S. Evans, J. Geophys. Res., 72, № 17, 4281 (1967).
130. В. К. Ролдугин, Геомагнетизм и аэрномия, 7, № 3, 559 (1967).
131. H. J. A. Chivers, J. K. Hargreaves, J. Atm. Terr. Phys., 28, № 3, 357 (1966).
132. F. C. Cowley, J. K. Hargreaves, Planet and Space Sci., 15, № 10, 1571 (1967); 15, № 10, 1585 (1967).
133. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, А. В. Толмачева, Геомагнетизм и аэрномия, 6, № 3, 600 (1966).
134. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 399 (1966).
135. Т. М. Крупицкая, Ч. Л. Ходжа-Ахмедов, Геомагнетизм и аэрномия, 8, № 1, 57 (1968).
136. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэрномия, 8, 476 (1968).
137. A. D. Goedenke, A. J. Masley, Antarct. J. US, 1, № 5, 190 (1966).
138. R. Parthasarathy, D. B. Rai, Radio Science, 1, № 12, 1397 (1966).
139. A. D. Gvedenke, A. J. Masley, G. W. Adams, Solar Phys., 1, № 2, 285 (1967).
140. P. R. Lichtenstein, Trans. American Geophys. Union, 48, № 1, 179 (1967).
141. H. Leinbach, J. Geophys. Res., 72, № 21, 5473 (1967).
142. G. C. Reid, H. H. Sauer, J. Geophys. Res., 72, № 17, 4383 (1967).
143. P. R. Brown, R. Parthasarathy, Planet and Space Sci., 15, № 11, 1667 (1967).
144. А. В. Широчков, Информ. бюллетень Советской антарктической экспедиции, № 61, 66 (1967).
145. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, З. Ц. Рапопорт, Геомагнетизм и аэрномия, 9, № 3, 600 (1966).
146. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 февраля 1969 г.

УДК 538.56

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН
В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

В. Д. Бренгауз

В линейном приближении исследуется распространение магнитозвуковых волн в изотермической атмосфере. Однородное магнитное поле H_0 направлено параллельно ускорению силы тяжести g . Найдено фундаментальное решение уравнения, описывающего поведение малых смещений, перпендикулярных магнитному полю. Получено уравнение для смещения, параллельного магнитному полю, и проведен анализ его решений. Показано, что полученные фундаментальные решения включают в себя результаты [1] как частные случаи.

Распространение магнитозвуковых волн часто происходит в условиях, которые не позволяют при теоретическом исследовании существенно упростить уравнения, описывающие волновые движения в неоднородной среде. Строгие решения волновых уравнений при вертикальном распространении в изотермической атмосфере, когда однородное магнитное поле ориентировано либо горизонтально, либо вертикально, получены в работах [1, 2]. Анализ распространения магнитозвуковых волн в неоднородной атмосфере при различных упрощающих поставленную задачу предположениях содержится также в [1, 3, 4]. Система линейных уравнений магнитной гидродинамики для малых возмущений в неоднородной атмосфере получена в работе [1], где решения этих уравнений отыскивались методом степенных рядов. Целью данной работы является отыскание фундаментального решения указанной системы, выраженного специальными функциями.

Предположим, что распространение волн происходит в плоскости xz в присутствии однородного магнитного поля H_{0z} . Ускорение силы тяжести g направлено вертикально вниз параллельно оси z ($g = \{0, 0, -g\}$). Атмосфера изотермична, т. е. температура $T = \text{const}$, а равновесная плотность среды ρ_0 изменяется с высотой по закону $\rho_0 = \rho_{00} \exp(-z/z_c)$, где $z_c = RT/\mu g$ — приведенная высота однородной атмосферы, μ — молекулярный вес, R — универсальная газовая постоянная.

В линейном приближении для малых смещений ξ_z, ξ_x , связанных с возмущениями скорости равенствами $v_{x,z} = \frac{d\xi_{x,z}}{dt}$, имеем [1]:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [(c_s^2 + c_A^2) \text{div } \bar{\xi} - g\xi_z] + c_A^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (c_s^2 \text{div } \bar{\xi} - g\xi_z) - (\gamma - 1) g \text{div } \bar{\xi}. \quad (2)$$

Здесь $c_s = \sqrt{\gamma g z_c}$ — скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей, $c_A = H_{0z} / \sqrt{4\pi\rho_0}$ — альфвеновская скорость. Смещение ξ_y при заданной геометрии задачи не связано с величинами ξ_x, ξ_z и определяется из отдельного уравнения, решение которого хорошо известно [1].

Полагаем, что все величины пропорциональны $e^{-i\omega t}$, а зависимость от координаты x записывается в виде плоской волны, т. е.

$$\xi_x = X(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \xi_z = Z(z) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Введем новую переменную $u = z/z_c$ и преобразуем уравнения (1), (2) к следующему виду:

$$\left(\frac{d^2}{du^2} - \frac{d}{du} + h^2 \right) Z = -i\alpha \left(\frac{d}{du} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) X; \quad (3)$$

$$\left[e^u \left(\frac{d^2}{du^2} - \alpha^2 \right) + \beta^2 (h^2 - \alpha^2) \right] X = -i\alpha\beta^2 \left(\frac{d}{du} - \frac{1}{\gamma} \right) Z, \quad (4)$$

где $\alpha = kz_c$, $h = \omega z_c / c_s$, $\beta = c_s / c_{A_0}$, а c_{A_0} — альфвеновская скорость на уровне $z=0$. Исключая Z из системы (3), (4), находим уравнение, которому удовлетворяет X :

$$\left[\eta \prod_{j=1}^2 \left(\eta \frac{d}{d\eta} - a_j + 1 \right) + \prod_{j=1}^4 \left(\eta \frac{d}{d\eta} - b_j \right) \right] X = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) относится к классу гипергеометрических уравнений. Переменная $\eta = h^2 \beta^2 e^{-u} = (\omega^2 z_c^2 / c_{A_0}^2) \exp(-z/z_c)$, а величины a_j и b_j отыскиваются известным методом и связаны с параметрами среды и распространяющихся волн следующим образом:

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4M}, \quad (6)$$

$$b_{1,2} = \pm \alpha, \quad b_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4h^2},$$

где $M = h^2 - \alpha^2 + [\alpha^2(\gamma - 1)/h^2\gamma^2]$.

Уравнение (5) имеет две особые точки: $\eta = 0$ и $\eta = \infty$. Проанализируем вначале область переменной η , не включающую в себя окрестность точки $\eta = \infty$. При этом четыре линейно независимых решения уравнения (5) записываются через G -функции Мейера вида [5]

$$X_1 = G_{2^4}^{1^2} \left(\eta \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right. \right); \quad (7a)$$

$$X_2 = G_{2^4}^{1^2} \left(\eta \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_2, b_1, b_3, b_4 \end{matrix} \right. \right); \quad (7b)$$

$$X_3 = G_{2^4}^{1^2} \left(\eta \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_3, b_1, b_2, b_4 \end{matrix} \right. \right); \quad (7b)$$

$$X_4 = G_{2^4}^{1^2} \left(\eta \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_4, b_1, b_2, b_3 \end{matrix} \right. \right). \quad (7r)$$

При малых η ($\eta \ll 1$), используя представление G -функций в виде ряда, и ограничившись первым членом разложения, получим [5]

$$X_{1,2} \sim \eta^{\pm\alpha} \sim e^{\mp kz},$$

$$X_{3,4} \sim \eta^{1/2 \pm (1/2)\sqrt{1-4h^2}} \sim \exp \left[-\frac{z}{z_c} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-4h^2} \right) \right]. \quad (8)$$

Подобный характер поведения горизонтальных смещений получен также в работе [1], где решения уравнения (5) при $\eta \ll 1$ отыскивались в виде степенных рядов. Система (7 а)—(7 г) также может быть представлена в виде рядов, если $\eta < 1$, так как функция $G_{2,4}^{1,2}(\eta)$ связана с обобщенным гипергеометрическим рядом $F_2F_3(m_1, m_2; n_1, n_2, n_3; -\eta)$. Параметры m_i, n_j зависят от величин $a_{1,2}, b_1, b_2, b_3, b_4$.

При $h^2 = (\gamma - 1)/\gamma^2$, когда $a_{1,2} = b_{3,4}$, используя известные свойства G -функции, находим, что

$$\begin{aligned} X_1 &= J_{2\alpha}(2\sqrt{\eta}), & X_2 &= J_{-2\alpha}(2\sqrt{\eta}), \\ X_3 &= G_{1,3}^{1,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} b_3 \\ b_3, b_1, b_2 \end{matrix} \right.\right), \\ X_4 &= G_{1,3}^{1,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} b_4 \\ b_4, b_1, b_2 \end{matrix} \right.\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя I рода ν -го порядка. $X_1(\eta), X_2(\eta)$ совпадают с теми, которые получены в [1] и являются линейно независимыми решениями, если 2α — не целое число, а зависимости $X_3(\eta)$ и $X_4(\eta)$ содержатся в указанной работе лишь в интегральном виде*.

В другом случае, когда свойства среды и величины ω и k таковы, что параметры α, h, γ удовлетворяют неравенствам $\alpha^2 \gg h^2 \gg (\gamma - 1)/\gamma^2$, $\alpha \gg 1$, то $M \simeq -\alpha^2$, а $a_{1,2} \simeq b_{1,2}$. Вновь используя свойства G -функции, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} X_1 &\simeq G_{1,3}^{1,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} b_1 \\ b_1, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right), \\ X_2 &\simeq G_{1,3}^{1,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} b_2 \\ b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right), \\ X_3 &\simeq \eta^{1/2} J_{\sqrt{1-4h^2}}(2\sqrt{\eta}), \\ X_4 &\simeq \eta^{1/2} J_{-\sqrt{1-4h^2}}(2\sqrt{\eta}). \end{aligned} \quad (10)$$

Перейдем к рассмотрению решений уравнения (5) при больших значениях η . Четыре линейно независимых решения при этом записываются в виде [5].

$$\begin{aligned} X_1 &= G_{2,4}^{4,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right), \\ X_2 &= G_{2,4}^{4,1}\left(\eta \left| \begin{matrix} a_2, a_1 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right), \\ X_3 &= G_{2,4}^{4,0}\left(\eta e^{\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right), \\ X_4 &= G_{2,4}^{4,0}\left(\eta e^{-\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{matrix} \right.\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Если $h^2 = (\gamma - 1)/\gamma^2$, то $a_{1,2} = b_{3,4}$, и выражения (11) преобразуются к хорошо известным функциям:

* Полученный здесь результат указывает на то, что интегральные соотношения в [1] могут быть выражены через специальные функции $G_{1,3}^{1,1}$.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 2^{2-2b_3} \Gamma(1-b_3-b_1) \Gamma(1-b_3+b_1) S_{\sqrt{1-4h^2}, 2\alpha} (2\sqrt{\eta}), \\
 X_2 &= 2^{2-2b_4} \Gamma(1-b_4-b_1) \Gamma(1-b_4+b_1) S_{-\sqrt{1-4h^2}, 2\alpha} (2\sqrt{\eta}), \\
 X_3 &= -\pi i e^{-\pi\alpha i} H_{2\alpha}^{(2)} (2\sqrt{\eta}), \\
 X_4 &= \pi i e^{\pi\alpha i} H_{2\alpha}^{(1)} (2\sqrt{\eta}),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $S_{\nu, \alpha}(x)$ — функция Ломмеля, $H_{\nu}^{(1,2)}(x)$ — функции Ханкеля I и II рода ν -го порядка, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Воспользовавшись асимптотическими представлениями соответствующих функций, при $\eta \gg 1$ получаем

$$\begin{aligned}
 X_1 &\sim \eta^{-1/2+(1/2)\sqrt{1-4h^2}}, \\
 X_2 &\sim \eta^{-1/2-(1/2)\sqrt{1-4h^2}}, \\
 X_3 &\sim \eta^{-1/4} \exp(-2i\sqrt{\eta}), \\
 X_4 &\sim \eta^{-1/4} \exp(2i\sqrt{\eta}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Соотношения (13) совпадают с результатами, полученными в [1] методом степенных рядов.

Таким образом, если при $\eta \ll 1$ величины $X_{1,3,4}$ убывают, а X_2 возрастает по мере увеличения высоты, то при $\eta \gg 1$ все X_i ($i=1, 2, 3, 4$) возрастают с увеличением z . При $\eta \ll 1$ поля $X_{3,4}$ имеют осцилляционную структуру по z , если $4h^2 > 1$, причем длина волны $\lambda = 2\pi / \sqrt{[(4h^2 - 1)/4z_c^2] + k^2}$ не зависит от высоты. В случае $\eta \gg 1$ поля $X_{3,4}$ являются волновыми вне зависимости от величины h^2 и длина волны зависит от z . Характер поведения полей $X_{1,2}$ при $\eta \gg 1$ также определяется величиной h^2 .

В заключение раздела отметим, что фундаментальное решение уравнения (5) позволяет более детально исследовать структуру поля X , включая в себя как частные случаи результаты, полученные ранее другими авторами.

Перейдем к исследованию уравнения для амплитуды вертикального смещения Z . После ряда преобразований, которые здесь опущены, находим следующую связь между X и Z :

$$\begin{aligned}
 & i\alpha \left\{ e^u \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 \right] + \beta^2(h^2 - \alpha^2) \right\} X = \\
 & = \alpha^2 \beta^2 \left(\frac{d}{du} - \frac{1}{\gamma} \right) Z + e^u \left(\frac{d^2}{du^2} - \frac{d}{du} + h^2 \right) \left(\frac{d}{du} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) Z.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Исключая X из (3) и (14) и вновь используя замену переменных $\eta = h^2 \beta^2 e^{-u}$, окончательно получаем

$$\left[L \left(\eta, \frac{d}{d\eta} \right) \left(\eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d}{d\eta} + h^2 \right) - H \left(\eta, \frac{d}{d\eta} \right) \left(\eta \frac{d}{d\eta} + \frac{1}{\gamma} \right) \right] Z = 0. \tag{15}$$

Здесь операторы $L \left(\eta, \frac{d}{d\eta} \right)$, $H \left(\eta, \frac{d}{d\eta} \right)$ равны соответственно

$$\begin{aligned}
 L \left(\eta, \frac{d}{d\eta} \right) &= \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 \right] \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \eta \frac{d}{d\eta} \right) - \\
 & - \Psi(\eta) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \eta \frac{d}{d\eta} \right) \left(\frac{1}{\gamma} - \eta \frac{d}{d\eta} \right) - \Psi^2(\eta);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$H\left(\eta, \frac{d}{d\eta}\right) = \frac{\alpha^2}{h^2} \eta \left\{ \left[\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 \right] + \frac{\gamma-1}{\gamma} \Psi(\eta) + \Psi(\eta) \eta \frac{d}{d\eta} \right\}, \quad (17)$$

а $\Psi(\eta) = \left[\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 \right] + \left(1 - \frac{\alpha^2}{h^2} \right) \eta$. Отметим, что при произвольных значениях параметров среды и величин ω, k уравнение (15) не может быть преобразовано к виду, аналогичному (5).

Особыми для уравнения (15) являются точки $\eta_1 = 0, \eta_2 = \infty, \eta_3 = h^2[(\gamma-1)^2/\gamma^2 - \alpha^2]/(\alpha^2 - h^2)$. В окрестности $\eta = \eta_1$ решения можно отыскивать методом степенных рядов [1, 6]:

$$Z = \eta^r \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} \eta^{\mu} \quad (c_0 \neq 0). \quad (18)$$

При условии $\alpha \neq (\gamma-1)/\gamma$ значения r найдены в [1]. Если же $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$, то особые точки η_1 и η_3 сливаются и асимптотика одного из четырех линейно независимых решений Z при $\eta \ll 1$ отличается от той, которая получена в указанной работе. Наиболее наглядно это можно показать следующим образом. При $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$ уравнение (15) преобразуется к виду (5), следовательно, фундаментальное решение всюду, кроме окрестности точки $\eta = \eta_2$, может быть записано через G -функции, аналогичные системе (7а) — (7г). Нетрудно получить следующие значения параметров b_j :

$$b_1 = \alpha, \quad b_2 = 1 - \alpha, \quad b_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4h^2}. \quad (19)$$

Из сопоставления с результатами [1] видно, что при слиянии особых точек изменился характер поведения решения Z_2 : если при $\alpha \neq (\gamma-1)/\gamma$ $Z_2 \sim \eta^{-\alpha}$ и возрастает с увеличением высоты, то при $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$ $Z_2 \sim \eta^{1-\alpha}$ и с ростом z уменьшается.

При условии, что $h^2 = \alpha^2$, сливаются особые точки η_2 и η_3 . В этом случае уравнение (15) также может быть записано в форме (5), а асимптотическое поведение решений при $\eta \ll 1$ совпадает с найденным в [1].

При произвольных значениях параметров h, α, γ представить решения уравнения (15) в окрестности точек η_2, η_3 в виде степенных рядов не удалось. Поведение полей Z при $\eta \gg 1$ можно проследить, если h, α, γ связаны равенством $h = \alpha = (\gamma-1)/\gamma$. В этом случае четыре линейно независимых решения уравнения (15) в окрестности η_2 выражаются через известные функции:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2^{1-2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right) \eta^{-1/2} S_{2\alpha, \sqrt{1-4\alpha^2}}(2\sqrt{\eta}), \\ Z_2 &= 2^{1+2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right) \eta^{-1/2} S_{-2\alpha, \sqrt{1-4\alpha^2}}(2\sqrt{\eta}), \\ Z_3 &= -\pi \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2} \pi i\right) \eta^{-1/2} H_{\sqrt{1-4\alpha^2}}^{(2)}(2\sqrt{\eta}), \\ Z_4 &= -\pi \exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\alpha^2} \pi i\right) \eta^{-1/2} H_{\sqrt{1-4\alpha^2}}^{(1)}(2\sqrt{\eta}). \end{aligned} \quad (20)$$

При $\eta \gg 1$

$$\begin{aligned} Z_1 &\sim \eta^{\alpha-1}, & Z_2 &\sim \eta^{-1-\alpha}, \\ Z_3 &\sim \eta^{-3/4} \exp(-2i\sqrt{\eta}), & Z_4 &\sim \eta^{-3/4} \exp(2i\sqrt{\eta}). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, амплитуда вертикального смещения нарастает с увеличением высоты z в атмосфере.

На основании всех полученных выше результатов можно сделать следующие выводы. Если $\eta = (\omega^2 z_c^2 / c_{A0}^2) \exp(-z/z_c) \ll 1$, то атмосфера непрозрачна для частот, определяемых из неравенства $4h^2 \ll 1$. Это означает, что при указанных условиях в атмосфере не могут распространяться в вертикальном направлении волны на любых высотах $z > 0$, если напряженность магнитных полей достаточно велика. При $\eta \gg 1$ в атмосфере возможно существование волновых движений при любых значениях h^2 , причем имеет место полное внутреннее отражение от области больших высот z , если $4h^2 \ll 1$, поскольку при $z \rightarrow \infty$ переменная $\eta \rightarrow 0$.

Предельные выражения (13), полученные при $\eta \gg 1$, соответствуют приближению геометрической оптики для всех решений X_i , если выполнено также условие $h^2 \gg 1$. При $h^2 \ll 1$ указанное приближение имеет место лишь для решений с индексами 3 и 4 (см. также (21)). При $\eta \ll 1$ геометрической оптике соответствуют решения 3 и 4, если $h^2 \gg 1$ (см. соотношения (8)). Амплитуды горизонтальных смещений X при $\eta \gg 1$ нарастают с увеличением z . При $\eta \ll 1$ имеются и нарастающие, и убывающие решения. Последнее справедливо и для вертикального смещения Z , если $\eta \ll 1$. В особом случае, когда $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ с ростом z убывают два линейно независимых решения Z . Если же указанное равенство не выполнено, то с ростом z убывает лишь одно линейно независимое решение.

Автор признателен С. Б. Пикельнеру, В. П. Докучаеву и Г. М. Жислину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. C. A. Ferraro, C. Plumpton, *Astrophys. J.*, **127**, № 2, 459 (1958).
2. Б. А. Тверской, ДАН СССР, **144**, № 2, 338 (1962).
3. R. Lüst, M. Scholer, *Zs. f. Naturforsch.*, **21a**, № 7, 1098 (1966).
4. С. Р. Уц, *Phys. Fluids*, **8**, № 4, 650 (1965).
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, **1**, изд. Наука, М., 1965.
6. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 февраля 1969 г.

PROPAGATION OF MAGNETO-SOUND WAVES IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

V. D. Brengauz

The propagation of magneto-sound waves in isothermal magneto-sphere is investigated in a linear approximation. The uniform magnetic field H_0 is directed parallel to the acceleration of gravity g . A fundamental solution of the equation, describing the behaviour of small displacements perpendicular to the magnetic field, is found. There is also obtained the equation for the displacement parallel to the magnetic field and its analysis is made. The fundamental solutions obtained are shown to involve the results [1] as partial cases.

УДК 621.371.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА, РАССЕЯННОГО НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Ю. В. Гребенюк, А. И. Грачев

Анализируются результаты наблюдений рассеяния радиоволн ионосферой на высотах 85—95 км с помощью аппаратуры когерентного приема. Вычислены статистические характеристики амплитуды сигнала и доплеровского смещения частоты, обусловленного движениями неоднородностей ионосферы.

Наблюдения рассеяния радиоволн ионосферой на частоте 30 МГц, проведенные в Институте физики атмосферы АН СССР в 1965—66 гг. [6], показали, что мощность рассеянного сигнала была мала и составляла 10^{-16} — 10^{-17} Вт, что на 2—3 порядка ниже уровня космических шумов приемника. Используемая в этих наблюдениях аппаратура позволяла регистрировать сигнал с большим усреднением, что вело к значительной потере информации о характере рассеянного сигнала. С целью повышения чувствительности приемной аппаратуры в радиоакустической лаборатории ИФА АН СССР был создан узкополосный приемник.

Блок-схема аппаратуры когерентного приема представлена на рис. 1. Из схемы видно, что напряжения задающих кварцевых генераторов G_1 , G_2 и G_3 служат одновременно как для формирования напряжения 30 МГц, излучаемого передатчиком, так и для формирования опорных напряжений, поступающих на смесители и синхронные детекторы приемника. Такой метод формирования опорных напряжений передатчика и приемника решает проблему стабильности работы схемы. Значительное сужение полосы пропускания приемника ΔF по сравнению с частотой модуляции F приводит к увеличению отношения сигнал/шум на выходе приемника в $F/\Delta F$ раз. При полосе пропускания приемника $\Delta F = 2$ гц чувствительность его, определяемая космическими шумами, составляет 10^{-17} Вт.

Высота, с которой приходит рассеянный сигнал, определяется, как обычно, по времени задержки между зондирующим импульсом и стробом, открывающим приемник на время действия сигнала.

С выхода приемника сигнал поступает на два синхронных детектора, опорные напряжения на которые подаются со сдвигом фазы $\psi = 90^\circ$. На ленте самописца регистрируются напряжения с выходов синхронных детекторов, пропорциональные величинам $A \cos \varphi$ и $A \sin \varphi$, где A — амплитуда рассеянного сигнала, а φ — произвольная фаза, постоянная относительно фазы излученного сигнала.

С помощью аппаратуры когерентного приема производились наблюдения рассеяния радиоволн на неоднородностях электронной концентрации ионосферы в период май — сентябрь 1967 г., а также июль — август 1968 г. Как и в [6], сигнал наблюдался в очень узком интервале высот 85—95 км, продолжительность его приема колебалась от нескольких минут до 1,5—2 часов.

ское смещение частоты, обусловленное движением неоднородностей в рассеивающем объеме как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Оценка вклада в доплеровское смещение частоты различных компонент движения будет сделана ниже.

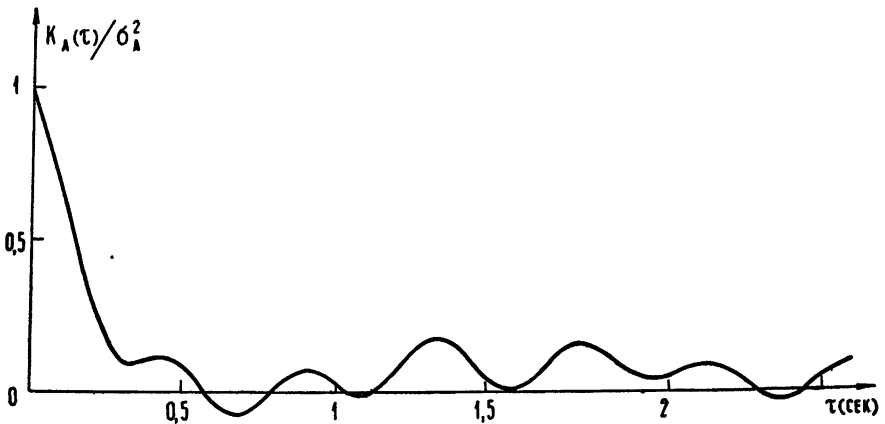


Рис. 2. Автокорреляционная функция флуктуаций амплитуды.

На рис. 3 а приведен ход во времени доплеровского смещения частоты $F_{\text{доп}}$. Из рисунка видно, что доплеровское смещение сильно флуктуирует, изменяя свою величину и направление за доли секунды.

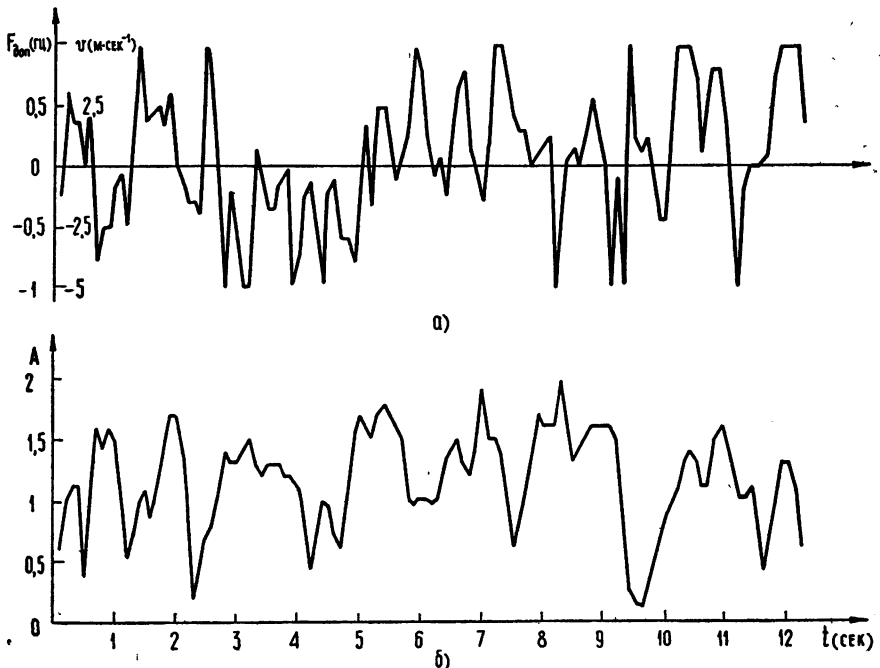


Рис. 3. а) Временной ход амплитуды рассеянного сигнала; б) временной ход доплеровского смещения частоты.

Среднеквадратичные скорости хаотических движений, вычисленные по пульсациям $F_{\text{доп}}$, составляют $1,5-3 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ при средних скоростях движения $0,15-1,5 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$. По средним значениям доплеровского смещения частоты за период наблюдения $T = 90 \text{ сек}$ были вычислены скорости регулярного смещения центра излучения рассеянного поля. Эти скорости, как видно из рис. 4, малы, не превышают значения

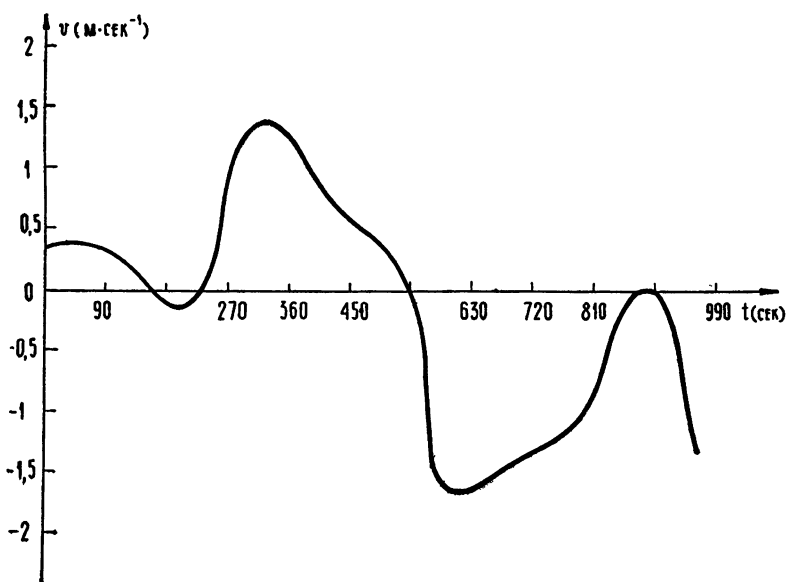


Рис. 4. Скорости регулярного смещения центра излучения рассеянного поля.

$2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ и изменяют свою величину и направление за период в несколько минут. Вычисление распределения вероятности доплеровских частот (скоростей) показало, что оно хорошо соответствует нормальному закону распределения. На рис. 5 представлен закон распределения скоростей в вероятностном масштабе, при котором нормальный закон изображается в виде прямой линии. Отклонения экспериментальных данных от теоретической прямой не велики.

Наблюдения рассеяния радиоволн ионосферой в этом эксперименте проводились на одной частоте $f=30 \text{ МГц}$. По данным таких наблюдений трудно судить о механизме образования сигнала. Приход сигнала с высот 85—95 км может быть обусловлен 1) частичным отражением радиоволн от градиентов электронной концентрации большой горизонтальной протяженности, 2) рассеянием радиоволн на неоднородностях электронной концентрации. Однако рэлеевское распределение вероятности амплитуд указывает на то, что принятый сигнал не может быть связан с частичным отражением от вертикальных градиентов электронной концентрации большой горизонтальной протяженности [3]. Этот же вывод можно сделать на основании корреляционной функции флуктуаций амплитуды. Время корреляции τ_0 составляет доли секунды, в то время как при механизме частичного отражения τ_0 должно быть порядка времени прохождения неоднородностей через диаграмму направленности антенны, т. е. нескольких десятков секунд. Все эти характеристики принятого сигнала говорят о том, что он обусловлен рассеянием радиоволн на турбулентных образованиях электронной концентрации ионосферы.

Изменения амплитуды и фазы сигнала, рассеянного неоднородностями ионосферы, происходят в результате эволюции неоднородностей, а также из-за их движений в рассеивающем объеме. Роль эволюции неоднородностей в быстрых изменениях амплитуды и фазы сигнала не велика, так как продолжительность жизни неоднородностей масштаба 5 м. составляет 5—10 сек [2].

В ионосфере происходит как регулярный дрейф неоднородностей в горизонтальном и вертикальном направлениях, так и хаотичное движение рассеивающих центров. Для изменений частоты принимаемого сигнала существенны лишь радиальные движения неоднородностей. Горизонтальный перенос будет вызывать доплеровское смещение частоты сигнала, пришедшего от какого-либо рассеивающего элемента объема, равное

$$\frac{2v_r \sin \theta \cos \beta}{\lambda},$$

где θ — угол между вектикалью и направлением от антенны на рассеивающий элемент объема, β — угол между направлением ветра и горизонтальным радиус-вектором, соединяющим рассеивающий элемент объема с центром рассеивающего объема.

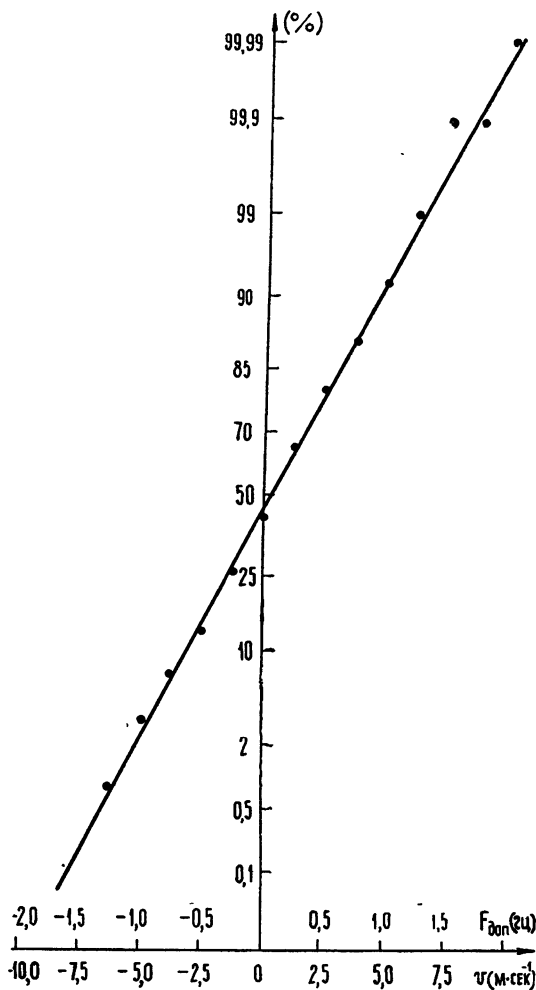


Рис. 5. Распределение вероятностей доплеровских смещений (скоростей).

Из этой формулы видно, что для узконаправленных антенн вклад горизонтального дрейфа в доплеровское смещение частоты входит с малым весом, определяемым величиной $\sin \theta \cos \beta$. Распределение доплеровского смещения частоты, обусловленного горизонтальными

движениями, как показали оценки с учетом диаграммы направленности антенны, при средней скорости горизонтального переноса $v_r = 50 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ имеет ширину порядка $\pm 0,3 \text{ гц}$. Допплеровские смещения частоты, превышающие значение $0,3 \text{ гц}$, практически полностью обуславливаются вертикальными турбулентными движениями. Отличие общего распределения доплеровских частот от распределения частот, обусловленного горизонтальным дрейфом, позволяет оценить распределение вертикальных турбулентных движений.

1) Производились измерения сигнала, рассеянного на неоднородностях электронной концентрации ионосферы.

2) Амплитуда рассеянного сигнала сильно флуктуирует с частотой $1-2 \text{ гц}$; распределение вероятности амплитуд сигнала подчиняется рэлеевскому закону.

3) Время корреляции флуктуаций амплитуды составляет $\sim 0,6 \text{ сек}$

4) Допплеровские смещения частоты изменяют свою величину и направление за доли секунды. Распределение вероятностей доплеровских частот (скоростей движения неоднородностей) близко к нормальному закону.

5) Горизонтальный дрейф неоднородностей со скоростью v_r вызывает доплеровское смещение частоты, не превышающее значения $F_{\text{доп}} (\text{гц}) \simeq 6,7 \cdot 10^{-3} v_r (\text{м} \cdot \text{сек}^{-1})$. Смещения частоты большей величины обуславливаются вертикальными турбулентными движениями.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. М. Бовшеверову за ценные указания и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 551 (1960)
3. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1966.
4. H. G. Booker, J. Geophys. Res., 64, 2164 (1959).
5. K. L. Bowles, Phys. Rev. Lett., 1, 454 (1953).
6. А. И. Грачев, Ю. В. Гребенюк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1474 (1969).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
10 марта 1969 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF A SIGNAL SCATTERED ON IRREGULARITIES OF THE LOWER IONOSPHERE

Yu. V. Grebenyuk, A. I. Grachev

The observation results of ionospheric radio wave scattering at the heights of 85–95 km are analysed by means of apparatus of coherent reception. Statistical characteristics of the amplitude of the signal and Doppler shift caused by the motions of ionospheric irregularities are calculated.

УДК 538.56 : 525.19

РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРОЙ НА ЧАСТОТЕ 30 Мгц

А. И. Грачев, Ю. В. Гребенюк

Излагаются результаты наблюдений рассеяния радиоволн в ионосфере на частоте 30 Мгц при вертикальном зондировании. Приведены данные аппаратуры, которая использовалась при наблюдениях, оценена величина спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации в ионосфере для размера неоднородностей 5 м. Основное влияние на рассеяние оказывает ионосфера на высоте 85—100 км. Приведена оценка числа Ричардсона для высот 80—130 км, а также качественная интерпретация результатов наблюдений.

Флуктуации электронной концентрации в ионосфере приводят к появлению мерцания источников космического радиоизлучения, флуктуациям амплитуды и угла прихода отраженных от ионосферы радиоволн, рассеянию радиоволн на частотах, превышающих критические частоты E-слоя ионосферы. К настоящему времени на основе экспериментальных данных о рассеянии радиоволн метрового диапазона [1—3] можно судить о характере суточного и сезонного хода и частотной зависимости интенсивности рассеяния в ионосфере. Оценки величин мощности, рассеянной неоднородностями электронной концентрации в ионосфере, сделаны в [4, 5]. На основе экспериментальных данных о рассеянии получены величины спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации в ионосфере в области масштабов неоднородностей от 27 до 9 метров [5]. Значения их соответственно 10^{16} м^{-3} и 10^{12} м^{-3} .

В области этих масштабов зависимость спектральной плотности Φ_N от x можно представить в виде $\Phi_N(x) = Cx^{-n}$, где C — некоторая постоянная, x — волновое число, равное $2\pi/l$, l — размер неоднородностей. Величина n составляет в среднем около 6 и меняется от 4,5 до 7 в зависимости от времени суток и сезона.

Большинство экспериментальных данных о рассеянии получено при наклонном зондировании с использованием передатчиков с непрерывным излучением, поэтому оценки высот, полученные на основании этих данных, можно рассматривать только как ориентировочные [2, 3]. Согласно [3], этот интервал высот составляет 95—110 км, по данным [4] — 80—90 км. Применение импульсного метода при вертикальном зондировании [1] показало, что интервал высот, ответственных за рассеяние, — 80—160 км.

Ниже будут изложены результаты наблюдений обратного рассеяния радиоволн в ионосфере на частоте 30 Мгц при вертикальном зондировании (масштаб неоднородностей 5 м). Для этой цели была использована следующая аппаратура: передатчик с импульсной мощностью 70 квт, длительность импульса 7 мксек, приемник с полосой 10 кгц, накопитель с временем усреднения 30 сек, обеспечивающий прием сигнала на 20 дб ниже уровня шумов, антенна — синфазное полотно из 200 волновых диполей площадью $100 \times 100 \text{ м}$ — использовалась на передаче и приеме. Ширина диаграммы направленности антенны по уровню поло-

винной мощности — 5° . Наблюдения проводились на полигоне Звенигородской научной базы Института физики атмосферы АН СССР в летний период 1964—66 гг.

На рис. 1 приведен образец записи сигнала, рассеянного ионосферой, стрелкой на рисунке отмечен сигнал, отраженный от метеорного следа. Продолжительность приема рассеянного сигнала колеблется в широких пределах от нескольких минут до нескольких часов. Кроме этого, от дня к дню прием характерен своей нерегулярностью, а средняя интенсивность сигнала меняется в очень широких пределах. Временами она может увеличиться настолько, что сигнал можно видеть на выходе приемника без накопления. Оцененная из мощности рассеянного сигнала величина спектральной плотности электронной концентрации для этого случая достигает 10^{11} м^{-3} . Нижний предел этой величины, вычисленный из предельной чувствительности нашей установки, соответствует 10^9 м^{-3} .

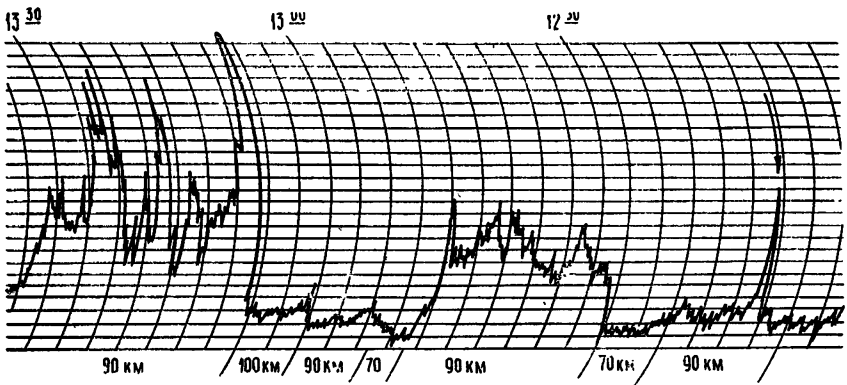


Рис. 1. Образец записи сигнала, рассеянного ионосферой.

На рис. 2 приведена гистограмма, показывающая процент времени, в течение которого величина Φ_N превосходит уровень $5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$ для каждого часа дневного времени. Максимальный процент времени наблю-

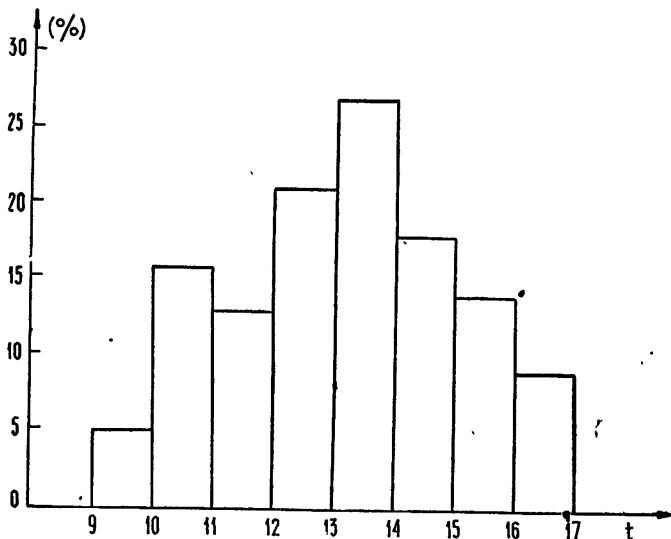


Рис. 2. Гистограмма превышения уровня $\Phi_N = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$ для дневного времени. Время местное.

дения сигнала приходится на полуденное время. За время немногочисленных наблюдений в зимний период, а также в ночное летнее время уверенного сигнала, рассеянного ионосферой, зарегистрировано не было.

Регистрация высот, с которых приходит рассеянный ионосферой сигнал, велась путем стробирования напряжения, подаваемого на накопитель. Длительность строба — от 20 до 50 мксек. Проведенные наблюдения показали, что рассеяние ионосферы на частоте 30 Мгц происходит в довольно узком интервале высот 85—100 км, соответствующем нижней части ионосферы. Из записей, полученных в течение всего периода наблюдений, лишь некоторые характеризуются сигналом, немного превосходящим предельную чувствительность аппаратуры. Что касается протяженности по высоте рассеивающего объема, то можно сказать, что в моменты, когда сигнал можно было видеть на выходе приемника без накопления, он занимал по высоте интервал, сравнимый с пространственной протяженностью импульса передатчика (2 км), т. е. не превышал разрешающей способности станции (1 км). Кроме того, наблюдались значительные флуктуации по высоте, вследствие чего длительность строба накопителя была выбрана больше длительности импульса передатчика. Следует заметить также, что в эти моменты высоты, на которых регистрировался сигнал, были 85—90 км.

Таким образом, высоты, ответственные за рассеяние на 30 Мгц, находятся ниже максимума электронной концентрации E -слоя ионосферы. Поэтому необходимо остановиться на рассмотрении сведений, касающихся указанного интервала высот. К сожалению, подробных данных о переходной области от D - к E -слою в настоящее время нет, тем не менее на основании экспериментальных исследований с помощью ракет можно сделать качественный анализ природы рассеяния на этих высотах.

Из ракетных измерений скорости ветра следует, что высоты до 110 км характеризуются большими величинами скорости ветра и ее градиентами [6, 7]. Далее, эта область относится к мезосфере с температурным минимумом в районе 85 км. Естественно предположить, что флуктуации электронной концентрации здесь связаны с особенностями атмосферной циркуляции и температурного профиля. Поскольку параметром, характеризующим влияние температурной стратификации на турбулентность, является число Ричардсона R_i , оценим величину R_i для объяснения особенностей рассеяния радиоволн в ионосфере.

Значения R_i были вычислены для высот от 80 до 130 км по данным градиентов скорости [7] и температуры [8]. Зависимость R_i от высоты приведена на рис. 3. Кривая 1 соответствует усредненным градиентам скорости, а кривая 2 — максимальным. Из рисунка видно, что для средних градиентов скорости $R_i > 1$ во всем диапазоне высот от 80 до 130 км. Выше 110 км R_i увеличивается с высотой. Существенно, что минимальные значения R_i (кривая 2) близки к нулю, т. е. к условиям безразличной стратификации.

Следует отметить, что выше 110 км также наблюдается тенденция к росту R_i с высотой. Поскольку при условиях, близких к безразличной стратификации, интенсивность динамической турбулентности может быть значительной [9], то можно ожидать, по крайней мере, эпизодически, возникновения достаточно интенсивной турбулентности и соответствующего рассеяния радиоволн на флуктуациях электронной концентрации, вызванных турбулентностью. В обычных условиях, когда существует турбулентность малой интенсивности [9], при достаточной чувствительности аппаратуры слабое рассеяние на турбулентных флуктуациях электронной концентрации должно наблюдаться более или менее регулярно. Если учесть, что с ростом R_i интенсивность турбулентности падает и что, начиная со 110 км, R_i растет довольно быстро, то выше этого

уровня можно ожидать достаточно быстрого уменьшения интенсивности турбулентности. Поэтому наиболее вероятным интервалом высот, где может наблюдаться рассеяние на турбулентных флуктуациях электронной концентрации, будут высоты от 80 до 110 км. Экспериментальные данные о рассеянии радиоволн, полученные ранее, а также наши измерения подтверждают это.

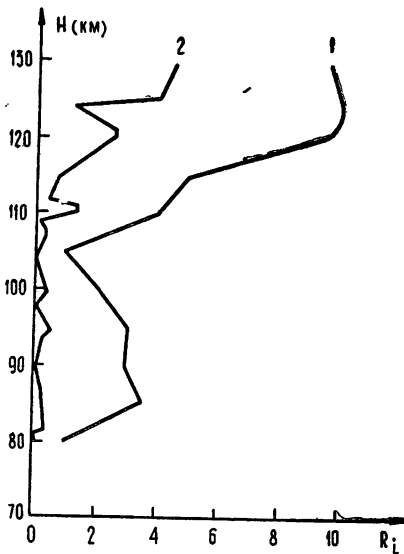


Рис. 3. Зависимость числа Ричардсона R_i от высоты:
1—для средних градиентов скорости; 2—для максимальных градиентов скорости на данной высоте.

Что касается произведенных нами измерений рассеяния на частоте 30 МГц (масштаб неоднородностей 5 м), то высотный интервал, полученный нами (85—100 км), сверху ограничен также и тем, что длина свободного пробега электронов уже на высоте 120 км составляет около 6 м, и трудно ожидать появления на этой высоте и выше неоднородностей меньшего масштаба. Естественно, что нижний предел высот, на которых может наблюдаться рассеяние на частоте 30 МГц, относится к ~80 км, где величина электронной концентрации уже достаточна, чтобы влиять на распространение радиоволн указанной частоты.

В заключение следует сделать несколько замечаний, касающихся особенностей суточного и сезонного хода интенсивности рассеяния. Спектральная плотность флуктуаций электронной концентрации Φ_N

при заданном x пропорциональна $\text{grad } \tilde{N}$, где \tilde{N} — средняя электронная концентрация [5]. Поскольку от дня к ночи средняя электронная концентрация в максимуме E -слоя падает примерно от 10^5 см^{-3} до 10^3 см^{-3} [10], то и градиент электронной концентрации по высоте от дня к ночи должен уменьшаться, что приведет к падению средней интенсивности рассеяния в ночное время. Поэтому не является удивительным тот факт, что максимальный уровень рассеянного сигнала наблюдается в полуденные часы, когда электронная концентрация в максимуме E -слоя является наибольшей и надо ожидать увеличения градиента электронной концентрации на высотах ниже максимума E -слоя. Наблюдаемая разница в интенсивности рассеяния [4] между полуднем и ночным време-

нем в 15 дБ соответствует падению градиента \tilde{N} всего лишь в 5,5 раз, что представляется вполне реальным. Различие в интенсивности рассеяния между летними и зимними месяцами еще меньше (~5 дБ), соответствующая разница в величине градиента — около двух.

Таким образом, рассеяние радиоволн наблюдается в условиях,

которым соответствуют большие градиенты \tilde{N} ($\sim 10^6 \text{ м}^{-4}$) [11, 12] и относительно малые R_f , т. е. в условиях наиболее благоприятных как для возникновения турбулентности, так и для ее наблюдения.

Авторы благодарны В. М. Бовшеверову, руководившему выполнением работы, и В. И. Татарскому за ценные советы при обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. И. Яковлев, В. И. Бочаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 3, 370 (1959).
2. J. C. Blair, R. M. Davis, R. C. Kirby, J. Res. NBS, 65 D, № 5, 417 (1961).
3. R. Cohen, K. L. Bowles, J. Res. NBS, 67 D, № 5, 459 (1963).
4. H. G. Booker, J. Geophys. Res., 64, 2164 (1959).
5. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 551 (1960).
6. H. D. Edwards, M. M. Cooksey, C. G. Justus, R. N. Fuller, D. L. Albritton, N. W. Rosenberg, J. Geophys. Res., 68, № 10, 3021 (1963).
7. А. Kochansky, J. Geophys. Res., 69, № 17, 3651 (1964).
8. K. S. W. Champion, Space Res., 7/2, 1101 (1967).
9. А. С. Мониц, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, изд. Наука, М., 1965.
10. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
11. R. E. Bourdeau, A. C. Aikin, J. L. Donley, J. Geophys. Res., 71, № 3, 727 (1966).
12. E. A. Mechtly, S. A. Bowhill, L. G. Smith, H. W. Knowell, J. Geophys. Res., 72, № 21, 5239 (1967).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
10 марта 1969 г.

RADIO WAVE SCATTERING BY THE LOWER IONOSPHERE AT A FREQUENCY OF 30 Mc/s

A. I. Grachev, Yu. V. Grebenyuk

The authors present the results of observing the ionospheric radio wave scattering at the frequency 30 Mc/s at vertical probing. The parameters of the apparatus used for observations are presented. The value of spectral density of fluctuations of electron concentration in the ionosphere for irregularity scale of 5 m is estimated. At the height of 85—100 km, the ionosphere has the main influence on the scattering. The Richardson number is evaluated for the heights of 80—130 km and the qualitative interpretation of the observational data is given.

УДК 621.378.362

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

В. О. Шахов

Приводятся результаты экспериментальных исследований процесса установления амплитуды колебаний в молекулярном генераторе с одним и двумя встречными пучками при быстром включении добротности резонатора, которое осуществлялось с помощью введенного в резонатор постоянного электрического поля. Установление амплитуды колебаний носит осцилляционный характер в соответствии с теоретическим анализом.

Изучение нестационарных процессов в молекулярном генераторе (МГ), т. е. установления амплитуды и фазы его колебаний, имеет важное практическое значение при оценке влияния на его работу различных быстро изменяющихся факторов.

В работах [1, 2] был проведен теоретический анализ переходных процессов в молекулярном генераторе, в результате чего были выяснены основные закономерности установления амплитуды и фазы колебаний в МГ. В работе [2] приводятся результаты экспериментальных исследований процессов установления амплитуды и фазы колебаний в МГ при подаче прямоугольного импульса высокого напряжения на его сортирующую систему. Однако в этом эксперименте не было послучено осцилляционного характера установления амплитуды колебаний в МГ, который следует из теоретического рассмотрения. Такой результат объясняется тем обстоятельством, что при указанном методе исследований нельзя удовлетворить условию $\tau_f \ll \tau$, при котором должен иметь место предсказываемый теорией осцилляционный характер установления амплитуды колебаний в МГ. (Здесь τ_f — время формирования пучка, τ — среднее время пролета молекул через резонатор.) Кроме того, в эксперименте [1] не были исследованы переходные процессы в МГ с двумя встречными пучками.

В работе [1] указано, что условие $\tau_f \ll \tau$ выполняется при быстром включении добротности резонатора. Здесь же отмечено, что при малых интенсивностях пучка это можно осуществить наложением внешнего магнитного поля.

На основании экспериментальных исследований [3] воздействия постоянных электрических полей, создаваемых в резонаторе, на работу молекулярного генератора представилось возможным осуществить быстрое включение добротности генератора с помощью снятия постоянного электрического поля, предварительно созданного в резонаторе МГ. При этом удалось рассмотреть процесс установления амплитуды колебаний в молекулярном генераторе с одним и двумя встречными пучками.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для анализа процесса установления амплитуды колебаний МГ использовалась установка, блок-схема которой приведена на рис. 1.

Исследовался молекулярный генератор с двумя встречными пучками, в котором применялся резонатор с шестью введенными внутрь

электродами [3]. К этим электродам через нормально замкнутые контакты 1—3 реле P_1 прикладывалось постоянное электрическое напряжение 1000 в, которое обеспечивало срыв генерации МГ.

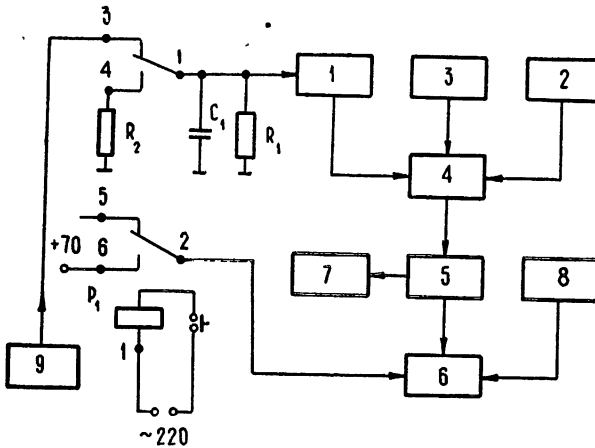


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1—исследуемый МГ; 2—опорный МГ; 3—гетеродин ГС-701; 4—смеситель; 5—УПЧ с детектором; 6—осциллограф ОК-17М; 7—вольтметр ЛВ-9; 8—генератор ЗГ-12М; 9—источник напряжения ИВН-1.

При срабатывании реле контакты 1—3 размыкались и замыкались контакты 1—4. При этом конденсатор C_1 быстро разряжался через небольшое (~ 50 ом) сопротивление R_2 и напряжение с электродов снималось, чем создавались условия для возникновения генерации. Постоянная времени разряда конденсатора C_1 была во много раз меньше ожидаемого времени переходного процесса в МГ и равнялась $\sim 10^{-5}$ сек.

С небольшим опережением, порядка 0,1—0,2 мсек, относительно замыкания контактов 1—4 замыкались контакты 2—6, через которые напряжение 70 в подавалось скачком на осциллограф ОК-17М для его запуска. На один из входов ОК-17М подавалось напряжение с выхода детектора УПЧ, а на другой—гармоническое напряжение с частотой 10 кГц от генератора ЗГ-12 в качестве масштаба времени. При разряде конденсатора C_1 на выходе детектора УПЧ появлялся видеоимпульс, который служил началом отсчета. Настройка гетеродина осуществлялась по максимуму сигнала разностной частоты сопоставляемых МГ на выходе УПЧ и в процессе эксперимента все время контролировалась. Полоса пропускания всего измерительного тракта в основном определялась полосой пропускания низкочастотной части после детектора и равнялась 65 кГц на уровне 0,5.

Процесс установления амплитуды колебаний в МГ исследовался при различных интенсивностях пучка и при разных сортирующих напряжениях при одном и двух встречных пучках.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 приведены некоторые осциллограммы процессов установления амплитуды колебаний в МГ при быстром включении добротности резонатора.

Детально проведенный в работе [1] теоретический анализ показал, что время молчания T_m , связанное с формированием пучка, определяется соотношением

$$T_m = \tau_\phi \left(1 + \ln \frac{\beta}{\beta-1} \right) + \frac{\tau}{\beta-1} \ln \frac{X_{in}^2}{\chi X_H^2}, \quad (1)$$

где все обозначения соответствуют [1]. В случае быстрого включения добротности генератора τ_ϕ определяется лишь длиной резонатора и равно

$$\tau_\phi = \frac{l_p}{\bar{v}}, \quad (2)$$

где l_p — длина резонатора, \bar{v} — средняя скорость молекул в пучке.

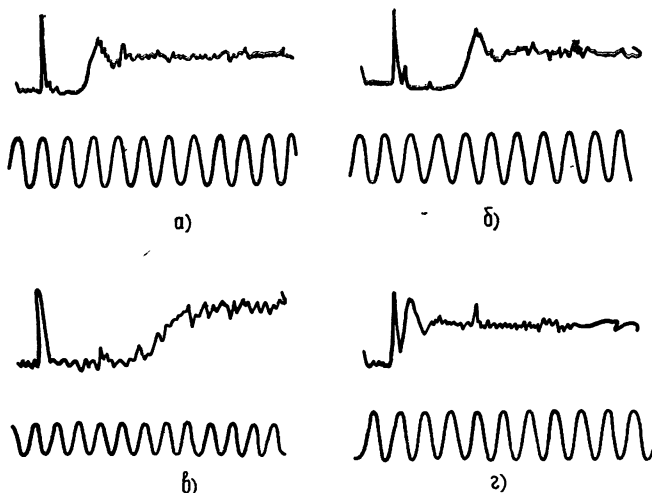


Рис. 2. Экспериментальные характеристики установления амплитуды колебаний в МГ:

а) $A=A_{\max}$, $u_{c.c.}=26$ кВ; б) $A=0,5 A_{\max}$, $u_{c.c.}=26$ кВ; в) $A=0,1 A_{\max}$, $u_{c.c.}=18$ кВ; г) случай двух встречных пучков.

Согласно [1], процесс установления в общем случае описывается выражением

$$\xi = \xi_0 e^{-(t/2\tau)} \cos \left[\left(\beta - \frac{5}{4} \right)^{1/2} \frac{t}{\tau} + \varphi \right], \quad (3)$$

из которого следует, что время установления колебаний не зависит от β — коэффициента самовозбуждения, а частота осцилляций, как и время молчания, является функцией β :

$$\Omega = \frac{1}{\tau} \sqrt{\beta - \frac{5}{4}}. \quad (4)$$

Эксперимент показал, что при достаточно интенсивном одном пучке, при котором максимум амплитуды генерации достигается при $u_{c.c.} = 26$ кВ, процесс установления амплитуды колебаний в МГ носит осцилляционный характер (рис. 2 а), что совпадает с теоретическими выводами работ [1, 2]. При этом время молчания составляет 0,16 мсек, время нарастания амплитуды колебаний от 0,1 A_{\max} до 0,9 A_{\max} равняется 0,05 мсек, а длительность первой полуволны осцилляций — 0,06 мсек. Полученное время молчания очень хорошо согласуется с результатами теоретического расчета по формуле (1) при условии $\beta \gg 1$,

которые дают значение $T_m = 0,16$ мсек при используемом резонаторе длиной $l_p = 80$ мм и $v = 5 \cdot 10^4$ см·сек⁻¹.

При уменьшении интенсивности пучка, таком, что $A = 0,5 A_{\max}$, сохраняется осцилляционный характер установления колебаний, но увеличивается время молчания до 0,24 мсек, а время нарастания амплитуды—до 0,06 мсек (рис. 2 б). При сортирующем напряжении, близком к пороговому, время молчания увеличивается примерно в 3 раза и равно 0,5 мсек, процесс установления принимает аperiodический характер, а время нарастания достигает 0,18 мсек (рис. 2 в).

В целом характер изменения времени молчания при уменьшении интенсивности пучка и сортирующего напряжения, вызывающем соответствующее уменьшение β , соответствует расчетным данным, однако точное количественное сопоставление затруднено, поскольку неизвестна зависимость коэффициента самовозбуждения β от амплитуды установившихся колебаний МГ, которая контролировалась в процессе эксперимента.

Время установления колебаний в МГ, как следует из рис. 2 а—2 в, не зависит от амплитуды колебаний и по величине равно 0,2 мсек $\approx \tau_{\phi} = 0,16$ мсек, что хорошо согласуется с выражением (2).

При использовании двух встречных симметричных пучков резко сокращалось время молчания и время нарастания амплитуды колебаний в МГ. Так, при двух пучках, каждый из которых в отдельности обеспечивает максимум амплитуды установившихся колебаний, время молчания и нарастания в сумме составляют всего 0,04 мсек и время молчания меньше, чем длительность импульса, устанавливающего начало отсчета, равная 0,03 мсек. При этом процесс установления амплитуды имел осцилляционный характер и длительность первой полуволны осцилляций по-прежнему равнялась 0,06 мсек (рис. 2 г). При уменьшении интенсивностей встречных пучков увеличивалось время молчания и время установления. Зависимость частоты осцилляций от амплитуды установившихся колебаний МГ в процессе эксперимента не обнаружена.

Проведенные эксперименты показали, что установление амплитуды колебаний в МГ при выполнении условия $\tau_{\phi} \ll \tau$ действительно имеет осцилляционный характер. При этом время молчания и время установления по порядку величины равны среднему времени пролета молекул через резонатор.

Исследован процесс установления амплитуды колебаний в МГ с двумя встречными пучками и обнаружено, что при этом время молчания существенно меньше среднего времени пролета молекул через резонатор.

Полученные результаты могут быть полезны при оценке влияния различных быстро изменяющихся факторов на амплитуду колебаний молекулярного генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
2. А. З. Грасюк, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 9, № 3, 524 (1964).
3. В. О. Шахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 477 (1967).

Поступила в редакцию
4 октября 1967 г.,
после доработки
21 мая 1969 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF TRANSIENT PROCESSES
IN A MOLECULAR GENERATOR*V. O. Shakhov*

The author presents experimental studies of the setting up process of the oscillation amplitude in a molecular generator with one and two opposite beams at a rapid Q-switching of the resonator which was realized by means of the constant electric field applied in the resonator. Adjusting of the oscillation amplitude is of oscillatory character in accordance with theoretical analysis.

УДК 538.56 : 535

О НЕКОТОРЫХ ФАКТОРАХ, ВЛИЯЮЩИХ НА ОБРАЗОВАНИЕ НИТЕЙ ПРИ САМОФОКУСИРОВКЕ СВЕТА

Ю. М. Максимов, В. И. Таланов

Численными методами показано, что такие факторы как насыщенные нелинейности, многофотонное поглощение и вынужденное комбинационное рассеяние могут играть значительную роль в образовании нитей при самофокусировке света.

Эффект схлопывания интенсивного светового пучка, предсказанный теорией самофокусировки [1-4], был надежно зафиксирован в целом ряде экспериментов. В частности, измерения пороговых характеристик вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) подтвердили теоретическую зависимость длины самофокусировки от параметров пучка и среды [5-7]. Вместе с тем уже в первых опытах было отмечено образование светящихся каналов — тонких нитей диаметром в несколько десятков микрон [8-10]. Позднее были обнаружены еще и сверхтонкие нити диаметром в несколько микрон [11, 12].

Теория самофокусировки света в кубичной непоглощающей среде не приводит к выводу о переходе схлопывающегося пучка в самоподдерживающийся световой канал. Поэтому высказывались соображения о необходимости учета дополнительных факторов: насыщения эффекта Керра, линейного и многофотонного поглощения, электрострикции, различных типов нелинейного рассеяния и т. п. Для объяснения сверхтонких нитей привлекались гипотезы о пространственной дисперсии [13], фазовых переходах в сильных полях [14], увеличении поляризуемости возбужденных молекул [15], отмечалась роль нестационарного характера процесса самофокусировки, в частности, аномального уширения спектра [16]. Высказывалась мысль об интерпретации сверхтонких нитей как следа, оставляемого точкой схлопывания при изменении интенсивности падающего пучка света [17].

Ввиду большой сложности уравнений процессов, сопряженных с самофокусировкой света, естественно попытаться включить в теоретическую схему лишь наиболее существенные факторы. Здесь мы покажем, основываясь на численном решении уравнений, что такие факторы как насыщение нелинейности, многофотонное поглощение и ВКР могут влиять на образование нитей.

Приведенные ниже численные результаты носят в основном иллюстративный характер, лишь качественно поясняя влияние того или иного фактора*.

* Указанные факторы, кроме ВКР, учитывались и в расчетах, приведенных в работе [19], однако применявшаяся там схема вычислений (решение уравнений для амплитуды и фазы поля) не позволяла продвинуться за точку наибольшего сжатия пучка. В данной работе искомыми в ходе вычислений были действительные и мнимые части комплексных амплитуд, что позволило вести счет вплоть до нескольких длин самофокусировки.

Влияние насыщения нелинейности и многофотонного поглощения в параболическом уравнении для лучевой амплитуды пучка $E = E_0 \exp(-iz)$ [19]

$$\Delta_{\perp} e - 2ie'_z + f_1(|e|^2)e - if_2(|e|^2)e = 0 \quad (1)$$

учитывалось соответственно функциями f_1 и f_2 . Уравнение (1) записано в безразмерных переменных $r = k_0 r'$, $e = (\epsilon')^{1/2} E_0$, где $\epsilon' = \frac{\partial \epsilon}{\partial |E_0|^2} \frac{1}{\epsilon_0} \Big|_{E_0=0}$. Функции f_1 и f_2 в расчетах принимались в виде*

$$f_1 = \frac{|e|^2}{1 + |e|^2/e_{\text{sat}}^2}, \quad \frac{1}{2} f_2 = \nu_1 |e|^2 + \nu_2 |e|^4 + \dots, \quad (2)$$

где e_{sat} — поле насыщения ($f_1 \rightarrow e_{\text{sat}}^2$ при $|e|^2 \rightarrow \infty$), ν_i — коэффициенты многофотонного поглощения. Предполагалось, что в нелинейную среду входит гауссов пучок профиля $e(r, 0) = c_0 \exp(-r^2/b^2)$. Расчеты проводились для следующих случаев: 1) непоглощающая среда с насыщением нелинейности, 2) среда с насыщением нелинейности и двухфотонным поглощением, 3) среда с насыщением нелинейности и многофотонным поглощением ($\nu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$).

Не приводя конкретных графиков, дадим лишь качественное описание полученных результатов. В непоглощающей среде отчетливо видны чередующиеся области сильной фокусировки и дефокусировки пучка. В среде с двухфотонным поглощением колебания интенсивности по-прежнему сильно выражены, причем в областях дефокусировки пучок, в отличие от непоглощающей среды, разбивается на кольцевые зоны, которые наблюдаются и при больших z . Интенсивность поля в этих зонах сравнима с интенсивностью поля на оси. Полная мощность пучка заметно уменьшается в областях сильной фокусировки. При многофотонном поглощении колебания интенсивности поля по оси пучка сглаживаются заметно сильнее, чем при двухфотонном. На оси пучка образуется резко выраженный светящийся канал, не исчезающий и в областях относительной дефокусировки, в том числе и при больших значениях z . Кольцевые зоны в областях дефокусировки хотя и образуются, однако их интенсивность заметно ниже интенсивности основного осевого максимума. Таким образом, нелинейное поглощение высокого порядка способствует образованию светящихся нитей. Объясняется это резким затуханием интенсивности в максимумах поля в областях фокусировки. В результате структура поля в области фокусировки делается близкой к структуре самоподдерживающихся каналов в среде с насыщением e .

Для иллюстрации влияния ВКР на самофокусировку света рассмотрим, пренебрегая ВКР высших порядков, простейший случай взаимодействия пучков основного e_L и стоксового e_{st} излучения вперед в среде с насыщением нелинейности. Уравнения для каждого из полей запишем аналогично (1), полагая для простоты $f_2 = 0$, но добавляя слагаемые, содержащие комбинационную восприимчивость среды:

$$\Delta_{\perp} e_L - 2ie'_{Lz} + f_1(|e_L|^2 + |e_{st}|^2)e_L - ik_{st}^2 |e_{st}|^2 e_L = 0, \quad (3)$$

$$\Delta_{\perp} e_{st} - 2ike'_{stz} + k^2 f_1(|e_L|^2 + |e_{st}|^2)e_{st} + ik_{st}^2 |e_L|^2 e_{st} = 0.$$

* Как показывают вычисления слагаемых высшего порядка по $|e|^2$ в нелинейности, обусловленной эффектом Керра [20], детальный характер зависимости $f_1(|e|^2)$ отличается от принятого нами, однако для описываемых ниже эффектов это отличие несущественно.

Здесь $e_{L, st} = \sqrt{\epsilon'} E_{0, L, st}^*$, $\mu = \chi_R/\epsilon'$, χ_R — коэффициент комбинационной восприимчивости, $k = k_{st}/k_L$. Уравнения (3) справедливы при $(\omega_L - \omega_{st}) \tau \gg 1$, где τ — время релаксации анизотропии.

На рис. 1 показано изменение амплитуд полей $e_L(0, z)$ и $e_{st}(0, z)$ на оси пучка. При расчете предполагалось, что на входе в нелинейную среду помимо $e_L = e_0 \exp(-r^2/b^2)$ ($e_0 = 1$, $b = 10$) имеется небольшое «затравочное» поле e_{st} , пропорциональное e_L . На том же рисунке показано изменение мощностей основной (P_L) и стоксовой (P_{st}) компонент и полной мощности пучка $P_{tot} = P_L + P_{st}$. Из рис. 1 виден ряд особенностей в поведении полей e_L и e_{st} . Поле e_L , самофокусируясь, достигает максимума, после чего сначала быстро, а затем медленно затухает, слабо осциллируя. В области фокусировки поля e_L происходит интенсивная перекачка энергии основного излучения в стоксову компоненту, далее, в поле e_{st} наблюдается еще ряд возрастающих по величине (из-за продолжающейся перекачки энергии) максимумов. Однако колебания интенсивности здесь существенно меньше, чем были бы при таких полях в одночастотном случае, несмотря на значительное первоначальное превышение критической мощности самофокусировки: $P_L/P_{cr}^{(0)} = 13,4$.

Для поперечной структуры поля e_L характерна сильная фокусировка в области первого максимума $|e_L(0, z)|$ с последующим рас-

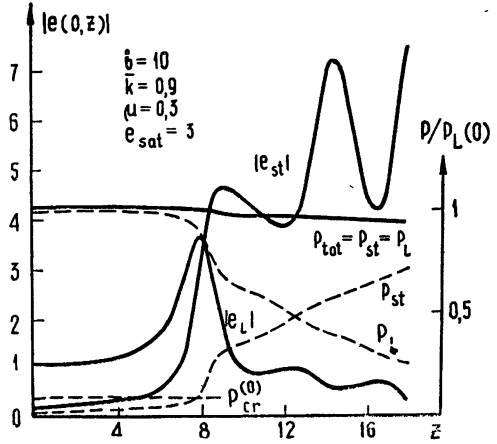


Рис. 1.

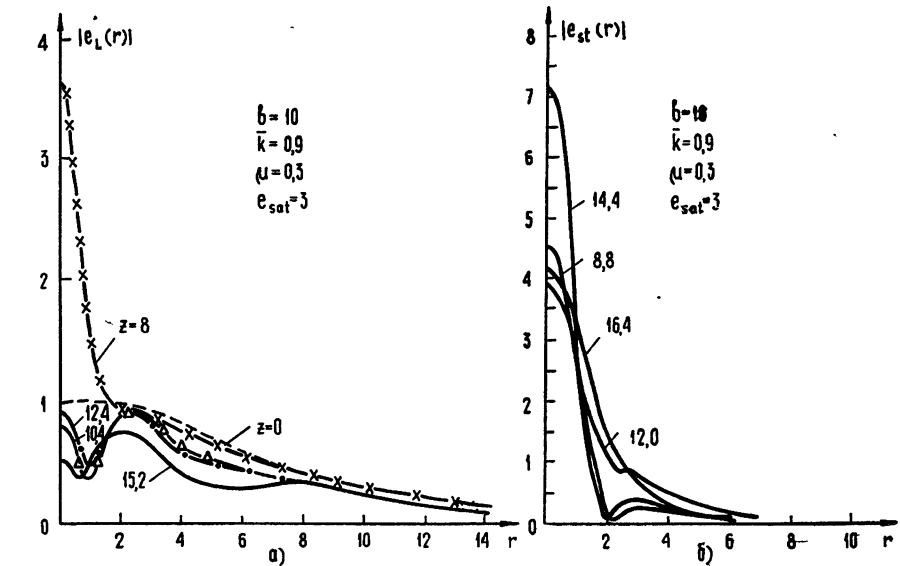


Рис. 2.

* Мы пренебрегаем дисперсией нелинейности.

слоением пучка на кольцевые зоны (рис. 2а). Наиболее примечательна, однако, структура поля $e_{st}(r, z)$: это поле за первым максимумом образует светящуюся нить со слабо выраженными колебаниями интенсивности и ширины (рис. 2б); мощность стоксовой компоненты в этой области в несколько раз превышает критическую мощность самофокусировки, чем и объясняется удержание нити.

Расчеты, проведенные при больших превышениях порога самофокусировки (например, $P_L/P_{cr}^{(0)} = 30^*$), показали, что колебания амплитуды поля e_{st} здесь выражены сильнее, причем на оси пучка при достаточно больших z могут быть даже минимумы интенсивности, но в довольно широкой области z за первым максимумом поля e_L структура поля e_{st} по-прежнему напоминает сформировавшуюся нить. В приведенных расчетах мы не учитывали поглощения, не связанного с ВКР, однако результаты для одночастотных пучков позволяют думать, что поглощение приведет к дополнительной стабилизации нитевидной структуры пучка e_{st} .

Таким образом, для самофокусировки при наличии ВКР характерно образование нитевидной структуры в поле не основной, а стоксовой компоненты за фокусом основного излучения. Имеющиеся экспериментальные данные подтверждают этот вывод [11, 12].

Авторы искренне признательны В. Н. Гольдбергу и Р. Э. Эрм за проведение необходимых вычислений на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. А. Аскаръян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
- 2 В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 2, 218 (1965).
- 3 P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett., 15, 1005 (1965).
- 4 С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, 1537 (1966).
- 5 C. Wang, Phys. Rev. Lett., 16, 344 (1966).
- 6 C. Wang, G. Racette, Appl. Phys. Lett., 8, 256 (1966).
- 7 W. Kaiser, A. Lauberau, M. Maier, G. Giordmain, Phys. Lett., 22, 60 (1966).
- 8 Н. Ф. Пилипецкий, Н. Ф. Рустамов, Письма в ЖЭТФ, 2, 88 (1965).
- 9 P. Lallemand, N. Bloembergen, Phys. Rev. Lett., 15, 1010 (1965).
- 10 E. Garmire, R. Chiao, C. Townes, Phys. Rev. Lett., 16, 347 (1966).
- 11 R. Y. Chiao, M. A. Johnson, S. Krinsky, H. A. Smith, C. H. Townes, E. Garmire, IEEEJ, QE-2, 467 (1966).
- 12 R. G. Brewer, J. R. Lifshitz, Phys. Lett., 23, 79 (1966).
- 13 K. Grob, M. Wagner, Phys. Rev. Lett., 17, 819 (1966).
- 14 Y. R. Shen, M. Y. A. Yang, M. L. Cohen, Phys. Rev. Lett., 19, 1171 (1967).
- 15 Г. А. Аскаръян, Письма в ЖЭТФ, 6, 672 (1967).
- 16 T. Gustafson, F. De Martini, C. Townes, P. Kelley, Bull. Amer. Phys. Soc., 12, 627 (1967).
- 17 В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ, 7, 153 (1968).
- 18 R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett., 21, 267 (1968).
- 19 В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 5, 674 (1967).
- 20 R. Chiao, J. Dodson, D. Irwin, T. Gustafson, Bull. Amer. Phys. Soc., 12, 687 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 марта 1969 г.

* Такие превышения в отдельных пучках вряд ли практически реализуемы на расстояниях, сравнимых с длиной самофокусировки, из-за сильного расслоения первоначального пучка на нити при малейшей нерегулярности его структуры или структуры самой среды.

SOME MECHANISMS RESPONSIBLE FOR FILAMENT FORMATION AT LIGHT
SELF-FOCUSING

Yu. M. Maksimov, V. I. Talanov

It is shown by numerical methods that such mechanisms as nonlinearity saturation, multi-photon absorption and stimulated Raman scattering may play a considerable role in filament formation at light self-focusing.

УДК 538.574.4

СЛУЧАЙНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН ОТ ПРОТЯЖЕННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. П. Жуковский

Рассматривается рассеяние эллиптически поляризованной волны, падающей на протяженную шероховатую поверхность конечной проводимости. Показано, что при всех углах падения, отличных от нуля, необходимо учитывать распределение случайных наклонов профиля и случайные коэффициенты отражения.

Проблема рассеяния электромагнитных волн от шероховатой поверхности становится все более актуальной. Можно считать, что в настоящее время созданы 1) электродинамическая теория рассеяния плоской волны малой шероховатой площадкой идеальной или конечной проводимости в «лучевом» [1] или «нулевом» [3, 4] приближениях (задача решается методами Кирхгофа [1-4]* или возмущений [5-7]*; предприняты попытки учесть эффект затенений [8, 9]); 2) статистическая теория рассеяния волн, базирующаяся на модели поля, состоящего из суперпозиции устойчивого сигнала и большого числа независимых элементарных волн со случайными амплитудами и фазами [10, 11] (очевидным недостатком такой теории является невозможность учета поляризационных свойств); 3) теория независимых элементарных отражателей поверхности [12] (несмотря на ее простоту, она не может предсказать никаких результатов рассеяния волн без экспериментальных исследований диаграмм рассеяния поверхностей).

Таким образом, наиболее общим является электродинамический подход к решению указанных задач, однако в известных работах профиль отражающей поверхности $\zeta(x, y)$ не учитывается должным образом. Так, авторы [3, 4] полагают производные ζ'_x и ζ'_y равными нулю, в лучевом приближении [1] считают, что

$$\zeta'_x = -q_x/q_z, \quad \zeta'_y = -q_y/q_z. \quad (1)$$

Последнее справедливо только для малых площадок поверхности, допускающих неизменность углов облучения и отражения на всей площадке, и в разнесенных точках передачи и приема. Предположение $\zeta'_y = 0$ при анализе обратного (радиолокационного) рассеяния [1] исключает возможность деполаризации поля, что противоречит практике.

Для многих задач необходима более общая теория рассеяния волн от протяженных участков поверхности, когда распространить (1) на всю облучаемую область нельзя (линейные размеры освещаемого пятна на поверхности b могут быть даже больше среднего расстояния до источника). Кроме того, задание условия (1) для каждой элементарной площадки dS протяженной поверхности противоречит случай-

* Здесь приведены только основополагающие работы.

ному характеру профиля $\zeta(x, y)$. Отметим, что рассеяние волн протяженными участками поверхности на практике происходит как в случае специального использования широких диаграмм направленности антенн (ДНА), так и при узких ДНА (имеется в виду излучение и прием поля по боковым лепесткам, неучет которых часто недопустим). В силу сказанного, при рассеянии волн от протяженных участков поверхности необходимо учитывать вероятность распределения наклонов профиля и вводить в рассмотрение локальные коэффициенты отражения.

Дальнейшие исследования проводятся для радиолокационного случая рассеяния.

1. СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

1. Постановка задачи. Модели шероховатых поверхностей. Система приемник—передатчик с произвольно ориентированными ДНА $E_a(\theta, \varphi)$ неподвижно расположена на высоте h над средним уровнем поверхности $\bar{\zeta}(x, y) = 0$ (рис 1). Излучается эллиптически поляризованная волна, причем $b \leq R_0$, но $b \gg \rho_0$ (ρ_0 — радиус корреляции поверхности). Поверхность описывается простой (один случайный процесс

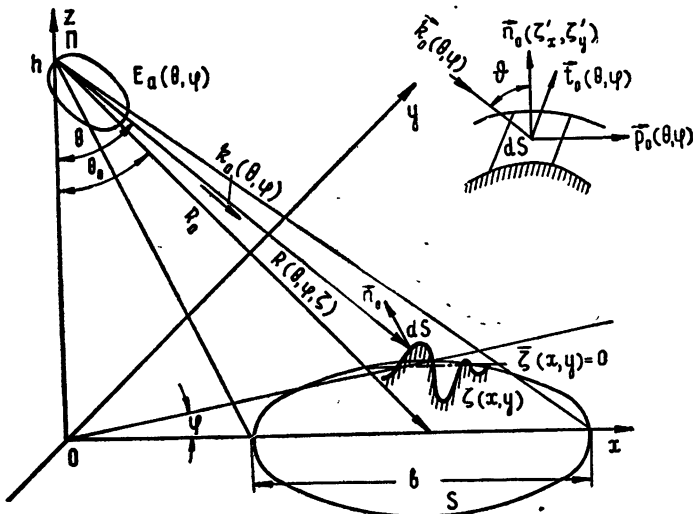


Рис. 1.

общего типа $\zeta(x, y)$) или сложной (суперпозиция нескольких независимых или зависимых случайных процессов $\zeta = \sum_m \zeta_m$) моделями. Функ-

ция ζ при введении в рассмотрение наклонов профиля должна быть дифференцируема в среднеквадратичном. Поэтому описание поверхности дискретным случайным процессом, в частности, марковским, допустимо только в «лучевом» приближении рассеяния или без учета наклонов профиля. Задача рассеяния волн решается в приближении Кирхгофа для крупномасштабных ($\rho_0/\lambda \gg 1$), плавных ($\rho_k/\lambda \gg 1$) структур поверхности и произвольной относительно шероховатости $\sigma_k/\lambda \leq 1$, а для мелкой структуры ($\sigma_m/\lambda \ll 1$, $\rho_0/\lambda \leq 1$ и $(\nabla \zeta_m)^2 \ll 1$) —методом малых возмущений (σ_m, σ_m — среднеквадратичные высоты, ρ_k — радиус кривизны крупной структуры, $\lambda = \lambda/2\pi$). Затенения учитываются «функцией затенения» $S(\theta, \varphi)$ [8, 9], краевым эффектом пренебрегаем. Поверхность имеет

конечную проводимость, но $|\sqrt{\dot{\nu}}| = 1/|\sqrt{\dot{\varepsilon}}| \ll 1$, что обычно выполняется для реальных земных покровов.

2. Основные формулы случайных полей. При произвольных соотношениях $b \cong R_0$ условие плоской падающей волны выполняется только для элементарных площадок dS , поэтому суммирование всех отраженных волн в точке приема будем производить с учетом распределения локальных амплитуд, фаз и направлений, которыми обладают дифрагированные волны отдельных площадок поверхности. Согласно теореме Грина,

$$\dot{E}_{(n)} = \frac{1}{4\pi} \iint \{ ik [n_0 H] \Psi + [[n_0 E] \text{grad } \Psi] + (n_0 E) \text{grad } \Psi \} dS. \quad (2)$$

Каждая площадка dS характеризуется следующими случайными величинами: высотой ζ , тангенсами углов наклона ζ'_x, ζ'_y и коэффициентами отражения $\dot{F}_b, \dot{F}_r(\dot{\nu}(x, y), \zeta'_x, \zeta'_y)$.

Введем для dS локальную поворотную прямоугольную систему координат n_0, t_0, p_0 :

$$n_0(\zeta'_x, \zeta'_y) = [t_0(\theta, \varphi) p_0(\theta, \varphi)], \quad t_0 = -\frac{1}{\sin \vartheta} [n_0 k_0(\theta, \varphi)], \quad (3)$$

$$\vartheta = (n_0 k_0).$$

В приближении Кирхгофа поля на поверхности равны

$$E = (1 + \dot{F}_b) E_n^0 n_0 + (1 + \dot{F}_r) E_t^0 t_0 + (1 - \dot{F}_b) E_p^0 p_0, \quad (4)$$

$$H = (1 + \dot{F}_r) H_n^0 n_0 + (1 + \dot{F}_b) H_t^0 t_0 + (1 - \dot{F}_r) H_p^0 p_0,$$

где $E_{n,t,p}^0, H_{n,t,p}^0$ — проекции векторов падающего поля на локальную систему координат,

$$(\dot{F}_b)_k \cong \frac{-(n_0 k_0) - \sqrt{\dot{\nu}}}{-(n_0 k_0) + \sqrt{\dot{\nu}}}, \quad (\dot{F}_r)_k \cong \frac{-(n_0 k_0) \sqrt{\dot{\nu}} - 1}{-(n_0 k_0) \sqrt{\dot{\nu}} + 1} \quad (5)$$

— локальные коэффициенты отражения крупномасштабной структуры.

Падающее эллиптически поляризованное поле можно разложить на составляющие с вертикальной (параллельной) и горизонтальной (поперечной) поляризациями. Выразим проекции $E_{n,t,p}^0, H_{n,t,p}^0$ через соответствующие составляющие и подставим (4), (5) в (2). Скалярные произведения вектора $\dot{E}_{(n)}$ на единичные векторы составляющих падающего поля дают все составляющие полей обратного рассеяния: $(\dot{E}_{(n)}(e_0^b + e_0^v)) = \dot{E}_b^b + \dot{E}_r^r$ — поля основных поляризаций, $(\dot{E}_{(n)}(h_0^b + h_0^v)) = \dot{E}_b^r + \dot{E}_r^b$ — поля взаимных поляризаций, которые для поверхности конечной проводимости с помощью (3) можно записать в общем виде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_b^b & E_b^0 \\ \dot{E}_r^r & E_r^0 \end{aligned} \iint E_{a_H}^2(\theta, \varphi) \frac{(n_0 k_0)}{1 - (n_0 k_0)^2} [\dot{F}_r(n_0 h_0^{b(r)})^2 - \dot{F}_b(n_0 e_0^{b(r)})^2] \times \\ \times \frac{\exp[-l 2kR(\theta, \varphi, \zeta)]}{R^2(\theta, \varphi, \zeta)} dS, \quad (6)$$

где

$$E_{\text{в}}^0 = \sqrt{p_{\text{в}}^0} \exp \left[i \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad E_{\text{г}}^0 = \sqrt{p_{\text{г}}^0} \exp \left[i \left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$\frac{\dot{E}_{\text{в}}^{\text{г}}}{\dot{E}_{\text{г}}^{\text{в}}} = \frac{E_{\text{вг1}}^0}{E_{\text{гв1}}^0} \iint E_{\text{агн}}^2(\theta, \varphi) (\dot{F}_{\text{в}} + \dot{F}_{\text{г}}) \times$$

$$\times \frac{(n_0 \mathbf{k}_0) (n_0 \mathbf{e}_0^{\text{в(г)}}) (n_0 \mathbf{h}_0^{\text{в(г)}}) \exp[-i 2kR(\theta, \varphi, \zeta)]}{[1 - (n_0 \mathbf{k}_0)^2] R^2(\theta, \varphi, \zeta)} dS, \quad (7)$$

где

$$E_{\text{вг1}}^0 = \sqrt{p_{\text{в}}^0} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad E_{\text{гв1}}^0 = \sqrt{p_{\text{г}}^0} \exp \left[i \left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

В выражениях (6), (7) $p_{\text{в(г)}}^0 = p_{\text{в(г)}}^{\text{н}} (E_0^{\text{а}})^4 \eta_1 \eta_2 / (4\pi)^2$; $p_{\text{в(г)}}^{\text{н}}$ — мощности передатчика для вертикальной и горизонтальной составляющих поля; $E_{\text{а}}^0, E_{\text{агн}}(\theta, \varphi)$ — соответственно коэффициент усиления и нормированная ДНА; $\eta_1 \eta_2$ — КПД антенно-фидерных линий; δ — фазовый сдвиг между составляющими падающего поля.

В частном случае идеально проводящей поверхности ($\dot{F}_{\text{в}} = -\dot{F}_{\text{г}} = 1$) из (7) следует, что для крупномасштабной структуры эффект деполяризации при обратном рассеянии отсутствует ($\dot{E}_{\text{в}}^{\text{г}} = \dot{E}_{\text{г}}^{\text{в}} = 0$), что совпадает с результатами [1].

Все скалярные произведения в (6), (7) выразим через проекции единичных векторов на орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ декартовой системы:

$$(n_0 \mathbf{k}_0)_{\text{в}, \text{г}} = - \frac{m \cos \theta + \gamma \sin \theta}{|n_0|}, \quad (n_0 \mathbf{e}_0)_{\text{в}} = -(n_0 \mathbf{h}_0)_{\text{г}} = \frac{\gamma \cos \theta - m \sin \theta}{|n_0|},$$

$$(n_0 \mathbf{h}_0)_{\text{в}} = (n_0 \mathbf{e}_0)_{\text{г}} = \eta / |n_0|, \quad (8)$$

$m = 1, 2, \dots$ — число структур профиля,

$$\gamma = \zeta'_x \cos \varphi + \zeta'_y \sin \varphi, \quad \eta = \zeta'_x \sin \varphi - \zeta'_y \cos \varphi. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в исходные формулы, проектируя dS на плоскость среднего уровня ($dx dy = dSm / |n_0|$), переходя к сферическим координатам ($dx dy = R^2 \text{tg} \theta d\theta d\varphi$) и полагая $R \gg \zeta$, запишем окончательные формулы для случайных полей обратного рассеяния:

$$\frac{\dot{E}_{\text{в}}^{\text{в}}}{\dot{E}_{\text{г}}^{\text{г}}} = \frac{E_{\text{в}}^0}{E_{\text{г}}^0} \iint E_{\text{агн}}^2(\theta, \varphi) \text{tg} \theta \frac{(m \cos \theta + \gamma \sin \theta) [\dot{F}_1(m \sin \theta - \gamma \cos \theta)^2 - \dot{F}_2 \eta^2]}{m[m^2 + \zeta_x'^2 + \zeta_y'^2 - (m \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2]} \times$$

$$\times \exp[-i 2kR(\theta, \varphi, \zeta)] d\theta d\varphi; \quad (10)$$

$$\frac{\dot{E}_{\text{в}}^{\text{г}}}{\dot{E}_{\text{г}}^{\text{в}}} = \frac{E_{\text{вг1}}^0}{E_{\text{гв1}}^0} \iint E_{\text{агн}}^2(\theta, \varphi) \text{tg} \theta (\dot{F}_{\text{в}} + \dot{F}_{\text{г}}) \times$$

$$\times \frac{\eta(m \sin \theta - \gamma \cos \theta)(m \cos \theta + \gamma \sin \theta)}{m[m^2 + \zeta_x'^2 + \zeta_y'^2 - (m \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2]} \exp[-i 2kR(\theta, \varphi, \zeta)] d\theta d\varphi, \quad (11)$$

где $\dot{F}_1 = \dot{F}_{\text{в}}, \dot{F}_2 = \dot{F}_{\text{г}}$ — для поля $\dot{E}_{\text{в}}^{\text{в}}; \dot{F}_1 = -\dot{F}_{\text{г}}, \dot{F}_2 = -\dot{F}_{\text{в}}$ — для поля $\dot{E}_{\text{г}}^{\text{г}}$.

Случайные локальные коэффициенты отражения (5) имеют вид

$$(F_{\text{в}})_{\text{к}} = \frac{m \cos \theta + \gamma \sin \theta - \sqrt{\dot{\nu}} |n_0|}{m \cos \theta + \gamma \sin \theta + \sqrt{\dot{\nu}} |n_0|}, \quad (F_{\text{г}})_{\text{к}} = \frac{\sqrt{\dot{\nu}} (m \cos \theta + \gamma \sin \theta) - |n_0|}{\sqrt{\dot{\nu}} (m \cos \theta + \gamma \sin \theta) + |n_0|}. \quad (12)$$

С помощью общих формул (10), (11) можно рассмотреть различные частные случаи. При $R_0 \gg b$ достаточно положить

$$\theta \simeq \theta_0, \quad \varphi = 0, \quad E_{\text{г}}^2(\theta_0, 0) = 1. \quad (13)$$

После этого можно перейти к лучевому приближению обратного рассеяния ($n_0 \simeq -k_0$, $\zeta'_x = \text{tg } \theta_0$, $\zeta'_y = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{в}}^{\text{в}} &= E_{\text{в}}^0 \\ &= F_{\text{к}}^{\text{луч}} \sin \theta_0 \sec^2 \theta_0 \iint \exp[-i2kR(\theta_0, 0, \zeta)] d\theta d\varphi, \quad (14) \\ \dot{E}_{\text{г}}^{\text{г}} &= E_{\text{г}}^0 \end{aligned}$$

где

$$(F_{\text{в}(\text{г})}^{\text{луч}})_{\text{к}} = (1 - \sqrt{\dot{\nu}})/(1 + \sqrt{\dot{\nu}})$$

— коэффициент отражения.

При этом $E_{\text{в}}^{\text{г}} = E_{\text{г}}^{\text{в}} \equiv 0$. Полученный результат подтверждает, что при лучевом приближении и даже конечной проводимости поверхности выявить деполяризацию поля невозможно.

В наиболее простом случае нулевого приближения рассеяния в (10), (11) надо положить $\zeta'_x = \zeta'_y = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{в}}^{\text{в}} &= E_{\text{в}}^0 \\ &= \iint E_{\text{г}}^2(\theta, \varphi) \frac{F_{\text{в}}^{(0)}}{E_{\text{г}}^{(0)}} \sin \theta \exp[-i2kR(\theta, \varphi, \zeta)] d\theta d\varphi, \quad (15) \\ \dot{E}_{\text{г}}^{\text{г}} &= E_{\text{г}}^0 \end{aligned}$$

где

$$(F_{\text{в}}^{(0)})_{\text{к}} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\dot{\nu}}}{\cos \theta + \sqrt{\dot{\nu}}}, \quad (F_{\text{г}}^{(0)})_{\text{к}} = \frac{\sqrt{\dot{\nu}} \cos \theta - 1}{\sqrt{\dot{\nu}} \cos \theta + 1}$$

— коэффициенты отражения.

Сравнивая с (5), замечаем, что $\cos \theta = -(n_0 k_0)$, что и должно выполняться в рассматриваемом приближении. Естественно, что взаимно поляризованные поля в данном случае не могут и возникнуть.

Сделаем некоторые выводы из приведенных основных формул. Выявить эффект деполяризации поля обратного рассеяния, а следовательно, и многие поляризационные характеристики (матрицу когерентности, степень поляризации, коэффициент деполяризации и др.) можно только на основе общего рассмотрения рассеяния в виде (10), (11). При конечной проводимости поверхности поля основных поляризаций (10) отличаются различными функциональными связями с производными ζ'_x , ζ'_y поверхности, что объясняется различным распределением локальных коэффициентов отражения. При тех же условиях поля взаимных поляризаций (11), а также поля основных поляризаций при лучевом приближении (14), связаны простым соотношением

$$-\frac{E_{\text{в}}^{\text{г}}}{E_{\text{г}}^{\text{в}}} = \left(\frac{\dot{E}_{\text{в}}^{\text{в}}}{E_{\text{г}}^{\text{г}}} \right)^{\text{луч}} = q e^{-i\delta}, \quad (16)$$

где $q = \sqrt{\rho_{\text{г}}^{\text{л}}/\rho_{\text{в}}^{\text{л}}}$.

Из (16) следует, что при круговой поляризации поля отличаются только фазовым сдвигом на $\pi/2$, а в случае линейной поляризации одинаковы. При отражении волн от идеально проводящей поверхности поля основных поляризаций в соответствующих приближениях (10), (13)—(15) отличаются множителем (16), а поля взаимных поляризаций отсутствуют (без учета краевого эффекта), что объясняется, конечно, нулевым значением тангенциальной составляющей компоненты электрического поля на поверхности ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}_0$).

Для мелкой ($\rho_0/\bar{\lambda} \leq 1$) структуры поверхности несправедливы «гладкие» локальные коэффициенты отражения (5). Используя метод малых возмущений [5, 6], можно показать, что при этом поля определяются формулой (15), если коэффициент отражения при вертикальной поляризации изменить:

$$(\bar{F}_v)_m = (F_v^{(0)})_m + \Delta F_m,$$

где

$$\Delta F_m = \frac{2(1 - \dot{\nu}) \sin^2 \theta}{[\cos \theta + \sqrt{\dot{\nu}(1 - \dot{\nu} \sin^2 \theta)}]^2} \approx \frac{2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + \sqrt{\dot{\nu}})^2} \quad (|\sqrt{\dot{\nu}}| \ll 1).$$

Дополнительный член ΔF_m учитывает зависимость поля от наклона поверхности. Экспоненциальный множитель в (15) разлагается в ряд и используются первые два члена.

2. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ И ИНТЕНСИВНОСТЬ ЗЕРКАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

1. *Приближения по степеням производных профиля.* Будем считать, что геометрические и электрические параметры поверхности являются независимыми случайными величинами*, а совокупности поверхностей характеризуются $\dot{\nu}(x, y) = \dot{\nu} = \text{const}$ ** . Среднее поле можно трактовать как постоянную составляющую случайного поля.

С помощью (10), (11) введем обобщенную форму записи:

$$\langle \dot{E}_i \rangle = E_i^0 \iint E_{a_n}^2(\theta, \varphi) \text{tg} \theta \exp(-i2kH \sec \theta) J_i d\theta d\varphi, \quad (17)$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ соответственно для полей $\dot{E}_v^b, \dot{E}_v^r, \dot{E}_h^b, \dot{E}_h^r$,

$$J_i = \iiint F_i(\zeta_x, \zeta_y, \theta, \varphi, \dot{\nu}) \exp(i2k \cos \theta \zeta) W_3(\zeta, \zeta'_x, \zeta'_y) d\zeta d\zeta'_x d\zeta'_y, \quad (18)$$

$W_3(\zeta, \zeta'_x, \zeta'_y)$ — совместный закон распределения высот и тангенсов углов наклона поверхности в одной ее точке, F_i совпадают с подынтегральными рациональными функциями в (10), (11), связанными с производными профиля, причем из (11) следует, что $F_2 = F_3$. Для сложных моделей поверхности в (18) надо заменить $\zeta \rightarrow \sum_m \zeta_m, \zeta'_{x(y)} \rightarrow$

$\rightarrow \sum_m \zeta'_{m(x(y))}$, а закон распределения — на $\prod_m W_3(\zeta_m, \zeta'_{m_x}, \zeta'_{m_y})$ или $W_{3m}(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \zeta'_{1_x}, \dots, \zeta'_{m_x}, \zeta'_{1_y}, \dots, \zeta'_{m_y})$ для независимых и зависимых структур профиля соответственно.

Ввиду очевидной сложности решений (18) целесообразно предложить метод представления полей соответствующими приближениями

* Для суши имеется определенная зависимость между высотой профиля и проводимостью. Однако это уже тонкости, малоприменимые для практики.

** При необходимости, неоднородности $\dot{\nu}$ можно всегда учесть уже после усреднения по геометрическим неоднородностям.

по степеням производных профиля $(\zeta'_x^{(k)}, \zeta'_y^{(k)})$, причем для полей основных поляризаций $k = 0, 1, 2, \dots$, а для взаимно поляризованных полей $k = 1, 2, \dots$

Вводя градиент поверхности $\nabla\zeta = \zeta'_x i + \zeta'_y j$, для дальнейших решений удобно осуществить переход от случайных декартовых координат (ζ'_x, ζ'_y) к полярным: модулю $|\nabla\zeta| = \zeta'$ и фазе Φ случайного вектора $\{\zeta'_x = \zeta' \cos \Phi; \zeta'_y = \zeta' \sin \Phi\}$. Тогда каждую из функций F можно представить в виде соответствующего ряда

$$F_{1,4} = a_{1,4}(\theta, \nu) + b_{1,4}(\theta, \nu) \cos(\varphi - \Phi) \zeta' + \\ + \{c_{1,4}(\theta, \nu) + d_{1,4}(\theta, \nu) \cos[2(\varphi - \Phi)]\} \zeta'^2 + \dots; \quad (19)$$

$$F_2 = F_3 = b_{2,3}(\theta, \nu) \sin(\varphi - \Phi) \zeta' - d_{2,3}(\theta, \nu) \sin[2(\varphi - \Phi)] \zeta'^2 + \dots \quad (20)$$

Значения коэффициентов ряда a, b, c, d даны в Приложении.

Если для полей основных поляризаций ряд начинается со свободного члена $a_{1,4}$, то у взаимно поляризованных полей $a_{2,3} = 0$. Последнее означает, что поля $E_{2,3}$ в нулевом ($k = 0$) приближении существовать не могут, так как отсутствует источник эффекта деполаризации. Дальнейшая конкретизация решений (17) возможна при задании статистических характеристик поверхности.

2. *Гауссова статистика.* Экспериментальные исследования распределения высот взволнованной водной поверхности [13] показывают, что они подчиняются гауссовой статистике*. Видимо, и для многих других рельефов подобная статистика приблизительно справедлива. Тогда в совпадающих точках стационарных поверхностей значения ζ и ζ'_x, ζ'_y независимы. Подставляя (19) и (20) в (18), учитывая преобразование закона распределения производных $W_2(\zeta'_x, \zeta'_y) = W_2(\zeta', \Phi) \left| \frac{\partial(\zeta', \Phi)}{\partial(\zeta'_x, \zeta'_y)} \right|$ и ограничиваясь четвертым приближением, после интегрирования имеем

$$J_1^{(4)} = J_1^{(4)} = J_4^{(4)} \frac{(1 - \nu)}{(1 + \sqrt{\nu})^2} \left[1 - \frac{2\sqrt{\nu}}{(1 + \sqrt{\nu})^2} \sigma^4 \omega_{\text{ск}}^4 \right] \exp \left[-2 \left(2\pi \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 \right]; \quad (21)$$

$$J_2^{(4)} = J_3^{(4)} \equiv 0, \quad (22)$$

где $\sigma^2 \omega_{\text{ск}}^2$ — дисперсия градиента поверхности, $\omega_{\text{ск}} = (1/\sqrt{2})(\omega_{\text{ск}x}^2 + \omega_{\text{ск}y}^2)^{1/2}$ — среднеквадратичная частота пространственного спектра поверхности.

Из полученного результата следует, что влияние наклонов поверхности на средние поля основных поляризаций начинает проявляться только в четвертом приближении и для поверхности с конечной проводимостью.

При рассмотренном условии стационарных поверхностей средние поля взаимных поляризаций всегда отсутствуют (22). Можно показать, что если поверхность нестационарна и среднее значение высоты поверхности дифференцируемо $(\bar{\zeta})' = (\bar{\zeta}')$, то при этом появляются и средние поля взаимных поляризаций ($J_{2,3} \propto \bar{\zeta}'$). Зависимость средних полей от случайной высоты поверхности определяется экспоненциальным множителем в (21) [1, 3].

* Отклонение от нормального закона наблюдается в местах мелководья и где дно имеет неровный рельеф, влияющий на движение морских волн.

Используя (21), из (17) получим окончательное выражение для средних полей обратного рассеяния в виде

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_1 \rangle^{(4)} &= \langle \dot{E}_4 \rangle^{(4)} = E^0 J_{1,4}^{(4)} \int_H^\infty \int_0^{2\pi} E_{a_n}^2(R, \varphi) \frac{\exp(-i2kR)}{R} dR d\varphi = \\ &= E^0 E_{a_n}^2(0, 0) \frac{\lambda}{2h} J_{1,4}^{(4)} \exp \left[-i \left(4\pi \frac{h}{\lambda} + \beta; \right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

интенсивность зеркальных составляющих равна

$$\langle \dot{E}_3 \rangle^{(4)} \langle \dot{E}_3^* \rangle^{(4)} = p^0 E_{a_n}^4(0, 0) \left(\frac{\lambda}{2h} \right)^2 (J_{1,4}^{(4)})^2. \quad (24)$$

3. МАТРИЦА ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ПОЛЯ

При эллиптически поляризованном поле излучения и отражающей поверхности конечной проводимости матрица центральных моментов второго порядка представляет собой эрмитовую матрицу, состоящую из дисперсий и корреляционных моментов рассеянных (некогерентных) составляющих компонент комплексного случайного поля:

$$M_{\text{эп}} = \left\| \begin{array}{cc|cc} \langle \dot{E}_{11} \rangle & \langle \dot{E}_{12} \rangle & | & \langle \dot{E}_{13} \rangle & \langle \dot{E}_{14} \rangle \\ \langle \dot{E}_{21} \rangle & \langle \dot{E}_{22} \rangle & | & \langle \dot{E}_{23} \rangle & \langle \dot{E}_{24} \rangle \\ \langle \dot{E}_{31} \rangle & \langle \dot{E}_{32} \rangle & | & \langle \dot{E}_{33} \rangle & \langle \dot{E}_{34} \rangle \\ \langle \dot{E}_{41} \rangle & \langle \dot{E}_{42} \rangle & | & \langle \dot{E}_{43} \rangle & \langle \dot{E}_{44} \rangle \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} M_{\text{вв}} & M_{\text{вг}} \\ \hline M_{\text{гв}} & M_{\text{гг}} \end{array} \right\|. \quad (25)$$

Матрицы $M_{\text{вв}}$, $M_{\text{гг}}$ соответствуют линейно поляризованным падающим полям, а $M_{\text{вг}}$, $M_{\text{гв}}$ — дополнение при эллиптической поляризации. В силу (16) многие элементы матрицы можно связать простыми зависимостями и преобразовать (25) к виду

$$M_{\text{эп}} = \left\| \begin{array}{cccc} D[\dot{E}_{11}] & -qe^{i\delta} \langle \dot{E}_{13} \rangle & \langle \dot{E}_{13} \rangle & \langle \dot{E}_{14} \rangle \\ -qe^{-i\delta} \langle \dot{E}_{31} \rangle & D[\dot{E}_{22}] & -q^{-1}e^{-i\delta} D[\dot{E}_{22}] & \langle \dot{E}_{24} \rangle \\ \langle \dot{E}_{31} \rangle & -qe^{i\delta} D[\dot{E}_{33}] & D[\dot{E}_{33}] & -q^{-1}e^{i\delta} \langle \dot{E}_{24} \rangle \\ \langle \dot{E}_{41} \rangle & \langle \dot{E}_{42} \rangle & -q^{-1}e^{-i\delta} \langle \dot{E}_{42} \rangle & D[\dot{E}_{44}] \end{array} \right\|, \quad (25a)$$

откуда следует, что матрица будет полностью определена, если найдены шесть ее элементов: дисперсии $D[\dot{E}_{11}]$, $D[\dot{E}_{44}]$, $D[\dot{E}_{22}]$ и смешанные моменты $\langle \dot{E}_{13} \rangle$, $\langle \dot{E}_{14} \rangle$, $\langle \dot{E}_{24} \rangle$.

В соответствии с основными формулами (10) и (11) аналитические выражения для всех элементов матрицы (25) будут отличаться множителем перед интегралом p_{ij} и подынтегральными функциями $F_i F_j^*$. Поэтому введем обобщенную форму записи для всех моментов:

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_i \dot{E}_j^* \rangle &= \langle \dot{E}_{ij} \rangle = \frac{p_{ij}}{h^2} \iint E_{a_n}^4(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i2k \sin \theta (\Delta x \cos \varphi + \\ &+ \Delta y \sin \varphi)] I_{ij} S(\theta, \varphi) d\Delta x d\Delta y d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \Delta y = y_1 - y,$$

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\zeta'_x, \zeta'_y; \theta, \varphi, \nu) F_j^*(\zeta'_x, \zeta'_y; \theta_1, \varphi_1, \nu) \times \\ \times \exp[-i2k \cos \theta (\zeta_1 - \zeta)] W_6(\zeta, \zeta_1, \zeta'_x, \zeta'_y, \zeta'_x, \zeta'_y; \Delta r) \times \quad (27) \\ \times d\zeta d\zeta_1 d\zeta'_x d\zeta'_y d\zeta'_x d\zeta'_y.$$

Для сложных моделей поверхности законы распределения изменяются на $\prod_m W_6$ и W_{6m} для независимых и зависимых структур соответственно. Коэффициенты p_{ij} сведены в таблицу

$$p_{ij} = \begin{cases} p_b^0 & -p_b^0 & \sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{-i\delta} & \sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{-i\delta} \\ -p_b^0 & p_b^0 & -\sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{-i\delta} & -\sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{-i\delta} \\ \sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{i\delta} & -\sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{i\delta} & p_r^0 & p_r^0 \\ \sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{i\delta} & -\sqrt{p_b^0 p_r^0} e^{i\delta} & p_r^0 & p_r^0 \end{cases}.$$

Многие реальные поверхности хорошо моделируются суперпозицией двух структур: крупномасштабной сильношероховатой ($2\pi\sigma\lambda^{-1} \cos \theta)^2 \gg 1$) и мелкоструктурной слабошероховатой ($2\pi\sigma\lambda^{-1} \cos \theta)^2 \ll 1$).

Сильношероховатые поверхности. Основное значение интеграла (27) при $(2\pi\sigma\lambda^{-1} \cos \theta)^2 \gg 1$ находится в области $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \ll \rho_0$. Тогда можно считать, что $W_6(\zeta, \zeta_1, \zeta'_x, \zeta'_y, \zeta'_x, \zeta'_y; \Delta r) \simeq W_2(\zeta, \zeta_1; \Delta r) \times W_4(\zeta'_x, \zeta'_y, \zeta'_x, \zeta'_y; \Delta r)$. Введем гауссовую аппроксимацию пространственного спектра статистически изотропной поверхности $W_{\zeta_k}(\omega_{\text{пов}})$ и учтем связь между спектром поверхности и ее производной $W_{\zeta_k}(\omega_{\text{пов}}) = \omega_{\text{пов}} W_{\zeta_k}(\omega_{\text{пов}})$. После соответствующих интегрирований получим решение для элементов матрицы (26).

Во втором приближении

$$\langle \dot{E}_{ij} \rangle^{(2)} = p_{ij} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 \frac{1}{\sigma^2 \omega_{\text{ck}}^2} \iint E_{\text{ан}}^4(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \theta e^{-z} J_{ij}^{(2)} S(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (28)$$

где

$$z = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\sigma^2 \omega_{\text{ck}}^2}, \quad q = 2\pi \frac{\sigma}{\lambda} \cos \theta;$$

$$J_{ij}^{(2)} = \begin{cases} a_i a_j + \sigma^2 \omega_{\text{ck}}^2 [2(a_i c_j + a_j c_i) + b_i b_j (1-A)] + 4\sigma^4 \omega_{\text{ck}}^4 [c_i c_j + (c_i c_j + d_i d_j)(1-B)] \\ (ij = 11, 14, 41, 44); \end{cases} \quad (29)$$

$$b_i b_j \sigma^2 \omega_{\text{ck}}^2 (1-A) + 4\sigma^4 \omega_{\text{ck}}^4 d_i d_j (1-B) \\ (ij = 22, 23, 32, 33); \quad (29a)$$

$$\frac{-1}{+q} \exp\left(\frac{z}{2}\right) \left\{ b_i b_j \sigma^2 \omega_{\text{ck}}^2 \left[(1-z-C) I_0\left(\frac{z}{2}\right) + z(1-D) I_1\left(\frac{z}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - 8d_i d_j \sigma^4 \omega_{\text{ck}}^4 \left[(1-z-3C) I_0\left(\frac{z}{2}\right) + z(1-3D) I_1\left(\frac{z}{2}\right) \right] \right\}; \quad (29b)$$

$$A = \frac{1}{2q^2} (1-z), \quad B = \frac{1}{q^2} \left[1 - \frac{1}{2q^2} - z \left(1 - \frac{1}{q^2} + \frac{z}{4q^2} \right) \right],$$

$$C = \frac{3-6z+2z^2}{8q^2}, \quad D = \frac{2-z}{4q^2}.$$

В формуле (29 б) минус соответствует $ij = 12, 13, 24, 34$, плюс — $ij = 21, 31, 42, 43$.

Так как по условию $q^2 \gg 1$, то для всех углов облучения, исключая скользящие ($\theta \rightarrow 90^\circ$), можно полагать $A \sim B \sim C \sim D \rightarrow 0$, что упрощает (29). Для моментов в первом приближении $\langle \dot{E}_{ij} \rangle^{(1)}$ в (29) достаточно положить $c_i = c_j = d_i = d_j = 0$, а в нулевом $\langle \dot{E}_{ij} \rangle^{(0)}$, кроме этого, еще и $b_i = b_j = 0$.

Приведем также выражение для элементов матрицы обратного рассеяния (14) в лучевом приближении:

$$\langle \dot{E}_{ij} \rangle^{(луч)} = p_{ij} \frac{1}{8\pi\sigma^2\omega_{ск}^2} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 (F^{луч})^2 \iint E_{ан}^4(\theta, \varphi) \operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta e^{-z} S(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$$

$$(ij = 11, 14, 41, 44).$$

Теперь интересно сравнить центральные моменты поля рассеяния в лучевом и нулевом приближениях, которым отвечают соответственно максимальная и минимальная интенсивности при прочих равных условиях. Переходя в (28) и (30) к дифференциалам, получим

$$\frac{d\langle \dot{E}_{ii} \rangle^{(луч)}}{d\langle \dot{E}_{ii} \rangle^{(0)}} = \frac{(F^{луч})^2}{(F_{(i)}^{(0)})^2} \sec^4 \theta, \quad (31)$$

откуда следует, что оба приближения дают одинаковые интенсивности только для вертикально падающего луча. При отклонении от вертикали отношение (31) растет, стремясь к ∞ при скользящих лучах. Естественно, что моменты всех остальных приближений ($k > 0$) занимают промежуточное положение.

Слабощероховатые поверхности. При $(2\pi\alpha\lambda^{-1} \cos \theta)^2 \ll 1$ и крупномасштабных неоднородностях ($\rho_0/\bar{\lambda} \gg 1$) поверхности, которая, кроме того, является плавной ($\rho_k/\bar{\lambda} \gg 1$), решение для центральных моментов поля получается из (26) и (27), где практически вплоть до скользящих углов можно не учитывать затенения ($\operatorname{ctg} \theta/\sigma\omega_{ск} \gg 1$) и ограничиться первым приближением:

$$\langle \dot{E}_{ij} \rangle^{(1)} = p_{ij} 16\pi^3 \left(\frac{\rho_0}{h} \right)^2 \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 \iint E_{ан}^4(\theta, \varphi) \sin \theta \cos^3 \theta \exp(-l^2) L_{ij}^{(1)} d\theta d\varphi, \quad (32)$$

где

$$l = 2\pi\rho_0\lambda^{-1} \sin \theta, \quad r = 2\pi\sigma\lambda^{-1} \sin \theta;$$

$$a_i a_j + \frac{1}{2} b_i b_j r^2 \exp\left(\frac{l^2}{2}\right) \quad (ij = 11, 14, 41, 44); \quad (33)$$

$$\frac{1}{2} b_i b_j r^2 \exp\left(\frac{l^2}{2}\right) \quad (ij = 22, 23, 32, 33); \quad (33a)$$

$$L_{ij}^{(1)} = \left[\frac{-1}{+\sqrt{2}} \sigma^2 \omega_{ск}^2 b_i b_j \exp\left(\frac{3}{4} l^2\right) \left[(0,34 + 0,13l^2 - 0,08l^4 - 0,003l^6) I_0\left(\frac{l^2}{4}\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (0,07 l^2 + 0,087 l^4 + 0,003 l^6) I_1\left(\frac{l^2}{4}\right) \right] \right]. \quad (33b)$$

В формуле (33 б) минус соответствует $ij = 12, 13, 24$, плюс — $ij = 12, 31, 42, 43$.

Для слабошероховатой, но мелкоструктурной ($\rho_0 \sqrt{\lambda} \leq 1$) поверхности локальные коэффициенты отражения (5) уже несправедливы. Можно показать, что элементы матрицы центральных моментов поля, рассеянного такой поверхностью, определяются также формулами (32), (33), если в них подставить значения коэффициентов a , соответствующих структуре с мелкомасштабными неоднородностями (см. Приложение).

Заключение. На основе анализа исходной формулы (26) и результатов расчетов (28) и (32) можно сформулировать ряд выводов, полезных при экспериментальных исследованиях центральных моментов поля обратного рассеяния.

Для углов облучения поверхности, близких к нулю, основную величину моментов поля определяет нулевое приближение, т. е. распределение высот $\zeta(x, y)$ поверхности. Вклад распределения крутизны наклонов поверхности ζ'_x, ζ'_y начинает проявляться только при весьма крутых неровностях ($\sigma^2 \omega_{\text{СК}}^2 > 1$). Для пологих шероховатостей ($\sigma^2 \omega_{\text{СК}}^2 < 1$) моменты полей всех взаимных и перекрестных (кроме $ij = 14, 41$) поляризацій имеют малую величину по сравнению с основными поляризациями. Следовательно, в последнем случае при расчетах моментов псле основных поляризацій практически достаточно ограничиваться определением рассеяния в нулевом приближении.

При скользящих углах облучения поверхности ($\theta \rightarrow \pi/2$) влияние распределения высот профиля (нулевое приближение) на величину моментов поля весьма незначительно ($\propto (\pi/2 - \theta)^5$). Решающую роль в этом случае играет распределение крутизны наклонов мелкой структуры поверхности, а также эффект затенения. Для всех «промежуточных» углов падения волны необходимо учитывать и высоту и крутизну наклонов шероховатой поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты в (19) и (20) для поверхности с крупномасштабными неоднородностями

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\cos \theta (\cos \theta - \sqrt{\nu})}{\cos \theta + \sqrt{\nu}}, & a_4 &= \frac{\cos \theta (1 - \sqrt{\nu} \cos \theta)}{1 + \sqrt{\nu} \cos \theta}, \\
 b_1 &= \frac{\sin \theta [(\cos \theta + \sqrt{\nu})^2 - 2\nu]}{(\cos \theta + \sqrt{\nu})^2}, & b_4 &= \frac{\sin \theta [(1 - \sqrt{\nu} \cos \theta)^2 - 2\nu \cos^2 \theta]}{(1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)^2}, \\
 c_1 &= \frac{\nu \sin^2 \theta (1 + 2\sqrt{\nu} \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\cos \theta + \sqrt{\nu})^3 (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)}, & c_4 &= -\frac{\sqrt{\nu} \sin^2 \theta [\sqrt{\nu} (1 + \cos^2 \theta) + 2\cos \theta]}{(1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)^3 (\cos \theta + \sqrt{\nu})}, \\
 d_1 &= \frac{\sqrt{\nu} [\sqrt{\nu} (1 - 3 \cos^2 \theta) - (1 + \nu) \cos^3 \theta]}{(\cos \theta + \sqrt{\nu})^3 (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)}, \\
 d_4 &= -\frac{\sqrt{\nu} [\sqrt{\nu} (1 - 3 \cos^2 \theta) - (1 + \nu) \cos^3 \theta]}{(\cos \theta + \sqrt{\nu}) (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)^3}, \\
 b_2 &= b_3 = \frac{\sqrt{\nu} \sin(2\theta)}{(\cos \theta + \sqrt{\nu}) (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)},
 \end{aligned}$$

$$d_2 = d_3 = \frac{\sqrt{\nu} [\sqrt{\nu} (3 \cos^2 \theta - 1) + (1 + \nu) \cos^3 \theta]}{(\cos \theta + \sqrt{\nu})^2 (1 + \sqrt{\nu} \cos \theta)^2}.$$

В случае мелкомасштабной структуры неоднородностей (33)

$$a_1 = \cos \theta \left[\frac{\cos \theta - \sqrt{\nu}}{\cos \theta + \sqrt{\nu}} + \frac{2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta + \sqrt{\nu})^2} \right], \quad a_4 = \cos \theta \left(\frac{1 - \sqrt{\nu} \cos \theta}{1 + \sqrt{\nu} \cos \theta} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович, ЖЭТФ, 23, № 3 (9), 305 (1952).
2. Л. М. Бреховских, ЖЭТФ, 23, № 3 (9), 275 (1952).
3. H. Davies, Proc. IEE, 101, № 7, 209 (1954).
4. J. Feinstein, IRE Trans. on Ant. and Propag., AP-2, № 1, 23 (1954).
5. Е. Л. Фейнберг, Исследования по распространению радиоволн, сб. II, изд. АН СССР, М., 1948.
6. S. O. Rice, Comm. Pure and Appl. Math., 4, 351 (1951).
7. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, № 2, 180 (1958).
8. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 1, 101 (1964).
9. P. Beckmann, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-13, № 3, 384 (1965).
10. С. Я. Брауде, Н. Н. Комаров, И. Е. Островский, Радиотехника и электроника, 3, № 2, 172 (1958).
11. P. Beckmann, NBS Radio Propag., 66-D, № 3, 320 (1962).
12. Распространение УКВ, перевод с англ. под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
13. L. J. Cole, Meteorological Papers, № 2, 57 (1960).

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
29 февраля 1968 г.

A RANDOM ELECTROMAGNETIC FIELD AND ITS DISTRIBUTION AT WAVE REFLECTION FROM AN EXTENDED ROUGH SURFACE

A. P. Zhukovskii

The scattering of an elliptically polarized wave incidenting on an extended rough surface of finite conductivity is considered. It is shown that at all incidence angles differing from the zero, it is necessary to take into account the distribution of random-profile slopes and the random reflection coefficients.

УДК 621 391.82

РАСЧЕТ ПОМЕХ, ВЫЗЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛА, ПРИНЯТОГО НА СИНТЕЗИРОВАННУЮ АНТЕННУ

Э. И. Гельфер, Б. В. Кияшко, Ф. А. Маркус

Рассматривается влияние нелинейности канала передачи на работу системы, обнаруживающей сигнал, принятый синтезированной антенной. Показано, что нелинейность приводит к изменению величины полезного сигнала и к появлению аддитивного шума. Получено выражение для шума при произвольной нелинейности канала. Вычислена величина шума для конкретного вида нелинейности, возникающей при записи принятого антенной сигнала на фотопленку.

За последние годы в литературе все чаще обсуждаются вопросы, связанные с проблемой синтеза антенн. Такой синтез обычно используется в задачах радиоастрономии [1, 2] и радиолокации [3, 4]. Синтезированная антенна получается путем движения реальной антенны по поверхности требуемого размера и формы. Сигналы, принимаемые антенной в различные моменты времени, каким-либо образом запоминают, хранят и затем преобразуют, собирая всю полученную информацию об излучающем или отражающем объекте.

В настоящей работе рассматриваются помехи, которые возникают из-за нелинейности преобразования сигнала на пути от гетеродина до системы обработки информации.

Сигнал, принимаемый одномерно синтезированной антенной от точечного объекта, после преобразования частоты имеет вид

$$V(t) = V_0 \cos \left[K \frac{(vt - X_0)^2}{r_0} + \varphi_0 \right], \quad (1)$$

где v — скорость реальной антенны, X_0 — координата объекта, r_0 — расстояние от объекта до линии движения антенны, φ_0 — начальная фаза сигнала и $K = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Элемент памяти фиксирует величину $T(x)$, которая будет некоторой функцией принимаемого сигнала $V(t)$

$$T(x) = \Phi[V(t)]. \quad (2)$$

Если функция $\Phi(V)$ линейна и координата x в элементе памяти изменяется пропорционально времени, то закон изменения зафиксированного сигнала $T(x)$ будет повторять закон изменения принятого:

$$T(x) = T_0 \cos [p(x - x_0)^2 + \varphi_0]. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения $p = (K/r_0)(v/U)^2$ и $x_0 = X_0U/v$, U — скорость изменения координаты x элемента памяти. Величины T и T_0 пропорциональны величинам V и V_0 .

Как известно, оптимальное по критерию отношения сигнала к шуму преобразование производится с помощью согласованного фильтра [5] и сводится к операции

$$\dot{E}(\xi) = E_0 \int_{x_1}^{x_2} T(x - \xi) f(x) dx. \quad (4)$$

Функция $f(x)$, называемая растром, должна зависеть от x по такому же закону, как и сигнал. Ее конкретный вид определяется выбором элемента памяти и способа интегрирования.

В оптической системе—дифрактометре [6]—сигнал записывается на фотопленке, а растр формируется при распространении света от записи сигнала к месту обнаружения. При этом растр имеет следующий вид:

$$f_1(x) = b \cos(px^2 + \omega t + \varphi_0). \quad (5)$$

В других оптических системах [7] растром служит фотопленка, прозрачность которой меняется по закону

$$f_2(x) = B + b \cos(px^2 + \varphi_0). \quad (6)$$

В обоих случаях функция $E(\xi)$ имеет максимум, по положению и величине которого определяют параметры принятого сигнала.

В реальных системах функция $\Phi(V)$ нелинейная. Это приводит к определенному искажению выходного сигнала. Нелинейность изменяет величину максимума полезного сигнала и, что более существенно, создает аддитивный шум на выходе. Ниже дается расчет искажений и оценка величины шума.

Функция $T(x)$ при любом виде зависимости $\Phi(V)$ может быть представлена в виде ряда:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \{n[p(x - x_0)^2 + \varphi_0]\}. \quad (7)$$

Аргументы косинусов этого ряда кратны величине $u = p(x - x_0)^2 + \varphi_0$. Выражение (7) является рядом Фурье для величины T ; если последнюю рассматривать не как функцию координаты x , а как функцию величины u :

$$T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nu). \quad (7a)$$

Коэффициенты ряда a_n полностью определяются характеристикой канала передачи $\Phi(V)$. Коэффициент a_1 определяет полезный сигнал, а все остальные—аддитивный шум.

Подставляя выражение (7) в (4) и используя наиболее общее выражение для растра

$$f(x) = B + b \cos(px^2 + \omega t + \varphi_0), \quad (8)$$

находим, что сигнал на выходе системы имеет следующий вид:

$$E(\xi) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} [B + b \cos(px^2 + \omega t + \varphi_0)] \times \\ \times \cos [np(x - x_0 - \xi)^2 + n\varphi_0] dx. \quad (9)$$

Преобразуя интеграл, нетрудно получить выражение для аддитивного шума:

$$E_{II}(\xi) = \frac{2B}{b} A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \{ [C(v_2) - C(v_1)] \cos n\varphi_0 - \\ - [S(v_2) - S(v_1)] \sin n\varphi_0 \} +$$

$$+ A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n-1}} \left\{ [C(v'_2) - C(v'_1)] \cos \left[\omega t + \frac{nq}{n-1} - (n-1) \varphi_0 \right] + \right. \\ \left. + [S(v'_2) - S(v'_1)] \sin \left[\omega t + \frac{nq}{n-1} - (n-1) \varphi_0 \right] \right\} + \quad (10)$$

$$+ A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n+1}} \left\{ [C(v''_2) - C(v''_1)] \cos \left[\omega t + \frac{nq}{n+1} + (n+1) \varphi_0 \right] - \right. \\ \left. - [S(v''_2) - S(v''_1)] \sin \left[\omega t + \frac{nq}{n+1} + (n+1) \varphi_0 \right] \right\},$$

где

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{2pn}{\pi}} (x_{1,2} - x_0 - \xi), \\ v'_{1,2} = \sqrt{\frac{2p(n-1)}{\pi}} \left[x_{1,2} - \frac{n(x_0 + \xi)}{n-1} \right], \\ v''_{1,2} = \sqrt{\frac{2p(n+1)}{\pi}} \left[x_{1,2} - \frac{n(x_0 + \xi)}{n+1} \right], \\ q = p(x_0 + \xi)^2, \quad A = E_0 b \sqrt{\frac{\pi}{8p}},$$

$C(v)$ и $S(v)$ — интегралы Френеля.

На рис. 1 показан примерный вид зависимости амплитуды выра-

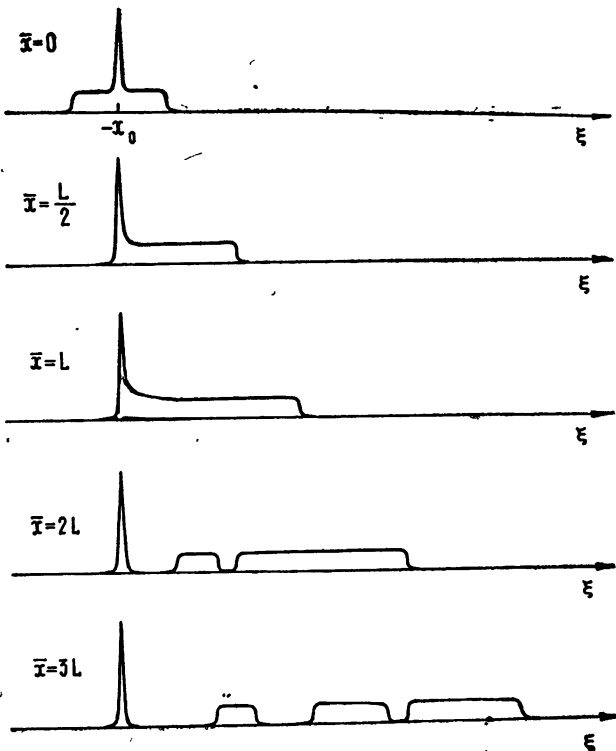


Рис. 1.

жения (10) от переменной ξ , при различных соотношениях параметров \bar{x} и L , где $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ — сдвиг центра раstra (нулевой частоты) от середины области интегрирования, а $L = x_2 - x_1$ — длина области интегрирования. Там же изображен сигнал в виде узкого пика. Масштаб для сигнала и помехи произвольный. При $\bar{x} = 0$ помеха расположена симметрично относительно регистрируемого максимума сигнала и накладывается на него. С увеличением $|\bar{x}|$ помеха сдвигается в сторону и при $|\bar{x}| > L/2$ на сигнал уже не накладывается. При $|\bar{x}| > 3L/2$ в области, занятой помехами, появляется провал. При $|\bar{x}| > 5L/2$ в области помех имеются два провала.

На рис. 2 приведен результат расчета функции $E_n(\xi)$, проведенного на ЭВМ для конкретного вида нелинейности канала. По оси ординат отложена величина δ , равная отношению амплитуды выра-

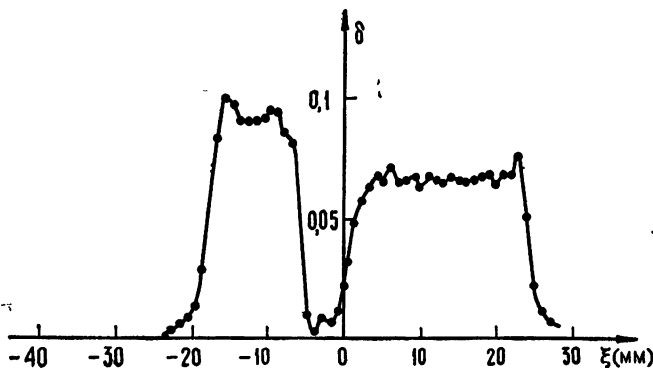


Рис. 2.

жения (10) к амплитуде сигнала. Мы предположили, что искажения сигнала возникают из-за нелинейности характеристической кривой фотопленки [9], на которую записывается сигнал. При этом запись сигнала связана с величиной $u = p(x - x_0)^2 + \varphi_0$ соотношением

$$T(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \{ \alpha \cos u \}, \quad (11)$$

где величина α характеризует степень нелинейности (при $\alpha \ll 1$ зависимость линейна). Для расчета были взяты следующие значения параметров: $B = 0$, $\bar{x} = 2,1L$ и $\alpha = 2$.

Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что результаты расчета хорошо согласуются с результатами качественного исследования. Для количественной оценки помех можно ввести коэффициент γ — отношение максимальной по ξ амплитуды выражения (10) к амплитуде регистрируемого сигнала $E_c = \sqrt{2p/\pi} |A| |a_1| L$. Однако зависимость E от ξ при произвольных параметрах p , $x_{1,2}$, x_0 , a_n довольно сложна, поэтому величину γ вычислить трудно. Но можно указать верхнюю (γ_B) и нижнюю (γ_H) границы, между которыми лежит коэффициент γ . Так, для раstra вида (5) получаем следующие граничные значения γ :

$$\gamma_B = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \begin{cases} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) & (|\bar{x}| < L) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n-1}} & (|\bar{x}| > 4) \end{cases}; \quad (12)$$

$$\gamma_{\text{н}} = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \begin{cases} \sqrt{(\alpha_1 + \beta_2)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2} & (|\bar{x}| < L) \\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} & (|\bar{x}| > L) \end{cases}, \quad (13)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n \pm 1}} \cos\left(\frac{q}{n \pm 1} - n\varphi_0\right),$$

$$\beta_{1,2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n \pm 1}} \sin\left(\frac{q}{n \pm 1} - n\varphi_0\right).$$

Для растра вида (6) выражения для $\gamma_{\text{в}}$ и $\gamma_{\text{н}}$ несколько иные:

1) $0 < |\bar{x}| < L,$

$$\gamma_{\text{н}} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \gamma_{\text{в}} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

2) $L < |\bar{x}| < \frac{3}{2} L,$

$$\gamma_{\text{н}} = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \gamma_{\text{в}} = \beta_2 + \beta_3,$$

3) $\frac{3}{2} L < |\bar{x}| < \frac{5}{2} L,$

$$\gamma_{\text{н}} = \alpha_1 + \alpha_3, \quad \gamma_{\text{в}} = \beta_1 + \beta_3,$$

4) $|\bar{x}| > \frac{5}{2} L,$

$$\gamma_{\text{н}} = \alpha_3, \quad \gamma_{\text{в}} = \beta_3,$$

где

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n \pm 1}} \cos\left[(n \pm 1)\varphi_0 \pm \frac{n}{n \pm 1} q + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \frac{2B}{b} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cos\left(n\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n \pm 1}},$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{|a_1| L \sqrt{p}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}}.$$

Различия в формулах для граничных значений $\gamma_{\text{н}}$ и $\gamma_{\text{в}}$ в случаях 1)–4) объясняются тем, что каждое слагаемое в (10) существенно отлично от нуля только в некоторой ограниченной области ξ , что следует из свойств интегралов Френеля [8]. При различных соотношениях параметров \bar{x} и L эти области для отдельных членов выражения (10) могут перекрываться или не перекрываться, что приводит к полученным выше результатам.

Для конкретного вида нелинейности канала, описанного выше, величина помехи может достигать 4–7% от величины полезного сигнала. Очевидно, что такая помеха от записи сильного сигнала будет мешать обнаружению слабого,

Полученные нами формулы позволяют вычислять величину помехи для любой конкретной системы передачи информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Hewish, Proc. IRE Austr., 24, № 2, 225 (1963).
2. M. Ryle, Proc. Phys. Soc., 85, № 2, 201 (1965).
3. L. J. Cutrona, W. E. Vivian, E. N. Leith, G. O. Hall, IRE Trans., Mil-5, № 2, 127 (1961).
4. L. J. Cutrona, E. N. Leith, L. J. Porcello, W. E. Vivian, Proc. IEEE, 54, № 8, 1026 (1966).
5. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1967.
6. И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 553 (1967).
7. Катрона. Лейф, Палермо, Парчелло, Зарубежная радиоэлектроника, 10, 3 (1962).
8. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, N. Y., 1959.
9. Ю. Н. Гороховский, Т. М. Левенберг, Общая сенситометрия, изд. Искусство, М., 1963.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
12 июля 1968 г.

CALCULATION OF NOISES PRODUCED BY NONLINEARITY OF
TRANSMISSION CHANNEL WHEN A SIGNAL IS RECEIVED BY
A SYNTHESIZED ANTENNA

E. I. Gel'fer, B. V. Kiyashko, F. A. Markus

The influence of the nonlinearity of transmission channel on the operation of the system, detecting a signal received by a synthesized antenna, is considered. It is shown that the nonlinearity leads to a change of the value of the useful signal and to the appearance of the additive noise. The expression is derived for the noise at an arbitrary nonlinearity of the channel. The value of noise is calculated for the coherent form of the nonlinearity occurring in recording the received signal on a photofilm.

УДК 538.56

О ФЛУКТУАЦИЯХ КАУСТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов

Вычислена корреляционная функция и дисперсия случайных смещений каустической поверхности в среде со случайными неоднородностями. Показано, что распределение средней интенсивности в окрестности каустической поверхности существенно зависит от соотношения между амплитудой смещения каустики и характерным масштабом поля.

Флуктуации поля в окрестности каустической поверхности представляют интерес, например, при исследовании распространения радиоволн в ионосфере и в солнечной короне, а также при изучении распространения звука под водой. Ниже обсуждается геометрический аспект этой проблемы.

Пусть в среде с регулярными неоднородностями вследствие рефракции образуется каустическая поверхность, положение которой показано пунктиром на рис. 1. Пунктирной линией со стрелкой на рис. 1 обозначен луч в регулярной среде. При наличии в среде случайных неоднородностей лучи будут испытывать поперечное смещение, вследствие чего исказится и форма каустики (возмущенное положение каустики и смещенные лучи изображены на рис. 1 сплошными линиями).

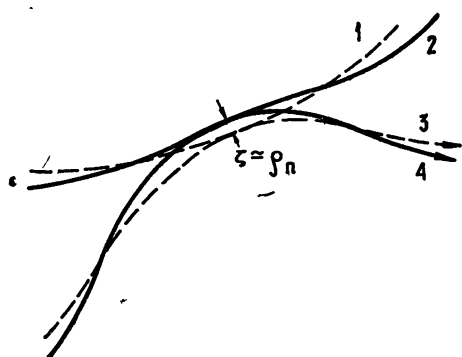


Рис. 1. 1) Невозмущенная каустика; 2) смещенная каустика; 3) невозмущенный луч; 4) смещенное положение луча.

Функцию корреляции и дисперсию случайных смещений каустической поверхности приближенно можно определить, вычислив функцию корреляции и дисперсию боковых смещений лучей по нормали к невозмущенному лучу в точке касания лучом каустики. Зная же дисперсию случайных смещений каустики, можно, при некоторых дополнительных предположениях, сделать ряд заключений (скорее качественного, чем количественного характера) о структуре случайного поля в окрестности каустики.

Пусть τ — параметр, отсчитываемый вдоль луча, и связанный с длиной дуги σ соотношением $\tau = \int_0^\sigma d\sigma \sqrt{\bar{\epsilon}}$, где $\bar{\epsilon}$ — средняя диэлектрическая проницаемость среды (для плазмы τ — групповой путь волны). Случайное боковое смещение луча ρ в первом порядке относительно флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ν ($\epsilon = \bar{\epsilon} + \nu$) дается выражением

$$\rho = \frac{1}{2} \int_0^s (s - \tau) \nabla_{\perp} \nu d\tau, \quad (1)$$

где значения ν берутся на луче $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, а ∇_{\perp} — оператор дифференцирования в направлении, перпендикулярном лучу.

Выделим два произвольных направления с единичными векторами α и β (можно считать, например, что α и β — любые из ортов естественного трехгранника \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b}). Отклонения луча от невозмущенной траектории вдоль этих направлений обозначим через ρ_{α} и ρ_{β} соответственно. Функция корреляции $B_{\alpha\beta}(1, 2) = \overline{\rho_{\alpha}(1) \rho_{\beta}(2)}$ смещений в точках наблюдения 1 и 2 записывается, в соответствии с (1), следующим образом:

$$B_{\alpha\beta}(1, 2) = \overline{\rho_{\alpha}(1) \rho_{\beta}(2)} = \frac{1}{4} \int_0^{s_1} d\tau_1 \int_0^{s_2} d\tau_2 (s_1 - \tau_1) (s_2 - \tau_2) \times \\ \times (\alpha_{\perp} \nabla_1) (\beta_{\perp} \nabla_2) \overline{\nu(\mathbf{r}_1) \nu(\mathbf{r}_2)}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}(\tau_{1,2})$ — траектории невозмущенных лучей 1 и 2, а α_{\perp} и β_{\perp} — проекции векторов α и β на плоскость, перпендикулярную лучу.

После флуктуаций диэлектрической проницаемости ν будем считать слабонеоднородным, т. е. предположим, что функция корреляции $\overline{\nu(\mathbf{r}_1) \nu(\mathbf{r}_2)}$ быстро меняется в зависимости от разности векторов $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{R}$ (с характерным масштабом порядка радиуса корреляции l) и является медленной функцией \mathbf{r}_1 (с пространственным масштабом H порядка масштаба, на котором меняются регулярные свойства среды, $H \gg l$):

$$\overline{\nu(\mathbf{r}_1) \nu(\mathbf{r}_2)} = \overline{\nu^2(\mathbf{r}_1)} N(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1), \quad (3)$$

где $N(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1)$ — коэффициент корреляции, нормированный к единице при $\mathbf{R} = 0$: $N(0, \mathbf{r}_1) = 1$. Зависимость N от \mathbf{r}_1 может проявиться, например, в медленном изменении радиуса корреляции или в медленном вращении осей симметрии (в случае анизотропных флуктуаций).

Произведем в интеграле (2) замену переменных $\tau_0 = (\tau_1 + \tau_2)/2$, $\tau = \tau_2 - \tau_1$ и вектор $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ заменим приближенным выражением $\mathbf{R} \simeq \mathbf{R}_{\perp} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{t} \tau$, где \mathbf{t} — единичный вектор, касательный к первому лучу, а $|\mathbf{R}_{\perp}|$ представляет собой, по существу, расстояние между лучами (рис. 2). Учитывая условие $l \ll H$ (слабая статистическая неоднородность флуктуаций ν), пределы интегрирования по разностной переменной τ сделаем бесконечными, интегрирование по τ_0 проведем от

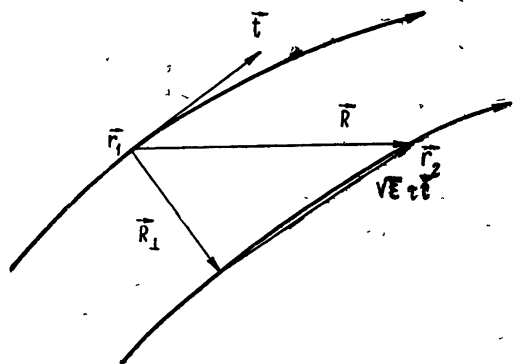


Рис. 2. Приближенное разложение разностного вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ на поперечную (\mathbf{R}_{\perp}) и тангенциальную ($\sqrt{\varepsilon} \mathbf{t} \tau$) составляющие.

0 до $s_0 = (1/2)(s_1 + s_2)$, а $(s_1 - \tau_1)(s_2 - \tau_2)$ заменим на $(s_0 - \tau_0)^2$. Кроме того, в выражении (2) ограничимся дифференцированием толь-

ко по «быстрой» переменной R . Тогда с точностью до членов порядка $l/H \ll 1$ или $(s_2 - s_1)/H \ll 1$

$$B_{\alpha\beta}(1, 2) = -\frac{1}{4} \int_0^{s_0} (s_0 - \tau_0)^2 \bar{v}^2(\tau_0) d\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{\perp} \nabla) (\beta_{\perp} \nabla) N(R, \tau_0) d\tau, \quad (4)$$

где введены обозначения $\bar{v}^2(\tau_0) = \overline{v^2[r_1(\tau_0)]}$, $N(R, \tau_0) = N[R, r_1(\tau_0)]$, $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial R}$. В случае изотропных флуктуаций, когда $N = N(R, \tau_0)$ и

$R = \sqrt{R_{\perp}^2 + \bar{\varepsilon}\tau^2}$, из (4) получаем

$$B_{\alpha\beta}(1, 2) = -\frac{1}{2} \int_0^{s_0} (s_0 - \tau_0)^2 \bar{v}^2(\tau_0) d\tau_0 \int_0^{\infty} \left\{ N' \left[\frac{\alpha_{\perp} \beta_{\perp}}{R} - \frac{(\alpha_{\perp} R)(\beta_{\perp} R)}{R^3} \right] + \right. \\ \left. + N'' \frac{(\alpha_{\perp} R)(\beta_{\perp} R)}{R^2} \right\} d\tau. \quad (5)$$

При совмещении лучей 1 и 2 вектор R равен $\sqrt{\bar{\varepsilon}} t \tau$ (поскольку $R_{\perp} = 0$), и тогда в формуле (5) $(\alpha_{\perp} R) = (\beta_{\perp} R) = 0$. Если вычислить затем средний квадрат полного бокового отклонения луча $\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}_n^2 + 2\bar{\rho}_n \bar{\rho}_b + \bar{\rho}_b^2$ (для этого в качестве α и β нужно взять нормаль n или бинормаль b), то в случае среды с $\bar{\varepsilon} = 1$ и в случае плоско-слоистой среды из (5) легко получаются результаты Чернова [1] и Комиссарова [2].

Если точки наблюдения 1 и 2 лежат на каустике, смещение луча по нормали $\rho_n = (n\rho)$ приближенно совпадает с отклонением каустической поверхности ζ от невозмущенного положения по нормали к последней (см. рис. 1). Следовательно,

$$B_{\zeta}(1, 2) = \overline{\zeta(1)\zeta(2)} \simeq B_{nn}(1, 2), \quad \bar{\rho}^2 \simeq \bar{\rho}_n^2. \quad (6)$$

Соотношения (6) выполняются тем точнее, чем меньше дисперсия боковых смещений $\bar{\rho}_n^2$ по сравнению с квадратом радиуса корреляции l^2 .

При $\bar{\rho}_n^2 \gg l^2$ наступают так называемые «сильные» флуктуации амплитуды поля [3], сопровождающиеся, как это было установлено в [4], появлением случайных каустик, здесь не рассматриваемых. Соотношения (6) и опирающиеся на них последующие расчеты в этом случае теряют силу.

Существенно, что функция корреляции $B_{\zeta}(1, 2)$ неизотропна в плоскости, касательной к невозмущенной каустике. Объясняется это тем, что среднее расстояние между лучами $R_{\perp}(\tau_0)$ различно при разнесении точек 1 и 2 в плоскости луча и поперек нее (в этом легко убедиться на примере плоской волны в линейном слое с $\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 z$, когда невозмущенная каустика представляет собой плоскость $z = z_c = \text{const}$). Заметим, что зависимость радиуса корреляции различных параметров волны от среднего расстояния между лучами проявляется уже в статистически однородной среде. Так, при одинаковом пути в среде со случайными неоднородностями радиус корреляции сферической волны всегда больше, чем плоской, поскольку на большей части пути лучи в первом случае расположены ближе друг к другу, чем во втором.

Вдали от каустики при $\bar{\rho}^2 \ll l^2$ случайные боковые смещения лучей приводят к слабым флуктуациям поля [3]. В окрестности же каустики флуктуации поля могут оказаться большими даже при выполне-

нии неравенства $\bar{\zeta}^2 \sim \bar{\rho}_n^2 \leq l^2$, если одновременно выполнено условие $\zeta^2 \gg \Lambda^2$, где Λ — характерный масштаб поля на каустике. (Приближенно Λ равно расстоянию до первого максимума функции Эйри.) Как показано в [5] и [6],

$$\Lambda = k^{-2/3} \left(2\epsilon_k \left| \frac{1}{R_k} \pm \frac{1}{R_n} \right| \right)^{-1/3}, \quad (7)$$

где $\bar{\epsilon}_k$ — значение средней диэлектрической проницаемости на каустике, а R_k и R_n — радиусы кривизны каустики и луча. В дальнейшем мы будем считать, что $\Lambda \ll l$.

Среднюю интенсивность поля на каустике можно найти, воспользовавшись следующей асимптотической формулой

$$u = \sqrt{2} k^{1/6} \exp(ik_0 \theta - i\pi/4) g_0 v \left(\frac{\zeta}{\Lambda} \right), \quad (8)$$

которая была получена в [7–9] методом эталонных функций. В отличие от [7–9], в качестве аргумента функции Эйри $v(t)$ мы взяли ζ/Λ (ζ — случайное смещение каустики, отсчитываемое по нормали к невозмущенному положению) и отбросили слагаемое, содержащее производную функции Эйри, поскольку на каустике это слагаемое обычно мало. Величины θ и g_0 в (8) выражаются через решения уравнений в приближении геометрической оптики [7–9].

Мы предположим, что относительные функции амплитудного фактора g_0 в (8) малы по сравнению с единицей*: $(\delta g_0/g_0)^2 \ll 1$. Среднюю интенсивность поля на каустике $\bar{I}_k = uu^*$ можно определить по формуле

$$\bar{I}_k = 2k^{1/3} g_0^2 \int v^2 \left(\frac{\zeta}{\Lambda} \right) w(\zeta) d\zeta, \quad (9)$$

где $w(\zeta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-\zeta^2/2\sigma^2)$ — гауссово распределение случайной величины ζ , совпадающее, по предположению, с распределением величины ρ_n (в силу центральной предельной теоремы, гауссов закон распределения ρ_n имеет место даже при негауссовых флуктуациях ν).

Интеграл (9) приближенно вычисляется при $\sigma \ll \Lambda$ и $\sigma \gg \Lambda$. В первом случае (малые по сравнению с Λ смещения каустики)

$$\bar{I}_k \simeq 2k^{1/3} g_0^2 \left\{ [v(0)]^2 + [v'(0)]^2 \frac{\sigma^2}{\Lambda^2} \right\} \quad (\sigma \ll \Lambda),$$

а во втором

$$\bar{I}_k \simeq 2k^{1/3} g_0^2 \frac{\Gamma(1/4)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Lambda}{\sigma}} = 2k^{1/3} g_0^2 0,86 \sqrt{\frac{\Lambda}{\sigma}} \quad (\sigma \gg \Lambda).$$

Примерный вид зависимости средней интенсивности \bar{I}_k (нормированной к невозмущенному значению $I_0 = 2k^{1/3} g_0^2 [v(0)]^2$) от отношения σ/Λ приведен на рис. 3. С ростом этого отношения интенсивность поля на каустике сначала несколько увеличивается, а затем убывает как $\sqrt{\Lambda/\sigma}$. Падение средней интенсивности при $\sigma/\Lambda > 1$ обусловлено тем, что при увеличении размаха колебаний каустики σ точка на невозмущенной каустике все с большей вероятностью оказывается

* Как показывают оценки, они еще меньше, чем относительные флуктуации геооптической амплитуды A вдали от каустики, поскольку амплитудные флуктуации частично сглаживаются дифракционными эффектами в окрестности каустики, подобно тому, как сглаживаются флуктуации поля в фокусе линзы.

в области каустической тени, где поле затухает по экспоненциальному закону.

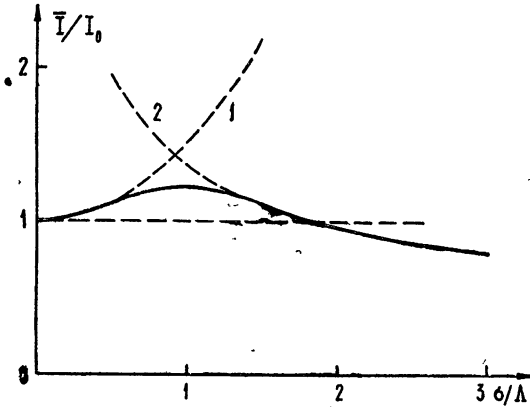


Рис. 3. Зависимость нормированной средней интенсивности поля на каустике \bar{I}/I_0 от отношения σ/Λ :

$$1. \quad \frac{\bar{I}}{I_0} = 1 + \left[\frac{v'(0)}{v(0)} \right]^2 \frac{\sigma^2}{\Lambda^2};$$

$$2. \quad \frac{\bar{I}}{I_0} = \frac{0,86}{v^2(0)} \sqrt{\frac{\Lambda}{\sigma}}.$$

При сделанных выше предположениях ($\Lambda \ll l$ и $(\overline{\delta g_0/g_0})^2 \ll 1$ или, более точно, $(\overline{\delta g_0/g_0})^2 \ll \sigma^2/\Lambda^2$) можно получить выражение и для средней интенсивности на расстоянии ζ_0 от невозмущенной каустики в виде

$$\bar{I}(\zeta_0) = 2k^{1/3} g_0^2 \int v^2 \left(\frac{\zeta + \zeta_0}{\Lambda} \right) w(\zeta) d\zeta. \quad (10)$$

При $\zeta_0 = 0$ (10) переходит в (9).

Оценить интеграл в (10) удастся только при $\sigma/\Lambda \ll 1$, когда он оказывается равным

$$\bar{I}(\zeta_0) \simeq 2k^{1/3} g_0 \left\{ v^2 \left(\frac{\zeta_0}{\Lambda} \right) + \left[v'^2 \left(\frac{\zeta_0}{\Lambda} \right) + \frac{\zeta_0}{\Lambda} v^2 \left(\frac{\zeta_0}{\Lambda} \right) \right] \frac{\sigma^2}{\Lambda^2} \right\}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что случайные смещения каустики приводят к «замыванию» минимумов и к сглаживанию максимумов распределения интенсивности, как это показано на рис. 4. Из физических соображений можно ожидать, что при $\sigma/\Lambda \gg 1$ произойдет практически полное сглаживание максимумов и минимумов, причем далеко в области тени средняя интенсивность заметно возрастет по сравнению с невозмущенной.

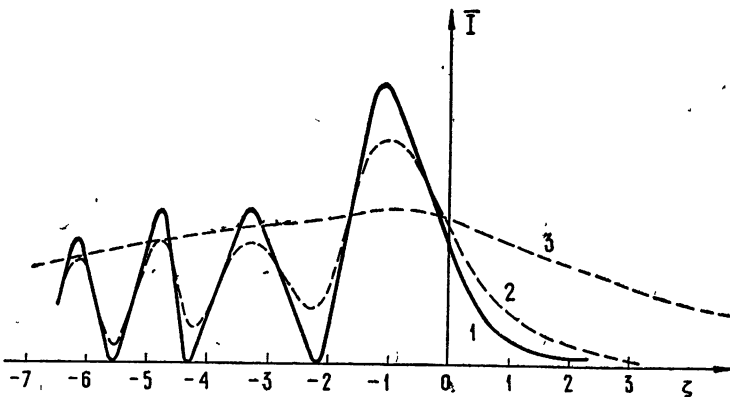


Рис. 4. Качественная картина распределения средней интенсивности в окрестности каустики: 1) в отсутствие флуктуаций; 2) при $\sigma/\Lambda \ll 1$; 3) при $\sigma/\Lambda \gg 1$.

Пользуясь высказанными выше соображениями, можно записать выражение и для дисперсии флуктуаций интенсивности $(\delta I)^2 = \overline{I^2} - \bar{I}^2$, а именно

$$[\delta I(\zeta_0)]^2 = 4k^{2/3} g_0^4 \left\{ \int v^4 \left(\frac{\zeta + \zeta_0}{\Lambda} \right) w(\zeta) d\zeta - \left[\int v^2 \left(\frac{\zeta + \zeta_0}{\Lambda} \right) w(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (12)$$

При помощи (12) легко оценить δI^2 при $\sigma/\Lambda \ll 1$, но при $\sigma/\Lambda \gg 1$ и в наиболее интересном случае $\sigma \sim \Lambda$ необходимо использовать численные методы (это относится и к формуле (10)).

Что касается фазы θ волновой функции (8), то, согласно [7-9], $\theta = (1/2)(\varphi_1 + \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — значения эйконалов на двух лучах, проходящих в точку наблюдения. На каустике оба луча сливаются, так что $\theta = \varphi$, и, следовательно, дисперсия $\overline{\theta^2}$ и корреляционная функция $\overline{\theta_1 \theta_2}$ могут быть вычислены в приближении геометрической оптики.

В заключение отметим, что вопрос о структуре поля вблизи случайной каустики в однородном пространстве рассматривался методами, отличными от нашего, в [10] (разложение по плоским волнам в задаче о фокусировке звука над плоской границей раздела воздух — вода; случайные смещения лучей обусловлены неоднородностями в море) и в [11] (модель статистически и регулярно неоднородного фазового экрана в задаче о прохождении радиоволн через солнечную корону). Общим для этих задач является «размывание» каустики и сглаживание поля в ее окрестности. Как стало известно авторам, численный расчет интегралов типа (9) и (10) проведен Пермитиным и Фрайманом [12], причем интегралы такого типа были получены ими при более общих предположениях, чем в нашей работе.

Авторы признательны С. М. Рытову, П. В. Блюху и В. М. Комиссарову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. В. М. Комиссаров, Диссертация, М., 1966.
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, 798 (1968).
5. В. Я. Грошев, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1812 (1968).
6. T. Pearcey, Phil. Mag., 37, 311 (1946).
7. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964).
8. D. Ludwig, Comm Pure Appl. Math., 19, 215 (1966).
9. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, 1 (1968).
10. В. А. Гончаров, Дипломная работа, МФТИ, М., 1967.
11. П. В. Блюх, В. Г. Синицын, И. М. Фукс, Астрон. ж., 46, 348 (1969).
12. Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
24 июня 1968 г.

FLUCTUATIONS OF CAUSTIC SURFACE IN THE MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. A. Baranov, Yu. A. Kravtsov

The correlation function is calculated, as well as the mean square of random shifts of the caustic surface in the medium with random inhomogeneities. It is shown that the distribution of the mean intensity in the vicinity of caustic surface depends considerably on the relation between the amplitude of the caustic displacement and the characteristic field scale.

УДК 538.56

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ОПИСАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В. И. Кляцкин

В геометрикооптическом приближении рассматривается система уравнений, описывающая поведение уровня амплитуды и фазы плоской волны, распространяющейся в среде со слабыми неоднородностями. Поле диэлектрической проницаемости считается гауссовым однородным случайным полем. Показано, что если известно точное решение для фазы волны (т. е. функциональная зависимость фазы волны от диэлектрической проницаемости), то уровень амплитуды определяется простым интегрированием определенного функционала от фазы. Для статистического описания фазы волны получена замкнутая система функциональных уравнений, из решения которых можно также определить статистические свойства уровня амплитуды.

Рассмотрим задачу о распространении плоской световой волны с амплитудой A_0 и волновым вектором k в геометрикооптическом приближении. Будем считать, что поле случайной величины—диэлектрической проницаемости слабо флуктуирует относительно своего среднего значения, равного единице, и является гауссовым однородным полем.

В приближении, связанном с пренебрежением эффектами рассеяния света на большие углы, как известно [1], функции $\chi(x, \rho) = \ln A/A_0$ — уровень амплитуды и $S(x, \rho)$ — отклонение фазы волны от фазы плоской волны, равной kx , удовлетворяют уравнениям

$$2k \frac{\partial \chi}{\partial x} + 2\nabla_{\perp} S \nabla_{\perp} \chi + \Delta_{\perp} S = 0; \quad (1)$$

$$2k \frac{\partial S}{\partial x} + (\nabla_{\perp} S)^2 = k^2 \varepsilon(x, \rho). \quad (2)$$

Здесь расстояние x отсчитывается по направлению первоначального движения волны и предполагается, что случайная среда заполняет полуплоскость $x > 0$; через ε обозначено отклонение диэлектрической проницаемости от единицы, а через ρ , ∇_{\perp} , Δ_{\perp} — поперечные координаты и соответственно производные по ним. Уравнения (1) и (2) следует решать с начальными условиями

$$\chi(0, \rho) = 0, \quad S(0, \rho) = 0. \quad (3)$$

В работе [2] исследовалось уравнение (1), выражающее закон сохранения энергии, в приближении, заключающемся в замене полной фазы волны $S(x, \rho)$ на величину $S^0(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x dt \varepsilon(t, \rho)$, являющейся решением линеаризованного уравнения (2) методом плавных возмуще-

ний (МПВ). В работе [3], на основе частичного суммирования ряда для дисперсии угла прихода волны в точку наблюдения, был получен параметр, описывающий интенсивность фазовых флуктуаций, которым оказалась величина дисперсии угла прихода, полученная МПВ, и, следовательно, качественно было найдено условие применимости приближения работы [2].

Целью настоящей работы является изучение некоторых статистических свойств системы уравнений (1) и (2) в целом.

Удобно перейти к фурье-компонентам всех величин по поперечным координатам. Тогда система уравнений (1)–(2) при условии (3) переписывается в виде

$$\chi_p(x) = \frac{p^2}{2k} \int_0^x d\xi S_p(\xi) + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) \chi_{q_2}(\xi); \quad (1a)$$

$$S_p(x) = S_p^0(x) + \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) S_{q_2}(\xi), \quad (2a)$$

где $\Lambda_{q_1, q_2}^p = (q_1 q_2) \delta(q_1 + q_2 - p)$, $S_p^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_p(\xi)$ — фаза волны,

найденная МПВ, и все величины в (1a) и (2a) удовлетворяют условию $\varphi_p^*(x) = \varphi_{-p}(x)$ (в силу вещественности полей $\varphi(x, \rho)$).

В работе [2] было показано, что решение уравнения (1a) можно записать в виде

$$\chi_p(x) = \frac{1}{2k} \int_0^\infty d\xi \int dq q^2 D_{p, q}(x, \xi) S_q(\xi), \quad (4)$$

где функция D определяет поперечные смещения лучей, введенных в [2], и ее среднее значение является плотностью вероятности для поперечных смещений лучей. Функция $D_{p, p'}(x, x')$ является фурье-образом функции Грина уравнения (1) и удовлетворяет уравнению

$$D_{p, p'}(x, x') = D_{p, p'}^0(x, x') + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) D_{q_2 p'}(\xi, x'), \quad (5)$$

где $D_{p, p'}^0(x, x') = \Theta(x - x') \delta(p - p')$ — фурье-образ функции Грина при решении МПВ.

Уравнение для фазы волны (2) или (2a) является в геометрооптическом приближении замкнутым. Предположим, что мы знаем его точное решение, т. е. фазу волны как функционал поля диэлектрической проницаемости $S[\varepsilon]$. Тогда можно выписать и точное решение уравнения (2a). Для этого рассмотрим функциональную производную поля S по полю ε . Варьируя уравнение (2a) по полю ε , мы получаем

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} = \frac{k}{2} D_{p, p'}^0(x, x') + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) \frac{\delta S_{q_2}(\xi)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')}. \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (5), находим, что

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} = \frac{k}{2} D_{p, p'}(x, x') \quad (7)$$

и, следовательно, выражение для уровня амплитуды (4) можно переписать в виде

$$\chi_p(x) = \frac{1}{k^2} \int_0^\infty d\xi \int dq q^2 S_q(\xi) \frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_q(\xi)}. \quad (8)$$

Таким образом, если нам известно полное решение уравнения для фазы волны, то формула (8) является решением уравнения для уровня амплитуды, и, следовательно, статистический характер уровня амплитуды описывается полностью статистическим характером фазы волны.

Обратимся теперь к статистическому описанию характеристик волны. В силу предполагаемой гауссовости и однородности поля диэлектрической проницаемости, различные статистические средние как фазы волны, так и уровня амплитуды будут определяться величиной

$$\langle \varepsilon_q(x) \varepsilon_q(y) \rangle = \delta(q+x) \Phi_q^\varepsilon(x, y), \quad (9)$$

где $\Phi_q^\varepsilon(x, y)$ — двумерный (по поперечным координатам) спектр поля диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим корреляцию фазы волны с полем ε . Используя соотношение, полученное в работе [4], для корреляции гауссовской величины, среднее значение которой равно нулю, с функционалом от нее же

$$\langle f(\xi) R[f] \rangle = \int d\eta \langle f(\xi) f(\eta) \rangle \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f(\eta)} \right\rangle, \quad (10)$$

где через ξ обозначен n -мерный вектор, для корреляции фазы волны с полем ε получаем

$$\langle S_p(x) \varepsilon_q(y) \rangle = \frac{k}{2} \int_0^\infty d\xi \Phi_q^\varepsilon(y, \xi) \langle D_{p, -q}(x, \xi) \rangle. \quad (11)$$

Таким образом, формула (11) определяет связь плотности вероятности поперечных приращений лучей, вдоль которых распространяется энергия волны, с корреляцией фазы волны и диэлектрической проницаемостью среды.

Полное статистическое описание фазы волны можно получить, рассматривая характеристический функционал фазы волны

$$\Phi[u] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^\infty d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle. \quad (12)$$

Используя уравнение (2 а), для $\Phi[u]$ легко определяем уравнение в вариационных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta u_p(x)} = i \frac{k}{2} \left\langle \varepsilon_p(x) \exp \left\{ i \int_0^\infty d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle - \frac{i}{2k} \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_{q_1}(x) \delta u_{q_2}(x)}. \quad (13)$$

С учетом (10) первый член в правой части (13) можно переписать как

$$-\frac{k}{2} \int_0^\infty \int d\xi d\eta \int dq \Phi_p^\varepsilon(x, \eta) u_q(\xi) \Psi_{q, -p}[\xi, \eta; u],$$

где

$$\Psi_{p, p'}[x, x'; u] = \left\langle \frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} \exp \left\{ i \int_0^\infty d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle \quad (14)$$

Тогда уравнение (13) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta u_p(x)} = & -\frac{k}{2} \iint_0^\infty d\xi d\eta \int dq \Phi_p^\varepsilon(x, \eta) u_q(\xi) \Psi_{q, -p}[\xi, \eta; u] - \\ & - \frac{i}{2k} \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_{q_1}(x) \delta u_{q_2}(x)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение для функционала Ψ мы получаем, исходя из уравнения (6):

$$\begin{aligned} \Psi_{p, p'}[x, x'; u] = & \frac{k}{2} D_{p, p'}^0(x, x') \Phi[u] - \\ & - \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta}{\delta u_{q_1}(\xi)} \Psi_{q, p'}[\xi, x'; u]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) в совокупности образуют замкнутую систему функциональных уравнений для функционалов Φ и Ψ . Учитывая, что

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_q(x')} \sim \Theta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x' \\ 1/2 & \text{при } x = x' \\ 0 & \text{при } x < x' \end{cases},$$

можно из уравнения (16) найти связь между функционалами Φ и Ψ , а именно

$$\Phi[u] = \frac{2}{k} \int dp \Psi_{p, 0}[x, x'; u] = \frac{4}{k} \int dp \Psi_{p, p'}[x, x; u]. \quad (17)$$

Из системы функциональных уравнений (15) — (16) можно получить замкнутое уравнение для функционала Ψ , а функционал Φ определять потом на основании равенств (17). Но выглядит, однако, уравнение для Ψ очень промоздко.

Функционалы Φ и Ψ не только полностью определяют статистический характер фазы волны, но также характеризуют и статистическое поведение уровня амплитуды. В самом деле, величина

$$\frac{2}{k} \Psi_{p, p'}[x, x'; 0] = \langle D_{p, p'}(x, x') \rangle \quad (18)$$

определяет плотность вероятности поперечных смещений лучей, а величина

$$-\frac{i}{k^2} \int_0^\infty d\xi \int dq q^2 \frac{\delta}{\delta u_q(\xi)} \Psi_{p, q}[x, \xi; u] \Big|_{u=0} = \langle \chi_p(x) \rangle \quad (19)$$

— среднее значение уровня амплитуды. Аналогично, исходя из уравнения (6), можно построить системы функционалов, разложение которых

в функциональные ряды Тейлора будут определять высшие моменты уровня амплитуды.

Обратимся теперь к приближениям, используемым в [2, 3]. Прежде всего отметим, что приближение в [2] соответствует замене в уравнении (16) величины $\Phi[u]$ на гауссов функционал $\Phi^0[u]$, соответствующий МПВ, что является первым приближением своеобразной теории возмущений. Кроме того, отметим, что приближение, сводящееся к замене в различных выражениях фазы волны S на величину S^0 , полученную МПВ, надо производить последовательно, в соответствии с решаемой задачей.

Так, например, в работе [3] показано, что в турбулентной среде

$$\langle [\nabla_{\perp} S(L, 0)]^2 \rangle / \langle [\nabla_{\perp} S^0(L, 0)]^2 \rangle = 1, \quad 1 \ll \sigma_0^2 \ll (L/l_0)^2, \quad (20)$$

где L — длина световой трассы, l_0 — внутренний масштаб турбулентности, а величина σ_0^2 — дисперсия уровня амплитуды по МПВ, определяющая интенсивность амплитудных флуктуаций. Однако в том же приближении, что и при выводе (20), из формулы (11) следует, что

$$\langle \nabla_{\perp} S(L, 0) \nabla_{\perp} S^0(L, 0) \rangle / \langle [\nabla_{\perp} S^0(L, 0)]^2 \rangle \sim 1/\sigma_0^{1/2}, \quad \sigma_0^2 \gg 1. \quad (21)$$

Это означает, что при исследовании, например, $\langle \chi(x, \rho) \rangle$ мы не можем заменить величину $S_q(\xi)$ в формуле (4) на величину $S_q^0(\xi)$, найденную МПВ, а функцию D считать точно заданной и определяемой соотношением (7). Надо или во всем выражении (4) заменить S на S^0 , что и делалось в работе [2], или же сначала выполнить усреднение формулы (4), а уже потом использовать соответствующее приближение.

Усреднение (4) можно провести путем использования представления фазы волны в виде интеграла, описывающего перенос случайной гауссовой величины $\varepsilon(x, \rho)$ — диэлектрической проницаемости вдоль случайной траектории [3] и дальнейшего использования формулы (10). Если принять во внимание, что траектория, по которой переносится ε , совпадает с траекторией лучей, описывающих перенос энергии, с точностью до величины, определяемой переносом $[\nabla_{\perp} S]^2$ по траектории последних, то можно получить асимптотику $\langle \chi \rangle$ при $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$, которая совпадает с асимптотикой, полученной в [2]. Это служит дополнительным подтверждением как формулы (20), так и справедливости приближения работы [2].

В заключение выражаю благодарность В. И. Татарскому за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, № 2 (8), 662 (1968).
3. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 723 (1969).
4. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, № 5 (11), 1919 (1964).

FUNCTIONAL DESCRIPTION OF THE CHARACTERISTICS OF A PLANE
LIGHT WAVE PROPAGATING IN A MEDIUM WITH RANDOM
INHOMOGENEITIES OF THE REFRACTIVE INDEX

V. I. Klyatskin

A set of equations, describing the behaviour of the level of the amplitude and phase of a plane wave, propagating in the medium with weak inhomogeneities, is considered in the geometrical optics approximation. The permittivity dielectric field is considered to be the Gaussian random field. It is shown that if an exact solution for the phase of the wave is known (i. e. the functional dependence of the wave phase on the dielectric permittivity), the amplitude level is determined by a simple integration of the definite functional over the phase. For statistical description of the wave phase there is obtained a closed set of functional equations the solution of which makes possible to determine the statistical properties of the amplitude level.

УДК 538.56 : 525.19

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ДИПОЛЯ В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. П. Докучаев, Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин

Вычислены потери энергии элементарного диполя (акустического и электрического) на излучение волн в хаотически неоднородной среде. Расчет проведен двумя способами — путем подсчета потока энергии в акустическом случае и методом реакции излучения в электромагнитном случае. Показано, что на излучение источника в неоднородной среде заметное влияние может оказывать процесс рассеяния квазистатических полей на неоднородностях ближней зоны.

Задача об излучении источника, помещенного в среду с хаотическими неоднородностями, представляет интерес в ряде отношений. Во-первых, речь идет о дифракции и рассеянии на неоднородностях среды поля диполя, имеющего более сложную пространственную структуру по сравнению с полем плоской или сферической волны [1, 2]. Во-вторых, наличие флуктуаций в среде может заметно исказить диаграмму направленности излучателя. В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию диаграмм направленности излучателей в среде со случайными неоднородностями [3, 4], однако в большинстве из них предполагается, что неоднородный слой расположен в дальней зоне антенны. В отличие от упомянутых работ в настоящей статье рассмотрение проведено для того случая, когда неоднородная среда находится в непосредственной близости от излучателя. При этом важную роль может играть рассеяние квазистатического поля излучателя на неоднородностях ближней зоны. Особенно сильно этот эффект проявляется в условиях, когда размеры источника малы по сравнению с длиной волны.

Необходимо заметить, что расчет интенсивности рассеянных волн можно провести двумя способами — путем подсчета потока энергии и методом реакции излучения. В последнем случае достаточно знать среднее (по ансамблю неоднородностей) поле данного источника. Среднее поле легко отыскать, если известна эффективная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{эфф}$ хаотически неоднородной среды [5, 6]. Существенным здесь является то обстоятельство, что при расчете таким методом в ряде случаев следует учитывать пространственную дисперсию мнимой части $\epsilon_{эфф}$, связанную с рассеянием волн на неоднородностях среды [7]. Фактически этот вопрос тесно связан с задачей о потерях энергии точечного источника в однородной поглощающей среде. Для того, чтобы получить конечное выражение для потерь в такой среде, также необходим учет пространственной дисперсии мнимой части ϵ .

Ниже на основе первого метода рассмотрено излучение акустического диполя в неоднородной среде. Электромагнитный случай исследован с помощью второго метода.

1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ДИПОЛЕМ, ОКРУЖЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ СЛОЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Уравнение для возмущений давления p в среде при наличии источника массы $Q(r, t)$ имеет вид [1]

$$\Delta p - (\nabla \ln \rho_0 \nabla p) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где $c_s = c_{s0}[1 + \nu(r)]$ — скорость звука, $\rho_0 = \rho_{00}[1 + \mu(r)]$ — невозмущенная волнами плотность среды, $\nu(r)$ и $\mu(r)$ — случайные относительные флуктуации скорости звука и плотности среды. Хаотические поля ν, μ будем считать однородными и изотропными. Появление правой части уравнения (1) обусловлено тем, что в уравнении непрерывности введен сторонний источник возмущений $Q(r, t)$, который в рассматриваемой задаче выбирается в форме

$$Q(r, t) = Q_0 e^{i\omega t} \frac{d}{dz} \delta(r), \quad (2)$$

где $\delta(r)$ — трехмерная функция Дирака. Выражение (2) соответствует элементарному гармоническому диполю с моментом Q_0 , ориентированному по оси z .

Решение задачи об излучении проведем методом малых возмущений, считая μ и ν малыми величинами. Как следует из (1), (2), уравнения нулевого и первого (борновского) приближения имеют вид:

$$\Delta p_0 + k_0^2 p_0 = - i\omega Q_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta(r); \quad (3)$$

$$\Delta p_1 + k_0^2 p_1 = 2k_0^2 \nu(r) p_0(r) + \nabla \mu(r) \nabla p_0(r), \quad (4)$$

где $k_0 = \omega/c_{s0}$ — волновое число. Решение уравнения (3) дается формулой

$$p_0(r) = \frac{i\omega Q_0}{4\pi r} \cos \theta \left(ik_0 - \frac{1}{r} \right) \exp(ik_0 r). \quad (5)$$

Множитель $\exp(i\omega t)$ в выражениях для полей опущен. Второе слагаемое в (5) представляет собой квазистатическое поле диполя и при условии $(k_0 r) \ll 1$ преобладает над волновым полем.

Интенсивность излучения I звуковых волн в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\Omega d\varphi$ просто связана с потоком энергии $N_r = p v^*/2$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = r^2 N_r = \frac{p(r) p^*(r)}{2\rho_0 c_{s0}} r^2. \quad (6)$$

Здесь учтено, что в волновой зоне излучателя $v_r(r) \simeq p(r)/\rho_0 c_{s0}$ символ (*) обозначает комплексно-сопряженную величину. В нулевом приближении из формулы (6) получаем

$$\frac{dI_0}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4 Q_0^2}{32\pi^2 \rho_0 c_{s0}^3} \cos^2 \theta, \quad I_0 = \frac{\omega_0^4 Q_0^2}{24\pi \rho_0 c_{s0}^3}. \quad (7)$$

Решение уравнения (4) запишем в виде

$$p_1(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V [2k_0^2 \nu(r') p_0(r') + \nabla \mu(r') \nabla p_0(r')] \frac{\exp(ik_0 |r - r'|)}{|r - r'|} dr', \quad (8)$$

где $dr' = dx dy dz$, а интегрирование проводится по объему, занятому неоднородностями. Для простоты выберем этот объем в виде сферического слоя с радиусами R_{\max} и R_{\min} , в центре которого расположен излучатель.

Если точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера $r \gg \gg k_0 R_{\max}^2$, выражение (8) принимает более простой вид:

$$p_1(\mathbf{r}) \simeq \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \int_V [2k_0^2 v(r') p_0(r') + \nabla^{\mu}(r') \nabla p_0(r')] \exp[-ik_0(mr)] dr', \quad (9)$$

где $m = r/r$ — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения. Подставляя $p_1(\mathbf{r})$ из соотношения (9) в формулу (6) и производя статистическое усреднение, получаем следующее выражение для средней интенсивности рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} = & \frac{1}{2(4\pi)^2 \rho_{00} c_{s0}} \int_V \int_V 4k_0^4 \overline{v^2} \Gamma_v(|\rho|) p_0(r_1) p_0^*(r_2) - \\ & - 2k_0^2 \overline{\mu v} \Gamma_{\mu v}(|\rho|) [p_0^*(r_1) p_0(r_2) + p_0(r_2) p_0^*(r_1) + ik_0 p_0^*(r_1) (m\nabla) p_0(r_2) - \\ & - ik_0 p_0(r_2) (m\nabla) p_0^*(r_1)] + \overline{\mu^2} \Gamma_{\mu}(|\rho|) [\Delta p_0^*(r_1) - ik_0 (m\nabla) p_0^*(r_1)] \times \\ & \times [\Delta p_0(r_2) + ik_0 (m\nabla) p_0(r_2)] \exp[-ik_0(m\rho)] dr_1 dr_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены нормированные функции корреляции

$$\Gamma_v(|\rho|) = \frac{\overline{v(r_1)v(r_2)}}{v^2}, \quad \Gamma_{\mu v} = \frac{\overline{\mu(r_1)v(r_2)}}{\mu v}, \quad \Gamma_{\mu} = \frac{\overline{\mu(r_1)\mu(r_2)}}{\mu^2}, \quad (11)$$

$$\rho = r_1 - r_2;$$

черта сверху означает статистическое усреднение. В дальнейшем будем полагать $\Gamma_v \simeq \Gamma_{\mu v} \simeq \Gamma_{\mu} = \Gamma$.

Выражение (10) существенно упрощается, если предположить, что в области интегрирования размер неоднородностей среды l (радиус корреляции флуктуаций) мал по сравнению с характерным масштабом L изменения поля p_0 . В рассматриваемом случае $L = \min\{R_{\min}, \lambda\}$, $\lambda = 2\pi/k_0$. Таким образом, из (10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} = & \frac{k_0^2}{2(4\pi)^2 \rho_{00} c_{s0}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(|\rho|) d\rho \left[k_0^2 (4\overline{v^2} + 4\overline{\mu v} + \overline{\mu^2}) \int_V p_0(r_1) p_0^*(r) dr + \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{\mu^2} \int_V (m\nabla) p_0(r) (m\nabla) p_0^*(r) dr \right] \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражение для $p_0(r)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} = & \frac{\omega^4 Q_0^2 \overline{l^3}}{30(4\pi)^2 \rho_{00} c_{s0}^3} \left\{ 20k_0^2 (\overline{v^2} + \overline{\mu v}) \left(k_0^2 R_{\max} + \frac{1}{R_{\min}} \right) + \right. \\ & \left. + \overline{\mu^2} \left[\left(\frac{k_0^2}{R_{\min}} + \frac{1}{R_{\min}^3} \right) (3 + \cos^2 \theta) + k_0^4 R_{\max} (1 + 2 \cos^2 \theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\overline{l^3} = \int_0^\infty \rho^3 \Gamma(\rho) d\rho$. Выполняя интегрирование по углу θ , из (13) находим полную интенсивность рассеяния в борновском приближении:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = & \frac{\omega^4 Q_0^2 \bar{l}^3}{6\pi\rho_0 c_{s0}^3} \left\{ k_0^2 (\bar{v}^2 + \bar{\mu}v) \left(k_0^2 R_{\max} + \frac{1}{R_{\min}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \bar{\mu}^2 \left[2 \left(\frac{k_0^2}{R_{\min}} + \frac{1}{R_{\min}^3} \right) + k_0^4 R_{\max} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Борновское приближение справедливо при условии $\bar{I}_1 \ll I_0$. Это накладывает, в частности, ограничение на параметры R_{\min} и R_{\max} :

$$\begin{aligned} \bar{l}^3 \left\{ 4k_0^2 (\bar{v}^2 + \bar{\mu}v) \left(k_0^2 R_{\max} + \frac{1}{R_{\min}} \right) + \frac{1}{3} \bar{\mu}^2 \left[2 \left(\frac{k_0^2}{R_{\min}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{R_{\min}^3} \right) + k_0^4 R_{\max} \right] \right\} \ll 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Члены, пропорциональные R_{\max} в формулах (13), (14), связаны с рассеянием поля излучения диполя на неоднородностях среды. Отличие от случая рассеяния плоской волны [1], когда $\bar{I}_1 \sim R_{\max}^3$, обусловлено здесь сферичностью волны. Члены, пропорциональные R_{\min}^{-1} , R_{\min}^{-3} в (14), возникают благодаря трансформации на неоднородностях среды энергии ближнего поля диполя в энергию рассеянного излучения.

Из выражений (13), (14) видно, что при стремлении R_{\min} к нулю I_1 стремится к бесконечности. Однако предельный переход $R_{\min} \rightarrow 0$ является некорректным. Действительно, выше мы предполагали, что $p_0(r)$ мало изменяется на расстояниях порядка радиуса корреляции неоднородностей среды. Это предположение, приводящее к формуле (14), равносильно пренебрежению пространственной дисперсией среды с неоднородностями [5, 6]. Однако вблизи точечного диполя поле $p_0(r)$ изменяется очень резко (сильная пространственная дисперсия). Поэтому выражение (14) справедливо лишь в случае, когда неоднородности отсутствуют в непосредственной близости от диполя (строго говоря, необходимо выполнение неравенства $R_{\min} \gg l$)*.

При $R_{\min} \ll l$ становится существенным то обстоятельство, что поле вблизи диполя резко меняется на расстояниях порядка размеров неоднородностей. Поэтому интегралы в (10) нуждаются в более корректном вычислении. Соответствующее рассмотрение будет проведено в следующем разделе.

Остановимся теперь на рассмотрении частных случаев формулы (13).

1. Флуктуации плотности отсутствуют ($\mu = 0$). Тогда для средней интенсивности поля рассеяния имеем

$$\frac{\bar{dI}}{d\Omega} = \frac{2}{3} \frac{k_0^6 \bar{v}^2 \bar{l}^3 c_{s0} Q_0^2}{(4\pi)^2 \rho_0} \left(k_0^2 R_{\max} + \frac{1}{R_{\min}} \right). \quad (16)$$

Следовательно, диаграмма излучения носит изотропный характер. Влияние рассеяния ближних полей становится преобладающим при выполнении неравенства

$$k_0^2 R_{\max} R_{\min} \ll 1. \quad (17)$$

При этом $\bar{I} \sim \omega^6$, в то время как в обратном предельном случае $\bar{I} \sim \omega^8$.

* Практически роль величины R_{\min} (при $L_0 \ll \lambda$) может играть размер L_0 излучателя, погруженного в неоднородную среду.

2. Отсутствуют флуктуации скорости звука ($\nu = 0$). В этом случае

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{k_0^4 c_{s0} Q_0^2 \bar{\mu}^2 \bar{l}^3}{30(4\pi)^2 \rho_{00}} \left[\left(\frac{k_0^2}{R_{\min}} + \frac{1}{R_{\min}^3} \right) (3 + \cos^2 \theta) + k_0^4 R_{\max} (1 + 2 \cos^2 \theta) \right]. \quad (18)$$

Из (18) следует, что ближние поля вносят преобладающий вклад в поле рассеяния при условии

$$k_0^4 R_{\max} R_{\min}^3 \ll 1. \quad (19)$$

Рассеяние, как видно из (18), анизотропно.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ДИПОЛЯ, ПОМЕЩЕННОГО ВНУТРИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Возвратимся теперь к исходному выражению (9) и откажемся от предположения о медленном изменении невозмущенного поля на расстоянии порядка радиуса корреляции флуктуаций среды. Будем считать, что диполь находится в центре хаотически неоднородной сферы с радиусом R_{\max} .

С помощью интегрирования по частям выражение (9) удобно представить в форме

$$p_1(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \int_V \left[k_0^2 (2\nu + \mu) p_0(\mathbf{r}_1) + ik_0 \mu(\mathbf{r}_1) (\mathbf{m} \nabla) p_0(\mathbf{r}_1) - \right. \\ \left. - i\omega Q_0 \mu(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \delta(\mathbf{r}_1) \right] \exp[-ik_0(mr_1)] d\mathbf{r}_1. \quad (20)$$

Легко показать, что при

$$(k_0 l) \ll 1, \quad \bar{\mu}^2 \gg \bar{\nu}^2 (k_0 l)^4 \quad (21)$$

основной вклад в ту часть полной интенсивности излучения I_1 , которая связана с рассеянием ближних полей, вносит последний член в выражении (20). Обозначая эту часть посредством I_{11} , имеем

$$\frac{dI_{11}}{d\Omega} = \frac{\omega^2 Q_0^2 \bar{\mu}^2}{2(4\pi)^2 \rho_{00} c_{s0} l^2}, \quad (22)$$

l — радиус корреляции флуктуаций $\mu(\mathbf{r})$.

Сравнивая (22) с вкладом дальних полей, который, естественно, остается прежним (см. формулы (13) и (14)), найдем необходимое условие, при котором интенсивность рассеяния определяется в основном ближним полем диполя:

$$k_0^6 R_{\max} l^3 \ll 1. \quad (23)$$

Предположим теперь, что флуктуации $\mu(\mathbf{r})$ малы ($\bar{\mu}^2 \ll \bar{\nu}^2 (k_0 l)^4$). Полагая $(k_0 l) \ll 1$ и вводя фурье-представление коэффициента корреляции

$$\Gamma(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) e^{i(k\rho)} dk,$$

получим

$$\frac{d\bar{I}_1}{d\Omega} = \frac{2k_0^6 c_{s0} \bar{v}^2 Q_0^2}{(4\pi)^2 \rho_{00}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k) dk \left[\int_V \frac{z}{r^2} \left(ik_0 - \frac{1}{r} \right) e^{i(kr)} dr \right]^2. \quad (24)$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{d\bar{I}_1}{d\Omega} = \frac{k_0^6 c_{s0} \bar{v}^2 Q_0^2}{6\pi\rho_{00}} (J_1 + J_2), \quad (25)$$

где

$$J_1 = k_0^2 \int_0^{\infty} \Phi(k) \left(\frac{\sin kR_{\max} - \text{Si } kR_{\max}}{k} \right)^2 dk; \quad (26)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \Phi(k) \left(1 - \frac{\sin kR_{\max}}{kR_{\max}} \right)^2 dk. \quad (27)$$

Здесь $\text{Si } x = \int_0^x \sin t dt/t$ — интегральный синус.

Для простоты будем считать, что $\Gamma_s(\rho) = \exp(-\rho^2/l^2)$. При этом интеграл J_1 можно переписать в форме

$$J_1 = \frac{k_0^2 R_{\max} l^3}{8\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp(-l^2 x^2/4R_{\max}^2) \left(\frac{\sin x - \text{Si } x}{x} \right)^2 dx. \quad (28)$$

Подынтегральное выражение содержит произведение двух функций: первая функция резко спадает лишь при $x \simeq (2R_{\max}/l) \gg 1$, а вторая убывает достаточно быстро уже при $x \gtrsim 1$. Тогда первый множитель можно приближенно положить равным единице. Оставшийся интеграл вычисляется точно и равен $J_1 = k_0^2 l^3 R_{\max}/16\pi^{1/2}$.

В противоположность этому в выражении (27) при $R_{\max} \gg l$ функцию $\sin kR_{\max}/kR_{\max}$ можно приближенно положить равной нулю. Это дает $J_2 \simeq l^2/8\pi$. В результате получим

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{k_0^6 c_{s0} Q_0^2 \bar{v}^2 l^3}{16\pi^2 \rho_{00}} \left(\sqrt{\pi} k_0^2 R_{\max} + \frac{2}{l} \right). \quad (29)$$

Следовательно, если диполь помещен непосредственно в неоднородную среду ($R_{\min} \ll l$), роль R_{\min} в формуле (16) играет радиус корреляции.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ (МЕТОД РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ)

Рассмотрим здесь излучение элементарного электрического диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = z_0 p_0 \delta(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ в среде с неоднородностями (z_0 — единичный вектор в направлении оси z). Метод малых возмущений, использованный в предыдущих параграфах, также можно применить к этой задаче. Однако здесь мы проиллюстрируем решение задачи методом реакции излучения, используя известное выражение для эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной среды [5]. Интересно отметить, что этот метод дает возможность достаточно просто рассмотреть другой (по сравнению с методом возмуще-

ний) случай, когда размер рассеивающего объема R_{\max} таков, что не выполнено условие применимости борновского приближения (15).

Если размеры рассеивающего объема достаточно велики, задачу об излучении диполя можно рассмотреть с помощью $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ в безграничной среде. В этом случае

$$\bar{I} = - (2\pi)^3 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} j_z(\mathbf{k}) \bar{E}_z(\omega, \mathbf{k}), d\mathbf{k}, \quad (30)$$

где $j_z(\mathbf{k}) = i\omega p_0 / (2\pi)^3$ — сторонний ток диполя, а среднее электрическое поле в k -представлении имеет вид [8]

$$\bar{E}_z(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i\omega}{k^2} \left\{ \frac{k_z^2}{\omega^2 \epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, \mathbf{k})} - \frac{k^2 \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right)}{c^2 \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{эфф}}^{tr}(\omega, \mathbf{k}) \right]} \right\} j_{0z}(\omega).$$

Здесь $\epsilon_{\text{эфф}}^l$ и $\epsilon_{\text{эфф}}^{tr}$ — продольная и поперечная эффективные диэлектрические проницаемости хаотически неоднородной среды. При выполнении неравенств $(\Delta\epsilon/\bar{\epsilon})^2 \ll 1$, $(k_0 l) \ll 1$ выражения для $\epsilon_{\text{эфф}}^l$ и $\epsilon_{\text{эфф}}^{tr}$ имеют вид [5]:

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l \simeq \epsilon_{\text{эфф}}^{tr} = \epsilon_0 + i\epsilon_1(\omega, \mathbf{k}), \quad \epsilon_0 = \bar{\epsilon} - \frac{1}{3} \frac{\overline{\Delta\epsilon^2}}{\bar{\epsilon}}. \quad (31)$$

Для гауссовой функции корреляции $\Gamma_\epsilon(\rho) = \exp(-\rho^2/l^2)$

$$\epsilon_1(\omega, \mathbf{k}) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{(\overline{\Delta\epsilon^2})^2}{\bar{\epsilon}} (k_0 l \sqrt{\bar{\epsilon}})^3 \exp(-k^2 l^2/4). \quad (32)$$

При этом средние потери энергии

$$\bar{I} = - \frac{2\omega^3 p_0^2}{3\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\epsilon_0 + i\epsilon_1(\omega, \mathbf{k})} - \frac{2}{c^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2 \epsilon_0 - i k_0^2 \epsilon_1(\omega, \mathbf{k})} \right]. \quad (33)$$

Первый интеграл в (33) связан с трансформацией энергии ближнего поля диполя в энергию поля излучения. Используя тот факт, что $\epsilon_1 \ll \bar{\epsilon}$ при всех k , первый интеграл J_1 в (33) приближенно можно представить в виде

$$\operatorname{Im} J_1 \simeq \frac{\pi k_0^3 \overline{\Delta\epsilon^2}}{3\bar{\epsilon}^{3/2}}. \quad (34)$$

Второй интеграл J_2 в (33) связан с рассеянием дальнего (волнового) поля диполя на неоднородностях среды. Поскольку потери определяются лишь мнимой частью этого интеграла, достаточно рассмотреть интеграл вида

$$J'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2 \varepsilon_0 + ik_0^2 \varepsilon_1(\omega, k)}{k^2 - k_0^2 \varepsilon_0 - ik_0^2 \varepsilon_1(\omega, k)} dk. \quad (35)$$

Функция $\varepsilon_1(\omega, k)$ заметно зависит от k лишь при $(kl) \gg 1$. Однако эта область вносит малый вклад в интеграл J'_2 . Следовательно, в (35) можно пренебречь зависимостью ε_1 от k . В результате имеем $J'_2 \simeq \pi ik_0 \sqrt{\varepsilon_0 + i\varepsilon_1}$. Подставляя значения J_1 и J'_2 в (33), получим

$$\bar{I} \simeq \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \left[\sqrt{\varepsilon_0} + \frac{1}{3} \frac{(\overline{\Delta\varepsilon})^2}{\varepsilon_0^{3/2}} \right]. \quad (36)$$

Замечая, что $\sqrt{\varepsilon_0} \simeq \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{6} \left(\frac{\overline{\Delta\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2$, окончательно будем иметь

$$\bar{I} = \frac{\omega^4 p_0^2 \sqrt{\varepsilon}}{3c^3} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\overline{\Delta\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 \right]. \quad (37)$$

Следовательно, в случайно неоднородной среде интенсивность излучения диполя возрастает на величину, пропорциональную $(\overline{\Delta\varepsilon/\varepsilon})^2$.

В заключение сделаем несколько замечаний о проблеме излучения в хаотически неоднородной среде.

1. В отличие от задач распространения волн в неоднородных средах, здесь мы сталкиваемся с необходимостью последовательного учета пространственной дисперсии хаотически неоднородной среды, связанной с эффектом рассеяния.

2. При исследовании излучения источника в неоднородной среде в борновском приближении необходимо иметь в виду оба случая, рассмотренных в первых двух разделах настоящей работы. В зависимости от соотношения размеров излучателя и масштаба неоднородностей может быть реализован тот или иной случай. В различных задачах роль величины R_{\min} может играть свой характерный масштаб. В качестве примера можно указать на задачу о диполе, погруженном в неоднородную плазму. Из-за нелинейных эффектов плазма «выталкивается» из области сильного поля и вокруг излучателя возникает некоторая полость, размеры которой определяют R_{\min} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, **9**, 1944 (1964).
4. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, **9**, № 1, 61 (1966).
5. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, **48**, 656 (1965).
6. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, **55**, 567 (1968).
7. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, **12**, № 12, 1879 (1968).
8. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазموподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

RADIATION FROM ELEMENTARY DIPOLE IN A RANDOMLY
INHOMOGENEOUS MEDIUM*V. P. Dokuchaev, Yu. A. Ryzhov, V. V. Tamoykin*

The energy losses of wave radiation from an elementary dipole (acoustic and electric) in a randomly inhomogeneous medium are calculated in two ways: by means of determining the energy flux in the acoustic case and by the method of radiation reaction in the electromagnetic case. It is shown that the scattering of quasi-static fields on irregularities of the near region may have an influence on the source radiation in the inhomogeneous medium.

УДК 621.372.09

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ*

Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс

Методом теории возмущений решена задача о среднем поле, создаваемом точечным источником в волноводе со статистически неоднородными стенками. Изучено изменение спектра нормальных волн в таком волноводе, найдены выражения для затухания среднего поля. Приведены оценки пределов применимости теории возмущений к данной задаче.

1. Известно, что пространственные флуктуации параметров волновода, неизбежно присутствующие в реальных каналах связи, могут оказывать существенное влияние на сверхдальнее распространение сигнала. Одним из наиболее часто встречающихся примеров подобных флуктуаций являются случайные неоднородности стенок волновода (сюда относятся как флуктуации импеданса, так и неровности поверхности). При исследовании влияния таких неоднородностей на характер распространения возникает задача о вычислении среднего поля в волноводе.

В работах [2, 3] эта задача решалась путем учета последовательных отражений волны от стенок с коэффициентом отражения, вычисленным для полупространства, ограниченного неровной поверхностью, что, как показано ниже, верно лишь в некотором предельном случае. В [4] получено затухание нормальных волн за счет неровностей при не очень больших радиусах корреляции, однако примененный там энергетический подход не является достаточно общим, так как не позволяет вычислить сдвиг уровней, что также важно в ряде приложений [1], и оценить пределы применимости полученных результатов.

Использованный в настоящей работе метод основан на непосредственном решении волнового уравнения с помощью теории возмущений [5].

2. Рассмотрим акустический волновод, образованный двумя бесконечными поверхностями S_1 и S_2 , уравнения которых в декартовой системе координат (x, y, z) есть

$$z = \zeta_1(x, y) \text{ и } z = a + \zeta_2(x, y);$$

$\zeta_1(x, y)$, $\zeta_2(x, y)$ — случайные функции координат, относительно которых будем предполагать следующее: $\langle \zeta_1(\mathbf{r}) \rangle = \langle \zeta_2(\mathbf{r}) \rangle = 0$; $\langle \zeta_{1,2}^2(\mathbf{r}) \rangle = \sigma^2$; $\langle \zeta_1(\mathbf{r}_1) \zeta_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \zeta_2(\mathbf{r}_1) \zeta_2(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$; $\langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle = 0$; $\mathbf{r} = \{x, y\}$; $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций ζ_1, ζ_2 .

Пусть в точке $\mathbf{R}_0 \{r_0, z_0\}$ находится точечный источник единичной интенсивности. Тогда создаваемое им поле $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ (функция Грина волновода) удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_{\mathbf{R}} + k^2) G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \quad (1)$$

* Некоторые предварительные результаты этой работы содержатся в [1].

Зависимость от времени описывается множителем $e^{-i\omega t}$, $k = \omega/c$, c — скорость звука.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями, которые для абсолютно мягких стенок имеют вид

$$G(R \in S_1; R_0) = G(R \in S_2; R_0) = 0. \quad (2)$$

Разлагая эти граничные условия в ряд по ζ_1, ζ_2 и ограничиваясь линейными по ζ_i членами, получим приближенные граничные условия на невозмущенных поверхностях $z = 0$ и $z = a$:

$$\begin{aligned} G(R, R_0) + \zeta_1(r) \frac{\partial}{\partial z} G(R, R_0) &= 0 \quad (z = 0), \\ G(R, R_0) + \zeta_2(r) \frac{\partial}{\partial z} G(R, R_0) &= 0 \quad (z = a). \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что для гладкого волновода со случайным импедансом на стенках $z = 0, z = a$ граничные условия также имеют вид (3), причем являются точными, так что дальнейшее в равной степени относится и к этому случаю.

В работе [5] было показано, что если полное поле удовлетворяет граничному условию (3), и $\zeta_{1,2}(x, y)$ при этом распределены по нормальному закону, то для средней функции Грина выполняется следующее нелокальное граничное условие:

$$\langle G(R, R_0) \rangle \Big|_{z=0, a} = \pm \int M(r, r_1) \frac{\partial \langle G(R_1, R_0) \rangle}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0, a} d^2 r_1. \quad (4)$$

Здесь $M(r, r_1)$ — так называемый «массовый оператор», представляющийся в виде суммы бесконечного ряда:

$$\begin{aligned} M(r, r_1) &= \sigma^2 G_0^{(00)}(r, r_1) W(r - r_1) + \sigma^4 \iint G_0^{(00)}(r, r_3) G_0^{(00)}(r_3, r_2) \times \\ &\times G_0^{(00)}(r_2, r_1) [W(r - r_2) W(r_3 - r_1) + W(r - r_1) W(r_2 - r_3)] d^2 r_2 d^2 r_3 + \\ &+ \sigma^4 \iint G_0^{(0, a)}(r, r_3) G_0^{(0, a)}(r_3, r_2) G_0^{(0, a)}(r_2, r_1) W(r_3 - r_1) \times \\ &\times W(r - r_2) d^2 r_2 d^2 r_3 + \sigma^4 \iint G_0^{(0, a)}(r, r_3) G_0^{(0, 0)}(r_3, r_2) G_0^{(0, a)}(r_2, r_1) \times \\ &\times W(r - r_1) W(r_2 - r_3) d^2 r_2 d^2 r_3 + \dots; \end{aligned} \quad (5)$$

$$G_0^{(a, b)}(r_i, r_k) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} G_0(R_i, R_k) \Big|_{z_i=a, z_k=b}, \quad (5a)$$

$G_0(R, R_0)$ — функция Грина гладкого волновода с абсолютно мягкими стенками, подробно исследованная в [6].

Простой графический метод построения членов ряда (5) приведен в работе [5]. Заметим только, что в нашем случае поверхность S является двухсвязной и интеграл по ней распадается на сумму интегралов по S_1 ($z = 0$) и S_2 ($z = a$).

Поскольку в «массовый оператор» входит функция Грина невозмущенного волновода G_0 , то во всех рассуждениях необходимо исключить случай, когда на ширине волновода укладывается целое число полуволн, т. е. $ak = n\pi$ (критические частоты). Это связано с тем, что при $ak = n\pi$ в гладком волноводе невозможно установление стационарного состояния и G_0 обращается в бесконечность.

3. Займемся решением усредненного уравнения (1) с граничным условием (4). Функцию $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ будем искать в виде

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|} + g(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0), \quad (6)$$

где

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - i|z - z_0|\sqrt{k^2 - x^2}] \quad (7)$$

— частное решение неоднородного уравнения (1), обеспечивающее нужную особенность при $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$; $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ — общее решение соответствующего (1) однородного волнового уравнения. Его можно представить в виде интеграла по плоским волнам, каждая из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \frac{i}{2\pi} \int d^2\mathbf{x} \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] [A_1(\mathbf{x}, z_0) e^{iqz} + A_2(\mathbf{x}, z_0) e^{-iqz}] \frac{1}{q} \quad (q = \sqrt{k^2 - x^2}). \quad (7a)$$

Подставляя (6) с учетом (7) и (7a) в граничные условия (4), получим для определения неизвестных функций A_1 и A_2 систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, решение которых имеет вид

$$A_1(\mathbf{x}, z_0) = \frac{\exp[iq(a - z_0)] [1 + \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 - \exp[-iq(a - z_0)] [1 - \tilde{M}^2(\mathbf{x})]}{[1 - \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 e^{-iqa} - [1 + \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 e^{iqa}}, \quad (8)$$

$$A_2(\mathbf{x}, z_0) = \frac{\exp[iq(a + z_0)] [1 + \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 - \exp[iq(a - z_0)] [1 - \tilde{M}^2(\mathbf{x})]}{[1 - \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 e^{-iqa} - [1 + \tilde{M}(\mathbf{x})]^2 e^{iqa}},$$

где

$$\tilde{M}(\mathbf{x}) = iq \int M(\rho) e^{i\mathbf{x}\rho} d^2\rho.$$

Из (7) и (8) после несложных преобразований получаем выражение для среднего поля точечного источника в волноводе с неровными стенками:

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{q} \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \Phi(q; z, z_0, a); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Phi(q; z, z_0, a) = & \{(1 - \tilde{M}^2) \cos q(z_0 - a + z) - (1 + \tilde{M}^2) \times \\ & \times \cos q(z - z_0 - a) + 2i\tilde{M} \sin q(z - z_0 - a)\} \times \\ & \times [i(1 + \tilde{M}^2) \sin qa + 2\tilde{M} \cos qa]^{-1}. \end{aligned} \quad (9a)$$

Производя замену переменных $x = k \sin \theta$ и деформируя соответствующим образом контур интегрирования (см. [6], § 27), (9) можно свести к сумме вычетов подынтегральной функции. В случае изотропных неровностей получаем

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = -\pi k \sum_n \operatorname{Res} [H_0^{(1)}(k \sin \theta_n | \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 |) \sin \theta_n \Phi(q_n; z, z_0, a)] \quad (10)$$

$$(q_n = k \cos \theta_n),$$

где θ_n — корни дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg} q_n a = \frac{2i\tilde{M}(x_n)}{1 + \tilde{M}^2(x_n)}, \quad (11)$$

расположенные в верхней полуплоскости комплексного переменного θ .

Дисперсионное уравнение (11) можно получить также, решая задачу о спектре собственных волн плоского волновода с граничными условиями (4) методом разделения переменных [1]. Поэтому каждый член в (10) естественно называть нормальной (собственной) волной для среднего поля, а получающиеся из решения уравнения (11) величины $q_n = k \cos \theta_n$ и $x_n = k \sin \theta_n$ — соответственно поперечным и продольным волновыми числами данной нормальной волны (в нашем случае они являются комплексными). Полный набор собственных чисел образует спектр среднего поля в статистически неоднородном волноводе. Он определяет те дискретные направления, в которых при данной частоте возможно распространение, а также, в силу комплексности q_n , затухание нормальных волн, обусловленное неоднородностями стенок.

При $\sigma=0$, как и следовало ожидать, формулы (9) — (11) переходят в соответствующие выражения для гладкого волновода с абсолютно мягкими стенками. Решение уравнения (11) в этом случае для собственных чисел такого волновода дает $q_n^0 = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

4. Формулы (9) — (11) являются, в принципе, решением задачи о среднем поле точечного источника, однако $\langle G \rangle$ выражено в них в виде функционала от «массового оператора», который есть сумма бесконечного ряда. В [5] рассмотрено несколько приближенных способов, позволяющих избавиться от бесконечной суммы, входящей в выражение для $\langle G \rangle$.

Простейшей процедурой такого рода является замена ряда (5) для «массового оператора» первым его членом — так называемое приближение Бурре [7], соответствующее малым возмущениям в граничном условии (точные неравенства будут выписаны ниже). В этом приближении функция Φ , входящая в (9), (10), существенно упрощается:

$$\Phi(q) \rightarrow \Phi_1(q) = \frac{\tilde{M}_1(q) \sin q(z_0 + a - z) + \sin q(a - z) \sin qz_0}{\sin qa + 2\tilde{M}_1(q) \cos qa}; \quad (12)$$

$$\tilde{M}_1(q) = -\frac{q\sigma^2 k}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\eta \sqrt{1-t^2}] \operatorname{ctg}(ak \sqrt{1-t^2}) \times$$

$$\times \tilde{W}\left(t + \frac{\sqrt{k^2 - q^2}}{k}\right) dt, \quad (12a)$$

$$\tilde{W}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}) e^{i\rho r} d^2\mathbf{r}.$$

Дисперсионное уравнение для определения δq_n — малых добавок к собственным числам невозмущенного волновода — приобретает вид

$$\delta q_n = q_n \frac{\sigma^2 k}{\pi a} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \sin [\eta \sqrt{1-t^2}] \operatorname{ctg} (ck \sqrt{1-t^2}) \times \\ \times \tilde{W} \left(t + \frac{\sqrt{k^2 - q_n^2}}{k} \right) dt. \quad (13)$$

Здесь $q_n = q_n^0 + \delta q_n = n\pi/a + \delta q_n$, причем $\delta q_n/q_n^0 \ll 1$. При получении (12) и (13) считалось для простоты, что неоднородности являются одномерными, т. е. $W(\mathbf{r}) \equiv W(y)$.

Для исследования спектра q_n преобразуем входящий в (13) интеграл (обозначим его буквой I) к более удобному виду. Воспользуемся для этого разложением котангенса на простые дроби. Тогда получим

$$I = \frac{2\pi}{ak} W(0) + \frac{2}{ak} \sum_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu}, \quad I_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W} \left(t + \frac{\sqrt{k^2 - q_n^2}}{k} \right) \times \\ \times \frac{\sin [\eta \sqrt{1-t^2}] \sqrt{1-t^2}}{\beta_{\nu}^2 - t^2} dt \quad (14) \\ \left(\beta_{\nu} = \sqrt{1 - \frac{\nu^2 \pi^2}{a^2 k^2}} \right).$$

Если предположить, что у k имеется малая положительная мнимая часть (знак выбирается так, чтобы на бесконечности поле затухало), которую в конечных результатах можно устремить к нулю, то, воспользовавшись для вычисления I , формулой Сохоцкого, получим

$$\delta q_n = q_n \frac{k \sigma^2}{\pi c} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \sin [\eta \sqrt{1-t^2}] \operatorname{ctg} (ak \sqrt{1-t^2}) \times \\ \times \tilde{W} \left(t + \frac{\sqrt{k^2 - q^2}}{k} \right) dt - \frac{i \sigma^2 \pi^2}{a^4 k^2} q_n \sum_{\nu=1}^{[ka/\pi]} \frac{\nu^2}{\beta_{\nu}} [\tilde{W}(\beta_{\nu} + \beta_n) + \tilde{W}(\beta_{\nu} - \beta_n)]. \quad (15)$$

Это уравнение является весьма сложным, так как q_n входит в аргумент \tilde{W} . Однако некоторые характерные особенности спектра можно заметить уже из (15). Видно, например, что все δq_n имеют отрицательную мнимую часть. Это означает, что у продольных волновых чисел x_n появляется положительная мнимая добавка (легко убедиться, что, в силу малости δq_n , $\operatorname{Im} \delta x_n \sim -\operatorname{Im} \delta q_n$), т. е. даже те волны, которые являются распространяющимися в гладком волноводе (для них $\frac{n\pi}{ak} < 1$), приобретают при $\sigma \neq 0$ конечное затухание.

Действительно, заменяя в (10) функцию Ханкеля $H_0^{(1)}(x_n | \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 |)$ ее асимптотическим представлением, видим, что на достаточно больших расстояниях от источника амплитуда n -й нормальной волны убывает по закону $1/\sqrt{r} \exp[-\operatorname{Im} x_n | \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 |]$, где фактор $1/\sqrt{r}$ обусловлен цилиндрическим расхождением волны, а множитель $\exp(-\operatorname{Im} x_n r)$ описывает затухание среднего поля за счет возмущения границ. Это

затухание не связано с поглощением энергии, а обусловлено некогерентным преобразованием собственной волны с номером n в другие нормальные волны.

Если предположить, что δq_n является аналитической функцией от $(k\sigma)^2$, решение уравнения (15) можно искать в виде ряда по этому параметру. Тогда, полагая в правой части (15) $\delta q_n = 0$, получим декремент затухания n -собственной волны

$$\begin{aligned} \gamma_n \simeq \operatorname{Im} x_n \simeq -\frac{q_n^0}{x_n^0} \operatorname{Im} \delta q_n = \frac{\sigma^2 \pi^2}{\alpha^4 k^2} \frac{(q_n^0)^2}{x_n^0} \times \\ \times \sum_{\nu=1}^{[ak/\pi]} \frac{\nu^2}{\beta_\nu} [\tilde{W}(\beta_\nu - \beta_n) + \tilde{W}(\beta_\nu + \beta_n)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Сумма (16) имеет простой физический смысл; ν -й ее член описывает затухание данной нормальной волны за счет преобразования ее в волну с номером ν . Это преобразование происходит путем некогерентного рассеяния в те дискретные направления, характеризующиеся углом падения θ_n^0 ($\cos \theta_n^0 = q_n^0/k$), в которых возможно незатухающее распространение в гладком волноводе ((ak/π) — число таких направлений).

Так как каждому собственному числу q_n соответствуют две волны, отличающиеся знаком продольной компоненты волнового вектора ($x_n = \pm \sqrt{k^2 - q_n^2}$), преобразование n -й волны в ν -ю происходит как за счет рассеяния «вперед» (это рассеяние описывается в (16) слагаемым, пропорциональным $\tilde{W}(\beta_\nu - \beta_n)$), так и из-за рассеяния «назад» (член, пропорциональный $\tilde{W}(\beta_\nu + \beta_n)$).

Поскольку \tilde{W} является, как правило, убывающей функцией модуля своего аргумента, ясно, что наибольший вклад в затухание дает член суммы с номером $\nu = n$, соответствующий такому рассеянию, при котором случайным образом изменяется лишь фаза нормальной волны, а номер ее остается тем же.

Из формулы (15) методом последовательных приближений можно также получить выражение для $\operatorname{Re} \delta q_n$ — сдвига собственных уровней волновода:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \delta q_n = q_n^0 \frac{k\sigma^2}{\alpha\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\eta \sqrt{1-t^2}] \operatorname{ctg}(ak \sqrt{1-t^2}) \times \\ \times \tilde{W}\left(t + i \sqrt{1 - \frac{(q_n^0)^2}{k^2}}\right) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Наличие такого сдвига приводит, как известно, к изменению фазовой скорости волны. Легко показать, что это изменение скорости связано с преобразованием в нераспространяющиеся волны, т. е. в те, для которых $(n\pi/ak) > 1$.

5. Исследуем решение уравнения (15) в случае, когда ширина волновода велика по сравнению с длиной волны, т. е. $ak/\pi \gg 1$. Если при этом неровности стенок являются мелкомасштабными ($kl \ll 1$, l — характерный размер неровностей), сумму в (16) можно с точностью до членов порядка $(l/a)^2$ заменить следующим интегралом:

$$\sum_{\nu=1}^{[ak/\pi]} \frac{y^2}{\beta_\nu} [\tilde{W}(\beta_\nu - \beta_n) + \tilde{W}(\beta_\nu + \beta_n)] \rightarrow \frac{a^3 k^3}{\pi^3} \int_{-1}^1 V \sqrt{1-t^2} \tilde{W}(t + z_n/k) dt. \quad (18)$$

При $kl \gg 1$ условия $ak \gg \pi$ оказывается недостаточно для перехода от суммирования к интегрированию. Необходимо еще потребовать, чтобы $l \ll \Lambda_n$, где $\Lambda_n = atg \theta_n$ — так называемая «длина цикла», т. е. расстояние, проходимое волной между двумя последовательными отражениями (см. рис. 1). При выполнении этих неравенств, подставляя (8) в (16) и вычисляя в соответствующем приближении интеграл в смысле главного значения, получаем

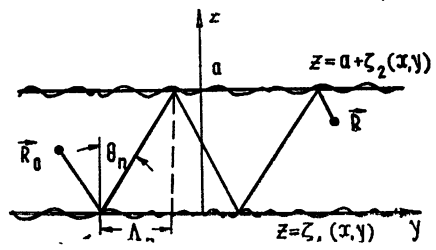


Рис. 1.

$$\delta q_n = - \frac{i[1 + V(\theta_n)]}{a}. \quad (19)$$

Здесь $V(\theta_n) = -1 + \frac{q_n k \sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V \sqrt{1-t^2} \tilde{W}\left(t + \sqrt{1 - \frac{q_n^2}{k^2}}\right) dt$ — коэффициент отражения плоской волны от полупространства, ограниченного шероховатой плоскостью. Используя выражения для $V(\theta)$, вычисленные в различных предельных случаях в [8], получаем

$$\delta q_n = \frac{2\pi n \sigma^2}{a^2 l} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dW}{dx} dx + iO(kl) \quad (kl \ll 1); \quad (20a)$$

$$\delta q_n = - \frac{4ie^{i\pi/4} k \sigma^2 n V \pi}{a^2 V \sqrt{2kl}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dW}{dx} dx \quad \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \ll \sqrt{\frac{2}{kl}} \right); \quad (20b)$$

$$\delta q_n = - \frac{i2n^2 \pi^2 \sigma^2}{a^3} \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \gg \sqrt{\frac{2}{kl}} \right). \quad (20в)$$

К формулам (19), (20) можно прийти, если рассчитывать собственные функции для среднего поля, как результат последовательных отражений плоской волны от стенок волновода, причем, считать, что каждое отражение происходит так же, как от плоскости с эффективным коэффициентом отражения $V(\theta)$. Из вышесказанного ясно, что такой метод (примененный в работах [2, 3]) пригоден лишь для достаточно широких волноводов, причем необходимо, чтобы радиус корреляции был мал по сравнению с длиной цикла.

Эти требования имеют простой физический смысл. Действительно, при отражении от полупространства ослабление среднего поля происходит за счет некогерентного рассеяния во все направления внутри телесного угла, ограниченного диаграммой рассеяния данной поверхности (ее угловая ширина пропорциональна $1/kl$ [9]). При наличии второй стенки волновода появляется дискретный спектр отражения. При каждом отражении поле ослабляется в меньшей степени, так как теперь некогерентное рассеяние может происходить лишь в избранных направлениях внутри диаграммы направленности — в тех, для которых $\theta = \theta_n$. Очевидно, что влиянием второй поверхности на однократное отражение можно пренебречь, т. е. пользоваться $V(\theta)$, если внутри диаграммы

рассеяния имеется достаточно много «разрешенных» волноводных направлений, а ее ширина велика по сравнению с угловым расстоянием между этими направлениями ($1/k\Lambda$), т. е. при $ak \gg 1$ и $l \ll \Lambda$.

6. Противоположными рассмотренному в п. 5 являются случаи одномодового волновода — $|ak/\pi| = 1$ и случай крупномасштабных неоднородностей — $kl \gg 1$ и $l > \Lambda_n$. Для одномодового волновода декремент затухания имеет простой вид, так как в сумме (16) остается одно слагаемое. Для гауссовой функции корреляции получаем

$$\gamma = \frac{(k\sigma)^2 (kl) (1 - \varepsilon)^3 k}{\varepsilon^2 \pi^{3.2}} \{ \exp [- (kl)^2 \varepsilon^2] + 1 \}. \quad (21)$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{1 - \pi^2/a^2 k^2}$, причем в рассматриваемом случае

$$0 < \varepsilon < \sqrt{3}/2.$$

Если радиус корреляции велик по сравнению с длиной волны и $l > \Lambda_n$, в сумме (16) существенным оказывается лишь член с $\nu = n$, в силу того, что \tilde{W} — «острая» функция. С учетом этого обстоятельства

$$\gamma_n = \frac{\pi^{9/2} \sigma^2 n^4 l}{a^6 k^2 (1 - n^2 \pi^2 / a^2 k^2)} = \frac{(k\sigma)^2 (kl) \cos^4 \theta_n}{a^2 k \sin^2 \theta_n} \sqrt{\pi}. \quad (22)$$

Выражения (21), (22), очевидно, имеют физический смысл только при очень больших радиусах корреляции, так как при $l \rightarrow \infty$, $\gamma_n \rightarrow \infty$, что противоречит первоначальному предположению о малости δq_n по сравнению с собственными числами невозмущенного волновода q_n^0 . Так что формулы (21), (22) необходимо дополнить соответствующими неравенствами, ограничивающими величину kl сверху.

Напомним, что результаты п. п. 5, 6 были получены путем решения дисперсионного уравнения (15) методом последовательных приближений по $(k\sigma)^2$, что предполагает аналитическую зависимость δq_n от этого малого параметра. Как будет показано ниже, при $kl \rightarrow \infty$ последнее предположение не выполняется, что и приводит к непригодности формул (21), (22) в этом случае. Поэтому при $kl \rightarrow \infty$ уравнение (15) необходимо решать, удерживая в правой части $\delta q_n \neq 0$.

Преобразуем (15) с учетом того, что $kl \gg 1$:

$$\delta q_n = \frac{2n\sigma^2}{a^3} \left\{ \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \theta_n + \frac{\cos^2 \theta_n}{2 \sin \theta_n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{W} \left(\tau - 2 \frac{\delta q_n}{k} \operatorname{ctg} \theta_n \right)}{\tau} d\tau - \right. \right. \\ \left. \left. - i\pi \tilde{W} \left(\frac{2\delta q_n}{k} \operatorname{ctg} \theta_n \right) \right] \right\}. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться, что (22) является решением этого уравнения только тогда, когда вторым членом в (23) можно пренебречь. Это допустимо, если

$$\frac{\sigma^2}{a^2} kl \sin \theta_n \cos \theta_n \ll 1. \quad (22a)$$

При $kl \rightarrow \infty$, т. е. при обратном неравенстве $\sigma^2 kl \sin \theta_n \cos \theta_n / a^2 \gg 1$, несущественным в (23) является слагаемое $i\pi \tilde{W}(2\delta q_n \operatorname{ctg} \theta_n / k)$, а интеграл в смысле главного значения вычисляется заменой $\tilde{W}(t)$ на $2\pi\delta(t)$. Решая полученное уравнение, имеем

$$\delta q_n = \frac{\sqrt{2}}{a} \sigma q_n^0 - iO(\exp[-\alpha(kl)^2]), \quad (24)$$

т. е. в этом случае в приближении Бурре δq_n действительно не является аналитической функцией параметра $(k\sigma)^2$.

7. Дисперсионное уравнение (15) и все последующие результаты были получены в приближении Бурре, т. е. путем удержания первого члена в «массовом операторе». Выясним, к каким ограничениям это приводит, для чего оценим вклад следующих, пропорциональных σ^4 , членов в M . Дисперсионное уравнение (11) запишем в виде

$$\operatorname{tg} q_n a = 2i(\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2), \quad (25)$$

где \tilde{M}_2 — сумма фурье-преобразований членов «массового оператора», пропорциональных σ^4 (см. формулу (5)).

Решение (25) можно, очевидно, записать так:

$$\delta q_n = \delta q_n^{(1)} + \delta q_n^{(2)},$$

где $\delta q_n^{(1)}$ — решение уравнения (15), $\delta q_n^{(2)}$ — добавка, появляющаяся в результате учета \tilde{M}_2 .

Ясно, что $\delta q_n^{(1)}$ (приближение Бурре) достаточно хорошо описывает затухание среднего поля лишь на расстояниях L , удовлетворяющих неравенству $L\delta q_n^{(2)} \ll 1$. Производя по аналогии с [5] асимптотические оценки интегралов (5) в соответствующих предельных случаях, можно показать, что это неравенство имеет вид

$$L \left(\frac{\sigma}{l} \right)^2 \frac{\sigma^2}{la} q_n^0 \ll 1 \quad (kl \ll 1),$$

$$L \frac{k\sigma^2}{l} \frac{k^2 q_n^0}{aVkl} \ll 1 \quad \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \ll \sqrt{\frac{2}{kl}} \right),$$

$$L(\sigma q_n^0)^2 \frac{(\sigma q_n^0)^2}{a} \ll 1 \quad \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \gg \sqrt{\frac{2}{kl}} \right)$$

(см. соответственно (20 а), (20 б), (20 в)).

Очевидно, что L значительно превышает вычисленную с помощью формул (20) длину $L_{\text{эфф}} = (\operatorname{Im} \kappa_n)^{-1}$, на которой среднее поле эффективно затухает уже за счет $\delta q_n^{(1)}$, если

$$\left(\frac{\sigma}{l} \right)^2 \ll 1 \quad (kl \ll 1),$$

$$\frac{k\sigma^2}{l} \ll 1 \quad \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \ll \sqrt{\frac{2}{kl}} \right),$$

$$(k\sigma \cos \theta_n)^2 \ll 1 \quad \left(kl \gg 1, \frac{\pi}{2} - \theta_n \gg \sqrt{\frac{2}{kl}} \right).$$

Таким образом, при выполнении этих неравенств приближением Бурре можно пользоваться практически при сколь угодно больших расстояниях. Исключение составляет случай $\sigma^2 kl \sin \theta_n \cos \theta_n / a^2 \gg 1$, когда все члены «массового оператора» оказываются одного порядка по σ , и при-

ближение Бурре (формула (24)), равно как и результаты, полученные путем удержания конечного числа членов в M , не имеет области применимости; т. е. при $kl \rightarrow \infty$ теория возмущений непригодна.

Однако, как показано в работе [5], при $kl \rightarrow \infty$, с помощью функции Грина $\langle G_1 \rangle$, вычисленной в приближении Бурре и не имеющей в нашем случае реального физического смысла, можно получить точное решение уравнения (1) с граничным условием (4) (это соответствует полному суммированию ряда (5) для «массового оператора»):

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/\sigma^2) \langle G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0; t) \rangle dt, \quad (26)$$

где $\langle G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0; t) \rangle$ получается из (9) и (12) путем замены $\tilde{W}(t) \rightarrow \rightarrow 2\pi\delta(t)$, $\sigma \rightarrow t$.

Если рассматривается волновод со случайным импедансом стенок, то (26) — точное решение задачи о среднем поле, справедливое при любых значениях σ . Для шероховатого волновода граничные условия (3) являются приближенными, так как при их выводе отброшены члены, пропорциональные $(k\sigma)^4$. Ясно, что в этом случае в (26) также не имеет смысла удерживать величины такого порядка. Учитывая это обстоятельство, представим $\langle G_1 \rangle$ в виде суммы вычетов (10). Тогда

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle = & -\frac{1}{2\sigma} \sum_n q_n^0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2\sigma^2) H_0^{(1)}(x_n | r - r_0 |) \times \\ & \times \text{Res } \Phi_1(q_n; z, z_0, a; t) dt \\ & \left(q_n = q_n^0 + \sqrt{2} \frac{q_n^0}{a} t \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $1/(k\sigma)^2$ — большой параметр.

Если расстояние от источника $L = |r - r_0|$ таково, что

$$\frac{1}{x_n} \ll L \ll \frac{a^2 x_n}{(q_n^0 \sigma)^2}, \quad (28)$$

то функцию Ханкеля в (27) можно заменить выражением

$$\sqrt{\frac{2\pi}{x_n^0 L}} \exp \left\{ i \left[x_n^0 L - \frac{\sqrt{2} (q_n^0)^2 t L}{a x_n^0} - \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

в результате чего получаем

$$\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle \sim -\sqrt{\frac{2\pi^2}{Lk}} \sum_n \frac{q_n^0}{(\sin \theta_n^0)^{1/2}} \exp \left[-\frac{8(q_n^0)^4 \sigma^2}{a^2 (x_n^0)^2} L^2 \right]. \quad (29)$$

Итак, при $\sigma^2 k l \sin \theta_n \cos \theta_n / a^2 \gg 1$ амплитуда n -й нормальной волны на расстояниях, удовлетворяющих неравенству (28), убывает по закону $(1/L) \exp(-\alpha_n^2 L^2)$.

В заключение отметим, что примененный в данной работе метод функции Грина [5] позволяет также вычислить затухание среднего поля на критических частотах и получить корреляционную функцию поля, что, как нетрудно показать, сводится к решению уравнения типа Бете—Солпитера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Письма в ЖЭТФ, 7, вып. 12, 485 (1968).
2. C. S. Clay, J. Acoust. Soc. Amer., 36, № 5, 833 (1964).
3. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 12, № 4, 489 (1966).
4. А. Д. Лапин, Доклады VI Всесоюзной акустической конференции, М., 1968.
5. И. М. Фукс, В. Д. Фрейлихер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
6. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
7. R. C. Bourret, Nuovo Cimento, 26, № 1, 1 (1962).
8. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 476 (1961).
9. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
15 июля 1968 г.

THE AVERAGE FIELD OF A POINT SOURCE IN A WAVEGUIDE WITH
ROUGH WALLS

F. G. Bass, V. D. Freylikher, I. M. Fuks

The problem on the average field created by a point source in the waveguide with statistically inhomogeneous walls is solved by the perturbation theory method. The change of the spectrum of normal waves in such a waveguide is studied, the expressions for damping of the average field is found. The applicability limits of the perturbation theory to the given problem are estimated.

УДК 621.372.8 . 535.853.31

ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

С. И. Аверков, Н. И. Фурашов

Проведено теоретическое исследование селективных свойств резонаторов с дифракционными решетками и призмами для случая фиксированного направления распространения возбуждающей волны. Найдено пространственное распределение интенсивности полей в них и показано, что все интерференционные максимумы, за исключением основного, имеют локальный характер. Приведены графики, позволяющие приближенно оценивать уменьшение этих максимумов по мере удаления их по спектру от основного. Сравняются свойства некоторых резонансных систем с решетками и с призмой.

Открытые резонансные системы с дисперсионными элементами — дифракционными решетками [1] и призмами [4] — обладают рядом практически интересных специфических свойств. Некоторые из этих свойств уже обсуждались в литературе [1–6], другие нуждаются в детальном теоретическом и экспериментальном исследовании. К числу малоизученных свойств относится такая важнейшая характеристика резонансной системы, как ее избирательность. Из физических соображений следует, что наличие в открытом резонаторе дисперсионного элемента должно приводить (вследствие возникновения дополнительной фазовой расстройки распространяющихся в резонаторе волн) к подавлению некоторых нежелательных интерференционных максимумов, наблюдаемых в обычных резонаторах типа интерферометра Фабри—Перо. Уменьшение числа продольных интерференционных максимумов в резонаторе с решеткой наблюдалось в экспериментах [7, 8]. Однако в настоящее время не имеется сколь-либо разработанной теории этих резонаторов.

Авторы данной статьи сделали попытку создания такой теории для случая фиксированного направления возбуждающего их волнового пучка, исходя из представлений геометрической оптики. В работе получены выражения, характеризующие пространственное и спектральное распределение интенсивности полей в дифракционных резонаторах с плоскими зеркалами и обсужден вопрос об области применимости этих выражений. Проведено сравнение селективных свойств резонаторов с решетками и с призмой.

1. ДИФРАКЦИОННЫЙ РЕЗОНАТОР С ОДНИМ ЗЕРКАЛОМ

1. Рассмотрим открытый резонатор, образованный дифракционной решеткой A и плоским зеркалом B (рис. 1). Обозначим через $r_{\text{зер}}$ и $r_{\text{реш}}$ коэффициенты отражения (по мощности) соответственно зеркала и материала, из которого изготовлена решетка, а через γ — коэффициент,

характеризующий концентрацию энергии излучения в m -й порядок спектра*.

Пусть резонатор возбуждается плоской однородной волной, распространяющейся в направлении оси x , перпендикулярной к поверхности зеркала**. Вектор напряженности электрического поля возбуждающей волны запишем в виде $E_0 = \mathcal{E}_0 \exp[j(\omega t - kx)]$, где ω — круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ и λ — длина волны. Будем далее полагать, что при значении $\lambda = \lambda_0$ волна отражается от решетки в m -й порядок спектра под углом φ_0 к нормали P , т. е. дифрагирует в направлении распространения возбуждающей волны. Из уравнения дифракционной решетки следует, что

$$m\lambda_0 = 2d \sin \varphi_0, \quad (1)$$

где d — период решетки.

Вследствие угловой дисперсии решетки направление распространения отраженных от нее плоских однородных волн, длины которых $\lambda \neq \lambda_0$, не совпадает с осью x и зависит от числа отражений волны от решетки. Учитывая это, будем искать результирующее поле E в системе в виде суперпозиции полей плоских неоднородных волн, распространяющихся в положительном направлении оси x :

$$E = E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i, \quad (2)$$

где для E_i -вектора напряженности электрического поля i -й неоднородной волны может быть написано выражение

$$E_i = \mathcal{E}_i(y) \exp \{ j [\omega t - k(x \cos \varphi_i + \Delta_i)] \}.$$

Здесь φ_i — угол между направлением распространения плоской однородной волны и осью x после i -го отражения ее от решетки, y — координата, отсчитываемая по оси y (см. рис. 1), Δ_i — разность хода в точке x_0, y_0 между возбуждающей волной и неоднородной волной, отразившейся i раз от решетки.

Полагая, что $E = \mathcal{E} e^{i(\omega t - kx)}$, и принимая во внимание выражения для E_0 и E_i , на основании (2) получаем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i(y) \exp \{ jk [x(1 - \cos \varphi_i) - \Delta_i] \}. \quad (3)$$

Для определенности будем считать, что плоскость поляризации распространяющихся в резонаторе волн совпадает с плоскостью xu , т. е.

* Величина γ определяется профилем штрихов решетки. Как известно, для решеток с треугольным профилем штриха — эшелетгов, а также для решеток типа эшелонирования γ для некоторых порядков спектра могут достигать значений, близких к единице. То обстоятельство, что некоторая часть излучения направляется решеткой в другие порядки спектра, может быть использовано для осуществления связи резонатора с внешним пространством [5].

** Такая волна может быть образована, например, путем облучения решетки внешним источником в направлении $\varphi = -\varphi_0$, соответствующем нулевому порядку спектра.

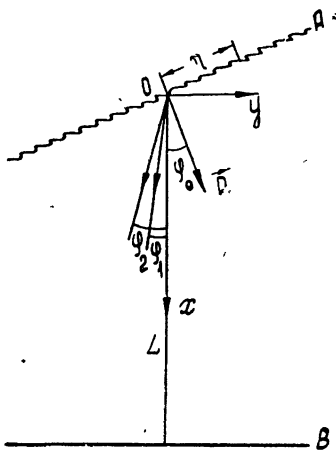


Рис. 1. Дифракционный резонатор.

$(\mathcal{E}_0)_y = \mathcal{E}_0$. Для небольших значений φ_i можно также полагать, что $\mathcal{E}_i(y) \simeq [\mathcal{E}_i(y)]_y$ и $\mathcal{E} \simeq (\mathcal{E})_y$.

В силу (3) для этих скалярных величин напряженности поля справедливо равенство

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i(y) \exp \{jk [x(1 - \cos \varphi_i) - \Delta_i]\}. \quad (3a)$$

Стоящую под знаком суммы величину $\mathcal{E}_i(y)$ запишем в виде

$$\mathcal{E}_i(y) = \mathcal{E}_0 r^i \exp(-jky \sin \varphi_i), \quad (4)$$

где $r = \sqrt{r_{\text{зер}} \gamma r_{\text{реш}}}$ — коэффициент, характеризующий уменьшение амплитуды волны при ее отражении (за один цикл) от решетки и зеркала резонатора.

Напишем выражение для напряженности результирующего поля, полагая $y = 0$. На основании (3a) и (4) имеем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r^i \exp \{jk [x(1 - \cos \varphi_i) - \Delta_i]\} \right\}, \quad (5)$$

где величина Δ_i для точки $x_0 = y_0 = 0$ может быть записана в виде*

$$\Delta_i = 2L \left(1 + \sum_{i=1}^{i-1} \cos \varphi_i \right). \quad (6)$$

Здесь L — расстояние между зеркалом и дифракционной решеткой, отсчитываемое по оси x (рис. 1).

Для вычисления \mathcal{E} необходимо определить угол φ_i . Чтобы найти его зависимость от индекса i , напишем, используя уравнение дифракционной решетки, следующие равенства:

$$\begin{aligned} m\lambda/d &= \sin \varphi_0 + \sin(\varphi_0 + \varphi_1), \\ m\lambda/d &= \sin(\varphi_0 - \varphi_1) + \sin(\varphi_0 + \varphi_2), \\ &\dots \dots \dots \\ m\lambda/d &= \sin(\varphi_0 - \varphi_{i-1}) + \sin(\varphi_0 + \varphi_i), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку для волны $\lambda = \lambda_0$ углы $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = 0$, то при небольших значениях $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ в (7) можно приближенно положить $\sin(\varphi_0 \pm \varphi_i) \simeq \sin \varphi_0 \pm \varphi_i \cos \varphi_0$. Учитывая (1), находим

$$\varphi_i = 2i \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \text{tg } \varphi_0. \quad (8)$$

Подставляя далее (8) в (6) и (5) и считая при этом $\cos \varphi_i \simeq 1 - (1/2)\varphi_i^2$, для результирующего поля получаем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^i \exp \{-j[2kLi - \alpha f(i)]\}, \quad (9)$$

* В выражении (6) мы пренебрегли слагаемым, учитывающим скачки фазы волны при ее отражении от зеркала и решетки, так как учет этого слагаемого приводит лишь к незначительному сдвигу интерференционных максимумов по частоте.

где

$$\alpha = \frac{4}{3} kL \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0, \quad f(i) = i^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) i^2 + \frac{1}{2} i.$$

При выводе выражения (9) мы полагали координату $y = 0$, однако это обстоятельство не препятствует определению с помощью (9) поля \mathcal{E} в произвольных точках резонатора. В самом деле, при перемещении начала координат вдоль поверхности решетки выражение (9) остается справедливым; нужно лишь иметь в виду, что расстояние L между началом координат и соответствующей точкой плоского зеркала резонатора изменяется при переходе от штриха к штриху решетки.

При перемещении начала координат на расстояние, равное периоду решетки, изменение L равно $d \sin \varphi_0 = m\lambda_0/2$ (см. (1)). Учитывая это равенство, в общем случае можно записать, что

$$L = L_0 + s \frac{m\lambda_0}{2} = L_0 + \eta D \sin \varphi_0, \quad (10)$$

где L_0 — среднее расстояние между зеркалом и решеткой, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \pm S/2$, S — число всех штрихов решетки, D — поперечный размер решетки, определяемый в направлении, перпендикулярном ее штрихам, $\eta = sd/D$ — координата точки на поверхности решетки (см. рис. 1), выраженная в относительных единицах ($-1/2 \leq \eta \leq 1/2$).

Подставляя (10) в (9), получаем*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^i \exp \{ -j [2kL_0 i + \beta i - \alpha f(i)] \}, \quad (11)$$

где $\beta = skm\lambda_0 = 2k\eta D \sin \varphi_0$.

Входящая в (11) величина βi представляет собой дополнительную разность фаз, обусловленную зависимостью от η оптического пути (в направлении оси x) в резонаторе с решеткой. Будем называть βi «дистанционной» фазовой расстройкой, а величину $\alpha f(i)$, зависящую от угловой дисперсии решетки**, — «дисперсионной» фазовой расстройкой.

Из выражений $\alpha = \frac{4}{3} kL \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0$ и $\beta = skm\lambda_0 = 2\pi sm \frac{\lambda_0}{\lambda} \simeq 2\pi sm \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)$ следует, что разность $\beta - 2\pi q$ ($q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$) пропорциональна $\Delta\lambda/\lambda_0$, дисперсионная же фазовая расстройка $\sim (\Delta\lambda/\lambda_0)^2$.

2. Рассмотрим вопрос о пространственном распределении интенсивности поля в резонаторе рис. 1. Для волны $\lambda = \lambda_0$, определяемой выражением (1), $\alpha = 0$, величина β кратна 2π . Если при этом $L_0 = n_0\lambda_0/2$ (n_0 — целое число), то в системе имеет место основной резонанс и интенсивность электромагнитного поля $I(\lambda_0) = \mathcal{E}\mathcal{E}^*$ в любой точке пространства между зеркалом и решеткой резонатора равна $\mathcal{E}_0^2/(1-r)^2$.

Пусть теперь $\lambda \neq \lambda_0$. Предположим сначала, что $\alpha f(N) \ll 1$, где $N =$

* Интересно отметить, что по своему виду (11) сходно с выражением, описывающим результирующее поле в интерферометре Фабри—Перо с перекошенными зеркалами, (см., например, [9]). Если положить, что угол перекоса зеркал «эквивалентного»

интерферометра Фабри—Перо $\xi = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \operatorname{tg} \varphi_0$, и написать для его поперечного размера $D_{\Phi-\Pi}$ и расстояния $L_{\Phi-\Pi}$ соотношение, аналогичное (10) $L_{\Phi-\Pi} = L_0 + \eta D_{\Phi-\Pi} \times \times \sin \xi$, то нетрудно убедиться, что при $\lambda = \text{const}$ у клинообразного интерферометра распределение $E(\eta)$ будет такое же, как у дифракционного резонатора при условии $D_{\Phi-\Pi} = D \sin \varphi_0 / \sin \xi = D \cos \varphi_0 \Delta\lambda$.

** Величина α пропорциональна квадрату угловой дисперсии решетки $(d\varphi/d\lambda)_{\varphi=\varphi_0}^2 = = 4\operatorname{tg}^2 \varphi_0 / \lambda^2$

$= -1/\ln r \approx 1/(1-r)$ — число циклов, при котором амплитуда многократно отраженной волны уменьшается в e раз. Пренебрегая в этом случае в (11) дисперсионной фазовой расстройкой и производя суммирование, получаем

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1-r \exp[-j(2kL_0 + \beta)]}.$$

Интенсивность поля

$$I(\lambda, \beta) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2(kL_0 + \beta/2)}. \quad (12)$$

Полагая приближенно, что $k=2\pi/\lambda \approx (2\pi/\lambda_0)(1-\Delta\lambda/\lambda_0)$, и учитывая, что величина $(2\pi/\lambda_0)(L_0 + \eta D \sin \varphi_0)$ кратна π , для относительной величины интенсивности поля нетрудно найти выражение

$$W(\lambda, \eta) = \frac{I(\lambda, \eta)}{I(\lambda_0)} = \left\{ 1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left[2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{L_0 + \eta D \sin \varphi_0}{\lambda_0} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (13)$$

Как видно из (13), если $\lambda \neq \lambda_0$, то относительная интенсивность поля в резонаторе зависит от координаты η и изменяется по периодическому закону, достигая максимального значения, равного единице, при $\eta = \bar{\eta}$ и $\Delta\lambda = \bar{\Delta\lambda}$, удовлетворяющих равенству

$$2 \frac{\bar{\Delta\lambda}}{\lambda_0} \left(\frac{L_0 + \bar{\eta} D \sin \varphi_0}{\lambda_0} \right) = 2 \frac{\bar{\Delta\lambda} \bar{L}}{\lambda_0^2} = \frac{\bar{\Delta\lambda}}{\Delta} = p, \quad (14)$$

где $\bar{L} = L_0 + \bar{\eta} D \sin \varphi_0$, $\Delta = \lambda_0^2/2\bar{L}$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$. Пространственная ширина этих локальных максимумов, т. е. интервал $\delta\eta$ ($\delta\eta \sim \delta y$), в котором $W(\lambda, \eta) \geq 1/2$, равен

$$\delta\eta = \frac{\bar{L}(1-r)}{\pi\sqrt{r} p D \sin \varphi_0}. \quad (15)$$

На рис. 2 приведены кривые, характеризующие распределение интенсивности поля резонатора в зависимости от координаты η для раз-

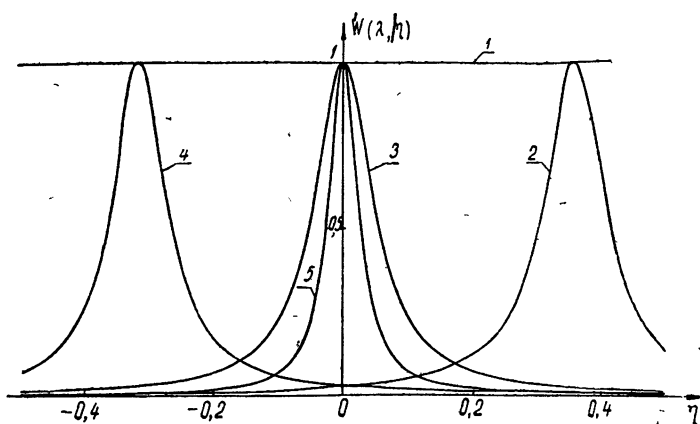


Рис. 2. Пространственное распределение интенсивности поля дифракционного резонатора при $af(N) \ll 1$ ($L_0=50$ см, $D=15$ см, $\varphi_0=30^\circ$, $r=0,95$):

- 1) $\lambda=\lambda_0=1$ мк; 2) $\Delta\lambda/\lambda_0=0,95$ ($p=1$); 3) $\Delta\lambda/\lambda_0=1$ ($p=1$); 4) $\Delta\lambda/\lambda_0=1,05$ ($p=1$); 5) $\Delta\lambda/\lambda_0=2$ ($p=2$).

личных значений $\Delta\lambda/\Delta_0$, где $\Delta_0 = \lambda_0^2/2L_0$. Кривые построены для случая $L_0 = 50$ см, $D = 15$ см, $\varphi_0 = 30^\circ$, $r = 0,95$ ($r_{\text{зер}} = r_{\text{реш}} = 0,98$; $\gamma = 0,94$) и $\lambda_0 = 1$ мк. Как видно из рис. 2, пространственная ширина локальных интерференционных максимумов быстро уменьшается (при фиксированном значении η) по мере увеличения номера p (кривые 3 и 5) и их положение в пространстве весьма критично к изменению длины возбуждающей волны (кривые 2—4).

Сделанные на основании (13) выводы справедливы при условии, что $\alpha f(N) \ll 1^*$. В тех случаях, когда дисперсионной фазовой расстройкой нельзя пренебречь, пространственное распределение интенсивности может существенно отличаться от вычисляемого при помощи выражения (13). Чтобы выяснить влияние этой расстройки, был выполнен расчет функции $W(\lambda, \eta)$ по формуле (11) на электронной вычислительной машине. Для величин L_0, D, φ_0, r и λ_0 были приняты значения, указанные в предыдущем примере, причем в выражении $\alpha f(i)$ полагали $L=L_0$ и $x/L = 0,5$. Суммирование производилось для $i \leq i_{\text{max}}$, где i_{max} определялось из условия $r^{i_{\text{max}}} \approx 0,001$.

Результаты расчета $W(\lambda, \eta)$ при $\alpha f(N) = 0,36; 1,44$ и $3,24$ ($\bar{\eta} = 0$, $p = \pm 6, \pm 12, \pm 18$) представлены сплошными кривыми 1 ($p > 0$) и 2 ($p < 0$) соответственно на рис. 3а, б, в. Для сравнения пунктирными

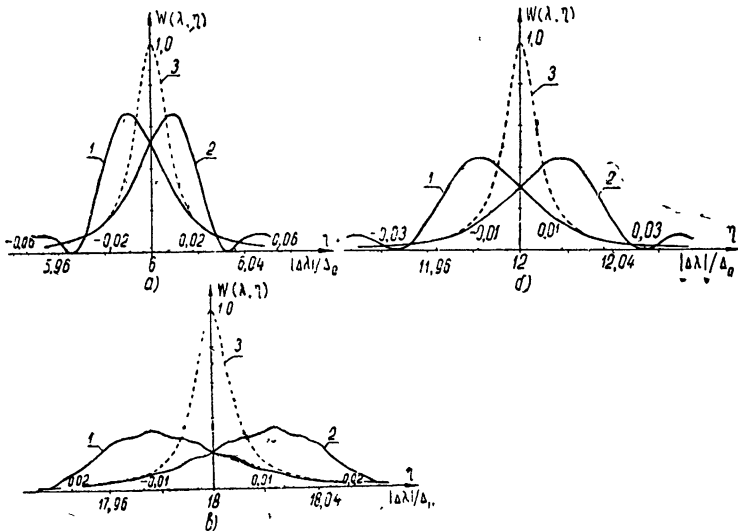


Рис. 3. Пространственное и спектральное распределение интенсивности поля резонатора при $\alpha f(N) \sim 1$.

кривыми 3 на рисунках показано пространственное распределение интенсивности, вычисленное по формуле (13). Как видно из рис. 3, локальные интерференционные максимумы уменьшаются с увеличением p — номера максимума, вследствие влияния дисперсионной фазовой расстройки. При этом их пространственная ширина увеличивается, а интегральная интенсивность $W(\lambda) = \int_{-1/2}^{+1/2} W(\lambda, \eta) d\eta$, как показывают графи-

ческие оценки, остается примерно постоянной. Интересно отметить, что дисперсионная фазовая расстройка также приводит к пространственному смещению интерференционных максимумов.

* В рассмотренном выше примере это условие выполняется, поскольку при заданных параметрах резонатора и значениях $p = \pm 1, \pm 2$ величина $\alpha f(N) \leq 0,04$.

3. Перейдем теперь к вопросу о зависимости интенсивности поля в резонаторе от длины возбуждающей волны. Как можно заключить из (13), в отсутствие дисперсионной фазовой расстройки эта зависимость в какой-либо точке резонатора такая же, как и в обычном интерферометре Фабри—Перо. Относительная спектральная ширина интерференционных максимумов в точках дифракционного резонатора, имеющих координату η , согласно (13), равна

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0(1-r)}{2\pi\sqrt{r}(L_0 + \eta D \sin \varphi_0)}. \quad (16)$$

В частности, если $\eta D \sin \varphi_0 \ll L_0$, то (16) обращается в известное выражение $\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0(1-r)}{2\pi\sqrt{r}L_0}$, определяющее ширину максимумов в интерферометре Фабри—Перо.

Спектральные кривые резонатора с учетом дисперсионной фазовой расстройки могут быть найдены на основании выражения (11). Анализируя его, нетрудно заключить, что, если в пределах рассматриваемой спектральной полосы $\lambda_2 - \lambda_1$ ($\lambda \neq \lambda_0$) изменение дисперсионной фазовой расстройки мало, т. е. $[\alpha(\lambda_2) - \alpha(\lambda_1)] f(N) \ll 1$, то закон спектрального распределения интенсивности совпадает (с точностью до масштаба) с законом ее пространственного распределения для какого-либо значения λ_c , лежащего в интервале $\lambda_2 - \lambda_1$. На основании (11) можно найти, что масштабное соотношение между длиной волны в спектральном распределении и координатой η в пространственном распределении имеет следующий вид:

$$\lambda - \lambda_0 = (\lambda_c - \lambda_0) \left[1 + (\eta - \eta_c) \frac{D \sin \varphi_0}{L_0 + \eta_c D \sin \varphi_0} \right], \quad (17)$$

где η_c — координата точки, в которой рассматривается спектральное распределение интенсивности. Поскольку обычно представляет интерес спектральное распределение интенсивности в узких участках спектра вблизи интерференционных максимумов, где указанное выше неравенство справедливо, соотношение (17) может оказаться практически полезным в ряде случаев.

В частности, для резонатора, параметры которого указаны в приведенном выше примере, это неравенство хорошо выполняется для значений $|p| \leq 50$. Поэтому показанные на рис. 3а, б, в кривые характеризуют не только пространственное, но и спектральное распределение интенсивности поля резонатора (в точке $x/L = 0,5$ и $\eta = 0$).

Из рис. 3 следует, что механизм дисперсионной фазовой расстройки приводит к уменьшению (с ростом $|p|$) интенсивности локальных интерференционных максимумов, к увеличению их спектральной ширины и некоторому смещению максимумов по спектру в направлении к основному. Заметим, что спектральная кривая основного максимума вследствие малости дисперсионной фазовой расстройки остается практически неискаженной; она совпадает с пунктирными кривыми 3 (построенными при значении $\alpha = 0$), а также со спектральными кривыми резонатора Фабри—Перо с параллельными зеркалами.

4. Выше мы рассмотрели влияние дисперсионной расстройки на картину пространственного и спектрального распределения интенсивности поля резонатора при заданных значениях его параметров. Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Если $2kL_0 + \beta = 2\pi p$, то из выражений (11) — (14) следует, что $W(\lambda, \eta) = W(\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}) = W(\alpha, r, x/L)$,

причем функция $W(\alpha, r, x/L)$ может быть протабулирована. Последнее представляет интерес, так как, зная $W(\alpha, r, x/L)$, можно приближенно оценивать ослабление локальных интерференционных максимумов при произвольных значениях параметров резонатора.

На рис. 4 показаны рассчитанные на ЭВМ кривые зависимости $W(\bar{\lambda}, \bar{\eta})$ от $\alpha f(N)$ для трех значений $r = 0,9; 0,95$ и $0,98$, которые соответ-

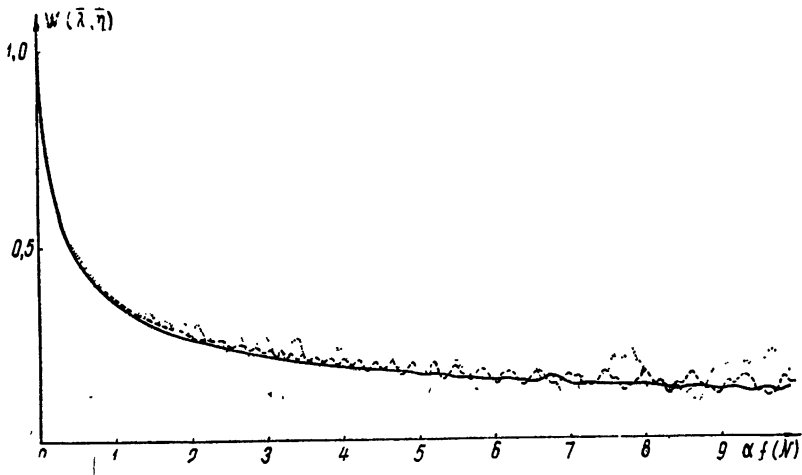


Рис. 4. Зависимость $W(\bar{\lambda}, \bar{\eta})$ от $\alpha f(N)$:
... — $r = 0,9$, ---- — $r = 0,95$, — — — — $r = 0,98$.

вуют наиболее часто встречающимся в практике величинам коэффициентов отражения зеркал и дифракционных решеток — эшелеттов. Отношение x/L было принято равным $0,5^*$. По оси абсцисс отложены значения $\alpha f(N)$, где $N = -1/\ln r$.

Так как вследствие дисперсионной фазовой расстройке длины волн локальных интерференционных максимумов несколько смещены по спектру относительно волн $\bar{\lambda}$, то кривые рис. 4 дают несколько завышенную величину их ослабления. В частности, из рис. 3 следует, что при значениях $\alpha f(N) = 0,36$ и $3,24$ $W(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = 0,52$ и $0,21$; в то время как максимальные значения $W_{\max}(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = 0,66$ и $0,34$.

Определим $p_{0,5}$ — номер локальных максимумов, для которых $W(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = 1/2$. Как видно из рис. 4, в этом случае независимо от r $\alpha f(N) \simeq 0,45$. Подставляя сюда выражения $\alpha = \frac{8}{3} \pi \frac{\bar{L}}{\lambda} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \text{tg}^2 \varphi_0 \simeq$

$\simeq \frac{2}{3} \pi \frac{\lambda_0}{L} p^2 \text{tg}^2 \varphi_0$ и $f(N) \simeq N^3$, имеем

$$p_{0,5} \simeq \pm 0,46 \text{ctg} \varphi_0 \sqrt{\frac{\bar{L}}{\lambda_0 N^3}} = \pm \frac{0,92}{\left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)_{\varphi=\varphi_0}} \sqrt{\frac{\bar{L}}{\lambda_0^3 N^3}}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что при заданных значениях $\bar{L} \simeq L_0$, φ_0 и N число $p_{0,5}$ уменьшается с увеличением длины волны λ_0 . В частности, полагая, как и выше, $L_0 = 50$ см, $\varphi_0 = 30^\circ$, $N = 20$ и $\lambda_0 = 1$ мк, получаем $|p_{0,5}| = 6,3 \simeq 6$.

* Расчеты, выполненные для значений $\alpha f(N) \leq 10$ и $r = 0,95$, показывают, что при изменении x/L от нуля до единицы функция W изменяется не более чем на 15%.

5. Наряду с рассмотренным выше спектральным распределением интенсивности в какой-либо точке резонатора, представляет также интерес распределение по спектру интегральной интенсивности $W(\lambda)$ — полного потока энергии, проходящего через поперечное сечение резонатора в направлении оси x . Найдем величину этого потока, предполагая, что $\alpha f(N) \ll 1$. Интегрируя (13), получаем

$$W(\lambda) = \int_{-1/2}^{+1/2} W(\lambda, \eta) d\eta = \frac{1}{bR\Delta\lambda} \left\langle \arctg \left\{ R \operatorname{tg} \left[\left(a + \frac{b}{2} \right) \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right] \right\} - \arctg \left\{ R \operatorname{tg} \left[\left(a - \frac{b}{2} \right) \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right] \right\} \right\rangle, \quad (19)$$

где

$$R = \frac{1+r}{1-r}, \quad a = 2\pi \frac{L_0}{\lambda_0}, \quad b = 2\pi \frac{D \sin \varphi_0}{\lambda_0}.$$

Вид функции $W(\lambda)$ в областях ее максимальных значений (для указанных выше параметров резонатора) показан на рис. 5а, б, в. Из

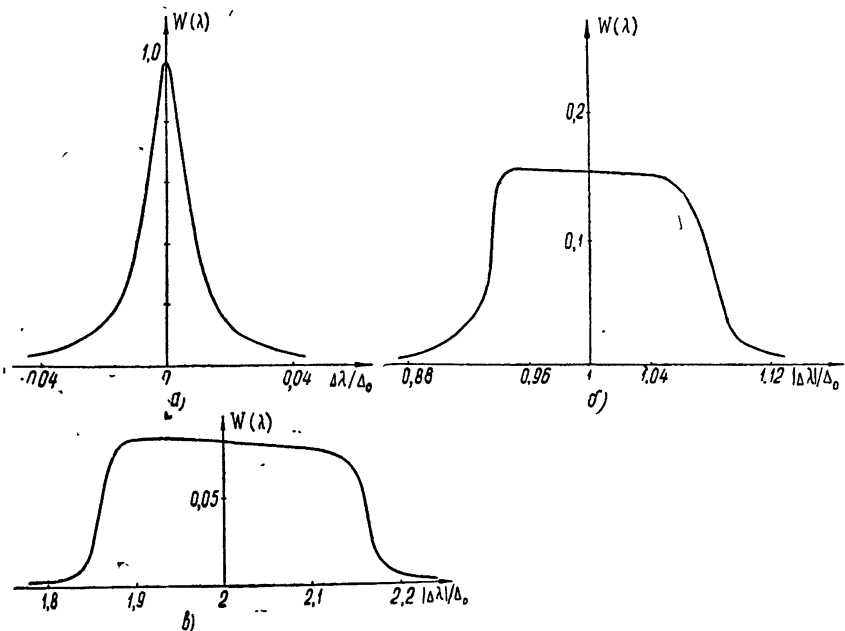


Рис. 5. Спектральное распределение интегральной интенсивности поля дифракционного резонатора ($L_0=50$ см, $D=15$ см, $\varphi_0=30^\circ$, $r=0,95$, $\lambda_0=1$ мк):

а) $p=0$; б) $|p|=1$; в) $|p|=2$.

этих рисунков видно, что резонатор с дифракционной решеткой обладает лишь одним достаточно выраженным основным ($\lambda = \lambda_0$) резонансным максимумом, величина же других максимумов быстро уменьшается с увеличением $|p|$ и составляет при $|p|=1$ и $|p|=2$ соответственно 0,16 и 0,085 от основного. Отметим, что по мере увеличения $|p|$ спектральная ширина соответствующих интерференционных максимумов

становится больше, при этом площадь последних остается примерно постоянной*.

При нахождении аналитического выражения для $W(\lambda)$ с учетом дисперсионной фазовой расстройки возникают определенные трудности. Можно, однако, думать, что учет этой расстройки не приведет к существенному изменению вида кривых, определяемых выражением (19),

поскольку для локальных максимумов величина интеграла $\int_{-1/2}^{+1/2} W(\lambda, \eta) d\eta$,

как было найдено выше из графических оценок, не зависит от дисперсионной фазовой расстройки.

Учитывая, что для различных применений дифракционных резонаторов представляется желательным возможно большее ослабление спектральной интенсивности интерференционных максимумов $p \neq 0$, заметим, что для достижения этой цели, по-видимому, окажется полезным помещение в резонаторе вместо зеркала B второй дифракционной решетки. Кроме того, уменьшение $W(\lambda)$ в этих максимумах может быть осуществлено путем увеличения поперечных размеров резонатора.

Заканчивая на этом обсуждение селективных свойств резонатора рис. 1, отметим, что, кроме рассмотренных выше основного и локальных максимумов на волнах, соответствующих m -у порядку спектра решетки, в системе возможны аналогичные максимумы на волнах, отвечающих другим порядкам. В частности, основные резонансы будут иметь место, если $\lambda_q = \lambda_0 \frac{m}{m+q}$ ($q, m = \pm 1, \pm 2, \pm \dots$) и произведение $n_0 \frac{m}{m+q}$ равно целому числу. При небольших значениях m (что имеет место при использовании эшелеттов) они вместе с соответствующими локальными максимумами находятся в удаленных участках спектра и нами не рассматриваются.

6. Выше мы исходили из предположения, что в резонаторе могут распространяться плоские волны. Однако вследствие дифракции они в действительности не являются плоскими, а оказываются слегка расходящимися. Учитывая это обстоятельство, определим область применимости полученных выше выражений.

Как известно, представление геометрической оптики о пучке параллельных лучей является справедливым, если радиус первой зоны Френеля $\rho = \sqrt{L\lambda}$ (L — длина оптического пути) достаточно мал по сравнению с поперечными размерами пучка. Принимая эти размеры ориентировочно равными поперечному размеру решетки D , имеем $D \gg \sqrt{L\lambda}$. Так как длина оптического пути, проходимого фронтом волны за N циклов, равна $2NL$, то последнее неравенство может быть записано в виде

$$D^2/\lambda L \gg 2N. \quad (20)$$

Если дисперсионной фазовой расстройкой можно пренебречь, то соотношение (20) является достаточным условием применимости полученных выше выражений. Если же $\alpha f(N) \gg 1$, то необходимо выполнение дополнительного условия. Действительно, из (8) и (9) следует, что

* Ширина основного максимума, согласно (19), приближенно равна

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{\lambda_0(1-r)}{\pi L_0(1+r)(1-D^2 \sin^2 \varphi_0/4L_0^2)^{1/2}}$$

Она близка к спектральной ширине максимумов резонатора Фабри—Перо (см., (16) при $\eta = 0$).

величина дисперсионной фазовой расстройки $\alpha f(i) = \frac{1}{3} kL (\Delta\varphi)^2 f(i)$,

где $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i = 2 \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \operatorname{tg} \varphi_0$ характеризует изменение направления распространения волны при ее отражении от решетки. Если $|\Delta\varphi| \gg \theta = \lambda/D_n$ (θ — угол, определяющий «угловую расходимость» волны — ширину дифракционного максимума, D_n — поперечное сечение волнового пучка, возбуждающего систему), то предположение о распространении в резонаторе плоских волн является оправданным, так как только при выполнении этого условия величина $\Delta\varphi$ может быть определена из предположений геометрической оптики.

Неравенство $|\Delta\varphi| \gg \theta$ можно записать как

$$2 \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} \operatorname{tg} \varphi_0 \gg \frac{\lambda}{D_n}. \quad (21)$$

Полагая $\Delta\lambda \simeq p\Delta_0 = p\lambda_0^2/2L_0$, $\lambda \simeq \lambda_0$ и учитывая, что $D_n = D \cos \varphi_0$, получаем

$$L_0 \leq |p| D \sin \varphi_0. \quad (22)$$

Условие (21) может быть представлено и в другом, несколько более общем виде. В самом деле, исключая из (21) с помощью (1) величину λ_0 , находим

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} \gg \frac{1}{R}, \quad (23)$$

где $R = mD/d$ — разрешающая сила решетки.

Проверим, выполняются ли условия (20) и (22) для резонатора с $L_0 = 50$ см, $D = 15$ см, $\varphi_0 = 30^\circ$, $N = 20$ и $\lambda_0 = 1$ мк, обсуждавшегося в приведенных выше примерах. Подставляя значения параметров в (20) и (22), имеем $D^2/\lambda L = 4,5 \cdot 10^4 \gg 2N$, $|p| \geq L_0/D \sin \varphi_0 = 6,7 \simeq |p_{0,5}|$, и, следовательно, в рассматриваемом случае оба условия выполнены.

Необходимо отметить здесь, что при выводе исходных выражений мы не учитывали того, что при $\lambda \neq \lambda_0$ поперечное сечение пучков лучей, распространяющихся под углами φ_i к оси x , может уменьшаться вследствие частичного их выхода из резонатора. В некоторых случаях это обстоятельство может привести к существенному ослаблению интерференционных максимумов $p \neq 0$. Однако этот вопрос нуждается в отдельном обсуждении.

2. ДИФРАКЦИОННЫЙ РЕЗОНАТОР С ДВУМЯ ЗЕРКАЛАМИ

В случае дифракционного резонатора с двумя зеркалами (рис. 6), возбуждаемого нормально падающей на одно из зеркал волной, можно найти, пользуясь описанным выше методом сложения амплитуд многократно отраженной неоднородной волны, распространяющейся в направлении оси x , следующее выражение для величины \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} \exp\{-j [2k(L'_0 + L''_0) i + \beta i - \alpha f(i)]\}, \quad (24)$$

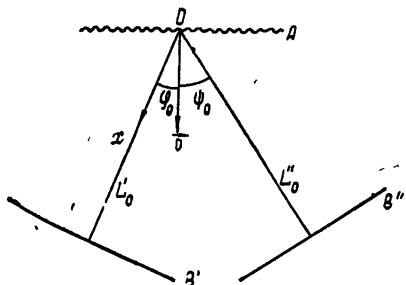


Рис. 6. Дифракционный резонатор с

где

$$\beta = 2skm\lambda_0, \quad \alpha = \frac{4}{3} kL' \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \frac{(\sin\varphi_0 - \sin\psi_0)^2}{\cos^2\varphi_0},$$

$$f(i) = \left(1 + \frac{L''}{L'} \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\psi_0} \right) i^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L'} - 1 \right) i^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{L''}{L'} \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\psi_0} \right) i,$$

а r по-прежнему равно $\sqrt{r_{\text{зер}} r_{\text{реш}}}$. Через L' и L'' здесь обозначены расстояния от какой-либо произвольной точки решетки (выбранной за начало координат) соответственно до зеркал B' и B'' ; геометрический смысл величин φ_0 и ψ_0 ясен из рис. 6.

Выражение (24) имеет тот же вид, что и (11). Следовательно, резонансная система рис. 6 обладает примерно теми же свойствами, что и резонатор рис. 1*.

3. РЕЗОНАТОР С ПРИЗМОЙ

Для резонансной системы рис. 7 с дисперсионной призмой и двумя

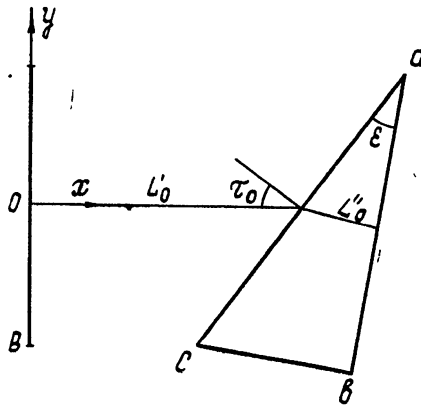


Рис. 7. Резонатор с призмой.

зеркалами (одно из них совмещено с гранью ab призмы), в которой возбуждающая волна распространяется в направлении нормали к зеркалу B , можно описанным выше методом найти выражение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^i \exp \{ -j [2k (L'_0 + \mu_0 L''_0) i + \beta i - \alpha f(i)] \}, \quad (25)$$

где $r = (1 - \sqrt{r_{ac}})^2 T \sqrt{r_{\text{зер}} r_{\text{реш}}}$, r_{ac} и r_{ab} — коэффициенты отражения граней ac и ab призмы, $T = T(y)$ — коэффициент пропускания призмы;

$$\alpha = \frac{1}{3} kL' (\Delta\lambda)^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)_{\tau=\tau_0}^2, \quad \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)_{\tau=\tau_0} = \frac{2 \sin \varepsilon}{(1 - \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon)^{1/2}} \frac{d\mu}{d\lambda},$$

$$f(i) = \left[1 + \frac{L''(1 - \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon)}{L' \mu \cos^2 \varepsilon} \right] i^3 + \frac{3}{2} \frac{x}{L'} i^2 + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{L''(1 - \mu_0^2 \sin^2 \varepsilon)}{L' \mu \cos^2 \varepsilon} \right] i,$$

$$\beta = 2ykD \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \operatorname{tg} \tau_0, \quad \Delta\mu = \mu - \mu_0,$$

* Эти системы могут, однако, иметь различные характеристики при возбуждении их волновыми пучками, имеющими произвольные направления.

μ и μ_0 — показатели преломления вещества призмы для волн λ и λ_0 , D — поперечный размер зеркала B и $|y| \leq 1/2$.

Выражение (25) аналогично (11) и (24), однако численные значения входящих в него величин, характеризующих дистанционную и дисперсионную фазовые расстройки, практически существенно отличаются от значений соответствующих величин для дифракционных резонаторов. В самом деле, для резонатора рис. 1 максимальная дистанционная фазовая расстройка равна $ikD \sin \varphi_0$. Если поперечные размеры пучка в резонаторах рис. 7 и рис. 1 одинаковы и угол преломления призмы ϵ равен φ_0 — углу между нормальными к решетке и зеркалу, то отношение максимальных значений дистанционных фазовых расстроек для этих

резонаторов равно $\frac{(\Delta\mu/\mu_0) \operatorname{tg} \tau_0}{\sin \varphi_0} = \frac{\Delta\mu}{(1 - \mu_0^2 \sin^2 \epsilon)^{1/2}}$. Оно значительно меньше единицы, так как в практически интересных случаях $\Delta\mu \ll (1 - \mu_0^2 \sin^2 \epsilon)^{1/2}$. Следовательно, локальный характер интерференционных максимумов в резонаторе с призмой должен проявляться значительно слабее, чем в резонаторах с дифракционными решетками.

Учитывая также, что угловая дисперсия призм значительно меньше угловой дисперсии решеток [10] и что коэффициент r для резонатора с призмой имеет меньшую величину (вследствие потерь при отражении волны гранью ac и поглощения мощности веществом призмы), чем для дифракционного резонатора, можно заключить, что в сравнении с последним резонатор с дисперсионной призмой обладает худшими селективными свойствами.

В заключение отметим, что вследствие присущих дифракционным резонаторам свойств, обусловленных дисперсионной и дистанционной фазовыми расстройками распространяющихся в них волн, представляется перспективным экспериментальное и теоретическое изучение возможности использования таких резонаторов (в частности, с большим отношением D/L) для создания спектральных приборов высокой разрешающей силы оптического и радиооптического диапазонов волн.

Авторы благодарны А. П. Наумову и М. Б. Зиничевой за выполненные расчеты на электронной вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Аверков, В. И. Аникин, В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, А. И. Хвостова, Авторское свидетельство № 226193, 1959 г.
2. В. П. Шейко, Укр физ. ж., 7, 430 (1962).
3. G. R. Bird, IEEE Trans. MTT, 11, 432 (1963).
4. В. Л. Броуде, О. Н. Погорелый, М. С. Соскин, ДАН СССР, 163, 1342 (1965).
5. E. Brannen, Proc. IEEE, 53, 2134 (1965).
6. V. Sells, F. C. Cho, E. Brannen, H. R. Froelich, Proc. IEEE, 54, 552 (1966).
7. Е. Л. Косарев, Письма в ЖЭТФ, 3, 295 (1966).
8. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 731 (1967).
9. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1959.
10. П. Жакино, УФН, 72, 799 (1960).

DIFFRACTION RESONATORS

S. I. Averkov, N. I. Fourashov

The selective properties of the resonators with diffraction gratings and prisms is theoretically investigated for the case of a fixed propagation direction of the excited wave. A spatial distribution of the field intensities in the resonators has been found. All interference maxima (except the main) are shown to have a local character. The plots are given which permit to estimate approximately the decrease of these maxima as they move away along the spectrum from the main one. The properties of some resonance systems with gratings and with a prism are compared.

УДК 538.56

ДЕМПФИРОВАНИЕ РАСКАЧКИ ПУЧКА В ДИАФРАГМИРОВАННОМ ЛУЧЕВОДЕ

Р. Б. Ваганов

В линзовой квазиоптической линии волновой пучок раскачивается под воздействием случайных смещений линз. Показано, что диафрагмирование линз уменьшает раскачку пучка за счет его взаимодействия с краями диафрагм. Все расчеты проведены в приближении очень малых отклонений пучка от линии, соединяющей центры диафрагм. Считается, вследствие этого, что пучок в основном состоит из двух первых собственных волн лучевода. Определено положение светового пятна на n -й линзе. Из приведенной формулы для среднеквадратичного смещения пучка от центра диафрагмы следует, что при большой фильтрации дипольной волны наступает стабилизация раскачки пучка.

1. В лучевом волноводе из квадратичных фазовых корректоров [1], например, тонких диэлектрических линз, квазиоптический пучок распространяется по законам геометрической оптики, если радиус линзы много больше эффективного радиуса пучка [2, 3]. Рассмотрим простейший случай—последовательность одинаковых корректоров с фокусными расстояниями f и расстояниями между корректорами L . Линзы ограничены идеально поглощающими диафрагмами. Соединим центры отверстий диафрагм отрезками прямой; полученную ломаную назовем линией центров. Эта линия, вообще говоря, пространственная, однако для простоты всюду ниже будем считать ее плоской. Форма ломаной характеризуется углами $\gamma_n \ll r_s/L$, а положение линз, кроме углов,—расстояниями центров линз от центров диафрагм $\delta_n \ll r_s$, где r_s — эффективный радиус пучка.

Запишем теперь разностные уравнения, определяющие траекторию пучка в таком слабонерегулярном лучевом волноводе. При этом воспользуемся соотношениями геометрической оптики, т. е. пренебрежем взаимодействием пучка с краями диафрагм, считая линзы практически неограниченными (рис. 1):

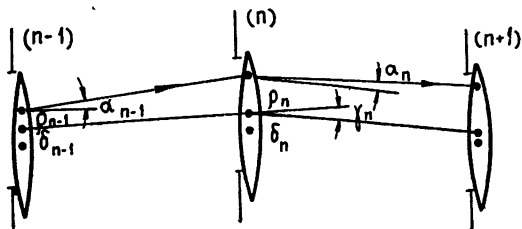


Рис. 1. Траектория пучка в лучевом волноводе.

$$\begin{aligned} \rho_n &= \rho_{n-1} + \alpha_{n-1}L, \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} - \frac{\rho_n + \delta_n}{f} + \gamma_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_n определяет положение центра пучка сразу за n -й линзой, а α_n — направление распространения пучка. Подобные уравнения и их решения исследованы в ряде работ.

Запись (1) несколько условна, поскольку в лучевом с неограниченными линзами выбор «центра диафрагм» произволен. У разных авторов линия сравнения проводилась по-разному. Так, в работе [4], где изучался лучевод со случайными поперечными смещениями линз, расстояния δ_n отсчитывались от прямой линии, $\gamma_n \equiv 0$. В [5] рассматривался изогнутый лучевод, и линия центров соединяла центры линз, так что $\delta_n \equiv 0$. Отличительной чертой распространения геометрического луча в системе линз является его раскачка. Тонкий пучок по мере распространения в линзовой линии все больше раскачивается под действием случайных сдвигов линз, а среднеквадратичное смещение пучка от центра линз растет пропорционально \sqrt{n} . Появляется конечная вероятность полного выхода луча за пределы линии.

В реальном лучевом, где линзы заключены в поглощающие экраны, раскачка пучка ослабляется. Если мы начнем следить за распространением пучка в диафрагмированном лучевом, то заметим некоторое несоответствие с геометрической оптикой: пучок на выходе корректора отклоняется на меньший угол, чем это следует из законов геометрической оптики, и прижимается к линии центров [6, 7]. Пусть, например, пучок вошел в прямолинейный лучевод под углом к оси. Лучевод регулярный, центры всех линз находятся на одной прямой. Согласно геометрической оптике, пучок должен неограниченно долго качаться около оси. В лучевом, где линзы ограничены диафрагмами, качания пучка затухают, и в конце концов направление распространения пучка становится неотличимым от направления оси.

Проще всего объяснить это явление, названное демпфированием раскачки пучка, если смещения пучка от центров линз малы по сравнению с радиусом пучка. Пучок, падающий на линзу под некоторым углом к линии центров на некотором расстоянии от центра линзы, можно приближенно представить в виде суммы основной $TEM_{0,0}$ и дипольной $TEM_{1,0}$ волн регулярного лучевода. Остальные волны имеют амплитуды второго и более высоких порядков малости и в принятом приближении не учитываются. После линзы соотношение между волнами $TEM_{0,0}$ и $TEM_{1,0}$ иное, чем до линзы, причем удельный вес основной волны выше. Это понятно: радиационные потери, т. е. поглощение части энергии волны в диафрагме меньше у основной волны, чем у дипольной. Пучок на выходе линзы тем больше приближается по своей структуре к основной волне, чем более полная фильтрация волн высших порядков происходит. Таким образом, демпфирование объясняется различием радиационных потерь двух первых волн лучевода. В работе [8] были получены аналитические соотношения, позволяющие проследить траекторию пучка в диафрагмированном лучевом с ломаной линией центров, если центры диафрагм и линз совпадают. В пределе, при неограниченном увеличении отверстий диафрагм, соотношения переходят в геометрикооптические.

2. Воспользуемся ходом рассуждений работы [8] и рассмотрим несколько более общий случай нерегулярного лучевода, введенный нами в начале разд. 1, где центры линз и диафрагм не совпадают. Линия центров состоит из отрезков, соединяющих центры диафрагм. Пусть пучок $u^{(n-1)}$, выходящий от $(n-1)$ -й линзы, смещен от центра диафрагмы на величину ρ_{n-1} , а ось пучка составляет с линией центров угол α_{n-1} . Предположим, что $\rho_{n-1}, \alpha_{n-1}L \ll r_s$, где $r_s = \sqrt{L/k \sin \theta}$, $\cos \theta = 1 - L/2f$, k — волновое число, и представим поле пучка в виде суммы собственных волн регулярного лучевода:

$$u^{(n-1)} = \sum_i C_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)}. \quad (2)$$

Разложение поля $u^{(n-1)}$ произведено по полям собственных волн регулярного лучевода сравнения, у которого центры линз совмещены с центрами диафрагм, а ось совпадает с линией центров, проведенной между $(n-1)$ -й и n -й линзами. Для каждого отрезка линии центров существует свой лучевод сравнения. Отсюда следует, что, например, $u_i^{(n)}$ отличается от $u_i^{(n-1)}$ ориентацией, поворотом фазового фронта на угол γ_n , так как отрезок линии центров между n -й и $(n+1)$ -й линзами в общем случае не коллинеарен с предыдущим. Далее, отрезок между центрами соседних диафрагм представляет собой участок диафрагмированного лучевода. Но собственные волны линии после каждой итерации — прохождения отрезка длиной L и линзы — повторяются с точностью до комплексного множителя λ_i .

Суммируем сказанное. В нерегулярной квазиоптической линии собственные волны $u_i^{(n-1)}$ и $u_i^{(n)}$ связаны соотношением

$$u_i^{(n)} = \lambda_i u_i^{(n-1)} \exp(ik\gamma_n r \cos \varphi), \quad (3)$$

где r, φ — цилиндрические координаты. Модуль собственного числа λ_i определяет радиационные потери $(1 - |\lambda_i|^2)$ i -й волны, а $\arg \lambda_i$ — набег фазы волны на одном проходе от линзы к линзе. Здесь становится очевидным, почему мы выбрали именно такую линию сравнения, из отрезков, соединяющих центры диафрагм. Этот выбор позволяет строить поле после n -й линзы по известному полю после $(n-1)$ -й простым умножением каждой собственной волны на λ_i и последующим поворотом фазового фронта на угол γ_n . Прежде чем построить поле u^n , найдем коэффициенты C_i .

При вычислении этих коэффициентов можно полагать, что корректоры не ограничены, а собственные волны являются волнами лучевода из неограниченных корректоров [9]. В расчетах достигается графическая точность, если параметр Френеля не меньше 0,5, неоднородности малы, а параметр неконфокальности $L/2f$ не слишком отличается от 1. Исходя из этого, для определения C_i истинное поле на выходе линзы заменим гауссовой волной, максимум которой смещен относительно центра диафрагмы на ρ_{n-1} , а фазовый фронт наклонен под углом α_{n-1} :

$$u^{(n-1)} = \sqrt{\frac{k}{\pi A}} \exp \left[-\frac{k(r^2 - 2r \cos \varphi \rho_{n-1} + \rho_{n-1}^2)}{2V} \right] \times \exp(-ik\alpha_{n-1} r \cos \varphi). \quad (4)$$

Здесь $1/V = 1/A + i/R$, $A = kr_s^2$, а R — радиус кривизны фазового фронта пучка.

Воспользуемся свойством эрмитовой ортогональности собственных волн лучевода из бесконечных линз. Тогда C_i определяются формулой

$$C_i^{(n-1)} = \int u^{(n-1)} u_i^* r dr d\varphi, \quad (5)$$

где

$$u_i = \sqrt{\frac{k}{\pi A}} \sqrt{\frac{2m!}{(1 + \delta_{0l})(m+l)!}} \exp\left(-\frac{kr^2}{2V}\right) \times \left(r \sqrt{\frac{k}{A}}\right)^l L_m^l\left(r \sqrt{\frac{k}{A}}\right) \cos l\varphi,$$

$L_m^l(x)$ — полином Лягерра, $\delta_{0l} = 0$ для $l \neq 0$, $\delta_{00} = 1$, а индекс* обозначает комплексно-сопряженное. Подставив (4) в (5), получаем

$$C_i^{(n-1)} = i^l \sqrt{\frac{2}{(1 + \delta_{0l}) m! (m + l)!}} \exp \left\{ - \left[\frac{k\rho_{n-1}^2}{2V} + (p/2)^2 \right] \right\} (p/2)^{l+2m}, \quad (6)$$

где $p = -V\sqrt{kA} (\alpha_{n-1} + i\rho_{n-1}/V)$.

Нетрудно видеть, что для параксиального пучка $|p| \ll 1$. Оставим лишь коэффициенты первого порядка малости. Тогда амплитуда волны TEM_{00} , т. е. коэффициент C_0 не отличается от единицы, а в первом порядке по малому параметру возникает только дипольная волна TEM_{10} , для которой коэффициент C_1 равен

$$C_1 = ip/\sqrt{2}. \quad (7)$$

Комплексная амплитуда дипольной волны однозначно связана со смещением центра пучка от центра диафрагмы и с наклоном фазового фронта пучка. Если известно, как уходит пучок от линзы, можно сразу получить амплитуду волны TEM_{10} . Обратно, зная амплитуду, мы имеем представление о положении пучка. Ошибка, которая при этом происходит, не превышает $|p|^3$. Действительно, не учитываются члены второго порядка — волны TEM_{01} и TEM_{20} ; они приводят к некоторому изменению диаметра пучка и к появлению слабой эллиптичности светового пятна. На положение центра пучка оказывает влияние только волна TEM_{11} , возникающая в третьем порядке по параметру малости. Таким образом, траектория пучка, т. е. положение максимума поля, в принятом приближении определяется исключительно амплитудой волны TEM_{10} , а поле на выходе $(n-1)$ -го корректора имеет вид

$$u^{(n-1)} = u_0^{(n-1)} + C_1^{(n-1)} u_1^{(n-1)}. \quad (8)$$

3. Теперь найдем поле на выходе n -й линзы. Для волн, идущих по линии центров, представим действие диафрагмированной линзы последовательно как обрезание части поля поглощающей диафрагмой и внесение в поле фазовой коррекции $e^{i\Phi}$, где

$$\Phi = \frac{k(r^2 - 2r\delta_n \cos \varphi + \delta_n^2)}{2f}. \quad (9)$$

Рассмотрим в выражении (9) каждое слагаемое отдельно. Первое представляет собой фазовую коррекцию, совпадающую с коррекцией линзы регулярного лучевода. Второе слагаемое означает дополнительный наклон фазового фронта на угол δ_n/f . Наконец, третье слагаемое опускается: это не представляющий интереса фазовый сдвиг, который не зависит от поперечных координат.

Вместе с ограничивающей диафрагмой регулярная фазовая коррекция преобразует поле $u^{(n-1)}$ согласно (3), т. е. амплитуда каждой собственной волны умножается на λ_i , а фазовый фронт оказывается повернутым на угол γ_n относительно нового участка линии центров. Если к этому добавить изменение направления пучка из-за сдвига линзы, то поле пучка после n -го корректора может быть записано в виде

$$u^{(n)} = (\lambda_0 u_0^{(n)} + \lambda_1 C_1^{(n-1)} u_1^{(n)}) \exp[-ikr \cos \varphi (\delta_n/f + \gamma_n)]. \quad (10)$$

Это поле близко по форме к гауссовому пучку, центр симметрии которого смещен на расстояние ρ_n от центра диафрагмы, а ось направлена под углом α_n .

Заменяя в (4) параметры, определяющие положение пучка, получаем

$$u^{(n)} = \lambda_0 \sqrt{\frac{k}{\pi A}} \exp \left[-\frac{k(r^2 - 2r\rho_n \cos \varphi + \rho_n^2)}{2V} \right] \exp(-ik\sigma_n r \cos \varphi). \quad (11)$$

Величины ρ_n и α_n нам пока неизвестны. Их можно найти, сравнивая (10) и (11). Простые преобразования приводят к равенству

$$\left(\alpha_n + \frac{i\rho_n}{V} \right) - (\delta_n/f + \gamma_n) = \lambda_1/\lambda_0 \left(\alpha_{n-1} + \frac{i\rho_{n-1}}{V} \right). \quad (12)$$

Попробуем упростить полученные рекуррентные соотношения. Расчеты собственных чисел [10] указывают на то, что при некоторых условиях фазовый сдвиг при итерации практически не отличается от фазового сдвига в лучевом изогнутом корректоре, т. е.

$$\arg \lambda_1/\lambda_0 = \theta. \quad (13)$$

Модули собственных чисел оставим, не раскрывая их значений, так как в аналитической форме $|\lambda_i|$ найдены только для немногих ситуаций. Теперь, используя (13), приравняем вещественные и мнимые части уравнения (12). Получим

$$\begin{aligned} \rho_n &= (\rho_{n-1} + \alpha_{n-1}L) |\lambda_1/\lambda_0|, \\ \alpha_n &= \alpha_{n-1} |\lambda_1/\lambda_0| - \frac{\rho_n + \delta_n}{f} + \gamma_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти соотношения между параметрами траектории пучка представляют собой обобщение (1) на приосевое распространение пучка в диафрагмированном лучевом изогнутом корректоре с ломаной линией центров и относительными смещениями центров линз и диафрагм.

Система уравнений (14) сводится к одному разностному уравнению для положения пучка

$$\rho_{n+1} - (2 - L/f) |\lambda_1/\lambda_0| \rho_n + |\lambda_1/\lambda_0|^2 \rho_{n-1} = |\lambda_1/\lambda_0| L (\gamma_n - \delta_n/f), \quad (15)$$

решение которого

$$\begin{aligned} \rho_n &= |\lambda_1/\lambda_0|^n \rho_0 \cos n\theta + |\lambda_1/\lambda_0|^n \frac{\rho_1 - \rho_0 |\lambda_1/\lambda_0| \cos \theta}{|\lambda_1/\lambda_0| \sin \theta} \sin n\theta + \frac{L}{\sin \theta} \times \\ &\times \sum_m \left(\gamma_{m+1} - \frac{\delta_{m+1}}{f} \right) |\lambda_1/\lambda_0|^{n-m-1} \sin(n-m-1)\theta \end{aligned} \quad (16)$$

определяет расстояние максимума пучка от центра n -й диафрагмы. В пределе, при увеличении отверстий диафрагм, отношение $|\lambda_1/\lambda_0|$ стремится к единице, и все полученные соотношения становятся чисто геометрическими.

4. Часто линия центров представляет собой ломаную линию, а центры линз смещены в поперечном направлении в силу случайных, непредсказуемых причин. Величина каждой неоднородности неизвестна, известны лишь их статистические характеристики. Например, если мы располагаем сведениями о средних квадратах неоднородностей, небезынтересно определить среднеквадратичное отклонение пучка от центров диафрагм. Такие выкладки произведены Матвеевым [11]; ниже полученная им формула выписана для случайных неоднородностей двух упомянутых типов:

$$\bar{\rho}_n^2 = r_s^2 q_{01} \frac{1 - |\lambda_1/\lambda_0|^{2n}}{1 - |\lambda_1/\lambda_0|^2}. \quad (17)$$

Здесь g_{01} — потери на преобразование основной волны в дипольную. Они складываются из потерь на изломах линии центров и из потерь на случайных сдвигах линз относительно диафрагм:

$$q_{01} = \frac{(kr_s)^2}{2} \left[\bar{\gamma}^2 \left(1 + 2 \sum_m |\lambda_1/\lambda_0|^m \cos m\theta \frac{\overline{\gamma_{m+n}\gamma_n}}{\bar{\gamma}^2} \right) + \frac{\bar{\delta}^2}{f^2} \right], \quad (18)$$

черта сверху обозначает усреднение по ансамблю случайных величин.

Нетрудно видеть, что в геометрооптическом случае, при слабой фильтрации, получается обычная зависимость — смещение пятна на линзе растет пропорционально \sqrt{n} . Напротив, при сильной фильтрации наступает стабилизация раскочки пучка. Среднеквадратичное смещение уже не зависит от номера линзы, а если потери на преобразование меньше разности радиационных потерь, то $\sqrt{\bar{\rho}^2}$ становится меньше размеров светового пятна.

Демпфирование раскочки пучка тем более эффективно, чем больше разность потерь первой паразитной и основной волн. Становится актуальной задача создания корректоров, которые, с одной стороны, меньше всего отклоняли бы пучок при случайных смещениях линз, с другой — фильтровали дипольную волну, оставляя потери основной на заданном уровне. В этом втором пункте аналогичная проблема — селекции типов колебаний — решается и в теории открытых резонаторов [12].

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Б. З. Каценеленбаума и О. Е. Шушпанова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1967.
2. Р. Б. Ваганов, Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума по дифракции, Тбилиси, изд. Наука, М., 1964, стр. 238.
3. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 8, № 1, 195 (1965).
4. J. Hirano, Y. Fukatsu, Proc. IEEE, 52, № 11, 1284 (1964).
5. D. Marcuse, BSTJ, 43, № 2, 741 (1964).
6. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 10, № 12, 2146 (1965).
7. Н. Н. Войтович, Радиотехника и электроника, 11, № 8, 1496 (1966).
8. Р. Б. Ваганов, Н. Н. Войтович, Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по дифракции, Харьков, 1967.
9. Р. Б. Ваганов, Диссертация, М., 1965.
10. Т. Ли, BSTJ, 44, № 5, 917 (1965).
11. Р. Б. Ваганов, Р. Ф. Матвеев, Труды VIII Всесоюзной конференции по пространению радиоволн, Ашхабад, 1967.
12. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 10, № 9—10, 1333 (1967).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
24 декабря 1968 г.

DAMPING OF THE BEAM SWINGING IN IRIS-EQUIPPED BEAMGUIDE

R. B. Vaganov

In a lens quasi-optical line, a wave beam is swung under the action of random lens displacements. It is shown that lens irisng decreases the beam swinging due to its interaction with iris edges. All calculations are given in the approximation of very a small deviations of the beam from the line connecting the centers of ires. Hence it follows that the beam consists, in the main, of two first modes of the beamguide. The position of a light spot on n -th lens is established. It follows from the formula derived for the mean square beam displacement from the iris center that at a large filtration of the dipole wave there occurs the stabilization of the beam swinging.

УДК 535.31

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЛУЧЕВЫХ ПОЛЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В ОТРАЖАЮЩЕМ СЛОЕ

И. Г. Якушкин

Для описания дифракционных явлений предлагается метод, заключающийся в построении множества комплексных лучей с действительными фазами в пространстве комплексных координат при комплексных значениях частоты. Преобразование суммы лучевых полей с помощью формулы Пуассона к резонансному виду дает возможность аналитического продолжения решения в область действительных значений переменных.

Известно, что геометрическая оптика может применяться при изучении распространения волн, длина которых много меньше некоторого характерного для задачи размера. Однако, как показывают многочисленные расчеты (см., например, [1]), геометрические решения оказываются удовлетворительными и для длин волн, соизмеримых с характерным (наименьшим резонансным) размером. В этих случаях на геометрическую оптику удобнее смотреть как на отдельную физическую теорию, имеющую свои границы применимости. В частности, с помощью приближения геометрической оптики могут быть описаны явления дифракции.

В работе [2] уже обращалось внимание на то, что ряд дифракционных явлений связан с многократным отражением лучей. Очевидно, что в случае внешних задач это могут быть только комплексные лучи. На тот факт, что при возбуждении колебаний в параболическом отражающем слое в каждую точку приходит бесконечно много комплексных лучей, было указано в работах [3] и [4]. Решение некоторых других дифракционных задач также может быть получено с помощью комплексных лучей. Это дает основание предполагать, что дифракция соответствует интерференции комплексных лучей.

Однако комплексные лучи, как они вводятся обычно [4], плохо подходят для изучения их интерференции, так как имеют разную амплитуду. Поэтому для изучения интерференционных явлений удобно ввести понятие «основных» комплексных лучей, называя так лучи, приходящие в точку пространства с комплексными координатами и в комплексный момент времени, фаза которых (эйконал) действительна. Комплексные моменты времени могут быть заменены комплексными значениями частоты или другого эквивалентного параметра. Заметим, что благодаря требованию действительности фазы основному лучу соответствует одномерная траектория в шестимерном пространстве комплексных координат. В задачах без отражений (или при пренебрежении отражениями) построение основных лучей и их последующее продолжение в область значений координат и частот, имеющих физический смысл, эквивалентно непосредственному построению комплексных лучей, т. е. лучей с комплексными углами выхода, как это делается в [4]. В задачах с отражениями комплексных лучей удобнее первоначально

строить решение в той области значений координат и параметров, где все интерферирующие лучи являются основными. Просуммированное, т. е. преобразованное из лучевой формы в резонансную, решение может быть продолжено в область действительных значений параметров и координат.

Поскольку метод комплексных лучей можно рассматривать как многомерный метод фазового интеграла, то введение поверхностей основных лучей следует считать естественным, так как эти поверхности соответствуют линиям антистокса в одномерных задачах [5]. Мы будем предполагать, что правила аналитического продолжения лучевых решений с поверхностей основных лучей в остальное пространство комплексных координат такие же, как для ВКБ решений в одномерных задачах, в частности, что такое продолжение допустимо в те области, где решение становится убывающим.

Ниже методом суммирования комплексных лучевых полей решается задача о возбуждении колебаний параболического отражающего слоя, для которой решение получается наиболее наглядно и просто.

Пусть во всем пространстве показатель преломления зависит от одной декартовой координаты, меняясь по закону $n(z) = \sqrt{z^2 - b^2}$. Уравнения луча при возбуждении колебаний данной среды бесконечной нитью электрического тока, расположенной на линии с координатами (0,0) имеют вид [4]

$$\begin{aligned} x &= ib\tau \sin \theta, \\ z &= ib \operatorname{sh} \tau \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где τ и θ — лучевые параметры, введенные обычным образом. Помещая для простоты точку наблюдения в точку с координатами (0, x), напомним, что множество лучей, приходящих в эту точку и соответствующих произвольному числу (n) отражений от комплексной каустики, определяется соотношениями

$$\tau = -in\pi, \quad \sin \theta = x/bn\pi. \quad (2)$$

Луч, соответствующий $\theta = \pi/2$, не является самостоятельным и не будет приниматься во внимание. Функция $x(z)$, являющаяся решением уравнений (1), ветвится при $z = \pm b \cos \theta$, поэтому в соответствии с идеей Келлера [1] пространство между каустиками удобно рассматривать как двухлистное, разделяя тем самым лучи, имеющие в точке наблюдения разный знак $\frac{\partial x}{\partial z}$, и суммируя их отдельно. (В случае произвольно расположенного источника следует также разделить лучи, имеющие разный знак $\frac{\partial x}{\partial z_0}$.)

Выражение для фазы (решение уравнения эйконала) луча, n раз отразившегося от каустики, в выбранной точке наблюдения имеет вид

$$\varphi = ibx \sin \theta + in\pi b^2 \frac{\cos^2 \theta}{2}. \quad (3)$$

Выражение (3) предоставляет несколько возможностей для выбора комплексных значений x и b , для которых все интерферирующие лучи являются основными. Выберем $x = x_1 e^{-i\pi/4}$; $b = b_1 e^{-i\pi/4}$, где x_1 и b_1 действительны. При таком выборе последующее продолжение в область значений параметров, имеющих физический смысл, дает решение, убывающее при $x \rightarrow \infty$.

Все множество лучей, определяемое (2), делится на две группы. К первой группе относятся лучи, для которых $|x/bn\pi| > 1$ и $\cos \theta$ — мни-

мое число. Эти лучи распространяются при значениях $z = z_1 e^{i\pi/4}$. Вторую группу составляют лучи, для которых $|x/bn\pi| < 1$ и $\cos \theta$ — действительное число. Лучи этой группы распространяются при значениях $z = z_1 e^{-i\pi/4}$. В обоих случаях $-\|b \cos \theta| < z_1 < \|b \cos \theta|$. Чтобы выяснить, как эти лучи отражаются от каустики, следует рассмотреть соответствующую одномерную задачу, сопоставив лучу плоскую волну, распространяющуюся под тем же углом к оси z . Исходя из структуры линий Стокса для одномерной задачи и условий излучения, определяющих поведение решений при $z \rightarrow \pm \infty$, находим, что лучи первой группы отражаются от каустики с обычным коэффициентом отражения — i , а лучи второй группы вообще не отражаются. Следовательно, если точка наблюдения находится достаточно далеко от источника, то лучи второй группы в нее вообще не приходят.

Исходя из сказанного, полное лучевое поле в точке наблюдения можно представить в следующем виде, предполагая, что зависимость полной фазы от времени имеет вид $-\omega t$, а возбуждающий источник задается дельта-функцией с единичной амплитудой:

$$U = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_0^{\infty} f(2n) + f(2n + 1), \quad (4)$$

где

$$f(v) = \begin{cases} \frac{\sqrt{v\pi} \exp \left[\left(ib_1 x_1 \sin \theta + iv\pi b_1^2 \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) - iv \frac{\pi}{2} \right]}{\sqrt{x_1^2 - v^2 \pi^2 b_1^2}} & \left(v \in \left[0, \frac{x_1}{b_1 \pi} \right] \right) \\ 0 & \left(v \text{ вне } \left[0, \frac{x_1}{b_1 \pi} \right] \right) \end{cases} \quad (5)$$

Фактор расходимости и нормировочная константа в (4) определены известным способом [4].

Сумма (4) разбита на две части в связи с тем, что мы считаем пространство между каустиками двухлистным. Эту сумму лучевых полей преобразуем по известной формуле Пуассона [6]:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(2m\pi), \quad (6)$$

где $F(y)$ — фурье-преобразование функции $f(x)$.

Формула Пуассона, тесно связанная с преобразованием Ватсона, часто позволяет удачно преобразовывать ряды, используемые в теории волновых процессов. По-видимому, с ее помощью можно в достаточно общем случае получить переход от лучевого ряда при многолучевом распространении к ряду по собственным (волноводным) волнам системы. Ниже будет показано, что в нашей задаче формула Пуассона дает именно такое преобразование. (Аналогичное преобразование в одной волноводной задаче получено в [7].)

Для второй суммы, входящей в (4), справедлива формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n + 1/2) = \sqrt{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(2m\pi) e^{im\pi}. \quad (7)$$

Для $F(2m\pi)$ имеем

$$F(2m\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2v) e^{-i2\pi m v} dv. \quad (8)$$

Интеграл (8), в котором подынтегральная функция определяется (5), удобно вычислять методом перевала. Уравнение для определения перевальной точки получаем из выражения для фазы, приведенного в формулах (3) и (5), с учетом того, что $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \pi b_1^2 \cos^2 \theta - \pi = 2m\pi. \quad (9)$$

Как видно из (9), уравнение для перевальной точки имеет тот же вид, что и уравнение для собственных значений поперечного волнового числа $b \cos \theta$, т. е. совпадает с условием комплексных резонансов в плоскости z . Это уже показывает, что осуществляемый переход есть переход от лучевого представления поля к модовому.

Из уравнения (9) следует также, что перевальные точки лежат на отрезке интегрирования только при $m \geq 1$. Для этих m , вычисляя (8) методом перевала, получаем

$$F(2m\pi) = e^{-i\pi/4} \frac{\exp i \sqrt{2m-1+b_1^2} x_1}{2\pi^{3/2} \sqrt{2m-1} \sqrt{2m-1+b_1^2}}. \quad (10)$$

Выражение (10) может быть аналитически продолжено в область действительных значений b и x . Окончательно формула для полного поля в точке наблюдения с координатами $(x, 0)$ имеет вид

$$U = -\frac{i}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\exp [i \sqrt{(4m+1) - b^2} x]}{\sqrt{4m+1} \sqrt{(4m+1) + ib^2}}. \quad (11)$$

Формула (11) дает разложение поля внутри отражающего слоя по собственным затухающим колебаниям. Спектр собственных значений волновых чисел оказывается разреженным, так как из-за симметричного возбуждения не возбуждаются несимметричные типы волн. Формулы (4) и (11) могут быть обобщены на случай произвольного расположения источника и наблюдателя как вне, так и внутри слоя. Выражение для поля, совпадающее с (11), может быть получено путем разложения решения по собственным функциям одномерной (по координате z) задачи с комплексными собственными значениями, построенного методом ВКБ.

Можно надеяться, что методом суммирования комплексных лучевых полей, заключающимся 1) в построении множества интерферирующих основных комплексных лучей, 2) применении формулы Пуассона, 3) аналитическом продолжении в область действительных значений переменных, удастся построить решения широкого класса дифракционных задач для систем как открытого, так и закрытого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. V. Keller, S. I. Rubinov, Ann. Phys., 9, № 1, 24 (1960).
2. Л. Фельсен, Квазиоптика, изд. Мир, М., 1966, стр. 11.
3. V. D. Secler, J. V. Keller, J. Acoust. Soc. Amer., 31, № 2, 192 (1959).
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
5. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов, изд. Мир, М., 1965.
6. Ф. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ч. 1, ИЛ, М., 1958.
7. M. K. Hamid, Trans. IRE, Ap-15, № 3, 564 (1967).

THE METHOD OF THE COMPLEX RAY FIELDS IN APPLICATION
TO THE PROBLEM ON OSCILLATION EXCITATION IN REFLECTING LAYER

I. G. Yakushkin

The method consists of construction of a set of complex rays with real phases in the space of complex coordinates being functions of complex time coordinates. The method is proposed for description of diffraction phenomena. The transformation of the sum of ray fields to the resonance form using Poissons formula may analytically lead to the continuation of the solution in the region of real values of variables.

УДК 621.372.826

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АНАЛОГА ВОЛНЫ H_{01} КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА В ИЗГИБЕ КРЕСТООБРАЗНОГО ВОЛНОВОДА

Т. В. Макаров

Рассмотрена задача о собственном значении и собственной функции волны квази- H_{01} в изгибе крестообразного волновода. Получены компоненты поля и изменение постоянной распространения вследствие изгиба. Найдена также зависимость искажения поля волны от геометрии поперечного сечения, радиуса изгиба и длины волны возбуждающего колебания. Определено оптимальное сечение изогнутого волновода с точки зрения «чистоты» поля волны квази- H_{01} .

Применение изгиба крестообразного волновода для передачи волны H_{01} круглого волновода возможно в связи с тем, что на входе в изгиб волна H_{01} преобразуется в такой тип колебания крестообразного изогнутого волновода, структура поля которого напоминает структуру поля волны H_{01} [1]. Поле в изгибе похоже на суперпозицию пляризованных под прямым углом волн H_{20} и H_{02} прямоугольного волновода, поэтому будем называть его квази- $(H_{20} + H_{02})$ по аналогии с тем, как было принято в работе [2]. На выходе изгиба происходит обратное преобразование в волну H_{01} .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Рассмотрим крестообразный прямоугольный волновод, ось ξ которого изогнута по дуге окружности радиуса R , превышающего размер a (рис. 1). В этом случае удобно пользоваться декартовой системой координат в нормальном к ξ поперечном сечении ($\xi = 0$). Каждая точка внутри такого волновода будет однозначно определена координатами x , y и ξ , единичные направления вдоль которых образуют праввинтовую тройку. Решение данной задачи при условии, что стенки волновода являются идеально проводящими, заключается в определении собственного значения (постоянной распространения) волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ рассматриваемого изгиба, а также собственной функции изгиба.

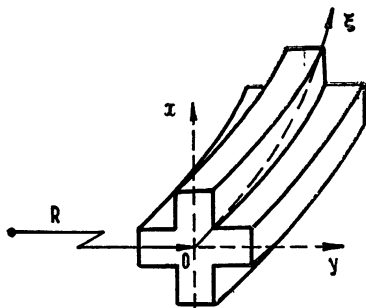


Рис. 1.

В работе [3] показано, что в криволинейном ортогональном пространстве (u_1, u_2, u_3) с метрикой

$$(ds)^2 = g_{11}(du_1)^2 + g_{22}(du_2)^2 + g_{33}(du_3)^2, \quad (1)$$

метрические коэффициенты Ламе g_{ii} , которой зависят лишь от двух координат u_1 и u_2 , электромагнитное поле может быть представлено в виде

$$E = e_3 \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \psi_u e^{ihu_3} + \frac{ih\nabla_{\perp}\psi_u - ik\sqrt{g_{33}}[e_3\nabla\psi_u]}{k^2g_{33} - h^2} e^{ihu_3}, \quad (2)$$

$$H = e_3 \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \tilde{\psi}_u e^{ihu_3} + \frac{ih\nabla_{\perp}\tilde{\psi}_u + ik\sqrt{g_{33}}[e_3\nabla\tilde{\psi}_u]}{k^2g_{33} - h^2} e^{ihu_3}.$$

Здесь e_3 — единичный базисный вектор вдоль координатной линии u_3 , в направлении которой происходит распространение электромагнитного колебания с постоянной распространения h ; $\psi_u, \tilde{\psi}_u$ — специальные скалярные функции, зависящие от поперечных координат u_1 и u_2 ; ∇_{\perp}, ∇ — двумерный и трехмерный операторы Гамильтона; k — волновое число в свободном пространстве.

Для однородных краевых условий

$$\psi_u|_L = 0, \quad \left. \frac{\partial\tilde{\psi}_u}{\partial n} \right|_L = 0 \quad (3)$$

на контуре L поперечного сечения волновода, где n — нормаль к этому контуру, получен стационарный функционал

$$J = \iint_{S_{\perp}} \left\{ \frac{\sqrt{g_{33}}(k^2 - h^2)}{k^2g_{33} - h^2} \left(\nabla_{\perp}^2\psi_u + \nabla_{\perp}^2\tilde{\psi}_u + \frac{2h}{k\sqrt{g_{33}}} e_3[\nabla_{\perp}\psi_u\nabla_{\perp}\tilde{\psi}] \right) - \right. \\ \left. - \frac{k^2 - h^2}{\sqrt{g_{33}}} (\psi_u^2 + \tilde{\psi}_u^2) \right\} dS_{\perp}, \quad (4)$$

где S_{\perp} — поперечное сечение волновода.

Удобство использования функционала (4) заключается в том, что краевые условия (3) совпадают с естественными краевыми условиями, что позволяет при применении прямых методов, например, метода Ритца, ослабить требования на функции, и они могут не удовлетворять условиям (3) [5].

Итак, задача сводится к определению постоянной распространения электромагнитного поля h в изгибе и собственной функции изгиба.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

На основании теоремы о разложении [4] всякая функция Ψ с непрерывным дифференциальным оператором, удовлетворяющая заданным однородным краевым условиям, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям U_n этого оператора:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n, \quad C_n = \int_{\Omega} \Psi U_n d\Omega, \quad (5)$$

Ω — область определения оператора.

Следовательно, колебания в изогнутом волноводе удобно представлять в форме распространяющихся с одинаковой фазовой скоростью типов волн регулярного (прямолинейного) волновода. Функции $\tilde{\psi}_u$ и ψ_u можно рассматривать соответственно как собственные функции квазимагнитной и квазиэлектрической волн волноводного изгиба, которые состоят из собственной функций той же природы волн регу-

лярного волновода и некоторого возмущения, подчиняющегося тому же краевому условию. Но так как поле изогнутого волновода является смешанным, то

$$\Psi = \psi_u + \tilde{\psi}_u = \sum_{i=1}^n (A_i \psi_i + \tilde{A}_i \tilde{\psi}_i), \quad (6)$$

где Ψ — собственная функция изогнутого волновода; $\psi_i, \tilde{\psi}_i$ — нормированные собственные функции соответственно электрической и магнитной волн регулярного волновода; A_i, \tilde{A}_i — неизвестные коэффициенты, характеризующие степень связи волн регулярного волновода в изгибе.

Будем искать решение (6) по методу Ритца [5]. Подставив ряды (6) в функционал (4), превратим его в функцию независимых переменных A_i и \tilde{A}_i :

$$J(A_i, \tilde{A}_i) = \iint_{S_{\perp}} \left\{ \frac{\sqrt{g_{33}}(k^2 - h^2)}{k^2 g_{33} - h^2} \left(\sum_{i,j=1}^n A_i A_j \nabla_{\perp} \psi_i \nabla_{\perp} \psi_j + \sum_{i,j=1}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \nabla_{\perp} \tilde{\psi}_i \nabla_{\perp} \tilde{\psi}_j + \frac{2h}{k \sqrt{g_{33}}} \sum_{i,j=1}^n A_i A_j \tilde{A}_i \tilde{A}_j e_3 [\nabla_{\perp} \psi_i \nabla_{\perp} \tilde{\psi}_j] \right) - \frac{k^2 - h^2}{\sqrt{g_{33}}} \sum_{i,j=1}^n (A_i A_j \psi_i \psi_j + \tilde{A}_i \tilde{A}_j \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_j) \right\} dS_{\perp}. \quad (7)$$

Выберем коэффициенты A_j и \tilde{A}_j так, чтобы функция (7) приняла минимальное значение, т. е. удовлетворила условиям

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{A}_j} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial A_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (8)$$

Система уравнений (8) — линейная однородная относительно неизвестных \tilde{A}_i и A_i . Следовательно, нетривиальное решение соответствует обращению в нуль детерминанта системы (8):

$$\begin{vmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{Q}_{11} & \tilde{P}_{21} & \tilde{Q}_{21} & \dots & \tilde{P}_{n1} & \tilde{Q}_{n1} \\ Q_{11} & P_{11} & Q_{21} & P_{21} & \dots & Q_{n1} & P_{n1} \\ \tilde{P}_{12} & \tilde{Q}_{12} & \tilde{P}_{22} & \tilde{Q}_{22} & \dots & \tilde{P}_{n2} & \tilde{Q}_{n2} \\ Q_{12} & P_{12} & Q_{22} & P_{22} & \dots & Q_{n2} & P_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{P}_{1n} & \tilde{Q}_{1n} & \tilde{P}_{2n} & \tilde{Q}_{2n} & \dots & \tilde{P}_{nn} & \tilde{Q}_{nn} \\ Q_{1n} & P_{1n} & Q_{2n} & P_{2n} & \dots & Q_{nn} & P_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{ij} \\ P_{ij} \end{pmatrix} = \iint_{S_{\perp}} \left\{ \frac{\sqrt{g_{33}}(k^2 - h^2)}{k^2 g_{33} - h^2} \nabla_{\perp} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \nabla_{\perp} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_j \\ \psi_j \end{pmatrix} - \frac{k^2 - h^2}{\sqrt{g_{33}}} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_j \\ \psi_j \end{pmatrix} \right\} dS_{\perp}; \quad (10a)$$

$$Q_{ij} = \tilde{Q}_{ij} = \iint_{S_{\perp}} \frac{2h(k^2 - h^2)}{k(k^2 g_{33} - h^2)} e_s [\nabla_{\perp} \psi_i \nabla_{\perp} \tilde{\psi}_j] dS_{\perp}. \quad (106)$$

Очевидно, (9) определяет постоянную распространения электромагнитного поля в изогнутом волноводе.

Если система (8) либо детерминант (9) уже построены и по тем или иным причинам желательно получить менее точное приближение, не содержащее некоторых координатных функций, то соответствующие значения h , а также коэффициентов \tilde{A}_i и A_i , можно найти с помощью усечения детерминанта (9), которое получается при вычеркивании строк и столбцов, соответствующих отброшенным координатным функциям.

Остановимся, более подробно на выборе координатных функций $\tilde{\psi}_i$ и ψ_i , от которого в значительной степени зависит сходимость метода. Известна связь волны H_{01} в слегка изогнутом круглом волноводе с волнами $H_{11}, H_{12}, H_{13}, \dots$ и особенно с волной E_{11} . Эти паразитные типы волн при плавном переходе круглого поперечного сечения волновода в крестообразное возбуждают в последнем свои аналоги волн, которые следует учитывать при изучении поля волны квази- H_{01} в изогнутом крестообразном волноводе.

Волна H_{01} волновода круглого поперечного сечения возбуждит при переходе в волновод крестообразного сечения поле, близкое к суперпозиции волн $(H_{20} + H_{02})$ прямоугольного волновода. Ожидается, что при изгибе такого крестообразного волновода по дуге окружности поле волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в нем не получит значительного возмущения. Поэтому, если нас интересует распространение симметричной волны H_{01} по изгибу крестообразного волновода, первой координатной функцией $\tilde{\psi}_1$ должна быть собственная функция волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ регулярного крестообразного волновода [2].

Волна $(H'_{11} + H''_{11})$ круглого волновода возбуждит в крестообразном волноводе поле, близкое к суперпозиции волн квази- $(H_{10} + H_{01})$, которое имеет наименьшее собственное значение, а при параметре $\sigma = b/2a$, равном $\sim 0,25$, вырождается в волну квази- $(H_{20} + H_{02})$ [2].

Следовательно, в качестве второй координатной функции $\tilde{\psi}_2$ следует выбрать собственную функцию волны квази- $(H_{10} + H_{01})$ регулярного крестообразного волновода.

Две вырожденные волны H_{12} круглого волновода, одна с четной, другая с нечетной азимутальной зависимостью, возбуждают в крестообразном волноводе картину поля, похожую на картину поля волны квази- $(H_{30} + H_{03})$ [2]. Такую аналогию можно провести и для большего числа магнитных волн.

Вырожденная в волну H_{01} волна $(E'_{11} + E''_{11})$ круглого волновода возбуждит в крестообразном волноводе волну, близкую к волне квази- $(E_{12} + E_{21})$ [2], собственную функцию которой следует взять в качестве первой координатной функции ψ_1 .

Симметричная волна E_{01} круглого волновода возбуждит в крестообразном волноводе волну квази- E_{11} , имеющую наименьшее собственное значение среди волн такого типа [2].

Выберем собственную функцию волны E_{01} в качестве второй координатной функции ψ_2 . Итак, проведем вычисления, ограничившись координатными функциями $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \psi_1$ и ψ_2 , каждая из которых означает нормированную собственную функцию регулярного крестообразного волно-

вода соответственно волн квази- $(H_{20} + H_{02})$, $-(H_{10} + H_{01})$, $-(E_{12} + E_{21})$ и $-E_{11}$, полученных в работе [2]. Приравнивая нулю минор четвертого порядка и учитывая, что при выбранных координатных функциях

$$Q_{11} = Q_{12} = Q_{22} = \tilde{Q}_{11} = \tilde{Q}_{21} = \tilde{Q}_{22} = 0,$$

найдем следующее уравнение для постоянной распространения волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе:

$$\tilde{P}_{11}\tilde{Q}_{12}^2 P_{22} - (\tilde{P}_{11}\tilde{P}_{22} - \tilde{P}_{12}^2)(P_{11}P_{22} - P_{12}^2) = 0. \quad (11)$$

Первое приближение к постоянной распространения определяется из равенства нулю минора первого порядка:

$$\tilde{P}_{11} = 0. \quad (12)$$

Для определения в явном виде \tilde{h}_1 — постоянной распространения волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе — преобразуем (полагая $R \gg y$) в первом члене выражения (10а), где $\sqrt{g_{33}} = 1 + y/R$, множитель

$$\begin{aligned} \frac{k^2 - \tilde{h}_1^2}{k^2 \left(1 + \frac{y}{R}\right)^2 - \tilde{h}_1^2} &= \frac{1}{1 + \frac{ky}{R(k + \tilde{h}_1)}} \frac{1}{1 + \frac{ky}{R(k - \tilde{h}_1)}} \simeq \\ &\simeq 1 - \frac{2k^2 y}{R(k^2 - \tilde{h}_1^2)} + \frac{k^2 y^2}{R^2(k^2 - \tilde{h}_1^2)}, \end{aligned}$$

а во втором члене запишем

$$1 \left| \left(1 + \frac{y}{R}\right) \simeq 1. \right.$$

Тогда уравнение (12) можно представить в виде

$$F_3 R^2 K_1^4 - F_1 R^2 K_1^2 + k^2 F_2 = 0, \quad (12a)$$

где $K_1^2 = k^2 - \tilde{h}_1^2$ — собственное значение волны квази- $(H_{20} - H_{02})$ изогнутого волновода,

$$F_1 = \iint_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} \tilde{\psi}_1)^2 dS_{\perp} = 2a_1^2 A_{11} + 4a_1 a_3 A_{13} + 2a_3^2 A_{33},$$

$$\begin{aligned} F_2 = \iint_{S_{\perp}} y^2 (\nabla_{\perp} \tilde{\psi}_1)^2 dS_{\perp} &= a^2 \left\langle \frac{a_1^2}{3} A_{11} + \frac{2a_1 a_3}{3} A_{13} + \frac{a_3^2}{3} A_{33} + \right. \\ &+ 2a_1^2 \pi^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1 - \sigma) (1 - \sigma^3) - \frac{\sigma}{2\pi^2} - \frac{\sigma(1 - \sigma)}{2\pi^2} \cos 2\pi\sigma - \right. \\ &- (1 - \sigma) \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^3} \right) \sin 2\pi\sigma \left. \right] + 8a_1 a_3 \left\{ \frac{16}{9} \sigma - (1 - \sigma) \left[-2\sigma \cos \pi\sigma + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2}{9} \sigma \cos 3\pi\sigma - \left(\pi\sigma - \frac{2}{\pi} \right) \sin \pi\sigma + \left(\frac{\pi\sigma}{3} - \frac{2}{27\pi} \right) \sin 3\pi\sigma \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ 8a_3^2 \pi^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1 - \sigma)(1 - \sigma^3) - \frac{\sigma}{8\pi^2} - \frac{\sigma(1 - \sigma)}{8\pi^2} \cos 4\pi\sigma - \right. \\ \left. - (1 - \sigma) \left(\frac{\sigma^2}{4\pi} - \frac{1}{32\pi^3} \right) \sin 4\pi\sigma \right] \Bigg\rangle,$$

$$F_3 = \iint_{S_{\perp}} \tilde{\psi}_1^2 dS_{\perp} = 1,$$

$\sigma = \frac{b}{2a}$, $a_l(\sigma)$ определены в работе [2],

$$A_{11} = 2\pi^2 - 2\pi^2(1 - \sigma)^2 - \pi(1 - \sigma) \sin 2\pi\sigma,$$

$$A_{13} = -\frac{4}{3} \pi(1 - \sigma) (\sin 3\pi\sigma - 3 \sin \pi\sigma),$$

$$A_{33} = 8\pi^2 - 8\pi^2(1 - \sigma)^2 - 2\pi(1 - \sigma) \sin 4\pi\sigma.$$

Из уравнения (12а) следует, что

$$K_1^2 = \frac{F_1 R^2 + \sqrt{F_1^2 R^4 - 4F_2 F_3 k^2 R^2}}{2F_3 R^2},$$

но так как $F_1 F_3^{-1} = \tilde{x}_{01}^2$ — квадрат собственного значения волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ регулярного крестообразного волновода [5], то

$$K_1^2 = \frac{\tilde{x}_{01}^2}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{x}_{01}^4}{4} - \frac{k^2 F_2}{R^2}},$$

а изменение постоянной распространения равно

$$\delta(\tilde{h}_1)^2 = \tilde{x}_{01}^2 - K_1^2 = \frac{\tilde{x}_{01}^2}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{x}_{01}^4}{4} - \frac{k^2 F_2}{R^2}}. \quad (13)$$

Расчет показывает, что значения постоянной распространения, полученные из уравнения (11), близки к найденным из (12), особенно при значениях параметра σ вблизи $\sigma = 0,3$. Это говорит о хорошей сходимости метода Ритца при решении данной вариационной задачи. На рис. 2 представлена зависимость $\delta(\tilde{h}_1)^2$ от σ при $2a = 5$ см, различных значениях длины волны λ и радиуса кривизны R .

Определив постоянную распространения \tilde{h}_1 и подставив ее в (8), получим однородную линейную систему уравнений с неизвестными \tilde{A}_i и A_i , которая в данном случае запишется в виде

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 \tilde{P}_{11} + \tilde{A}_2 \tilde{P}_{21} = 0, \\ A_1 P_{11} + \tilde{A}_2 \tilde{Q}_{12} + A_2 P_{12} = 0, \\ \tilde{A}_1 \tilde{P}_{12} + A_1 \tilde{Q}_{12} + \tilde{A}_2 \tilde{P}_{22} = 0, \\ A_1 P_{12} + A_2 P_{22} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

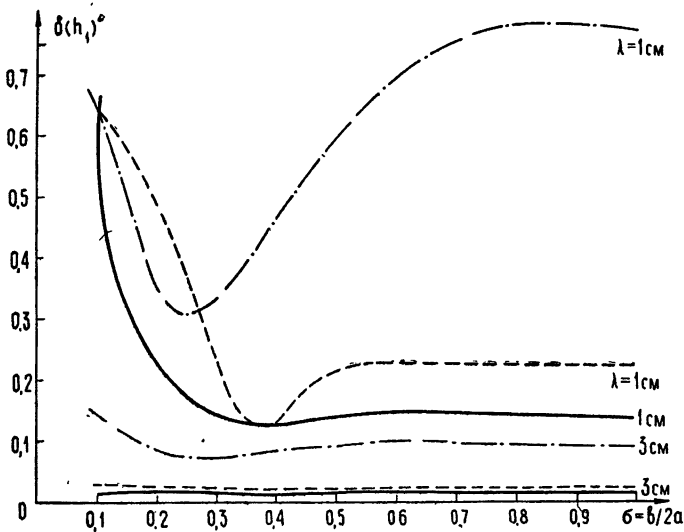


Рис. 2. Изменение постоянной распространения волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ вследствие изгиба крестообразного волновода; $\lambda = 1$ см; — $R = 25$ см; --- $R = 20$ см; - · - · - $R = 10$ см; $2a = 5$ см; $\lambda = 1$; $b = b/2a$.

Решив систему (14), собственную функцию волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе крестообразного волновода можно записать в виде

$$\tilde{\Psi}_1 \simeq \tilde{A}_1 \tilde{\psi}_1 + \tilde{A}_2 \tilde{\psi}_2 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2. \quad (15)$$

Решением данной системы уравнений будет также $\mu \tilde{\Psi}_1$, где μ — некоторый нормирующий численный множитель, удовлетворяющий условию

$$\iint_{S_{\perp}} (\mu \tilde{\Psi})^2 dS_{\perp} = 1. \quad (16)$$

Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что коэффициенты \tilde{A}_i и A_i в (15) уже нормированы в соответствии с (16).

На рис. 3 представлена зависимость коэффициентов \tilde{A}_i и A_i нормированной собственной функции изгиба (15) от параметра σ ($2a = 5$ см) при $R = 50; 30; 10$ см и $\lambda = 3; 2; 1$ см. Цифры над кривыми указывают, какой длине волны λ они соответствуют. Кривая для \tilde{A}_1 при радиусах изгиба $R = 50; 30$ см незначительно отклоняется от единицы, поэтому на рис. 3 она отсутствует.

Наблюдающееся некоторое увеличение паразитных составляющих в области $\sigma \simeq 0,7$ объясняется наличием вырождения волн квази- $(H_{20} + H_{02})$ и квази- $(H_{21} + H_{12})$ [2]. Наиболее сильное возмущение поля квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе происходит в области $\sigma \simeq 0,5$ при большой кривизне. Это объясняется наличием вырождения между волнами квази- $(H_{20} + H_{02})$ и квази- E_{11} в крестообразных волноводах с большой кривизной. Кривая собственного значения квази- E_{11} [2] в изгибе при этом значительно опускается, пересекаясь с кривой собственного значения квази- $(H_{20} + H_{02})$ примерно при $\sigma \simeq 0,5$. В области $\sigma \simeq 0,2$ снова имеет место вырождение волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ и волн

квази- $(H_{10} + H_{01})$ и $-H_{11}$ в регулярном крестообразном волноводе. Этим объясняется некоторое увеличение паразитных составляющих в области $\sigma \approx 0,2$ и значительное увеличение потерь за счет преобразования волн, наблюдавшееся в эксперименте, описанном в работе [1].

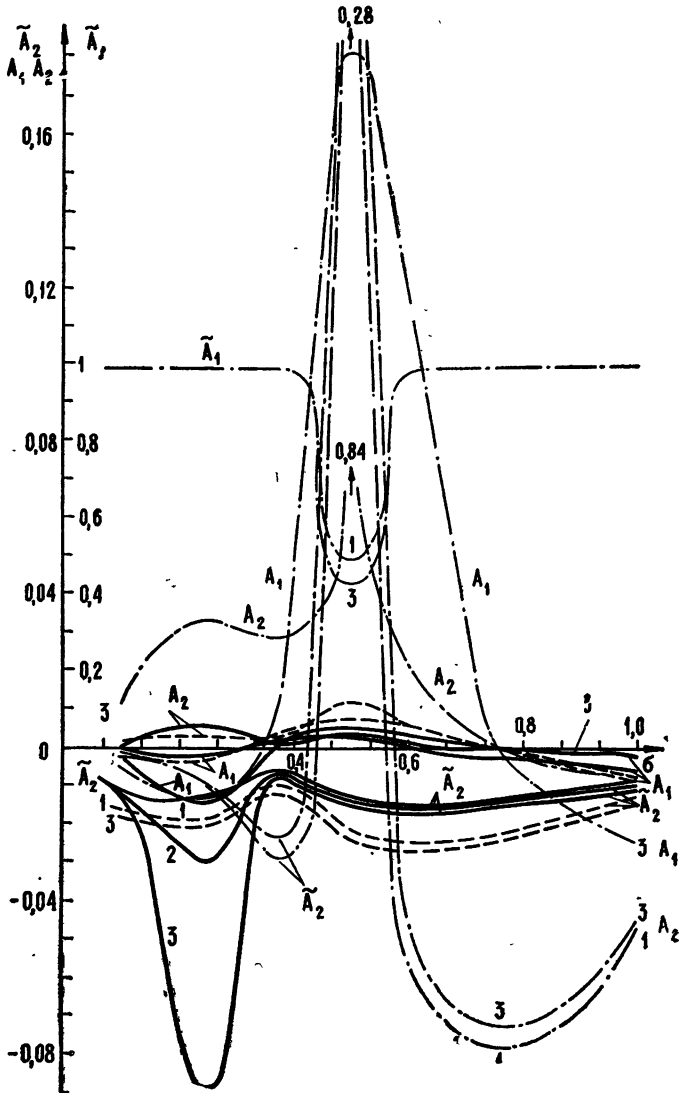


Рис. 3. Волна квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе крестообразного волновода;

— — $R=50$ см, - - - - $R=30$ см, - · - · - $R=10$ см.

Таким образом, с точки зрения «чистоты» поля волны H_{01} в изгибе крестообразного волновода оптимальным является сечение $\sigma \approx 0,3$, при котором распределение поля приближается к распределению поля волны H_{01} в круглом волноводе, близки их собственные значения и снято уже вырождение волн квази- $(H_{20} + H_{02})$, $-(H_{10} + H_{01})$ и $-H_{11}$ [2].

При значении $\sigma \approx 0,3$ собственная функция волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе мало отличается от собственной функции этой волны в регулярном волноводе. Следовательно, распределение поля волны квази-

$(H_{20} + H_{02})$ в поперечном сечении в изгибе будет близко к распределению поля этой волны в поперечном сечении регулярного крестообразного волновода. Поэтому затухание волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в изгибе крестообразного волновода вследствие потерь в стенках можно рассчитывать при $\sigma \simeq 0,3$ по полученным в работе [6] формулам либо определять его по приведенным там же рисункам. Для этого необходимо найти эквивалентную длину волновода в изгибе l_3 , определяемую выражением

$$l_3 = R\varphi,$$

где R — радиус изгиба оси волновода, φ — угол изгиба оси волновода в радианах.

Результаты расчета затухания в децибелах волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в 90-градусном изгибе крестообразного волновода $\sigma = 0,3$ при $2a = 5$ см в зависимости от R и длины волны λ приведены в табл. 1.

Таблица 1

λ (см) \ / \ R (см)	0,8	2,0	3,0	Материал
15	0,020	0,014	0,011	медь $\sigma_1 = 5 \cdot 10^6$ (ом ⁻¹ · см ⁻¹)
20	0,028	0,019	0,015	
30	0,041	0,028	0,023	
50	0,069	0,047	0,038	

Эти результаты расчета не учитывают затухание волны квази- $(H_{20} + H_{02})$ в плавных переходах, расположенных по концам изгиба и осуществляющих преобразование волны, распространяющейся по изгибу, в волну круглого волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Lanciani, Trans. IRE, MTT-2, 45 (1954).
2. Н. А. Кузьмин, Т. В. Макаров, Радиотехника и электроника, 6, № 12, 1989 (1961).
3. N. A. Kuzmin, Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen, 1962.
4. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, Гостехиздат, М., 1933.
5. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
6. Т. В. Макаров, Радиотехника и электроника, 7, № 1, 99 (1962).

Одесский электротехнический институт связи
им. А. С. Попова

Поступила в редакцию
29 октября 1968 г.

PROPAGATION OF H_{01} WAVE ANALOGUE IN THE BEND OF A CROSS-SHAPED WAVEGUIDE

T. V. Makarov

The problem on the eigenvalue and eigenfunction of quasi- H_{01} wave in the bend of cross-shaped waveguide is considered. There are obtained the components of the field and the addition to the propagation constant due to bending. There are also obtained the dependences of the wave field distortion on the geometry of the transverse section, the radius of bending and the wavelength of excitation. The optimal section of the bended waveguide is determined from the viewpoint of the „purity“ of the quasi- H_{01} wave field. Some numerical results are presented.

УДК 621.372.853 2/3

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Э. С. Масунов

Исследовано поле излучения заряженной частицы, движущейся с переменной скоростью и пролетающей в бесконечном волноводе конечный путь L . Показано, что при $V > c/\sqrt{\epsilon}$ поле излучения состоит из волн черенковского типа, а также «быстрых» и «медленных» волн. Рассмотрена картина распространения незатухающего во времени поля с учетом всех типов волн.

Вопрос о поле излучения заряженных частиц в волноводе рассматривался сравнительно давно и многими авторами. (Подробный список литературы см., например, в [1].) Обычно в большинстве работ скорость движения частицы считалась постоянной, а пройденный частицей путь — бесконечным. Между тем, в случае, если длина пути ограничена или на пути движения свойства среды резко меняются, изменяется и картина поля излучения [2]. Так, при наличии торцевой стенки в волноводе будет существовать не только передний, но и задний фронт волны [3].

В настоящей работе обсуждается вопрос о распространении поля излучения заряда, движущегося с переменной скоростью и пролетающего конечный путь L в цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками, который полностью заполнен диэлектриком*. Нас будет интересовать случай, когда скорость частицы $V > c/\sqrt{\epsilon}$. Предположим также, что заряженная частица движется параллельно оси волновода и пройденный частицей путь $L \gg a$, где a — радиус волновода. В цилиндрической системе координат с осью z , направленной вдоль оси волновода, плотность тока, создаваемого точечной заряженной частицей, имеет вид

$$j = qV(t) \delta(z - z_q) \delta(\rho - \rho_0) \Pi(t) n_z,$$

где $z_q(t)$ и ρ_0 — продольная и поперечная координаты частицы,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 < t < T) \\ 0 & (t > T) \end{cases},$$

T — время прохождения зарядом пути L . Для определенности положим $z_q(t = 0) = 0$.

Поле, возбуждаемое в волноводе, будем искать в виде

$$E(\rho, z, t) = \int_{-\infty + i\delta}^{\infty + i\delta} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx E(\rho, \omega, x) e^{ixz - i\omega t}.$$

* Ниже зависимость ϵ от частоты не учитывается.

Разлагая $E(\rho, \omega, x)$ по полной системе собственных волн гладкого цилиндрического волновода [4], можем получить, например, для продольной компоненты электрического поля следующее выражение:

$$E_z(\rho, \omega, x) = 4\pi i \sum_s \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \frac{\varepsilon\omega^2/c^2 - x^2}{(x^2 - h_s^2)\omega\varepsilon} j(\omega, x),$$

где $h_s = \sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2 - g_s^2}$ — постоянная распространения s -й волны в положительном направлении оси z ($\text{Im } h_s > 0$), $\Phi_s(\rho)$ — собственные функции уравнения $\Delta\Phi_s + g_s^2\Phi_s = 0$ при нулевых граничных условиях (Φ_s нормированы на единицу по поперечному сечению волновода),

$$j(\omega, x) = \frac{q}{(2\pi)^2} \int_0^T dt_1 V(t_1) \exp[-ixz_q(t_1) + i\omega t_1].$$

Путь, пройденный частицей за время t , удобно представить в виде $z_q(t) = vt - \varphi(t)$, где v — средняя скорость частицы на пути L , $\varphi(t)$ — некоторая функция времени, определенная в промежутке $[0, T]$ и удовлетворяющая условию $\varphi=0$ при $t=0, T$. При этом поле $E_z(\rho, \omega, x)$ можно записать как*

$$E(\rho, \omega, x) = E_0(\rho, \omega, x) + E_1(\rho, \omega, x). \quad (1)$$

Здесь мы выделили слагаемое E_0 , которое не зависит от φ и которое, как будет показано ниже, представляет собой совокупность волн черенковского типа, имеющих фазовую скорость $v_\varphi = v$. Второе же слагаемое зависит от вида функции $\varphi(t)$ и представляет собой совокупность волн с $v_\varphi \neq v$.

Найдем вначале поле $E(\rho, z, t)$ в моменты времени $t < T$. Первое слагаемое в (1) имеет вид

$$E_0 = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_s \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \frac{\varepsilon\omega^2/c^2 - x^2}{(x^2 - h_s^2)(x - \omega/v)\varepsilon} e^{ixz - i\omega t}. \quad (2)$$

Во втором слагаемом для простоты будем рассматривать совокупность только таких волн, для которых $|x\varphi| \ll 1$. Следует подчеркнуть, что полученная при этом картина распространения поля носит достаточно общий характер и будет справедлива для всех остальных волн. Поле E_1 можно записать тогда в виде

$$E_1 = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{s, k} \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \varphi_k \frac{(\varepsilon\omega^2/c^2 - x^2) \nu_k}{(x^2 - h_s^2)[(\omega - xv)^2 - \nu_k^2]} e^{ixz - i\omega t}. \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались тем, что функцию $\varphi(t)$ в промежутке $[0, T]$ можно представить как

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \nu_k t. \quad (4)$$

Подынтегральные функции в (2) и (3) по переменной x содержат только полюса, поэтому интегрирование по x проводится довольно

* Индекс z у продольной составляющей электрического поля в дальнейшем для краткости будем опускать.

просто. Полученные в результате этого выражения остается проинтегрировать по ω . Заметим, что подынтегральные функции теперь помимо полюсов в комплексной плоскости ω будут содержать еще и точки ветвления. Как показано в Приложении, величины интегралов подобного типа состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое определяется полюсами подынтегральной функции, а второе — убывающим со временем вкладом от разрезов. Если нас интересует только неубывающее со временем поле, то, используя формулы (П.5) и (П.6), получим окончательно

$$E_0 = \sum_s E_s^{(0)}, \quad E_1 = \sum_{s, k} (E_{sk}^{(1)} + E_{sk}^{(2)}); \quad (5)$$

$$E_s^{(0)} = \begin{cases} -\frac{4\pi q}{\epsilon} \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \cos \omega_{s0} \left(\frac{z}{v} - t \right) & \text{при } \omega^{(0)} t < z < vt \\ 0 & \text{при остальных } z \end{cases}; \quad (5a)$$

$$E_{sk}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2\pi q v}{\epsilon(\epsilon\beta^2 - 1)} g_s^2 \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \frac{\varphi_k}{\Omega_{sk}} \cos \left(\frac{\omega_{sk}^{(1)} - \nu_k}{v} z - \omega_{sk}^{(1)} t \right) & \text{при } \omega_{sk}^{(1)} t < z < vt \\ 0 & \text{при остальных } z \end{cases}; \quad (5b)$$

$$E_{sk}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{2\pi q v}{\epsilon(\epsilon\beta^2 - 1)} g_s^2 \Phi_s(\rho_0) \Phi_s(\rho) \frac{\varphi_k}{\Omega_{sk}} \cos \left(\frac{\omega_{sk}^{(2)} - \nu_k}{v} z - \omega_{sk}^{(2)} t \right) & \text{при } \omega_{sk}^{(2)} t < z < vt \\ 0 & \text{при остальных } z \end{cases}; \quad (5b)$$

Здесь $\Omega_{sk} = \frac{\beta \sqrt{\epsilon \nu_k^2 + g_s^2 v^2 (\epsilon - \beta^{-2})}}{\epsilon\beta^2 - 1}$, $\omega_{s0} = \frac{g_s v}{\epsilon\beta^2 - 1}$, $\omega_{sk}^{(1,2)} = -\frac{\nu_k}{\epsilon\beta^2 - 1} \pm \pm \Omega_{sk}$, а $\omega_{sk}^{(0)} = \frac{c^2}{\epsilon v}$, $\omega_{sk}^{(1)} = \frac{c\alpha_{sk}^{(1)}}{\sqrt{\epsilon}}$ и $\omega_{sk}^{(2)} = c\alpha_{sk}^{(2)} / \sqrt{\epsilon}$ — групповые скорости соответственно для волн $E_s^{(0)}$, $E_{sk}^{(1)}$ и $E_{sk}^{(2)}$ (величины $\alpha_{sk}^{(1,2)}$ даны в Приложении).

Если в выражении (5a) положить $\rho_0 = 0$ и сравнить результат с тем, что получено в работе [3], то можно прийти к заключению, что слагаемое E_0 совпадает с полем излучения Вавилова—Черенкова для заряда, движущегося со скоростью v в полубесконечном волноводе.

До сих пор мы рассматривали поле, ограничиваясь случаем $t < T$. Легко показать, что поле $E(\rho, z, t)$ при $t > T$ будет состоять из той же совокупности волн $E_s^{(0)}$, $E_{sk}^{(1)}$ и $E_{sk}^{(2)}$, но эти волны будут уже отличны от нуля в областях $0 < z - \omega^{(0)} t < L - \omega^{(0)} T$ ($E_s^{(0)}$) и $0 < z - -\omega_{sk}^{(1,2)} t < L - \omega_{sk}^{(1,2)} T$ ($E_{sk}^{(1)}$ и $E_{sk}^{(2)}$).

Таким образом, суммируя полученный выше результат, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае поле излучения заряженной частицы $E(\rho, z, t)$ без учета убывающих со временем слагаемых состоит из волн черенковского типа $E_s^{(0)}$, а также «быстрых» $E_{sk}^{(1)}$ и «медленных» $E_{sk}^{(2)}$ волн. Причем групповая скорость волны $E_{sk}^{(1)} - \omega_{sk}^{(1)} < \omega^{(0)}$, а групповая скорость волны $E_{sk}^{(2)} - \omega_{sk}^{(2)} > \omega^{(0)}$, где $\omega^{(0)}$ — групповая скорость волны черенковского типа. При $t < T$, каждая из этих волн имеет передний фронт, движущийся со скоростью v , и задний фронт, скорость движения которого определяется групповой скоростью соответствующей волны. В противоположном случае $t > T$

скорость движения переднего и заднего фронтов определяется групповой скоростью волны.

Из выражения (5б) также следует, что, если в разложении (4) будут существенны гармоники с $v_k > g_s c / \sqrt{\epsilon}$, волна $E_{sk}^{(1)}$ будет иметь отрицательную групповую скорость. Это означает, что незатухающее по времени поле излучения может распространяться в направлении, противоположном движению частицы. Задняя граница области, где это поле может быть еще отлично от нуля, определяется условием $z > -(c/\sqrt{\epsilon})t$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

После интегрирования по x в выражениях (2) и (3), для нахождения полей $E_0(\rho, z, t)$ и $E_1(\rho, z, t)$ необходимо вычислить интеграл

$$I_{msk}^{\pm} = \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\omega \frac{\exp(\pm ih_s z - i\omega t)}{(i\omega)^m \left(h_s \mp \frac{\omega - \omega_k}{v} \right) h_s \epsilon} \quad (П.1)$$

Здесь мы по определению ввели $\omega_{\pm k} = \pm v_k$, так что индекс k в (П.1) принимает как положительные, так и отрицательные значения. В случае (2) $m = 1$, $\omega_k = 0$, а в случае (3) $m = 0$, $\omega_k \neq 0$.

Так как нас интересует только поле излучения, то вклад в интеграл, который дает полюс подынтегральной функции вблизи начала координат, где $\omega = 0$, мы можем не учитывать. В силу этого вычисление (П.1) для $m = 1$ аналогично вычислению этого же интеграла для $m = 0$.

Покажем, например, как можно вычислить I_{0sk}^{\pm} . Для удобства введем следующие обозначения: $\beta_1 = v\sqrt{\epsilon}/c$, $\omega_{cs} = g_s v/\beta_1$, $\alpha = z\sqrt{\epsilon}|t$. Тогда (П.1) можно записать в виде

$$I_{0sk}^{\pm} = \frac{\beta_1 c^2}{\epsilon^2} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\omega \frac{\exp[-i(\omega \mp \alpha\sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2})t]}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2} [\beta_1 \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2} \mp (\omega - \omega_k)]} \quad (П.2)$$

Помимо полюсов подынтегральная функция в (П.2) имеет точки ветвления. Так как на контуре интегрирования $\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2} > 0$, то разрезы удобно провести из точек ветвления $\omega = \pm \omega_{cs}$ по линии $\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2} = 0$. В этом случае на всем листе, где лежит контур интегрирования, $\text{Im} \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2} > 0$. Выше контура интегрирования подынтегральная функция в (П.2) не имеет особых точек. Отсюда следует, что интеграл I_{0sk}^+ может быть отличным от нуля только при $0 < \alpha < 1$, а I_{0sk}^- — при $-1 < \alpha < 0$.

Аналогично тому, как это было сделано в работе [3], введем вместо ω новую переменную $u = \omega - |\alpha| \sqrt{\omega^2 - \omega_{cs}^2}$. Получим

$$I_{0sk}^{\pm} = \frac{\beta_1 c^2}{\epsilon^2} \int_{C_u} du f^{\pm}(u) e^{-iut}, \quad (П.3)$$

где

$$f^{\pm}(u) = \frac{1 - \alpha^2}{\sqrt{u^2 - u_{cs}^2} [(\beta_1 - \alpha)\sqrt{u^2 - u_{cs}^2} \mp (1 - \beta_1\alpha)u \pm (1 - \alpha^2)\omega_k]},$$

$$u_{cs}^2 = (1 - \alpha^2)\omega_{cs}^2,$$

а C_u — новый контур интегрирования, показанный на рис. 1.

Деформируем контур C_u в C'_u , после чего линии разрезов проведем параллельно мнимой оси вниз (см. рис. 2). В дальнейшем, при выбранной системе разрезов, нас будет интересовать тот лист, на котором находится контур интегрирования C'_u . Для краткости мы будем

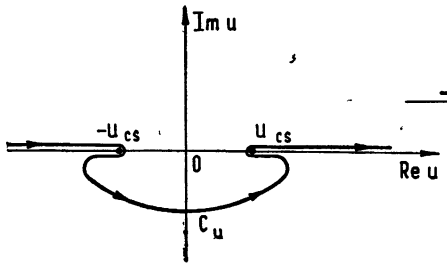


Рис. 1.

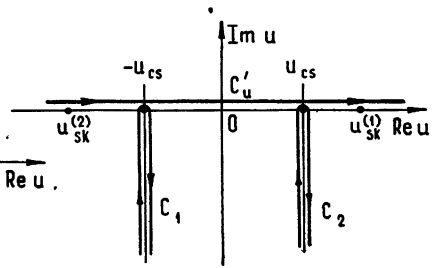


Рис. 2.

называть его первым. Замыкая контур интегрирования C'_u в нижней полуплоскости первого листа полуокружностью бесконечно большого радиуса с учетом существования полюсов и разрезов, получим

$$\frac{\varepsilon^2}{\beta_1 c^2} I_{0sk}^\pm = -2\pi i \sum_{p=1}^2 [\text{res } f^\pm(u) e^{-iut}]_{u=u_{sk}^{(p)}} + \int_{C_1} du f^\pm(u) e^{-iut} + \int_{C_2} du f^\pm(u) e^{-iut}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь $u_{sk}^{(1,2)} = -\frac{1 - \beta_1 \alpha}{\beta_1^2 - 1} \omega_k \pm \left(1 - \frac{\alpha}{\beta_1}\right) \Omega_{sk}$ — полюса подынтегральной функции $f^\pm(u)$, лежащие на первом листе, C_1 и C_2 — контуры интегрирования вдоль линии разрезов.

Найдем вклад от полюсов в интеграл I_{0sk}^+ . Прежде всего заметим, что не для всех значений $0 < \alpha < 1$ при фиксированном k полюса лежат на первом листе и, следовательно,

первое слагаемое в (П.4) отлично от нуля. Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим рис. 3. На рисунке показаны траектории движения точки ветвления и полюсов, лежащие в правой полуплоскости u , при изменении α от 1 до 0. Согласно (П.3) и (П.4), точка ветвления движется по окружности, а траекториями движения полюсов при различных значениях $\mu_{sk} = \omega_k / \omega_{cs}$ являются прямые, причем каждая прямая имеет точку касания с окружностью. (На рисунке изображены только некоторые из траекторий, соответствующие шести разным значениям μ_{sk} .) Прямые имеют отри-

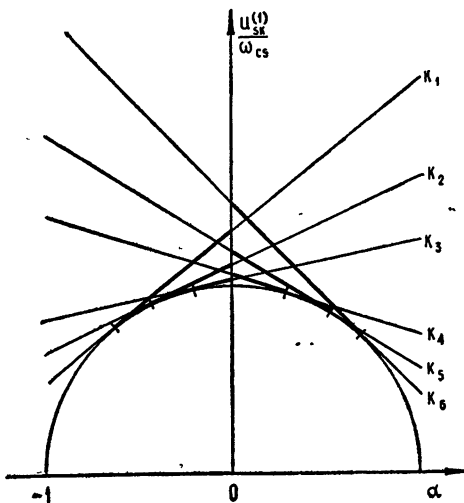


Рис. 3.

пательный тангенс угла наклона к оси α для тех k , при которых $\omega_k < \omega_{cs}$, и положительный тангенс угла наклона, когда $\omega_k > \omega_{cs}$. При $\alpha = 1$ для всех значений k полюса лежат на втором листе.

С уменьшением α , как видно из рисунка, полюса начинают сближаться с точкой ветвления. При этом полюса, для которых $\omega_k < \omega_{cs}$, сталкиваются с точкой ветвления и выходят на первый лист. При каждом заданном k столкновение происходит при $\alpha = \alpha_{sk}^{(1)} \equiv \beta_1 - \mu_{sk} \sqrt{\beta_1^2 - 1 + \mu_{sk}^2} / (\beta_1^2 + \mu_{sk}^2)$. Все же остальные полюса при уменьшении α до нуля продолжают оставаться на втором листе. Точно так же можно рассмотреть полюса и точку ветвления, лежащие в левой полуплоскости. (На рис. 3 траектории их движения не показаны.) В этом случае полюса, для которых $\omega_k > -\omega_{cs}$, при $\alpha = \alpha_{sk}^{(2)} \equiv \beta_1 \pm \mu_{sk} \sqrt{\beta_1^2 - 1 + \mu_{sk}^2} / (\beta_1^2 + \mu_{sk}^2)$ выходят на первый лист, в то время как все остальные полюса продолжают оставаться на втором листе. Аналогично вычисляется вклад членов, имеющих полюса, в интеграл I_{0sk}^- .

Интегралы по разрезам C_1 и C_2 в (П.4) точно вычислить довольно трудно. Однако при больших значениях t ($t \gg a \sqrt{\epsilon}/c$) можно найти их асимптотическое значение (см. [3]). Как показано в работе [3], в общем случае интегралы по разрезам будут давать убывающий по времени вклад. Поэтому без учета убывающих по времени членов интеграл I_{0sk}^\pm можно записать в виде

$$I_{0sk}^\pm = 2\pi i \frac{\beta_1^2 c^2}{\epsilon^2 (\beta_1^2 - 1) \Omega_{sk}} \left[\exp(-iu_{sk}^{(2)} t) \eta(\pm \omega_{cs} \pm \omega_k) \times \right. \\ \left. \times \eta(\pm \alpha_{sk}^{(2)} \mp \alpha) - \exp(-iu_{sk}^{(1)} t) \eta(\pm \omega_{cs} \mp \omega_k) \eta(\pm \alpha_{sk}^{(1)} \mp \alpha) \right], \quad (\text{П.5})$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Как было сказано вначале, нахождение I_{1sk}^\pm полностью совпадает с только что проделанными расчетами. В результате получим

$$I_{1s0}^+ = -\frac{4\pi}{g_s^2 \epsilon} \cos \omega_{0s} \left(\frac{z}{v} - t \right) \eta \left(\frac{1}{\beta_1} - \alpha \right), \quad (\text{П.6})$$

$$I_{1s0}^- = 0.$$

В этих выражениях мы, как и раньше, опускаем слагаемые, убывающие по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, УФН, 75, № 2, 295 (1961)
2. К. А. Барсуков, ЖЭТФ, 37, № 4, 1106 (1959)
3. Э. А. Бурштейн, Г. В. Воскресенский, ЖТФ, 33, № 1, 34 (1963).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

RADIATION OF A CHARGED PARTICLE IN A WAVEGUIDE WITH
DIELECTRIC FILLING*E. S. Masunov*

The radiation field of a charged particle moving with variable velocity and transiting the finite length L in an infinite waveguide is investigated. It is shown that at $V > c/\sqrt{\varepsilon}$ the radiation field consists of Čerenkov type waves and „rapid“ and „slow“ waves. A pattern of propagation of time-undamped field is considered with all types of waves taken into account.

УДК 538.56

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ИОНИЗАЦИИ ВОЗДУХА ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Ю. В. Гурон, Ю. А. Медведев

Найдено возмущение земного электрического поля в воздухе, ионизированном источником гамма-излучения.

Рассмотрим возмущение электрического поля Земли в воздухе, ионизированном радиоактивным источником. Известен ряд задач о поляризации проводящих тел заданной формы во внешнем поле. Специфика рассматриваемого случая заключается в том, что проводящая ионизированная область не имеет четко выраженной границы.

Можно убедиться, что электростатическая задача об источнике, находящемся во внешнем однородном поле, создающем проводимость

$$\sigma(r) \simeq \frac{e^{-\mu r}}{r^2},$$

при условии обращения электрического поля в нуль в начале координат (совмещенном с источником) имеет лишь нулевые решения—сколь угодно малой проводимости достаточно, чтобы всюду скомпенсировать внешнее поле.

Поэтому при постановке задачи следует учесть, что воздух обладает собственной конечной проводимостью σ_0 и возмущение земного поля существенно лишь там, где проводимость, создаваемая источником, превосходит величину σ_0 . Источник считаем стационарным. Предполагаем, что размер возмущенной области мал по сравнению с длинами, характеризующими изменение земного поля и естественной проводимости воздуха.

В этом случае задача сводится к определению поля в области с проводимостью

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \alpha \frac{e^{-\mu r}}{r^2} \quad (1)$$

при условии, что на бесконечности электрическое поле однородно (E_0). (Мы отвлекаемся от природы ЭДС, поддерживающих поле E_0 в воздухе с проводимостью σ_0).

В окрестности источника, очевидно, существуют электрическое E и магнитное H поля, определяемые уравнениями

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} \sigma(r) E, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} E = 0.$$

Потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla \varphi) = 0. \quad (3)$$

На больших расстояниях от источника потенциал имеет вид

$$\varphi = - (E_0 r).$$

Выберем ось z вдоль направления вектора E_0 . Считаем, что источник находится в начале координат. Проводимость σ зависит только от расстояния до источника r , поэтому, очевидно, решение уравнения (3) аксиально симметрично. Будем искать его в виде

$$\varphi = - E_0 \cos \theta f(r), \quad (4)$$

где θ — угол между векторами E_0 и r , а функция $f(r) \rightarrow r$ при больших r .

Электрическое поле E выражается через функцию $f(r)$ с помощью (4) в виде

$$E = E_0 \left(\cos \theta \frac{df}{dr} r_1 - \sin \theta \frac{f}{r} \theta_1 \right), \quad (5)$$

где r_1 и θ_1 — единичные векторы в направлении осей r и θ .

Подставляя (4) и (3) и отделяя угловую зависимость, получаем уравнение с переменными коэффициентами для радиальной функции $f(r)$

$$\frac{d}{dr} \left(\sigma r^2 \frac{df}{dr} \right) = 2\sigma f$$

или

$$\sigma r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d}{dr} (\sigma r^2) \frac{df}{dr} - 2\sigma f = 0, \quad (6)$$

где $\sigma(r)$ определяется соотношением (1).

Введем безразмерную переменную $\mu r = x$. Подставляя значение σ (1) в (6), находим

$$\left(1 + A \frac{e^{-x}}{x^2} \right) x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[x^2 \left(1 + A \frac{e^{-x}}{x^2} \right) \right] \frac{df}{dx} - \left(1 + A \frac{e^{-x}}{x^2} \right) 2f = 0$$

или, в эквивалентном виде,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2x - Ae^{-x}}{x^2 + Ae^{-x}} \frac{df}{dx} - \frac{2f}{x^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь $A = \alpha \mu^2 / \sigma_0$ — безразмерный множитель. Невозмущенному значению электрического поля $E = E_0$ соответствует функция $f(x) = x/\mu$.

Введем радиальную функцию $\psi(x)$, описывающую потенциал добавочного поля, с помощью уравнения

$$f = \frac{1}{\mu} (x + \psi). \quad (8)$$

Эта функция удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2x - Ae^{-x}}{x^2 + Ae^{-x}} \frac{d\psi}{dx} - \frac{2\psi}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x - Ae^{-x}}{x^2 + Ae^{-x}}. \quad (9)$$

На больших расстояниях от источника потенциал добавочного поля, как легко видеть из (9), убывает обратно пропорционально второй степени расстояния:

$$\psi \sim \frac{1}{x^2}, \quad (10)$$

что соответствует потенциалу поля диполя, возникающему при поляризации возмущенной проводящей области во внешнем поле, когда в каждой точке среды имеется поляризационный заряд с плотностью

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\epsilon E),$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Электрическое поле выражается через функцию ψ , согласно (5) и (8), в виде

$$E = E_0 \left[\cos \theta \left(1 + \frac{d\psi}{dx} \right) r_1 - \sin \theta \left(1 + \frac{\psi}{x} \right) \theta_1 \right]. \quad (11)$$

Поскольку проводимость σ в начале координат бесконечно велика, то объем воздуха вблизи источника обладает металлическими свойствами, и из (11) следует, что функция ψ в окрестности начала координат равна $-x$.

Уравнение (9) интегрировалось численно на ЭВМ. Результаты расчета добавочного (к однородному внешнему) поля представлены на рис. 1. Видно, что с увеличением постоянной A возрастает размер x_1 области вокруг источника, в которой суммарное поле отсутствует.

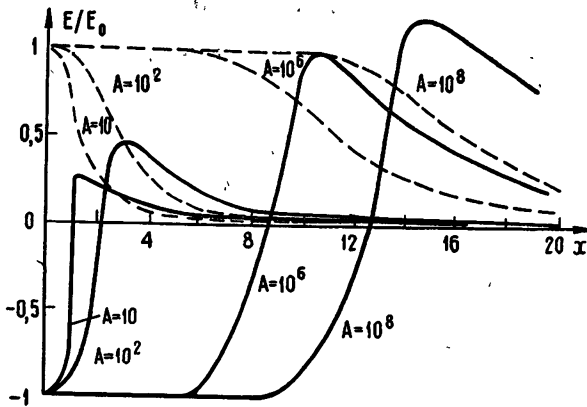


Рис. 1. Зависимость возникающего электрического поля от расстояния до источника при различных значениях параметра A ; — — — радиальная составляющая поля, — — — тангенциальная составляющая поля с обратным знаком.

Величина x_1 , очевидно, определяется уравнением

$$A \frac{\exp(-x_1)}{x_1^2} \simeq 1,$$

решение которого при малых A

$$x_1 \simeq \sqrt{A},$$

а при больших A может быть найдено последовательными приближениями

$$x_1^{(1)} \simeq \ln A,$$

$$x_1^{(2)} \simeq \ln \left(\frac{A}{\ln^2 A} \right) \text{ и т. д.}$$

При $A \simeq 10^6$ $x_1^{(2)} \simeq 8,5$, что близко к значению нуля соответствующего радиального поля, представленного на рисунке.

Магнитное поле H_φ легко находится из соображений симметрии, на основании (2) и приведенных результатов для компонент электрического поля.

Вместе с компонентой H_φ оказывается отличным от нуля вектор Пойнтинга, обуславливающий поток энергии из бесконечности к центральным областям, где, в основном, энергия переходит в тепло. Диссипируемая энергия покрывается за счет работы электродвижущих сил, поддерживающих в проводящем воздухе поле E_0 , роль же ионизирующего источника пассивна.

В заключение благодарим Н. С. Потапову за численное интегрирование уравнения.

Поступила в редакцию
31 января 1969 г.

ON AN ELECTROMAGNETIC FIELD ARISING FROM AIR IONIZATION
BY A POINT γ -SOURCE IN THE ELECTRIC FIELD OF THE EARTH

Yu. V. Gutop, Yu. A. Medvedev

The perturbation of the Earth's electric field in the air ionized by gamma-active source is found.

УДК 538.691

О ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

С. Н. Огородников

Методами теории функций комплексного переменного рассмотрен стационарный нерелятивистский соленоидальный регулярный поток одноименно заряженных частиц в магнитном полс. Найдены неизвестные ранее решения. При этом указаны вид магнитного поля и основные характеристики полученных потоков.

В работе [1] при помощи функций комплексного переменного рассмотрен двумерный стационарный нерелятивистский соленоидальный поток одноименно заряженных частиц в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости движения. Целью настоящей работы является обобщение метода, предложенного в [1], на случай соленоидального движения частиц в произвольном магнитном поле.

1. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ

Стационарный нерелятивистский регулярный ($\text{rot } P = 0$, где $P = m\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}$) поток одноименно заряженных частиц описывается системой уравнений

$$\nabla W = m\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}; \quad (1a)$$

$$mv^2/2 + q\varphi = 0; \quad (1б)$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho; \quad (1в)$$

$$\nabla(\rho\mathbf{v}) = 0; \quad (1г)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = 0, \quad (1д)$$

где P — обобщенный импульс частицы, $\mathbf{v} \{v_x, v_y, v_z\}$ — вектор скорости, \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля \mathbf{H} ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$), m — масса частицы, q — ее заряд, c — скорость света, W — функция действия, φ — электростатический потенциал внутри пучка, ρ — плотность пространственного заряда. Вектор-потенциал магнитного поля удовлетворяет дополнительному условию

$$\nabla\mathbf{A} = 0. \quad (1e)$$

Рассмотрим течения, для которых

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0; \quad (2a)$$

$$\nabla P = 0. \quad (2б)$$

Здесь (2б) является условием соленоидальности потока. Перейдем от координат x, y, z к координатам $t = x + iy, t^* = x - iy, z$ [2] (здесь и в

дальнейшем индекс* означает взятие комплексно сопряженного). Тогда (1 а) и (2) дают

$$2W = f(t) + f^*(t^*), \quad (3)$$

где f — произвольная аналитическая функция t .

Так как любой вектор, лежащий в плоскости (x, y) , можно представить в виде комплексного числа в плоскости комплексного переменного t , то, используя (2 а) и (3), из (1 а) имеем

$$\nabla W = Q^*(t^*), \quad (4а)$$

где

$$Q(t) = df(t)/dt.$$

Соотношения (1 д), (1 е) и (2 а) дают

$$A(t, t^*) = A_x + iA_y = i\delta t - (c/q)\lambda^*(t^*); \quad (4б)$$

$$A_z(t, t^*) = -(c/q)[\chi(t) + \chi^*(t^*)], \quad (4в)$$

где δ — произвольная вещественная постоянная, λ и χ — произвольные аналитические функции t .

Из (1 е), (2 а), (4 б) и (4 в) получаем

$$H(t^*) = H_x + iH_y = (2ic/q) d\chi^*(t^*)/dt^*; \quad (5а)$$

$$H_z = 2\delta = H_0 = \text{const.} \quad (5б)$$

Используя (4 а) — (4 в), (5 б) и замечая, что, не нарушая общности, можно положить $\lambda(t) = 0$, из (1 а) имеем

$$mv(t, t^*) = mv_x + imv_y = Q^*(t^*) + i\omega_0 t; \quad (6а)$$

$$mv_z(t, t^*) = \chi(t) + \chi^*(t^*), \quad (6б)$$

где $\omega_0 = -qH_0/2c$ — ларморовская частота. Подставляя (6) в (1 б), находим

$$\varphi = -[QQ^* + i\omega_0(Qt - Q^*t^*) + \omega_0^2 tt^* + (\chi + \chi^*)^2]/2mq. \quad (6в)$$

Плотность пространственного заряда, согласно (1 в), (2 а) и (6 в),

$$\rho = (Q'Q^* + 2\chi'\chi^{*'} + \omega_0^2)/2\pi mq, \quad (6г)$$

где

$$Q'(t) = dQ(t)/dt, \quad \chi'(t) = d\chi(t)/dt.$$

Наконец, на основании (6 а), (6 б), (6 г) и (2 а) из (1 г) получаем

$$Q^*Q^*Q'' + QQ'Q^{*''} + i\omega_0(Q^*Q''t - Q'Q^{*''}t^*) + + 2(Q^*\chi^{*'}\chi'' + Q\chi'\chi^{*''}) + 2i\omega_0(\chi^*\chi''t - \chi'\chi^{*''}t^*) = 0, \quad (7)$$

где

$$Q''(t) = d^2Q(t)/dt^2, \quad \chi''(t) = d^2\chi(t)/dt^2.$$

Это уравнение является основным уравнением теории*.

Траектории заряженных частиц находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (8)$$

* При $\chi' = 0$ (компоненты магнитного поля в плоскости (x, y) равны нулю) уравнение (7) переходит в уравнение (2г) работы [1].

где v_x, v_y, v_z задаются соотношениями (6 а) и (6 б). Проекция магнитных силовых линий на плоскость (x, y) определяется уравнением

$$\operatorname{Re} \chi(t) = \text{const.}$$

2. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Укажем девять существенно различных решений уравнения (7).

1) $Q = 0, \omega_0 = 0, \chi' \neq 0$. Тогда из уравнения (7) следует, что

$$\chi = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$$

является произвольной аналитической функцией t . Отсюда и из соотношений (5 а), (6 а)—(6 г) получаем

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{2c}{q} \frac{\partial u_1}{\partial y}, & H_y &= \frac{2c}{q} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ v_x &= 0, & v_y &= 0, & mv_z &= 2u_1, \\ \varphi &= -\frac{2u_1^2}{mq}, & \rho &= \frac{1}{\pi mq} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Траектории частиц, согласно (8), определяются уравнениями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Это прямые, параллельные оси Oz .

2) $Q = 0, \omega_0 \neq 0$. В этом случае из уравнения (7) имеем $\chi''t/\chi' = \beta$. Отсюда с точностью до поворота находим

$$\chi' = \alpha t^\beta. \quad (9а)$$

Здесь и в дальнейшем α, β (за исключением β в случае (8))—произвольные вещественные постоянные.

Из (9 а) с точностью до произвольной комплексной постоянной получаем

$$\chi = \gamma t^{\beta+1}, \quad \gamma = \alpha/(\beta+1), \quad \beta \neq -1; \quad (9б)$$

$$\chi = \alpha \ln t, \quad \beta = -1. \quad (9в)$$

Соотношения (5 а) и (9 а) дают

$$H_x = \frac{2c\alpha}{q} r^\beta \sin \beta\theta, \quad H_y = \frac{2c\alpha}{q} r^\beta \cos \beta\theta, \quad (9г)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x).$$

При $\beta \neq -1$ из (6 а)—(6 г), (9 а) и (9 б) находим характеристики потока:

$$mv_x = -\omega_0 y, \quad mv_y = \omega_0 x, \quad mv_z = 2\gamma r^{\beta+1} \cos(\beta+1)\theta,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} [\omega_0^2 r^2 + 4\gamma^2 r^{2(\beta+1)} \cos^2(\beta+1)\theta], \quad \rho = \frac{1}{2\pi mq} (\omega_0^2 + 2\alpha^2 r^{2\beta}).$$

Траектории частиц, согласно (8), в этом случае

$$r = \text{const}, \quad 2\gamma r^{\beta+1} \sin(\beta+1)\theta - \omega_0(\beta+1)z = \text{const.}$$

При $\beta = -1$ из соотношений (6 а)—(6 г), (9 а) и (9 в)

$$mv_x = -\omega_0 y, \quad mv_y = \omega_0 x, \quad mv_z = 2\alpha \ln r,$$

$$\varphi = \frac{-1}{2mq} (\omega_0^2 r^2 + 4\alpha^2 \ln^2 r), \quad \rho = \frac{1}{2\pi mq} \left(\omega_0^2 + \frac{2\alpha^2}{r^2} \right).$$

Траектории частиц

$$r = \text{const}, \quad 2\alpha\theta \ln r - \omega_0 z = \text{const}.$$

Итак, траектории в обоих классах течений ($\beta \neq -1$ и $\beta = -1$) лежат на поверхности круговых цилиндров $r = \text{const}$.

3) $Q = i/at$, ω_0 — любое, a — здесь и в дальнейшем отличная от нуля произвольная вещественная постоянная. Тогда из (7) имеем $\chi''t/\chi' = \beta$. Отсюда следует, что χ' и χ определяются соотношениями (9 а) — (9 в), а H_x и H_y — выражениями (9 г).

При $\beta \neq -1$ получаем

$$mv_x = -y(\omega_0 - 1/ar^2), \quad mv_y = x(\omega_0 - 1/ar^2), \quad mv_z = 2\gamma r^{\beta+1} \cos(\beta+1)\theta$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} \left[\frac{1}{a^2 r^2} - \frac{2\omega_0}{a} + \omega_0^2 r^2 + 4\gamma^2 r^{2(\beta+1)} \cos^2(\beta+1)\theta \right],$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi mq} \left(\frac{1}{a^2 r^4} + \omega_0^2 + 2\alpha^2 r^{2\beta} \right).$$

Траектории заряженных частиц

$$r = \text{const}, \quad 2\alpha\gamma r^{\beta+3} \sin(\beta+1)\theta - (\beta+1)(a\omega_0 r^2 - 1)z = \text{const}.$$

При $\beta = -1$ характеристики потока

$$mv_x = -y(\omega_0 - 1/ar^2), \quad mv_y = x(\omega_0 - 1/ar^2), \quad mv_z = 2\alpha \ln r,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} \left(\frac{1}{a^2 r^2} - \frac{2\omega_0}{a} + \omega_0^2 r^2 + 4\alpha^2 \ln^2 r \right),$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi mq} \left(\frac{1}{a^2 r^4} + \omega_0^2 + \frac{2\alpha^2}{r^2} \right).$$

Траектории частиц определяются уравнениями

$$r = \text{const}, \quad 2\alpha\alpha\theta r^2 \ln r - (ar^2\omega_0 - 1)z = \text{const}.$$

Таким образом, траектории в обоих классах течений ($\beta \neq -1$ и $\beta = -1$), как и в 2), лежат на поверхности круговых цилиндров $r = \text{const}$.

4) $Q = ibt$, $\omega_0 = 0$, b — здесь и в дальнейшем отличная от нуля произвольная вещественная постоянная. В этом случае из уравнения (7) имеем $\chi''/\chi't = 2\beta$, откуда с точностью до поворота получаем

$$\chi' = \alpha \exp(\beta t^2). \quad (10)$$

Из (10) с точностью до произвольной комплексной постоянной находим

$$\chi = \alpha \int \exp(\beta t^2) dt = u_1(x, y) + iu_2(x, y).$$

Компоненты магнитного поля, согласно (5 а) и (10), принимают вид

$$H_x = \frac{2c\alpha}{q} \exp[\beta(x^2 - y^2)] \sin 2\beta xy, \quad H_y = \frac{2c\alpha}{q} \exp[\beta(x^2 - y^2)] \cos 2\beta xy.$$

Основные характеристики потока

$$mv_x = -by, \quad mv_y = -bx, \quad mv_z = 2u_1,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} [b^2(x^2 + y^2) + 4u_1^2], \quad \rho = \frac{1}{2\pi mq} [b^2 + 2\alpha^2 \exp 2\beta(x^2 - y^2)].$$

Траектории частиц лежат на гиперболических цилиндрах $y^2 - x^2 = \text{const}$.

5) $Q = -(ib/a) \operatorname{tg} bt$, $\omega_0 = 0$. Тогда из (7) находим, что $\chi''/\chi' \operatorname{tg} bt = -b\beta$. Отсюда с точностью до поворота имеем

$$\chi' = \alpha (\cos bt)^\beta. \quad (11)$$

Из (11) с точностью до произвольной комплексной постоянной находим

$$\chi = \alpha \int (\cos bt)^\beta dt = u_1(x, y) + iu_2(x, y).$$

Компоненты магнитного поля, согласно (5 а) и (11),

$$H_x = \frac{2ca}{q} r^\beta \sin \beta\theta, \quad H_y = \frac{2ca}{q} r^\beta \cos \beta\theta,$$

где

$$r = |\chi'| = [(\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)/2]^{1/2}, \quad \theta = -\arg \chi' = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} bx \operatorname{th} by).$$

Далее

$$mv_x = \frac{b \operatorname{sh} 2by}{a (\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)}, \quad mv_y = \frac{b \sin 2bx}{a (\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)}, \quad mv_z = 2u_1,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} \left[\frac{b^2 (\operatorname{ch} 2by - \cos 2bx)}{a^2 (\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)} + 4u_1^2 \right],$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi mq} \left[\frac{4b^4}{a^2 (\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)^2} + 2^{1-\beta} \alpha^2 (\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by)^\beta \right].$$

Траектории частиц лежат на поверхности цилиндров

$$\cos 2bx + \operatorname{ch} 2by = \operatorname{const}.$$

6) $Q = ibt$, $\omega_0 \neq 0$, $\chi'' = 0$. С точностью до переноса имеем

$$\chi' = a. \quad (12a)$$

Из (12 а) с точностью до произвольной комплексной постоянной получаем

$$\chi = at. \quad (12б)$$

Компоненты магнитного поля в плоскости (x, y)

$$H_x = 0, \quad H_y = 2ca/q. \quad (12в)$$

Соотношения (6 а)—(6 г), (12 а) и (12 б) дают для характеристик потока выражения

$$mv_x = -(\omega_0 + b)y, \quad mv_y = (\omega_0 - b)x, \quad mv_z = 2ax,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} [(\omega_0 - b)^2 x^2 + (\omega_0 + b)^2 y^2 + 4\alpha^2 x^2], \quad \rho = \frac{1}{2\pi mq} (b^2 + \omega_0^2 + 2\alpha^2).$$

Траектории частиц определяются уравнениями

$$(\omega_0 - b)x^2 + (\omega_0 + b)y^2 = \operatorname{const}, \quad 2\alpha y - (\omega_0 - b)z = \operatorname{const}, \quad b \neq \omega_0,$$

и

$$y = \operatorname{const}, \quad \alpha x^2 + 2\omega_0 yz = \operatorname{const}, \quad \text{когда } b = \omega_0.$$

7) $Q = -i\omega_0 t + a$, $\omega_0 \neq 0$, $\chi'' = 0$. В этом случае функции χ' и χ определяются выражениями (12 а) и (12 б), а H_x и H_y — соотношениями (12 в);

Характеристики потока имеют вид

$$mv_x = a, \quad mv_y = 2\omega_0 x, \quad mv_z = 2ax,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} [4(\omega_0^2 + \alpha^2)x^2 + a^2], \quad \rho = \frac{1}{2\pi mq} (\omega_0^2 + \alpha^2),$$

а траектории частиц

$$ay - \omega_0 x^2 = \text{const}, \quad ay - \omega_0 z = \text{const}.$$

8) $Q = -i\omega_0 t$, $\omega_0 \neq 0$, $\chi'' \neq 0$. Тогда из уравнения (7) имеем $\chi''/\chi' = \beta$, где β — отличная от нуля произвольная вещественная постоянная. Отсюда с точностью до переноса получаем

$$\chi' = \exp(\beta t). \quad (13)$$

В свою очередь, из (13) с точностью до произвольной комплексной постоянной находим

$$\chi = (1/\beta) \exp(\beta t).$$

В этом случае

$$H_x = \frac{2c}{q} \exp(\beta x) \sin \beta y, \quad H_y = \frac{2c}{q} \exp(\beta x) \cos \beta y,$$

и

$$v_x = 0, \quad mv_y = 2\omega_0 x, \quad mv_z = (2/\beta) \exp(\beta x) \cos \beta y,$$

$$\varphi = -\frac{2}{mq} [\omega_0^2 x^2 + (1/\beta^2) \exp(2\beta x) \cos^2 \beta y], \quad \rho = \frac{1}{\pi mq} [\omega_0^2 + \exp(2\beta x)].$$

Траектории частиц определяются уравнениями

$$x = \text{const}, \quad \exp(\beta x) \sin \beta y - \beta^2 \omega_0 x z = \text{const}.$$

9) $Q = a$, $\omega_0 = 0$, $\chi' \neq 0$. Из уравнения (7) имеем $\chi''/\chi' = i\beta$. Отсюда с точностью до переноса находим

$$\chi' = \exp(i\beta t). \quad (14)$$

Из (14) с точностью до произвольной комплексной постоянной получаем

$$\chi = \int \exp(i\beta t) dt = u_1(x, y) + iu_2(x, y).$$

Следовательно,

$$H_x = \frac{2c}{q} \exp(-\beta y) \sin \beta x, \quad H_y = \frac{2c}{q} \exp(-\beta y) \cos \beta x$$

и

$$mv_x = a, \quad v_y = 0, \quad mv_z = 2u_1,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2mq} (a^2 + 4u_1^2), \quad \rho = \frac{1}{\pi mq} \exp(-2\beta y).$$

Траектории частиц

$$y = \text{const}, \quad 2 \cos \beta x + a\beta^2 z \exp(\beta y) = \text{const}, \quad \beta \neq 0;$$

$$y = \text{const}, \quad x^2 - az = \text{const}, \quad \beta = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. T. Kirstein, J. Electronics and Control, 4, № 5, 425 (1958).
2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1, стр. 332, 1958; 2, стр. 204, 1960.

Поступила в редакцию
14 мая 1968 г.

ON THE USE OF THE COMPLEX VARIABLE FUNCTIONS IN THE THEORY
OF FORMING FLUXES OF LIKE CHARGED PARTICLES IN THE PRESENCE
OF THE MAGNETIC FIELD

S. N. Ogorodnikov

A stationary nonrelativistic solenoidal regular flux of like charged particles in the magnetic field is considered by the methods of the theory of the complex variable functions. The earlier unknown solutions are found. The form of the magnetic field and the main characteristics of the fluxes obtained are presented.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.378

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ ИЗОТОПНОГО АММИАКА $N^{15}H_3$

А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, В. В. Поляков

Вращательный спектр аммиака с изотопом азота N^{15} ранее не наблюдался. В настоящей работе проведено исследование нижнего вращательного перехода $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ аммиака $N^{15}H_3$ в диапазоне $\lambda = 0,525$ мм, что позволило определить вращательную постоянную изотопного аммиака.

Использовался газовый радиоспектроскоп с видеодетектированием, аналогичный описанному ранее [1]. Ячейка спектроскопа наполнялась смесью обычного ($N^{14}H_3$) и изотопного ($N^{15}H_3$) аммиака в соотношении примерно 8:1. При качании частоты источника сигнала (лампы обратной волны типа [2]) на экране осциллоскопа наблюдались одновременно спектральные линии переходов $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ обычного и изотопного аммиака (рис. 1). Расстояние между этими линиями измерялось известным спо-

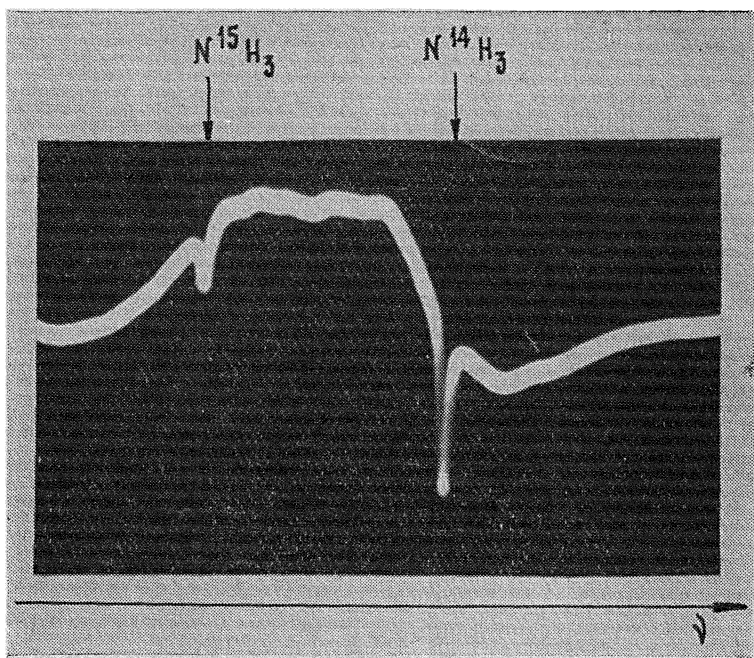


Рис. 1. Линии поглощения изотопного и обычного аммиака в диапазоне $\lambda = 0,525$ мм.

собом модуляции частоты источника сигнала [3]. Значение частоты модуляции измерялось электронно-счетным частотомером ЧЗ-9. Измеренная разность частот переходов $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ $N^{14}H_3$ и $N^{15}H_3$ оказалась равной $384,8$ Мгц; ошибка эксперимента оценивается как $\pm 0,2$ Мгц. Частота перехода $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ обычного аммиака из-

мерена ранее [1] и равна $\nu_{0-1}(N^{14}H_3) = 572\,499,4 \text{ Мгц} \pm 3 \text{ Мгц}$. Таким образом, частота перехода $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ изотопного аммиака определена нами как

$$\nu_{0-1}(N^{15}H_3) = 572\,115 \text{ Мгц},$$

причем точность практически определяется точностью знания $\nu_{0-1}(N^{14}H_3)$.

Определение вращательной постоянной B_0 по известной частоте перехода $J=0 \rightarrow 1$, $K = 0$ аналогично рассмотренному в [1] для $N^{14}H_3$. Вращательная постоянная B_0 равна

$$B_0(N^{15}H_3) = \frac{1}{2} \left[\nu_{0-1}(N^{15}H_3) + 4D_J + \frac{\nu_{00} + \nu_{01}}{2} \right],$$

где D_J — постоянная центробежного возмущения, $(\nu_{00} + \nu_{01})/2$ — полусумма частот инверсионного расщепления уровней $J = K = 0$ и $J = 1$, $K = 0$. Значение D_J для $N^{15}H_3$ в литературе отсутствует. Оценка показывает, что величина D_J (определяющаяся выражением вида B^3/ω^2 , где B — вращательная постоянная, ω — колебательная частота молекулы [3]) для $N^{15}H_3$ практически совпадает с известной константой для $N^{14}H_3$, равной $D_J = 19 \text{ Мгц}$ [3]. Величины ν_{00} и ν_{01} нельзя измерить экспериментально из-за отсутствия у $N^{15}H_3$ по одному из каждой пары инверсионных уровней при $K = 0$. Поэтому для их определения следует воспользоваться зависимостью инверсионной частоты от J и K , найденной по переходам с $K \neq 0$, подставив в нее соответствующие значения J и K .

Существующая эмпирическая формула [4], определяющая значения частот инверсионного спектра $N^{15}H_3$ имеет среднеквадратичную ошибку 308 Мгц , а в нужной нам области (для малых J и K) дает значения, отличающиеся от экспериментальных на $3\text{--}10 \text{ Мгц}$, что снижает точность расчета. В связи с этим по экспериментальным значениям частот [5] нами была подобрана лучшая аппроксимация вида

$$\begin{aligned} \nu_{JK}(\text{Мгц}) = & 22714 \exp[-0,6489815 \cdot 10^{-2} J(J+1) + 0,902306 \cdot 10^{-2} K^2 + \\ & + 0,850786 \cdot 10^{-6} J^2(J+1)^2 - 0,178845 \cdot 10^{-5} J(J+1) K^2 + 0,52645 \cdot 10^{-6} K^4], \end{aligned} \quad (1)$$

при которой среднеквадратичная ошибка составляет $3,6 \text{ Мгц}$, а отличие от экспериментальных значений при малых J и K — $0,2\text{--}4,5 \text{ Мгц}$. Применение (1) позволило повысить точность расчета B_0 . Определенная с помощью вышеуказанных данных величина B_0 для $N^{15}H_3$ равна

$$B_0(N^{15}H_3) = 297379,3 \text{ Мгц}.$$

Проведенное в качестве проверки независимое определение частоты перехода $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ для $N^{15}H_3$ по методике, аналогичной [1], дало значение $\nu_{0-1}(N^{15}H_3) = 572111,44 \text{ Мгц}$, т. е.

$$B_0(N^{16}H_3) = 297377,5 \text{ Мгц}.$$

Результаты совпадают с точностью $\sim 6 \cdot 10^{-6}$. При этом была измерена частота перехода $J = 0 \rightarrow 1$, $K = 0$ для $N^{14}H_3$, которая оказалась равной $\nu_{0-1}(N^{14}H_3) = 572495,6 \text{ Мгц}$ (что соответствует $B_0(N^{14}H_3) = 298\,104,2 \text{ Мгц}$). Определенная таким образом разность частот переходов $N^{14}H_3$ и $N^{15}H_3$ равна $384,1 \text{ Мгц}$, что в пределах погрешности последнего метода хорошо согласуется с приведенными ранее.

Авторы благодарят А. А. Ульянова, В. А. Логачева, любезно предоставивших образец аммиака, обогащенного изотопом N^{15} , а также Б. В. Громова, Е. Н. Карякина за помощь в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 8, 1186 (1968)
2. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Париков, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
3. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
4. R. R. Newton, L. H. Thomas, Journ. Chem. Phys., 16, 310 (1948).
5. W. E. Good, D. K. Coles, Phys. Rev., 71, 383L (1947).

ВОЛНОВОДНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ СВЕТА НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРАХ

Л. А. Ривлин, А. Б. Уиц, В. С. Шильдяев

В экспериментах по усилению света с помощью инжекционных полупроводниковых лазеров задающий генератор и усиливающий лазерный диод обычно расположены вдали друг от друга (иногда в различных криостатах) и связаны системой линз, проектирующей светящуюся область генератора на вход усилителя [1, 2], либо генератор и усилитель разделены расстоянием, малым по сравнению с дифракционной длиной, т. е. фактически оказываются пространственно совмещенными [3]. Каждая из схем обладает своими преимуществами и недостатками.

В настоящем сообщении изложены результаты исследования усилителя света, в котором генераторный и усилительный диоды связаны отрезком полигармонического волновода [4]. Этот опыт может представить интерес как первый шаг к использованию полигармонических волноводов в более сложных системах из оптически связанных инжекционных лазеров (некоторые примеры таких систем рассмотрены ниже).

Полигармонический волновод обладает способностью воспроизводить изображение объекта, находящегося в его входном сечении, в последовательности так называемых синфазных сечений, удаленных от входа на расстояния $z_s = 8a^2s/\lambda$ (a — поперечный размер прямоугольного или планарного волновода, λ — длина волны света, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Для объекта типа светящейся щели, каким является излучающая область полупроводникового лазера с электронно-дырочным переходом, удобен простейший планарный полигармонический волновод, для которого в случае расположения светящейся щели в средней плоскости волновода $z_s = a^2s/\lambda$.

Схема эксперимента представлена на рис. 1. Два полупроводниковых диода установлены в планарном волноводе, образованном парой полированных хромированных пластин из меди, разделенных зазором $a = 62 \text{ мк}$. Расстояние между смежными торцами диодов равно $z_1 = 4,6 \text{ мм}$ ($\lambda = 0,84 \text{ мк}$, $s = 1$). Диоды помещены на хладоводе азотного криостата, конструкция которого допускает их юстировку в генерирующем состоянии. Диод Г играет роль задающего генератора, а диод У — регенеративного усилителя (его сколотые грани имеют коэффициент отражения $R \approx 0,3$).

На фотографиях (рис. 2), сделанных с помощью микроскопа МИК-1, даны изображения излучающих поверхностей усилителя и генератора, переданных к выходным сечениям по отрезкам волновода 1 и 2 синфазной длины z_1 : а) излучение генератора при токе инжекции $I_r = 1,3 I_{rп}$ (пороговый ток $I_{rп} \approx 6a$); б) излучение усилителя при подпороговом токе инжекции $I_y = 0,9 I_{yп}$ ($I_{yп} \approx 8,5a$) и включенном генераторе; в) излучение усилителя при том же I_y и выключенном генераторе.

Сопоставление фотографий б) и в) показывает действие усилителя, проявляющееся в резком возрастании яркости изображения б) над уровнем спонтанного свечения в). Коэффициент регенеративного усиления лазерного диода достигает величины $G \approx 10$, что в грубом приближении согласуется с расчетом по формуле $G = g(1 - R)^2 / [1 - (gR)^2]$, если коэффициент усиления диода на одном проходе аппроксимировать выражением $g = 1/R (I_y/I_{yп})$.

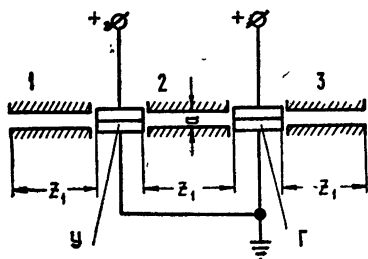


Рис. 1.

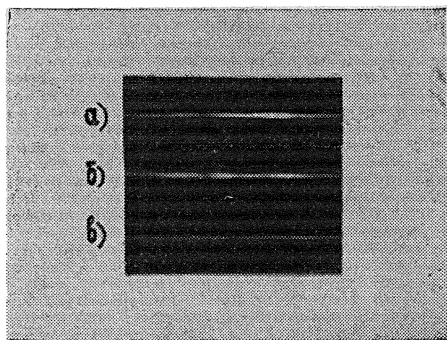


Рис. 2.

Роль волновода видна из следующих оценок. Без волновода коэффициент передачи света между диодами, разнесенными на расстояние z_1 , можно оценить величиной $\sim 3 \cdot 10^{-4}$. Планарный волновод (в отличие от прямоугольного) производит только частичную канализацию излучения, не устранив потери за счет расходимости света в плоскости $p-n$ -перехода (около $0,2 \text{ рад}$), которые в условиях эксперимента доминируют над потерями в стенках. В результате потери на передачу составляют

в планарном волноводе (с учетом его разрешающей способности) более 80%, а полный коэффициент усиления системы, хотя волновод и снижает потери приблизительно на три порядка, лишь незначительно превышает единицу. Следует заметить, что переход к прямоугольному волноводу, полностью устраняющему потери на расходимость, привел бы к повышению полного коэффициента усиления до 5—8 и более в зависимости, главным образом, от величины коэффициента регенеративного усиления (в случае отсутствия насыщения).

Проведенный эксперимент демонстрирует применимость полигармонических волноводов как элементов оптической связи между полупроводниковыми лазерными диодами. Специфические особенности этих волноводов могут быть использованы для построения сложных систем связанных полупроводниковых лазеров.

Между синфазными сечениями полигармонического волновода существуют промежуточные, где изображение излучающей щели трансформируется различным образом. Например, в сечениях $z_{1,k} = z_1/k$, где k — нечетное число, возникает k параллельных изображений возбуждающей щели на расстоянии a/k друг от друга, синфазных с ней. Этим свойством полигармонических волноводов можно воспользоваться как для синхронизации световых колебаний в стопе лазерных $p-n$ -переходов, объединенных в общий диодный блок [5], так и для расщепления сигнала полупроводникового лазера с последующим усилением, например, по схеме рис. 3.

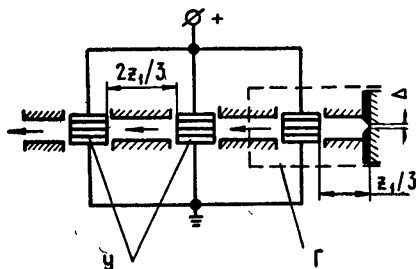


Рис. 3.

Диодный блок генератора Γ с одной просветленной гранью заключен между отрезками полигармонического волновода длиной z_1/k , причем отрезок волновода, примыкающий к просветленной грани, замкнут концевым отражателем шириной Δ приблизительно равной ширине светящихся областей диодного блока, а вторым отражателем является его непросветленная грань. Когерентное сложение колебаний осуществляется в сечении, обозначенном пунктирной линией. Указанное сечение является входным для цепочки усилителей $У$, расположенных в волноводе таким образом, что смежные грани диодных блоков разделены расстоянием $2z_1/k$. Когерентное сложение усиленного излучения выполняет отрезок волновода длиной z_1/k , которым заканчивается последовательность усилителей. В каждом диодном блоке $p-n$ -переходы отстоят друг от друга на расстоянии a/k .

В заключение авторы выражают признательность В. И. Магальясу и Л. П. Васькиной, подготовивших диоды для эксперимента с усилителем.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Growe, R. M. Craig, Appl. Phys. Lett., 4, № 3, 57 (1964).
2. I. N. Oraevskii, Yu. M. Popov, G. M. Strakhovskii, Phys. Stat. Sol. (in press).
3. W. F. Kosonocky, R. H. Cornely, IEEE J. Quant. Elect., QE-4, 125 (1968).
4. Л. А. Ривлин, В. С. Шильдяев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 572 (1968).
5. Н. Г. Басов, Э. М. Беленов, В. С. Летохов, ФТТ, 7, № 1, 337 (1965).

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ПО ОСИ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ

М. П. Каликинская

В работе [1] рассматривалось переходное излучение, возникающее при периодическом движении заряда через идеально проводящую плоскость. Представляет интерес задача об излучении заряда, колеблющегося по оси круглого отверстия в экране, предотвращающего потери энергии заряда в идеально проводящей плоскости.

Пусть координаты заряда q изменяются по закону

$$z = a \sin \Omega t, \quad x = 0, \quad y = 0. \quad (1)$$

Идеально проводящий экран с отверстием радиуса r_0 расположен в плоскости $z = 0$ (центр отверстия находится в начале координат). Решение (для определенности) будем искать в области $z > 0$.

Периодическое электромагнитное поле представим в виде суперпозиции гармонических полей. В дальнейшем будем рассматривать только фурье-компоненты поля, причем индекс n для простоты опустим (n — номер гармоники). Будем искать решение в виде

$$E = E_1 + E_2, \quad (2)$$

где E_1 — решение неоднородного волнового уравнения с однородными граничными условиями ($E_t = 0$ при $z = 0$), которое получено в работе [1], а E_2 — решение однородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями. Для решения второй задачи нужно найти поле излучения по известному распределению тангенциальных составляющих электрического поля на плоскости $z = 0$ (первая граничная задача электродинамики), учитывая при этом, что $E_t = 0$ при $r > r_0, z = 0$.

Чтобы найти поле заряда на отверстии, предположим, что $v/c = \beta \ll 1$, где $v = a\Omega$ — максимальная скорость заряда. Тогда можно пренебречь запаздыванием и считать, что электрическое поле движущегося заряда совпадает с полем неподвижного заряда, помещенного в ту же точку, в которой находится в данный момент движущийся заряд, и равного ему по величине.

Электрическое поле неподвижного заряда на отверстии известно (см. [2] или [3]) и равно

$$E_r(p) = \frac{2qr}{\pi (r^2 + z_0^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_0^2 - r^2}{z_0^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \right), \quad (3)$$

где r — расстояние точки p от центра отверстия, q — заряд, находящийся на оси отверстия на высоте z_0 над ним. В нашем случае $z_0 = a \sin \Omega t$. Поле излучения E_2 можно вычислить, заменяя распределение тангенциальных составляющих электрического поля на отверстии поверхностными магнитными токами, распределенными по отверстию с плотностью $i^m = -c/4\pi [E, n_0]$, где E определяется формулой (3), n_0 — нормаль к плоскости $z = 0$.

Магнитный векторный потенциал выражается через i^m по формуле

$$A^m = \frac{1}{c} \int_{S_0} \frac{e^{ikR}}{R} i^m ds, \quad (4)$$

где $k = n\Omega/c$, а R — расстояние от точки источника до точки наблюдения. Составляющие поля определяются через A^m следующим образом:

$$\begin{aligned} E^m &= -\operatorname{rot} A^m, \\ H^m &= -\frac{1}{ik} (\operatorname{grad} \operatorname{div} A^m + k^2 A^m). \end{aligned} \quad (5)$$

Ввиду аксиальной симметрии задачи достаточно найти поле в точке, находящейся в плоскости zOx .

В волновой зоне напряженность электрического поля имеет вид

$$E_2(M) = -\frac{ik}{4\pi} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} e_\theta \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi E_{rn}(p) e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi} r dr d\varphi. \quad (6)$$

Здесь φ — полярный угол точки источника, R_0 — расстояние от начала координат до точки наблюдения, θ — угол между осью z и радиусом-вектором точки наблюдения,

$$E_{rn} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} E_r(\rho) e^{in\Omega t} dt, \quad (7)$$

где $E_r(\rho)$ вычисляется в соответствии с (3).

В выражении (6) можно произвести интегрирование по φ , используя известное интегральное представление функции Бесселя $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi - iz \sin \varphi} d\varphi$. Находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi} d\varphi = -2\pi i J_1(kr \sin \theta).$$

Рассматривая случай $\Omega r_0/c \ll 1$ ($\lambda \gg 2\pi r_0$), можно воспользоваться асимптотикой $J_1(z)$ при малых значениях аргумента

$$J_1[kr \sin \theta] \simeq \frac{1}{2} kr \sin \theta$$

и получить

$$E_2(M) = \frac{-qk^2}{4\pi^2} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} \sin \theta e_\theta \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\psi} d\psi \{P(\psi) + Q(\psi)\}; \quad (8)$$

$$P(\psi) = \int_0^{r_0} \frac{r^3 \arctg \sqrt{(r_0^2 - r^2)/(r^2 + a^2 \sin^2 \psi)}}{(r^2 + a^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} dr; \quad (9)$$

$$Q(\psi) = \int_0^{r_0} \frac{r^3 dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2} (r^2 + a^2 \sin^2 \psi)}.$$

Интегралы (9) вычисляются элементарно. В результате

$$P(\psi) + Q(\psi) = 2r_0 - 2a \sin \psi \arctg \left(\frac{r_0}{a \sin \psi} \right). \quad (10)$$

Скончателное выражение для фурье-компоненты электрического поля после подстановки (10) в (8) имеет вид

$$E_2(M) = \frac{aq\Omega^2}{c^2} n^2 \sin \theta \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} G_n e_\theta, \quad (11)$$

где

$$G_n = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \sin \psi \arctg \left(\frac{r_0}{a \sin \psi} \right) \cos n\psi d\psi. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что интеграл (12) при нечетных n равен нулю. Это значит, что отверстие не влияет на нечетные гармоники. При четных n интеграл (12) можно вычислить приближенно.

Поле $E_1(M)$ при четных n имеет вид [1]

$$E_1(M) = \frac{q\Omega}{c} n \operatorname{tg} \theta E_n(ak \cos \theta) \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} e_\theta, \quad (13)$$

где $E_n(z)$ — функция Вебера порядка n , при малых z равная $E_n(z) \simeq (2/\pi)[z/(n^2 - 1)]$ (асимптотика при малых z и n четном). Полное поле равно сумме полей (11) и (13).

Результаты вычислений энергии приведены в табл. 1, в которой при $n = 2, 4$ указаны значения функции $f_n = (3c^3/4a^2q^2Q^4) W_n$, где W_n — полная (по всем углам) энергия n -й гармоники, усредненная по периоду при $\beta = 0, 1$; $2\pi r_0/\lambda = 0, 1$.

Таблица 1

Номер гармоники	f_n (без отверстия)	f_n (с отверстием)
2	0,7205	0,4526
4	0,4608	0,1664

Из таблицы видно, что отверстие ослабляет дипольную часть переходного излучения, причем ослабление тем значительнее, чем больше номер гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, М. П. Каликинская, ЖТФ, 37, 602 (1967).
2. В. Бобринев, В. Брагинский, ДАН СССР, 123, 634 (1958).
3. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
25 марта 1969 г.