

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Алексеев В. А., Кротиков В. Д.</b> Поляризационные характеристики радиоизлучения Луны при учете усредняющего действия диаграммы направленности ножевого типа . . . . .	5
<b>Киселев О. Н., Короткова В. М., Лесков Н. М., Полищук Ю. М., Шарыгин Г. С.</b> Экспериментальные исследования медленных вариаций амплитуды и фазы 10-сантиметровых радиоволн на приземных трассах . . . . .	9
<b>Троицкий Б. В.</b> К теории образования вытянутых неоднородностей в слое $F_2$ ионосферы . . . . .	15
<b>Гершман Б. Н., Григорьев Г. И.</b> О диффузии сильных неоднородностей в слабо-ионизированной магнитоактивной плазме . . . . .	20
<b>Цытович В. Н., Чихачев А. С.</b> О нелинейном взаимодействии интенсивных плазменных волн . . . . .	26
<b>Эйдман В. Я.</b> Об импедансе тонкой цилиндрической антенны в изотропной плазме . . . . .	36
<b>Спирidonов Ю. Г.</b> К теории распространения свистящих атмосфериков . . . . .	44
<b>Красюк Н. П., Розенберг В. И., Чистяков Д. А.</b> Ослабление и рассеяние электромагнитных волн дождями различной природы . . . . .	54
<b>Зайцев Ю. И.</b> Флуктуации интенсивности излучения Не-Не лазера на волне 0,63 $\mu\text{к}$ . . . . .	60
<b>Малахов А. Н., Сандлер М. С.</b> Естественные флуктуации генератора с инерционной нелинейностью . . . . .	72
<b>Бочков Г. Н., Солин Н. Н.</b> К вопросу об измерении спектров флуктуаций параметров . . . . .	81
<b>Богданов А. А., Брусин И. Я., Емелин В. В., Зверев В. А., Любина А. Г., Маркус Ф. А., Черемухин А. М.</b> О фазовых шумах фотопленки . . . . .	90
<b>Авербах В. С., Бласов С. Н., Таланов В. И.</b> Квазиоптические системы с неквадратичными фазовыми корректорами . . . . .	102
<b>Чугунов Ю. В.</b> К вопросу об излучении заряда в неравновесных средах . . . . .	108
<b>Фрейлихер В. Д., Фукс И. М.</b> Спектр сигнала, рассеянного колеблющейся поверхностью раздела . . . . .	114
<b>Комиссаров Я. С., Павлюк В. А., Половников Г. Г.</b> Дифракция электромагнитной волны при косом падении на решетку, составленную из брусьев прямоугольного поперечного сечения . . . . .	122
<b>Канавец В. И., Стабинис А. Ю.</b> Воздействие внешней силы на классический ансамбль возбужденных осцилляторов с собственными потерями . . . . .	129

### Краткие сообщения и письма в редакцию

<b>Алексеев В. А., Кротиков В. Д., Кунцевич А. Г., Лазаревский В. С.</b> К редукции наблюдений радиоинтерферометром с большой базой . . . . .	139
<b>Маханьков В. Г., Сахокия Д. М., Цытович В. Н.</b> Рассеяние электромагнитных волн на гидродинамических пульсациях турбулентной плазмы . . . . .	141
<b>Черпак Н. Т., Шамфаров Я. Л.</b> К вопросу о насыщении КПУ в импульсном режиме . . . . .	144
<b>Гурвич А. С.</b> Флуктуации интенсивности света в расходящихся пучках . . . . .	147
<b>Кон А. И.</b> Усреднение флуктуаций сферической волны по приемной апертуре . . . . .	149
<b>Алтэк Ю. Э.</b> К вопросу о спектре радиочастотного сигнала . . . . .	152

УДК 523.164.34

**ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ  
ЛУНЫ ПРИ УЧЕТЕ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ  
ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ НОЖЕВОГО ТИПА**

*B. A. Алексеев, B. D. Кротиков*

Проведено теоретическое рассмотрение поляризационных характеристик радиоизлучения Луны при учете усредняющего действия диаграммы направленности ножевого типа. Предполагается, что поверхность Луны имеет гладкие неровности с размерами, много большими длины волны, статистика углов наклона которых подчиняется нормальному закону. Показано, что для центральной части лунного диска коэффициент поляризации весьма слабо зависит от дисперсий углов наклона неровностей и усредняющего действия диаграммы направленности антенны, что позволяет определить диэлектрическую постоянную вещества верхнего покрова Луны. Вблизи лимба Луны поляризационные характеристики сильно зависят от дисперсии углов наклона неровностей. Это позволяет оценить степень шероховатости лунной поверхности, если известна диэлектрическая постоянная верхнего покрова и полуширина диаграммы направленности.

Применение антенной системы с высоким разрешением, обладающей ножевой диаграммой направленности, позволило получить поляризационные характеристики радиоизлучения Луны [1]. В работе [1] проведена интерпретация экспериментальных данных в предположении, что широтная зависимость температуры определяется функцией  $\eta(\psi) = \cos^2 \psi$ , диаграмма направленности имеет вид полосы, а распределение углов наклона крупномасштабных неровностей равновероятно. При этих приближениях установлена величина диэлектрической постоянной и получена оценка степени шероховатости лунной поверхности. На основании расчетов теплового режима [2] и локальной среднестатистической излучательной способности [3-4] появилась возможность, не прибегая к упрощениям, достаточно строго рассмотреть вопрос о связи поляризационных характеристик радиоизлучения Луны с диэлектрической постоянной, геометрическими свойствами поверхности и усредняющим действием ножевой диаграммы направленности.

Будем предполагать, что диаграмма направленности ножевого типа в широком сечении в пределах лунного диска равномерна, в узком сечении имеет вид гауссовой кривой и боковые лепестки отсутствуют. Будем также предполагать, что поверхность Луны покрыта неровностями с размерами, много большими длины волны, статистика углов наклона которых подчиняетсяциальному закону [5].

Величина коэффициента поляризации равна отношению разности усредненных по диаграмме эффективных температур  $\bar{T}_{e1}^\theta$  и  $\bar{T}_{e2}^\theta$ , определенных для двух взаимно перпендикулярных ориентаций электрического вектора антенны, к их сумме [6]:

$$W = \frac{\bar{T}_{e1}^\theta - \bar{T}_{e2}^\theta}{\bar{T}_{e1}^\theta + \bar{T}_{e2}^\theta}.$$

Расчет коэффициента поляризации был выполнен для различных значений диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , дисперсии углов наклона неровностей  $\sigma$  и полуширины узкого сечения диаграммы  $\theta$ . Результаты расчетов представлены на рис. 1—4. В центральной области лунного диска, для которой плоскость диаграммы отстоит от центра Луны на

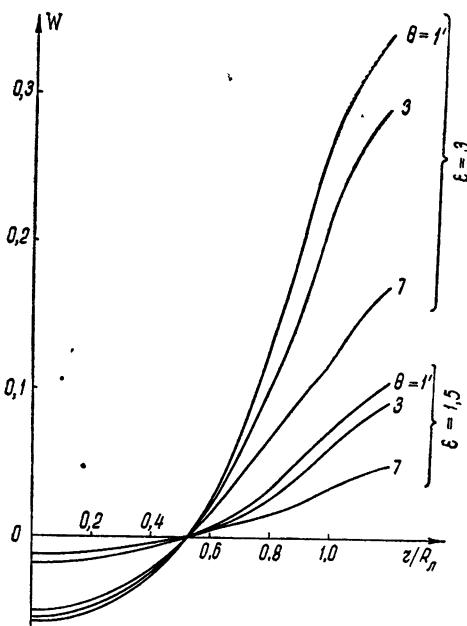


Рис. 1. Поляризационные характеристики радиоизлучения для случая идеально гладкой Луны и различной ширины диаграммы направленности.

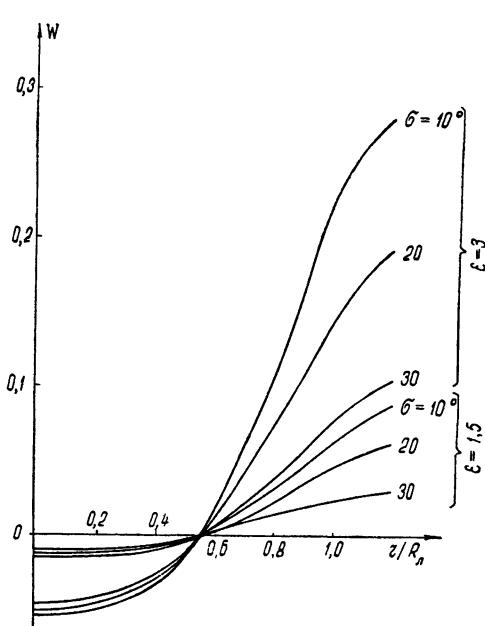


Рис. 2. Поляризационные характеристики радиоизлучения для различной степени шероховатости верхнего покрова Луны. Ширина диаграммы на половинном уровне по мощности равна  $1'$ .

расстояние  $r/R_L < 0,5$ , преобладает вертикальная составляющая поляризации. Коэффициент поляризации при этом отрицателен и практически не зависит от дисперсии углов наклона неровностей и ширины диаграммы направленности  $\theta$  (при изменении  $\theta$  в пределах  $1' \leq \theta \leq 7'$ ). Поскольку можно считать, что коэффициент поляризации в центральной области является функцией только диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , измерения коэффициента поляризации в этой области позволяют определить диэлектрическую постоянную верхнего покрова Луны. Вблизи лимба Луны преобладает горизонтальная составляющая поляризации и коэффициент поляризации оказывается существенным образом зависящим от ширины диаграммы направленности  $\theta$  и дисперсии углов наклона неровностей  $\sigma$ .

Измерения коэффициента поляризации радиоизлучения Луны в этой области позволяют при известных  $\epsilon$  и  $\theta$  оценить величину шероховатости ее верхнего покрова. Сравнение с результатами работы [1] показывает, что в центральной области лунного диска  $r/R_L < 0,5$  величина коэффициента поляризации не критична к форме диаграммы направленности, закону распределения неровностей и соответствует значению  $\epsilon \approx 1,5$ . В области  $0,5 \leq (r/R_L) \leq 0,9$  экспериментальная кривая [1] достаточно хорошо совпадает с расчетной для  $\sigma = 20^\circ$  и  $\epsilon = 1,5$ . Аппроксимация реальной диаграммы гауссовой кривой приводит к тому, что коэффициент поляризации на лимбе Луны не достигает максимума.

Поскольку главный лепесток реальной диаграммы достаточно хорошо описывается кривой Гаусса лишь до уровня 0,1 по мощности, целесообразно использование расчетных кривых в области  $0 \leq (r/R_L) \leq 0,9$ , для которой максимум диаграммы находится в пределах лунного диска и влияние крыльев диаграммы незначительно.

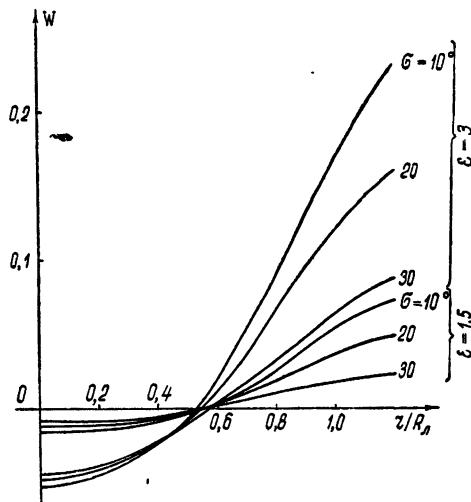


Рис. 3. Поляризационные характеристики радиоизлучения для различной степени шероховатости верхнего покрова Луны. Ширина диаграммы на половинном уровне по мощности равна  $3'$ .

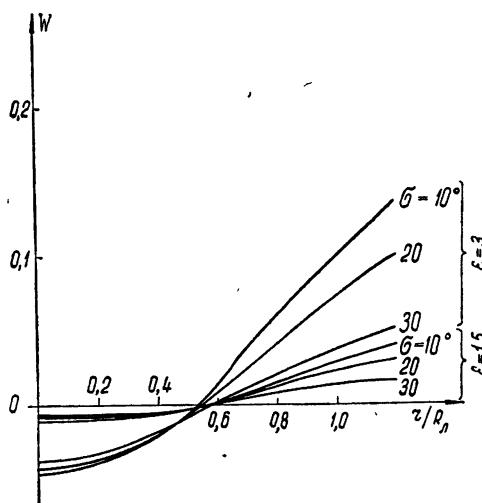


Рис. 4. Поляризационные характеристики радиоизлучения для различной степени шероховатости верхнего покрова Луны. Ширина диаграммы на половинном уровне по мощности равна  $7'$ .

В заключение выражаем благодарность В. С. Троицкому за обсуждение работы и Т. Н. Алешиной за проведение расчетов на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Соболева, Астрон. ж., 39, 1124 (1962).
2. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, Астрон. ж., 40, 297 (1963).
3. В. А. Алексеев, В. С. Троицкий, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков. Астрон. ж., 45, 1171 (1967).
4. T. Hagfors, J. Morigello, Radio Science, G4D, 1614 (1965).
5. R. Beckman, A. Spizzichino, The Scattering of Electromagnetic Waves from the Rough Surfaces, N. Y., 1963.
6. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 52 (1954).
7. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, 589 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 декабря 1967 г.

POLARIZATION CHARACTERISTICS OF RADIO EMISSION OF THE MOON  
WITH TAKING INTO ACCOUNT THE AVERAGING EFFECT OF KNIFE-TYPE  
ANTENNA PATTERN

*V. A. Alekseev, V. D. Krotikov*

The polarization characteristics of the radio emission of the Moon was theoretically studied with taking into account the averaging effect of the knife-type antenna pattern. The lunar surface is assumed to have smooth roughness with dimensions much greater than the wavelength, the statistics of surface slopes satisfies the normal law. It is shown that for the central part of the lunar disc, the polarization factor weakly depends on the dispersion of the surface slopes and the averaging effect of the antenna pattern that permits one to estimate the dielectric constant of the upper layer material of the Moon. Near the lunar limb, the polarization characteristics depends strongly on the dispersion of the surface slopes. Due to this, the degree of the lunar surface roughness may be estimated if the dielectric constant of the upper layer and the pattern half-width are known.

УДК 621.371.24

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕДЛЕННЫХ ВАРИАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ 10-САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН НА ПРИЗЕМНЫХ ТРАССАХ

*О. Н. Киселев, В. М. Короткова, Н. М. Лесков,  
Ю. М. Полищук, Г. С. Шарыгин*

Приведены результаты экспериментального исследования медленных флуктуаций амплитуды и фазы 10-сантиметровых радиоволн при распространении на приземных трассах протяженностью до 200 км в условиях среднепересеченной местности в Западной Сибири.

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по исследованию ослабления поля и медленных замираний ультракоротких радиоволн при распространении на приземных трассах. Однако большинство опубликованных работ посвящено исследованиям замираний в области прямой видимости и дальнего тропосферного распространения (ДТР). По результатам исследования распространения УКВ в зоне дифракции (примерно до 100 км) и в переходной области от дифракционного распространения к ДТР (100—200 км) имеются лишь единичные работы. Данные о медленных изменениях амплитуды и фазы, особенно при пространственном разносе, насколько нам известно, в настоящее время отсутствуют.

В нашей работе представлены результаты экспериментальных исследований медленных вариаций амплитуды и фазы сигнала 10-сантиметрового диапазона, проведенных авторами на приземных трассах (см. табл. 1) протяженностью до 200 км в Западной Сибири в 1964 и 1965 гг. Все трассы были закрытыми, причем трассы первой группы (№ 1—4, 6, 7) закрывались близко расположенными к передатчику препятствиями с неровностями на гребне, а трассы второй группы (№ 5, 8—13)—кривизной земной поверхности. Вследствие пересеченностей рельефа местности подстилающая поверхность существенно менялась вдоль трассы (пашни, пойма реки, лес, болота и т. д.), что вызывало значительные поперечные градиенты метеорологических параметров приземного слоя, медленно меняющиеся во времени.

Источником излучения служил магнетронный передатчик. Антенна передатчика рефлекторного типа с диаметром раскрытия  $16\lambda$  ( $\lambda$  — длина волн) излучала сигналы вертикальной поляризации. Приемная аппаратура с двухканальными приемниками позволяла регистрировать амплитуды и разность фаз сигналов в двух антенах, разнесенных по горизонтали поперек трассы. Использовались 7 пар приемных антенн рупорного типа с площадью раскрытия  $4,5 \times 4,8 \lambda^2$  с разносом по горизонтали от 10 до 1000 λ.

Методика измерений амплитудных и фазовых характеристик поля состояла в получении усредненных за 1—3 мин отсчетов амплитуды

Таблица 1

Номер трассы	$R$ (км)	$R_{\text{пр}}$ (км)	$\beta$ (млрад)	$W$ (дб)	$\sigma_\alpha$ (угл. мин)	$\sigma_\phi$ (град)	$d_0$ (м)	$V \overline{\Delta N^2}$
1	21	—	650	-44	0,5	9	7	5,3
2	25	—	170	-32	—	—	—	—
3	25,1	—	70	-34	—	—	—	—
4	25,2	—	40	-35	0,92 0,14 0,1	10 2 2	1,5 0,7 0,5	8,5 1,4 1
5	29,2	—	—	-21	0,02	4	0,5	1,8
6	28	8	2	-22	0,02	7	3	3,2
7	46	12	4,5	—	0,06	4	0,5	2,6
8	71,4	30	2,9	-39	0,18	8	3	3,5
9	72	30	3	—	0,76 0,4	15 3	7 0,5	3,6 2
10	72,5	30	3,2	—	0,26	10	12	3,3
11	73	30	3,9	—	0,16	3	2	3,9
12	86	—	8	-77	—	—	—	—
13	103	—	2	—	0,4	3	0,5	2
14	130	—	7,2	-73	—	—	—	—
15	182	—	9	-87	—	—	—	—

$R$ —протяженность трассы,  $R_{\text{пр}}$ —протяженность трассы за радиогоризонтом при нормальной рефракции,  $\beta$ —угол закрытия со стороны передатчика

и разности фаз в парах разнесенных антенн с периодичностью выборки 9,15 или 30 минут.

Опыты проводились в летне-осенние месяцы; их продолжительность на каждой трассе составляла от нескольких часов до 2—3 недель.

На основании результатов измерений амплитуды в одной из антенн получены экспериментальные функции распределения уровня, графики которых для трасс второй и первой групп приведены на рис. 1 и 2 соответственно.

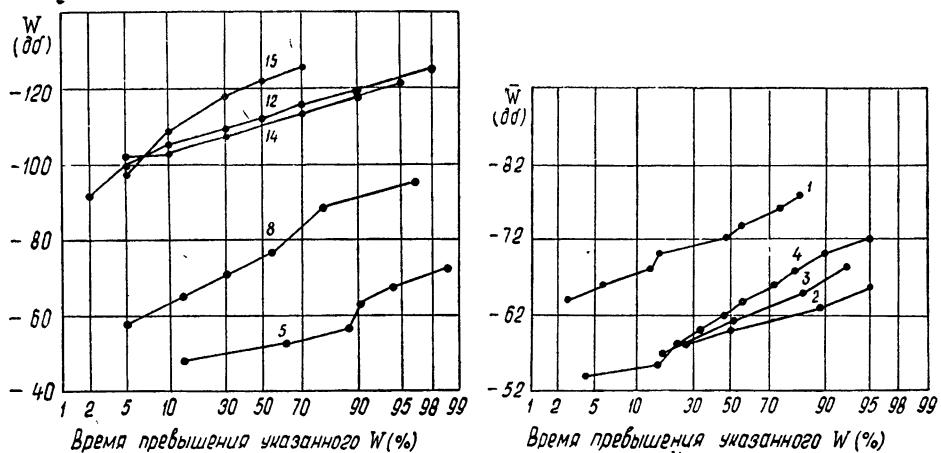


Рис. 1 и 2. Экспериментальные распределения медленных замираний сигнала.

Рисунки показывают, что медленные замирания сигнала на исследованных трассах удовлетворяют логарифмически нормальному закону распределения.

Определенные из графиков величины медианного множителя ослабления,  $W$  относительно свободного пространства (см. табл. 1) на трассах второй группы возрастают с дальностью, причем наиболее быстрое

ослабление поля наблюдается в зоне дифракции, что вполне согласуется с данными [1].

На трассах первой группы приблизительно одинаковой протяженности, отличающихся лишь экранирующим действием препятствия перед передатчиком, в среднем наблюдается увеличение ослабления с возрастанием угла закрытия передатчика.

На рис. 3 приведен график глубины медленных замираний сигнала в зависимости от дальности. Глубина замираний определялась из рис. 1 в соответствии с [2] как стандартное отклонение при логарифмически-нормальном законе распределения. Пунктирная линия заимствована из [2], где представлены результаты измерений на трассах протяженностью свыше 160 км. Видно, что наиболее сильное изменение глубины замираний с дальностью наблюдается при переходе из зоны дифракции в область ДТР.

При указанной выше инерционности регистрирующей аппаратуры эффективный вклад в медленные вариации поля определяется крупномасштабными неоднородностями тропосферы с размерами от сотен метров до нескольких километров и более. Учитывая, что такие неоднородности превышают величину зоны Френеля, можно ожидать логарифмически-нормальное распределение амплитуды поля. Экспериментальные данные [2, 4] подтверждают эти предположения.

В [5] показано, что крупномасштабные неоднородности в приземном слое атмосферы на пересеченных трассах с перелесками, полями различной обработки, водоемами и пр. вызываются неравномерностью прогрева различных участков подстилающей поверхности и неодинаковым количеством испаряющейся влаги. Все это приводит к появлению значительных градиентов коэффициента преломления в горизонтальной плоскости. Такие неоднородности не переносятся ветром, а лишь испытывают медленные изменения интенсивности при изменениях скорости ветра и некоторых других метеорологических параметров на подстилающей поверхности. Период таких изменений—от десятков минут до нескольких часов.

Представим фазу поля в точке приема в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

где  $\varphi_0$  — составляющая фазы, обусловленная распространением в неоднородной безграничной атмосфере,  $\psi$  — составляющая фазы, вызванная влиянием неровностей и неоднородностей рельефа на трассе.

Найдем разность фаз в точках, разнесенных по горизонтали попечерк трассы на расстояние  $d$ :

$$\Delta\varphi(d) = \Delta\varphi_0(d) + \Delta\psi(d), \quad (1)$$

где  $\Delta\varphi_0(d) = (2\pi/\lambda)d \sin \alpha$ ,  $\alpha$  — угол прихода волны,  $\Delta\psi$  — разность фаз на базе из-за влияния неоднородностей и неровностей рельефа.

Результаты исследования статистических свойств сигналов при пространственно-разнесенном приеме представлены в виде распределений разности фаз и структурных функций медленных изменений фазы. На рис. 4 приведены типичные гистограммы разности фаз при различных величинах разноса между антеннами (база  $d$ ), полученные

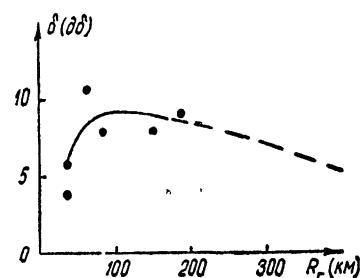


Рис. 3. Глубина медленных замираний сигнала в зависимости от дальности.

по результатам измерений в течение 104 часов на трассах № 8—11 приблизительно одинаковой протяженности, отличающихся лишь расположением передатчика на расстоянии 0,5—1,5 км.

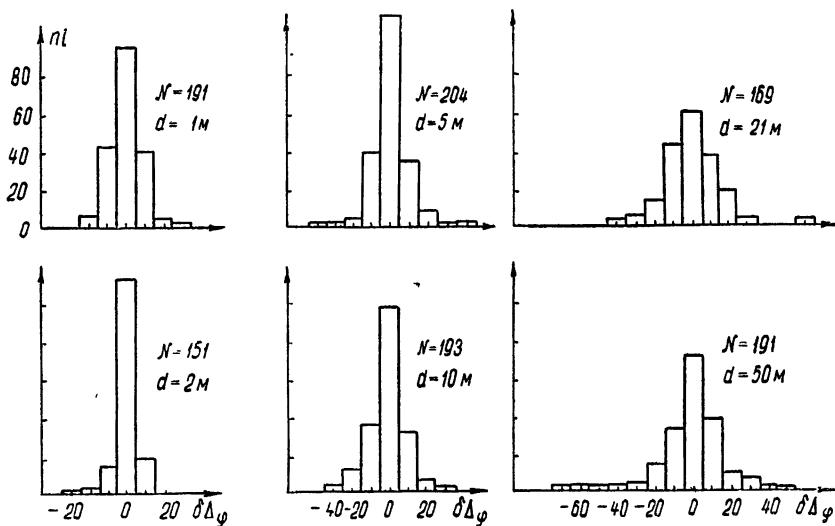


Рис. 4. Гистограммы разности фаз при различных величинах разноса между антеннами.

При логарифмически-нормальном законе распределения амплитуды сигнала в условиях крупномасштабных неоднородностей среды следует ожидать [4] нормальное распределение фазы. Следовательно, распределение разности фаз  $\Delta\varphi_0$  также будет нормальным, что определяет нормальный закон распределения углов прихода. Предполагая наряду с этим нормальность распределения неровностей, что подтверждается, в частности, результатами картографических исследований [6], следует также ожидать нормальное распределение разности фаз  $\Delta\varphi$ . Поэтому и суммарная разность фаз  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta\Phi$  должна быть распределена нормально. Это положение подтверждается экспериментальными данными (как приведенные на рис. 4, так и полученные на других трассах распределения медленных вариаций разности фаз хорошо аппроксимируются нормальным законом).

Структурная функция медленных вариаций фазы по данным изме-

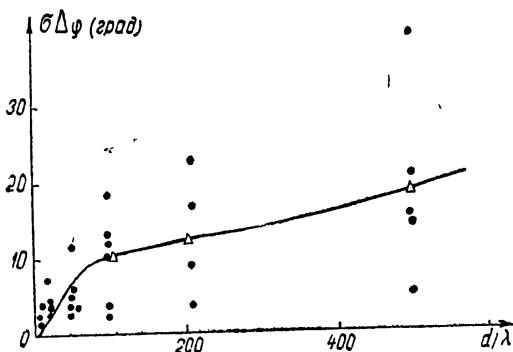


Рис. 5. Структурная функция медленных вариаций фазы.

рений на трассах № 8—11 в течение двух недель августа и сентября приведена на рис. 5. Каждая точка графика получена усреднением 30—100 отсчетов разности фаз. Разброс точек относительно среднего значения (треугольник на графике) вызывается различием метеорологических условий при проведении отдельных опытов. Для иллюстрации определяющего влияния метеорологических условий на рис. 6 приведены структурные функции фазы на трассе 2 при двух

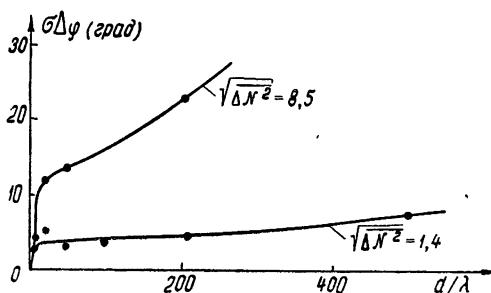


Рис. 6. Структурные функции фазы при различных метеорологических условиях.

величинах  $\overline{\Delta N^2}$  во время проведения каждого опыта. Здесь  $\Delta N$  — горизонтальный градиент приведенного показателя преломления, измеренный в конечных точках трассы (как показано в [3], поперечные и продольные градиенты показателя преломления на приземных трассах с пересеченным рельефом можно считать в среднем одинаковыми). Из рис. 6 видно, что интенсивность фазовых вариаций возрастает с увеличением  $\overline{\Delta N^2}$ .

Структурную функцию медленных вариаций фазы при горизонтальном разносе найдем, усреднив квадрат выражения (1):

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \overline{\Delta\varphi_0^2} + \overline{\Delta\varphi^2}. \quad (2)$$

При этом вариации  $\Delta\varphi_0$  и  $\Delta\varphi$  независимы, так как  $\Delta\varphi$  вызываются мелко-масштабными неровностями и неоднородностями рельефа с размерами, не превышающими базы  $d$ .

Для малых изменений угла прихода в тропосфере [1, 5] в предположении статистической однородности пространственных вариаций фазового фронта в горизонтальном направлении имеем

$$\sigma_{\Delta\varphi}(d) = \frac{2\pi d}{\lambda} \sigma_\alpha + \sqrt{2} \sigma_\varphi [1 - B_\varphi(d)], \quad (3)$$

где  $\sigma_\alpha$  — среднеквадратичное значение вариаций угла прихода в горизонтальной плоскости,  $B_\varphi(d)$  — автокорреляционная функция фазы при горизонтальном разнесении.

Экспериментальные структурные функции медленных флюктуаций фазы для всех опытов хорошо аппроксимируются выражением (3), где

$$B_\varphi(d) = \exp [-(d/d_0)^2],$$

$d_0$  — пространственный интервал корреляции медленных вариаций фазового фронта.

Выражение (3) показывает, что зависимость  $\sigma_{\Delta\varphi}$  от пространственного разноса определяется тремя параметрами: среднеквадратичными вариациями угла прихода  $\sigma_\alpha$  и фазы  $\sigma_\varphi$  в точке приема и интервалом

пространственной корреляции фазового фронта  $d_0$ . Величины этих параметров для различных опытов приведены в таблице.

Для определения статистической связи между интенсивностью фазовых вариаций и соответствующими градиентами показателя преломления вычислялась корреляция между величинами  $\sigma_a/\sqrt{R}$  и  $\sqrt{\Delta N^2}$ , измеренными в каждом опыте на разных трассах (см. табл. 1). Рассчитанный коэффициент корреляции, усредненный по совокупности трасс, равен 0,86.

Таким образом, первое слагаемое в правой части (3) описывает вариации угла прихода в горизонтальной плоскости, вызванные случайными отклонениями луча от среднего положения на трассе из-за неоднородностей тропосферы с размерами, превышающими радиус нескольких первых зон Френеля. Второе слагаемое обусловлено влиянием мелкомасштабных неровностей рельефа при случайных отклонениях луча от среднего положения и описывает мелкомасштабные вариации фазового фронта, оказывающие основное влияние на величину  $\sigma_{\Delta\varphi}$  при малых  $d$ . Благодаря этому, распределение  $\Delta\varphi$  ближе к нормальному при малых  $d$ , чем при больших (рис. 4).

Из графика видно, что с увеличением  $d$  появляются отклонения разности фаз с малыми плотностями вероятности, обусловленные возрастающими с разносом флуктуациями угла прихода.

Авторы благодарят Б. С. Рыбакова, А. В. Лопатина, Н. И. Барабанова, В. И. Тисленко и Г. Д. Носкову за помощь в проведении трудоемких экспериментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Арманд и др., Дальнее тропосферное распространение УКВ, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. А. И. Калинин, Расчет трасс радиорелейных линий, изд. Связь, М., 1964.
3. М. Т. Прилепин, Геодезия и картография, № 3, 20 (1957).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной среде, изд. Наука, М., 1967.
5. О. Н. Киселев, Рефракция радиоволн в приземном слое атмосферы, сб. Доклады научно-технической конференции, посвященной Дню Радио, изд. Томского ун-та, Томск, 1966.
6. H. S. Haugе, R. K. Mooge, J. Res. NBS, D-65, 427 (1961).

Томский институт радиоэлектроники  
и электронной техники

Поступила в редакцию  
2 октября 1967 г.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SLOW AMPLITUDE AND PHASE VARIATIONS OF 10 cm RADIO WAVES ON TRACES NEAR THE EARTH

O. N. Kiselev, V. M. Korotkova, N. M. Leskov, Yu. M. Polishchuk,  
G. S. Sharygin

The authors present the experimental data on slow amplitude and phase fluctuations of 10 cm radio waves in propagating on traces near the Earth extended up to 200 km under the conditions of the meanrugged terrain in the West Siberia.

УДК 551.510.535

## К ТЕОРИИ ОБРАЗОВАНИЯ ВЫТЯНУТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В СЛОЕ F2 ИОНОСФЕРЫ

Б. В. Троицкий

Проведено исследование устойчивости ионосферной плазмы применительно к слою  $F2$  с учетом градиента плотности и регулярного дрейфового движения заряженных частиц. Показано, что плазма неустойчива относительно возмущений желобкового типа. Эта неустойчивость может служить причиной образования вытянутых мелкомасштабных неоднородностей в слое  $F2$  ионосферы.

В [1] в качестве механизма образования неоднородностей в слое  $F2$  ионосферы предложена плазменная гравитационная неустойчивость желобкового типа. Система, состоящая из слабонеоднородной, частично ионизированной плазмы, помещенной в магнитное поле и поле тяжести, описывалась с помощью кинетических уравнений для электронов и ионов в дрейфовом приближении с использованием упрощенного вида интеграла столкновений БГК. Кроме того, были сделаны следующие предположения:

- 1) плазма квазинейтральна,  $n_e = n_i$ ;
- 2) плазма замагничена,  $(\Omega \tau)_e \gg 1$ ,  $(\Omega \tau)_i \gg 1$   
 $\tau_e$  и  $\tau_i$  — среднее время между столкновениями для электронов и ионов соответственно,  $\Omega_e$  и  $\Omega_i$  — гирочастота электронов и ионов;
- 3) постоянные электрические поля отсутствуют, а электрическое поле возмущения потенциально,  $E = -\nabla \varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал;
- 4) магнитное поле однородно и направлено по оси  $z$ ;
- 5) концентрация заряженных частиц в равновесном состоянии убывает вдоль оси  $x$ ; по оси  $x$  направлен также вектор  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести;
- 6) возмущения зависят от времени и координат по закону  $\exp(-i\omega t + ik\mathbf{r})$  и распространяются почти поперек магнитному полю, т. е.  $k_y \gg k_x \gg k_z$ , причем  $k_y \gg x$ , где  $x = -\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$ ;
- 7) частота колебаний  $\omega \ll \nu_e, \nu_i, \Omega_e, \Omega_i$ .

Ниже при тех же предположениях кинетические уравнения решены в более общем по сравнению с [1] виде с учетом регулярного дрейфа заряженных частиц, совершающего под действием произвольных сторонних сил. Последнее позволяет рассмотреть возможность образования неоднородностей за счет неустойчивости дрейфовых движений, которая была описана на основе решения системы квазигидродинамических уравнений Гершманом [2].

Кинетическое уравнение в дрейфовом приближении имеет вид [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_r(Vf) + \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{dv_z}{dt} f \right) = I_{st},$$

где

$$I_{st} = -\nu f_1 + \nu \frac{n_1}{n_0} f_0,$$

$$f_0(x, v_z) = \left[ \frac{m}{2\pi T(x)} \right]^{1/2} n_0(x) \exp \left[ -\frac{mv_z^2}{2T(x)} \right],$$

$$V = v_z z_1 + c \frac{[EH]}{H^2} + \frac{c}{eH^2} [FH] + U_0,$$

$$F = -\frac{d}{dt} cm \frac{[EH]}{H^2} + mg,$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} \frac{(EH)}{H},$$

$$f = f_0 + f_1, \quad f_0 \gg f_1.$$

Здесь  $T$  — температура в энергетических единицах, индексами 0 и 1 обозначены соответственно равновесные значения величин и их малые возмущения,  $U_0$  — скорость учитываемого дополнительного дрейфа.

Для простоты допустим, что  $U_{e0}=U_{i0}$  — скорости дрейфа электронов и ионов равны и направлены по оси  $y$ . Пренебрегая действием силы инерции и поля тяжести на электроны, получим для возмущения плотности  $n_{1e} = \int f_1 dv_z$  приближенное выражение

$$\begin{aligned} \frac{n_{1e}}{n_0} \left[ 1 - \frac{i\nu_{el}}{k_z v_{T_e}} Y(z_e) \right] &= \frac{e\varphi}{T_e} \left\{ \frac{\omega_1}{k_z v_{T_e}} Y(z_e) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_3}{k_z v_{T_e}} \left[ z_e^2 Y(z_e) - z_e - \frac{1}{2} Y(z_e) \right] - [z_e Y(z_e) - 1] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nu_{el}$  — частота столкновений электронов с ионами, а также приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} v_{T_e} &= \left( \frac{2T_e}{m_e} \right)^{1/2}, \quad \omega_1 = \frac{k_y T_e \chi}{m_e \Omega_e}, \quad \omega_3 = \frac{k_y T_e \eta_{le}}{m_e \Omega_e}, \\ \eta_{le} &= -\frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dx}, \quad z_e = \frac{\omega - k_y U_0 + i\nu_{el} + i \operatorname{div} U_0}{k_z v_{T_e}}, \end{aligned}$$

$$Y(z) = 2e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt - i\sqrt{\pi} e^{-z^2} — функция Крампа.$$

Аналогично для ионов с учетом силы тяжести, силы инерции и конечного ларморовского радиуса вращения можно получить

$$\begin{aligned} \frac{n_{1i}}{n_0} \left[ 1 - \frac{i\nu_{ln}}{k_z v_{T_i}} Y(z_i) \right] &= \frac{e\varphi}{T_i} \left\{ \frac{\omega_2(1-s)}{k_z v_{T_i}} Y(z_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_4(1-s)}{k_z v_{T_i}} \left[ z_i^2 Y(z_i) - z_i - \frac{1}{2} Y(z_i) \right] + [z_i Y(z_i) - 1] - \frac{s\omega'}{k_z v_{T_i}} Y(z_i) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega - k_y U_0 + \frac{k_y g}{\Omega_i}, \quad \omega_2 = \frac{k_y T_i \chi}{m_i \Omega_i}, \quad \omega_4 = \frac{k_y T_i \eta_{li}}{m_i \Omega_i}, \\ s &= \frac{k_y^2 T_i}{m_i \Omega_i^2}, \quad z_i = \frac{\omega' + i\nu_{ln} + i \operatorname{div} U_0}{k_z v_{T_i}}, \end{aligned}$$

а  $\nu_{ln}$  — частота столкновений ионов с нейтралами.

С учетом конечных размеров радиуса вращения уменьшается эффективное электрическое поле, вызывающее дрейф. В полученном выражении (2) это приводит к появлению коэффициента  $(1 - s)$  при  $s \ll 1$  у членов, содержащих  $\omega_2$  и  $\omega_4$ .

Используя условие квазинейтральности и представление функции  $Y$  в виде ряда

$$Y(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{4z^5} + \dots$$

при больших  $z$ , можно получить дисперсионное уравнение, которое не приводится из-за громоздкого вида.

Для анализа результатов рассмотрим частные случаи.

1)  $U_0 = 0$ . Приближенное дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^2 + \omega \left[ \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} + i(\omega_{se} + \omega_{si}) + \frac{\omega_{si}}{v_{in}} \left( \omega_2 + \frac{\omega_4}{2} \right) - \frac{\omega_{se}}{v_{ei}} \left( \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \right) \right] + \\ + \kappa g + i \left( \omega_{se} \frac{k_y g}{\Omega_i} + \omega_{si} \omega_2 - \omega_{se} \omega_1 \right) - \omega_{se} k_z^2 D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + \\ + i \left[ \omega_{si} \frac{k_z^2 D_e}{v_{in}} \left( \omega_2 + \frac{\omega_4}{2} \right) - \omega_{si} \frac{k_z^2 D_e}{v_{ei}} \left( \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \right) \frac{T_i}{T_e} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\omega_{se} = \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\Omega_e \Omega_i}{v_{ei}}, \quad \omega_{si} = \frac{k_z^2}{k_y^2} \frac{\Omega_i^2}{v_{in}}, \quad D_e = \frac{T_e}{m_e v_{ei}}, \quad D_i = \frac{T_i}{m_i v_{in}}.$$

При  $k_z \rightarrow 0$  (3) сводится к уравнению

$$\omega^2 + \omega \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} \right) + \kappa g = 0,$$

решение которого дает для мнимой части частоты

$$\gamma = \pm \left[ \kappa g - \frac{1}{4} \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

что представляет собой известный в физике плазмы результат [4].

При увеличении  $k_z$ , когда  $\omega_{se} + \omega_{si} \gg \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i}, \frac{\omega_{si}}{v_{in}} \left( \omega_2 + \frac{\omega_1}{2} \right)$ , а  $\kappa g$ ,

кроме того, превышает остальные свободные члены в (3), имеем один из видов дрейфово-диссипативной неустойчивости с инкрементом

$$\gamma \simeq \frac{2\kappa g}{\omega_{se} + \omega_{si}}. \quad (5)$$

Дальнейшее увеличение  $k_z$  приводит к тому, что система становится устойчивой, а мнимая часть частоты

$$\gamma = -\xi k_z^2 D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) < 0$$

( $\xi$  — коэффициент порядка единицы) определяет затухание возмущений из-за продольной, амбиполярной диффузии. Аналогичный вид затухания получен в [2].

2)  $\mathbf{U}_0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{U}_0 \neq 0$ . Для простоты предположим, что  $k_z = 0$ . В результате вместо (1) и (2) получим

$$\frac{n_{1e}}{n_0} = \frac{e\varphi}{T_i} \frac{\omega_2}{\omega - k_y U_0 + i \operatorname{div} \mathbf{U}_0},$$

$$\frac{n_{1I}}{n_0} = \frac{e\varphi}{T_i} \frac{\omega_2(1-s) - s \left( \omega - k_y U_0 + \frac{k_y g}{\Omega_i} \right)}{\omega - k_y U_0 + \frac{k_y g}{\Omega_i} + i \operatorname{div} \mathbf{U}_0}.$$

Дисперсионное уравнение при этом будет иметь вид

$$\omega^2 + \omega \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} - 2k_y U_0 + i \operatorname{div} \mathbf{U}_0 \right) + \kappa g -$$
(6)

$$- k_y U_0 \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} \right) + k_y^2 U_0^2 + i \operatorname{div} \mathbf{U}_0 \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} - k_y U_0 \right) = 0,$$

а решение его

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} - 2k_y U_0 + i \operatorname{div} \mathbf{U}_0 \right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \left[ \left( \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i} - i \operatorname{div} \mathbf{U}_0 \right)^2 - 4\kappa g \right]^{1/2}.$$

При условии  $\operatorname{div} \mathbf{U}_0 \gg \omega_2 + \frac{k_y g}{\Omega_i}$  инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ -\operatorname{div} \mathbf{U}_0 \pm [(\operatorname{div} \mathbf{U}_0)^2 + 4\kappa g]^{1/2} \right\}.$$

Если  $\kappa = 0$ , то  $\gamma = -\operatorname{div} \mathbf{U}_0$  (результат, полученный Гершманом в [2]). Если  $\operatorname{div} \mathbf{U}_0 < 0$ , то плазма неустойчива.

Таким образом, неустойчивость плазмы, а следовательно, образование неоднородностей в слое F2 ионосферы, обусловлена как дрейфовым движением заряженных частиц ( $\operatorname{div} \mathbf{U}_0 \neq 0$ ), так и регулярным градиентом концентрации в присутствии магнитного и гравитационного полей. Характер изменений  $\mathbf{U}_0$  в зависимости от широты, высоты и времени суток не совсем еще ясен, поэтому трудно сделать какие-либо оценки и предсказания относительно распределения и поведения неоднородностей.

Качественное описание распределения неоднородностей, которые могут быть образованы за счет неустойчивости с инкрементами (4) и (5), дано в [1]. Недостатком теории является слишком большая вытянутость неоднородностей. Степень анизотропии  $\dot{e} = k_y/k_z \gg 1$ , если считать, что размеры неоднородностей порядка длины волны. По-видимому, рассматриваемый механизм может привлекаться лишь для объяснения происхождения мелкомасштабных неоднородностей, расположенных вблизи максимума слоя F2 и ответственных за мерцание радиоволн и флукутации сигналов от ИСЗ. Эти неоднородности, судя по результатам экспериментальных наблюдений, ориентированы вдоль силовых линий магнитного поля Земли, степень анизотропии достигает 20 и более [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Коваленко, Б. В. Троицкий, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 5, 925 (1966).
2. Б. Н. Гершман, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 878 (1963).
3. А. А. Веденов, Теория турбулентной плазмы, Итоги науки, ВИНИТИ, 1965.
4. Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
5. G. S. Kent, J. R. Koster, Ann. Geophys., 22, № 3, 405 (1966).

Сибирский научно-исследовательский физико-технический  
институт при Томском университете

Поступила в редакцию  
20 февраля 1968 г.

TO THE THEORY OF FORMATION OF PROLATE IRREGULARITIES  
IN IONOSPHERIC F2 REGION

*B. V. Troitskii*

The stability of ionospheric plasma in applying to  $F_2$  region is studied taking into account the density gradient and regular drift motion of charged particles. The plasma is shown to be unstable relative to the groove type perturbation. This instability may be the reason for the formation of prolate small-scale irregularities in the ionospheric  $F_2$  region.

---

УДК 533.932

## О ДИФФУЗИИ СИЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В СЛАБОИОНIZИРОВАННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев*

Рассмотрена амбиполярная диффузия сильных неоднородностей электронной концентрации ( $|\Delta N| \lesssim N$ ) в слабоионизированной плазме во внешнем магнитном поле  $H_0$ . Показано, что при некоторых ограничениях расплывание сильных возмущений  $N$  описывается уравнением диффузии, полученным в линейном приближении

При решении задач о диффузионном расплывании неоднородностей электронной (ионной) концентрации  $N$  в слабоионизированной магнитоактивной плазме основные результаты получены из анализа линеаризованных квазигидродинамических уравнений [1–4]. Вследствие линейности используемых уравнений детальное исследование в настоящее время проведено только для слабых неоднородностей, когда  $|\Delta N|/N \ll 1$ , где  $\Delta N$  — изменения концентрации, связанные с нерегулярностями в плазме. Естественно, что в реальных условиях (например, в ионосфере) часто приходится иметь дело с сильными неоднородностями, для которых  $|\Delta N| \lesssim N$ . Ниже покажем, что для описания диффузии очень широкого класса таких неоднородностей могут быть приближенно применимы те же уравнения, что и в случае  $|\Delta N| \ll N$ . При учете наряду с диффузией увлечения заряженных частиц нейтральными, приводящего к перемещению нерегулярностей плазмы, возможности применения указанных уравнений становятся более ограниченными.

Необходимо подчеркнуть, что, хотя мы при  $|\Delta N| \sim N$  и откажемся от полной линеаризации исходных квазигидродинамических уравнений, в последних будет пренебрежено рядом нелинейных слагаемых. Анализ возможности этих пренебрежений показывает, что соответствующие ограничения не связаны с требованием  $|\Delta N| \ll N$  и, таким образом, не препятствуют исследованию диффузии сильных неоднородностей.

При наличии внешнего магнитного поля  $H_0$  и в предположении об изотермическом характере процессов квазигидродинамические уравнения для электронов и ионов могут быть записаны в виде [5]

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{x T}{mN} \nabla N - \frac{eE}{m} - \omega_H [\mathbf{v}_e \tau] - v_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{u}) + \frac{1}{mN} \eta_e \Delta \mathbf{v}_e; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{x T}{MN} \nabla N + \frac{eE}{M} + \Omega_H [\mathbf{v}_i \tau] - v_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) + \frac{1}{MN} \eta_i \Delta \mathbf{v}_i; \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}(N \mathbf{v}_e) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N \mathbf{v}_i) = 0. \quad (3)$$

В этих уравнениях  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$  — скорости электронов и ионов,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $m$  и  $M$  — массы электрона и иона,  $\omega_H = eH_0/mc$  и  $\Omega_H = eH_0/Mc$  — гирочастоты,  $\tau$  — единичный вектор

в направлении  $H_0$ ,  $\eta_e$  и  $\eta_i$  — динамические вязкости (слагаемые со второй вязкостью не выписаны). Далее в (1), (2)  $\nu_e$  и  $\nu_i$  — частоты соударений электронов и ионов с молекулами. Соударения между заряженными частицами не принимаются во внимание из-за слабой ионизации плазмы. Частоты столкновений  $\nu_e$  и  $\nu_i$  считаются не зависящими от координат.

В силу квазинейтральности плазмы концентрации ионов и электронов приняты одинаковыми, так что  $N_e = N_i = N$ . В то же время учтено электрическое поле  $E$ , возникающее при наличии малой разницы между  $N_e$  и  $N_i$  (амбиполярное приближение). Движение молекул считается заданным, а скорость  $u$  — не зависящей от времени.

При записи (1), (2) было учтено, что температуры ионов и электронов одинаковы ( $T_e = T_i = T$ ), а давления электронов и ионов являются изотропными и равными ( $p_e = p_i = N \times T$ , где  $\times$  — постоянная Больцмана).

Как и в ряде предшествующих работ [6–8], будем исходить из более простых по сравнению с (1) и (2) уравнений

$$N\ddot{v}_e + qN[\dot{v}_e \tau] = Nu - D_e \nabla N - \mu_e NE; \quad (4)$$

$$N\ddot{v}_i - QN[\dot{v}_i \tau] = Nu - D_i \nabla N + \mu_i NE, \quad (5)$$

где  $q = \omega_H/\nu_e$ ,  $Q = \Omega_H/\nu_i$ ,  $D_e = \kappa T/m\nu_e$ ,  $D_i = \kappa T/M\nu_i$ ,  $\mu_e = e/m\nu_e$  и  $\mu_i = e/M\nu_i$ .

Переход от (1), (2) к (4), (5) является законным при выполнении следующих условий:

$$M^2 \ll 1, \quad Kn^2 \ll 1, \quad (6)$$

где  $M$  и  $Kn$  — числа Маха и Кнудсена, равные соответственно отношениям скорости диффузии  $v_s$  или скорости  $u$  к тепловой скорости ионов,  $v_{T_i}$  ( $M = v_s/v_{T_i}$  или  $M = u/v_{T_i}$ ), и длины свободного пробега для заряженных частиц  $l_{cb}$  к характерному размеру неоднородности  $L$  ( $Kn = l_{cb}/L$ ). Таким образом, согласно первому из ограничений (6) упорядоченные скорости должны быть меньше тепловых. Второе из неравенств (6) выполнено, если границы неоднородностей размыты на расстояниях, превосходящих  $l_{cb}$ .

Разрешая уравнения (4) и (5) относительно  $N\ddot{v}_e$  и  $N\ddot{v}_i$  и подставляя полученные выражения в уравнения непрерывности (3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\mu_e}{1+q^2} \{ \operatorname{div}(NE) + q \operatorname{div}[\tau NE] + q^2 \operatorname{div}[\tau(NE\tau)] \} - \\ - \frac{D_e}{1+q^2} \{ \Delta N + q^2 \operatorname{div}[\tau(\nabla N\tau)] \} + \\ + \frac{1}{1+q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) + q \operatorname{div}[\tau Nu] + q^2 \operatorname{div}[\tau(Nu\tau)] \} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\mu_i}{1+Q^2} \{ \operatorname{div}(NE) - Q \operatorname{div}[\tau NE] + Q^2 \operatorname{div}[\tau(NE\tau)] \} - \\ - \frac{D_i}{1+Q^2} \{ \Delta N + Q^2 \operatorname{div}[\tau(\nabla N\tau)] \} + \frac{1}{1+Q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) - \\ - Q \operatorname{div}[\tau Nu] + Q^2 \operatorname{div}[\tau(Nu\tau)] \} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

В условиях ионосферы можно считать электрическое поле  $E$  потенциальным ( $E = -\nabla\varphi$ ) [9]. Для слабых неоднородностей, полагая  $N = N_0 + \Delta N$  ( $|\Delta N| \ll N_0$ ), можно после линеаризации уравнений (7), (8) исключить потенциал  $\varphi$ . Если же отказаться от требования  $|\Delta N| \ll N_0$ , то такого рода процедура исключения  $\varphi$  в общем случае уже не присходит.

При  $\Delta N \approx N$  поступим следующим образом. Будем считать, что

$$N \nabla\varphi = \nabla\Phi, \quad (9)$$

и определим ограничения, при которых это равенство будет приближенно выполняться. Условие (9) означает, что поле  $E$  параллельно градиенту  $N$ . Заметим, что равенство (9) имеет место при  $H_0 = 0$  или при одномерной диффузии.

Введем прямоугольную систему координат, направив ось  $z$  вдоль магнитного поля  $H_0$ . Используя предположение (9), можно свести уравнения (7), (8) к следующим:

$$\begin{aligned} m v_e \frac{\partial N}{\partial t} - \times T \Delta_1 N + e \Delta_1 \Phi + \\ + \frac{m v_e}{1+q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) + q \operatorname{div}[\tau Nu] + q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \} = 0; \\ M v_i \frac{\partial N}{\partial t} - \times T \Delta_2 N - e \Delta_2 \Phi + \\ + \frac{M v_i}{1+Q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) - Q \operatorname{div}[\tau Nu] + Q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{1+q^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ \Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{1+Q^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Из (10), (11) получаем уравнение для концентрации  $N$ , такое же, как и в теории диффузии слабых неоднородностей [8]:

$$\begin{aligned} (M v_i \Delta_1 + m v_e \Delta_2) \frac{\partial N}{\partial t} = 2 \times T \Delta_1 \Delta_2 N - \frac{m v_e \Delta_2}{1+q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) + \\ + q \operatorname{div}[\tau Nu] + q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \} - \\ - \frac{M v_i \Delta_1}{1+Q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) - Q \operatorname{div}[\tau Nu] + Q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \}. \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, исключая  $\frac{\partial N}{\partial t}$  из уравнений (10), (11), получаем

$$\begin{aligned} e \left( \frac{\Delta_2}{M v_i} + \frac{\Delta_1}{m v_e} \right) \Phi = \times T \left( \frac{\Delta_1}{m v_e} - \frac{\Delta_2}{M v_i} \right) N - \frac{1}{1+q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) - \\ - Q \operatorname{div}[\tau Nu] + Q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \} + \\ + \frac{1}{1+Q^2} \{ \operatorname{div}(Nu) + q \operatorname{div}[\tau Nu] + q^2 \operatorname{div}[\tau(\tau Nu)] \} = \end{aligned}$$

$$= \times T \left( \frac{\Delta_1}{m v_e} - \frac{\Delta_2}{M v_i} \right) N + \frac{q^2}{(1+q^2)(1+Q^2)} \operatorname{div}(N u_{\perp}) - \\ - \frac{q(1+qQ)}{(1+q^2)(1+Q^2)} \operatorname{div}[\tau N u_{\perp}]. \quad (13)$$

При переходе ко второму равенству в (13) учтено, что  $q/Q \approx \sqrt{M/m} \gg 1$ .

В случаях, когда поперечными по отношению к магнитному полю  $H_0$  движениями нейтральных частиц можно пренебречь ( $u_{\perp} = 0$ ), равенство (13) упрощается:

$$e \left( \frac{\Delta_2}{M v_i} + \frac{\Delta_1}{m v_e} \right) \Phi = \times T \left( \frac{\Delta_1}{m v_e} - \frac{\Delta_2}{M v_i} \right) N. \quad (14)$$

Из (14) легко получить условия параллельности векторов  $E$  и  $\nabla N$ . Достаточно потребовать, чтобы

$$\Delta_1 \gg \frac{m v_e}{M v_i} \Delta_2. \quad (15)$$

Тогда, согласно (14),  $\Phi \approx \times TN/e$  и  $E = -\nabla\Phi/N = -\times T \nabla N/eN$ . Если ввести характерные размеры неоднородностей вдоль  $L_{\parallel}$  и поперек магнитного поля  $L_{\perp}$ , то неравенство (15) можно записать в виде\*

$$L_{\parallel}^2 \ll \frac{M v_i}{m v_e} \left( 1 + \frac{\Omega_H^2}{v_i^2} \right) L_{\perp}^2. \quad (16)$$

Ограничение (16) совпадает с введенным ранее в работе [1] при анализе диффузии слабых неоднородностей. При этом из (12) приходим, если  $u = 0$ , к известному в линейном приближении уравнению диффузии [1]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_{\parallel} \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{v_i^2}{v_i^2 + \Omega_H^2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \right], \quad (17)$$

где  $D_{\parallel} = 2D_i$  — коэффициент амбиполярной диффузии в направлении магнитного поля  $H_0$ . Предположение о том, что  $E \uparrow \nabla N$ , эквивалентное равенству (9), выполнено не только при условии (16), но и при ограничении, обратном (15), которое для достаточно сильной анизотропии ( $\omega_H \Omega_H \gg v_e v_i$ )\*\* можно записать в виде

$$L_{\parallel}^2 \gg \frac{M v_i}{m v_e} \left( 1 + \frac{\Omega_H^2}{v_i^2} \right) L_{\perp}^2. \quad (18)$$

Условие (18) может реализоваться только для неоднородностей, сильно вытянутых в начальный момент времени вдоль поля  $H_0$ . В последнем случае из (12) приходим (при  $u = 0$ ) к уравнению диффузии

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_{\parallel e} \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \frac{v_e^2}{v_e^2 + \omega_H^2} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \right], \quad (19)$$

\* Условие (16) сохраняется и при исчезающем магнитном поле ( $\Omega_H \ll v_i$ ). Однако фактически при  $H_0 \rightarrow 0$  диффузия становится изотропной, а смысл неравенства  $L_{\parallel}^2 \ll L_{\perp}^2 M v_i / m v_e$  или обратного ему состоит в том, что соответствующие малые поправки на анизотропию обусловлены либо ионами, либо электронами.

\*\* Это неравенство выполнено, например, в  $E$ - и  $F$ -областиах ионосферы.

где как продольный коэффициент диффузии  $D_{\parallel e} = 2\kappa T/m v_e$ , так и поперечный  $D_{\perp e} = D_{\parallel e} v_e^2 / (v_e^2 + \omega_H^2)$  определяются в первую очередь движением электронов. Для поперечной диффузии при  $\omega_H \Omega_H \gg v_e v_i$  этот результат получается и из линейной теории. Случай  $\omega_H \Omega_H \leq v_e v_i$  в связи с (18), (19) мы разбирать здесь не будем, так как он в применении к ионосфере относительно малоинтересен.

Таким образом, при  $u_{\perp} = 0$  остается неясным вопрос об уравнении диффузии для сильных неоднородностей только в промежуточной области  $L_{\parallel}^2 \sim L_{\perp}^2 (m v_i / m v_e) (1 + \Omega_H^2 / v_e^2)$ . Следует, однако, иметь в виду, что и для слабых неоднородностей в этой области уравнение (12) не сводится к стандартному виду типа (17) или (19).

Если скорость движения нейтральных частиц имеет компоненту  $u_{\perp}$  то векторы  $E$  и  $\nabla N$ , вообще говоря, не параллельны. Однако при достаточно малых  $u_{\perp}$  можно приближенно принимать, что  $E \uparrow \nabla N$ . В случае (16) последнее имеет место при двух ограничениях, которые следуют из (13):

$$\begin{aligned} u_{\perp} &\ll D_e \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}^2} \frac{(1+q^2)(1+Q^2)}{q^2}, \\ u_{\perp} &\ll D_e \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}^2} \frac{(1+q^2)(1+Q^2)}{q(1+qQ)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для случая сильного магнитного поля, когда  $Q \gg 1$ , эти неравенства можно заменить одним

$$u_{\perp} \ll v_{T_e} Q l_{cb} L_{\perp} / L_{\parallel}^2,$$

где  $l_{cb}$  — длина свободного пробега электронов,  $v_{T_e}$  — средняя тепловая скорость электронов. При  $Q \ll 1$  эти условия могут выполняться для довольно больших скоростей, которые у нас ограничены из других соображений в соответствии с первым из условий (6).

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство, проясняющее смысл используемых ранее неравенств. Речь идет о требовании (15) и противоположном неравенстве, которые при некоторых оговорках эквивалентны условиям (16) и (18). При ограничениях (15), (16) из (14) приближенно получаем  $E = -\nabla \psi / N = -(\kappa T/e) \nabla N / N$ . В то же время при обратном условии  $\nabla \psi \ll m v_e \Delta_2 / M v_i$  (см. (18)) имеем соотношение  $E = (\kappa T/e) \nabla N / N$ . Изменение знака внутреннего электрического поля по отношению к направлению  $\nabla N$  связано с характерными особенностями диффузионных процессов.

В случае, когда выполнено условие (15), в соответствии с (17) скорость диффузии определяется движением ионов. Электроны в основном перемещаются вместе с ионами, но все-таки в целом несколько опережают ионы. В обратном случае, возможном при довольно специфических начальных конфигурациях, более жестко фиксируется движение электронов (19).

Из сказанного ясны причины изменения знака в соотношениях, связывающих векторы  $E$  и  $\nabla N$ . Сделанные замечания в какой-то мере проясняют различие между двумя используемыми ранее приближениями. Как для слабых, так и для сильных неоднородностей ситуация остается неясной в промежуточной области  $L_{\parallel}^2 \sim L_{\perp}^2 (1 + \Omega_H^2 / v_i^2) M v_i / m v_e$ , где поле  $E$  меняет свое направление, обращаясь в нуль при  $\nabla N \neq 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 44, вып 4, 1302 (1963).
2. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 2, 255 (1966).
3. Н. П. Марьин, Инж. физ. ж., 7, № 3, 97 (1964).
4. F. Villars, H. Feshbach, J. Geophys. Res., 68, № 5, 1303 (1963).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. В. Фиала, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 3, 597 (1966).
7. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 4, 679 (1965).
8. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН, 91, вып. 4, 609 (1967).
9. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 2, 251 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 марта 1968 г.

DIFFUSION OF STRONG INHOMOGENEITIES IN A WEAKLY-IONIZED  
MAGNETOACTIVE PLASMA

*B. N. Gershman, G. I. Grigor'ev*

The ambipolar diffusion of strong inhomogeneities of the electron density ( $|\Delta N| \lesssim N$ ) in a weakly-ionized plasma in the external magnetic field  $H_0$  is considered. It is shown that at some limitations the diffusion of strong perturbations  $N$  is described by the diffusion equation obtained in a linear approximation.

УДК 533.95

## О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИНТЕНСИВНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

*B. N. Цытович, A. С. Чихачев*

Показано, что во многих случаях взаимодействия интенсивных волн необходимо учитывать изменение распределения частиц, участвующих в нелинейном взаимодействии. Взаимодействием волн внутри пакета можно пре-небречь, если волны являются достаточно сильными. Взаимодействие между сильными пакетами не изменяется. Показано также, что взаимодействие сильных и слабых волн не изменяется из-за рассмотренного эффекта, если величина и направление импульса слабых волн заметно отличаются от величины и направления импульса сильных волн.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основные уравнения, описывающие нелинейное взаимодействие случайных плазменных колебаний в отсутствие соударений, разобраны подробно [1]. Для исследования динамики турбулентной плазмы и разнообразных приложений делались попытки решения этих уравнений в некоторых упрощающих предположениях [2-6]. Одним из существенных предположений являлась возможность пренебрежения влиянием колебаний плазмы на функцию распределения частиц плазмы, принимающих участие в процессах индуцированного рассеяния колебаний [1]. В настоящей работе показывается, что такое пренебрежение в ряде случаев недопустимо. В частности, для одномерного нелинейного взаимодействия (все взаимодействующие волны в течение всего процесса нелинейного взаимодействия имеют одно и то же направление) пренебрежение изменением состояния рассеивающих частиц допустимо лишь при весьма малых значениях энергии ленгмюровских пульсаций. Говоря о взаимодействии интенсивных плазменных волн, мы будем иметь в виду именно тот случай, когда изменение функции распределения рассеивающих частиц существенно. При этом характерные времена нелинейного взаимодействия оказываются существенно меньшими, чем в случае, когда изменения функции распределения малы.

Рассмотрим взаимодействие ленгмюровских волн. Как известно, оно осуществляется в результате индуцированного рассеяния на электронах и ионах плазмы [1]. Основным аргументом для возможности пренебрежения изменением распределения частиц обычно служит то, что указанное рассеяние происходит на тепловых частицах плазмы, а энергия турбулентных пульсаций намного меньше средней тепловой энергии частиц (приближение слабой турбулентности). Однако в случае, когда взаимодействующие волны имеют близкие направления волновых векторов, в рассеянии принимают участие не все тепловые электроны и лишь те из них, проекция скоростей которых на  $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$  ( $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  — волновые векторы взаимодействующих волн) порядка  $v_{T_e}(v_{T_e}/v_\Phi) \ll v_{T_e}$ . Таким образом, обратное действие волн испытывает лишь малая доля  $\sim v_{T_e}/v_\Phi$  тепловых частиц. Искажение их функции распределения слабо

сказывается на полной функции распределения, которая с хорошей точностью является максвелловской. Однако именно это искажение определяет эффективность нелинейного взаимодействия (при наличии, например, сильного продольного магнитного поля, препятствующего тому, чтобы рассеивающие частицы получали импульс поперек поля, и делающего их движение одномерным). Ситуация здесь сходна с известными квазилинейными эффектами, которые приводят к выравниванию функции распределения и изменению линейных эффектов. Ниже показывается, что аналогичные эффекты возможны и для нелинейного взаимодействия.

## 1. ОДНОМЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Рассмотрим одномерную модель, предполагая, что направления взаимодействующих интенсивных волн совпадают в течение всего процесса взаимодействия. Если  $v_\phi^t = \omega_{0e}/k^t \gg v_{T_e} (m_i/m_e)^{1/2}$ , то вероятность  $w$  рассеяния на электронах зависит лишь от проекции скорости частиц на указанное направление [1], обозначаемое  $v_\parallel$ . То же утверждение справедливо при рассеянии на ионах [1], когда параллельно  $v_\phi^t \gg v_{T_e}^2/v_{T_i}$ . Это приводит к тому, что в уравнение, описывающее нелинейное взаимодействие, входят лишь

$$f(p_\parallel) = \int f_p \frac{dp_\perp}{(2\pi)^2}, \quad N_k = \int N_k \frac{dk_\perp}{(2\pi)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = N_k \int N_{k_1} \frac{dk_1}{2\pi} w(k, k_1)(k - k_1) \frac{\partial f(p_\perp)}{\partial p_\perp} \frac{dp_\parallel}{2\pi}.$$

Коэффициент диффузии  $D_{ij}$ , определяющий изменение функции распределения частиц, имеет единственную компоненту  $D_{\perp\perp} = D$ , зависящую лишь от  $v_\parallel$ . Это позволяет проинтегрировать уравнение диффузии по перпендикулярным проекциям  $p$  и получить уравнения для  $f_\perp$ :

$$\frac{\partial f_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\parallel} D \frac{\partial f_\perp}{\partial v_\parallel} + \left( \frac{\partial f_\perp}{\partial t} \right)_{st}; \quad (2)$$

$$D(v_\parallel) = \frac{\hbar^2}{m^2} \int w(k, k_1)(k - k_1)^2 N_k N_{k_1} \frac{dk dk_1}{(2\pi)^2}. \quad (3)$$

В правую часть (2) мы добавили член, описывающий изменение функции распределения из-за соударений.

Оценим коэффициент диффузии для узкого пакета волн  $\Delta k \ll k_0$ . При рассеянии на электронах имеем ( $v_\phi \gg v_{T_e} (m_i/m_e)^{1/2}$ , [1])

$$D(v_\parallel) = \frac{2\pi}{3} \frac{e^4 \hbar^2}{m^4 v_{T_e}^2 \omega_{0e}} \int |k_-| dk_- N \frac{v_\parallel \omega_{0e}}{3v_{T_e}^2} + \frac{k_-}{2} N \frac{v_\parallel \omega_{0e}}{3v_{T_e}^2} - \frac{k_-}{2}, \quad (4)$$

где  $k_- = k - k_1$ . Коэффициент диффузии оказывается отличным от нуля, если  $v_\parallel$  близко к величине  $3v_{T_e}^2 k_0 / \omega_{0e}$  в интервале  $\Delta v_\parallel = 3v_{T_e}^2 \Delta k / \omega_{0e}$ . Так как  $k_-$  имеет порядок  $\Delta k$ , то порядок  $D(v_\parallel)$  есть

$$D(v_\parallel) = \frac{\pi}{6} \omega_{0e} \left( \frac{W^t}{nm_e v_{T_e}^2} \right)^2 v_{T_e}^2, \quad W^t = \int \frac{\hbar \omega_{0e} N_k}{2\pi} dk. \quad (5)$$

Характерное время диффузии, приводящее к существенному уменьшению  $\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}$ , составит

$$\frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \simeq \frac{D}{(\Delta v_{\parallel})^2} \simeq \frac{\pi}{6} \omega_{0e} \left( \frac{\omega_{0e}}{\Delta k v_{T_e}} \right)^2 \left( \frac{W^l}{n T_e} \right)^2. \quad (6)$$

При достаточно больших  $W^l/n T_e$  (но меньших единицы)  $\tau$  достаточно мало.

Ниже мы будем интересоваться такими нелинейными взаимодействиями, которые происходят за время, много большее  $\tau_{\text{рел}}$ . Интерес представляет случай, когда нелинейные взаимодействия протекают за времена, много меньшие времени затухания волн из-за соударений. Поэтому в силу принимаемого условия  $1/\tau_{\text{нел}} < 1/\tau_{\text{рел}}$ , а также  $1/\tau_{\text{нел}} > \nu$  (где  $\nu$  — частота столкновений электронов с другими заряженными частицами, простоты ради плазма предполагается полностью ионизированной), получим  $1/\tau_{\text{рел}} > \nu$ , что дает

$$\frac{W^l}{n T_e} \gg \frac{\Delta k v_{T_e}}{k v_{\Phi_s}} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{0e}}} \simeq \frac{\Delta k}{k} \frac{v_{T_e}}{v_{\Phi_s}} N_D^{-1/2}, \quad (7)$$

где  $N_D$  по порядку величины совпадает с числом частиц в сфере электронного дебаевского радиуса.

Мы увидим, что существенное изменение нелинейного взаимодействия из-за диффузии (6) происходит при интенсивностях, значительно больших (7), так что (7) в интересующей нас области можно считать выполненным. Процессу диффузии в пространстве скоростей препятствуют соударения частиц, стремящиеся восстановить максвелловское распределение. Для нахождения интенсивности нелинейного взаимодействия поэтому следует в (2) учесть интеграл соударения

$$\left( \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial t} \right)_{st} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} d\mathbf{p}_{\perp}.$$

Для изменения электронной функции распределения существенны электрон-электронные и электрон-ионные соударения. Используем интеграл соударений Ландау [7]

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} = \frac{\partial}{\partial p_n} \sum D_{nm}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_m} + \sum A_n^{\alpha} f \quad (\alpha = e, i), \quad (8)$$

где

$$A_n^{\alpha} = \frac{2\pi L e^4}{m_{\alpha} m_e} \int \frac{\partial f^{\alpha}(\mathbf{v}')}{\partial v_p'} \frac{u^2 \delta_{np} - u_n u_p}{u^3} d\mathbf{v}' \quad (u = v - v'),$$

$$D_{nm}^{\alpha} = \frac{2\pi L e^4}{m_e} \int f^{\alpha}(\mathbf{v}') \frac{u^2 \delta_{nm} - u_n u_m}{u^3} d\mathbf{v}', \quad (9)$$

$L$  — кулоновский логарифм.

Поскольку число частиц, принимающих участие в рассеянии, мало, их вклад в интегралы  $D_{ij}$  и  $A_i$  пренебрежимо мал. Функцию распределения  $f$  представляем в виде  $f = f_{\perp} f_{\parallel}$  максв., где  $f_{\perp}$  максв.  $= (2\pi v_{T_e}^2)^{-1} \times \exp(-v_{\perp}^2/2v_{T_e}^2)$ . При интегрировании по  $v_{\perp}$  следует учесть, что для электрон-электронных соударений  $v_{\perp} \ll v_{T_e}$ , т. е. рассматриваемые частицы в основном сталкиваются с тепловыми частицами. При рассмотрении

рении электрон-ионных соударений следует учесть, что  $v_{T_e} \ll v_{\perp} \ll v_{T_e}$ . В этом случае интеграл соударений имеет вид

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} = \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \nu \left( v_{\perp} f_{\parallel} + \frac{T_e}{m_e} \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\perp}} \right); \quad (10)$$

$$\nu = \frac{2L(\pi-1)e^4 n}{v_{T_e}^3 m_e^2}. \quad (11)$$

За время порядка (6) устанавливается равновесие между соударениями и диффузией из-за рассеяния на колебаниях  $v_{\perp}$ :

$$(v_{T_e}^2 + D(v_{\perp})) \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\perp}} = \nu v_{\perp} f_{\parallel}, \quad f_{\parallel} = \frac{n \sqrt{2\pi}}{v_{T_e}} \exp \left( - \int_0^{v_{\perp}} \frac{\nu v_{\perp} dv_{\perp}}{D(v_{\perp}) + v_{T_e}^2} \right); \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} = - \frac{n \sqrt{2\pi}}{v_{T_e}} \frac{\nu v_{\perp}}{D(v_{\perp}) + v_{T_e}^2}. \quad (13)$$

Последнее равенство написано в силу того, что существенно изменилась производная от функции распределения, но не сама функция распределения.

Необходимым условием влияния колебаний на функцию распределения является  $D \gg \nu v_{T_e}^2$ , т. е.

$$\frac{W'}{n T_e} \gg \left( \frac{\nu}{\omega_{0e}} \right)^{1/2} = \frac{1}{N_D^{1/2}}, \quad N_D \equiv \frac{\omega_{0e}}{\nu}. \quad (14)$$

Подставляя найденное значение  $\frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\perp}}$  в (1), мы получим взаимодействие в виде

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = - N_k \int N_k \frac{3(k+k_1)}{8 \sqrt{2\pi}} \frac{dk_1}{nm_e} \frac{v_{T_e} \nu}{D(\omega_-/k_-)}. \quad (15)$$

Формула (15) имеет место лишь для тех волн, для которых  $D(\omega_-/k_-)$  достаточно велико. Как было выяснено,  $D(v_{\perp})$  имеет приведенную оценку, если  $v_{\perp} \approx 3v_{T_e}^2 k / \omega_{0e}$  на интервале  $\Delta v_{\perp} = 3v_{T_e}^2 \Delta k / \omega_{0e}$ . В остальной области  $D(v_{\perp})$  резко падает. Это связано с тем, что диффузия определяется не двумя сильными волнами, а одной сильной и одной слабой волнами. Падение  $D(v_{\perp})$  приводит к тому, что согласно (13)  $\frac{\partial f_{\parallel}}{\partial v_{\perp}}$  вне  $\Delta v_{\perp}$  остается прежним. Таким образом, (15) пригодно для описания взаимодействия двух сильных волн, но не сильной и слабой волны.

Определив

$$\bar{k} = \frac{1}{\int N_k dk} \int k N_k dk,$$

нетрудно из (15) получить уравнение для узких пакетов

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\alpha \bar{k}^3, \quad \alpha = \frac{9}{V \sqrt{2\pi}} \frac{\nu v_{T_e}}{\omega_{0e}^2} \frac{nm_e v_{T_e}^2}{W'}. \quad (16)$$

Изменение во время  $\bar{k}$  определяется соотношением

$$\bar{k} = \frac{\bar{k}_0}{1 + \sigma \bar{k}_0 t}. \quad (17)$$

Эта формула описывает изменение  $\bar{k}$  сильных волн, при этом характерным временем служит  $1/\tau = \sigma \bar{k}_0$ , где  $\bar{k}_0$  — начальное значение среднего волнового числа пакета волн:

$$\frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \approx \frac{9}{V2\pi} \frac{\nu}{\omega_{0e}} \frac{v_{T_e}}{v_\Phi^0} \frac{nT_e}{W^l} \omega_{0e}, \quad v_\Phi^0 = \frac{i\omega_{0e}}{\bar{k}_0}. \quad (18)$$

Нетрудно сравнить это время с (6). Получаем условие доминирования (6), которое необходимо для справедливости (18):

$$\frac{W^l}{nT_e} \gg \left( \frac{\nu}{\omega_{0e}} \right)^{1/3} \frac{v_{T_e}}{v_\Phi} \left( \frac{\Delta k}{k} \right)^{2/3}. \quad (19)$$

Сравнивая характерное время (18) с временем взаимодействия, не учитывающим обратное действие колебаний [1]:

$$\frac{1}{\tau} \approx \omega_{0e} \frac{W^l}{nT_e} \frac{v_{T_e}}{v_\Phi}, \quad (20)$$

легко установить, что уменьшение интенсивности взаимодействия происходит в отношении

$$\frac{\nu}{\omega_{0e}} \left( \frac{nT_e}{W^l} \right) \ll 1. \quad (21)$$

Несмотря на это уменьшение эффектов, существуют условия, когда нелинейные взаимодействия могут происходить за время, намного меньшее времени соударений:

$$\frac{W^l}{nT_e} \ll \frac{v_{T_e}}{v_\Phi}. \quad (22)$$

В силу (14) это возможно лишь в том случае, если

$$\frac{\nu}{\omega_{0e}} \ll \left( \frac{v_{T_e}}{v_\Phi} \right)^2 < \frac{m_e}{m_i}. \quad (23)$$

Последнее неравенство написано из условия применимости исследуемого взаимодействия [1]. Если (22) не выполнено, то рассмотренные эффекты делают взаимодействие столь слабым, что им можно пренебречь в сравнении с линейным затуханием. Таким образом, взаимодействие волн внутри пакета может быть настолько ослабленным, что вообще может не приниматься во внимание.

Аналогичным образом рассматриваются эффекты, возникающие при рассеянии на ионах. Считая  $v_{\parallel} = 3v_{T_e}^2/v_\Phi \ll v_{T_e}$ , мы можем утверждать, что в этом случае также лишь небольшая доля ионов участвует в рассеянии. Коэффициент диффузии для ионов в одномерном случае имеет для узкого пакета оценку [1]

$$D(v_{\parallel}) = \omega_{0e} \frac{\pi}{6} \left( \frac{W^l}{nT_e} \right)^2 \left( \frac{\bar{k}}{\Delta k} \right)^2 \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^2 v_{T_e}^2 \frac{1}{(1 + T_e/T_l)^2}. \quad (24)$$

Условие, необходимое для того, чтобы колебания влияли на распределения ионов, имеет вид  $D \gg v_{\parallel}^2 v_{T_e}^2$ ,  $v_{\parallel}$  — частота ион-ионных соударе-

ний. Считая, что  $\nu_{ii} \approx (m_e/m_i)^2 (v_{T_e}/v_{T_i})^2 \nu$ , где  $\nu$ —частота электрон-электронных и электрон-ионных соударений, имеем

$$\frac{W^l}{nT_i} \gg \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \left(\frac{\nu}{\omega_{0e}}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/4} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4}. \quad (25)$$

Характерное время диффузии в  $(m_i/m_e)^2(1 + T_e/T_i)^2$  раз больше. В условиях (25) изменение среднего значения волнового числа пакета волн имеет структуру (17), а характерное время нелинейного взаимодействия имеет порядок

$$\frac{1}{\tau_{\text{рел}}} \approx \frac{9}{\sqrt{2\pi}} \frac{\nu}{\omega_{0e}} \frac{v_{T_e}}{v_\Phi} \left[\frac{T_e}{T_i}\right]^{1/2} \omega_{0e} \frac{nT_i}{W^l}. \quad (26)$$

Условие, необходимое для того, чтобы указанное нелинейное взаимодействие происходило более медленно, нежели выравнивание функции распределения ионов, имеет вид

$$\frac{W^l}{nT_i} \gg \left(\frac{\nu}{\omega_{0e}}\right)^{1/3} \frac{v_{T_e}}{v_\Phi} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{2/3} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/3}. \quad (27)$$

Для того, чтобы время нелинейного взаимодействия было меньше  $1/\nu$ , необходимо

$$\frac{W^l}{nT_i} \ll \frac{v_{T_e}}{v_\Phi} \frac{T_e}{T_i}, \quad (28)$$

а так как  $v_\Phi \gg v_{T_e}/v_{T_i}$  [1], то

$$\frac{W^l}{nT_i} \ll \sqrt{\frac{T_e m_e}{T_i m_i}}. \quad (29)$$

Совместно с (25) это дает

$$\frac{\nu}{\omega_{0e}} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{v_{T_e}}{v_\Phi}\right)^2 \frac{1}{(1+T_e/T_i)^2} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \frac{(T_e/T_i)^{1/2}}{(1+T_e/T_i)^2}. \quad (30)$$

Это условие более жесткое, нежели (23). Если (30) не выполнено, то нелинейным взаимодействием интенсивных волн внутри пакета можно пренебречь.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух интенсивных пакетов волн. Пусть  $k_1^0$  и  $k_2^0$ —средние значения волновых чисел. Если ширины пакетов  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  не перекрываются, то образование плато около  $v_1 = 3v_{T_e}^2 k_1^0 / \omega_{0e}$  не скажется на взаимодействии волн  $k_1$  и  $k_2$ ; аналогично образование плато около  $v_2 = 3v_{T_e}^2 k_2^0 / \omega_{0e}$  не оказывается на взаимодействии волн  $k_2$  и  $k_1$ . Вместе с тем, как следует из (15), взаимодействие пакетов волн между собой определяется  $(k_1 + k_2)/2$ . Отсюда следует, что такое взаимодействие не будет уменьшено из-за образования двух плато, если центры пакетов достаточно удалены друг от друга:

$$k_2^0 - k_1^0 > \Delta k_1 + 2\Delta k_2 \quad (k_2^0 > k_1^0). \quad (31)$$

При выполнении (31) взаимодействие интенсивных пакетов между собой определяется формулами [1].

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНЫХ И СЛАБЫХ ВОЛН

Взаимодействие слабых и интенсивных волн играет важную роль в процессах спектральной перекачки и изотропизации энергии колебаний [1]. Рассмотрим здесь, как скажется эффект возникновения плато на нелинейном взаимодействии интенсивных волн со слабыми, распространяющимися под неким углом к интенсивным волнам. Именно этот процесс приводит к изотропизации колебаний. Будем считать, что образование «плато» на функции распределения наступает быстрее, чем успеют нарастить первоначально слабые колебания, распространяющиеся под углом к интенсивным волнам. Для рассмотрения нелинейного взаимодействия тогда можно использовать функцию распределения, имеющую «плато» в направлении интенсивных волн и максвелловское распределение в перпендикулярных направлениях. Выбрав ось  $z$  по интенсивным одномерным волнам, а ось  $x$  — в плоскости  $k_1$  и  $k$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_b}{\partial t} = N_k \int N_{k_1}^l w_p(k, k_1) \frac{dk_1}{2\pi} \left\{ \frac{\omega_1 - \omega}{mv_T^2} f(v_{\parallel}) + \right. \\ \left. + \frac{k_z - k_1}{m} \left[ \frac{\partial f(v_{\parallel})}{\partial v_{\parallel}} + \frac{v_{\parallel}}{v_T^2} f(v_{\parallel}) \right] \right\} \frac{1}{k_x v_T \sqrt{2\pi}} \times \\ \times \exp \left[ - \frac{(\omega - \omega_1 - (k_z - k_1)v_{\parallel})^2}{2k_x^2 v_T^2} \right] \frac{dp_{\parallel}}{2\pi}, \\ N_{k_1} = \int \frac{N_{k_1}^l dk_{1\perp}}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Второй член (32) обращается в нуль для максвелловского распределения. Целесообразно найти лишь дополнительный член, который обязан немаксвелловскому характеру функции распределения  $f(v_{\parallel})$ . Для этого достаточно в (32) подставить вместо  $f(v_{\parallel})$  разность  $f(v_{\parallel})$  и максвелловского распределения. Эта разность для узкого пакета интенсивных волн не равна нулю лишь в относительно узком интервале  $\Delta v_{\parallel}$  вблизи  $v_{\parallel}^0 = 3v_T^2 k_1 / \omega_{0e}$ . Пренебрегая  $\frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}}$  в (32), что возможно, если выполнено неравенство (14) для электронов или (25) для ионов, а также считая, что значение самой функции  $f$  из-за образования «плато» изменилось незначительно, можно вместо (32) написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} = \gamma_k^M N_k + N_k \int N_{k_1}^l w_{p_0}(k, k_1) \frac{dk_1}{2\pi} \times \\ \times \left\{ \frac{k_z - k_1}{mv_T^2} \frac{3v_{T_e}^2 k_1^0}{\omega_{0e}} \frac{n}{2\pi k_x v_T^2} \exp \left[ - \frac{(\omega - \omega_1 - (k_z - k_1) 3v_{T_e}^2 k_1^0 / \omega_{0e})^2}{2k_x^2 v_T^2} \right] \right\} \Delta v_{\parallel} = \\ = (\gamma_k^M + \gamma_k^A) N_k. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим сначала эффекты взаимодействия ленгмюровских волн при рассеянии на электронах. Если  $v_{\phi}/v_{T_e} > (m_i/m_e)^{1/2}$ , то

$$\gamma_k^M = \int \frac{3\omega_{0e} (k_1^2 - k_r^2) dk_1 N_{k_1}^l k_z^2}{8(2\pi)^{1/2} n m_e v_{T_e} k^2 [(k_z - k_1)^2 + k_x^2]^{1/2}}. \quad (34)$$

Второй член (33) вносит вклад, сравнимый с (34), если  $|(k_z - k_1)^2 +$

$+ k_x^2]^{1/2} = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| < \Delta k$ . При этом он компенсирует первый член, и эффект нелинейного взаимодействия уменьшается. В этом случае необходимо учитывать отброшенный член с производной, который при сильной компенсации двух членов (33) описывает эффект взаимодействия (см. первый раздел). Если же  $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \gg \Delta k$ , что возможно при значительном угле, но незначительной разности  $|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}_1|$ , то второй член (33) для узкого пакета  $\Delta k \ll k$  пренебрежимо мал. Это показывает, что в данном случае появление «плато» на функции распределения практически не сказывается на нелинейном взаимодействии, которое описывается (34).

К сходному выводу можно придти и для возбуждения поперечных волн интенсивными продольными волнами. Существенное отличие, однако, состоит в том, что инкремент возбуждения поперечных волн пропорционален  $\theta^2$  при  $\theta \ll 1$  ( $\theta$  — угол между интенсивной продольной волной и возбуждаемой поперечной). Поэтому эффект появления «плато» скажется для узкого спектра продольных волн лишь для малых углов, когда возбуждение малоэффективно.

Рассмотрим далее эффекты, возникающие при рассеянии на ионах. В этом случае [1] для ленгмюровских волн

$$\gamma_k^M = \int \frac{3}{8} \frac{\omega_{0e}(k_1^2 - k_x^2 - k_z^2) N_{k_z}^l k_z v_{T_e}^2 dk_1}{(2\pi)^{1/2} [(k_z - k_1)^2 + k_x^2]^{1/2} k^2 v_{T_i} n_0 T_i (1 + T_e/T_i)^2}. \quad (35)$$

Рассеяние на ионах (35), как известно, возможно как для больших, так и для малых фазовых скоростей волн, однако для малых фазовых скоростей взаимодействие (35) возможно лишь для таких волн, разность модулей которых достаточно мала («квазиупругое» рассеяние слабых волн на сильные):

$$|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}_1| < \frac{k_1}{3} \frac{v_{T_i} v_\Phi}{v_{T_e}^2}. \quad (36)$$

Предположим, что (36) не выполнено, но выполнено неравенство, указывающее на то, что дополнительное взаимодействие, связанное с появлением «плато», неэкспоненциально мало:

$$k_x^2 + (k_z - k_1)^2 < k_x \frac{v_{T_i} v_\Phi k_1}{3 v_{T_e}^2}. \quad (37)$$

Если  $k_x \ll k_1$  и  $k_x^2 \ll (k_z - k_1) k_1$ , то невыполнение (36) влечет за собой невыполнение (37). Если же  $k_x \ll k_1$ , но  $k_x^2 \gg k_1(k_z - k_1)$ , неравенство (37) будет выполнено, а (36) нарушено, если

$$\frac{v_{T_i} v_\Phi}{v_{T_e}^2} < \frac{k_x^2}{k_1^2} < \left( \frac{v_{T_i} v_\Phi}{v_{T_e}^2} \right)^2 \text{ или } \frac{v_{T_i} v_\Phi}{v_{T_e}^2} < 1,$$

т. е. при  $k_x/k_1 > 1$ , что противоречит исходному предположению. Этот анализ показывает, что при  $k_x/k_1 \ll 1$  возможна лишь ситуация, когда (36) выполнено, а (37) нарушено, либо и (36) и (37) выполнены.

Рассмотрим случай, когда  $v_{T_i} v_\Phi / v_{T_e}^2 > 1$  и оба неравенства разрешены. Дополнительное взаимодействие, связанное с появлением «плато», имеет в этом случае вид

$$\gamma_k^A = \int \frac{9k_z^2}{4(2\pi)} \frac{(k_z - k_1) v_{T_e}^2 \Delta k_1 \omega_{0e} dk_1 N_{k_z}}{k_r k^2 (1 + T_e/T_i)^2 T_i n_0 v_{T_i} v_{\Phi_1}} \frac{v_{T_e}^2}{v_{T_i}}. \quad (38)$$

Пусть  $k_x \ll |k_z - k_1|$ , тогда взаимодействие (38) в сравнении с (35) содержит один большой множитель  $k_1/(k_z - k_1)$  и один малый  $v_{T_e}^2(k_z - k_1)^2/v_\Phi v_{T_i} k_x$ . Итак, для доминирования (38) необходимо  $\Delta k_1 > |k_z - k_1| \gg k_x$ , т. е. выполнение условий, при которых аппроксимация (33) (замена  $v_\parallel$  через  $v_0^\parallel$ ) не пригодна. При этом более точное рассмотрение показывает, что (38) компенсирует (35), т. е. возникают уже рассмотренные выше эффекты.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Кратко резюмируем основные результаты проведенного анализа.

Во-первых, показано, что во многих случаях исследования взаимодействия интенсивных волн нельзя не учитывать эффекты изменения распределения частиц, участвующих в нелинейном взаимодействии. Это изменение распределения приводит к сильному уменьшению нелинейного взаимодействия интенсивных волн между собой. Интенсивность взаимодействия может оказаться обратно пропорциональной энергии колебаний, а не прямо пропорциональной, как в случае неучета описанного эффекта.

Во-вторых, при анализе взаимодействия интенсивных волн между собой (например, двух пакетов волн) взаимодействием волн внутри пакета можно пренебречь (если выполнено соответствующее условие, когда волны внутри пакета можно считать сильными). Взаимодействие между сильными волнами не изменяется.

В-третьих, взаимодействие сильных и слабых волн также не меняется из-за рассмотренного эффекта, если только направление и величина импульса  $k$  для слабых волн заметно отличны от направления и величины импульса сильных волн ( $|k - k_1| > \Delta k_1$ ).

Эти результаты позволяют получить ряд качественных следствий. Отсутствие эффекта демпфирования взаимодействия слабых и сильных волн указывает на то, что темп спектральной перекачки энергии остается тем же, что без учета изменения состояния частиц, плазмы. Однако механизм такой спектральной перекачки существенно иной: в результате перекачки постепенно расширяется область волновых чисел, в которой колебания достаточно интенсивны. В области же, захваченной интенсивными колебаниями, процесс перекачки быстро прекращается. При этом следует различать случаи одномерной и неодномерной спектральной перекачки. Практически одномерная спектральная перекачка может осуществляться лишь в достаточно сильном магнитном поле. Как показано в [8], нелинейное взаимодействие в сильном магнитном поле быстро падает при увеличении угла между волнами, распространяющимися по полю и под углом к нему. Кроме того, при рассеянии на ионах разность частот  $\omega_{de} \cos \theta$  двух волн, существенно отличающихся по углу, может быть больше  $|k - v_{T_i}|$  и ионы не смогут участвовать в нелинейном взаимодействии.

Если имеется сильное магнитное поле, такое, что процесс спектральной перекачки можно считать одномерным, то механизм такой перекачки будет состоять в распространении аналога ударной волны в пространстве волновых чисел, которая охватит постепенно все волновые числа вплоть до минимально возможных. Временем процесса в данном случае будет служить время, в течение которого ударная волна пройдет по всему спектру волновых чисел. Этот эффект в определенной мере аналогичен эффектам квазилинейной релаксации пучков, приводящей также к возникновению ударной волны в пространстве волновых чисел [9]. В данном случае ударная волна естественно распространяется

не только в пространстве волновых чисел, но и в пространстве скоростей частиц (однозначно связанных с пространством волновых чисел в одномерном случае), причем затрагиваются этой волной частицы, скорости которых (проекции скоростей на направления магнитного поля) много меньше средних тепловых скоростей, что существенно отличается от квазилинейной ударной волны [9]. Для того, чтобы такая картина ударной волны имела место, необходимо, чтобы в конечном состоянии, когда энергия исходного пакета волн распределится по всем волновым числам, меньшим начального значения волнового числа, спектральная плотность была достаточна, чтобы взаимодействующие волны можно было считать сильными. Это условие обычно выполнено, если начальное  $\Delta k/k$  не слишком мало\*.

Если отсутствует сильное магнитное поле, то процесс нелинейного взаимодействия оказывается существенно иным. В волны, распространяющиеся под углом к направлению исходного пакета, но мало отличающиеся по частоте, быстро перекачивается вся энергия колебаний. Иными словами, процесс изотропизации колебаний идет с тем же темпом, что и в отсутствие изменения распределения частиц. В случае изотропного распределения колебаний и частиц влияние изменения распределения частиц на нелинейное взаимодействие оказывается пре-небрежимо малым. Это видно из того, что в этом случае нелинейное взаимодействие зависит не от  $\frac{df}{dv}$ , а от интеграла от  $f$  или  $f(0)$ , т. е. величин,

которые, благодаря нелинейному взаимодействию, меняются незначительно. Отсюда следует, что изменение состояния частиц скажется лишь на малом начальном отрезке времени взаимодействия и в узком интервале  $|\Delta k|$  вблизи исходного пакета. В дальнейшем процесс изотропизации колебаний можно описывать, пренебрегая изменением состояния частиц. Таким образом, в слабом магнитном поле процессы нелинейного взаимодействия качественно отличаются от взаимодействий в сильном поле.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, УФН, 90, 540 (1966).
2. А. А. Галеев, В. И. Кариман, Р. З. Сагдеев, Nucl Fusion 5, 20 (1965).
3. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 49, 1332 (1965).
4. В. И. Петвиашвили, ДАН СССР, 153, 11295 (1963).
5. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, 1964.
6. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ, 48, 1159 (1965).
7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1936).
8. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, 49, 797 (1965).
9. А. А. Иванов, Л. Н. Рудаков, ЖЭТФ, 51, 1522 (1966).

Поступила в редакцию  
30 ноября 1967 г.

#### ON NONLINEAR INTERACTION OF INTENSIVE PLASMA WAVES

V. N. Tsytovich, A. S. Chikhachev

It is shown that in many cases of intensive wave interaction, the change of particle distribution must be taken into account. The wave interaction inside the packets may be neglected if the waves are strong enough. The interaction between strong packets does not change. It is also shown that the interaction between strong and weak waves does not change due to the effect considered if the value and the direction of a weak wave pulse remarkably differ from those of a strong wave pulse.

\* В процессе взаимодействия идет также уширение пакета волн по углам в пределах  $\Delta\alpha \sim (\Delta k v_T / \omega_{ce})^{1/2}$  ( $\alpha_0 = 0$ ,  $k_\perp \sim \Delta k$ ), что приводит к изотропизации колебаний. Если  $k/\Delta k < 1/\Delta\alpha$  или  $\Delta k/k > v_T/v_\Phi$ , ударная волна пройдет быстрее, чем произойдет изотропизация.

УДК 621.396.67.533.9..1

## ОБ ИМПЕДАНСЕ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Я. Эйдман

В приближении слабой пространственной дисперсии рассматривается вопрос о входном импедансе антенны, помещенной в изотропную плазму, с учетом излучения как продольных, так и поперечных волн. Подробно исследуется случай, когда длина антенны стремится в бесконечность.

Рассматриваемый вопрос обсуждался в ряде работ (например, [1-4]). Однако полный входной импеданс тонкой антенны, помещенной в изотропную плазму, при учете пространственной дисперсии вычислялся по существу лишь в статье [2]. В указанной статье в пренебрежении поперечным полем излучения получено интегральное уравнение для распределения тока по антенне и вычислен входной импеданс.

В настоящей статье производится учет поперечного поля излучения. Если длина антенны достаточно велика, то такой учет совершенно необходим (см. ниже). В заключение вычисляется входной импеданс антенны, длина которой  $L$  стремится в бесконечность.

1. Для решения поставленной задачи удобно исходить из уравнения для фурье-компонент продольного  $E_{\perp k}$  и поперечного  $E_{\parallel k}$  полей в плазме (например, [5]):

$$(k^2 - k_\perp^2) E_{\perp k} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} E_{\parallel k} = 0, \quad (1)$$

причем

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ikr} dk = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp k} e^{ikr} dk + \int_{-\infty}^{\infty} E_{\parallel k} e^{ikr} dk, \quad (2)$$

где  $\epsilon_{\parallel} = \epsilon - D^2 k^2$ ,  $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ ,  $D^2 = 3v_T^2/\omega^2$ ,  $k_\perp^2 = \epsilon\omega^2/c^2$ ,  $\epsilon \ll 1$ ,  $v_T^2/c^2 \ll 1$ ,  $\omega_0$  — ленгмюровская частота,  $v_T$  — средняя тепловая скорость электронов плазмы.

Амплитуды полей  $E_{\perp k}$  и  $E_{\parallel k}$  определяются из граничных условий на поверхности антенны. Будем считать, что на поверхности проводника равна нулю тангенциальная компонента электрического поля. В качестве второго граничного условия будем использовать равенство нулю на поверхности антенны тока в плазме, что отвечает, как известно, условию зеркальности отражения электронов плазмы от границы. Как следует из [2], для тонкой антенны указанное граничное условие по существу совпадает с естественным требованием конечности поля в плазме при  $\epsilon(\omega) \rightarrow 0$ .

С другой стороны, как показано в [6], проникновение поля в плазму и для случая диффузного отражения электронов от плоской границы при  $\epsilon(\omega) \rightarrow 0$  описывается теми же формулами, что и для зеркального

отражения электронов. В рассматриваемом случае этот результат применим, когда  $k_z a \gg 1$ ,  $|\epsilon| \ll 1$ . Поэтому при  $|\epsilon(\omega)| \ll 1$ , если поверхность антенны хорошо отражает частицы плазмы, независимо от характера этого отражения указанное условие дает неплохое приближение для поля в плазме (см. подробнее [2]).

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_z + P(z) = 0 & \text{ при } \rho = a \quad (-L < z < L), \\ j_{\rho \text{пл}} = 0 & \text{ при } \rho = a \quad (-L < z < L). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $a$  — радиус ( $a \gg D$ );  $2L$  — длина антенны, причем координатная ось  $0z$  направлена по оси цилиндра;  $P(z)$  — внешнее поле, задаваемое на поверхности антенны. Из аксиальности задачи следует, что достаточно определить поле в координатной плоскости  $yz$ . Векторы  $E_{\perp k}$ ,  $E_{\parallel k}$  можно задать в виде

$$\begin{aligned} E_{\perp k} &= \{k_z \cos \Phi, k_z \sin \Phi, -x\} \frac{J_0(xa) x}{2\pi(x^2 - g_1^2)} A_1(k_z), \\ E_{\parallel k} &= \{x \cos \Phi, x \sin \Phi, k_z\} \frac{J_0(xa) k_z}{2\pi(x^2 - g_2^2)} A_2(k_z); \\ k &= \{x \cos \Phi, x \sin \Phi, k_z\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$g_1^2 = k_1^2 - k_z^2, \quad g_2^2 = k_{\parallel}^2 - k_z^2, \quad r = \{0, y, z\}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\epsilon}{D^2},$$

а функции  $A_1(k_z)$ ,  $A_2(k_z)$  определяются из условий (3):

$$A_j(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L A_j(z) e^{-ik_z z} dz, \quad A_j(z) = 0 \text{ при } |z| > L \quad (j = 1, 2).$$

Выполняя затем интегрирования по переменным  $\Phi$ ,  $x$ , в (2) аналогично [1] будем иметь

$$\begin{aligned} E_z(\rho, z) &= E_{\perp z} + E_{\parallel z} = \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(k_z) J_0(ag_1) H_0^{(1)}(\rho g_1) g_1^2 + \\ &+ A_2(k_z) k_z^2 J_0(ag_2) H_0^{(1)}(\rho g_2)] e^{ik_z z} dk_z, \\ E_{\rho}(\rho, z) &= E_{\perp \rho} + E_{\parallel \rho} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(k_z) J_0(ag_1) g_1 H_1^{(1)}(\rho g_1) - \\ &- A_2(k_z) J_0(ag_2) g_2 H_1^{(1)}(\rho g_2)] k_z e^{ik_z z} dk_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$y = \rho$ ,  $g_j = \sqrt{k_j^2 - k_z^2}$  при  $k_z < k_j$ ,  $g_j = i \sqrt{k_z^2 - k_j^2}$  при  $k_z > k_j$  ( $j = 1, 2$ );  $k_1 = k_{\perp}$ ;  $k_2 = k_{\parallel}$ ;  $J_0(x)$ ,  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $H_1^{(1)}(x)$  — функции Бесселя и Ханкеля.

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что выражения (5) удовлетворяют уравнениям поля, соответствующим (1). Следует заметить, что, поскольку рассматривается плазма в приближении слабой пространственной дисперсии, то, вообще говоря, интегрирование

в (5) должно быть ограничено величиной  $k_z \ll k_m \ll 1/D$ . Можно получить и соотношение, определяющее магнитное поле в плазме, которое для данной симметрии имеет лишь компоненту  $H_\varphi$ , равную

$$H_\varphi(\rho, z) = \frac{\pi \omega \epsilon}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k_z) J_0(ag_1) g_1 H_1^{(1)}(\rho g_1) e^{ik_z z} dk_z. \quad (6)$$

Внутри металла при  $\rho < a$   $H=0$ , поэтому обычным образом можно считать, что по поверхности цилиндра течет ток  $I(z)$ :

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{ac}{2} H_\varphi(\rho = a + 0) = 2\pi a j_0, \\ j &= \{0, 0, j_z\}, \quad j_z = j_0 \delta(\rho - a). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку  $I$  не равно тождественно нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$  (ток  $I$  зависит от стороннего поля  $P(z)$ ), то легко видеть, что  $A_1$  имеет вид  $A_1(k_z) = -\widetilde{A}_1(k_z)/\epsilon$ , где  $\widetilde{A}(k_z) \neq 0$  при  $\epsilon = 0$ . Чтобы получить интегральные уравнения для искомых функций  $A_1(k_z)$ ,  $A_2(k_z)$ , воспользуемся краевыми условиями (3). Тогда, учитывая, что (см. (5))  $j_{pl} = (\omega/4\pi i)[(\epsilon - 1) \times E_x - E_y]$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(k_z) g_1^2 J_{01} H_{01} + A_2(k_z) k_z^2 J_{02} H_{02}] e^{ik_z z} dk_z + P(z) &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [(\epsilon - 1) A_1(k_z) g_1 J_{01} H_{11} + A_2(k_z) g_2 J_{02} H_{12}] k_z e^{ik_z z} dk_z &= 0, \\ -L < z < L, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $H_{ij} = H_i^{(1)}(ag_j)$ ,  $J_{0j} = J_0(ag_j)$  ( $i, j = 1, 2$ ).

Будем предполагать, как и в [1], что  $ak_0 \ll 1$ , где  $k_0$  — наибольшая еще существенная величина  $k_z$  в спектре  $A_1(k_z)$ ,  $A_2(k_z)$  (см. ниже). Тогда, используя во втором уравнении формулы для функций Бесселя и Ханкеля при малых значениях аргументов, получим  $(a^2 k_0^2 \ln(ak_0/2)) \ll 1$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon - 1) A_1(k_z) e^{ik_z z} k_z dk_z + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k_z) e^{ik_z z} k_z dk_z = 0.$$

Пренебрегая слагаемым порядка  $\epsilon$  по сравнению с единицей и учитывая, что при  $|z| > L$   $A_1(z) = A_2(z) = 0$ , находим  $A_1(z) = A_2(z)$  ( $|z| < L$ ).

В соответствии со сказанным ранее тот же результат можно получить из условия конечности поля при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Действительно, если в выражении для  $E_\rho$  (5) устремить  $\epsilon$  к нулю и учесть, что  $E_\rho$  должно при этом оставаться конечной величиной, то получим сразу, что  $A_1(z) = A_2(z) = \widetilde{A}_1(z)/\epsilon = \widetilde{A}_2(z)/\epsilon$  при  $|z| < L$ ,  $A_1 = A_2 = 0$  при  $|z| > L$ . Поскольку  $ak_0 \ll 1$ , то, подставляя в (6), (7) значения функций Бесселя и Ханкеля при малых аргументах, будем иметь  $A_1(z) = A_2(z) = 2iI(z)/\omega\epsilon$ . Если подставить это выражение в первое уравнение (8), то получим интегральное уравнение для  $I(z)$ , совпадающее с соответствующим выражением статьи [1] (формула (8) статьи [1]). Это означает, что при  $ak_0 \ll 1$  поле в плазме, возбуждаемое током  $I(z)$ , текущим по цилин-

дрическому проводнику, такое же, как поле, возбуждаемое током  $I(z)$  в безграничной среде, т. е. в среде, свободной от проводников (см. также [2]).

Итак, для тока  $I(z)$  имеем интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2\omega} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} (g_1^2 J_{01} H_{01} + k_z^2 J_{02} H_{02}) e^{ik_z(z-\zeta)} I(\zeta) d\zeta dk_z + P(z) = 0, \quad (9)$$

$$ak_0 \ll 1.$$

Используя условие  $ak_0 \ll 1$  и формулу  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z z} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k_z^2 - k_z^2}) dk_z = -2ie^{ik_z} \sqrt{\rho^2 + z^2} / \sqrt{\rho^2 + z^2}$ , уравнение (9) можно записать в виде

$$-\frac{i}{\omega \epsilon} \int_{-L}^L \left[ -k_{\perp}^2 \frac{e^{ik_{\perp} R}}{R} - e^{ik_{\perp} R} F(k_{\perp}, \zeta_1, a) + e^{ik_{\parallel} R} F(k_{\parallel}, \zeta_1, a) \right] I(\zeta) d\zeta + P(z) = 0, \quad (10)$$

где

$$\zeta_1 = z - \zeta, \quad R = \sqrt{a^2 + \zeta_1^2}, \quad F(k, \zeta_1, a) = ik/R^2 - (1 + k^2 \zeta_1^2)/R^3 - 3ik^2 \zeta_1^2/R^4 + 3\zeta_1^2/R^5.$$

В формуле (10) первые два слагаемых в квадратных скобках отвечают поперечному полю  $E_{\perp}$ , а последнее слагаемое, равное  $e^{ik_{\parallel} R} F(k_{\parallel}, \zeta_1, a)$  — продольному полю.

Интегральное уравнение (10), так же как и в [2], может быть записано в виде уравнения Фредгольма второго рода. Действительно, выражение  $\Phi(\zeta_1, a) = e^{ik_{\parallel} R} F(k_{\parallel}, \zeta_1, a) - e^{ik_{\perp} R} F(k_{\perp}, \zeta_1, a)$  при  $\zeta_1 \rightarrow 0, a \rightarrow 0$  записывается  $\Phi(\zeta, a) \rightarrow -[(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2) a^2/2(a^2 + \zeta^2)^{3/2} + i(k_{\parallel}^3 - k_{\perp}^3)/3] = -k_{\parallel}^2 \delta(\zeta_1) - ik^3/3$  ( $k_{\parallel}^2 \gg k_{\perp}^2$ ). Поэтому уравнение (8) можно представить в виде

$$I_0(z) = i\omega D^2 P(z) + \frac{1}{k_{\parallel}^2} \int_{-L}^L G_1(\zeta_1) I(\zeta) d\zeta,$$

где

$$G_1(\zeta_1) = -k_{\perp}^2 e^{ik_{\perp} |\zeta_1|}/R + \Phi(\zeta_1, a=0),$$

$$\Phi(\zeta_1, 0) = e^{ik_{\parallel} |\zeta_1|} F(k_{\parallel}, \zeta_1, 0) - e^{ik_{\perp} |\zeta_1|} F(k_{\perp}, \zeta_1, 0),$$

$$F(k, \zeta_1, 0) = \frac{2}{|\zeta_1|^3} - \frac{2ik}{\zeta_1^2} - \frac{k^2}{|\zeta_1|}.$$

Таким образом, в ядре  $G_1(\zeta_1)$  зависимость от  $a$  при  $a \rightarrow 0$  остается лишь в первом слагаемом, равном  $k_{\perp}^2 e^{ik_{\perp} |\zeta_1|}/R$ .

В случае элементарного диполя, когда  $k_{\parallel} L \ll 1$ , ядро интегрального уравнения (10) можно разложить в ряд, считая величину  $k_{\parallel} \zeta_1$  малой. Если также  $v_f^2/c^2 \ln(4L^2/a^2) \ll 1$ , то можно пренебречь поперечным волновым полем, т. е. положить в (10)  $k_{\perp} = 0$ . В этом случае интегральное уравнение (10) сводится к тривиальному, а для тока и входного импеданса получаются выражения (более подробно см. [2])

$$I(z) = \omega D^2 P_0 \left[ \Pi(d, z) i + \frac{2k_{\parallel} d}{3} \right], \quad Z_{\text{вх}} = \frac{2dP_0}{I(0)} = \frac{2d}{\omega D^2} \left( -i + \frac{2k_{\parallel} d}{3} \right), \quad (11)$$

причем внешняя электродвижущая сила задана в виде

$$P(z) = P_0 \Pi(d, z) \quad (\Pi(d, z) = 1 \text{ при } |z| < d, \Pi(d, z) = 0 \text{ при } |z| > d).$$

Легко видеть, что в случае элементарного диполя ( $k_{\parallel}L \gg 1$ )  $k_0 \approx 1/d$  и условие справедливости формулы (11) записывается в виде  $a \ll d$ .

2. Применим полученные выше соотношения для вычисления импеданса бесконечной антенны ( $L \rightarrow \infty$ ). Заметим, что этот случай уже рассматривался в работе [3] (см. также [4]). Однако в указанных статьях вычисляется лишь излучаемая антенной энергия. Чтобы получить выражение для полного входного импеданса бесконечной антенны, можно исходить из системы уравнений (8), откуда при  $L \rightarrow \infty$  имеем для фурье-компонент  $A_1(k_z)$ ,  $A_2(k_z)$  следующие выражения:

$$A_1(k_z) = \frac{2i}{\pi\Delta} P_k g_2 J_{0,2} H_{1,2}, \quad A_2(k_z) = -\frac{2i}{\pi\Delta} P_k (\varepsilon - 1) g_1 J_{0,1} H_{1,1},$$

$$\Delta = g_1 J_{0,1} J_{0,2} [g_1 g_2 H_{0,1} H_{1,2} - (\varepsilon - 1) k_z^2 H_{1,1} H_{0,2}], \quad (12)$$

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L P(z) e^{-ik_z z} dz.$$

Подставляя эти значения  $A_1$ ,  $A_2$  в формулы (5)–(7), находим выражения для электрического и магнитного полей в плазме, а также выражения для тока, текущего по поверхности проводника  $I(z)$ . Если внешняя электродвижущая сила задана в виде  $P(z) = P_0 \Pi(d, z)$ ,  $dk_{\parallel} \ll 1$ , то для полного входного импеданса имеем выражение

$$Z_{\text{вх}} = \frac{2P_0d}{I(0)} = \frac{8P_0d}{\pi a \omega \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k_z) g_1 H_{1,1} dk_z}. \quad (13)$$

Развиваемый выше способ определения входного импеданса удобно проконтролировать, вычислив непосредственно поток энергии, излучаемый антенной, а затем сравнив полученное таким образом выражение с величиной излучаемой энергии  $W$ , определяемой в соответствии с введенными выше формулами (6), (7), т. е.

$$W = \frac{1}{2} u \operatorname{Re} I(0), \quad u = 2P_0d. \quad (14)$$

Поток энергии, излучаемой антенной, есть сумма потока энергии поперечных волн, характеризуемого вектором Пойнтинга, и потока продольных волн. Полный поток энергии через бесконечно удаленную цилиндрическую поверхность с осью  $0z$ , как нетрудно видеть, есть

$$W = W_{\perp} + W_{\parallel} = 2\pi\rho \left( \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp,z} H_{\perp}^* dz - \omega \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{\parallel}^2}{8\pi} dz \right),$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial k} = -2D^2 k_{\parallel}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Используя формулы (12), после несложных преобразований будем иметь

$$W = \frac{2\omega\epsilon(P_0d)^2}{\pi^2} \left\{ \int_0^{k_\perp} \frac{g_1^2 J_{01}^2 J_{02}^2}{|\Delta|^2} [k_z^2 |H_{11}|^2 + g_2^2 |H_{12}|^2] dk_z + \right. \\ \left. + \int_{k_\perp}^{k_\parallel} \frac{k_z^2 |g_1|^2}{|\Delta|^2} J_{01}^2 J_{02}^2 |H_{11}|^2 dk_z \right\}, \quad (16)$$

где положено  $P_p = P_0d/\pi$  при  $k_\perp d \ll 1$  и членами порядка  $\epsilon$  по сравнению с единицей пренебрежено. Если теперь вычислить  $W$  по формуле (14), то окажется, что получаемое таким образом выражение совпадает с (16).

При соблюдении условия  $ak_0 \ll 1$  в рассматриваемом случае  $L \rightarrow \infty$  можно получить простые оценки величины входного импеданса антенны. В этом случае удобнее исходить из выражения (7), откуда для  $P(z) = P_0\Pi(d, z)$ ,  $k_\parallel d \ll 1$  имеем

$$I(z) = \frac{\omega\epsilon P_0}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kd)}{k} \frac{e^{ikz} dk}{G(k)} \quad (L \rightarrow \infty), \quad (17)$$

где, как и во всех вышеприведенных формулах, интегрирование должно распространяться лишь на область  $k \leq k_m \ll 1/D$ , причем при  $ka \ll 1$  ( $k_0 \simeq 1/d$ ,  $a \ll d$ )

$$G(k) = \frac{1}{2\pi} \left\{ -k_\perp^2 \ln \frac{4}{a^2 |k_\perp^2 - k^2|} + k^2 \ln \frac{|k_\parallel^2 - k^2|}{|k_\perp^2 - k^2|} - i\pi k_\perp^2 \Pi(k_\perp, k) - \right. \\ \left. - i\pi k^2 [\Pi(k_\perp, k) - \Pi(k_\perp, k)] \right\}. \quad (18)$$

Необходимость учета поперечного поля излучения в рассматриваемом случае вытекает из формул (17), (18). Если игнорировать это поле, т. е. положить в (17), (18)  $k_\perp = 0$ , то интеграл (17) обращается в бесконечность из-за поведения  $G(k)$  при  $k \rightarrow 0$ .

Если  $\epsilon = 0$ , то из (17), (18) и очевидного соотношения  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln[(x^2 - a^2)/(x^2 - b^2)] \simeq -a^2$  ( $a^2 \gg b^2$ ) при соблюдении условия типа  $\beta^2 \ln(4d^2/a^2) \ll 1$ ,  $\beta^2 \sim k_\perp^2/k_\parallel^2$  ( $k_{\max} \simeq k_0 \sim 1/d$ ) следует, что, по-прежнему,

$$I(z) \simeq \omega D^2 P_0 \Pi(d, z) i, \quad \epsilon = 0 \quad (L \rightarrow \infty).$$

Производя в (17) численное интегрирование, можно найти импеданс бесконечного провода  $Z_{\text{вх}}$ . При этом выражение для  $Z_{\text{вх}}$  удобно представить в виде

$$Z_{\text{вх}} = X + iR = \frac{2d}{\omega D^2} (R_1 + iX_1).$$

На рис. 1, 2 приведены величины  $X_1$  и  $R_1$  в функции  $\epsilon$  для двух значений  $\beta^2 = k_\perp^2/k_\parallel^2 = 10^{-5}$  и  $10^{-6}$ , причем  $dk_\perp = 30V\epsilon$ ,  $a^2 k_\parallel^2 = 25\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Из рисунков следует, что реактансы бесконечной антенны ведут себя следующим образом. При очень малых  $\epsilon$  реактансы имеют индуктивный характер, а затем с ростом  $\epsilon$  приобретают емкостный характер. Если же  $\epsilon = 0$ , то  $X \simeq -2d/\omega_0 D^2$  (см. выше).

В заключение остановимся на вопросе о возможности существования в рассматриваемой системе ( $L \rightarrow \infty$ ) поверхностных волн. Дисперсионное соотношение для этих волн есть

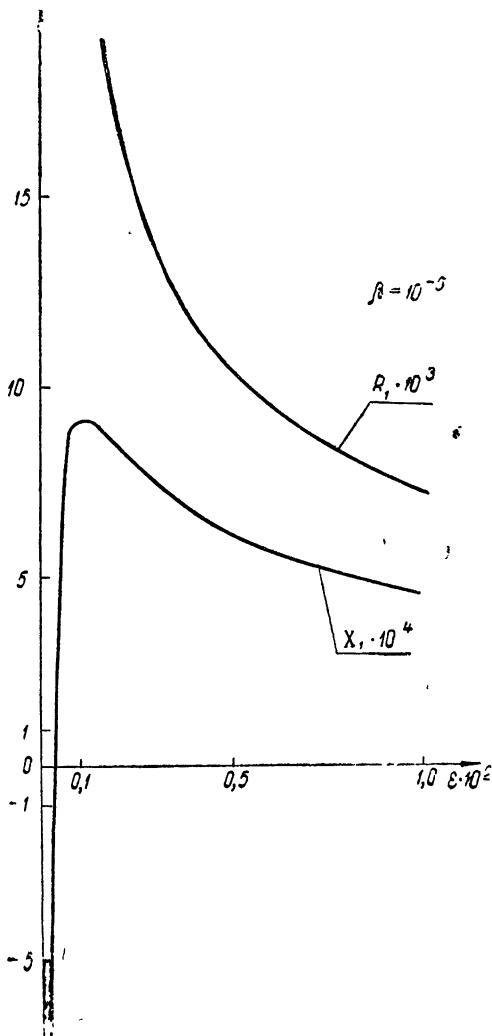


Рис. 1.

$$\Delta(\omega, k_z) = 0, \quad (19)$$

где  $k_z$  — действительный корень уравнения (19), причем  $k_z > k_{\parallel}$ , что требуется для того, чтобы оба поля — продольное  $E_{\parallel}$  и поперечное  $E_{\perp}$  — экспоненциально убывали по мере удаления от поверхности антennы при  $\rho \rightarrow \infty$  (5). Величину  $\Delta$  можно записать в виде

$$\Delta = I_{01} I_{02} |g_1|^2 |g_2| \{-K_{01} K_{12} |g_1| |g_2| + (1 - \epsilon) k_z^2 K_{02} K_{11}\}. \quad (20)$$

Здесь  $I_{0j} = I_0(a|g_j|)$ ;  $K_{ij} = K_i(a|g_j|)$  ( $i, j = 1, 2$ );  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  — бессelleвы функции мнимого аргумента. Можно показать, например, графически, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  уравнение  $\Delta(k_z^2) = 0$  имеет один корень  $k_{0z}^2 \simeq 1/2D^2$  ( $\lambda_0 = 2\pi/k_{0z}$ ). Однако, как уже отмечалось, интегрирование во всех формулах, определяющих поле в плазме, должно быть ограничено величи-

ной  $k_z < k_m \ll 1/D$  (приближение слабой пространственной дисперсии). Это означает, грубо говоря, что в рассматриваемой системе незату-

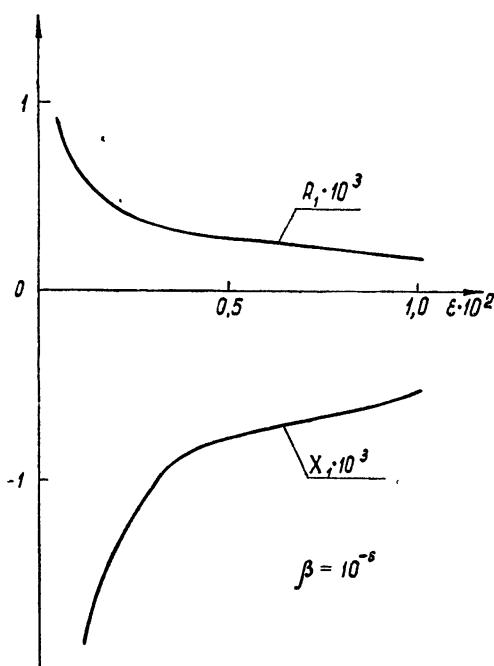


Рис. 2.

хающая поверхностьная волна существовать не может. Более же детальное исследование этого вопроса выходит за рамки использованного выше гидродинамического рассмотрения, в силу того, что здесь длина волн  $\lambda_0$  порядка дебаевского радиуса.

Автор признателен А. А. Андронову за дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, Изв высш уч зав.—Радиофизика, 6, № 6, 1140 (1963).
2. А. А. Андронов, В. Я. Эйдман, ЖТФ (в печати).
3. J. R. Wait, Applied Scientific Research, Section B, 11, 423 (1964—65); 12, 130 (1965).
4. S. R. Sechadri, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-13, 789 (1965).
5. В. Д. Шафранов, сб. Вопросы теории плазмы, вып 3, Атомиздат, 1963.
6. В. Ф. Дряхлушкин, Ю. А. Романов, ЖТФ, 38, 1142 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 августа 1967 г.

#### ON IMPEDANCE OF A THIN CYLINDER ANTENNA IN ISOTROPIC PLASMA

V. Ya. Eitman

The input impedance of the antenna placed in an isotropic plasma is considered in the assumption of a weak spatial dispersion with taking into account the radiation both of longitudinal and transverse waves. The case when the antenna length trends to infinity is investigated in detail.

УДК 550.594.6 : 621.371

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВИСТЯЩИХ АТМОСФЕРИКОВ

Ю. Г. Спиридонос

Проведен расчет траекторий свистящих атмосфериков в магнитосфере при условии, что электронная концентрация экспоненциально меняется с высотой. Получены зависимости времени запаздывания и широты прихода от угла выхода. Показано, что при плавном изменении электронной концентрации с высотой имеют место дискретные траектории, для которых в результате фокусировки наблюдается значительное возрастание напряженности поля в точке прихода. Приведены дисперсионные характеристики свистящих атмосфериков, распространяющихся по этим траекториям.

Как известно, свистящие атмосферики распространяются по траекториям, близким к силовым линиям магнитного поля Земли. Долгое время считали, что все свистящие атмосферики, наблюдавшиеся на Земле, распространяются по дискретным траекториям, возникающим исключительно вследствие захвата энергии свиста своеобразным волноводом, который представляет собой колонну повышенной ионизации вдоль соответствующей силовой линии магнитного поля Земли [1]. Эффекты распространения в ионосфере с гладкой зависимостью электронной концентрации от высоты исследовались лишь в ранних работах [2–5]. Однако некоторые новые экспериментальные данные [6, 7] приводят к предположению, что наряду с чисто продольным распространением возможен механизм распространения, не связанный непосредственно с неоднородной структурой внешней ионосферы.

В настоящей работе рассматривается возможность возникновения дискретных путей распространения свистящих атмосфериков при гладкой зависимости концентрации электронов от высоты. Предполагается, что волны низкой частоты за счет неоднородностей могут просачиваться во внешнюю ионосферу с различными направлениями волнового вектора, составляя иногда значительные углы с направлением вертикали. В соответствии с этим расчет траекторий проводился для широкого диапазона углов выхода (от  $-40$  до  $+80^\circ$ ).

## ТРАЕКТОРИИ СВИСТЯЩИХ АТМОСФЕРИКОВ

Для определения траекторий свистящих атмосфериков используются уравнения луча в неоднородной магнитоактивной среде [4, 8], которые в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \left( 2c^2 k_r - \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial k_r} \right) \left| \frac{\partial(\omega^2 n^2)}{\partial \omega} \right|, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left( 2c^2 k_\theta - \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial k_\theta} \right) \left| r \frac{\partial(\omega^2 n^2)}{\partial \omega} \right|, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left( 2c^2 k_\varphi - \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial k_\varphi} \right) \left| r \sin \theta \frac{\partial(\omega^2 n^2)}{\partial \omega} \right|, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dk_r}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial r} \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} + \frac{d\theta}{dt} k_\theta + \frac{d\varphi}{dt} k_\varphi \sin \theta \right., \\ \frac{d(rk_\theta)}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} + k_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta \right., \\ \frac{d(rk_\varphi \sin \theta)}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial \varphi} \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} \right.. \end{aligned}$$

Здесь  $k_r, k_\theta, k_\varphi$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$ ,  $n^2 = n^2(\omega, r, \theta, \varphi)$ ,  $k_r, k_\theta, k_\varphi$  — показатель преломления.

Для случая свистящих атмосфериков система (1) может быть существенно упрощена. Как известно, свистящие атмосферики распространяются в плоскости магнитного меридиана, поэтому для определения их траекторий можно рассматривать двумерную задачу, которая описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \left( 2c^2 k_r - \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial k_r} \right) \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} \right., \\ \frac{d\theta}{dt} &= \left( 2c^2 k_\theta - \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial k_\theta} \right) \left| r \frac{\partial (\omega^2 n^2)}{\partial \omega} \right., \\ \frac{dk_r}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial r} \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} + \frac{d\theta}{dt} k_\theta \right., \\ \frac{d(rk_\theta)}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} \right.. \end{aligned}\quad (2)$$

Квадрат показателя преломления для свистящих атмосфериков определяется формулой

$$n^2 = \frac{v}{\sqrt{u} \cos \beta - 1}, \quad (3)$$

где  $v = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$ ,  $\omega$  — частота поля волны,  $\omega_0$  — плазменная частота,  $\omega_H$  — гирочастота,  $\beta$  — угол между волновым вектором и направлением магнитного поля.

Частные производные  $\frac{\partial n^2}{\partial k_r}$  и  $\frac{\partial n^2}{\partial k_\theta}$  получаются непосредственным дифференцированием (3), если учесть, что

$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H})}{|\mathbf{k}| |\mathbf{H}|} = \frac{k_r H_r + k_\theta H_\theta}{(k_r^2 + k_\theta^2)^{1/2} (H_r^2 + H_\theta^2)^{1/2}}. \quad (4)$$

Проводя после дифференцирования несложные преобразования, легко получить

$$\begin{aligned}\frac{\partial n^2}{\partial k_r} &= -\alpha \frac{c^2 k_\theta}{\omega^2} \operatorname{tg} \beta, \\ \frac{\partial n^2}{\partial k_\theta} &= \alpha \frac{c^2 k_r}{\omega^2} \operatorname{tg} \beta,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega_H \cos \beta}{\omega_H \cos \beta - \omega}. \quad (6)$$

Также нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial(\omega^2 n^2)}{\partial \omega} = \alpha n^2 \omega. \quad (7)$$

Подставляя выражения (5) и (7) в систему (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{c^2}{\alpha \omega n^2} (2k_r + \alpha k_\theta \operatorname{tg} \beta), \\ r \frac{d\theta}{dt} &= \frac{c^2}{\alpha \omega n^2} (2k_\theta - \alpha k_r \operatorname{tg} \beta), \\ \frac{dk_r}{dt} &= \omega \frac{\partial n^2}{\partial r} \Big|_{\alpha n^2 + \frac{d\theta}{dt} k_\theta}, \\ \frac{d(rk_\theta)}{dt} &= \omega \frac{\partial n^2}{\partial \theta} \Big|_{\alpha n^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Система из четырех уравнений (8) может быть сведена к системе из трех уравнений. Для этого надо учесть, что

$$k_r = |\mathbf{k}| \cos \varphi, \quad k_\theta = |\mathbf{k}| \sin \varphi, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} n. \quad (9)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между направлением волнового вектора и вертикалью. В результате получим систему из трех уравнений, удобную для численного интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= c \frac{2 \cos \varphi + \alpha \operatorname{tg} \beta \sin \varphi}{\alpha n}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= c \frac{2 \sin \varphi - \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \varphi}{r \alpha n}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= c \frac{\frac{\partial n^2}{\partial \theta} \cos \varphi - \left( \frac{\partial n^2}{\partial r} r + 2n^2 \right) \sin \varphi}{\alpha r n^3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используемая система координат и соответствующие углы изображены на рис. 1.

Расчет траекторий свистящих атмосфериков проводился для экспоненциальной модели зависимости электронной концентрации от высоты [3, 4]:

$$N = 1,8 \cdot 10^5 \exp [-4,183119(r - 1,0471)]. \quad (11)$$

Для магнитного поля Земли использовалось дипольное приближение. Компоненты магнитного поля в этом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 2 \cos \theta, \\ H_\theta &= H_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 \sin \theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $H_0$  — значение магнитного поля у поверхности Земли на экваторе.

Система уравнений (10) была проинтегрирована методом Рунге—Кутта на ЭВМ «Стрела» с начальными условиями:  $r_0 = 1,0471$  (300 км над поверхностью Земли);  $\theta_0 = 35, 45, 55^\circ$ . Углы выхода  $\varphi_0$  изменились

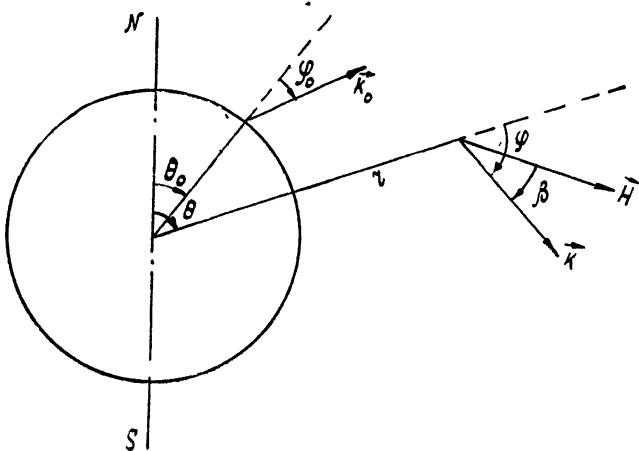


Рис. 1.

в пределах от  $-40$  до  $+80^\circ$  (через  $5^\circ$ ). Расчет проводился на частотах  $2, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 60, 80, 100$  кгц.

#### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Результаты расчета траекторий свистящих атмосфериков для широты выхода  $45^\circ$  и частоты  $10$  кгц представлены на рис. 2. Аналогичные

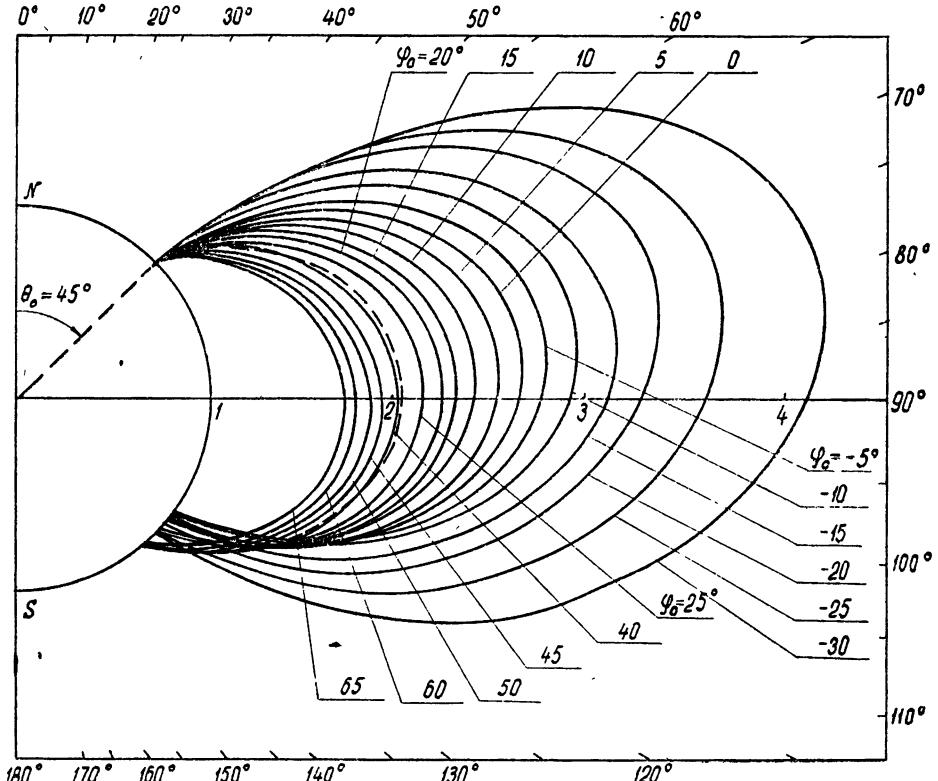


Рис. 2.

семейства траекторий были получены для широт выхода  $35, 45, 55^\circ$  и для различных частот, но, как будет показано ниже, особый интерес представляют лишь некоторые траектории с определенными значениями углов выхода  $\varphi_0$ .

Наиболее удобными для анализа оказались зависимости широты прихода от угла выхода. Соответствующие кривые для широт выхода  $35, 45, 55^\circ$  и частоты  $10 \text{ кгц}$  изображены на рис. 3. Как видно из рисунка, приведенные кривые имеют два или три резко выраженных экстремума, в частности, для широты выхода  $45^\circ$  — два максимума и минимум. Наличие экстремума означает, что траектории с близкими направлениями

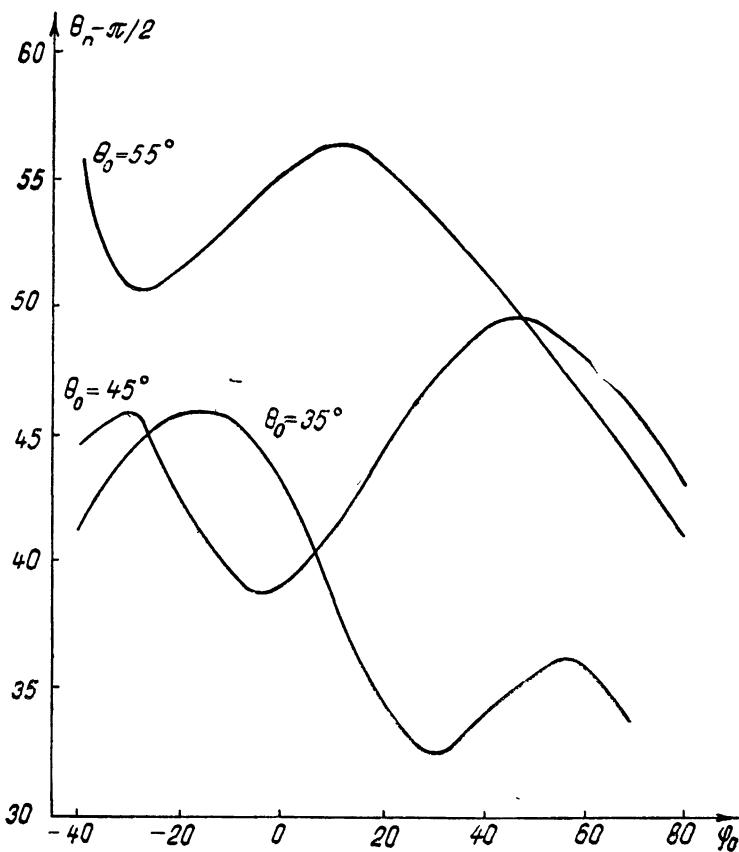


Рис. 3.

ми начального волнового вектора приходят на одну широту. Иными словами, для углов выхода, соответствующих экстремумам на кривой зависимости широты прихода от угла выхода, происходит фокусировка лучей в точке прихода.

Рассмотрим выражение для фактора фокусировки [8], которое в случае свистящих атмосфериков преобразуется к виду

$$F(t, \varphi_0) = \frac{R}{r \cos \psi \frac{\partial \theta(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} - \sin \psi \frac{\partial \vec{r}(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}}. \quad (13)$$

Здесь  $R$  — расстояние до источника,  $\psi = \varphi + \arctg [-(1/2) \operatorname{tg} \beta]$  — угол между вертикалью и групповой скоростью. Анализ выражения (13) с по-

мощью кривых, приведенных на рис. 3, удобнее проводить, представив фактор фокусировки как функцию от  $r$  и  $\varphi_0$ ; для этого положим в формуле (13)  $t = t(r, \varphi_0)$ :

$$\begin{aligned}\theta[t(r, \varphi_0), \varphi_0] &= \tilde{\theta}(r, \varphi_0), \\ r[t(r, \varphi_0), \varphi_0] &= r.\end{aligned}\quad (14)$$

Дифференцируя по  $\varphi_0$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial t(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial \theta(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} &= \frac{\partial \tilde{\theta}(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}, \\ \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial t(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial r(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Из равенств (15) легко выразить частные производные, стоящие в знаменателе (13), как функции от  $r$  и  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} &= \frac{\partial \tilde{\theta}(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial t(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}, \\ \frac{\partial r(t, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} &= - \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial t(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}.\end{aligned}\quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и учитывая, что  $\frac{\partial r}{\partial t} = |V_{rp}| \cos \psi$ ,  $r \frac{\partial \theta}{\partial t} = |V_{rp}| \sin \psi$ , получим

$$F(r, \varphi_0) = R/r \cos \psi \frac{\partial \tilde{\theta}(r, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}. \quad (17)$$

На рис. 3 представлены зависимости  $\tilde{\theta}(r, \varphi_0)|_{r=r_0}$ . В точках экстремума производная  $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varphi_0}|_{r=r_0}$  обращается в нуль, а фактор фокусировки (17) обращается в бесконечность (траектории с экстремальными значениями  $\varphi_0$  касаются каустики в точке прихода на Землю).

Таким образом, если свистящие атмосферики распространяются по траекториям с экстремальными значениями угла выхода  $\varphi_0$ , то напряженность поля в точке прихода велика. Напряженность поля при распространении по другим траекториям падает вдоль траектории из-за расходности лучей и в точке прихода мала. Можно считать, что регистрируемые свистящие атмосферики распространяются только по этим дискретным путям, так как сигналы, распространяющиеся по другим траекториям, не регистрируются в силу малости напряженности поля.

Как уже отмечалось, для исследования частотной зависимости расчет траекторий проводился на различных частотах. Для каждой частоты были получены зависимости широты от угла выхода, по которым можно судить о наличии фокусировки в точке прихода. На рис. 4, 5 приведены соответствующие кривые для широты выхода  $45^\circ$ . Как видно из рисунков, до частот 25—30 кГц кривые по-прежнему имеют три экстремума в области углов выхода  $-30^\circ, 0^\circ, 50^\circ$  (что соответствует трем возможным путям распространения). Выше 30 кГц экстремумы в области  $0^\circ$  и  $50^\circ$  сглаживаются и фокусировка в точке прихода исчезает. Максимум в об-

ласти  $-30^\circ$  сильно смещается вправо, начиная с частоты 20 кгц, а выше 60 кгц — исчезает. Смещение максимума свидетельствует о том, что, начиная с 20 кгц, в точке прихода будут фокусироваться сигналы, распространяющиеся по траекториям с другими углами выхода.

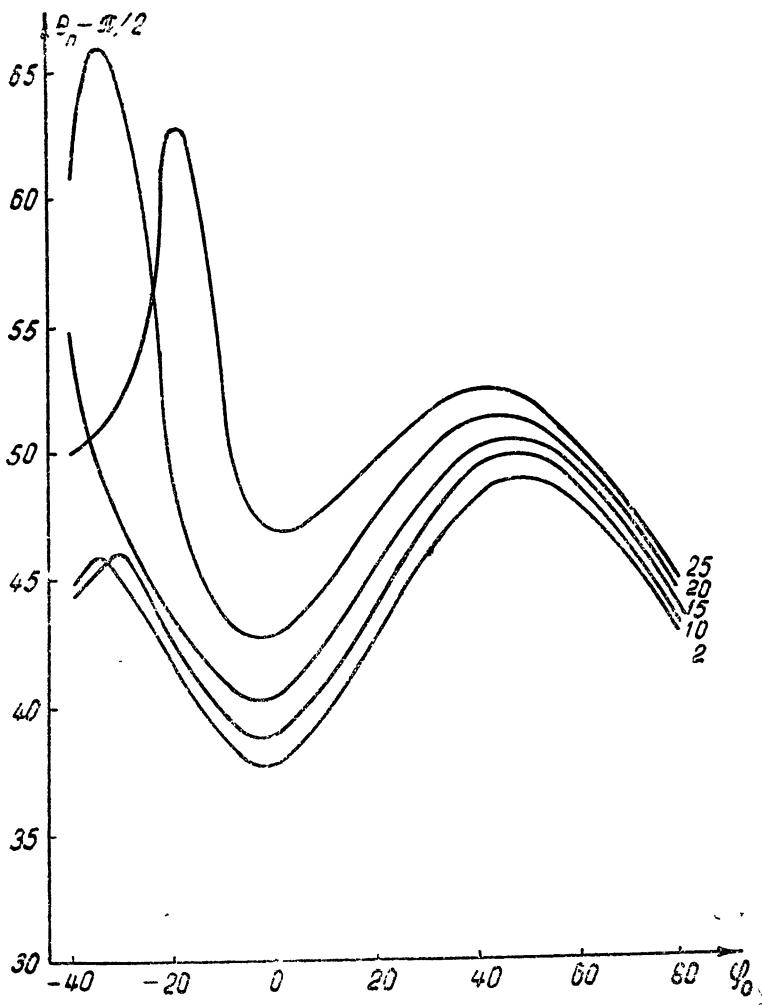


Рис. 4.

Расчет времени запаздывания сигналов с различными частотами позволяет построить дисперсионные кривые свистящих атмосфериков, распространяющихся по траекториям с экстремальными углами выхода. На рис. 6 приведены дисперсионные кривые для траекторий с углами выхода в области  $-30^\circ$ , 0, и  $50^\circ$ .

Изменение траекторий с экстремальными углами выхода в зависимости от частоты показано на рис. 7 и 8. Траектории с углами выхода в области 0 и  $50^\circ$  (рис. 7) мало меняются с изменением частоты и практически можно считать, что все частоты распространяются по одному пути. Напротив, поведение траекторий с углами выхода в области  $-30^\circ$  сильно зависит от частоты (рис. 8), что приводит к дефокусировке в точке прихода. Из изложенного выше следует, что устойчивые пути распространения свистящих атмосфериков образуются за счет фокусировки траекторий с углами выхода в областях 0 и  $50^\circ$ .

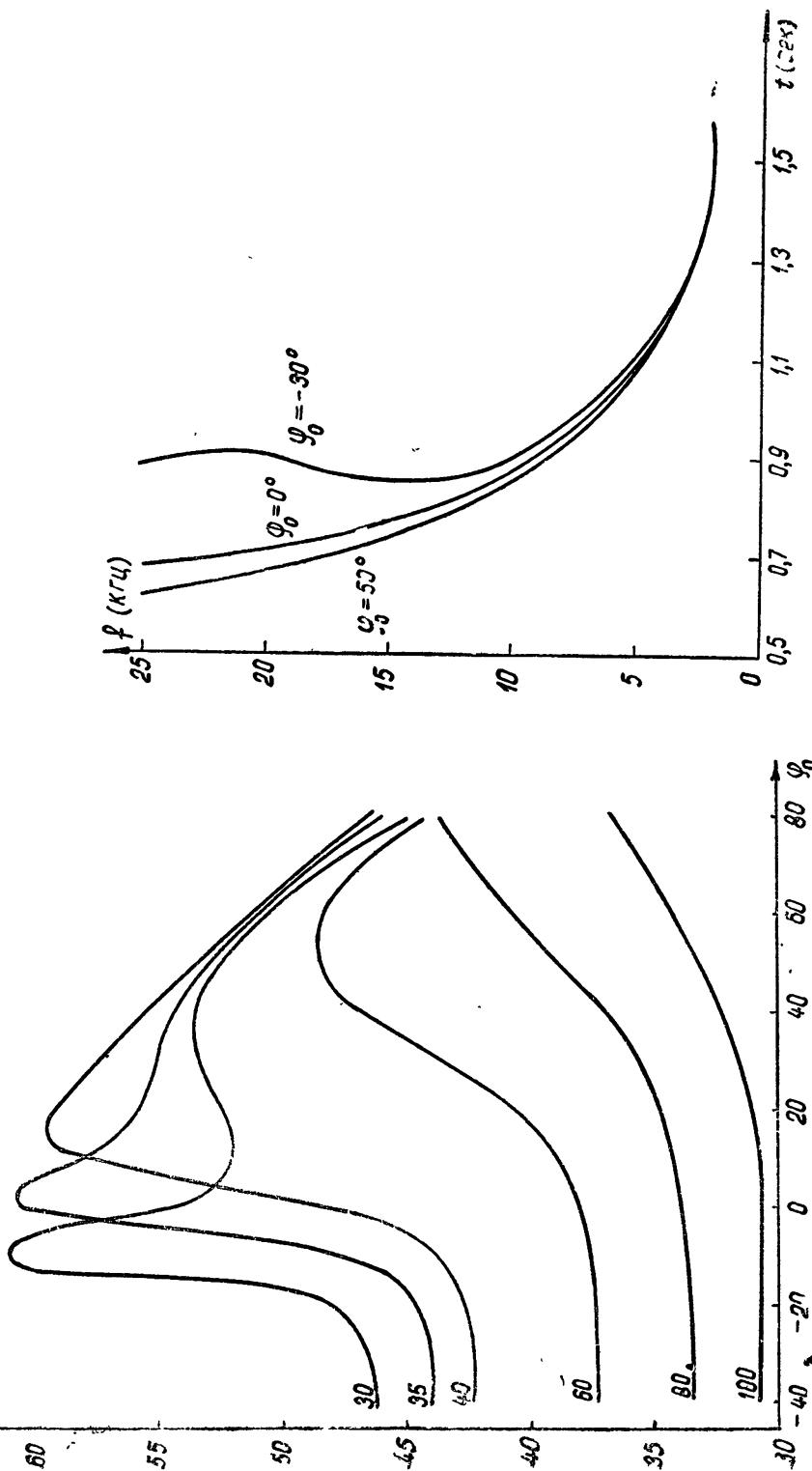


Рис. 5.

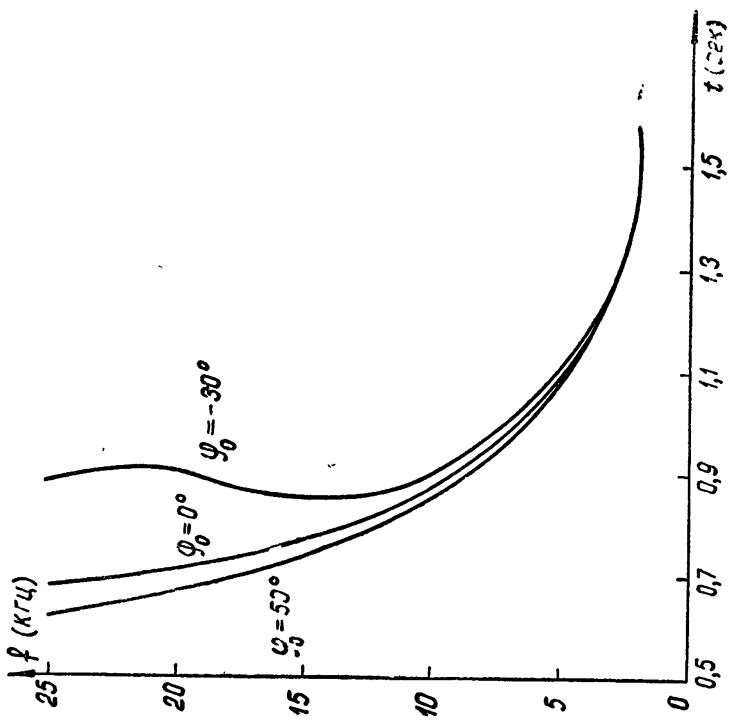


Рис. 6.

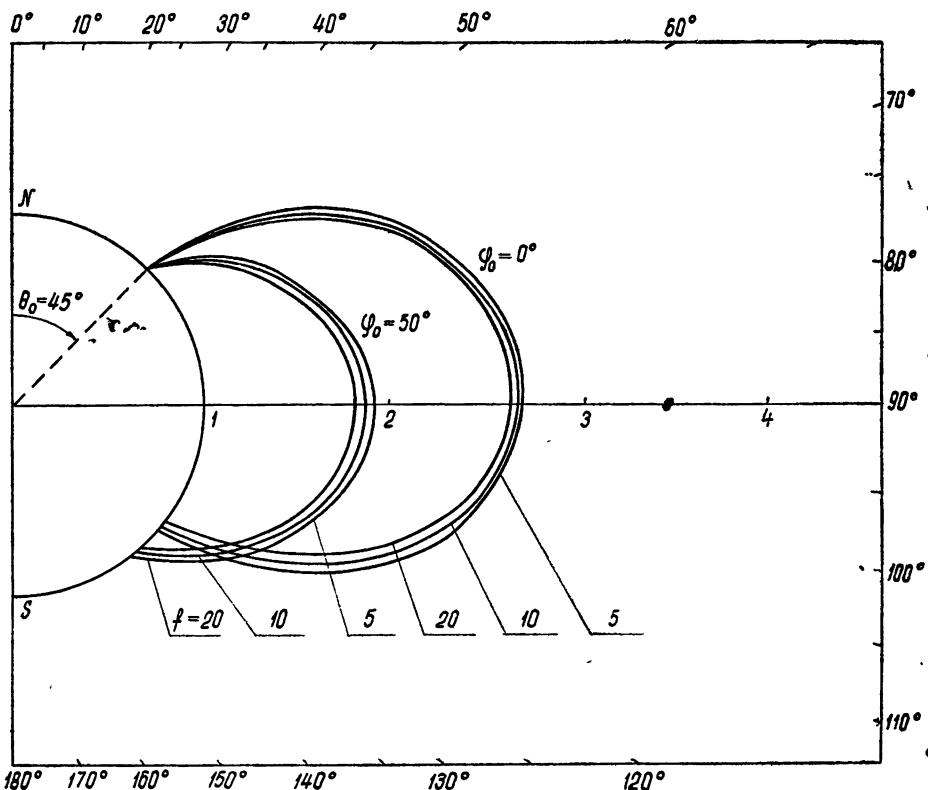


Рис. 7.

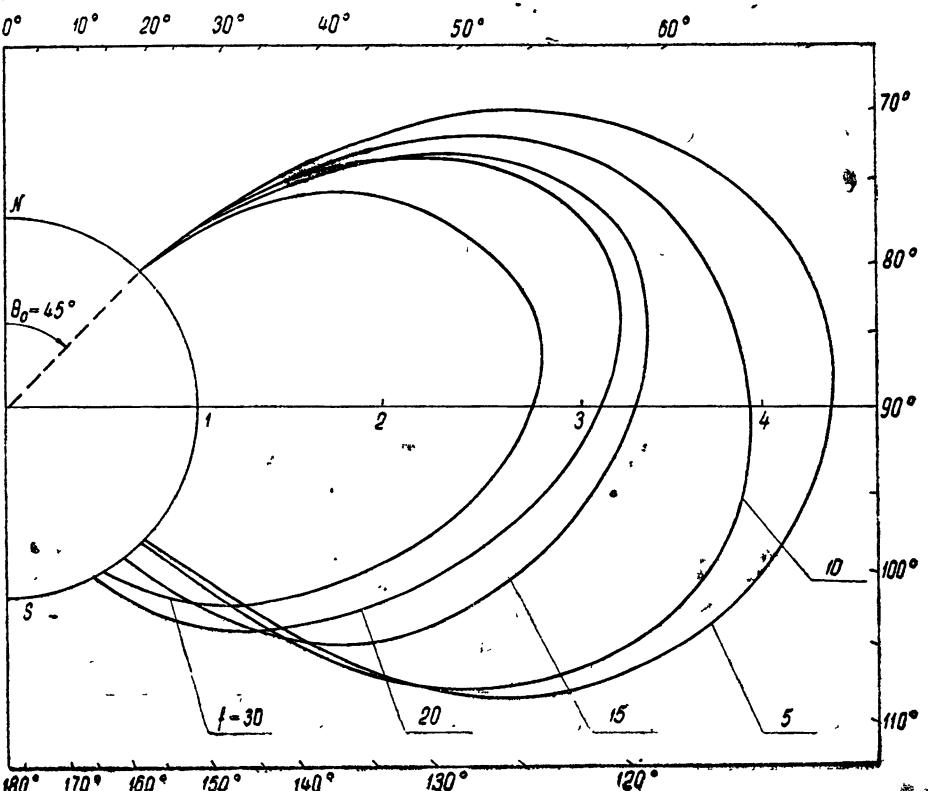


Рис. 8.

В заключение хотелось бы еще раз отметить, что расчет траекторий и выводы об образовании дискретных путей за счет фокусировки лучей в точке прихода предполагают возможность проникновения во внешнюю ионосферу радиоволн низкой частоты с различными направлениями волнового вектора. Вероятность проникновения в определенном диапазоне углов выхода будет определять вероятность распространения по тем или иным путям. Для широты выхода  $45^\circ$ , очевидно, более вероятным будет распространение по траектории с углом выхода  $0^\circ$ , чем с углами выхода  $-30$  и  $50^\circ$ . Возможность проникновения с большими углами выхода требует дальнейшего изучения, тем не менее полученные результаты представляют непосредственный интерес в случае источника, расположенного выше максимума  $F$ -слоя, в частности, такой расчет может оказаться полезным при исследовании возможности связи с ИСЗ на сверхнизких частотах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Smith, R. A. Helliwell, I. W. Jacoboff, J. Geophys. Res., 65, № 3, 815 (1960).
2. L. R. O. Storey, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A246, 113 (1953).
3. K. Maeda, I. Kimura, Rep. Jonos. Space. Res. Japan, 10, № 3, 105 (1956).
4. I. W. Jacoboff, Res. N. B. S., 65D, № 5, 485 (1961).
5. Б. Н. Гершман, Ю. С. Коробков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 51 (1958).
6. P. A. O'Brien, N. B. Clarence, J. Geophys. Res., 69, № 17, 3583 (1964).
7. D. L. Carpenter, N. Dunkel, J. Geophys. Res., 70, № 15, 3781 (1965).
8. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Ю. Г. Спиридонов, Космические исследования, 5, № 4, 591 (1967).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
3 октября 1967 г.

#### TO THE PROPAGATION THEORY OF WHISTLING ATMOSPHERICS

*Yu. G. Spiridonov*

The trajectories of whistling atmospherics in the magnetosphere are calculated under the assumption that the electron density varies exponentially with height. The dependences of the delay time and the latitude of arrival on the output angle are obtained. It is shown that at a smooth variation of the electron density with height, there take place the discrete trajectories for which as a result of focusing a considerable increase of the field intensity at the arrival point is observed. The dispersion characteristics of whistling atmospherics propagating along these trajectories are presented

УДК 621.371.243

## ОСЛАБЛЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДОЖДЯМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

*Н. П. Красюк, В. И. Розенберг, Д. А. Чистяков*

На основе расчетов по точным формулам с использованием функции распределения частиц жидких осадков, предложенной Шиффрином, исследуются эффекты поглощения и рассеяния, вызываемые дождями различного происхождения при распространении радиоволн сантиметрового и миллиметрового диапазонов.

Влияние дождя проявляется в маскировке полезного сигнала мешающим сигналом от метеообразования, а также в ослаблении сигнала при прохождении его через полосу дождя. Для учета маскирующего и ослабляющего действий дождя необходимо в общем случае знать удельную эффективную площадь обратного рассеяния и коэффициент ослабления радиоволн в дожде.

Указанному кругу вопросов посвящен ряд исследований отечественных и зарубежных авторов, например, [1-3]. Однако в этих и ряде других работ не рассматривался вопрос о влиянии природы дождей на их ослабляющие и рассеивающие свойства.

Настоящая статья имеет своей целью восполнить указанный пробел. В связи с этим были произведены расчеты удельной эффективной площади обратного рассеяния (в  $\text{см}^{-1}$ ) и коэффициента ослабления радиоволн в дожде ( $\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ ) по формулам

$$\eta = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \sigma(D) dD; \quad (1)$$

$$\gamma_0 = 4,343 \cdot 10^6 \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} n(D) \sigma_0(D) dD, \quad (2)$$

где  $n(D)dD$  — число частиц диаметром от  $D$  до  $D + dD$  в единице объема дождя;  $\sigma(D)$  и  $\sigma_0(D)$  — соответственно эффективные площади обратного рассеяния и ослабления сферической водяной частицы диаметром  $D$ , определяемые известными соотношениями Ми.

Распределение капель дождя по размерам принималось следующим [4]:

$$n(D) = a D^2 \exp(-cD), \quad (3)$$

где параметры  $a$  и  $c$  варьировались не только с интенсивностью, как это имело место в ряде исследований [5-7], но и с учетом типа дождя [8, 9].

Расчеты  $\eta$  и  $\gamma_0$  выполнялись на электронно-вычислительной машине для дождей из крупы, обзерненного и необзерненного снега интенсивностью от  $J = 0,1 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  до  $J = 100 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ , т. е. для широкого диапазона осадков от моросящих до ливневых. Диапазон размеров капель принимался [10] в расчетах от  $D_{\min} = 0,05 \text{ см}$  до  $D_{\max} = 0,55 \text{ см}$ ,

так как более мелкие капли уже не принадлежат к дождевым, а более крупные неустойчивы и разбиваются при падении в турбулентной атмосфере на более мелкие. Температура капель при расчетах изменялась в пределах от 0 до +40°C. Вычисления  $\eta$  и  $\gamma_0$  для дождей указанных типов, интенсивностей и температур проведены при следующих длинах радиоволн:  $\lambda = 1, 4, 8 \text{ мм}, 2 \text{ и } 3 \text{ см}$ . Диэлектрическая проницаемость воды для указанных длин волн и температур определялась из уравнения Дебая с параметрами, взятыми из [11, 12]. При этом для температуры 18°C комплексный показатель преломления воды для длин волн  $\lambda = 0,1; 0,4; 0,8; 2,0; 3,0 \text{ см}$  равен соответственно  $2,52 - 0,79i; 3,63 - 2,11i; 4,94 - 2,74i; 7,22 - 2,61i; 8,01 - 2,13i$ .

Изучение результатов расчетов  $\eta$  и  $\gamma_0$  показало, что для дождей всех трех типов зависимость удельной эффективной площади обратного рассеяния и коэффициента ослабления от температуры при одной и той же длине волны выражена слабо. Различие в величинах  $\eta$  и  $\gamma_0$  для температур 0 и +40°C не превышает 20—25%, поэтому в дальнейшем с достаточной для наших целей точностью приводятся значения  $\eta$  и  $\gamma_0$  лишь при температуре +18°C (рис. 1—6). Кроме того, из рис. 1—6 можно сделать следующие выводы.

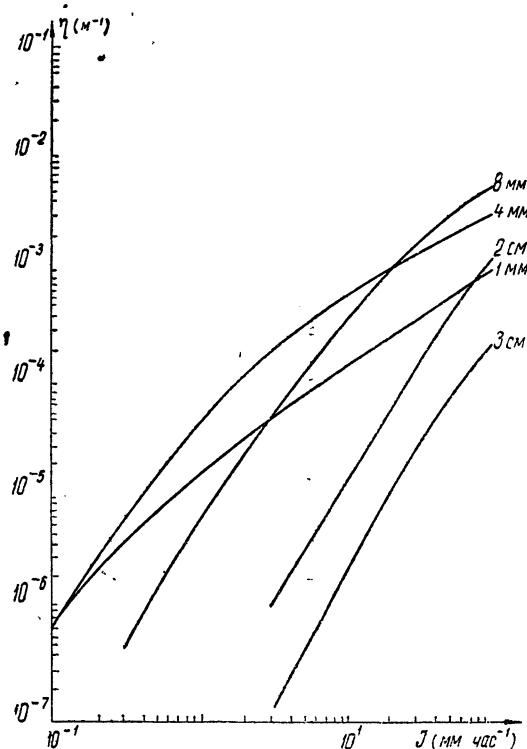


Рис. 1. Зависимость удельной эффективной площади обратного рассеяния ( $\eta$ ) от интенсивности ( $J$ ) дождя из крупы при различных длинах волн ( $\lambda$ ) и температуре  $T = +18^\circ\text{C}$ .

- Наибольшее рассеивающее и ослабляющее действие на распространение радиоволн сантиметрового диапазона оказывают дожди (при  $J < 20 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ ), образовавшиеся после таяния необзрененного снега.
- Наибольшее рассеивающее и ослабляющее действие на распро-

стремление радиоволн миллиметрового диапазона оказывают дожди (при  $J < 2,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ ), образовавшиеся после таяния обзерненного снега:

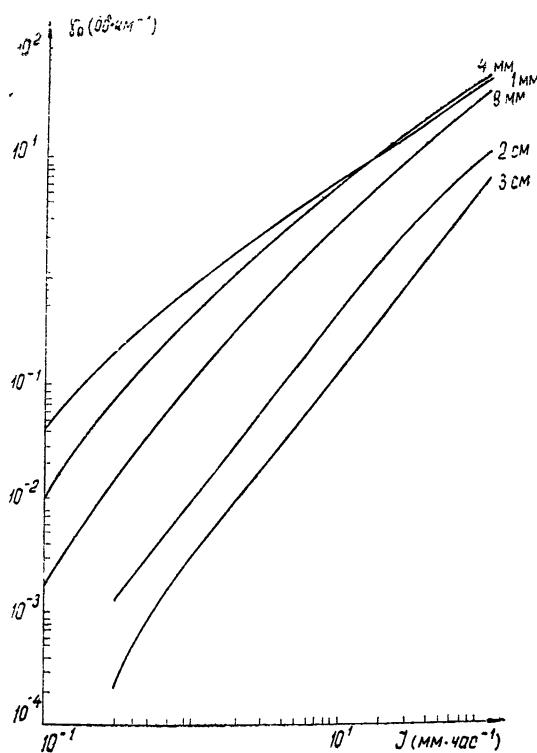
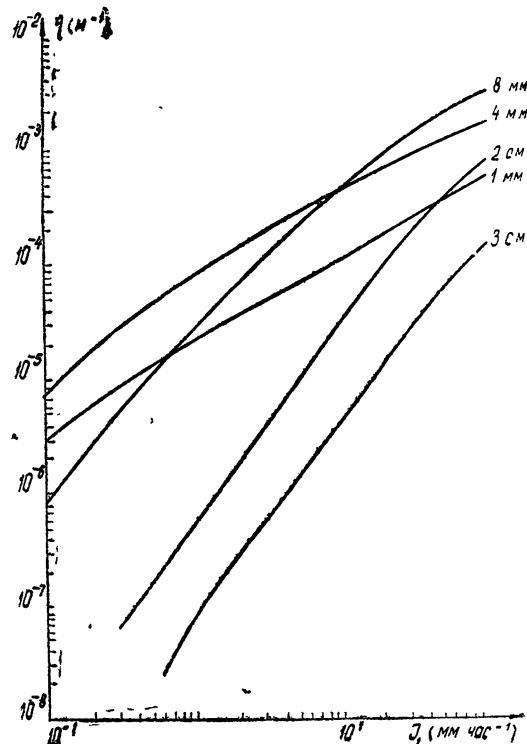


Рис. 2. Зависимость коэффициента ослабления ( $\gamma_0$ ) от интенсивности ( $J$ ) дождя из крупы при различных  $\lambda$  и  $T = +18^\circ\text{C}$ .

Рис. 3. Зависимость  $\eta$  от  $J$  дождя из обзерненного снега при различных  $\lambda$  и  $T = +18^\circ\text{C}$ .



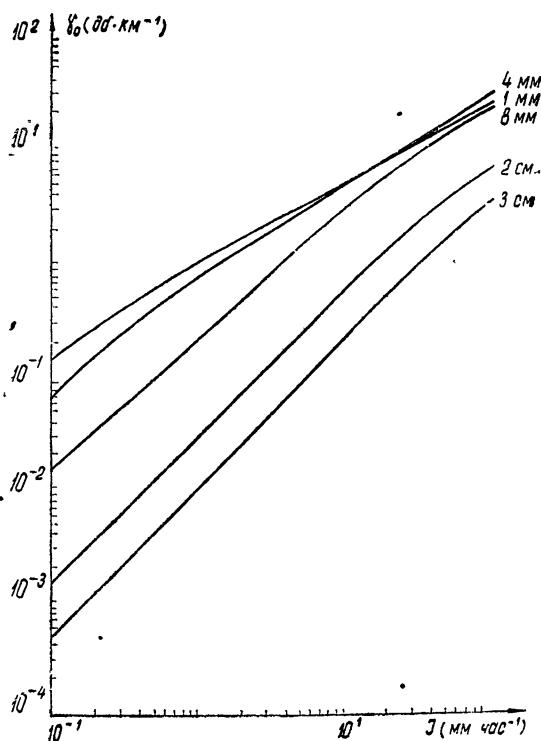


Рис. 4. Зависимость  $\gamma_0$  от  $J$  дождя из обзерненного снега при различных  $\lambda$  и  $T = +18^\circ\text{C}$ .

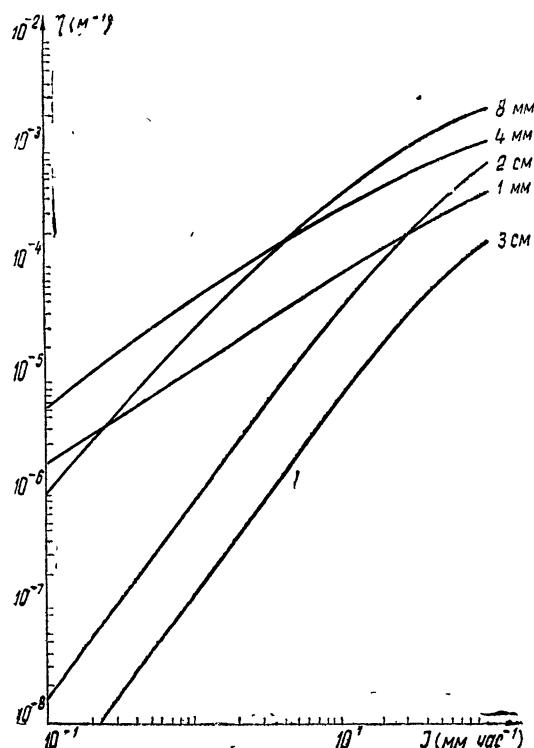


Рис. 5. Зависимость  $\gamma$  от  $J$  дождя из необзерненного снега при различных  $\lambda$  и  $T = +18^\circ\text{C}$ .

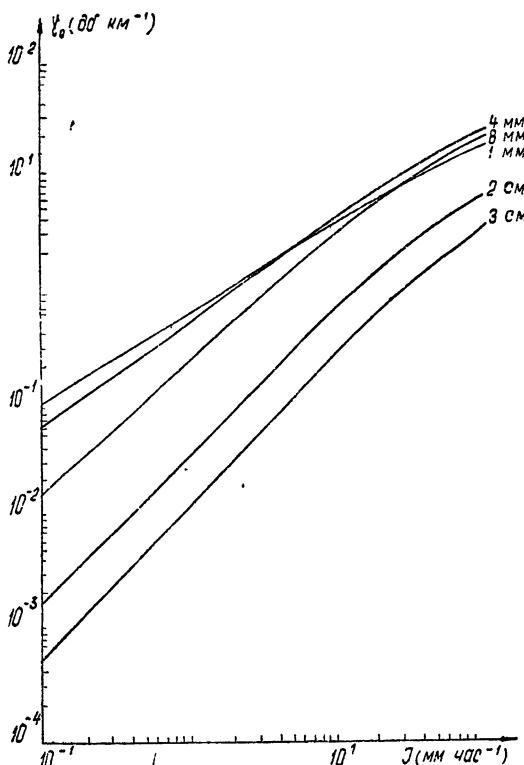


Рис. 6. Зависимость  $\gamma_0$  от  $J$  дождя из необзренного снега при различных  $\lambda$  и  $T = +18^\circ\text{C}$ .

в) Дожди всех трех типов при интенсивности  $J > 15 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  оказывают наибольшее маскирующее действие для длин волн  $\lambda = 8 \text{ мм}$ .

г) Маскирующее действие дождя из крупы для  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 4 \text{ мм}$ , меньше, чем для  $\lambda = 8 \text{ мм}$  (при  $J < 2,5 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$ ). В случае дождей из обзренного и необзренного снега аналогичные явления наблюдаются при  $J < 0,7$  и  $J < 0,25 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  соответственно.

д) Наибольшее рассеивающее действие оказывает дождь любого происхождения с  $J < 4 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  на радиоволну длиной  $\lambda = 4 \text{ мм}$ .

е) Для дождей всех трех типов с  $J < 4 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  затухание в дожде возрастает с уменьшением длины волны.

ж) При интенсивности  $J > 15 \text{ мм} \cdot \text{час}^{-1}$  наибольшее ослабление в дождях всех трех типов наблюдается при  $\lambda = 4 \text{ мм}$ .

з) Наилучшее совпадение рассчитанных значений  $\gamma_0$  с экспериментальными данными [3] наблюдается в случае дождя из обзренного снега.

Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы для установления структуры и происхождения дождей по данным совместных метеорологических и радиолокационных наблюдений, для оценки потенциальных возможностей метеорадиолокаторов сантиметрового и миллиметрового диапазонов и для других целей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. G. Medhurst, IEEE Trans. Ant. and Propag., 13, 550 (1965).
2. В. Д. Степаненко, Тр. Всесоюзного научного метеорологического совещания, 5, Гидрометеоиздат, Л., 1963.

3. А. Я. Усиков, В. Л. Герман, И. Х. Ваксер. Укр. физ. ж., 6, 618 (1961).
4. Е. А. Поляков, К. С. Шифрин, Тр. Главной геофиз. обсерв., вып. 42 (104), 87 (1953).
5. J. O. Laws, D. A. Parsons, Trans. Am. Geophys. Union, 24, 432 (1943).
6. J. S. Marshall, W. M. Palmer, J. Met., 5, 165 (1948).
7. A. C. Best, Quart. J. R. Met. Soc., 76, 16 (1950).
8. И. В. Литвинов, Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 12, 1474 (1956).
9. И. В. Литвинов, Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 6, 838 (1957).
10. Л. Т. Матвеев, Основы общей метеорологии. Физика атмосферы, Гидрометеоиздат, Л., 1965.
11. C. H. Collie, J. B. Hasted, D. M. Ritson, Proc. Phys. Soc., 60, 145 (1948).
12. J. E. Chamberlain, G. W. Chantry, H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, T. B. Taylor, G. Wyllie, Nature, 210, 790 (1956).

Северо-западный заочный  
политехнический институт

Поступила в редакцию  
20 декабря 1966 г.

## ATTENUATION AND SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY RAINS OF DIFFERENT ORIGIN

*N. P. Krasyuk, V. I. Rozenberg, D. A. Chistyakov*

The absorption and scattering effects produced by rains of different origin in propagating centimeter and millimeter radio waves are investigated on the basis of calculations in accord with precise formulae using the distribution function of liquid precipitation particles, proposed by Shifrin.

УДК 621.378.335

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ Не-Не ЛАЗЕРА НА ВОЛНЕ 0,63 мк

Ю. И. Зайцев

Экспериментально исследован спектр естественных флюктуаций интенсивности одночастотного Не-Не лазера на волне 0,63 мк. Получены зависимости спектральных плотностей коэффициента модуляции интенсивности от мощности излучения при рассстройке по частоте относительно центра линии оптического перехода. Результаты опытов сопоставлены с расчетами на основе ранее проведенного теоретического рассмотрения; найдено хорошее качественное и удовлетворительное количественное соответствие, что позволяет считать спонтанное излучение рабочего перехода основной причиной естественных флюктуаций.

В ряде опубликованных работ, например, [1-4], изучались флюктуации интенсивности излучения газовых лазеров, обусловленные как техническими причинами (главным образом, шумами плазмы газового разряда), так и естественными (спонтанным излучением активных атомов инверсной среды). Цель данной работы — изложить результаты экспериментального исследования естественных флюктуаций интенсивности одночастотного Не-Не лазера и сопоставить опытные данные с выводами теоретического расчета, представленного в [5]. Измерения проведены нами в возможно большем интервале мощностей генерации (превышения порога возбуждения) колебаний аксиального типа при перестройке частоты в пределах спектральной линии оптического перехода с длиной волны 0,63 мк. (Некоторые предварительные результаты наших исследований изложены в [6].) В работе [1] изложены результаты аналогичных исследований вблизи порога возбуждения (мощность генерации — менее 5 мквт), которые сопоставлены с выводами упрощенной теории вопроса.

Как отмечалось в работе [2], адекватной величиной, характеризующей флюктуации интенсивности, является коэффициент глубины хаотической модуляции интенсивности и его спектр. В работе [5] дан анализ естественных флюктуаций лазерного излучения с учетом дисперсионных и нелинейных свойств среды и, в частности, получено выражение для спектральной плотности коэффициента хаотической модуляции интенсивности.

Исследование спектра флюктуаций сигнала на выходе фотоприемника непосредственно позволяет определить спектр изучаемых флюктуаций интенсивности. Значительное превышение полезного эффекта (флюктуаций интенсивности) над шумами аппаратуры (главным образом, из-за дробового эффекта фототока) можно обеспечить при применении фотоприемника с возможно большим значением квантовой эффективности и, разумеется, наиболее полном использовании выходной мощности лазера [2]. В наших экспериментах был применен спектральный метод исследования флюктуаций тока на выходе кремниевых фотодиодов (вместо ФЭУ, использовавшихся другими авторами), имевших кван-

товый выход около 60 %. Это позволило нам изучать весьма малые уровни флуктуаций интенсивности лазерного излучения.

Отметим, что для исследования флуктуаций света от лазеров авторами работ [1, 7] наряду со спектральным применялся метод как с регистрацией числа импульсов фототока на выходе ФЭУ, так и с регистрацией числа совпадающих импульсов тока на выходе двух ФЭУ. Такие методы требуют сложной аппаратуры, но не дают непосредственной картины спектра флуктуаций интенсивности.

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Расчет спектра флуктуаций излучения лазера выполнен в работе [5] на основе описания нелинейных и дисперсионных свойств активной среды с помощью феноменологического параметра — диэлектрической восприимчивости  $\chi = \chi_1 - i\chi_2$ ;  $\operatorname{Re} \chi = \chi_1$  и  $\operatorname{Im} \chi = \chi_2$  являются функциями интенсивности и частоты колебаний лазера. Анализ показал, что основной причиной естественных флуктуаций лазерного излучения является спонтанное излучение инверсного перехода среды. Согласно выражению (38А) — нумерацию формул работы [5] будем давать с индексом А — спектральная плотность коэффициента хаотической модуляции интенсивности  $M_F^2$  является, в частности, функцией отношения значений минимальных составляющих диэлектрической восприимчивости среды  $\chi_2^0/\chi_2$ , соответственно при отсутствии колебаний и при их наличии, а также ряда величин, пропорциональных частным производным от величины  $\chi_1$  и  $\chi_2$  по частоте  $\nu$  и интенсивности колебаний (см. выражения (24А) — (27А)). Последние характеризуют дисперсионные и нелинейные свойства активной среды в режиме генерации. Определение путем расчета указанных параметров среды можно провести, если известна зависимость  $\chi_1$  и  $\chi_2$  от частоты и мощности лазера. В литературе имеется ряд выражений для  $\chi$  в поле излучения; для количественного истолкования экспериментально наблюдаемых нами зависимостей была принята аппроксимация (см. также работу [8])

$$\tilde{\chi}_2 = \chi_2^0 / \sqrt{1 + \gamma P}, \quad \chi_2^0 = -A \exp(-x^2) = -A / \exp[(\nu - \nu_a)/0,6 \Delta \nu], \quad (1)$$

где  $x$  — относительная расстройка частоты  $\nu$  лазера по отношению к средней частоте  $\nu_a$  линии перехода;  $A$  — значение  $\chi_2^0$  в центре линии перехода (при  $x=0$ );  $\gamma$  — параметр нелинейности, зависящий, вообще говоря, от расстройки  $x$ ;  $P$  — полная мощность излучения, отдаваемая активной средой;  $\Delta \nu_a$  — эффективная ширина линии перехода. Такая запись предполагает, что линия перехода уширена главным образом за счет допплеровского эффекта. При учете столкновений форма линии перехода не будет гауссовой, но вблизи ее центра с достаточной точностью она описывается также гауссовой кривой с некоторой эффективной шириной  $\Delta \nu_a$  (см., например, [9]).

Ширина  $\Delta \nu_a$  линии перехода на волне 0,63 мк много больше ширины полосы «холодного» резонатора  $\Delta \nu$ . Имея это в виду, можно показать, что спектр флуктуаций интенсивности практически не зависит от величин, характеризующих дисперсию активной среды. Это позволяет использовать при расчетах величины  $M_F^2$  (в том числе и при  $x \neq 0$ ) преобразованное с учетом (1) выражение (38А), которое является точным для центра линии перехода:

$$\overline{M_F^2} = \overline{M_0^2} [1 + (2\pi F/d)^2]^{-1},$$

$$\overline{M_0^2} = \frac{8(\Delta\nu)^2 h \nu \alpha \tilde{\beta} \sqrt{1 + \gamma P}}{P(p/2\pi)^2}, \quad (2)$$

где  $h\nu$  — энергия фотона;  $p$  — коэффициент прочности предельного цикла, изображающего на фазовой плоскости установившееся колебание;  $\alpha = (n_i^0/g_2)/(n_i^0/g_2 - n_i^0/g_1)$  — параметр, характеризующий степень инверсии населеностей оптического перехода при отсутствии колебаний (начальная инверсия);  $\tilde{\beta} = \tilde{n}_2/n_2^0$  — параметр, характеризующий обеднение верхнего уровня в процессе генерации\*.

По величине спектральной плотности  $\overline{M_F}$  можно определить эффективный коэффициент глубины модуляции интенсивности излучения  $M_{\text{эфф}}$ , обусловленной спонтанным излучением инверсного перехода; легко рассчитать, что  $M_{\text{эфф}} = \left( \int_0^\infty \overline{M_F^2} dF \right)^{1/2} = 0,5(p\overline{M_0^2})^{1/2}$ .

Соотношение (2) позволяет количественно рассчитать спектр естественных флуктуаций и сопоставить результаты анализа с экспериментом. Значения величин, входящих в (2), могут быть определены как из специальных динамических измерений, так и из флуктуационных измерений спектра  $\overline{M_F^2}$ . Уровень и вид спектра флуктуаций в значительной мере (наряду с  $P$ ) определяется величиной коэффициента прочности предельного цикла  $p$ . Поэтому существенна зависимость коэффициента  $p$  от определяющих его параметров. Пользуясь (1), (19А) и (24А), можно получить зависимость  $p/2\pi$  от относительной расстройки  $x$  (при  $\Delta\nu = \text{const}$  и  $A = \text{const}$ ):

$$p/2\pi = \frac{\Delta\nu}{2} \frac{\gamma(x)P}{1 + \gamma(x)P} = \frac{\Delta\nu}{2} \{ 1 - \exp[2(x^2 - x_1^2)] \}, \quad (3)$$

где  $x_1$  — расстройка, при которой прекращается генерация лазера. Для  $p/2\pi$  в центре оптического перехода ( $x=0$ ;  $P_0$  изменяется в результате изменения потерь в резонаторе при  $A = \text{const}$ ) находим

$$p/2\pi = \frac{2\pi\nu AL}{L} \frac{\gamma(0)P_0}{[1 + \gamma(0)P_0]^{3/2}}, \quad (4)$$

где  $l$  и  $L$  — соответственно длина разрядного промежутка и длина резонатора лазера. Для определения абсолютных значений  $A$  и  $\gamma(0)$  легко получить соотношения

$$A = \frac{\Delta\nu L}{4\pi\nu l} \exp(x_1^2), \quad \gamma(0) = \frac{\exp(2x_1^2) - 1}{P_0}. \quad (5)$$

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА

*Измерительная установка.* Основные элементы установки изображены на рис. 1. Исследуемый лазер 1 возбуждался постоянным током и работал на длине волнны 0,63 мк\*\*. Использовалась газоразрядная трубка диаметром 1,5 ми с «брюстеровскими» окнами при длине разрядного промежутка  $l$  около 16 см; расстояние  $L$  между плоским и сферическим

\* В соотношении (2) учтен переход к обычным частотам наблюдения  $F = \Omega/2\pi$ , а также соотношение  $\overline{M_F^2} = 4m_F^2$ , где  $m_F^2$  — спектральная плотность коэффициента хаотической модуляции амплитуды колебания лазера, используемая в [6].

\*\* Возможность возбуждения лазера на волне 3,39 мк, имеющей общий уровень с переходом на волне 0,63 мк, исключалась за счет изготовления окон трубки из стекла марки ЛК-4.

(радиус кривизны около 250 см) зеркалами равнялось  $\sim 23$  см. При изменении длины резонатора одночастотный режим генерации на аксиальном типе колебания обеспечивался в полосе частот (зоне генерации) около 650 Мгц. Перестройка частоты в пределах зоны генерации производилась напряжением (постоянным либо переменным с частотой 50 гц), поданным на пьезоэлектрический цилиндр с закрепленным на нем зеркалом резонатора 2. Мощность лазера можно было регулировать также изменением силы разрядного тока или изменением потерь в резонаторе. В большинстве опытов сила тока разряда подбиралась

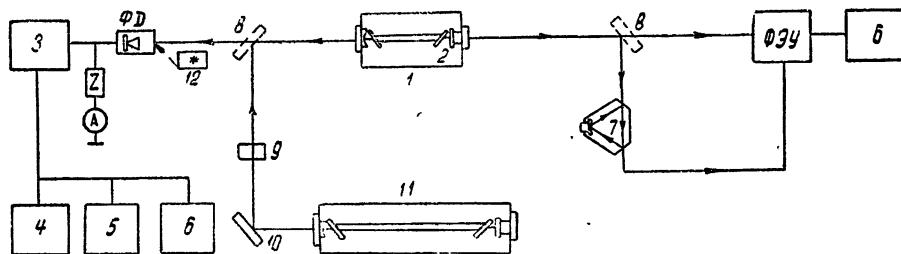


Рис. 1.

такой, чтобы разряд был возможно стабильней и его шумы не вносили заметный вклад в изучаемые флуктуации интенсивности (способ проверки этого описан в [2]). При проведении измерений оказалось важным наличие высокой стабильности параметров генератора; это требование было учтено в конструкции лазера, но никаких автоматических систем стабилизации не было применено.

Излучение лазера детектировалось кремниевым фотодиодом ФД; флуктуационное напряжение с импеданса  $z$  после усиления 3 поступало на анализаторы спектра 4 и 5 типа С4-12 и С4-8 и осциллограф 6. Постоянная составляющая фототока  $I_\phi$  на выходе калиброванного по мощности ФД измерялась микроамперметром А. Излучение со второго выхода лазера использовалось для индикации его оптического спектра и изменения мощности излучения по зоне генерации. Для этого применялись сканируемый интерферометр бегущей волны 7, ФЭУ и осциллограф 6, на развертку которого подавалась часть напряжения, используемого для сканирования длины интерферометра или лазера\*.

Для измерения  $\Delta v$  при различных уровнях потерь в резонаторе использовался вспомогательный лазер 11, система зеркал 8 и 10, оптический вентиль-изолятор 9; полоса пропускания определялась по методике, в общих чертах совпадающей с описанной в [1].

Для калибровки абсолютного уровня флуктуаций ФД освещался «белым» светом от лампы накаливания 12. Установка размещалась на тяжелой стальной плате и находилась в обычных лабораторных условиях.

*Методика измерений.* Измерение естественных флуктуаций интенсивности излучения лазера проводилось после прогрева установки в течение нескольких часов в основном в вечернее время, когда заметно уменьшался уровень механических и акустических помех. Отождествление наблюдаемых флуктуаций интенсивности с естественными основано на том, что значения  $M_F^2$  в широком интервале частот наблюдения  $F$  (примыкающем к нулю) постоянны и затем уменьшаются с ростом  $F$  в соответствии с формулой (2). Спектр же флуктуаций интенсивности, обусловленный техническими факторами, быстро спадает с ростом

\* Применение трехзеркального интерферометра устранило реакцию на лазер  $I^{\text{av}}$ , что весьма важно при исследовании флуктуаций.

$F$  и часто имеет нестационарный характер. Сопоставление результатов многочисленных наблюдений в различных условиях позволило четко выделять естественные флуктуации.

Для определения абсолютных значений величины  $\overline{M_F^2}$  аппаратура калибровалась, как указывалось выше, с использованием освещения фотодиода «белым» светом; было проверено, что при этом флуктуации тока фотодиода (в режиме с отрицательным смещением) подчиняются формуле дробового эффекта в интересующем нас интервале частот наблюдения. В процессе измерений на выходе соответствующих спектр-анализаторов (с достаточно узкой полосой пропускания) снимались три показания:  $\alpha_t$  — в отсутствие освещения ФД,  $\alpha_k$  — при освещении ФД «белым» светом и постоянной составляющей фототока  $I_k$  и  $\alpha_l$  — при его освещении исследуемым лазерным излучением и среднем значении фототока  $I_l$ . В случае линейной амплитудной характеристики спектр-анализатора легко получить, что искомое значение  $\overline{M_F^2}$  равно

$$\overline{M_F^2} = \frac{4e}{I_l} \left[ \frac{I_k}{I_l} \frac{\alpha_l^2 - \alpha_t^2}{\alpha_k^2 - \alpha_t^2} - 1 \right], \quad (6)$$

где  $e$  — заряд электрона. В наших опытах значения  $\alpha_l$ ,  $\alpha_k$  и  $\alpha_t$  определялись по фотоспектрограммам; при этом учитывались поправки, связанные с некоторой нелинейностью амплитудных характеристик анализаторов.

Из (2) следует, что при значениях частоты  $F = kp/2\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) величина  $\overline{M_F^2} = \overline{M_0^2}/(1 + k^2)$ ; это дает очевидный экспериментальный прием определения коэффициента прочности предельного цикла из флуктуационных измерений. Значения  $p$  можно определить и из динамических опытов путем расчета по формулам (3) и (4). Третий способ определения  $p$  — модуляционный метод. Если параметры активной среды (величину  $A$ ) изменять с низкой частотой в небольших пределах, то это вызовет малую модуляцию интенсивности излучения лазера. Изменяя глубину этой модуляции, можно определить значение  $p$  по результатам расчета на основе соотношений (16A) и (18A)\*.

Определение значений полной оптической мощности излучения  $P$  проводилось на основе соотношения  $P/P_t = \Delta\nu/\Delta\nu_t$ , где  $P_t$  — та часть мощности излучения  $P$ , которая выходит через одно из зеркал резонатора и поступает на фотоприемник;  $\Delta\nu_t$  — полоса резонатора, обусловленная лишь коэффициентом прозрачности  $T$  упомянутого зеркала; ее значение рассчитывается по соотношению  $\Delta\nu_t \approx cT/4\pi L$  ( $c$  — скорость света) и при  $T \approx 0,36\%$   $\Delta\nu_t = 0,37$  Мгц.

Для определения параметров  $x$ ,  $x_1$ ,  $A$ ,  $\gamma$  были построены графики выходной мощности лазера в функции расстройки частоты резонатора относительно центральной частоты  $\nu_l$  линии перехода. Эти кривые, соответствующие различным потерям в резонаторе, приведены на рис. 2, где по оси абсцисс отложена расстройка в Мгц, а по оси ординат — выходная мощность  $P_t$  в мквт. Из-за асимметрии приведенных кривых (обусловленной наличием изотопов Ne) за приближенное значение  $\nu_l$  бралось значение частоты  $\nu$  в центре зоны генерации. По этим графикам определялись значения относительной расстройки  $x$  и, в частности, значения  $|x_1|$ ; эти данные совместно с соответствующими  $P_t$  и  $\Delta\nu$  позволяют по соотношениям (5) рассчитать значения  $A$  и  $\gamma(0)$ .

\* Модуляционный метод позволяет также определить зависимость параметра нелинейности  $\gamma$  от расстройки  $x$ . Проведенные нами измерения показали слабую зависимость  $\gamma$  от  $x$ . Отметим, что модуляционный метод определения нескольких иного параметра нелинейности для газового лазера использовал Болвин [12].

Остановимся на определении параметров  $\alpha$  и  $\tilde{\beta}$ . Их значения могут быть количественно оценены при проведении дополнительных специальных измерений, аналогичных описанным в [13] или предложенным в [14]. Эти измерения связаны с определением величины интенсивности спонтанного излучения с обоих уровней рабочего перехода; такие измерения нами не проводились. Согласно данным работ [1] и [12], для опи-

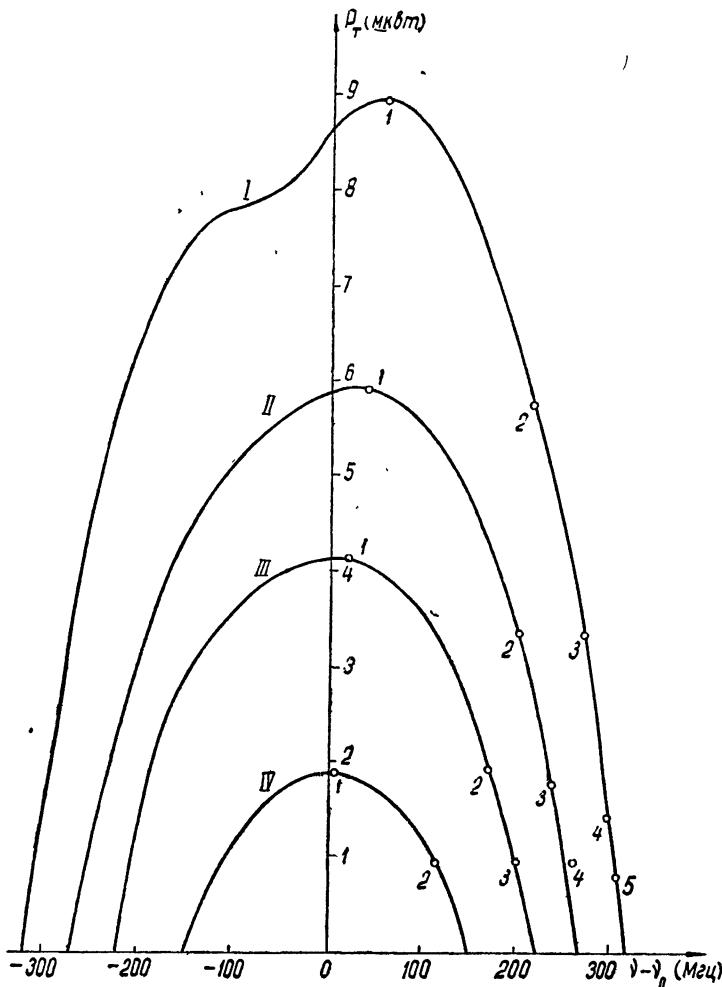


Рис. 2.

санных в них лазеров  $\alpha$  равно соответственно  $\sim 2$  и  $\sim 2.5$ ; для наших условий (с учетом геометрии различных трубок и силы тока разряда)  $\alpha$ , по-видимому, близко к 1,5—1,7. Величину  $\tilde{\beta}$  можно считать лежащей в интервале значений 0,8—1; таким образом, при расчетах нами бралось значение  $\alpha\tilde{\beta} = 1,5$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

По описанной выше методике были исследованы зависимости спектральной плотности коэффициента модуляции интенсивности  $M_F^2$  от ча-

стоты наблюдения  $F$  при различных уровнях мощности излучения  $P$  и расстройках частоты генерации по отношению к центру линии перехода. Основные результаты представлены на рис. 3—6.

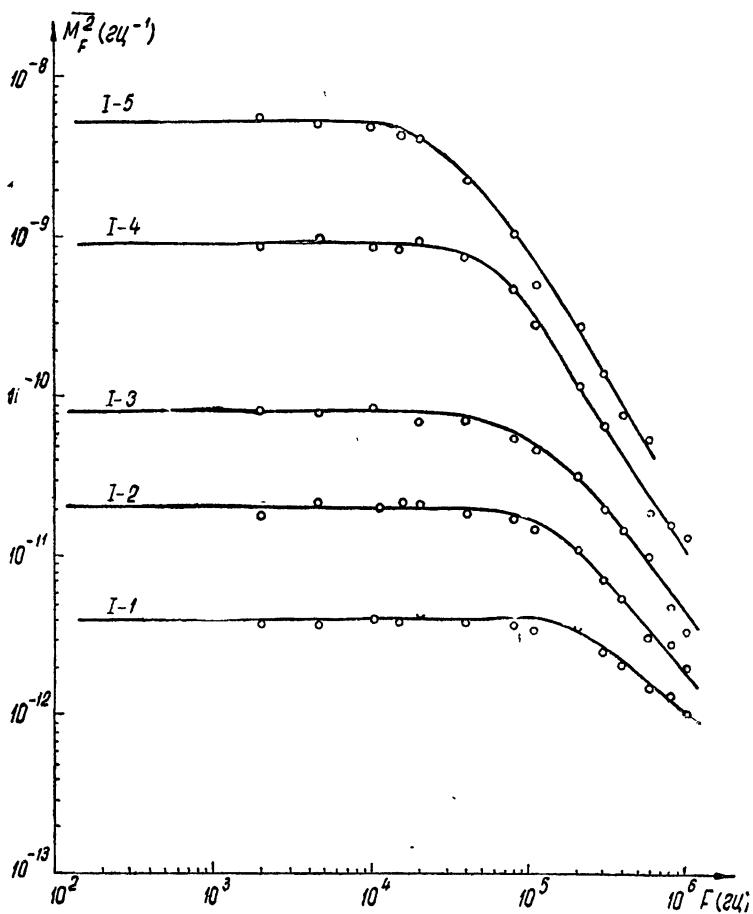


Рис. 3.

Режимы работы лазера, при которых измерены спектры флюктуаций в пределах различных зон генерации, отмечены на рис. 2 точками (○) с индексами I-1, I-2, ..., II-1, ... и т. д. В этих опытах максимальная мощность  $P$ , отдаваемая активной средой в центре зоны I, равна  $\sim 150 \text{ мквт}$ , величина  $\Delta\nu$  имела значения от  $6,3 \text{ Мгц}$  для зоны I до  $7,3 \text{ Мгц}$  для зоны IV. Все экспериментальные точки на рис. 2 лежат по одну сторону от центра перехода, так как предварительные измерения показали, что для одинаковых уровней мощности  $P$  по обе стороны от центра зоны генерации значения  $M_F^2$  одинаковы в пределах погрешностей измерений.

Опыт показал, что уровень и вид спектров флюктуаций, измеренные при одинаковых мощностях генерации для различных расстроек, например, в точках IV-2, III-3, II-4 и I-5 полностью совпадают с точностью до ошибок измерений. Это свидетельствует о том, что флюктуации интенсивности практически не зависят от величины расстройки  $|\nu - \nu_0|$ . При расстройках же частоты генерации в пределах одной и той же зоны

генерации ( $\Delta\nu = \text{const}$ ) спектр флюктуаций меняется существенно. Типичные результаты такого эксперимента представлены на рис. 3, где приведено семейство зависимостей  $\overline{M_F^2}$  от  $F$  для режимов I-1, I-2 и т. д. зоны I; интервал частот наблюдения расположен между  $\sim 100$  гц и 1 кгц.

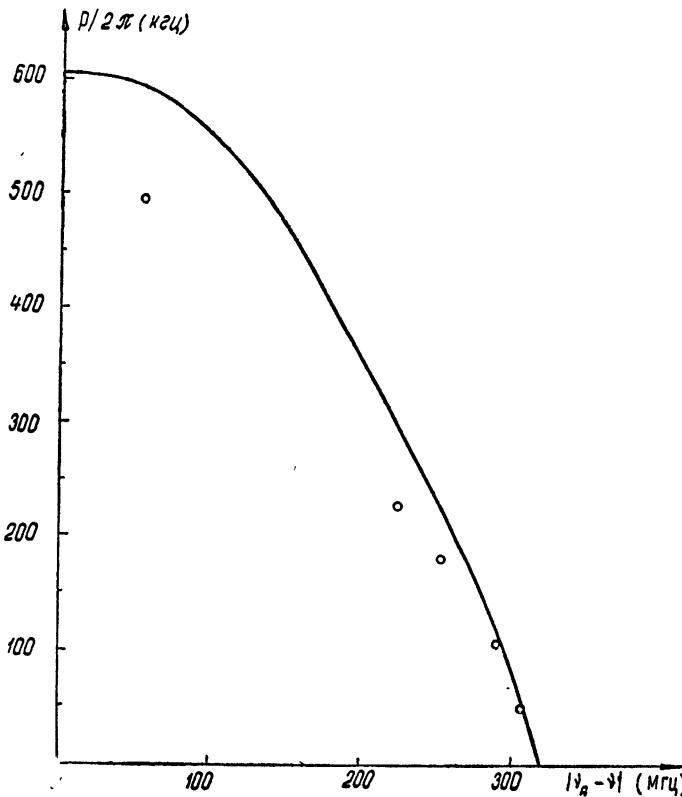


Рис. 4.

Заметим, что значения величины  $\overline{M_F^2}$  при  $F \ll 2$  кгц в значительной степени определяются техническими причинами. Поэтому были приняты дополнительные меры: более тщательная фильтрация питающих лазер напряжений, выявление и устранение всякого рода источников механических и акустических возмущений установки, выбор времени проведения измерений и т. п. После всех этих мероприятий измерения в диапазоне 70—10000 гц показали, что значения  $\overline{M_F^2}$  практически постоянны в этом участке спектра. Эти опыты позволили построить кривые на рис. 3, начиная со 100 гц. Необходимо подчеркнуть, что малейшие помехи (механические, акустические и т. д.) могут увеличить значения  $\overline{M_F^2}$  в диапазоне  $F$  до 1—2 кгц на 1—2 порядка и более.

Аналогичные представленным на рис. 3 зависимости  $\overline{M_F^2}$  в функции  $F$  получены и для зон генерации II—IV. Во всех случаях в исследованном диапазоне частот  $F$  спектр  $\overline{M_F^2}$  вполне удовлетворительно описывается соотношением (2).

Из сопоставления кривых рис. 3 видно, что значение прочности предельного цикла  $p$  для одной и той же зоны генерации не остается постоянным при изменении расстройки  $x$ . Характер его изменения для зоны

И виден из графика на рис. 4, где по оси абсцисс отложен модуль расстройки частоты и по оси ординат величина прочности предельного цикла, деленная на  $2\pi$ . Экспериментальные значения ( $\circ$ )  $p/2\pi$  даны как арифметическое среднее значений, определенных из кривых рис. 3 по уменьшению  $M_F^2$  в 2 и 5 раз. (Сплошной кривой представлены расчетные данные, см. ниже.). Аналогичные зависимости были построены и для зон генерации II—IV; сравнение в соответствующих масштабах значений  $p/2\pi$  с зависимостью  $P$  по зоне генерации показало, что  $p$  практически определяется лишь уровнем генерируемой мощности.

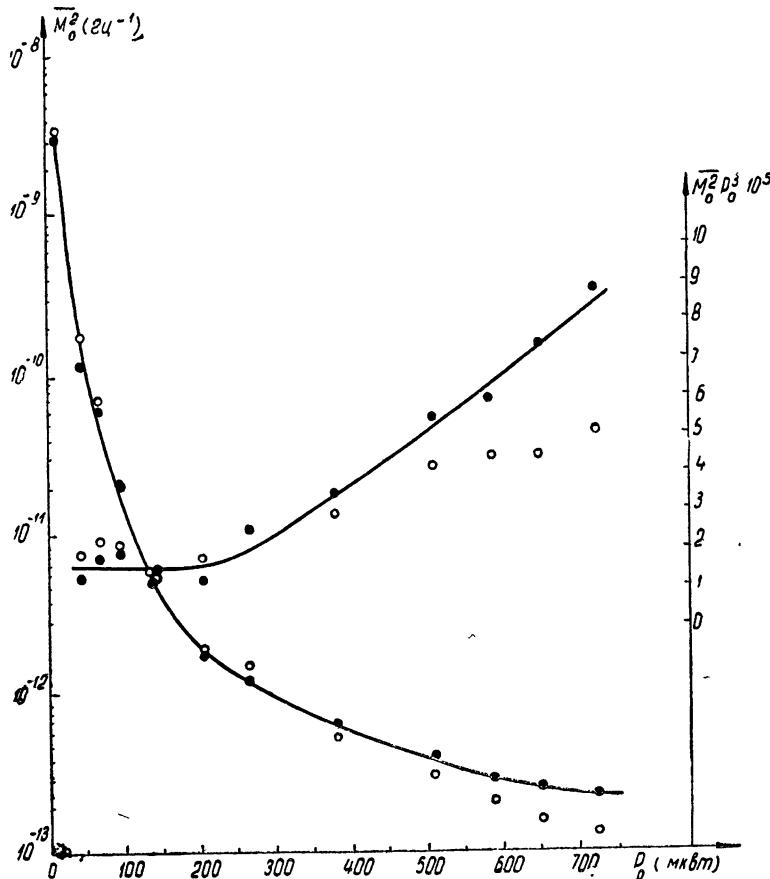


Рис. 5.

Приведенные выше результаты относились лишь к режимам с зоной генерации, не превышающей  $650$  Мгц. В случае большей величины зоны генерации возникает двухмодовая (двухчастотная) генерация. При этом одночастотный режим имеет место при настройке частоты резонатора на центр линии перехода. При дальнейшем увеличении мощности генерации (путем уменьшения потерь) до  $\sim 750$  мквт (режим вблизи трехмодовой генерации) вид спектров  $M_F^2$  аналогичен приведенным на рис. 3 и также согласуется с соотношением (2).

Результаты измерений в центре перехода представлены на рис. 5 и 6. Рис. 5 содержит зависимость (экспериментальные точки —  $\circ$ ) значений  $M_F^2$  при  $F \ll p/2\pi$  (обозначим такие значения  $M_0^2$ ) в функции мощности излучения активной среды  $P_0$ . На этом же рисунке приведена

зависимость произведения  $\overline{M_0^2}P_0^3$  в функции мощности  $P_0$ ; эта зависимость удобна при сопоставлении с результатами теоретического рассмотрения. Рис. 6 изображает зависимость величины  $p/2\pi$  от мощности  $P_0$  в центре зон генерации. Значения  $p$  находились указанными выше тремя способами; найденные значения  $p$  совпадают с точностью до погрешностей измерений.

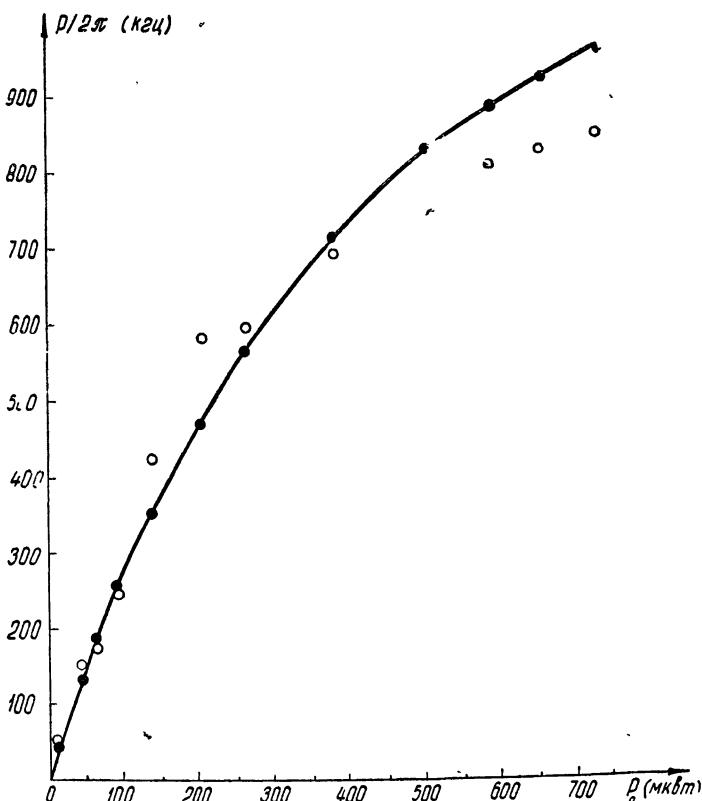


Рис. 6.

Заканчивая изложение экспериментальных результатов, заметим, что с помощью экспериментальных зависимостей рис. 2 описанным выше способом для каждой зоны генерации были определены величины  $A$  и  $\gamma(0)$  (см. выражение (5)). Их значения получились равными соответственно  $1,7 \cdot 10^{-9}$  и  $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ мквт}^{-1}$  с разбросом до  $\pm 10-15\%$ . Принимая во внимание небольшую точность определения  $x_1$ , такой разброс можно считать вполне удовлетворительным; это позволяет считать, что выбранная аппроксимация (1) в первом приближении правильно описывает нелинейные и дисперсионные свойства среды.

Сопоставление расчетных и опытных данных для коэффициента  $p$  представлено на рис. 4 и 6. На рис. 4 дана зависимость  $p/2\pi$  по зоне генерации, рассчитанная по формуле (3) (расчет — сплошная кривая); в этом случае потери в резонаторе и активность среды неизменны, а их значения соответствуют режиму зоны I. Как видим из рис. 4; расхождение с экспериментом не превышает 20%. На рис. 6 приведен рассчитанный по (4) (расчетные точки ( $\circ$ ) соединены сплошной кривой) график зависимости между  $p/2\pi$  и  $P_0$  ( $A = \text{const}$ ,  $\Delta\nu \neq \text{const}$ ). И экспери-

мент и расчет показывают явное отклонение от прямой пропорциональности между  $P$  и  $P_0$ ; несовпадение же данных расчета и опыта не превышает 15%.

Указанное отклонение, как нетрудно видеть из соотношения (2), должно с ростом мощности  $P$  уменьшать скорость спада значений  $M_0^2$  по сравнению с той, которая имеет место при малых превышениях порога возбуждения, а именно  $M_0^2 \sim P^{-3}$ . Это хорошо согласуется с экспериментом; на графике рис. 5 указанное замедление проявляется на зависимости произведения  $M_0^2 P_0^3$  от  $P_0$  в виде явного отклонения от постоянного значения, наблюдаемого при малых  $P_0$ . Как следует из рис. 5, имеет место не только хорошее качественное, но и удовлетворительное количественное согласие опыта и расчетов (по вычисленным значениям (•) проведены сплошные линии). Заметим, что погрешность измерений  $P$  и  $p$  могла доходить до  $\sim 20-40\%$ .

Описанные опыты показали (в согласии с расчетом), что величина  $M_0^2$  определяется в основном (для данного перехода) мощностью излучения лазера  $P$ ; так в наших опытах при увеличении  $P$  от 15 до 750 мквт значения  $M_0^2$  уменьшались от  $\sim 10^{-9}$  до  $10^{-13} (\text{гц})^{-1}$ . Соответствующие значения эффективного коэффициента модуляции интенсивности  $M_{\text{эфф}}$  при этом изменялись приблизительно от 1 до  $10^{-2}\%$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное сопоставление результатов расчета и эксперимента показывает, что рассмотренная в [5] модель одномодового лазера с принятыми во внимание естественными источниками флюктуаций вполне удовлетворительно описывает количественные закономерности как для динамических параметров, так и для флюктуаций интенсивности излучения лазера. Это позволяет сделать вывод, что основным источником естественных флюктуаций интенсивности одномодового лазера на длине волны  $\lambda = 0,63 \text{ мк}$  является спонтанное излучение возбужденных атомов рассматриваемого оптического перехода.

Уровень и вид спектра флюктуаций, обусловленных спонтанным излучением данного оптического перехода в основном определяются полной мощностью излучения активных атомов и величиной мощности насыщения  $\gamma^{-1}$  (главным образом влияющей через  $p$ ). Микроскопическое рассмотрение показывает (см., например, [8]), что величина  $\gamma$  есть функция параметров (времен жизни уровней, матричного элемента dipольного момента и т. д.), характеризующих оптический переход. Можно показать, что величина  $\gamma$  зависит от третьей степени частоты линии перехода. Такая зависимость для  $\gamma$  должна приводить к существенному изменению уровня и вида спектра флюктуаций интенсивности излучения лазера, работающего на ином спектральном переходе. В частности, для Не-Не лазера с длиной волны 3,39 мк можно ожидать значительного уменьшения относительного уровня флюктуаций и увеличения значений коэффициента прочности его предельного цикла (т. е. протяженности «плато» на графике спектра флюктуаций). Сопоставление результатов экспериментального исследования с лазерами на волны 3,39 мк и 0,63 мк качественно хорошо подтвердило отмеченные выше особенности их спектров флюктуаций интенсивности [6].

Таким образом, нелинейные свойства инверсного перехода существенным образом сказываются на уровне и спектре флюктуаций интенсивности излучения лазера; дисперсионные же свойства, как показали

эксперимент и теория, не оказывают значительного влияния на флуктуации. В частности, это означает, что влиянием частотных флуктуаций на флуктуации интенсивности можно пренебречь.

Пользуюсь возможностью выразить благодарность И. Л. Берштейну за внимание к работе, И. В. Волкову за помощь при проведении измерений и обработке большого числа фотоспектрограмм.

### ЛИТЕРАТУРА

1. C. Freed, H. A. Haus, Phys. Rev., **141**, 287 (1966).
2. Ю. И. Зайцев, ЖЭТФ, **50**, 525 (1966).
3. L. J. Prescott, A. van der Ziel, IEEE, J. of Quant. Electr., **QE-2**, 173 (1966).
4. С. А. Алякишев, Д. В. Гордеев, Е. П. Остапченко, Л. М. Пяткова, Радиотехника и электроника, **12**, 1769 (1967).
5. И. Л. Берштейн, И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 1, 59 (1967).
6. И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 1, 149 (1968).
7. J. A. Armstrong, A. W. Smith, Phys. Rev., **140**, A 155 (1965).
8. W. E. Lamb, J. Phys. Rev., **134**, A 1429 (1964).
9. И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **9**, № 5, 942 (1966).
10. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **11**, № 8, 1260 (1968).
11. A. J. Rack, M. R. Biazzo, BSTJ, **43**, 4 (part 2), 1563 (1964).
12. P. T. Bolwijn, J. of Appl. Phys., **37**, 4487 (1966).
13. E. Spiller, Z. fur Physik, **182**, 487 (1965).
14. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 4, 835 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 марта 1968 г.

### INTENSITY FLUCTUATIONS OF He—Ne LASER RADIATION AT 0.63 $\mu$

*Yu. I. Zaitsev*

The natural intensity fluctuations of a single frequency He—Ne laser at 0.63  $\mu$  is studied experimentally. The dependences are obtained of the spectral densities of intensity modulation index versus the radiation power when the frequency is detuned relative to the center of the optical transition line. The experimental results are compared with calculations on the basis of theoretical consideration made earlier. A good qualitative and satisfactorily quantitative agreement makes possible to conclude that natural fluctuations is mainly caused by the spontaneous radiation of the operating transition.

УДК 621.373

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ГЕНЕРАТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*A. H. Малахов, M. C. Сандлер*

Рассматриваются естественные флуктуации в генераторе с инерционной нелинейностью. Показано, что спектр амплитудных флуктуаций существенно зависит от соотношения между временами инерции нелинейного элемента и генератора.

Большинство реальных автогенераторов обладают инерционной нелинейностью, однако вопросы, связанные с шумами в таких системах, изучены недостаточно [1-3].

В настоящей работе рассматриваются естественные флуктуации в генераторе, инерционная нелинейность которого реализуется термистором, находящимся в цепи катода. Выясняется «эволюция» спектральной плотности амплитудных флуктуаций в зависимости от соотношения между временами инерции нелинейного элемента и генератора.

### 1. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Генератор с инерционной нелинейностью, в отличие от обычного одноконтурного генератора, имеет дополнительно еще полстепени свободы и может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= F_1(x, \dot{x}, y) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \dot{y} + \beta y &= F_2(x, \dot{x}, y) + E_2(t, x, \dot{x}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь переменные  $x$  и  $y$  описывают соответственно колебательную систему генератора и нелинейный инерционный элемент, обладающий постоянной времени  $\beta^{-1}$ ;  $F_1$  и  $F_2$ —малые члены, включающие в себя потери и нелинейности;  $E_1$  и  $E_2$ —малые случайные функции времени.

Решение  $x(t)$  ищем в виде

$$x(t) = A(t) \cos \psi, \quad \dot{x}(t) = -A(t) \omega_1 \sin \psi,$$

где  $\psi = \omega_1 t + \Theta(t)$ ,  $A(t)$  и  $\Theta(t)$ —медленные (по сравнению с  $\cos(\omega_1 t)$ ) функции времени. Введем естественное предположение о малости полосы термистора по сравнению с частотой колебания,  $\beta \ll \omega_1$ . Тогда, как легко видеть из (1),  $y(t)$  также является медленной функцией времени.

Из системы (1) методом усреднения [4] (см. также [5]) получаем следующие уравнения первого приближения для медленных  $A$ ,  $\Theta$  и  $y$ :

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, A, y) - \frac{\omega_1}{T} \int_{t-T}^t E_1(\xi) \sin(\omega_1 \xi + \Theta) d\xi,$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1 A} \Psi(\omega_1, A, y) - \frac{\omega_1}{TA} \int_{t-T}^t E_1(\xi) \cos(\omega_1 \xi + \Theta) d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + \tilde{F}(\omega_1, A, y) + \frac{1}{T} \int_{t-T}^t E_2(\xi, x(\xi), \dot{x}(\xi)) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_1, A, y) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t F_1(x(\xi), \dot{x}(\xi), y(\xi)) \sin \xi d\xi, \\ \Psi(\omega_1, A, y) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t F_1(x(\xi), \dot{x}(\xi), y(\xi)) \cos \xi d\xi, \\ \tilde{F}(\omega_1, A, y) &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t F_2(x(\xi), \dot{x}(\xi), y(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Разобьем  $A$ ,  $\Theta$  и  $y$  на детерминированные и флюктуационные части; тогда установившиеся значения детерминированных слагаемых  $A_0$ ,  $y_0$  и поправка на частоту  $\Delta\omega$  находятся, очевидно, из уравнений

$$\Phi(\omega_1, A_0, y_0) = 0, \quad -\beta y_0 + \tilde{F}(\omega_1, A_0, y_0) = 0, \quad \Delta\omega = -\frac{1}{2\omega_1 A_0} \Psi(\omega_1, A_0, y_0). \quad (4)$$

Частота автоколебаний равна  $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega$ .

Предположим, что случайную функцию  $E_2(t, x, \dot{x})$  можно представить в виде

$$E_2(t, x, \dot{x}) = \frac{\omega_0 y_0}{A_0} F(t) + \frac{\omega_0 y_0}{A_0^2} G(t) x + \frac{y_0}{A_0^2} H(t) \dot{x}, \quad (5)$$

где  $F(t)$ ,  $G(t)$  и  $H(t)$ —дельта-коррелированные случайные процессы, как и функция  $E_1(t)$ . Будем рассматривать флюктуации только в установившемся режиме. Вводя относительные флюктуации  $\alpha = a/A_0$ ,  $\gamma = \Delta/\omega_0$  и ограничиваясь случаем  $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ ,  $\langle \gamma^2 \rangle \ll 1$ , получим следующие флюктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -p_{11}\alpha - p_{12}\gamma + \frac{\omega_0}{2A_0} (e_\perp \cos \varphi - e_\parallel \sin \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -q_1\alpha - q_2\gamma - \frac{\omega_0}{2A_0} (e_\parallel \cos \varphi + e_\perp \sin \varphi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = -p_{21}\alpha - p_{22}\gamma - \frac{\omega_0}{2A_0} [(g_\parallel + h_\perp) \cos \varphi + (g_\perp - h_\parallel) \sin \varphi + f]$$

Входящие сюда коэффициенты равны

$$p_{11} = \frac{1}{2\omega_1} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial A} \right]_0, \quad p_{12} = \frac{y_0}{2\omega_1 A_0} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_0, \quad q_1 = \frac{A_0}{2\omega_1} \left( \frac{\partial (\Psi/A)}{\partial A} \right)_0,$$

$$q_2 = \frac{y_0}{2\omega_1} \left( \frac{\partial(\Psi/A)}{\partial y} \right)_0, \quad p_{21} = - \frac{A_0}{y_0} \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_0, \quad p_{22} = \beta - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_0,$$

а медленные случайные функции  $e_{\perp}$ ,  $g_{\perp}$ ,  $h_{\perp}$ ,  $f$  —

$$\begin{aligned} e_{\perp} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2E_1(\xi) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \xi \\ -\sin \omega_0 \xi \end{pmatrix} d\xi, & g_{\perp} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2G(\xi) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \xi \\ -\sin \omega_0 \xi \end{pmatrix} d\xi, \\ h_{\perp} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2H(\xi) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \xi \\ -\sin \omega_0 \xi \end{pmatrix} d\xi, & f &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2F(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Из-за дельта-коррелированности случайных воздействий  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  медленные функции  $e_{\perp}$ ,  $g_{\perp}$ ,  $h_{\perp}$ ,  $f$  также можно считать дельта-коррелированными. (см. [4, 5]). Это следует понимать в том смысле, что их спектральная плотность не зависит от частоты  $\omega$  для  $\omega \ll \omega_0$  (поскольку они, как медленные функции, определены и играют свою роль в системе (6) только для  $\omega \ll \omega_0$ ).

Вследствие этого совокупность величин  $\{\alpha, \varphi, \gamma\}$  образует марковский процесс, и для решения (6) можно применить метод уравнений Эйнштейна—Фоккера. С другой стороны, вследствие возможной корреляции между  $G$  и  $H$  коэффициенты уравнения Эйнштейна—Фоккера будут зависеть от  $\varphi$ . Поэтому в общем случае нельзя упростить (6), используя метод статистической эквивалентности [5]. Тем не менее в первом приближении [6] флюктуационные уравнения (6) можно заменить следующими:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -p_{11}\alpha - p_{12}\gamma + \frac{\omega_0}{2A_0} e_{\perp}(t), \\ \dot{\varphi} &= -q_1\alpha - q_2\gamma - \frac{\omega_0}{2A_0} e_{\perp}(t), \\ \dot{\gamma} &= -p_{21}\alpha - p_{22}\gamma - \frac{\omega_0}{2A_0} [g_{\perp} + h_{\perp} + f]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же одна из функций  $G$  или  $H$  тождественно равна нулю, то система (8) статистически эквивалентна системе (6). Тем самым в любом случае для дальнейшего анализа можно исходить из системы (8).

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА И УСЛОВИЯ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Полагая флюктуационные силы равными нулю, можем найти корни характеристического уравнения системы (8):

$$\lambda_{12} = -\frac{p_{11} + p_{22}}{2} \pm \left[ \left( \frac{p_{11} + p_{22}}{2} \right)^2 - p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21} \right]^{1/2}.$$

Следовательно, условия устойчивости  $A_0$  и  $y_0$  сводятся к неравенствам  $p_{11} + p_{22} > 0$ ,  $p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} > 0$ . При  $[(p_{11} + p_{22})/2]^2 > p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$  затухание отклонений  $\alpha$  и  $\gamma$  является апериодическим, а при обратном

соотношении—периодическим с частотой  $\Omega_0 = [p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}] - [(p_{11} + p_{22})/2]^2]^{1/2}$ .

Пусть  $p_{22}$  выбрано достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство  $[(p_{11} + p_{22})/2]^2 \gg p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$ . Это означает, что постоянная времени нелинейного элемента достаточно мала, последний фактически работает как нелинейный безынерционный элемент. В этом случае корни характеристического уравнения равны  $\lambda_1 = -(p_{11} + p_{22})$ ,  $\lambda_2 = -[-(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})/(p_{11} + p_{22})] = -p$ , и, так как  $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$ , то время существования переходных процессов—постоянная времени автогенератора с безынерционным элементом—определяется величиной  $1/p$ . По своему смыслу характерная частота  $p$  есть прочность предельного цикла безынерционного генератора с двумя нелинейными элементами.

Таким образом, аperiодичность затухания при выполнении условий  $p_{11} + p_{22} > 4p$  связана с тем, что постоянная времени инерционного элемента мала, и последний «чутко» реагирует на изменение амплитуды. Периодическое затухание при  $p_{11} + p_{22} < 4p$ , очевидно, связано с большой инерционностью нелинейного элемента, который не успевает следить за изменениями амплитуды, и фазовая точка колеблется, затухая, около предельного цикла с частотой  $\Omega_0$ .

Уравнения (8) позволяют найти спектр амплитудных флюктуаций генератора в самом общем случае. Для амплитудных флюктуаций  $\alpha(t)$  из (8) нетрудно получить уравнение

$$\ddot{\alpha} + (p_{11} + p_{22})\dot{\alpha} + p(p_{11} + p_{22})\alpha = \frac{\omega_0^2}{2A_0} (e_\perp + p_{22}e_\perp + p_{12}\eta), \quad (9)$$

где

$$\eta = g_{11} + h_\perp + f.$$

Отсюда спектральная плотность флюктуаций амплитуды

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4A_0^2} S_{e_\perp} \frac{\Omega^2 + \Omega_3^2}{[\Omega^2 - p(p_{11} + p_{22})]^2 + \Omega^2(p_{11} + p_{22})^2}. \quad (10)$$

Здесь  $\Omega_3^2 = p_{22}^2 + p_{12}^2 S_\eta / S_{e_\perp} + 2p_{21}p_{12} S_{e_\perp\eta} / S_{e_\perp}$ ,  $S_{e_\perp}$ ,  $S_\eta$ ,  $S_{e_\perp\eta}$ —спектральные плотности  $\delta$ -коррелированных функций  $e_\perp(t)$ ,  $\eta(t)$ .

Интегрируя (10), получаем диоперцию амплитудных флюктуаций

$$\langle \alpha^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_\alpha(\Omega) d\Omega = \frac{\pi\omega_0^2 S_{e_\perp}}{4A_0^2(p_{11} + p_{22})} \left[ 1 + \frac{\Omega_3^2}{p(p_{11} + p_{22})} \right]. \quad (11)$$

Условие линеаризации по переменной  $\alpha$  сводится, как это видно из (11), к неравенству

$$p_{11} + p_{22} \gg \frac{\pi\omega_0^2 S_{e_\perp}}{4A_0^2}. \quad (12)$$

### 3. ФЛЮКТУАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОЙ КОНКРЕТНОЙ СХЕМЕ

Рассмотрим простейшую схему  $LC$ -генератора с контуром в анодной цепи и с инерционным нелинейным термистором  $R$  в цепи катода (рис. 1). Источники  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  представляют ЭДС тепловых шумов сопротивлений  $r$  и  $R$ ,  $R_0$ —постоянная часть сопротивления термистора, а  $p(t)$ —его переменная часть. Значение остальных обозначений ясно из рисунка. Эта схема описывается следующей системой дифференциальных уравнений ( $v$ —напряжение сетка-катод):

$$i_1 = -S(1 - \gamma_0 v^2) v,$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{d}{dt} (i_1 + I_{\text{дп}}), \quad (13)$$

$$v - (R_0 + \rho)(i_1 + I_{\text{дп}}) + \varepsilon_2 = M \frac{di}{dt}.$$

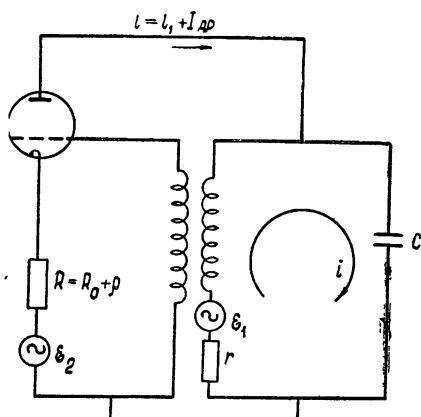


Рис. 1.

Уравнение теплового баланса для термистора имеет вид

$$\kappa \frac{dT}{dt} = W - kT. \quad (14)$$

Здесь  $T$  — температура термистора,  $\kappa$  — его теплоемкость,  $k$  — коэффициент теплоотдачи,  $W$  — подводимая мощность.

Предположим, что зависимость термистора  $R$  от температуры  $T$  носит линейный характер:

$$R = R_0(1 + \alpha_0 T) \quad (15)$$

(здесь  $\alpha_0$  — температурный коэффициент сопротивления), а подводимая мощность равна

$$W = (i_1 + I_{\text{дп}})^2 R. \quad (16)$$

Из (13) — (16) получаем следующую систему уравнений движения генератора с инерционным нелинейным элементом в цепи катода:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_1^2 v &= F_1(v, \dot{v}, \rho) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + \beta\rho &= F_2(v, \rho) + E_2(t, v), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(v, \dot{v}, \rho) &= -\omega_1^2 \left[ rC - \frac{MS_0}{1+S_0\rho} \right] \frac{dv}{dt} - 2\gamma_0\omega_1^2 \frac{RS_0}{1+S_0\rho} v^3 + \\ &+ 6\gamma_0 \frac{RS_0}{1+S_0\rho} v \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 - 3\gamma_0\omega_1 \frac{MS_0}{1+S_0\rho} v \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

$$F_2(v, \rho) = \frac{R_0^2 \alpha_0}{\kappa} S^2 v^2,$$

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{R_0}{1+SR_0} I_{\text{дп}} - \frac{M}{1+SR_0} \frac{dI_{\text{дп}}}{dt} + \frac{R_0}{1+SR_0} \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2 I_{\text{дп}}}{dt^2} + \\ &+ \frac{MC}{1+SR_0} \frac{d^2 \varepsilon_1}{dt^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2 \varepsilon_2}{dt^2} - \varepsilon_2, \end{aligned}$$

$$E_2(t, v) = -2 \frac{SR_0^2 \alpha_0}{\kappa} v I_{\text{дп}},$$

$S_0 = \frac{S}{1+SR_0}$  — приведенная крутизна,  $\frac{k}{\chi} = \beta$  — полоса термистора.

Подставляя значения  $F_1$  и  $F_2$  в (3) и учитывая (4), нетрудно определить установившиеся значения  $A_0$  и  $\rho_0$ :

$$A_0^2 = \frac{k(S_0M - rC)/S_0}{\alpha_0 R_0^2 S r C + (3/4) \gamma_0 M k},$$

$$\rho_0 = \frac{S_0 M - r C}{r C S_0} - \frac{(3/4) \gamma_0 M A_0^2}{r C}.$$

Легко видеть, что условие  $S_0 M - r C > 0$  есть условие самовозбуждения автогенератора. Поскольку  $\Psi(\omega, A, \rho) \equiv 0$ , поправка на частоту отсутствует и частота автоколебаний равна  $\omega_0 = \omega_1$ . Значения коэффициентов  $p_{ij}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  определим из (7):

$$p_{11} = \omega_0^2 \left[ rC - \frac{MS_0}{1+S_0\rho_0} \right], \quad p_{12} = \frac{(rC\omega_0)^2}{2M} \rho_0,$$

$$p_{21} = -2\beta, \quad p_{22} = \beta, \quad q_1 = q_2 = 0. \quad (18)$$

Так как  $G(t) \equiv 0$ , то, как указывалось выше, можно перейти к статистически эквивалентным уравнениям (8). Из этой системы с учетом (18) видно, что наличие инерционного нелинейного элемента, по сравнению с обыкновенным томсоновским  $LC$ -генератором, изменяет только характер амплитудных флюктуаций, не влияя на фазовые. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только амплитудные флюктуации.

Нетрудно показать, что  $\Omega_3^2$  из (10) можно представить в виде  $\Omega_3^2 = \beta^2(1+n)$ , где  $n$  не зависит от  $\beta$  и определяется выражением

$$n = \left( \frac{p_{12}^2}{\omega_0^2 S^2} + \frac{p_{12}}{\omega_0} \frac{R_0}{S(1+SR_0)} \right) \frac{S_{I_{AP}}}{S_{e_\perp}}.$$

При выполнении условия  $\frac{p_{12}}{\omega_0} \ll 1$  (обычно  $p_{12} \sim p_{11}$ , а  $p_{11} \ll \omega_0$ )  $\Omega_3^2 = \beta^2$ .

Дисперсия амплитудных флюктуаций определяется выражением

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{B}{p_{11} + \beta} \left[ 1 + \frac{\beta^2}{p(p_{11} + \beta)} \right], \quad (19)$$

где

$$B = \frac{\omega_0^2 \pi S_{e_\perp}}{4A_0^2}.$$

Из (19) видно, что для уменьшения  $\langle \alpha^2 \rangle$  нужно увеличивать  $\beta$ ; физически это ясно, так как, чем больше  $\beta$ , тем быстрее реагирует термистор на возмущения амплитуды.

Заметим, что переход от рассматриваемого генератора к обыкновенному томсоновскому  $LC$ -генератору возможен в двух случаях:

1)  $\beta \gg p_{11}$ , а также  $\rho_0 \rightarrow 0$ ; это эквивалентно условию, что в генераторе один нелинейный элемент — лампа, и

$$p = \frac{p_{11}\beta + 2p_{12}\beta}{p_{11} + \beta} \rightarrow p_{11};$$

2)  $\beta \ll p_{11}$ ; в этом случае в генераторе два нелинейных элемента, причем один из них — термистор с очень большой инерционностью. Вследствие этой большой инерционности термистор не реагирует на изменение амплитуды, а поэтому, собственно, перестает быть нелинейным элементом, и генератор можно рассматривать как томсоновский с постоянным сопротивлением  $R_0$  в цепи катода. Нетрудно понять, что в этом случае прочность предельного цикла равна  $p_{11}$ . Как и следовало ожидать, дисперсия амплитудных флюктуаций в обоих этих случаях равна  $B/p_{11}$ .

Интересно проследить «эволюцию» спектра амплитудных флюктуаций при изменении  $\beta$ . При  $\Omega=0$  из (10) с учетом (18) и замечания относительно величины  $\Omega_0$  следует, что  $S_a(0) = (B/\pi)/(p_{11} + 2p_{12})^2$ , т. е. все кривые спектральных плотностей при различных значениях  $\beta$  начинаются в одной точке. Таким образом, термистор с различными постоянными временем одинаково реагирует на квазистатические ( $\Omega \approx 0$ ) флюктуации. Это и понятно, так как при квазистатических флюктуациях в термисторе успевают пройти все переходные процессы при любых значениях  $\beta$ .

Если инерционность термистора выбрать достаточно большой, так чтобы выполнялось условие  $\beta + p_{11} < 4p$ , то

$$S_a(\Omega) = \frac{\omega_0^2 S_{e\perp}}{4A_0^2} \frac{\Omega^2 + \beta^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + (p_{11} + \beta)\Omega^2},$$

и на частоте  $\Omega_0 = [\beta(p_{11} + 2p_{12})]^{1/2}$  спектральная плотность амплитудных флюктуаций будет иметь максимум. Так как «постоянная времени» затухания флюктуаций амплитуды равна  $2/(p_{11} + \beta)$ , то при  $p_{11} + \beta \leq 4p$  максимум будет довольно размытым.

С уменьшением  $\beta$  ширина максимума уменьшается. При  $\beta \rightarrow 0$  частота  $\Omega_0 \rightarrow 0$ , а форма спектра амплитудных флюктуаций стремится к резонансной форме (см. кривую I на рис. 2). При  $\beta + p_{11} > 4p$  указанный максимум пропадает.

Если  $\beta \gg p_{11}$ , то  $S_a(\Omega) = \frac{\omega_0^2 S_{e\perp}}{4A_0^2} \frac{1}{\Omega^2 + p^2}$ , что, как под-

черкивалось выше, также соответствует предельному переходу к томсоновскому  $LC$ -генератору (см. кривую II на рис. 2). Общий вид спектральной плотности  $S_a(\Omega)$  при любых  $\beta$  изображен на рис. 2.

Пусть амплитуда напряжения  $v$  такова, что лампа работает на линейном участке, т. е. крутизна лампы постоянна. Это соответствует тому, что генератор работает с одним инерционным нелинейным элементом — термистором. В этом случае  $p_{11} \equiv 0$ , дисперсия амплитудных флюктуаций

$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{B}{\beta} \left[ 1 + \frac{\beta}{2p_{12}} \right]$ . Неравенство  $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$  в этом случае выполняется только при  $\beta \gg B$ . Если же для генератора последнее условие не выполняется, то нелинейность лампы требует обязательного учета.

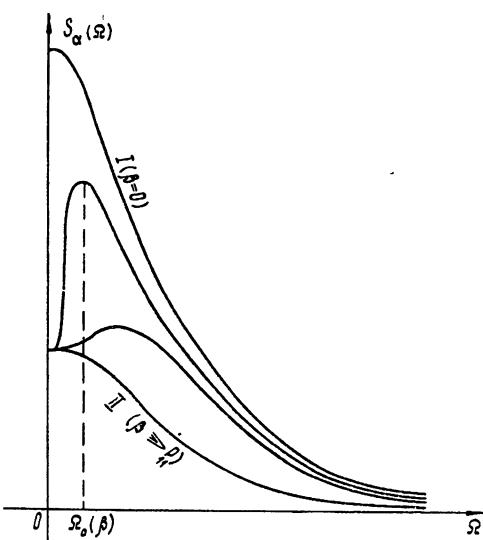


Рис. 2.

Произведем теперь сравнение полученных результатов с результатами работ [1, 2]. Случай, рассмотренный в [1], имеет место при следующих условиях: 1) наличие в генераторе только инерционной нелинейности ( $\gamma_0 \equiv 0$ ), 2) время инерции термистора много больше времени инерции генератора, т. е.  $\beta \ll 4p$ , 3)  $S_{0\rho} \ll 1$ . В этом случае из системы (2) с учетом значений функций  $\Phi(\omega, A, \rho)$ ,  $\Psi(\omega, A, \rho)$  и  $F(\omega, A, \rho)$  получаем уравнение для  $A(t)$ , подобное (3) в [1]:

$$\frac{dA}{dt} = -\omega^2 [MS_0(1-lA^2) - rC]A,$$

где  $l = \frac{S_0\alpha(R_0rC\omega)^2}{4k}$  — параметр нелинейности.

Случай, рассмотренный в [2], соответствующий автогенератору со сложением, получается при выполнении условий 1) и 3). Уравнения (2) в этом случае совпадают с уравнениями работы [2] и имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= [a_1 - a_2 \rho] A, \\ \frac{d\rho}{dt} + \beta\rho &= a_3 A^2,\end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  определяются параметрами схемы.

Вместе с тем, следует отметить, что в работе [2] некорректно рассматривался случай очень малых  $\beta$ . Это привело автора к выводу, что спектральная линия колебания  $W_z(\Omega)$  испытывает при  $\beta \rightarrow 0$  двойное уширение по сравнению со случаем  $\beta \gg 4p$ .

Известно (см., например, [5]), что форма спектральной линии изохронного автогенератора

$$W_z(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \left[ \frac{\Delta\Omega/\pi}{\Omega^2 + (\Delta\Omega/\pi)^2} + S_z(\Omega) \right],$$

где  $\Delta\Omega$  — ширина пика спектральной линии колебаний, определяемая фазовыми флуктуациями. В нашем случае  $\Delta\Omega = \pi B$ . С ростом инерции термистора, как уже говорилось, максимум пьедестала, определяемого амплитудными флуктуациями, будет возрастать, а частота  $\Omega_0$  уменьшаться. Чтобы при  $\beta \rightarrow 0$  получилось двойное уширение, необходимо, чтобы частота  $\Omega_0$  по порядку величины была сравнима с  $\Delta\Omega$ , чего задавать не может, так как это противоречит условию линеаризации (12).

При выполнении условия (12) высота пьедестала всегда будет много меньше высоты пика, а ширина пьедестала — много больше ширины пика, никакого двойного уширения не получится.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 26, 758 (1954).
2. М. И. Голау, Proc. IEEE, 52, 1311 (1964).
3. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 1, 1240 (1956).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
6. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 710 (1964).

## NATURAL FLUCTUATIONS OF OSCILLATOR WITH INERTIAL NONLINEARITY

*A. N. Malakhov, M. S. Sandler*

The natural fluctuations in oscillator with inertial nonlinearity are considered. The spectrum of amplitude fluctuations is shown to depend considerably on the relation between the times of inertia of a nonlinear element of the oscillator.

---

УДК 519.25

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ СПЕКТРОВ ФЛУКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ

*Г. Н. Бочков, Н. Н. Солин*

Исследуется уравнение первого порядка со случайными коэффициентами, описывающее систему с флюктуирующими параметрами. Рассмотрен случай флюктуаций параметров «фликкерного» типа. Получены выражения для спектров на выходе такой системы. Предлагается методика измерения спектров флюктуаций параметров схемы

1. В настоящее время имеется немало работ теоретического характера по исследованию поведения стохастических систем, т. е. систем со случайно изменяющимися параметрами [1–8], однако весьма мало экспериментальных работ по стохастическим системам.

Исследования систем с флюктуирующими параметрами показывают, что поведение системы часто определяется характером спектральных плотностей флюктуаций параметров. Именно спектральная плотность мощности флюктуаций параметров является определяющей в таких эффектах как статистическая неустойчивость систем [1–7], уширение спектральных линий колебаний генераторов [8], изменение коэффициента усиления схем, снижение точности работы систем автоматического управления и т. д. Поэтому знание спектральных плотностей флюктуаций параметров становится совершенно необходимым для предсказания поведения подобных систем.

Небольшое количество экспериментальных работ по данному вопросу объясняется, в частности, трудностями постановки эксперимента по исследованию стохастических систем, так как наряду с эффектами, связанными с флюктуациями параметров, всегда присутствуют эффекты, вызванные неучтеными внешними случайными воздействиями, которые оказываются соизмеримыми или даже превышающими первые. Теоретический анализ, который мог бы «подсказать» постановку эксперимента, даже для относительно простых стохастических систем достаточно сложен. Кроме того, в имеющейся литературе почти отсутствуют результаты анализа систем с флюктуациями параметров «фликкерного» типа, хотя в действительности большинство систем обладают именно такими флюктуациями параметров.

Имеющиеся экспериментальные исследования спектров флюктуаций параметров относятся в основном к флюктуациям непроволочных и полупроводниковых сопротивлений и крутизны ламп [9–14], когда эквивалентная схема измерения выглядит весьма просто [9], а спектральная плотность напряжения на выходе схемы, даваемая спектранализатором, совпадает с точностью до постоянного коэффициента со спектрами флюктуаций параметров. Однако уже при измерении спектра флюктуаций емкости приходится иметь дело с существенно более сложной схемой измерения и более сложной структурой спектра, даваемого спектранализатором.

В настоящей статье приводится исследование схемы (рис. 1) с флюктуациями сопротивления и емкости, имеющими фликкерный

характер, и предлагается методика измерения спектров обоих флюктуирующих параметров схемы.

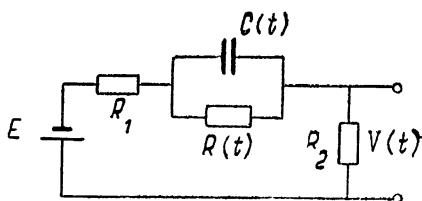


Рис. 1. Эквивалентная схема системы с флюктуирующими параметрами  $R(t)$  и  $C(t)$ .

2. Рассмотрим схему, представленную на рис. 1. Здесь  $C(t)$  и  $R(t)$  — флюктуирующие емкость и сопротивление, так что

$$C(t) = C_0 + c(t) = C_0[1 + \delta c(t)], \quad \langle \delta c(t) \rangle = 0;$$

$$R(t) = R_0 + r(t) = R_0[1 + \delta r(t)], \quad \langle \delta r(t) \rangle = 0.$$

Данная схема является эквивалентной схемой многих устройств — полупроводниковых, электронных, хемотронных и прочих приборов. Эта же схема, как будет видно из анализа, может служить схемой измерения спектров флюктуаций емкости  $C(t)$  и сопротивления  $R(t)$  при условии, что напряжение  $V(t)$  в дальнейшем подается на спектранализатор.

Будем считать, что флюктуации носят фликкерный характер, т. е. спектральные плотности флюктуаций емкости и сопротивления имеют вид [9]

$$S_{\delta c}(\Omega) = \frac{L_c}{2\pi |\Omega|^{\alpha}}, \quad S_{\delta r}(\Omega) = \frac{L_r}{2\pi |\Omega|^{\alpha}}. \quad (1)$$

Найдем связь спектра флюктуаций напряжения  $V(t)$  со спектром флюктуаций емкости  $C(t)$  и сопротивления  $R(t)$  в предположении, что флюктуации являются малыми:

$$\langle \delta c^2 \rangle \ll 1, \quad \langle \delta r^2 \rangle \ll 1.$$

Требование малости «фликкерных» флюктуаций приводит к необходимости указать в общем случае верхнюю и нижнюю частотные границы в спектрах флюктуаций параметров и наложить при этом соответствующие ограничения на коэффициенты  $L_c$  и  $L_r$ . Поэтому будем в дальнейшем интересоваться лишь диапазоном  $(\Omega_n, \Omega_b)$ , выбранным около некоторой «средней» частоты  $\Omega_0$  следующим образом:

$$\Omega_n \sim \varepsilon \Omega_0, \quad \Omega_b \sim \Omega_0/\varepsilon,$$

где  $\varepsilon \ll 1$  — малая величина. Ограничимся при этом величинами  $L_c$  и  $L_r$  порядка ( $\varepsilon^2$ ).

Записывая уравнения Кирхгофа для схемы 1, нетрудно получить следующее дифференциальное уравнение, описывающее данную схему:

$$\dot{V} + \left[ \frac{R_1 + R_2 + R}{(R_1 + R_2)RC} + \frac{\dot{C}}{C} \right] V = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{1}{RC} + \frac{\dot{C}}{C} \right). \quad (2)$$

Вводя обозначения

$$a_0 = \frac{R_0 + R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)\tau_0}, \quad \tau_0 = R_0 C_0, \quad E_0 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (3)$$

а также записывая коэффициенты уравнения, содержащие малые флуктуации, в виде ряда по степеням  $\delta c$  и  $\delta r$  и ограничиваясь членами первого порядка малости, перепишем дифференциальное уравнение (2) в виде

$$\dot{V} + \left( a_0 - a_0 \delta c - \frac{1}{\tau_0} \delta r + \dot{\delta c} \right) V = E_0 \left( \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_0} \delta c - \frac{1}{\tau_0} \delta r + \dot{\delta c} \right). \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon \alpha(t) &= -a_0 \delta c - \frac{1}{\tau_0} \delta r + \dot{\delta c}, \\ \varepsilon \beta(t) &= -\delta c - \delta r + \tau_0 \dot{\delta c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решение линейного дифференциального уравнения со случайными коэффициентами

$$\dot{V} + [a_0 + \varepsilon \alpha(t)] V = \frac{1}{\tau_0} [E_0 + \varepsilon \beta(t)] \quad (6)$$

методом возмущений [4] в виде ряда

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \dots \quad (7)$$

Рассмотрим лишь стационарные решения уравнения. Нулевое приближение  $V_0$  определим как решение данного уравнения в отсутствие флуктуаций параметров, когда  $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$ ; уравнение первого приближения

$$\dot{V}_1 + a_0 V_1 = \frac{1}{\tau_0} \beta(t) - \alpha(t) V_0, \quad (8)$$

а дифференциальные уравнения всех последующих приближений имеют вид

$$\dot{V}_{i+1} + a_0 V_{i+1} = -\alpha(t) V_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Воспользовавшись малостью флуктуаций параметров, ограничимся лишь решением уравнения первого приближения

$$\dot{V}_1 + a_0 V_1 = \frac{E_0}{\tau_0} A [\tau_0 \dot{\delta c} - \delta r], \quad A = \frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_2}. \quad (10)$$

Не приводя подробно всех несложных преобразований для нахождения спектральных плотностей  $S_v(\Omega)$ , запишем лишь результат вычислений:

$$S_v(\Omega) = \frac{E_0^2}{a_0^2 \tau_0^2} \delta(\Omega) + \frac{E_0^2 A}{\tau_0^2} [\tau_0^2 \Omega^2 S_{\delta c}(\Omega) + S_{\delta r}(\Omega) - \tau_0 \Omega S_{\delta c \delta r}^1(\Omega)] \frac{1}{a_0^2 + \Omega^2}. \quad (11)$$

Из формулы (11), связывающей спектры флуктуаций параметров и напряжения  $V(t)$  видно, что при независимых  $\delta c$  и  $\delta r$   $S_v(\Omega)$  будет полностью определяться спектральными плотностями  $S_{\delta c}$  и  $S_{\delta r}$ . В общем случае спектральная плотность флуктуаций на выходе схемы существенно зависит также от  $S_{\delta c \delta r}^1(\Omega)$  — нечетной части совместной спектральной плотности флуктуаций  $\delta c$  и  $\delta r$ . Тот же результат, что и при независимости флуктуаций, будем иметь и в случае пропорциональности относительных флуктуаций сопротивления и емкости ( $\delta r(t) = k \delta c(t)$ ), так как в этом случае также  $S_{\delta c \delta r}^1(\Omega) \equiv 0$ .

Вместе с тем анализ выражения (11) позволяет несколько уточнить условие применимости разложения (7) с отбрасыванием членов более высокого порядка малости:

$$\varepsilon \ll \frac{1}{\Omega \tau_0}, \quad (12)$$

т. е. полученные результаты справедливы для не очень высоких частот  $\Omega \ll \Omega_b \sim 1/\varepsilon \tau_0$ .

а) Предположим теперь, что в схеме флюктуирует только емкость  $C(t)$  ( $\delta r(t) \equiv 0$ ) и флюктуации емкости носят фликкерный характер:

$$S_{\delta c}(\Omega) = \frac{L_c}{2\pi |\Omega|^\gamma} \quad (0 < \gamma < 2). \quad (13)$$

Тогда\*

$$S_v(\Omega) = E_0^2 A^2 \frac{L_c \Omega^2}{2\pi (a_0^2 + \Omega^2) |\Omega|^\gamma}. \quad (14)$$

Можно показать, что максимум этого выражения достигается на частоте

$$\Omega_{\max} = a_0 \sqrt{\frac{2-\gamma}{\gamma}}. \quad (15)$$

График зависимости  $S_v(\Omega)$  приведен на рис. 2. При  $\gamma = 1$  будем иметь

$$\Omega_{\max} = a_0 = \frac{R_0 + R_1 + R_2}{(R_1 + R_2) \tau_0}, \quad \Omega_{\max} \approx \frac{1}{(R_1 + R_2) C_0} \quad (R_0 \gg R_1, R_2). \quad (16)$$

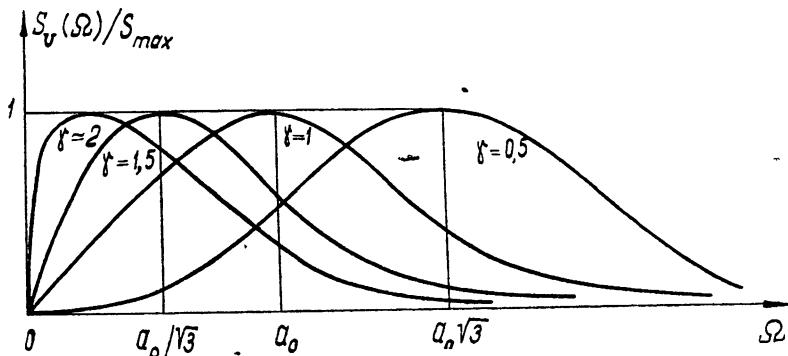


Рис. 2. Нормированная спектральная плотность на выходе схемы при флюктуациях емкости  $C(t)$  фликкерного типа ( $\delta r \equiv 0$ ).

Таким образом, положение максимума в спектре флюктуаций выхода полностью определяется показателем  $\gamma$  и постоянными параметрами схемы (и не зависит от коэффициента  $L_c$ ). С другой стороны, этот факт дает возможность, получив в эксперименте  $S_v(\Omega)$  и определив  $\Omega_{\max}$ , вычислить показатель спектра флюктуаций емкости  $\gamma$ , воспользовавшись формулой (15).

\* Здесь и в дальнейшем для сокращения опущено первое слагаемое в  $S_v(\Omega) = S_{v_0}(\Omega) + S_{v_1}(\Omega)$ ,  $S_{v_0} = E_0^2 \delta(\Omega) / a_0^2 \tau_0^2$ .

Коэффициент  $L_c$  при известном показателе  $\gamma$  может быть легко вычислен из формулы (14). Положив в (14)  $\Omega = a_0$ , будем иметь следующее соотношение для определения  $L_c$ :

$$L_c = \frac{4\pi a_0^6 S_v(a_0)}{E_0^2 A^2}. \quad (16a)$$

Таким образом, обе характеристики спектра флюктуаций емкости могут быть определены из экспериментальной кривой  $S_v(\Omega)$ . Графики зависимости  $\Omega_{max}$  от  $\gamma$  и от параметров схемы приведены на рис. 3 и 4.

Рис. 3. Зависимость положения максимума от величины показателя  $\gamma$ .

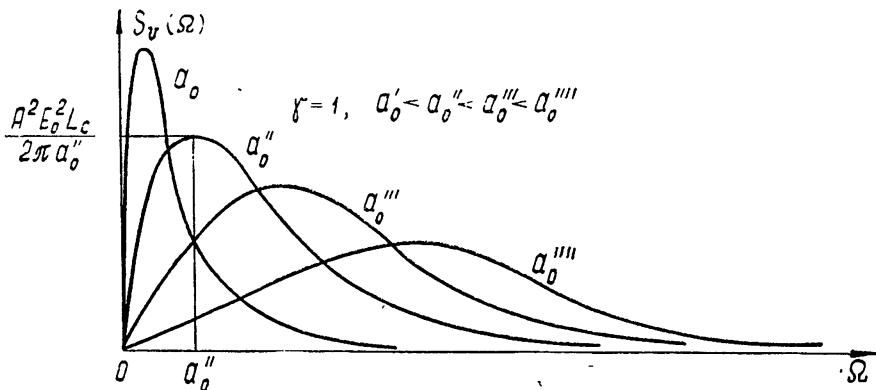
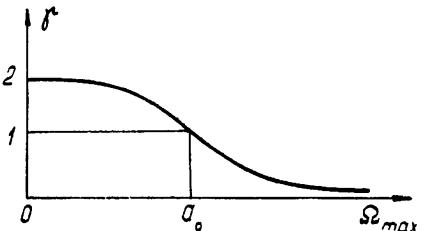


Рис. 4. Влияние параметров схемы на картину спектра  $V(t)$ .

б) Рассмотрим теперь случай флюктуаций сопротивления  $R(t)$ , имеющих также фликкерный спектр:

$$S_{\delta r}(\Omega) = \frac{L_r}{2\pi |\Omega|^\alpha}. \quad (17)$$

Спектр выхода, обвязанный только флюктуациям сопротивления, на основании (11) будет иметь совершенно иной вид (рис. 5):

$$S_v(\Omega) = \frac{E_0^2 A^2 L_r}{2\pi t_0^2} \frac{1}{(a_0^2 + \Omega^2) |\Omega|^\alpha}. \quad (18)$$

в) Рассмотрим, наконец, случай, когда имеют место флюктуации сопротивления и емкости. При статистической независимости их флюктуаций и задании спектральных плотностей  $S_{\delta c}(\Omega)$  и  $S_{\delta r}(\Omega)$  формулами (13) и (17) будем иметь

$$S_v(\Omega) = \frac{E_0^2 A^2}{2\pi} \left[ \Omega^2 \frac{L_c}{|\Omega|^\gamma} + \frac{1}{\tau_0^2} \frac{L_r}{|\Omega|^\alpha} \right] \frac{1}{a_0^2 + \Omega^2}. \quad (19)$$

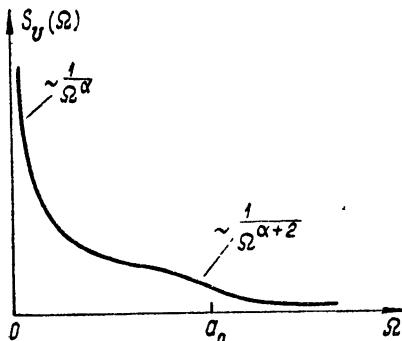


Рис. 5. Спектр  $V(t)$  при флюктуациях сопротивления  $R(t)$  ( $\delta c(t) \equiv 0$ ).

Можно показать, что в данном случае экстремумы спектра находятся из уравнения

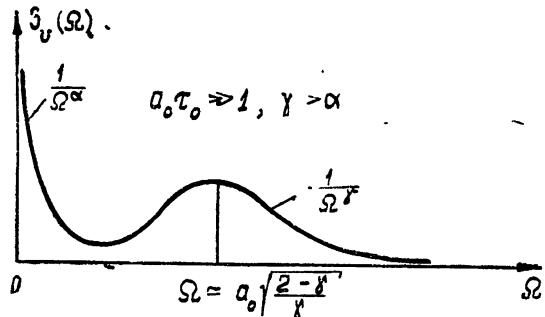
$$\frac{L_c}{L_r} \tau_0^2 \Omega^2 \Omega^{\alpha-1} \frac{2a_0^2 - (a_0^2 + \Omega^2) \gamma}{2\Omega^2 + (a_0^2 + \Omega^2) \alpha} = 1. \quad (20)$$

Из уравнения (20) нетрудно видеть, что при условии  $(L_c/L_r) \tau_0^2 \Omega^2 \Omega^{\alpha-1} \gg 1$ , которое выполняется для любой  $\Omega_0 \neq 0$ , если  $(L_c/L_r) \Omega_0^{\alpha-1} \gg 1$  или  $\Omega_0^2 \tau_0^2 \gg 1$  ( $R_0 \gg R_1, R_2$ ), будем иметь по-прежнему простое условие наличия максимума в спектре  $V(t)$ :

$$2a_0^2 - (a_0^2 - \Omega^2) \gamma \approx 0.$$

Значение  $\Omega_{\max}$ , найденное из этого уравнения, дается формулой (15). Спектр  $S_v(\Omega)$  для этого частного случая показан на рис. 6.

Рис. 6. Спектральная плотность мощности  $S_v(\Omega)$  при статистически независимых флюктуациях сопротивления  $R(t)$  и емкости  $C(t)$ .



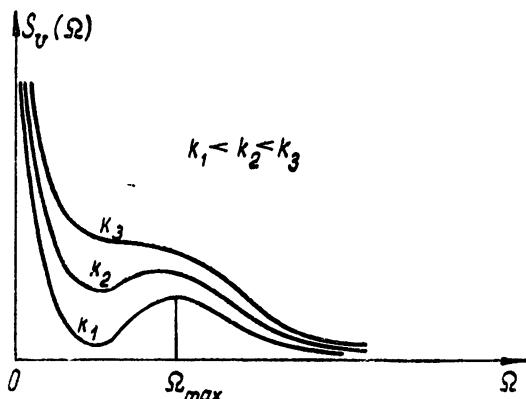
В случае пропорционально флюктуирующих параметров  $\delta r = k\delta c$ ,  $S_{ir}(\Omega) = k^2 S_{dc}(\Omega)$  искомая спектральная плотность будет выражаться следующей формулой:

$$S_v(\Omega) = \frac{E_0^2 A^2 L}{2\pi} \frac{\Omega^2 + (k/\tau_0)^2}{\Omega^2 + a_0^2} \frac{1}{|\Omega|^\gamma}. \quad (21)$$

На рис. 7 приведен вид этой спектральной плотности для случая  $k \ll 1$  (подобную картину получим и при условии  $\tau_0^2 a_0^2 \gg 1$ ). Для сравнения

на этом же рисунке показано, как изменяется спектр выхода при увеличении  $k$ .

Рис. 7. Спектральная плотность  $S_v(\Omega)$  при пропорционально флюктуирующих сопротивлениях и емкости ( $\delta r(t) = k \delta c(t)$ ).



3. Таким образом, анализ схемы 1 обнаруживает в общем случае довольно сложную структуру спектра выходного напряжения  $V(t)$ , и так как «непосредственного» измерения спектральных плотностей флюктуирующих параметров произвести невозможно, то для определения спектров параметров следует расшифровывать получаемые структуры спектров на выходе схемы. Как показывает проведенный анализ, в некоторых частных случаях можно определить все характеристики спектров флюктуирующих элементов, а именно, «показатели» спектров  $a_r$  и  $\gamma_c$ , коэффициенты  $L_r$  и  $L_c$ \*

Трудности анализа получаемой в эксперименте спектральной кривой усугубляются тем, что в реальной схеме имеется еще один источник фликкерного шума — источник питания  $E$ , и поэтому в действительности имеем

$$E(t) = E + e(t) = E[1 + \delta e(t)], \quad \langle \delta e^2 \rangle \ll 1, \quad S_{ee}(\Omega) = L_e/2\pi |\Omega| \beta. \quad (22)$$

Записывая коэффициент передачи исследуемого звена

$$|K(j\Omega)|^2 = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 \tau_0^2} \frac{1 + \tau_0^2 \Omega^2}{a_0^2 + \Omega^2}, \quad (23)$$

можно показать, что при этом структура на выходе схемы с постоянными параметрами качественно будет такой же, как изображено на рис. 6 (при  $\beta \approx \gamma$ ). При достаточно сильном фликкер-шуме батареи спектр, обязанный флюктуациям параметров, будет полностью маскироваться шумом батареи. Можно избежать этой опасности при измерениях, применив «разностную» схему рис. 8.

На рис. 8 пунктиром обведены два идентичных объекта исследования с независимыми флюктуациями элементов

$$\begin{aligned} R' &= R_0 + r'(t), \quad R'' = R_0 + r''(t), \quad \langle r' \rangle = \langle r'' \rangle = 0, \\ C' &= C_0 + c'(t), \quad C'' = C_0 + c''(t), \quad \langle c' \rangle = \langle c'' \rangle = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

\* Методика определения  $L_r$  и  $a_r$  не обсуждалась, но вполне ясна;  $L_r$  и  $a_r$  могут быть вычислены известным способом из графика  $S_v(\Omega)$ , полученного в эксперименте при измерениях на частотах  $\Omega \ll a_0$  и построенного в логарифмическом масштабе.

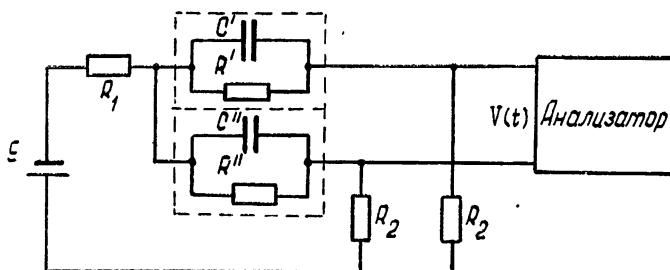


Рис. 8. Схема измерения спектров флюктуаций параметров  $R$  и  $C$  ( $R_1 \ll R_2, R_0, R_{\text{вх анал}} \gg R_2, R_0$ ).

но с одинаковыми характеристиками их спектров:

$$S_{\delta r'}(\Omega) = S_{\delta r''}(\Omega) = \frac{L_r}{2\pi |\Omega|^\alpha}, \quad S_{\delta c'}(\Omega) = S_{\delta c''}(\Omega) = \frac{L_c}{2\pi |\Omega|^\beta}. \quad (25)$$

Уравнение, описывающее работу этой схемы в первом приближении будет совпадать с исследованным ранее уравнением (4) при замене в (4)  $\delta c$  на  $\delta c' + \delta c''$ ,  $\delta r$  на  $\delta r' + \delta r''$  и отбрасывании в правой части члена  $E_0/\tau_0$ . Можно считать, что вид спектра мощности флюктуаций выхода  $V(t)$  для такой схемы будет связан лишь с флюктуациями параметров схемы. Спектральные плотности мощности флюктуаций  $V(t)$  будут по-прежнему даваться формулами (14), (18) и (21).

Как уже отмечалось, экспериментально спектры флюктуаций параметров (даже электронной аппаратуры) исследованы совершенно недостаточно, особенно спектры флюктуаций реактивных элементов. Имеется, по-видимому, только одна работа [14], в которой приводятся непосредственные экспериментальные исследования флюктуаций емкости. При исследовании флюктуаций конденсатора МБГП 200-2,0 получена картина спектра флюктуаций с максимумом на частоте  $\Omega \approx 0,5$  гц, совпадающая с рис. 2. Эти экспериментальные результаты могут быть проанализированы на основании только что проведенных расчетов. Следует, например, считать, что максимум в этом спектре обязан своим происхождением флюктуациям емкости исследуемого конденсатора, а не флюктуациям сопротивления изоляции, как это указывается в [14]. Вклад в спектральную плотность  $G(\omega)$  флюктуаций емкости также является доминирующим, и спектральные плотности обоих флюктуирующих параметров имеют «фликкерный» характер. Все характеристики фликкерного спектра флюктуаций емкости также без труда могут быть вычислены из приведенной в [14] картины спектра флюктуаций  $G(\omega)$  при известных параметрах измерительной схемы.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за обсуждение работы и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Rosenblum, Analysis of Randomly Time-Varying Linear Systems, Ph. D. Thesis, University of California, Los Angeles, 1954.
2. В. П. Тихонов, Автоматика и телемеханика, 19, 717 (1958).
3. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Научн. докл. высш. шк. — 3, 221 (1958).
4. J. C. Samuels, A. C. Eringen, J. Math. and Phys., 38, 83 (1959).
5. T. K. Caughey, J. K. Dienes, J. Math. and Phys., 41, 300 (1962).
6. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 1, 42 (1963).

7. А. Н. Малахов, Г. Н. Бочков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 314 (1965).
8. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 241 (1960).
9. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959); 2, 438 (1957); 3, 547 (1958).
10. К. С. Популях, Изв. Ленинградского электротехнического ин-та, вып. 26, 89 (1955).
11. Б. В. Абрамов, В. И. Тихонов, Радиотехника, 12, 45 (1957).
12. А. И. Чикин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 419 (1960).
13. Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 234 (1960).
14. А. М. Широков, К. И. Радовский, сб Радиотехника, автоматика, надежность, изд. Наука и техника, Минск, 1966.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
5 февраля 1968 г.

## THE PROBLEM OF MEASURING THE SPECTRUM OF PARAMETER FLUCTUATIONS

*G. N. Bochkov, N. N. Solin*

The 1-st order equation with random coefficients describing the system with fluctuating parameters is investigated. The case of flicker-type parameter fluctuations is considered. The expressions for the spectra at the output of such a system are derived. The methods of measuring the spectra of parameter fluctuations of the circuit is proposed.

УДК 535 : 519.25

## О ФАЗОВЫХ ШУМАХ ФОТОПЛЕНКИ

*A. A. Богданов, И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина,  
Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин*

Приводятся результаты экспериментального исследования амплитудных и фазовых шумов фотопленки. Дана оценка дисперсии амплитудных шумов. Для фазовых шумов получены функция распределения и функция корреляции. Исследованы искажения дифракционной картины Фраунгофера шумами фотопленки и устранение этих искажений при помощи иммерсии.

## ВВЕДЕНИЕ

Существенным недостатком, ограничивающим возможности применения оптических систем для различных преобразований сигналов (спектральной, корреляционной обработки и т. д.), записанных на фотопленке [1], является модуляция пленкой амплитуды и фазы проходящей световой волны, что ведет к искажению светового сигнала. Такая модуляция, называемая в дальнейшем шумами пленки, возникает из-за случайных изменений прозрачности, толщины, коэффициента преломления фотопленки, на которой записан исследуемый сигнал.

В работе [2] исследовано действие изменения толщины пленки на фронт волны, прошедшей через пленку, путем изучения интерференции световых волн, отраженных от обеих поверхностей фотопленки, и уменьшение искажений фазы при применении иммерсии. Влияние пленки на амплитуду прошедшей через нее световой волны рассмотрено в работе [3].

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию фазовых шумов пленки и их влияния на выходной сигнал оптической системы. Показано, что в оптических системах, использующих явление дифракции света, влияние амплитудных шумов значительно меньше, чем фазовых.

Действие пленки на амплитуду и фазу световой волны можно описать при помощи комплексной амплитудной прозрачности

$$\tau(x, y) = \frac{E(x, y)}{E_*(x, y)}$$

(где  $E$  и  $E_*$  — комплексные амплитудные поля до и после пленки), которую можно представить следующим образом:

$$\tau(x, y) = \tau(x, y) e^{i\psi(x, y)}.$$

При идеальной пленке  $\tau(x, y)$  — действительная амплитудная прозрачность — есть детерминированная функция, представляющая запись сигнала;  $\psi(x, y)$  — набег фазы в пленке — есть постоянная величина, которую без ущерба для анализа полагаем равной нулю.

У реальной пленки положение меняется:

$$\tau(x, y) = \tau_{\text{ид}}(x, y) + \Delta\tau(x, y),$$

где  $\tau_{\text{ид}}(x, y)$  — детерминированная функция (запись сигнала);  $\Delta\tau(x, y)$  — случайная функция, описывающая амплитудные шумы пленки;  $\psi(x, y)$  — случайная функция, описывающая фазовые шумы пленки. В общем случае как  $\Delta\tau$ , так и  $\psi$  могут зависеть от уровня прозрачности  $\tau_{\text{ид}}$ .

## 1. АМПЛИТУДНЫЕ ШУМЫ ПЛЕНКИ

Амплитудные шумы пленки изучались при помощи микрофотометра МФ-4, который дает возможность измерить квадрат амплитудной прозрачности

$$\tau^2(x, y) = T(x, y).$$

Экспериментально изучалось одномерное распределение прозрачности  $T(x)$ . Колебания прозрачности пленки вызваны неравномерным расположением зерен серебра в эмульсии. Минимальные размеры зерен серебра порядка  $1\mu$ . Если бы измерение  $T$  на фотометре можно было проводить со щелью, площадь которой меньше площади зерна серебра, то прозрачность колебалась бы от 0 до 1. Однако при измерениях использовалась щель размером  $0,05 \times 0,1 \text{ mm}^2$ . Усредняющее действие щели рассмотрено в [3].

На рис. 1 приведена фотография записей прозрачностей шести равномерно засвеченных пленок с различными средними прозрачностями  $\langle T \rangle$ . Записи показывают, что относительные отклонения прозрачности от среднего значения малы. Для разных  $\langle T \rangle$  был вычислен стандарт функции  $\Delta\tau/\langle \tau \rangle$ , т. е. величина  $\sqrt{\langle (\tau - \langle \tau \rangle)^2 \rangle}/\langle \tau \rangle$  (скобки означают усреднение по большому числу точек на одной пленке; в данной работе усреднение проводилось по 100 точкам). Полученные значения приводятся в таблице 1.

Таблица 1

$\langle T \rangle$	0,051	0,096	0,17	0,32	0,39	0,48
$\sqrt{\langle (\Delta\tau)^2 \rangle}/\langle \tau \rangle$	0,017	0,012	0,013	0,0075	0,0055	0,0045

Из таблицы видно, что величина  $\sqrt{\langle (\Delta\tau)^2 \rangle}/\langle \tau \rangle$  имеет разное значение для разных средних прозрачностей, но всегда выполнено соотношение  $[\sqrt{\langle (\Delta\tau)^2 \rangle}/\langle \tau \rangle] < 0,02$ .

## 2. ФАЗОВЫЕ ШУМЫ ПЛЕНКИ

Функция  $\psi(x, y)$  — случайное отклонение набега фазы от его среднего значения — исследовалась разными методами.

а) Равномерно экспонированная пленка фотографировалась методом темного поля (рис. 2). При загораживании прямого пучка на фотографии получаются различные почернения больших участков. Так как  $(\Delta\tau/\tau) < 0,002$ , то почернения не могли быть вызваны различием в прозрачности. Очевидно, они связаны только с фазовыми шумами пленки. В этом случае освещенность изображения точки с координатами  $x, y$  пропорциональна  $\sin^2(\psi/2)$ . Переход от максимума к минимуму освещенности происходит при изменении фазы  $\psi$  на  $\pi$ . Если показатель преломления пленки всюду одинаков и набег фазы меняется только из-за толщины пленки, то разность фаз для лучей, проходящих через два участка пленки, толщина которых отличается на  $\Delta h$ , приблизительно равна

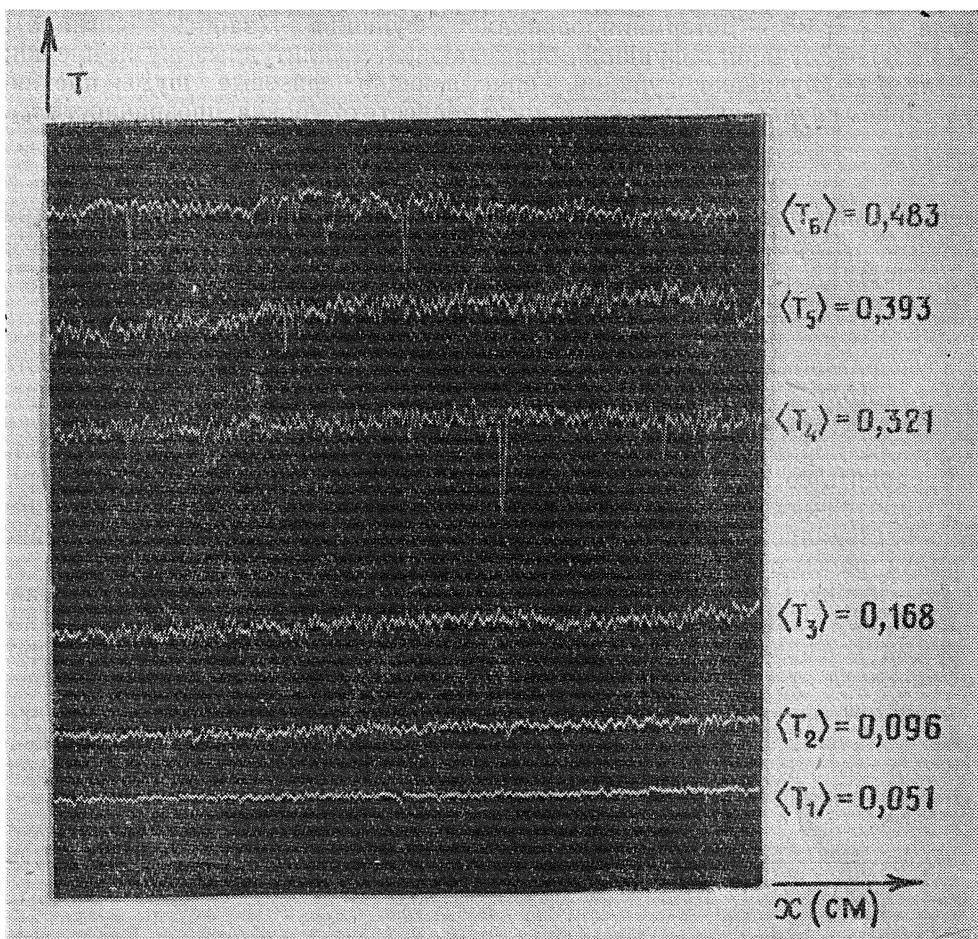


Рис. 1.



Рис. 2.

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \cdot \Delta h,$$

где  $n$  — коэффициент преломления пленки,  $\lambda$  — длина световой волны. Если на некотором участке пленки ее поверхности составляют между

собой угол  $\alpha$ , то расстояние между соседними темными (светлыми) линиями будет равно

$$l_1 = \frac{\lambda}{(n-1)\alpha}.$$

б) Фазовые шумы изучались также путем наблюдения интерференционных линий «равной фазы». Для этого участок равномерно экспонированной пленки помещался в параллельный пучок лучей. Интерференционная картина наблюдалась на изображении пленки, полученном в отраженном свете, как при наблюдении линий равной толщины. На рис. 3 приведена фотография линий «равной фазы», полученная

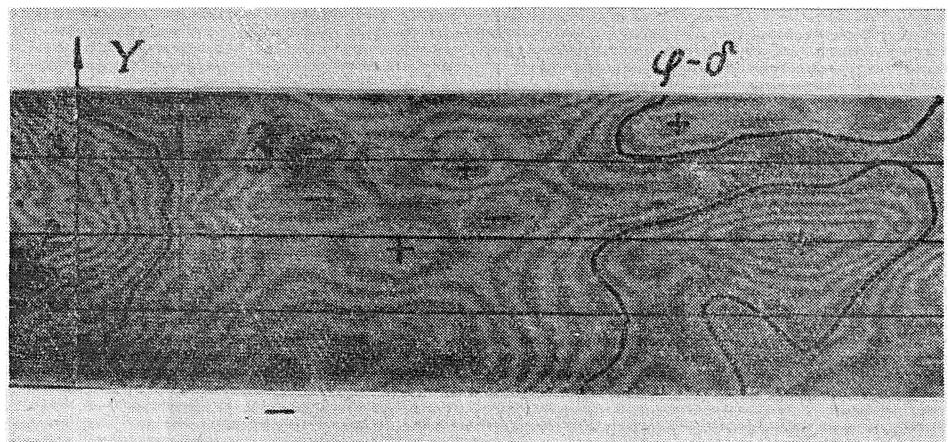


Рис. 3.

най указанным методом для того же участка пленки, который исследовался ранее методом темного поля. Если показатель преломления пленки всюду одинаков, то линии равной фазы совпадают с линиями равной толщины. При угле  $\alpha$  между поверхностями пленки расстояние между линиями равно

$$l_2 = \frac{\lambda}{2n\alpha}.$$

Отношение расстояния между линиями, полученными методом темного поля, к расстоянию между интерференционными линиями равной толщины равно

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2n}{n-1}.$$

Если принять  $n = 1,5$ , то получим  $l_1/l_2 = 6$ . Так как расстояние  $l_1$  соответствует изменению набега фазы на  $2\pi$ , то расстояние  $l_2 = l_1/6$  соответствует изменению набега фазы на  $\pi/3$ . Сравнение фотографий рис. 2 и рис. 3 показывает, что  $l_1/l_2 = 5 \div 5,5$ , т. е. близко к 6. По фотографии рис. 2 можно заключить, что изменение фазы на  $2\pi$  происходит на расстояниях  $l_1$  примерно от 0,5 до 3 см.

Фотография рис. 3 представляет собой как бы топографическую карту набегов фазы. Если фазу одной линии принять за 0, то фазы остальных линий однозначно определяются с точностью до знака. На

рис. 3 точки с минимальной фазой обозначены знаком (—), с максимальной—знаком (+); линия, принятая за 0 фазы обведена чертой.

Такие фотографии позволили найти функцию вероятности распределения фазы. Для этой цели было получено 10 фотографий примыкающих участков пленки длиной 8 см. На первой фотографии одна линия была принята за 0 фазы, и ее с некоторой степенью точности можно было продолжить на следующей фотографии и так далее.

На каждой фотографии вдоль трех параллельных прямых (см. рис. 3) снимался ход изменения фазы как функция координаты  $x$ . По суммарной длине участков, для которых фаза  $\Psi$  меньше задаваемого значения  $\psi$ , находилась функция распределения вероятности  $F(\Psi \leq \psi)$ . Результаты приведены на рис. 4. Получившаяся функция близка к норм-

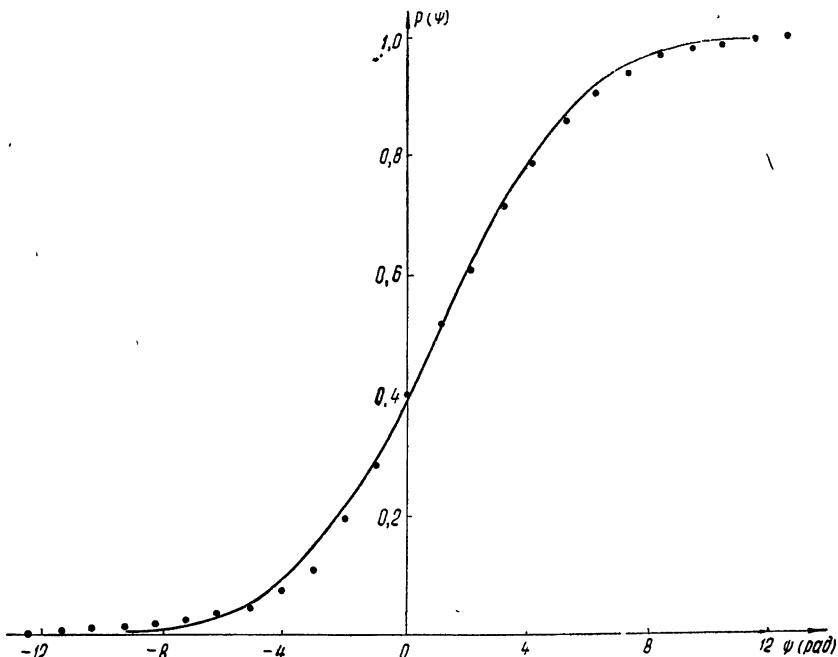


Рис. 4.

мальному закону распределения с дисперсией набега фазы  $D[\psi] = 14 \text{ rad}^2$ . Указанная методика была применена для исследования пленки «Микрат-300».

в) Количественные характеристики функции  $\psi(x)$  изучались также с помощью интерферометра Жамена. Пленка помещалась в одно из плеч интерферометра и передвигалась перпендикулярно к лучу. В другом плече находилась неподвижная пленка. Полученная интерференционная картина смещалась при изменении оптического пути света в пленке. Ширина светового пучка в интерферометре позволяла отмечать неоднородности размером 3 мм, а на интерференционной картине можно было отмечать сдвиг на 0,1 полосы, что соответствует изменению фазы 0,6 rad. Результаты измерения использовались для получения статистических характеристик функции  $\psi(x)$ . Для определения корреляции между значениями фазы в разных местах пленки вычислялись функции

$$R(u) = \langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle, \quad Q(u) = \langle \psi_2 \psi_1 \rangle,$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — фазы в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  и  $u = x_1 - x_2$ . Графики функций  $R$  и  $Q$  приведены на рис. 5, 6 соответственно. Для усреднения в обоих случаях использовалось по 300 значений фазы  $\psi$ .

Из графика на рис. 5 видно, что функция  $R$  обращается практически в нуль при  $x_1 - x_2 = 3 \text{ м.м.}$

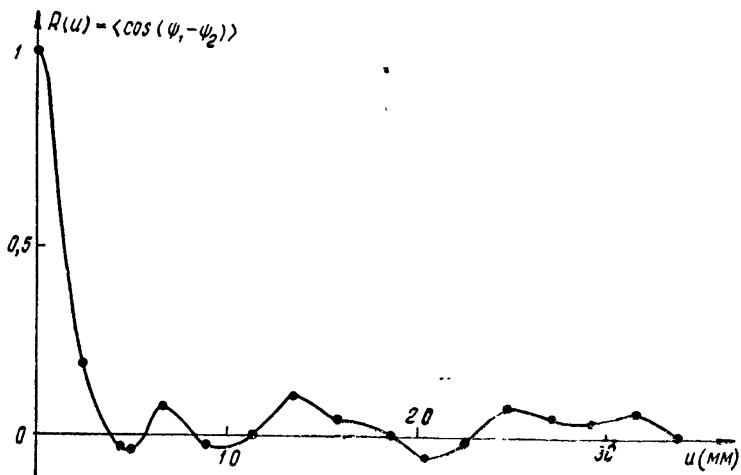


Рис. 5.

чески в нуль при  $x_1 - x_2 = 3 \text{ м.м.}$  Из графика рис. 6 видно, что величины  $\psi_1$  и  $\psi_2$  становятся независимыми на расстояниях  $u \geq 12 \text{ м.м.}$  Величина

$$\langle \psi^2 \rangle = 15 \pm 4 \text{ rad}^2.$$

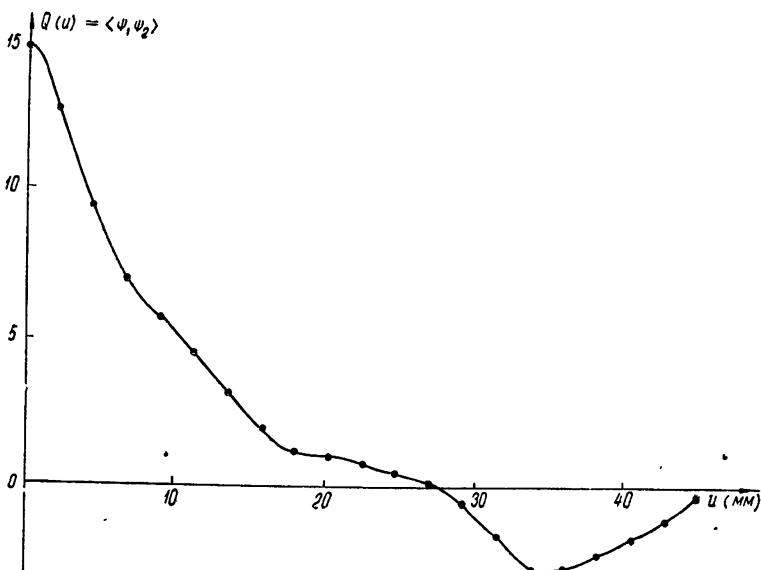


Рис. 6.

### 3. ВЛИЯНИЕ ШУМОВ ПЛЕНКИ НА ДИФРАКЦИОННУЮ КАРТИНУ

Если преобразование сигнала основано на законах геометрической оптики, то имеют значение только амплитудные шумы пленки. Если же

преобразование основано на явлениях дифракции, то существенны фазовые шумы и роль их более значительна.

Влияние шумов пленки изучалось при помощи наблюдения дифракционной картины Фраунгофера. Схема установки показана на рис. 7.

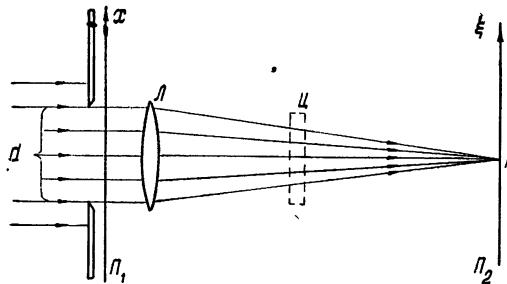


Рис. 7.

Параллельный пучок лучей направлялся на диафрагму шириной  $d$ , рядом с диафрагмой помещалась исследуемая пленка  $\Pi_1$ , дифракционная картина Фраунгофера наблюдалась в фокальной плоскости объектива  $L$ , фиксировалась она фотографическим методом на пленке  $\Pi_2$ .

Без пленки  $\Pi_1$  освещенность в фокальной плоскости должна выражаться уравнением

$$I(\xi) = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi d \xi / \lambda F)}{\pi d / \lambda F} \right]^2,$$

где  $I_0$  — освещенность в центральном максимуме,  $\lambda$  — длина света,  $F$  — фокусное расстояние объектива.

При наличии пленки  $\Pi_1$  картина искажается—освещенность будет представлять спектр мощности амплитудных и фазовых шумов просвечиваемого участка пленки.

На рис. 8 дана фотография дифракционной картины, при получении которой использовалась еще цилиндрическая линза  $\Gamma$ , показанная на рис. 7 пунктиром. Образующая этой линзы параллельна плоскости рисунка; располагалась линза так, чтобы пленки  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  оказались в сопряженных плоскостях, т. е. каждой строке на пленке  $\Pi_1$ , параллельной оси  $x$ , соответствовала строка на пленке  $\Pi_2$ , параллельная оси  $\xi$ . Следовательно, каждая горизонтальная строка  $\eta = \text{const}$  на рис. 8 изображает спектр неоднородностей некоторой строки  $y = \text{const}$  просвечиваемого участка пленки. Снимок интересен тем, что он ясно указывает на существование крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностей: хаотически расположенные светлые точки при больших значениях  $\xi$  вызваны мелкомасштабными неоднородностями строки, а при малых  $\xi$  — неоднородностями с большим радиусом корреляции вдоль  $x$ . Слияние точек в полоски при малых  $\xi$  показывает, что с ростом радиуса корреляции в направлении  $x$  растет и радиус корреляции по  $y$ . Освещенность, которая получалась при фотографировании дифракционных картин, определялась по оптической плотности почернения; последняя измерялась на микрофотометре МФ-4. Связь оптической плотности с освещенностью (характеристическая кривая регистрирующей пленки) находилась экспериментально.

На рис. 9 а, б, в показаны графики, изображающие получившиеся распределения освещенности в дифракционной картине, когда на входе помещались разные участки равномерно засвеченной пленки типа АМ-2 (ширина окна  $d = 20$  мм, цилиндрическая линза  $\Gamma$  отсутствовала).

Из графиков, помещенных на рис. 9, видно, что распределения освещенности на выходе для различных реализаций функции  $\tau(x)$  очень

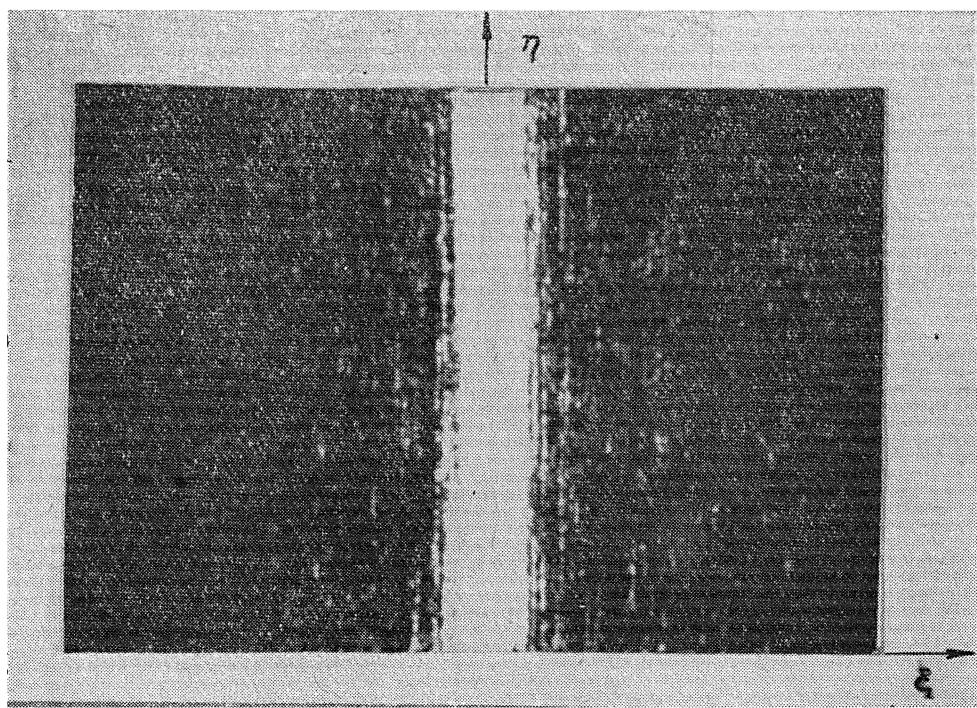


Рис. 8.

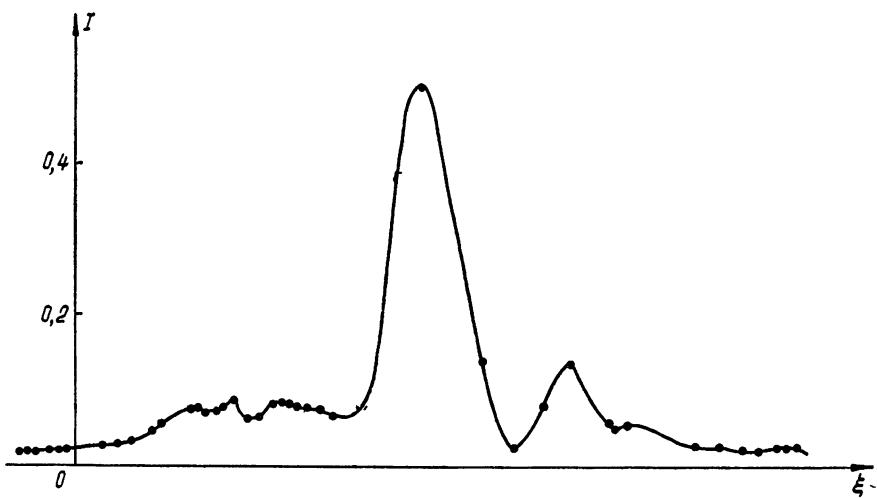


Рис. 9а.

сильно отличаются друг от друга. Главными характеристиками дифракционной картины при наличии шумов являются средняя освещенность и дисперсия.

На рис. 10 приведен график средней освещенности в фокальной плоскости линзы Л. Для получения средней освещенности равномерно

засвеченная пленка длиной 130 см протягивалась в параллельном пучке. Дифракционная картина в фокальной плоскости линзы Л фик-

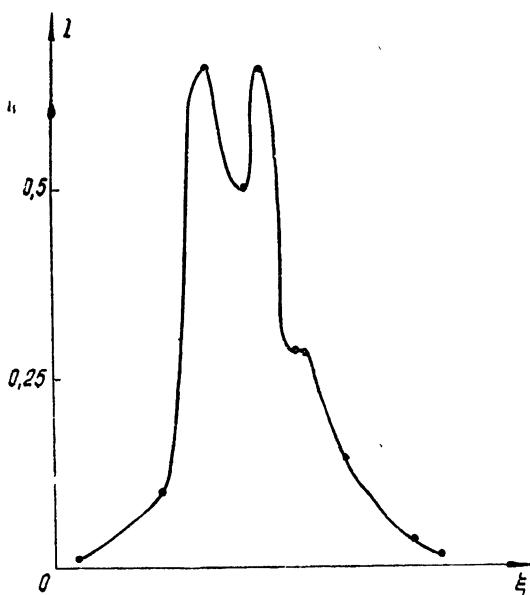


Рис. 9а.

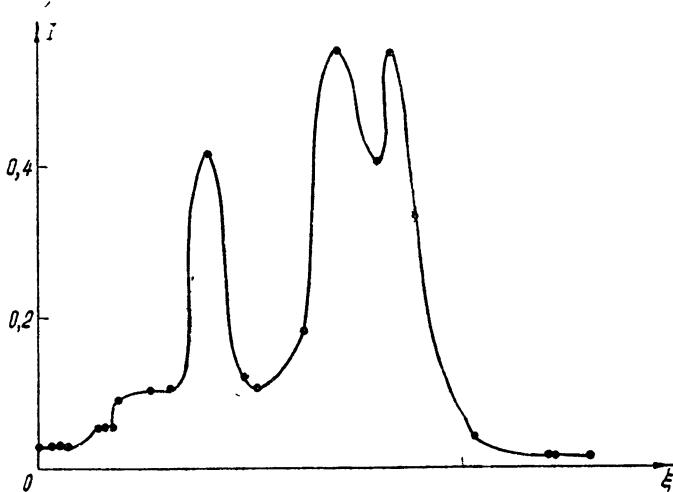


Рис. 9б.

сировалась на неподвижной индикаторной фотопленке. Полученная фотография фотометрировалась для нахождения освещенности  $I$ . Внутренняя кривая на рис. 10 дает полученное тем же методом распределение освещенности без пленки в параллельном пучке. При построении графиков освещенность в центральном максимуме принималась за единицу.

Сравнение кривых на рис. 10 показывает, что шумы пленки в среднем ведут к сильному расширению «главного выброса», ширина которого на уровне  $1/2$  увеличивается в 5—6 раз. При этом, как показали измерения, высота главного максимума уменьшается в 6—7 раз.

Для получения средних характеристик распределения освещенности был проведен еще ряд опытов, позволивших оценить среднее значение

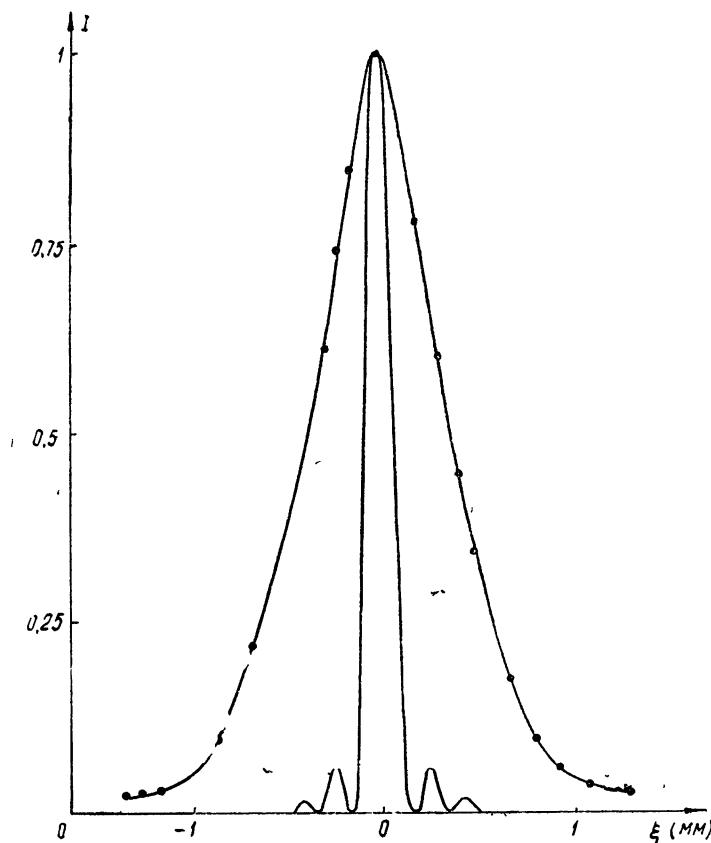


Рис. 10.

и дисперсию в нескольких точках фокальной плоскости линзы Л. В этих опытах в параллельный пучок помещались 60 разных участков исследуемой пленки. На индикаторной пленке были получены 60 кадров с фотографиями соответствующих картин в фокальной плоскости линзы Л. Все кадры снимались на одну фотопленку и проходили одинаковую фотообработку. Освещенность в точке фокальной плоскости с координатами  $\xi$ ,  $\eta$  определялась по всем кадрам. Для этой точки вчислялось среднее значение освещенности  $\langle I \rangle$  и дисперсия  $\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$ . В таблице 2 приведены результаты, полученные для точек, расположенных на разных расстояниях от оптической оси системы.

Таблица 2

Номер максимума	0	1	2	3
$\langle I \rangle$	4,2	4,2	2,8	1,2
$\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$	4	3,1	1,4	0,3
$[\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle]^{1/2} / \langle I \rangle$	0,48	0,42	0,52	0,46

Все величины в этой таблице приводятся в относительных единицах. Как видно из таблицы,  $[\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle]^{1/2} / \langle I \rangle$  практически не меняется при удалении от главного максимума.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ ИММЕРСИИ

Для уменьшения фазовых шумов пленки применялась иммерсия. Исследуемый участок пленки помещался в глицерин, показатель преломления которого близок к показателю преломления пленки. На рис. 11

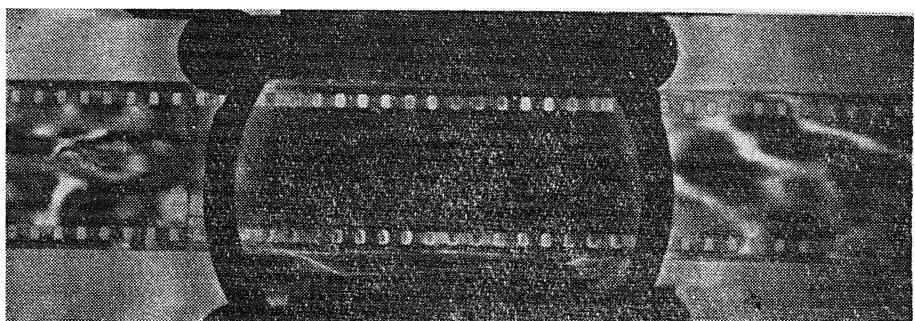


Рис. 11.

помещена фотография пленки, полученная опять методом темного поля. Однако средняя часть исследуемого участка находилась в глицерине между двумя плоско-параллельными стеклами, а края оставались в воздухе. Глицерин, заполняя углубления в пленке и выравнивая оптические пути лучей при разных координатах, снимает фазовые неоднородности. Мелкие светлые точки на фотографии—следы пузырьков воздуха, которые попали в глицерин.

Таким образом, иммерсия может быть предложена в качестве одного из способов устранения неоднородностей пленки. На рис. 12 приведены графики дифракционной картины от решетки (число штрихов  $N = 8$ , период  $c = 3 \text{ м.м.}$ , ширина щели  $a = 1 \text{ м.м.}$ ), записанной на фото-

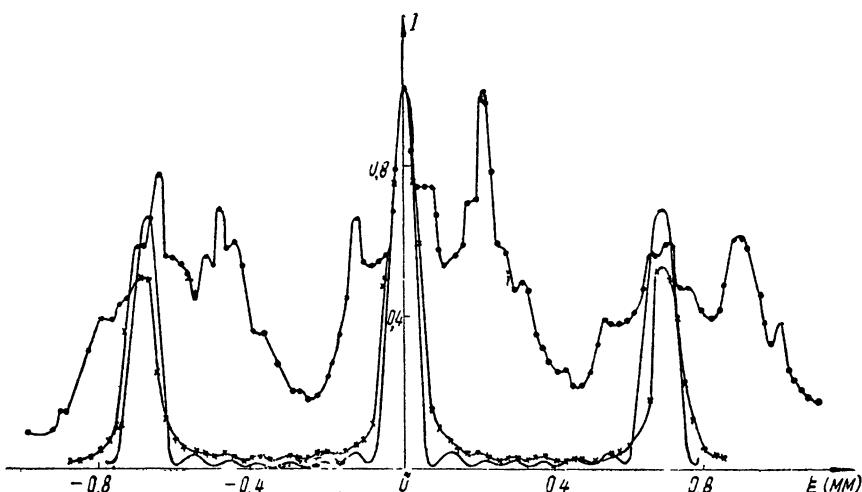


Рис. 12.

пленке с иммерсией, без иммерсии и теоретическая кривая. Из графиков видно, что иммерсия почти полностью устраниет фазовые неоднородности пленки.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 553 (1967).
- 2 A. Ingallis, Phot. Sci. Eng., 4, 135 (1960).
- 3 Э. О. Нейл, Введение в статистическую оптику, изд. Мир, М., 1966.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
2 февраля 1968 г.

### ON PHASE NOISES OF PHOTOFILM

*A. A. Bogdanov, I. Ya. Brusin, V. V. Emelin, V. A. Zverev, A. G. Lyubina,  
F. A. Markus, A. M. Cheremukhin*

The experimental data of investigating the amplitude and phase noises of photofilm are given. The dispersion of amplitude noises are estimated. The distribution and correlation functions have been obtained for the phase noises. The distortions of the Fraunhofer diffraction pattern caused by photofilm noises are investigated. These distortions are eliminated by means of immersion.

УДК 535 : 621.372.8—461

## КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НЕКВАДРАТИЧНЫМИ ФАЗОВЫМИ КОРРЕКТОРАМИ

*B. C. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов*

Приведены полученные путем расчета на ЭВМ собственные значения двух первых типов колебаний открытого резонатора с неквадратичными зеркалами. Центральная вогнутая часть зеркал обеспечивает существование каустики лишь одного низшего типа колебаний, а периферийная выпуклая часть обеспечивает высокие потери других колебаний. Исследовано влияние параметров, характеризующих профиль зеркал, на степень селекции основного типа колебаний.

Предложение об использовании в открытых резонаторах и волноводах неквадратичных корректоров с целью повышения дискриминации неаксиальных мод было высказано в [1]. Там же были пояснены принципы их работы и приведены предварительные результаты машинного и физического эксперимента. С более общих позиций задача о неквадратичных корректорах обсуждалась в [3—6], в частности, в [3, 4] были указаны преобразования корректоров, оставляющие неизменными их характеристики. В [7] рассматривалась возможность получения открытого резонатора с одним типом колебаний с помощью неквадратичного корректора и диспергирующего отражателя типа эшелетта. Уже предварительные исследования показали сильную зависимость степени подавления неаксиальных мод в таких системах от выбора параметров, определяющих закон фазовой коррекции. Данная работа посвящена более детальному изучению этих зависимостей.

Определились собственные функции и собственные значения двумерного резонатора (см. рис. 4 работы [3].) При этом функция фазовой коррекции на обоих зеркалах считалась одинаковой и задавалась в виде

$$\varphi(u) = (1 - g)u^2 + \beta u, \quad 0 < |u| < \sqrt{c_1}; \quad (1a)$$

$$\varphi(u) = (1 - g)c_1 + \beta u, \quad \sqrt{c_1} < |u| < \sqrt{c_2}; \quad (1b)$$

$$\varphi(u) = (1 - g)[c - w(|u| - \sqrt{c_2})^2] + \beta u, \quad \sqrt{c_2} < |u| < \sqrt{c}, \quad (1v)$$

где

$$u = \sqrt{\frac{k}{L}}x, \quad \sqrt{c} = \sqrt{\frac{k}{L}}a, \quad \sqrt{c_1} = \sqrt{\frac{k}{L}}a_1, \quad \sqrt{c_2} = \sqrt{\frac{k}{L}}a_2, \quad g = 1 - \frac{L}{R},$$

*L* — длина резонатора. На интервале  $0 < x < a$  зеркала цилиндрические с радиусом кривизны  $R$  (1 а)\*, на интервале  $a_1 < x < a_2$  — плоские (1 б), на интервале  $a_2 < x < a$  они имеют параболический отгиб, характеризующийся параметром  $w$  (1 в). При некотором значении этого

\* Сферический профиль центральной части выбирался из соображений удобства использования существующих формул для расчета размеров каустик, ширины моды и т. д. В частности, координаты каустик  $u_0$  и  $u_1$  выражаются для резонатора со сферическими зеркалами следующим образом:  $u_0 = 1/\sqrt[4]{1-g^2}$ ,  $u_1 = \sqrt{3}/\sqrt[4]{1-g^2}$ .

параметра  $\bar{w} = c/(\sqrt{c} - \sqrt{c_2})^2$  величина отгиба на краю зеркала  $h$  равна глубине центральной части зеркала, если  $\beta = 0$ . Возможный перекос зеркала на угол  $\alpha$  характеризуется в (1 а)–(1 в) параметром  $\beta = \alpha \sqrt{kL}$ . Как уже отмечалось в [1], профиль (1 а)–(1 в) может обеспечить при соответствующем подборе параметров локализацию основной моды в области вогнутой части зеркал и в то же время хорошее согласование высших мод со свободным пространством за счет параболического отгиба, что и определяет дискриминационные характеристики резонатора.

Большое число независимых параметров профиля зеркал затрудняет проведение исчерпывающего анализа уравнения

$$\sqrt{p} \Psi(u) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \exp \left\{ -i \left[ (u-u')^2 - \frac{1}{2} (\varphi(u)+\varphi(u')) \right] \Psi(u') du' \right\}$$

для собственных функций  $\Psi(u)$  и собственных значений  $p$  резонатора [3]. Поэтому расчеты были выполнены лишь в тех областях изменения параметров резонатора, в которых, как следовало из качественного анализа, можно было ожидать достижения относительно высокой дискриминации неаксиальных мод.

При  $w = 0$  (отгибов нет) и  $\beta = 0$  потери всех мод монотонно уменьшаются с увеличением размера зеркал  $c$  (рис. 1, кривая 1), при-

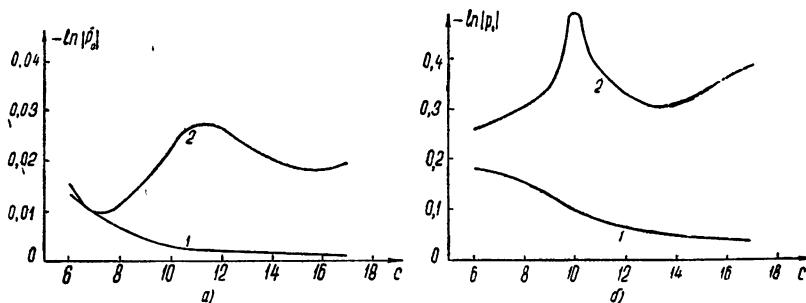


Рис. 1. Зависимость коэффициента потерь нулевой и первой мод от  $c$  при  $g = 0,5$ :

1) —  $\sqrt{c_1} = 1,5$ ,  $w = 0$ ; 2) —  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_2} = 1,5$ ,  $w = 2\bar{w}$  для  $c = 10$ .

чем выигрыш в селекции по сравнению с соответствующими квадратичными корректорами наблюдается только в случае, когда размер вогнутой части  $\sqrt{c_1}$  больше каустики аксиальной моды, но меньше каустики следующей несимметричной моды. Если же отгиб отличен от нуля ( $w \neq 0$ ), то зависимость характеристик от  $c$  оказывается иной. Модуль и фаза собственных значений испытывают колебания (рис. 1, 2, кривая 2) так же как в резонаторе с квадратичными зеркалами в зоне неустойчивости, причем немонотонность  $p_0$  существенно меньше, чем  $p_1$ . Потери на излучение не стремятся к нулю с ростом размеров зеркал. Максимумы  $|p_0|$  и  $|p_1|$  не совпадают, что создает дополнительные возможности для дискриминации несимметричной моды.

Как уже указывалось в [1, 3], введение отгиба при  $g = 0,5$  и  $c = 10$  приводит вначале к росту потерь нулевого и первого колебания как для зеркал с плоской частью ( $\sqrt{c_2} = 2$ ), так и без нее ( $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_2} = 1,5$ ) (см. рис. 3 работы [1]). При дальнейшем увеличении  $w$  потери неакси-

альной моды достигают максимума, а затем уменьшаются, причем максимум существует и на дискриминационной кривой (рис. 3, кривая 2)\*. Если плоская часть отсутствует, то максимум потерь неаксиальной моды выше и выражен более резко.

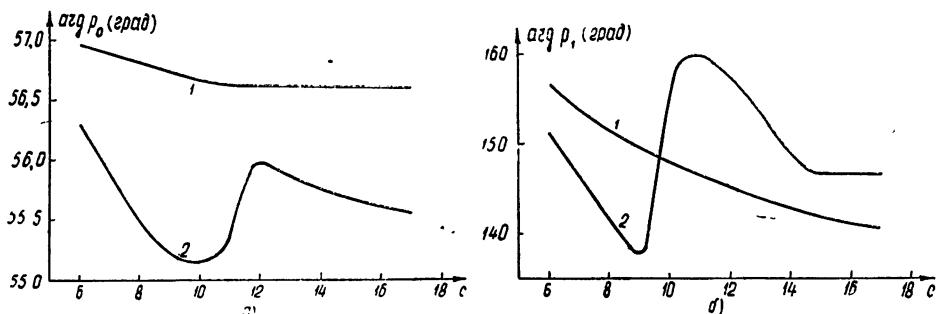


Рис. 2. Зависимость фазы собственного значения нулевой и первой мод от  $c$  при  $g=0,5$   
1) —  $\sqrt{c_1} = 1,5$ ,  $w = 0$ ; 2) —  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,5$ ,  $w = 2\bar{w}$  для  $c = 10$ .

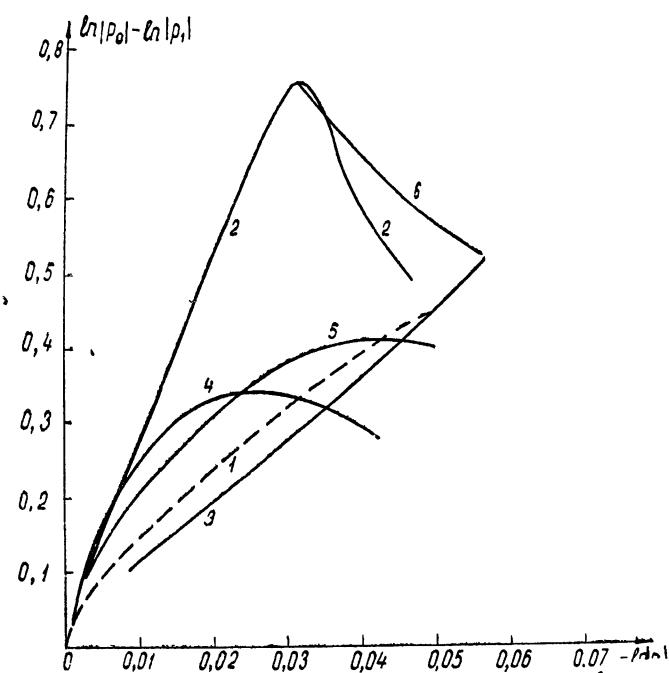


Рис. 3. Селективность различных систем:

- 1) — конфокальная система,  $2,5 < c < \infty$ ;
- 2) —  $g=0,5$ ,  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,5$ ,  $c = 10$ ,  $3\bar{w} > w > 0$ ;
- 3) —  $g=0,75$ ,  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,6$ ,  $c = 10$ ,  $2,5\bar{w} > w > 0$ ;
- 4) —  $g=0,75$ ,  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,6$ ,  $c = 20$ ,  $3,33\bar{w} > w > 0$ ;
- 5) —  $g=0,5$ ,  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,5$ ,  $c = 10$ ,  $w = 0$ ,  $0,4 > \beta > 0$ ;
- 6) —  $g=0,5$ ,  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_3} = 1,5$ ,  $c = 10$ ,  $w = 2\bar{w}$ ,  $0,15 > \beta > 0$

(порядок пределов изменяющихся параметров соответствует уменьшению потерь нулевой моды).

\* Мы характеризуем дискриминацию разностью потерь основной и первой несимметричной мод  $\ln|p_0| - \ln|p_1|$  как функцией потерь основной моды  $-\ln|p_0|^2$ .

Несколько иной характер зависимостей коэффициентов потерь от отгиба обнаруживается при более плоских зеркалах ( $g = 0,75$ ) и том же значении  $c = 10$ . В этом случае отсутствует как максимум потерь несимметричной моды, в зависимости от  $w$ , так и максимум на кривой дискриминации (рис. 3, кривая 3) Это связано с относительно малым общим размером зеркала. Увеличение его до  $c = 20$  повышает эффективность отгиба (при сравнимых потерях нулевой моды); максимальная селективность достигается (как при  $g = 0,5$ ) при величине отгиба, равной удвоенной глубине центральной части зеркала (рис. 3, кривая 4). Еще более высокая эффективность применения несферического профиля при  $g = 0,75$  может быть достигнута при больших  $c$ . Отметим, что при  $g \leq 0$  существенного повышения дискриминации неаксиальных мод добиться не удается.

Интересна зависимость радиационных потерь от перекоса профильных отражателей (рис. 4, 5). В резонаторе с зеркалами без отгибов потери аксиальной моды растут с увеличением угла перекоса зеркал примерно так же, как в конфокальном резонаторе с такими же исходными потерями. Потери неаксиальной моды увеличиваются значительно быстрее. Это связано, как и в резонаторе Фабри—Перо с плоскими зеркалами, с уменьшением коэффициента отражения волн от края резонатора. В системе с оптимальным отгибом ( $w = 2\bar{w}$ ) потери неаксиального типа колебаний при перекосе уменьшаются, что ухудшает дискриминацию.

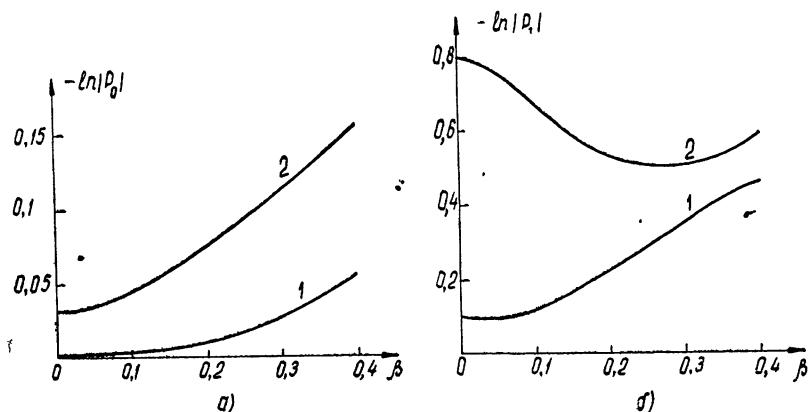


Рис. 4. Зависимость коэффициента потерь нулевой и первой мод от перекоса зеркал при  $g = 0,5$ ,  $c = 10$  и  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_2} = 1,5$ :  
1) —  $w = 0$ ; 2) —  $w = 2\bar{w}$ .

На рис. 3 показано, как меняется дискриминация в резонаторе с неквадратичными корректорами, в зависимости от отгиба (кривые 2—4) и перекоса (кривые 5, 6) зеркал. Там же для сравнения приведена кривая дискриминации в конфокальной системе. Из полученных результатов видно, что использование зеркал с несферическим профилем позволяет повысить дискриминацию неаксиальных типов колебаний по сравнению с любой сферической системой.

Дискриминация улучшается при достаточно больших размерах зеркал, если выполняются условия: а) диаметр сферической части больше каустики основной моды, но меньше каустики неаксиальной; б) радиус кривизны ее  $R$  больше расстояния между зеркалами  $L^*$ ,

\* Отсюда следует, что глубина центральной части должна быть меньше  $\lambda/4$ .

в) отгиб оптимальен, в нашем случае его величина на краю в 2 раза больше глубины центральной части. Ширина плоского пояса, по-видимому, не очень существенна. При использовании резонаторов с подобными зеркалами следует иметь в виду, что повышение селекции в системах без отгиба может быть достигнуто перекосом; в системах с оптимальным отгибом дискриминация при перекосе ухудшается.

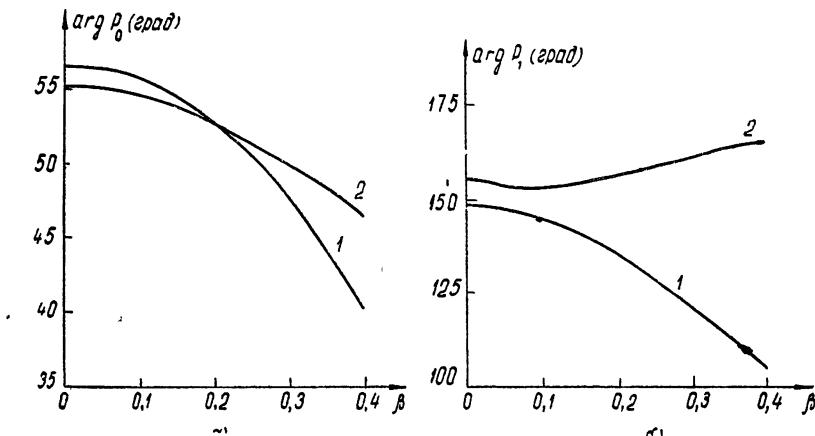


Рис. 5. Зависимость фазы собственного значения нулевой и первой мод от перекоса зеркала при  $g = 0,5$ ,  $c = 10$  и  $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_2} = 1,5$ :  
1) —  $w = 0$ ; 2) —  $w = 2\bar{w}$ .

В заключение укажем, что приведенные результаты могут быть приложены к резонаторам, получаемым из рассмотренных с помощью эквивалентных преобразований [4, 8]\*, частным случаем которых являются соотношения, подробно изученные в [8].

Резонаторы с несферическими зеркалами могут найти применение в качестве колебательных систем генераторов, спектронализаторов, фильтров и т. д.

Авторы признательны С. Ф. Морозову и Л. В. Пискуновой за проведение вычислений на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 11, 943 (1966).
2. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, 10, 552 (1965).
3. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1333 (1967).
4. V. S. Averbach, S. N. Vlasov, V. I. Talanov, Electromagnetic wave theory, Pergamon Press, Oxford and New York, 1967, p. 445.
5. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, 1966.
6. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Н. М. Шеронова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1393 (1968).
7. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 5, 731 (1967).
8. В. Ф. Бойцов, Оптика и спектроскопия, 23, № 5, 789 (1967).
9. S. E. Miller, Bell Syst. Techn. J., 44, № 9, 2017 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 февраля 1968 г.

\* Одно из них переводит перегнутое зеркало с профилем, задаваемым кривой 4-го порядка [9], в зеркало с выпуклым отгибом. В резонаторе с подобными зеркалами потери на излучение всегда отличны от нуля.

QUASI-OPTICAL SYSTEMS WITH NON-QUADRATIC PHASE CORRECTORS

*V. S. Averbakh, S. N. Vlasov, V. I. Talanov*

The authors present the eigen values of the first two types of oscillations of the open resonator with non-quadratic mirrors obtained from calculations on a digital computer. The central concave part of the mirrors supports the existence of caustics only for the lowest type of oscillations. The periphery convex part produces high losses for other oscillations. The influence of the parameters, characterizing the mirrors profiles, on the selection degree of the main type of oscillations is investigated.

---

УДК 538.3

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Чугунов

Рассматриваются решения для электромагнитных полей в неравновесных средах в тех случаях, когда можно не учитывать взаимодействие равномерно движущейся заряженной частицы с пакетом неустойчивых колебаний данной неравновесной системы. В качестве конкретного примера вычисляется реакция излучения для заряда, движущегося во взаимнопроникающих средах.

Как известно, характер излучения источника, находящегося в неравновесной среде, может существенным образом отличаться от случая равновесных сред (см., например, [2, 3]). В неустойчивых средах собственные колебания могут неограниченно расти во времени, поэтому в выражении для полей нельзя учитывать только вынужденное поле—частное решение неоднородного волнового уравнения.

Компоненты электромагнитного поля  $F_k(t)$  при излучении источника с заданным распределением сторонних токов в произвольной однородной и прозрачной среде\* определяются в результате решения задачи с нулевыми условиями Коши в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{k}\right) F_k(t) = f_k(t), \quad (1)$$

где  $F_k(t)$  и  $f_k(t)$  — соответственно пространственные фурье-компоненты поля и внешнего возмущения;  $\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{k}\right)$  — линейный дифференциальный оператор  $n$ -порядка с постоянными коэффициентами,  $n$  — число корней дисперсионного соотношения,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор; причем

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{k}\right) e^{-i\omega t} \equiv L(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t},$$

где  $L(\omega, \mathbf{k}) = 0$  — дисперсионное соотношение.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее в момент времени  $t = t_0$  нулевым начальным условиям ( $F_k = 0, \frac{\partial^m F_k}{\partial t^m} = 0, m = 1, 2, \dots, n - 1$ ), запишется в виде [4]

$$F_k(t) = \sum_{v=1}^n \frac{e^{-i\omega_v(k)t}}{i \frac{\partial L(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_v(k)}} \int_{t_0}^t f_k(t') e^{i\omega_v(k)t'} dt', \quad (2)$$

где  $\omega_v(\mathbf{k})$  — корни дисперсионного соотношения.

\* Необходимо лишь, чтобы дисперсионное соотношение имело конечное число корней.

Пусть источник задан в виде равномерно движущейся со скоростью  $v$  заряженной частицы. При этом  $f_k(t) = f_k^0 e^{-ikvt}$ . Будем считать, что скорость заряженной частицы  $v$  больше возможных скоростей распространения неустойчивых мод данной системы. Это предположение позволяет не учитывать взаимодействие заряда с пакетом неустойчивых собственных колебаний системы и ограничиться в (2) только вынужденным полем\* [3].

Выпишем из (2) решение для вынужденного поля, считая  $t \gg t_0$ , т. е. для достаточно большого времени после момента включения возмущения\*\*:

$$F(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k^0 \left\{ \frac{1}{L(kv, k)} - \pi i \operatorname{sgn} \left[ \frac{\partial L(kv, k)}{\partial (kv)} \right] \delta [L(kv, k)] \right\} e^{ikr - ikvt} dk. \quad (3)$$

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения.

В качестве модели неравновесной среды рассмотрим среду с конвективной неустойчивостью. Пусть моноэнергетический пучок, характеризуемый диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1(\omega - kv)$ , пронизывает однородную среду  $\epsilon_2(\omega)$  со скоростью  $u$ . Поток движется вдоль оси  $z$ , и сторонний ток, отвечающий заряду  $q$ , равномерно движущемуся в плоскости  $xy$ , задан в виде

$$j_{ct} = qv \delta(z - v_z t) \delta(y - v_y t) \delta(x). \quad (4)$$

С учетом вышесказанного легко получить из (П.2) (см. Приложение) и соотношений (3) и (4) выражения для потерь энергии заряженной частицы в единицу времени на возбуждение электромагнитных колебаний. В случае, когда заряд движется параллельно потоку, волна (П.4) не излучается, так как ее электрическое поле перпендикулярно скорости заряда, а потери энергии заряженной частицы на излучение волны (П.3) равны

\* Легко также видеть, что в нижеприведенном примере дисперсионное соотношение, полученное из (П.3), в случае, когда скорость заряда стремится к скорости света ( $v \rightarrow c \gg u$ ), имеет решения, отвечающие не нарастающим во времени колебаниям системы.

\*\* В случае равновесной среды, не рассматривая процессов установления, можно положить  $t_0 = -\infty$ . Тогда, подставляя в (2) разложение  $f_k(t)$  в интеграл Фурье  $(f_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k\omega} e^{-i\omega t} d\omega)$  и интегрируя по  $t'$ , получаем решение, подобное выражению (3):

$$F(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k\omega} \left\{ \frac{1}{L(\omega, k)} - \pi i \operatorname{sgn} \left[ \frac{\partial L(\omega, k)}{\partial \omega} \right] \delta [L(\omega, k)] \right\} e^{ikr - i\omega t} d\omega dk.$$

Функция  $\operatorname{sgn} \left[ \frac{\partial L(\omega, k)}{\partial \omega} \right]$  перед членом с  $\delta$ -функцией устанавливает правило обхода полюсов, встречающихся на пути интегрирования. Это легко понять, если учесть, что знак  $\frac{\partial L}{\partial \omega}$  в случае прозрачной среды однозначно связан, как это следует из соотношений Крамера—Кронига, со знаком мнимой части дисперсионного соотношения  $L(\omega, k)$ . Для случая движущейся среды без дисперсии формула (3) переходит в решение для потенциалов поля, приведенное в работе [3].

$$\frac{\partial A_b^*}{\partial t} = - \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \omega} \right) \frac{q^2 (v-u)^2}{c^2 v^2} \int \left| 1 - \frac{1}{\epsilon_3 \beta_{\text{отн}}^2} - \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_3 \beta_{\text{отн}}^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \frac{(1 - \beta_u^2)}{(1 - uv/c^2)^2} \right] \right| \frac{\omega d\omega}{|1 - \gamma \beta_u^2|}, \quad (5)$$

где  $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 - 1$ ,  $\beta_u = u/c$ ,  $\beta_v = v/c$ ,  $\beta_{\text{отн}} = (v-u)/c(1-uv/c^2)$ ,  $\gamma = \epsilon_1 \epsilon_2 / \epsilon_3$ , причем интегрирование распространено на область частот

$$\frac{\omega^2 (1 - \beta_u^2)}{v^2 (1 - \gamma \beta_u^2)} \left[ \frac{(\epsilon_1 - 1)(\beta_v - \beta_u)^2}{1 - \beta_u^2} + \epsilon_2 \beta_v^2 - 1 \right] > 0.$$

Подынтегральное выражение имеет особенность в точке  $1 - \gamma \beta_u^2 = 0$ . При этом  $k$  составляет с направлением скорости заряда  $\theta$  угол  $\pi/2$ , и, следовательно, коэффициент при  $n^{*2}$  в (П.5) обращается в нуль, т. е. один из корней дисперсионного соотношения (П.5) стремится к бесконечности. Эта особенность излучения характерна для анизотропных сред и подробно рассматривается в работе [6]. Функция  $\operatorname{sgn} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \omega} \right)$

учитывает возможное обращение потерь энергии заряженной частицы. В данном примере обращение потерь обусловлено как наличием неустойчивости, так и обычным кинематическим эффектом [5].

Знак модуля под интегралом в (5) появляется из-за учета волн, фаза которых набегает на траекторию частицы. Вычислим компоненту групповой скорости волны  $n^{*2}$ , перпендикулярную направлению движения частицы:

$$W_\perp = \frac{cn^{*2} (1 - \gamma \beta_u^2) \sin \theta}{[(\epsilon_1 - 1)(1 - \beta_u n^* \cos \theta) + \epsilon_2 (1 - \beta_u^2)] \frac{\partial (\omega n^*)}{\partial \omega}}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что при  $1 - \gamma \beta_u^2 < 0$   $W_\perp < 0$  (считается, что в этой области частот  $\beta_u n^* \cos \theta < 1$  и  $\frac{\partial (\omega n^*)}{\partial \omega} > 0$ ). Совершенно очевидно, что в данной области частот необходимо брать в качестве решения опережающие потенциалы, что и приводит к знаку модуля подынтегрального выражения (5) [7].

В случае движения частицы перпендикулярно потоку выпишем выражение для потерь энергии заряженной частицы на излучение волны с поляризацией  $H_x \neq 0$ :

$$\frac{dA^{**}}{dt} = - \frac{q^2}{2\pi c^2} \int_{\omega>0} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_3^0 \beta_v^2} \right) \omega d\omega \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi + (\sin^2 \varphi) / \epsilon_3^0 \beta_v^2} \\ (\epsilon_3^0 \beta_v^2 > 1). \quad (7)$$

В результате интегрирования по  $\varphi$  получим

$$\frac{dA^{**}}{dt} = - \frac{q^2}{c^2} \int_{\omega>0} \omega d\omega \quad (\epsilon_3^0 \beta_v^2 > 1). \quad (8)$$

Здесь  $\varphi$  — полярный угол в плоскости, перпендикулярной к скорости

движения частицы;  $\epsilon_s^0 = \epsilon_2(\omega) - \omega_{s0}^2/\omega^2$ ,  $\omega_{s0}$  — плазменная частота пучка\*. Необходимо отметить, что выражения для потерь (7) и (8) не зависят от скорости пучка  $u$ .

В заключение рассмотрим некоторые особенности распространения возмущений в неустойчивых средах. Зададим возмущение в момент  $t_0 = 0$  в виде

$$f_k(t) = \Lambda(k) \delta(t). \quad (9)$$

При таком выборе исходного возмущения начальные условия можно брать нулевыми. Подставив (9) в выражение (2) и проинтегрировав его по  $t'$ , для компоненты возмущения  $F(r, t)$  имеем

$$F(r, t) = \sum_{v=1}^n \int \frac{\Lambda(k) \exp[ikr - i\omega_v(k)t]}{i \frac{\partial L(\omega, k)}{\partial \omega}} \Big|_{\omega = \omega_v(k)} dk. \quad (10)$$

Ниже рассмотрение проводится для одномерного случая. Считается также, что исходное уравнение (1) — гиперболического типа. Гиперболичность исходного уравнения означает, что бесконечно удаленной точке в комплексной плоскости  $k$  соответствует разложение

$$\omega_v(k) = U_v k + \omega_{v0} + \frac{a_{1v}}{k} + \dots \quad (11)$$

Разложение (11) означает, что передний фронт возмущения, заданного в конечной области пространства, распространяется со скоростью  $U_v$ . Вид разложения (11) позволяет вычислять интегралы типа (10) путем замыкания контура интегрирования полуокружностью бесконечного радиуса в верхней или нижней полуплоскости комплексной переменной  $k$ . Соответственно разложение  $k_v(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$  по любому пути имеет вид

$$k_v(\omega) = \frac{\omega}{U_v} + k_{v0} + \frac{b_{1v}}{\omega} + \dots \quad (12)$$

На функцию  $\Lambda(k)$  при этом налагаются требования аналитичности и, по крайней мере, конечности при  $|k| \rightarrow \infty$ \*\*.

В случае, когда дисперсионное соотношение  $L(\omega, k) = 0$  имеет два корня, общий вид которых с учетом разложений (11) и (12) будет

$$\omega_{1,2}(k) = \alpha k + \omega_0 \pm (\beta^2 k^2 - \eta)^{1/2}, \quad (13)$$

для возмущения  $F(r, t)$  получается простое выражение

$$F(r, t) = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(k) \frac{\sin(\beta^2 k^2 - \eta)^{1/2}}{(\beta^2 k^2 - \eta)^{1/2}} e^{ik(z - at)} dk. \quad (14)$$

Исследование асимптотического поведения решения (10) для возмущения в данной точке пространства при  $t \rightarrow \infty$  с помощью метода «перевала» дает возможность сформулировать критерии конвективной и абсолютной неустойчивости, подобные критериям Стэррока [10, 11], по

\* Выражения (7) и (8) по своему виду совпадают с черенковскими потерями на излучение обыкновенной волны в одноосном кристалле при движении частицы перпендикулярно оптической оси [1].

\*\* Эти ограничения необходимы для того, чтобы характер неустойчивости не зависел от вида возмущения,

наличию или отсутствию седловых точек [12]. Здесь следует отметить, что для систем с конвективной неустойчивостью нули  $\frac{\partial L(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_*(\mathbf{k})}$  могут привести к тому, что в фиксированной точке пространства при  $t \rightarrow \infty$  амплитуда поля остается постоянной (см., например, [3]).

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. Я. Эйдману за полезные обсуждения настоящей работы.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнения для потенциалов электромагнитного поля во взаимопроникающих средах. Предположим, что среда, имеющая диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1(\omega)$  в соответственной системе координат, движется со скоростью  $\mathbf{u}$  вдоль координатной оси  $z$ , а среда с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2(\omega)$  покоятся.

Как легко показать, тензор диэлектрической проницаемости для взаимопроникающих сред можно представить в виде\*

$$\epsilon_{ikst} = (\delta_{is} + \chi_1 c^{-2} u_i u_s) (\delta_{kt} + \chi_1 c^{-2} u_k u_t) + \chi_2 (\delta_{4s} \delta_{kt} + \delta_{is} \delta_{4t}). \quad (\text{П.1})$$

Тогда уравнение для четырех-потенциала записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 \hat{L}_2 A_s &= -\frac{4\pi}{c} \left\{ \hat{L}_2 \left[ \delta_{st} - \frac{\chi_2}{\hat{\epsilon}_2} \delta_{4t} - \frac{\chi_1}{\hat{\epsilon}_1} c^{-2} u_s u_t \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi_1 \chi_2}{c^2 \hat{\epsilon}_2} (1 - \delta_{4t}) (1 - \delta_{4s}) [\nabla \mathbf{u}]_s [\nabla \mathbf{u}]_t \right\} j_t. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь введены операторы

$$\hat{L}_1 = \hat{L}_2 + (1 - \gamma) c^{-2} [(u_\alpha \partial_\alpha)^2 - (u_\alpha u_\alpha) \partial_\alpha^2],$$

$$\hat{L}_2 = [1 + \chi_2 \delta_{4k}] \partial_k^2 + \frac{\chi_1}{c^2} (u_k \partial_k)^2,$$

$$\chi_1 = \frac{\hat{\epsilon}_1}{\epsilon_1} - 1, \quad \chi_2 = \frac{\hat{\epsilon}_2}{\epsilon_2} - 1, \quad \gamma = \frac{\frac{\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2}{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\frac{\hat{\epsilon}_1}{\epsilon_1} + \frac{\hat{\epsilon}_2}{\epsilon_2} - 1},$$

где  $\mathbf{u}$  — четырех-скорость;  $j$  — четырех-ток;  $\partial_k \left( -\nabla, \frac{\partial}{c \partial t} \right)$  — четырех-вектор градиента;  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $i, k, s, t = 1, 2, 3, 4$ ;  $c$  — скорость света.

Из уравнения (П.2) получаем

$$\mathbf{B}^*(\omega, \mathbf{k}) = \frac{(ku)^2 (1 - \gamma)}{c^2 (1 - \beta_u^2)} - \frac{(1 - \gamma \beta_u^2)}{(1 - \beta_u^2)} \mathbf{k}^2 + \frac{\chi_1 (\omega - ku)^2}{c^2 (1 - \beta_u^2)} + \frac{\epsilon_2 \omega^2}{c^2}; \quad (\text{П.3})$$

$$L^{**}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\epsilon_2 \omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 + \frac{\chi_1 (\omega - ku)^2}{c^2 (1 - \beta_u^2)}. \quad (\text{П.4})$$

Уравнение (П.3.) определяет электромагнитную волну, у которой поляризация такова, что  $E_z \neq 0$ . Уравнение (П.4) определяет волну с поляри-

\* Ниже мы пользуемся обозначениями, принятymi в работе [8].

зацией  $H_z \neq 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае могут возбуждаться две нормальные волны с показателями преломления, определяемые соответственно равенствами [9]

$$n^{*2} [(1 - \varepsilon_1 \beta_u^2) \cos^2 \theta + (1 - \gamma \beta_u^2) \sin^2 \theta] + 2n^* x_1 \beta_u \cos \theta - (\varepsilon_s - \varepsilon_2 \beta_u^2) = 0; \quad (\text{П.5})$$

$$n^{**2} [(1 - \varepsilon_1 \beta_u^2) \cos^2 \theta + (1 - \beta_u^2) \sin^2 \theta] + 2n^* x_1 \beta_u \cos \theta - (\varepsilon_s - \varepsilon_2 \beta_u^2) = 0. \quad (\text{П.6})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957).
2. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 5 (11), 1865 (1962).
3. Ю. В. Чугунов. Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1151 (1966).
4. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.
5. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 442 (1964).
6. А. А. Коломенский, ДАН СССР, 106, 982 (1956).
7. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 32, 366 (1957).
8. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
9. Г. Г. Гетманцев, ЖЭТФ, 37, 843 (1959).
10. Р. А. Stiggesk, Phys. Rev., 112, № 5, 1488 (1958).
11. Р. В. Половин, ЖТФ, 31, 1220 (1961); ЖТФ, 33, 255 (1963).
12. К. В. Dysthe, Nuclear Fusion, 6, № 3, 215 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
17 июня 1967 г.

## TO THE PROBLEM OF CHARGE RADIATION IN NON-EQUILIBRIUM MEDIA

*Yu. V. Chugunov*

The solutions for electromagnetic fields in non-equilibrium media are considered in the cases when the interaction between the uniformly moving charged particle and the packets of unstable oscillations of the given non-equilibrium system may be not taken into account. As a concrete example, the radiation reaction for a charge moving in mutual-penetrating media is considered.

УДК 621.372.8.09

## СПЕКТР СИГНАЛА, РАССЕЯННОГО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

*В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс*

В приближении Кирхгофа рассчитан спектр сигнала, рассеянного на колеблющейся границе раздела двух сред. Показано, что при рассеянии спектр изменяется не только за счет эффекта Доплера на движении поверхности, как целого, приводящего к смещению частоты рассеянного поля относительно падающего. Возникают также уширение спектра и дополнительный сдвиг, связанные с конечностью угловой ширины энергетического спектра поверхностных волн и с нелинейностью их закона дисперсии.

Хорошо известно, что при рассеянии на движущихся объектах изменяется спектр электромагнитного сигнала. Это имеет место, например, если рассеяние происходит на колеблющейся границе раздела двух сред. Впервые это явление было исследовано в работе [1], в которой приведены спектры сигналов, отраженных от морской поверхности, и сделана попытка их теоретического исследования. В приближении метода малых возмущений спектр рассеянного сигнала был изучен Бассом [2]. Оказалось, что в первом порядке теории возмущений спектр является дискретным и состоит из трех частот:  $\omega_0$  и  $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega(q_{\perp})$ . Здесь  $\omega_0$  и  $\mathbf{k}_0$  — частота и волновой вектор падающей плоской волны;  $\Omega(\nu)$  — закон дисперсии волн на поверхности;  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{x}$ ;  $\mathbf{x}$  — вектор, направленный в точку наблюдения и равный по модулю  $\mathbf{k}_0$ ;  $\mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{q} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{q})$ ;  $\mathbf{n}$  — нормаль к средней поверхности.

Во втором порядке теории возмущений была получена конечная ширина спектра за счет влияния диссипативных процессов [3]. Однако в экспериментальной работе [4], кроме ярко выраженных максимумов в спектре на частотах  $\omega_{\pm}$ , было обнаружено уширение, не укладывающееся в рамки метода малых возмущений.

Это уширение было объяснено с помощью комбинированной модели морской поверхности (мелкая рябь на крупной волне) [5]. При этом рассеянное поле представлялось в виде суммы поля нулевого приближения  $U_0$ , рассеянного на гладкой крупномасштабной поверхности, и поля первого приближения по высотам и углам наклона мелкой ряби  $U_1$ . В указанной работе был исследован лишь спектр поля  $U_1$ , которое значительно превышает  $U_0$  при рассеянии в направлениях, далеких от зеркальных. Сюда относится, в частности, обратное рассеяние (радиолокационный случай) при не очень больших углах скольжения.

В данной работе рассматривается спектр сигнала в области углов, близких к зеркальному. Этот случай является обратным рассмотренному в [5] в том смысле, что в этом интервале направлений поле  $U_0$ , отраженное от крупномасштабной поверхности и рассчитанное без учета ряби, является определяющим ( $|U_0| \gg |U_1|$ ).

1. Под спектром поля  $U$ , как обычно, понимается следующая величина:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle U(t) U^*(t + \tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1)$$

Заметим, что  $U(t)$  может описывать поле как звуковой, так и электромагнитной волны (в последнем случае  $U(t)$  — компонента соответствующего вектора).  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по ансамблю реализаций случайной рассеивающей поверхности.

Будем считать, что источник и приемник расположены в зоне Фраунгофера, относительно отражающей поверхности  $z = \zeta(r, t)$ , так что достаточно ограничиться рассмотрением рассеяния плоской монохроматической волны.

Если поле такой волны, рассеянной на  $z = \zeta(r, t)$ , рассчитывать методом Кирхгофа, то, как следует из результатов работы [6],

$$S(\omega) \simeq \left\langle \int_{z=0} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp \{i[q\rho - \omega_1 \tau]_i + iq_z [\zeta(r_1, t_1) - \zeta(r_2, t_2)]\} \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_1 = \omega_0 - \omega$ ,  $\zeta(r, t)$  — случайная стационарная однородная функция,  $\rho = r_1 - r_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ , ось  $z$  направлена по нормали к средней плоскости  $\{x, y\}$ . Перед интегралом опущены множители, не зависящие от времени. Предполагается также, что размеры рассеивающей площадки много больше длины волны и всех радиусов корреляций, так что интегрирование по  $\rho$  проводится в бесконечных пределах. В случае нормального распределения высот  $\zeta(r, t)$

$$S(\omega) \simeq \int d\rho \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp \{i[q\rho - \omega_1 \tau] - q_z^2 h^2 [1 - W(\rho, \tau)]\}; \quad (2a)$$

$$W(\rho, \tau) = h^{-2} \langle \zeta(r_1, t_1) \zeta(r_2, t_2) \rangle \quad (3)$$

—нормированная пространственно-временная корреляционная функция,

$$h^2 = \langle \zeta^2(r, t) \rangle, \quad W(0, 0) = 1.$$

2. Для дальнейшего нам понадобится спектральное разложение корреляционной функции. Если  $\zeta(r, t)$  описывает малые свободные колебания некоторой поверхности (например, свободной поверхности жидкости), то ее (а следовательно, и  $W(\rho, \tau)$ ) можно представить в виде суперпозиции бегущих плоских волн, так как вследствие малости колебаний  $\zeta(r, t)$  и  $W(\rho, \tau)$  удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений, и плоские волны являются полной системой функций:

$$W(\rho, \tau) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dx \tilde{W}(x, \theta) \cos [x\rho - \Omega(x) \tau]. \quad (4)$$

Здесь  $x = (x, \theta)$  и  $\Omega(x)$  — волновой вектор (с полярными координатами  $x$  и  $\theta$ ) и частота каждой гармоники,  $\tilde{W}(x, \theta)$  — пространственный спектр поверхности. Вид закона дисперсии  $\Omega(x)$  определяется в каждом конкретном случае из уравнений, описывающих колебания поверхности.

Удобно в (4) перейти к комплексной форме записи. Для этого нужно доопределить  $\Omega(x)$  и  $\tilde{W}(x, \theta)$  при отрицательных  $x$ . Так как  $W(\rho, \tau)$  — вещественная функция и  $W(-\rho, -\tau) = W(\rho, \tau)$  (это является следствием стационарности и статистической однородности поверхности), то для выполнения указанных условий необходимо, чтобы

$$\Omega(-x) = -\Omega(x), \quad \tilde{W}(-x, \theta) = \tilde{W}(x, \theta). \quad (5)$$

С учетом этих равенств можно написать

$$W(\rho, \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{W}(x, \theta) \exp \{i[x\rho - \Omega(x)\tau]\}. \quad (6)$$

Заметим, что (6) можно получить непосредственным разложением  $W(\rho, \tau)$  в интеграл Фурье по двум независимым переменным  $x$  и  $\Omega$ .

Поскольку  $W(\rho, \tau)$  удовлетворяет соответствующему уравнению,  $\tilde{W}(x, \Omega)$  будет функцией только одной переменной  $x$ , а  $\Omega = \Omega(x)$ .

3. Рассмотрим вначале простейший случай, когда рассеивающая поверхность является одномерной, т. е.  $\zeta(r, t) = \zeta(x, t)$ , и образована плоскими волнами с линейным законом дисперсии ( $\Omega = xv$ ), бегущими в одном направлении. Тогда, очевидно, фазовая скорость у всех гармоник одинакова и  $\zeta(x, t) = \zeta(x - vt)$ . Поэтому

$$S(\omega) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp [i(q_x \rho_x - \omega_1 \tau)] \langle \exp [iq_z \{\zeta[x + \rho_x - v(t + \tau)] - \zeta(x - vt)\}] \rangle. \quad (7)$$

Сделав в (7) замену переменных  $\{\rho_x, \tau\} \rightarrow \{\xi = \rho_x - vt, \tau\}$ , получаем

$$S(\omega) \simeq \delta(\omega_1 - q_x v) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_x \xi) f[q_z, -q_z; W(\xi)] d\xi, \quad (8)$$

$f[q_z, -q_z; W(\xi)]$  — двумерная характеристическая функция поверхности [7].

Таким образом, в этом случае спектр рассеянного сигнала состоит из одной частоты  $\omega = q_x v + \omega_0$ , соответствующей допплеровскому сдвигу на скорости движения поверхности (линейность закона дисперсии как раз и означает, что поверхность перемещается в пространстве как целое со скоростью  $v = \Omega/x$ ).

Аналогичный результат был получен в работе [8] для случая периодической движущейся поверхности. Из вышесказанного следует, однако, что наличие частотного сдвига не является следствием периодичности, а представляет собой обычный эффект Допплера, обусловленный движением поверхности как целого.

4. Если поверхность образована двумя системами плоских волн, бегущих во взаимно противоположных направлениях (закон дисперсии по-прежнему линейный), то спектральный состав отраженного сигнала существенно отличен от (8).

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} h^2 W(\rho_x, \tau) &= h_1^2 W_1(\rho_x - vt) + h_2^2 W_2(\rho_x + vt) = \\ &= h_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_1(x) \exp[ix(\rho_x - vt)] dx + h_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_2(x) \exp[ix(\rho_x + vt)] dx \end{aligned} \quad (9)$$

и формула (2 а) (нормальное распределение высот) дает

$$S(\omega) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ -(q_z h_1)^2 [1 - W_1(x)] + \frac{ix}{2} \left( q_x - \frac{\omega_1}{v} \right) \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ - (q_z h_2)^2 [1 - W_2(y)] + \frac{iy}{2} \left( q_x + \frac{\omega_1}{v} \right) \right\}, \quad (10)$$

где  $h_{1,2}$  — среднеквадратичные высоты волн, бегущих в двух направлениях. Если  $(q_z h_{1,2})^2 \ll 1$ , то, разлагая в (10) подынтегральные выражения в ряд, получим для гауссовой функции корреляции

$$W_{1,2}(\xi) = \exp \left[ - \left( \frac{\rho_x \pm v \tau}{L} \right)^2 \right] \quad (11)$$

при  $h_1 = h_2$  следующую формулу:

$$\begin{aligned} S(\omega) \sim & (2\pi)^2 v \delta(\omega) \delta(q_x) + 4\pi v [\delta(\omega - q_x v) + \delta(\omega + q_x v)] \times \\ & \times \int d\xi \exp(-iq_x \xi) \{ \exp[q_z^2 h_1^2 W_1(\xi)] - 1 \} + \\ & + L^2 \pi \sum_{p=2}^{\infty} (q_z h_1)^{2p} \exp\left(-\frac{q_x^2 L^2}{4p}\right) \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n! (p-n)! \sqrt{n(p-n)}} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{p L^2 [\omega + q_x v (p-2n) p^{-1}]^2}{16 n (p-n) v^2}\right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае спектр является дискретным только в первом порядке по  $(q_z h)^2$ . В следующих порядках, при  $(q_z h)^{2p}$ , кроме дискретных частот появляется сплошной спектр, имеющий  $p-1$  максимумов на частотах

$$\omega_m = \left(1 - 2 \frac{n}{p}\right) q_x v \quad (13)$$

с шириной

$$\Delta\omega = \frac{4v}{L} \sqrt{\frac{n(p-n)}{p}}.$$

В противоположном предельном случае  $(q_z h)^2 \gg 1$ , вычисляя (10), методом Лапласа, при  $\tilde{W}_1(x) = \tilde{W}_2(x)$  имеем

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\Delta\omega} \exp\left[-\frac{(\omega_1 - \omega_m)^2}{(\Delta\omega)^2}\right], \quad (14)$$

где

$$\omega_m = v q_x \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}; \quad (15)$$

$$(\Delta\omega)^2 = 16 \frac{(q_z h_1 h_2)^2}{h_1^2 + h_2^2} v^2 \bar{x}^2, \quad \bar{x}^n \equiv \int_0^{\infty} x^n \tilde{W}_1(x) dx. \quad (16)$$

Если  $h_1$  или  $h_2$  обращается в нуль (это соответствует наличию волн, бегущих только в одну сторону), то из формулы (14) предельным переходом получаем (8). Если  $h_1 = h_2$  (случай, проанализированный выше при  $(q_z h)^2 \ll 1$ ), (14) имеет максимум при  $\omega = \omega_0$ . Тот факт,

что, при наличии в спектре рассеивающей поверхности только двух типов волн со скоростями  $\pm v$ , спектр сигнала не является линейчатым и состоящим из двух частот  $\omega_1 \pm q_z v$ , а обладает конечной шириной, имеет простой физический смысл.

Действительно, существование гармоник, бегущих навстречу друг другу, приводит к образованию на поверхности стоячих волн. Поэтому кроме движения «вперед» и «назад» со скоростью  $v$  некоторые отражающие участки движутся «вверх» и «вниз» со стоячей волной. Эффект Допплера на таком движении и приводит к уширению спектра рассеянного поля.

5. Переидем теперь к рассмотрению общего случая двумерной рассеивающей поверхности с нелинейным законом дисперсии. Подставив (6) в (2а), записав подынтегральное выражение в виде ряда по степеням  $(q_z h)^2$  и выполнив почленное интегрирование по  $\rho$  и  $\tau$ , получим

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(\omega); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} S^{(n)}(\omega) \sim & \frac{(q_z h)^{2n}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_{n-1} \tilde{W}(x_1) \dots \tilde{W}(x_{n-1}) \times \\ & \times \tilde{W}(q_{\perp} + x_1 + \dots + x_{n-1}) \delta[\omega + \Omega(x_1) + \dots + \Omega(x_{n-1}) - \\ & - \Omega(q_{\perp} + x_1 + \dots + x_{n-1})]. \end{aligned} \quad (18)$$

При  $q_z h \ll 1$  основной вклад в спектр дают первые члены ряда. Например, в случае одномерной волны ( $W = W(\rho_x, \tau)$ ,  $h_2 = 0$ ) и нелинейного закона дисперсии  $\Omega = \Omega(x)$ , считая спектр  $\tilde{W}_1(x)$  «узким» настолько, что

$$\left. \frac{d^3 \Omega}{dx^3} \right|_{x=x_0} \Delta x \ll \left. \frac{d^2 \Omega}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (19)$$

( $\Delta x$  — интервал, на котором функция  $\tilde{W}(x)$  заметно отлична от нуля;  $x_0$  — значение  $x$ , при котором  $\tilde{W}_1(x)$  имеет максимум), получаем

$$S^{(1)} \simeq \delta[\omega_1 - \Omega(q_{\perp})], \quad S^{(2)} \simeq \tilde{W}_1(x_1) \tilde{W}_1(x_1 + q_{\perp}). \quad (20)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{\omega_1 - v_{rp} q_{\perp} - a q_{\perp} x_0}{a q_{\perp}}, \quad v_{rp} = \left. \frac{d\Omega}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad a = \left. \frac{d^2 \Omega}{dx^2} \right|_{x=x_0}. \quad (21)$$

При  $\tilde{W}_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} L \exp(-x^2 L^2/4)$

$$S^{(2)}(\omega) \simeq \exp[-L^2 (\omega_1 - v_{rp} q_{\perp})^2 / 2a^2 q_{\perp}^2]. \quad (20a)$$

Таким образом, при  $q_z h \ll 1$  даже в случае произвольного закона дисперсии в первом порядке по  $q_z h$  спектр является линейчатым (см. (13), (20)). Для двумерной волны  $S^{(1)}(\omega)$  вычисляется аналогично и тоже

оказывается пропорциональным  $\delta[\omega_1 - \Omega(q_\perp)]$ . Это, как и следовало ожидать, согласуется с результатами теории возмущений (см. [2]).

Во втором члене появляется уширение спектра (13), (20 а), не связанное с наличием диссипации, а объясняющееся спецификой движения участков поверхности — нелинейным законом дисперсии и конечной угловой шириной спектра  $\tilde{W}(x, \theta)$ .

6. В противоположном предельном случае, когда  $(q_z h)^2 \gg 1$ ,  $S(\omega)$  вычисляется методом Лапласа:

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\Delta\omega} \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_m)^2}{(\Delta\omega)^2} \right]; \quad (22)$$

$$(\Delta\omega)^2 = -2(q_z h)^2 \frac{D}{d}, \quad \omega_m = \frac{D_1}{d}, \quad (23)$$

$$D = \begin{vmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{x\tau} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{y\tau} \\ W_{x\tau} & W_{y\tau} & W_{\tau\tau} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} q_x & q_y & 0 \\ W_{xx} & W_{yx} & W_{x\tau} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{y\tau} \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{xy} & W_{yy} \end{vmatrix}.$$

Индексы при корреляционной функции означают дифференцирование по соответствующим переменным, например,  $W_{x\tau} = \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x \partial \tau}$  (при  $x = \tau = 0$ ).

Для исследования формулы (22) сделаем некоторые предположения относительно вида  $\tilde{W}(\rho, \tau)$ . Именно, будем считать\*, что

$$\tilde{W}(\theta, x) = \tilde{W}(\theta) \tilde{W}_2(x), \quad \tilde{W}_2(x) = \tilde{W}_2(-x), \quad \tilde{W}(-\theta) = \tilde{W}(\theta). \quad (24)$$

С учетом (7), (21), (24), получаем

$$\begin{aligned} W_{xx} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(\theta) \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty x^2 \tilde{W}_2(x) dx, \\ W_{yy} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(\theta) \sin^2 \theta d\theta \int_0^\infty x^2 \tilde{W}_2(x) dx, \\ W_{\tau\tau} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(\theta) d\theta \int_0^\infty \Omega^2(x) \tilde{W}_2(x) dx, \\ W_{x\tau} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^\infty x \Omega(x) \tilde{W}_2(x) dx, \\ W_{xy} &= W_{y\tau} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для двумерной волны с линейным законом дисперсии получаем

$$(\Delta\omega)^2 = 4(q_z h)^2 v^2 \bar{x}^2 \frac{\overline{\cos^2 \theta} - (\overline{\cos \theta})^2}{\overline{\cos^2 \theta}}, \quad \bar{x}^n = \int_0^\infty x^n \tilde{W}_2(x) dx; \quad (26)$$

\* Это не является принципиальным, но значительно упрощает выкладки.

$$\omega_m = q_x v \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}, \quad \tilde{f}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \tilde{W}(\theta) d\theta. \quad (27)$$

Очевидно, что в этом случае наличие конечной ширины спектра рассеянного поля, даже при линейном законе дисперсии волн на поверхности, объясняется двумя причинами. Во-первых, так как каждому  $\mathbf{x}$  соответствует множество волн, бегущих в разных направлениях с одинаковой скоростью  $v = \Omega/\mathbf{x}$ , а эффект Допплера существует лишь на проекции скорости на ось  $x$  ( $q_y = 0$ ), то появляется такой эффективный закон дисперсии—данному  $\mathbf{x}$  соответствует не одна скорость, приводящая к допплеровскому сдвигу, а набор скоростей, распределенных по закону  $v = (\Omega/\mathbf{x}) \cos \theta$ . Во-вторых, наличие у векторов  $\mathbf{x}$  проекций на ось  $y$  (для различных  $\mathbf{x}$  их проекции  $x_y$  могут иметь разные знаки) приводит к появлению стоячих волн, т. е. к движению некоторых рассеивающих участков «вверх»—«вниз». Эффект Допплера на этих скоростях также является одной из причин уширения спектра.

В случае нелинейного закона дисперсии и одномерной волны на поверхности интересно рассмотреть два случая. Когда  $\tilde{W}_1(x)$  отлично от нуля в интервале  $-\Delta x \leq x \leq \Delta x$  и  $\Delta x$  мало настолько, что справедливо разложение  $\Omega(x) = v_{rp}x \pm ax^2/2$  (см. (21); для этого необходимо выполнение неравенства (19)), то

$$(\Delta\omega)^2 = (q_z h)^2 a^2 \left[ \frac{\overline{x^4}}{x^2} - \frac{(\overline{x^3})^2}{x^2} \right]; \quad (28)$$

$$\omega_m = q_z \left( v_{rp} + \frac{a}{2} \frac{\overline{x^3}}{x^2} \right). \quad (29)$$

Иными словами, основной вклад в спектр рассеянного сигнала дает эффект Допплера на скорости, близкой к групповой  $v_{rp} = d\Omega/dx|_{x=0}$  ( $a(\overline{x^3}/x^2)$  — малая добавка к  $v_{rp}$ ). Ширина спектра полностью определяется нелинейностью закона дисперсии и обращается в нуль при  $a = 0$ . Наличие  $\Delta\omega \neq 0$  объясняется тем, что при нелинейном законе  $\Omega(x)$  гармоники с разными  $x_i$  в спектре поверхности движутся с разными скоростями  $v = \frac{d\Omega}{dx}|_{x=x_i}$ . Допплеровское смещение, обусловленное этими скоростями, и приводит к уширению.

Если сигнал рассеивается на волновом пакете (это означает, что  $\tilde{W}_1(x)$  отлична от нуля в интервале  $x_0 - \Delta x/2 \leq x \leq x_0 + \Delta x/2$  и  $x_0 \gg \Delta x$ ;  $W_1(\rho_x, \tau)$  — квазигармоническая функция), то

$$(\Delta\omega)^2 = 4(q_z h)^2 (v_\phi - v_{rp})^2 \overline{(x - x_0)^2}, \quad v_\phi \equiv \frac{\Omega(x_0)}{x_0}; \quad (30)$$

$$\omega_m = q_x \left[ v_\phi + (v_{rp} + v_\phi) \frac{\overline{(x - x_0)^2}}{x_0^2} \right] \simeq q_x v_\phi. \quad (31)$$

Наконец, при рассеянии на двумерной волне с нелинейным законом дисперсии уширение происходит за счет влияния обоих факторов — нелинейности и конечности угловой ширины, так что

$$(\Delta\omega)^2 = 4 \frac{(q_z h)^2}{\cos^2 \theta} \left\{ [\overline{\cos^2 \theta} - (\overline{\cos \theta})^2] (v_{rp}^2 \bar{x}^2 + 2av_{rp} \bar{x}^3) + a^2 \left[ \bar{x}^4 \overline{\cos^2 \theta} - \frac{(\bar{x}^3)^2}{\bar{x}^2} (\overline{\cos \theta})^2 \right] \right\}; \quad (32)$$

$$\omega_m = q_z \left( v_{rp} + a \frac{\bar{x}^3}{\bar{x}^2} \right) \frac{\overline{\cos \theta}}{\cos^2 \theta}. \quad (33)$$

Таким образом, спектр сигнала, рассеянного на колеблющейся границе раздела двух сред, изменяется за счет эффекта Допплера на движущихся участках поверхности. Ширина спектра и положение максимума определяются наличием стоячих волн, нелинейностью закона дисперсии и конечностю ширины спектра поверхности  $\tilde{W}(x, \theta)$ .

В заключение авторы выражают благодарность Ф. Г. Бассу, П. В. Блиоху, Б. Д. Замараеву, В. М. Конторовичу и И. Е. Остробовскому за полезные обсуждения.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. D. D. Crombie, Nature, 175, 681 (1955).
2. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 1, 58 (1961).
3. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 1, 290 (1963).
4. А. Д. Розенберг, И. Е. Остробовский, А. И. Калмыков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 234 (1966).
5. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 876 (1966).
6. М. А. Исаакович, ЖЭТФ, 23, вып. 3, 305 (1952).
7. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1966.
8. J. De Lorenzo, E. S. Casedy, IEEE Trans., AP-14, 611 (1966).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
26 мая 1967 г.

#### THE SPECTRUM OF SIGNAL SCATTERED BY A VIBRATING INTERFACE

V. D. Freilikher, I. M. Fux

The spectrum of signal scattered on the vibrating boundary of the division of two media is calculated in Kirchhoff's approximation. It is shown that the spectrum changes not only by Doppler's effect on the motion of the surface as the whole which reduced to the shift of frequency of scattered field as to incident. The expansion of spectrum and additional shift associated with non-zero angular width of energetic spectrum of surface waves and with non-linear dispersion law are springing up either.

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПРИ КОСОМ ПАДЕНИИ НА РЕШЕТКУ, СОСТАВЛЕННУЮ ИЗ БРУСЬЕВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Я. С. Комиссаров, В. А. Павлюк, Г. Г. Половников

Получены две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода для дифракционной задачи о косом падении плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на решетку, составленную из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения. Проведено численное исследование поведения нормированных амплитуд основной волны дифракционного спектра при больших коэффициентах заполнения структур и произвольных остальных параметрах. В длинноволновой области найдены зависимости относительной полосы пропускания от соотношения между глубиной и периодом решетки. Результаты расчетов, выполненных на электронно-вычислительной машине М-20, сопоставлены с данными эксперимента.

1. На периодическую решетку, образованную из идеально проводящих бесконечно длинных прямоугольных брусьев, параллельных оси  $Ox$ , со стороны  $z > 0$  падает плоская электромагнитная волна так, что волновой вектор  $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n}$  ориентирован произвольным образом в пространстве. Начало координат выбрано в соответствии с рис. 1. Обозначим период решетки через  $2l$ , расстояние между соседними брусьями —  $2d$ , а толщину брусьев —  $2h$ .

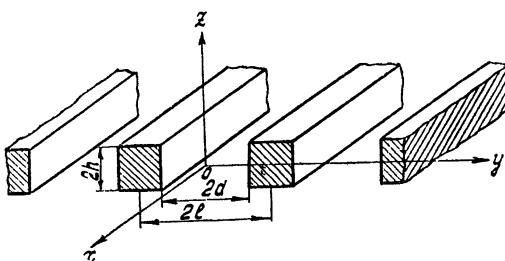


Рис. 1. Решетка из прямоугольных брусьев.

Определим поле, возникающее в результате дифракции волны при разных углах падения ее на решетку для любых соотношений между периодом последней, толщиной брусьев, шириной отверстия между ними, а также длиной падающей волны:

$$\mathbf{E}^{\text{пад}} = E_0 e^{ik(nr)}, \quad \mathbf{H}^{\text{пад}} = H_0 e^{ik(nr)}. \quad (1)$$

Считаем далее для простоты  $|E_0| = |H_0| = 1$  и везде опускаем временной фактор  $e^{-i\omega t}$ . Проекции единичного вектора  $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, -\gamma)$ , фигурирующего в (1), связаны соотношением  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

Искомое поле должно удовлетворять граничному условию на брусьях ( $E_{\text{танг}} = 0$ ), условию излучения при  $|z| \rightarrow \infty$  и уравнениям

Максвелла всюду вне металла. Иными словами,  $E_x$  и  $\partial H_x/\partial z$  должны быть непрерывны на всем периоде решетки и равны нулю на металле,  $\partial E_x/\partial z$  и  $H_x$  — непрерывны в щели, а  $E_x$  и  $\partial H_x/\partial y$  — равны нулю на боковых гранях металла. Таким образом, задача сводится к нахождению  $E_x$ - и  $H_x$ -составляющих искомого поля выше и ниже решетки и внутри щели (соответственно  $E_x^+$ ,  $E_x^-$  и  $E_x^0$ ; для  $H_x$  — аналогично), причем остальные компоненты электромагнитного поля можно выразить из уравнений Максвелла через искомые  $E_x$  и  $H_x$ .

Так как дифрагированное поле периодично по  $y$ , то и  $x$ -составляющие электрического и магнитного полей будут также периодичны вдоль этой оси. Поэтому, разлагая их в ряд Фурье по  $y$ , используя уравнения Максвелла и учитывая поведение искомого поля на бесконечности, будем иметь

a) в области над решеткой ( $z > h$ )

$$E_x^+ = \exp[ik(\alpha x + \beta y - \gamma z)] + e^{ikax} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\{ik[\beta_n y + \gamma_n(z-h)]\} e^{i\pi ny/l}, \quad (2)$$

$$H_x^+ = \exp[ik(\alpha x + \beta y - \gamma z)] + e^{ikax} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{ik[\beta_n y + \gamma_n(z-h)]\} e^{i\pi ny/l};$$

b) в области под решеткой ( $z < -h$ )

$$E_x^- = e^{ikax} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\{ik[\beta_n y - \gamma_n(z+h)]\} e^{i\pi ny/l}, \quad (3)$$

$$H_x^- = e^{ikax} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp\{ik[\beta_n y - \gamma_n(z+h)]\} e^{i\pi ny/l}.$$

Здесь  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$  — константы, которые необходимо определить;

$$\beta_n = \beta + \frac{\pi n}{kl}; \quad \gamma_n = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta_n^2}; \quad (4)$$

при этом знак корня выбирается так, чтобы  $\operatorname{Im} \gamma_n > 0$ , а если последняя равна нулю, то  $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$ .

Искомое поле периодично в направлении оси  $0y$ , поэтому достаточно рассмотреть его на одном периоде  $-d \leq y \leq 2l - d$ . На поверхности брусьев ( $|y| = d$ ) поле  $E_x^0$  обращается в нуль, следовательно, его можно разложить внутри щели в ряд Фурье по полной системе функций  $\sin[\pi m(y + d)/2d]$ , равных нулю на концах интервала  $(-d, d)$ :

$$E_x^0 = e^{2ik\beta nl} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ikax} (p_m e^{-y_m z} + q_m e^{-y_m z}) \sin\left[\frac{\pi m}{2d}(y+d-2nl)\right], \\ |z| < h, \quad |y-2nl| < d. \quad (5)$$

Для магнитной составляющей дифрагированного поля внутри щели из симметрии задачи получаем

$$H_x^0 = e^{2ik\beta nl} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ikax} (p_m e^{-y_m z} + q_m e^{-y_m z}) \cos\left[\frac{\pi m}{2d}(y+d-2nl)\right], \\ |z| < h, \quad |y-2nl| < d, \quad (6)$$

где  $\gamma_m = i\sqrt{k^2 - (\pi m/2d)^2}$ . Знак корня выбирается по аналогии с предыдущим случаем.

Поле, описанное формулами (2) и (3), удовлетворяет уравнениям Максвелла в верхнем и нижнем полупространствах при любом выборе коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$ . Поле, построенное по формулам (5) и (6), подчиняется уравнениям Максвелла внутри щели и удовлетворяет граничным условиям на боковых гранях брусьев решетки при произвольных значениях коэффициентов  $p_m$  и  $q_m$ .

2. Найдем основные соотношения для случая  $H$ -поляризации. Согласно указанным граничным условиям из выражений (2), (3) и (6) получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять искомые коэффициенты  $c_n$ ,  $d_n$ ,  $p_m$  и  $q_m$ :

$$-\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} = 0 \quad (d \leq |y| \leq 2l-d); \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} ik \left[ -\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} \right] &= - \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (p_m e^{-\gamma_m h} - q_m e^{\gamma_m h}) \times \\ &\times \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d); \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik\beta_n y} &= \sum_{m=0}^{\infty} (p_m e^{-\gamma_m h} + q_m e^{\gamma_m h}) \times \\ &\times \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d); \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} = 0 \quad (d \leq |y| \leq 2l-d); \quad (7c)$$

$$ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (p_m e^{\gamma_m h} - q_m e^{-\gamma_m h}) \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d); \quad (7d)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{ik\beta_n y} = \sum_{m=0}^{\infty} (p_m e^{\gamma_m h} + q_m e^{-\gamma_m h}) \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d). \quad (7e)$$

Сведем уравнения (7а)–(7е) к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода.

Обозначим

$$c_n + d_n = x_n, \quad 2(p_m + q_m) = z_m,$$

$$c_n - d_n = y_n, \quad 2(p_m - q_m) = \xi_m.$$

Для нахождения  $x_n$  и  $z_m$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) сложим уравнения (7а), (7б), (7в) соответственно с уравнениями (7с), (7д), (7е):

$$-\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} = 0 \quad (d \leq |y| \leq l); \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} ik \left[ -\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m z_m \operatorname{sh}(\gamma_m h) \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \\ &\quad (|y| < d); \end{aligned} \quad (8b)$$

$$e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{ik\beta_n y} = \sum_{m=0}^{\infty} z_m \operatorname{ch}(\nu_m h) \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d). \quad (8\text{в})$$

Вычитая из (7 а) — (7 в) соответственно (7 г) — (7 е), получим систему уравнений, определяющую  $y_n$  и  $\xi_m$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; m=0, 1, 2, \dots$ ):

$$-\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} = 0 \quad (y \leq |d| \leq l); \quad (9\text{а})$$

$$\begin{aligned} ik \left[ -\gamma e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \gamma_n e^{ik\beta_n y} \right] = -\sum_{m=0}^{\infty} \nu_m \xi_m \operatorname{ch}(\nu_m h) \times \\ \times \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d); \end{aligned} \quad (9\text{б})$$

$$e^{ik(\beta y - \gamma h)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{ik\beta_n y} = -\sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \operatorname{sh}(\nu_m h) \cos \left[ \frac{\pi m}{2d} (y+d) \right] \quad (|y| < d). \quad (9\text{в})$$

Из уравнений (8 а) и (8 б) находим:

$$x_n \gamma_n = \gamma e^{ik\gamma h} \delta_0^n - i \frac{\beta_n}{d} \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\pi m/2} z_m \nu_m \operatorname{sh}(\nu_m h) \frac{\sin[(k\beta_n - \pi m/2d)d]}{(k\beta_n)^2 - (\pi m/2d)^2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (10)$$

где  $\delta_0^n$  — символ Кронекера.

Выразим  $z_m$  через  $x_s$  из уравнения (8 в):

$$\begin{aligned} z_m \operatorname{ch} \nu_m h = \frac{e^{-i\pi m/2}}{d} (2 - \delta_0^m) \frac{k\beta \sin[(k\beta - \pi m/2d)d]}{(k\beta)^2 - (\pi m/2d)^2} e^{-ik\gamma h} + \\ + \frac{e^{-i\pi m/2}}{d} (2 - \delta_0^m) \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s \frac{k\beta_s \sin[(k\beta_s - \pi m/2d)d]}{(k\beta_s)^2 - (\pi m/2d)^2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения  $x = kl/\pi$ ,  $\delta = \pi h/l$ ,  $\theta = \pi d/l$ . Подставив уравнение (11) в (10), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно  $x_n$ :

$$x_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} M_{ns} x_s + \sigma_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (12)$$

где

$$M_{ns} = M_{ns}^{(0)} + M_{ns}^{(1)}, \quad \sigma_n = \sigma_n^{(0)} + \sigma_n^{(1)},$$

$$M_{ns}^{(0)} = i \frac{\operatorname{tg}(x\delta)}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \frac{\sin[(x\beta + n)\theta] \sin[(x\beta + s)\theta]}{(x\beta + n)(x\beta + s)\theta^2},$$

$$\begin{aligned} M_{ns}^{(1)} = i \left( \frac{2}{\pi} \right)^5 \frac{\theta^2}{x} \frac{(x\beta + n)(x\beta + s)}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} [(\pi x)^2 - (\pi^2 m/2\theta)^2]^{1/2} \operatorname{tg}[(x\delta)^2 - \\ - (\pi m\delta/2\theta)^2]^{1/2} \frac{\sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + n)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\} \sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + s)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\}}{\left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + n)^2 \theta^2 \right] \left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + s)^2 \theta^2 \right]}, \end{aligned}$$

$$\sigma_n^{(0)} = e^{-i\gamma x\delta} \delta_0^n + i \frac{e^{-i\gamma x\delta} \operatorname{tg}(x\delta)}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \frac{\sin[(x\beta + n)\theta] \sin(x\beta\theta)}{(x\beta + n) x\beta\theta^2},$$

$$\sigma_n^{(1)} = i \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 e^{-i\gamma x\delta} \theta^2 \frac{(x\beta + n)\beta}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(\pi x)^2 - (\pi^2 m/2\theta)^2]^{1/2} \times}{$$

$$\times \operatorname{tg} \left[ (x\delta)^2 - \left(\frac{\pi m\delta}{2\theta}\right)^2 \right]^{1/2} \frac{\sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + n)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\} \sin \left[ \left( m - \frac{2}{\pi} x\beta\theta \right) \frac{\pi}{2} \right]}{\left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + n)^2 \theta^2 \right] \left( m^2 - \frac{4}{\pi^2} x^2 \beta^2 \theta^2 \right)}.$$

Произведя аналогичные преобразования с системой уравнений (9), запишем

$$y_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} N_{ns} y_s + \tau_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (13)$$

где .

$$N_{ns} = N_{ns}^{(0)} + N_{ns}^{(1)}, \quad \tau_n = \tau_n^{(0)} + \tau_n^{(1)},$$

$$N_{ns}^{(0)} = -i \frac{\operatorname{ctg}(x\delta)}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \frac{\sin[(x\beta + n)\theta] \sin[(x\beta + s)\theta]}{(x\beta + n)(x\beta + s)\theta^2},$$

$$N_{ns}^{(1)} = -i \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \frac{\theta^2}{x} \frac{(x\beta + n)(x\beta + s)}{[1 - \alpha^2 - (\beta + n/x)^2]^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(\pi x)^2 - (\pi^2 m/2\theta)^2]^{1/2} \times}{\times \operatorname{ctg}[(x\delta)^2 - (\pi m\delta/2\theta)^2]^{1/2} \frac{\sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + n)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\} \sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + s)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\}}{\left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + n)^2 \theta^2 \right] \left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + s)^2 \theta^2 \right]},$$

$$\tau_n^{(0)} = e^{-i\gamma x\delta} \delta_0^n - i \frac{e^{-i\gamma x\delta} \operatorname{ctg}(x\delta)}{\left[ 1 - \alpha^2 - \left( \beta + \frac{n}{x} \right)^2 \right]^2} \frac{\sin(x\beta + n)\theta \sin(x\beta\theta)}{(x\beta + n)x\beta\theta^2},$$

$$\tau_n^{(1)} = -i \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 e^{-i\gamma x\delta} \theta^2 \frac{(x\beta + n)\beta}{\left[ 1 - \alpha^2 - \left( \beta + \frac{n}{x} \right)^2 \right]^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(\pi x)^2 - (\pi^2 m/2\theta)^2]^{1/2} \times}{\times \operatorname{ctg}[(x\delta)^2 - (\pi m\delta/2\theta)^2]^{1/2} \frac{\sin \left\{ \left[ m - \frac{2}{\pi} (x\beta + n)\theta \right] \frac{\pi}{2} \right\} \sin \left[ \left( m - \frac{2}{\pi} x\beta\theta \right) \frac{\pi}{2} \right]}{\left[ m^2 - \frac{4}{\pi^2} (x\beta + n)^2 \theta^2 \right] \left( m^2 - \frac{4}{\pi^2} x^2 \beta^2 \theta^2 \right)}}.$$

Полученные системы уравнений (12), (13) программировались на алгоритмическом языке «АЛГОЛ-60» и решались с помощью электронно-вычислительной машины М-20. Особое внимание уделялось численному исследованию энергетических характеристик дифракционного спектра в случае решеток с большим коэффициентом заполнения, так как подобные структуры можно использовать в ряде технических приложений. В частности, свойства решеток, вызванные малостью

щелей между их элементами при наличии дифракционных резонансов [1], позволяют создать узкополосные фильтры и амплитудно-частотные преобразователи. Введение в зазор управляемого диэлектрика открывает возможность смещения полосы пропускания структуры по частотному диапазону. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес и будет рассмотрен в отдельной работе.

Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения  $|b_0|$  от  $x$  при разных  $\delta$  ( $\theta = 0,106$ ;  $\gamma = 1$ ; измеренные значения: треугольники —  $\delta = 6,49$ , кружки —  $\delta = 12,04$ ).

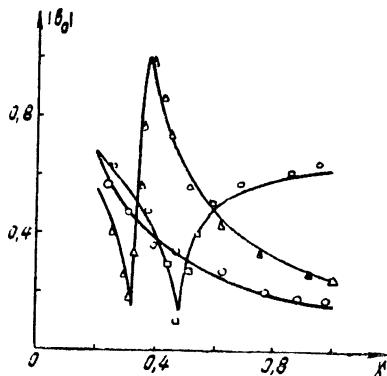
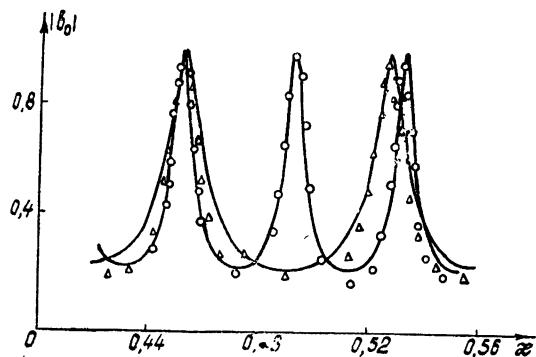
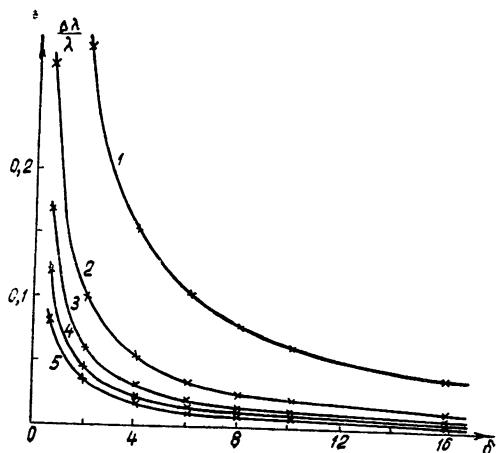


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения  $|b_0|$  от  $\gamma$  при различных  $x$  ( $\theta = 0,0817$ ;  $\delta = 7,46$ ; измеренные значения: кружки —  $x = 0,495$ , треугольники —  $x = 0,514$ , квадраты —  $x = 0,532$ ).

Рис. 4. Зависимость  $\Delta\lambda/\lambda$  от  $\delta$  при разных  $x$  ( $\theta = 0,1$ ;  $\gamma = 1$ ; измеренные значения:

1. —  $x = 0,1$ , 2 —  $x = 0,3$ , 3. —  $x = 0,5$ , 4. —  $x = 0,7$ , 5. —  $x = 0,9$ .



Проверка расчетных величин коэффициентов прохождения как функции от  $\chi$ ,  $\gamma$  и зависимости  $\Delta\lambda/\lambda$  от  $\delta$  осуществлялась экспериментально. При измерениях применялась методика, описанная в [2]. Некоторые результаты вычислений и экспериментальные значения указанных характеристик приведены на рис. 2, 3, 4. Сравнение опытных и теоретических данных показывает, что отклонения между ними не превышают 5 %.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Сологуб, В. П. Шестопалов, Г. Г. Половников, ЖТФ, 37, № 4, 666 (1967).
2. Я. С. Комиссаров, В. А. Павлюк, Г. Г. Половников, сб. Радиотехника, Харьков, 7, 1969, стр. 94.

Физико-технический институт низких температур АН УССР, Поступила в редакцию  
Харьковский институт радиоэлектроники 15 марта 1968 г.

### DIFFRACTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE AT OBLIQUE INCIDENCE ON ARRAY CONSISTED OF RECTANGULAR TRANSVERSE-SECTION BARS

*Ya. S. Komissarov, V. A. Pavlyuk, G. G. Polovnikov*

Two infinite systems of linear algebraic equations of the second kind are obtained for the diffraction problem on oblique incidence of a plane  $H$ -polarized electromagnetic wave on the array composed of perfectly conducting bars of rectangular transverse section. The behaviour of normalized amplitudes of the principal wave of the diffraction spectrum is calculated numerically for large fill factors of structures, other parameters being arbitrary. The dependences of the relative transmission band versus the ratio of depth and period of the array are calculated for a long wave range. The calculation results made on the digital computer M-20 are compared with the experimental data.

УДК 538.567

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ НА КЛАССИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ ВОЗБУЖДЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С СОБСТВЕННЫМИ ПОТЕРЯМИ

*В. И. Канавец, А. Ю. Стабинис*

Исследовано изменение амплитуд и фаз возбужденных нелинейных осцилляторов с квадратичной нелинейностью и собственными потерями при воздействии на них внешней гармонической силы. Изучены характеристики индуцированного колебания в ансамбле осцилляторов с произвольными начальными фазами и одинаковыми начальными амплитудами. Найдены условия, при которых осуществляется передача энергии от осцилляторов внешнему полю,

### ВВЕДЕНИЕ

При воздействии внешней силы предварительно возбужденные нелинейные осцилляторы группируются по фазе [1]. Процесс приводит к появлению индуцированной компоненты колебания. Мощность взаимодействия, равная нулю в случае ансамбля осцилляторов с произвольными начальными фазами, оказывается отличной от нуля и при определенных условиях может стать отрицательной, свидетельствуя о передаче энергии от осцилляторов во внешнюю систему. Фазовая неустойчивость и группировка обусловлены зависимостью частоты колебаний осцилляторов от амплитуды.

В литературе подробно исследована фазовая группировка в ансамбле осцилляторов в пренебрежении собственными потерями. Чаще всего рассматриваются ансамбли, возникающие при циклотронных осцилляциях электронов в постоянном магнитном поле. В слаборелятивистской области циклотронная частота зависит от радиуса вращения электронов по квадратичному закону. В результате группировки возникает индуцированное излучение. Излучение используется для генерации и усиления колебаний диапазона сверхвысоких частот [2]. Взаимодействие, приводящее к излучению, рассматривается как классическая модель мазерного эффекта [3].

Представляет интерес рассмотрение влияния собственных потерь осцилляторов на процесс фазовой группировки. Собственные потери осцилляторов в области сверхвысоких частот определяются потерями на излучение, в том числе на возбуждение паразитных колебаний резонаторов. Потери на нерезонансное спонтанное дипольное излучение существенны в коротковолновой части субмиллиметрового диапазона, причем интенсивность излучения возрастает пропорционально четвертой степени частоты.

Фазовая группировка в ансамбле нелинейных осцилляторов с конечными собственными потерями должна иметь отличительные особенности. Следует ожидать, что индуцированное излучение возникнет при определенных соотношениях между величинами затухания, нелинейности и вынуждающего воздействия, причем большую роль будет играть выбор начального распределения амплитуд колебаний осцилляторов ансамбля. Реакция осцилляторов на внешнее воздействие исследована

для ряда ансамблей. В ансамбле осцилляторов с отрицательной температурой, когда имеется увеличение плотности числа осцилляторов с ростом энергии колебаний, фазовая группировка приводит к появлению индуцированного излучения [4]. Индуцированное излучение возникает также при определенном соотношении между распределением амплитуд и частот осцилляторов и частотой вынуждающего воздействия в пределах линии излучения [5]. Индуцированное излучение возникает и в плазме, помещенной в магнитное поле, при столкновениях электронов, движущихся по циклотронным траекториям, с атомами. Зависимость массы от скорости при этом не учитывается. Среда представляет собой систему электронных циклотронных осцилляторов с нелинейными потерями [6, 7]. В классической области простейшими с точки зрения практического осуществления являются ансамбли осцилляторов с дельтообразным распределением начальных амплитуд. Таковы ансамбли электронных циклотронных осцилляторов, используемых в генераторах и усилителях [2].

Ниже исследуется физическая картина фазовой группировки в ансамбле нелинейных осцилляторов с собственными потерями при внешнем гармоническом воздействии в случае дельтообразного начального распределения осцилляторов по энергиям. Выясняются условия, при которых существует индуцированное излучение. Проводимое рассмотрение классического мазерного эффекта справедливо для ансамблей электронных циклотронных осцилляторов и ансамблей молекул, находящихся в верхних возбужденных состояниях. Исследуемая классическая модель мазерного эффекта может быть осуществлена на низших частотах, например, при вынуждающем воздействии на систему возбужденных электрических контуров с нелинейной емкостью или индуктивностью.

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нелинейные колебания осцилляторов, находящихся под воздействием гармонической внешней силы в случае отклонений, симметричных относительно начала координат, описываются уравнением Дуффинга [8]

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dq}{dt} + \kappa^2 q + \epsilon \lambda q^3 = \xi_1 \cos(\gamma t), \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — малый параметр затухания,  $\kappa$  — собственная частота,  $\lambda$  — параметр нелинейности,  $\xi_1$  — амплитуда и  $\gamma$  — частота внешнего воздействия. В частном случае циклотронного движения релятивистских электронов параметры уравнения (1) записываются в следующем виде [3]:

$$\kappa = \frac{eB}{mc}, \quad 2\epsilon = \frac{r_k \omega^2}{3c}, \quad \epsilon \lambda = -\frac{2}{3} \frac{\kappa^4}{c^2}, \quad \xi_1 = \frac{eE}{m}, \quad (2)$$

где  $\kappa$  — циклотронная частота,  $e/m$  — отношение заряда к массе электрона,  $B$  — магнитная индукция,  $c$  — скорость света,  $E$  — напряженность действующего электрического поля,  $r_k$  — классический радиус электрона,  $\omega$  — действующее значение циклотронной частоты.

Методы решения уравнения (1) подробно описаны [8]. Воспользуемся методом медленно меняющихся амплитуд и фаз. При условии  $\epsilon \ll 1$  в полярных координатах

$$q = r \cos(\gamma t + \psi), \quad \frac{dq}{dt} = -\gamma r \sin(\gamma t + \psi) \quad (3)$$

из уравнения (1) следуют укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dr}{dt} &= -\varepsilon \gamma r - \frac{1}{2} \xi_1 \sin \psi, \\ \gamma r \frac{d\psi}{dt} &= \frac{x^2 - \gamma^2}{2} r + \frac{3}{8} \varepsilon \lambda r^3 - \frac{1}{2} \xi_1 \cos \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

В безразмерных переменных

$$t_1 = \gamma t, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad b = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{\xi_1}{\gamma^2 r_0}, \quad a = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon}{\gamma^2} \lambda r_0^2, \quad \Delta = \frac{1}{2} \frac{x^2 - \gamma^2}{\gamma^2}, \quad (5)$$

где  $r_0$  — заданная амплитуда отклонения, уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= -bx - \xi \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dt_1} &= \Delta + ax^2 - \frac{\xi}{x} \cos \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

В систему (6) входят четыре параметра. Параметры затухания  $b$  и внешней силы  $\xi$  всегда положительны. Параметры расстройки частоты  $\Delta$  и нелинейности  $a$  могут быть положительными и отрицательными. Если  $a > 0$ , то говорят о жесткой нелинейной характеристики, при  $a < 0$  характеристика мягкая. Уравнения (6) можно преобразовать, оставив только два параметра.

Сделав замену переменных

$$y = x \left( \frac{|a|}{\xi} \right)^{1/3}, \quad \beta = \frac{b}{(\xi^2 |a|)^{1/3}}, \quad \delta = \frac{\Delta}{(\xi^2 |a|)^{1/3}}, \quad \tau = t(|a| \xi^2)^{1/3}, \quad (7)$$

получим окончательный вид укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\beta y - \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \delta \pm \beta y^2 - \frac{\cos \psi}{y}, \end{aligned} \quad (8)$$

где знак (+) относится к случаю жесткой характеристики, знак (—) — к случаю мягкой характеристики. Для исследования системы (8) достаточно взять какой-либо один знак. Возьмем знак (+). Результаты исследования будут применимы к осцилляторам с мягкой характеристикой, если перейти к новой фазе  $\varphi = \pi - \psi$  и новой расстройке  $\delta_1 = -\delta$ .

Запишем энергетические соотношения, выполняющиеся при воздействии внешней силы на нелинейные осцилляторы с потерями. Умножив левую и правую части уравнения (1) на скорость  $\frac{dq}{dt}$ , после преобразований получим

$$\frac{dW}{dt} + P_n = P_{B3}, \quad (9)$$

где  $P_{B3} = \xi_1 \frac{dq}{dt} \cos(\gamma t)$  и  $P_n = 2b \left( \frac{dq}{dt} \right)^2$  — величины, пропорциональные

мощности взаимодействия и потерь; величина  $W = \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa^2 q^2}{2} + \frac{\kappa^2 \epsilon \lambda}{4} \frac{q^4}{4}$  пропорциональна сумме кинетической и потенциальной энергий. Проведя усреднение  $P_{\text{вз}}$  по периоду колебаний, используя выражение для  $\frac{dq}{dt}$  и отбрасывая вибрационные члены, получим

$$\overline{P}_{\text{вз}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1 \frac{dq}{dt} \cos(\gamma t) dt = -\frac{1}{2} \xi_1 \gamma r \sin \phi. \quad (10)$$

Запишем мощность взаимодействия в безразмерном виде:

$$P(\tau) = \frac{\overline{P}_{\text{вз}}}{\gamma^3 r_0^2} \left( \frac{|a|}{\xi^4} \right)^{1/3} = -y \sin \phi. \quad (11)$$

Если  $-\pi < \phi < 0$ , мощность взаимодействия положительна, осцилляторы поглощают энергию; если  $\pi > \phi > 0$ , мощность отрицательна, энергия передается во внешнюю систему.

Рассмотрим стационарные решения системы (8). Для нахождения стационарных решений приравняем нулю производные  $y$  и  $\dot{\phi}$ . В результате получим выражения для резонансной кривой  $\delta(y)$  и сдвига фаз  $\psi(y)$ :

$$\begin{aligned} \delta &= y^2 \pm \left( \frac{1}{y^2} - \beta^2 \right)^{1/2}, \\ \psi &= \arctg \frac{\beta}{\delta \pm y^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вид резонансных кривых, даваемых соотношением (12), известен (см., например, [8]). При  $\beta = 0$  получим резонансную кривую нелинейного осциллятора без потерь, имеющую характерный изгиб и при  $\delta \gg 1$ , идущую вблизи скелетной кривой  $\delta = y^2$ . При значениях  $\beta \leq 1,09$  имеются три стационарных режима колебаний, два устойчивых и один неустойчивый. При  $\beta \geq 1$  исчезает наклон резонансной кривой и она приближается к резонансной кривой линейного осциллятора. Следует отметить, что роль нелинейного члена в фазовом уравнении зависит от выбора рабочей области значений  $y$ . При  $y \gg 1$  выполняется соотношение  $y^2 \gg (\cos \phi)y$  и изменение фазы в основном определяется изменением амплитуды. При  $y \ll 1$  нелинейность малосущественна.

Нестационарные процессы в возбужденных нелинейных осцилляторах с затуханием при воздействии гармонической силы достаточно сложны. Можно выделить два основных процесса. Первый — процесс прохождения нелинейной системы через резонанс и второй — процесс установления стационарного состояния. Задачу о прохождении через резонанс в наиболее чистом виде получим, рассматривая движение системы при расстройках, соответствующих резонансу  $\delta \approx y_p^2$ , причем амплитуда  $y_p$  должна быть больше амплитуды стационарных колебаний в максимуме резонансной кривой, а начальное значение амплитуды  $y_0$  в свою очередь, больше амплитуды колебаний при резонансе. При рассмотрении ансамблей без потерь  $\beta = 0$ , а также при значениях параметра  $\beta$ , гораздо меньших величины  $1/\sqrt{\delta}$  (где  $\delta \geq 1$ ), процессы имеют

много общего и носят характер движения вблизи положения устойчивого равновесия.

Первый интеграл системы (8) может быть получен в аналитическом виде только в частных случаях. Например, при  $\beta = 0$  он имеет вид

$$2y \cos \phi = \delta y^2 - \frac{1}{2} y^4 + C, \quad (13)$$

где  $C$  — постоянная, зависящая от начальных условий. Соотношение (13) описывает осцилляции около положения равновесия.

Для нахождения решений системы (8) на электронно-вычислительной машине М-20 использован модифицированный метод Эйлера. Шаг интегрирования изменялся в пределах от 0,05 до 0,15 в зависимости от значения  $\beta$ .

## 2. ФАЗОВАЯ ГРУППИРОВКА В АНСАМБЛЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим систему осцилляторов с произвольными начальными фазами и одинаковой начальной амплитудой. Для описания качества фазовой группировки в таком ансамбле рассмотрим радиус-вектор колебания  $y$  на фазовой плоскости  $y, \phi$ . Возьмем сумму векторов и запишем выражение для модуля среднего значения векторной суммы:

$$|\langle y \rangle| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n, \quad (14)$$

где  $N$  — число осцилляторов в рассматриваемом ансамбле. Запишем далее усредненное по ансамблю значение мощности взаимодействия

$$\langle P(\tau) \rangle = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \sin \phi_n \quad (15)$$

и введем в рассмотрение энергию взаимодействия

$$\Delta W(\tau) = \int_0^\tau \langle P(t) \rangle dt. \quad (16)$$

Для упрощения расчетов начальные фазы осцилляторов ансамбля взяты через равный интервал. При этом в начальный момент времени  $\langle y \rangle = 0$ . Период  $2\pi$  делился на различное число равных частей ( $N = 10, 20, 100$ ). Расчеты с разными  $N$  показали, что в большинстве случаев достаточно использовать  $N = 20$ .

В результате расчетов найдены зависимости  $y(\tau), \phi(\tau), |\langle y(\tau) \rangle|$  и  $\langle P(\tau) \rangle$ . В общем случае функции  $y(\tau)$  и  $\phi(\tau)$  описывают сложный процесс, включающий затухающее колебательное движение, прохождение через резонанс, установление вынужденного колебания и биения в результате сложения собственного и вынужденного колебаний. Для иллюстрации приведем траектории движения изображающих точек на фазовой плоскости в полярных координатах  $y, \phi$  (рис. 1). Данные относятся к варианту с параметрами  $\beta = 0,63$ ,  $\delta = 5,8$ ,  $y_0 = 2,6$ . Шаг расчета равен 0,03. Траектории построены для колебаний с пятью начальными фазами, взятыми через интервал  $0,4\pi$ . По осям отложены величины  $Y = y \sin \phi$  и  $X = y \cos \phi$ . На диаграмме проведена пунктиром окружность, соответствующая выполнению условия  $\delta = y^2$ . Расстояние между соседними точками равно интервалу времени  $\Delta \tau = 0,3$ . На фазовой диаграмме отчетливо видно сгущение траекторий и изображающих

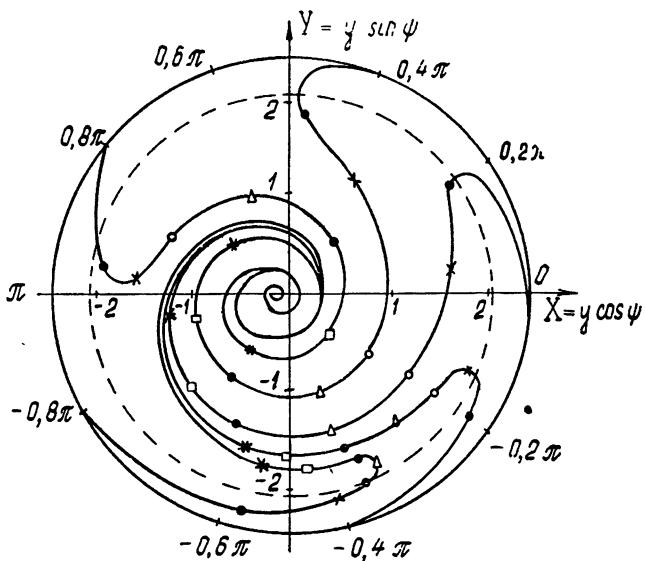


Рис. 1. Фазовая диаграмма группировки в ансамбле осцилляторов  
 $(\beta=0,63, \delta=5,8, y_0=2,6)$ .

точек, происходящее при прохождении области резонанса. Точки сгущаются в нижней половине диаграммы, в области поглощения энергии ( $-\pi < \psi < 0$ ), где достигается максимум модуля вектора колебаний  $|y|$  и мощности взаимодействия  $\langle P(\tau) \rangle$ , рис. 2. Если мощность

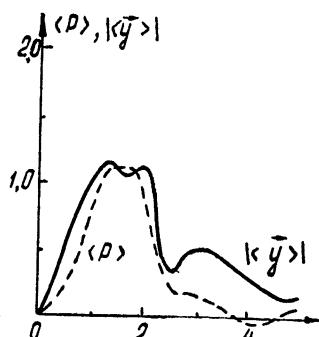


Рис. 2. Зависимость модуля вектора колебаний  $|\langle y \rangle|$  и мощности взаимодействия  $\langle P(\tau) \rangle$  от времени  $\tau$   
 $(\beta=0,63, \delta=5,8, y_0=2,6)$ .

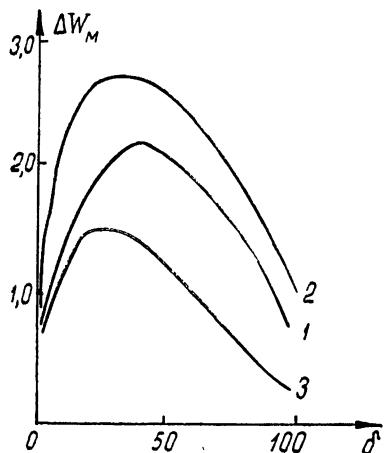
взаимодействия положительна, ансамбль осцилляторов поглощает. По мере удаления от резонанса амплитуда колебаний затухает и приближается к стационарному значению. Устанавливаются вынужденные колебания. На фазовой диаграмме траектории навиваются на спираль. Фокус спирали имеет координаты  $\psi = -\pi$ ,  $y = 0,195$ . Получившиеся стационарные значения совпадают с соответствующими значениями, взятыми на нижней ветви резонансной кривой.

### 3. МОЩНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим характер изменения мощности взаимодействия во времени при различных значениях параметров  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $y_0$ . Найдем режимы, когда осуществляется передача энергии от ансамбля осцилляторов внешней системе (индуцированное излучение).

Характерные зависимости максимального значения энергии индуцированного излучения, полученного при изменении  $y_0$ , от параметров  $\beta$  и  $\delta$  показаны на рис. 3. Кривые имеют максимумы при  $\delta \gg 1$ . Результаты систематического изучения зависимости мощности и энергии взаимодействия от параметров показали, что индуцированное излучение может существовать только при начальных амплитудах  $y_0 > \sqrt{\delta}$ . Если же  $y_0 < \sqrt{\delta}$ , то ансамбль поглощает. Условие  $y_0 > \sqrt{\delta}$  не является достаточным. Индуцированное излучение существует

Рис. 3. Зависимость максимального значения энергии индуцированного излучения  $\Delta W_{\max}$  от  $\delta$  при разных  $\beta$   
(1. —  $\beta=0$ ; 2. —  $\beta=0,141$ ; 3. —  $\beta=0,316$ ).



вует только при достаточно малых эквивалентных потерях  $\beta$ . Максимум энергии излучения приходится на значения  $y_0$ , лежащие в пределах  $(1,1 \div 2)\sqrt{\delta}$ .

Рассмотрим зависимости  $\langle P(\tau) \rangle$ , полученные для ряда начальных значений амплитуды  $y_0$  при нескольких значениях параметра  $\beta$ . Представленные на рис. 4 результаты расчета относятся к случаю  $\delta = 0,7$ ,  $\beta = 0,316$ . При малом значении начальной амплитуды  $y_0 < \sqrt{\delta}$  отрицательного поглощения нет. Оно появляется лишь при  $y_0 > \sqrt{\delta}$ . Если брать все большие значения начальной амплитуды, то

происходит увеличение изменения мощности  $\langle P(\tau) \rangle$  при одновременном увеличении частоты изменения. На рис. 4 представлена зависимость энергии взаимодействия  $\Delta W(\tau)$  от времени при  $y_0 = 2,2$ . В начальные моменты времени ансамбль поглощает. В дальнейшем происходит фазовая группировка, сопровождающаяся индуцированным излучением в течение определенного интервала времени.

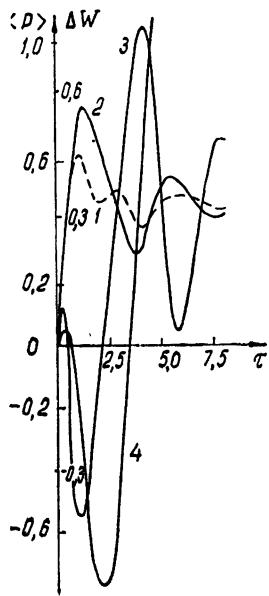


Рис. 4. Зависимость мощности взаимодействия  $\langle P(\tau) \rangle$  и энергии взаимодействия  $\Delta W$  от времени  $\tau$  при  $\beta=0,316$ ,  $\delta=0,7$   
(1+3. —  $\langle P(\tau) \rangle$ ; 1. —  $y_0=1$ ; 2. —  $y_0=1,2$ ; 3. —  $y_0=2,2$ ;  
4. —  $\Delta W(\tau)$ ,  $y_0=2,2$ ).

С увеличением  $y_0$  энергия взаимодействия начинает пульсировать, принимая последовательно положительные и отрицательные значения. Возникновение пульсаций сопровождается уменьшением индуцированного излучения. Например, при  $y_0 = 6$  энергия взаимодействия, интенсивно пульсируя, достигает максимального отрицательного значения

$\Delta W(\tau) = 0,3$  при  $\tau = 2,7$ . Это значение меньше энергии взаимодействия в максимуме в отсутствие пульсаций при  $y_0 = 2,2$  ( $\Delta W(\tau) \approx 0,6$ , рис. 4). Таким образом, существуют оптимальные значения начальной амплитуды, при которых энергия взаимодействия максимальна.

Рассмотрим изменение мощности взаимодействия при учете начального разброса амплитуд осцилляторов ансамбля. На рис. 5 приведены данные оценочного расчета для ансамбля двадцати осцилляторов с начальными амплитудами, отличающимися на значение  $\Delta y_0 = 0,01; 0,03; 0,05$  при среднем значении  $\bar{y}_0 = 3$  ( $\delta = 0,7$ ,  $\beta = 0,316$ ).

Начальные фазы по-прежнему были заданы через равный интервал  $2\pi/N$ , причем фаза каждого осциллятора выбиралась случайным образом, используя машинную программу вычисления квазислучайных чисел. Учет разброса начальных амплитуд приводит к существенному изменению мощности взаимодействия. Максимальное значение энергии взаимодействия, вычисленное в случае  $\Delta y_0 = 0,05$ , равно 0,05.

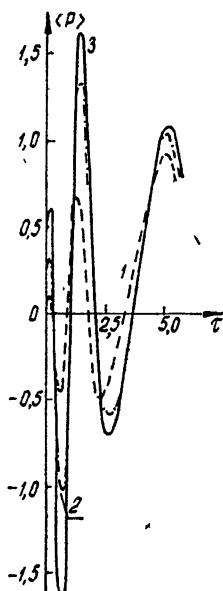
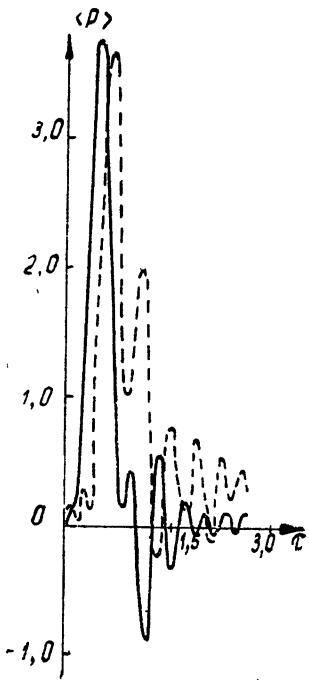


Рис. 5. Зависимость мощности взаимодействия  $\langle P \rangle$  от времени  $\tau$  при  $\beta=0,316$ ,  $\delta=0,7$ ,  $\bar{y}_0=3$   
(1.— $\Delta y_0=0,1$ ; 2.— $\Delta y_0=0,03$ ; 3.— $\Delta y_0=0,05$ ).

Если начальная амплитуда  $y_0 > \sqrt{\delta}$ , но не достаточно велика, то существует режим фазовой группировки при прохождении через резонанс при отсутствии вынужденного излучения. На рис. 6 представлен график изменения мощности взаимодействия во времени, полученный в случае  $\delta = 10$ ,  $y_0 = 3,74$  для двух значений  $\beta$ , равных  $0,448$  ( $\delta > 1/\beta^2$ ) и  $0,316$  ( $\delta = 1/\beta^2$ ). Фазовая группировка при прохождении через резонанс сопровождается поглощением энергии. Наблюдается один главный пик поглощения. По мере уменьшения потерь (уменьшения  $\beta$ ) пик становится изрезанным. Если начальные условия выбраны так, что прохождения через резонанс нет ( $y_0 < \sqrt{\delta}$ ), то фазовая группировка мала, мощность взаимодействия колеблется около нуля, затухая по амплитуде. В среднем ансамбль поглощает энергию.

Рис. 6. Зависимость мощности взаимодействия  $\langle P \rangle$  от времени  $\tau$  при  $\delta=10$ ,  $y_0=3,7$   
(1.— $\beta=0,448$ ; 2.— $\beta=0,316$ ).



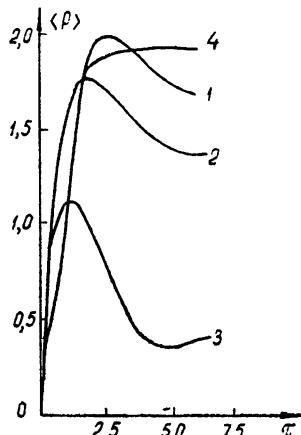
Фазовая группировка в ансамбле осцилляторов с большими потерями  $\beta \gg 1$  значительно ослаблена и уменьшается с увеличением  $\beta$ . На рис. 7 даны результаты расчета вариантов  $\beta = 0,71$  и  $\beta = 10$ . В ансамбле почти линейных осцилляторов  $\beta = 10$  зависимость  $\langle P(\tau) \rangle$  представляет собой экспоненту. Происходит возбуждение вынужденных колебаний. Собственные колебания затухают. При  $\beta = 0,71$  нелинейность уже заметно сказывается, на рис. 7 виден пик, обусловленный фазовой группировкой в ансамбле. Мощность взаимодействия при всех  $y_0$  положительна.

Пользуясь соотношениями (7) между параметрами осцилляторов, можно перейти от параметров  $\delta$  и  $\beta$  к параметрам расстройки  $\Delta$ , поглощения  $b$ , нелинейности  $a$  и к амплитуде внешней силы  $\xi$ . Оказывается, существует такое соотношение между параметрами, что при одном и том же значении  $\Delta$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $y_0$  по мере увеличения амплитуды силы  $\xi$  осуществляется переход от режима поглощения, характеризуемого кривой рис. 6, к режиму оптимального отрицательного поглощения, характеризуемого рис. 4. В этом случае осцилляторы передают энергию во внешнюю систему при достаточно большой амплитуде действующей силы. Особенностью устройств, использующих подобные ансамбли, может быть жесткий режим возбуждения.

Таким образом, в ансамбле возбужденных нелинейных осцилляторов с собственны-

Рис. 7. Зависимость мощности взаимодействия  $\langle P \rangle$  от времени  $\tau$  при  $\delta=2$

(1. —  $\beta=0,71$ ,  $y_0=2,24$ ; 2. —  $\beta=0,71$ ,  $y_0=1,41$ ; 3. —  $\beta=0,71$ ,  $y_0=0,7$ ; 4. —  $\beta=10$ ,  $y_0=2,24$ ).



ми потерями под действием внешней гармонической силы происходит фазовая группировка осцилляторов и возникает индуцированное колебание.

Величина и знак мощности взаимодействия зависят от значений безразмерных параметров  $\delta$ ,  $\beta$  и начальной амплитуды  $y_0$ . Отрицательное поглощение существует при  $\beta \ll 1$ ,  $y_0 > \sqrt{\delta}$ . Максимальное значение энергии, передаваемое во внешнюю систему, достигается при  $\delta$ , лежащих в интервале от 10 до 50. Индуцированное излучение ансамбля осцилляторов с потерями ( $\beta \neq 0$ ) может быть больше индуцированного излучения ансамбля осцилляторов без потерь.

Переход от режима поглощения к режиму индуцированного излучения возможен путем увеличения амплитуды силы, действующей на ансамбль.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
2. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлов, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, 2, 430 (1965).
3. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, Пер. под ред. О. В. Богданевича и О. Н. Крохина, изд. Мир, М., 1966.
4. И. И. Собельман, И. В. Тютин, УФН, 79, 596 (1963).

5. J. Schneider, Phys. Rev. Lett., 2, 504 (1959).
6. J. Schneider, Zs. Naturforschung, 15a, № 5—6, 484 (1960).
7. J. M. Wachtel, J. L. Hirshfield, Phys. Rev. Lett., 19, № 6, 293 (1967).
8. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
5 июня 1967 г.

## THE EFFECT OF THE EXTERNAL FORCE ON A CLASSICAL ENSEMBLE OF EXCITED OSCILLATORS WITH SELF LOSSES

*V. I. Kanavets, A. Yu. Stabinis*

The change of the amplitudes and phases of excited nonlinear oscillators with a quadratic nonlinearity and self-losses affected by the harmonic force is investigated. The characteristics of induced oscillations in the ensemble of the oscillators with arbitrary initial phase and equal initial amplitudes are studied. The conditions are found under which the energy transmission from oscillators to the external field is realized.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164

### К РЕДУКЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОМ С БОЛЬШОЙ БАЗОЙ

*В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, А. Г. Кунцевич, В. С. Лазаревский*

Исследования углового размера и структуры ряда источников радиоизлучения требуют применения угломерных инструментов с высоким разрешением. Для этой цели широко используются радиоинтерферометрические системы, угловая разрешающая способность которых определяется соотношением  $\lambda/S$ , где  $\lambda$  — длина волны принимаемого излучения,  $S$  — расстояние между антеннами интерферометра. Редукция наблюдений интерферометром (см., например, [1, 2]), дает возможность получить пространственное распределение радиояркости по источнику. Для этого необходимо такое формирование пространственных характеристик антенной системы интерферометра, которое позволило бы получить спектр пространственных частот радиоизлучения и путем обратного фурье-преобразования — исследовать угловую структуру источника излучения.

При малом расстоянии между антennами для определения пространственной частоты и положения плоскости лепестка диаграммы направленности достаточно знание расстояния между антеннами, которое может быть непосредственно измерено, и положения источника относительно центра антенной системы интерферометра или одной из его антенн. Однако при большом расстоянии между антеннами ошибка из-за такого приближенного задания взаимного положения источника излучения и антенной системы может оказаться больше разрешающей способности интерферометра. В связи с этим для того, чтобы полностью реализовать возможности интерферометра, необходимо точное задание взаимного положения антенн и источника.

В настоящей работе пространственные характеристики антенной системы радиоинтерферометра выражаются по известным географическим координатам пунктов расположения антенн. Общее задание диаграммы направленности может быть записано (см., например, [1, 2]) в виде

$$A(\Theta) = A_0 A_1(\Theta) 4 \cos^2 \frac{\pi x(\Theta)}{\lambda},$$

где  $x(\Theta)$  — разность хода лучей от исследуемой точки пространства до различных антенн радиоинтерферометра,  $A_0$  — нормирующий множитель,  $A_1(\Theta)$  — диаграмма направленности одиночной антенны.

Величина  $x(\Theta)$ , где  $\Theta$  определяет направление на исследуемую точку источника излучения, может быть найдена как разность проекций радиусов Земли  $r_1$  и  $r_2$ , проходящих через пункты расположения антенн с координатами  $\varphi_1, \Delta_1$  и  $\varphi_2, \Delta_2$  на радиус, проходящий через «географическое место» исследуемой точки источника. «Географическое место» — точка Земли, в которой источник находится в зените и которая определяется координатами  $\varphi_s = \delta$ ,  $\Delta_s = \alpha + s_{\text{гр}}$ , где  $\delta$  — склонение элементарного источника,  $\alpha$  — его прямое восхождение,  $s_{\text{гр}}$  — звездное гринвичское время. По формулам сферической тригонометрии [3] находим

$$x = r_1 \cos \gamma_1 - r_2 \cos \gamma_2,$$

где

$$\cos \gamma_1 = \sin \varphi_1 \sin \delta + \cos \varphi_1 \cos \delta \cos (\Delta_1 - \alpha + s_{\text{гр}}),$$

$$\cos \gamma_2 = \sin \varphi_2 \sin \delta + \cos \varphi_2 \cos \delta \cos (\Delta_2 - \alpha + s_{\text{гр}}).$$

Диаграмма направленности интерферометра по источнику записывается в виде

$$A(\delta, \alpha) = A_0 A(\delta_0 - \Delta \delta, \alpha_0 - \Delta \alpha) 4 \cos^2 \frac{\pi x(\delta_0 - \Delta \delta, \alpha_0 - \Delta \alpha, D)}{\lambda},$$

где  $\alpha_0$  и  $\delta_0$  — координаты геометрического центра «видимой» поверхности источника излучения,  $D$  — московское время соответствующей календарной даты.

Положение плоскости лепестка диаграммы направленности определяется по положению равносигнальной зоны

$$x(\alpha, \delta) = \text{const.}$$

При слежении антенн за источником пространственные характеристики антенной системы по источнику определяются только значениями

$$\frac{x}{\lambda}(\alpha, \delta, D).$$

Приведенные выше вычисления позволяют исследовать изменения  $x$  за счет суточного вращения Земли для каждого конкретного источника и использовать эти изменения для получения радиоизображения источника.

На рис. 1 в качестве примера приведены зависимости во времени изменения разности ( $x$ ) для различных источников и различных ориентаций антенной системы. На рис. 2 представлены изменения положения плоскости лепестков диаграммы направленности интерферометра по источнику.

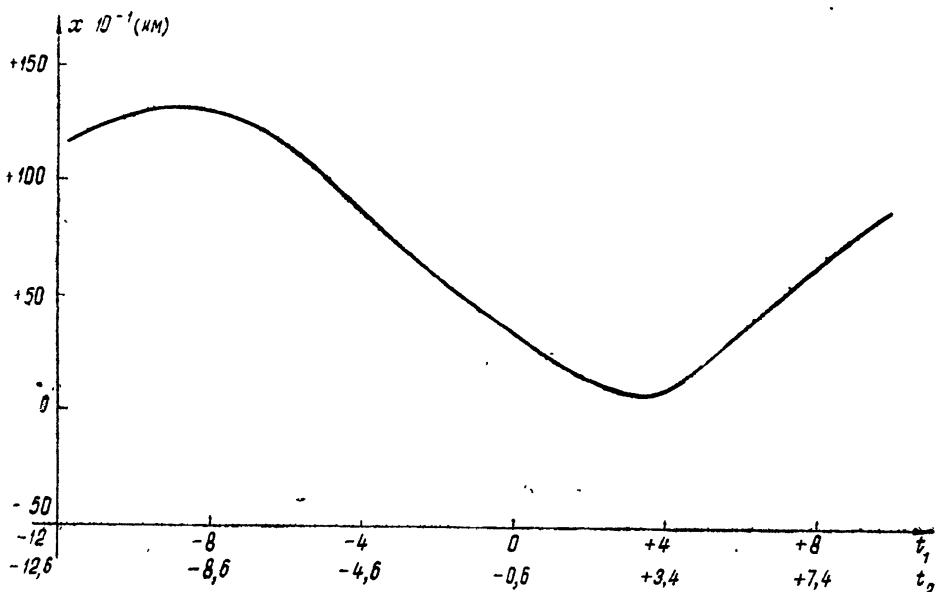


Рис. 1. Суточное изменение разности хода ( $x$ ) от источника до антенн интерферометра. Источник Кассиопея; координаты антенн  $\varphi_1 = 56^{\circ}09,6'$ ,  $\Delta_1 = 2^{\circ}57,1'$ ,  $\varphi_2 = 44^{\circ}55,9'$ ,  $\Delta_2 = 2^{\circ}20,9'$ ;  $t_{1,2}$  — часовой угол источника для данной антенны.

Пространственная частота может быть определена по графику  $x(t)$  путем измерения интервала времени  $T$  при изменении  $x$  на величину  $\Delta x = \lambda$ , т. е.

$$x(t_0) - x(t_0 + T) = \lambda,$$

и определения соответствующего этому интервалу времени углового смещения источника.

Величина  $\left(\frac{dx}{dt}\right) f_0/c = f_u$ , где  $f_0$  — частота принимаемого излучения,  $c$  — скорость света, является частотой интерференции сигналов излучения, принимаемых антеннами интерферометра.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Радзиевскому за ценную консультацию.

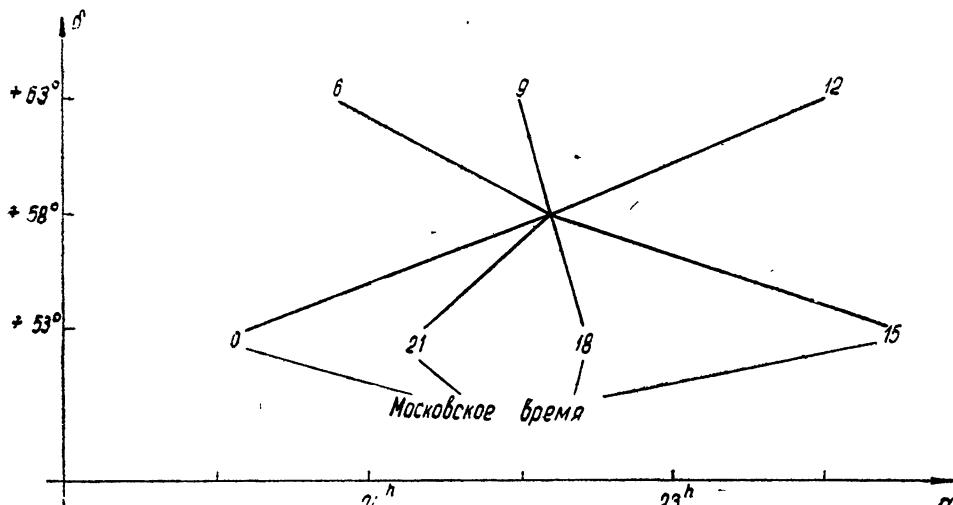


Рис. 2. Суточное изменение положения плоскости лепестка диаграммы направленности радиоинтерферометра по источнику.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Балклав, Изв. АН Латвийской ССР, № 3, 45 (1962).
2. А. Е. Балклав, Изв. АН Латвийской ССР, № 4, 47 (1964).
3. Д. В. Плясковский, Курс сферической астрономии, изд. Киевского ун-та, 1964.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 декабря 1967 г.

УДК 538.574.4 : 621.371.255

#### РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПУЛЬСАЦИЯХ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

*В. Г. Маханьков, Д. М. Сахокия, В. Н. Цытович*

Распространению электромагнитных волн в турбулентной среде посвящен ряд работ (см., например, [1, 2]). В этих работах, в основном, рассматривалось рассеяние на крупномасштабных турбулентностях, подчиняющихся закону Колмогорова. В данной работе исследуется рассеяние высокочастотных электромагнитных волн на волновых мелкомасштабных турбулентностях, обусловленных наличием в плазме электромагнитных полей и характеризуемых обширным набором различных волновых чисел. В частности, рассматривается взаимодействие высокочастотных электромагнитных волн со специфическими колебаниями, существующими в области частых соударений, которое ранее не учитывалось. Заметим, что рассеяние электромагнитных волн на мелкомасштабных турбулентностях в хромосфере без учета столкновений рассматривалось в [3].

1. В работе [4] обсуждались эффекты нелинейных взаимодействий продольных волн с учетом парных соударений и получены общие выражения для нелинейных поляризаций второго ( $S_1(k_-, k_1, -k_2)$ ;  $S_2(k_1, k_2, k_-)$ ) и третьего порядков ( $\Sigma(k_1, k_2, k_-, -k_2)$  и  $\Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1)$ ) при условии (здесь и в дальнейшем обозначения [4])

$$|\omega - k_- v_{T_\alpha}| \ll v_\alpha \ll |\omega_{1,2} - k_{1,2} v_{T_\alpha}| \quad (\alpha = e, i). \quad (1)$$

Полученные в [4] нелинейные токи позволяют рассчитывать и анализировать нелинейные взаимодействия высокочастотных колебаний и низкочастотных гидродинамических  $\omega_- \ll v_e, v_i$  волн. Такие взаимодействия представляют интерес для многих астро-

физических проблем, так как позволяют судить о взаимной связи плазменной и гидродинамической турбулентностей.

Целью настоящей работы является обобщить полученные результаты для взаимодействия поперечных волн с продольными и поперечными с поперечными и рассмотреть, в частности, вопрос о рассеянии поперечных волн на низкочастотной гидродинамической турбулентности.

Ограничимся случаем, когда виртуальная волна является продольной. С одной стороны, такой процесс доминирует над взаимодействием через поперечную виртуальную волну [5]. С другой стороны, те же нелинейные токи описывают эффекты распада взаимодействий поперечных и акустических гидродинамических волн. Легко видеть, что в этом случае возникает свертка  $S_{1l}$  и  $S_{2l}$  с продольными ортами  $k_{-l}/|k_-|$ . Это показывает, что можно воспользоваться найденными в [4] решениями для  $V_k^{(1)}$  и следует уточнить лишь выражение для токов через  $V_k^{(1)}$ . В результате получим следующие выражения для поляризаций второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{k_{-l}}{|k_-|} S_{1jl}(k_-, k_1, -k_2) &= -i \frac{1,71 |k_-| n_0 e^3 v_e}{m_e^2 \omega_1 \omega_2 \Omega \Omega_e} \delta_{jl}, \\ S_{1jl}(k_1, k_2, k_-) \frac{k_{-l}}{|k_-|} &= \frac{i e^3 n_0 |k_-|}{m_e^2 \omega_1 \omega_2 \omega_e} \delta_{lj}. \end{aligned} \quad (2)$$

При вычислении  $\Sigma_{1ls}$  возникает  $n_{k_-}^{(2)} = (k_- V_k^{(2)})/\omega_-$ , т. е. опять лишь продольная компонента  $V_k^{(2)}$ . Это позволяет воспользоваться полученным в [4] выражением для  $V_k^{(2)}$ , уточняя лишь связь  $j_k^{(2)}$  с  $V_k^{(2)}$ .

В результате находим

$$\frac{1}{2} [\Sigma(k_1, k_2, k_1, -k_2) + \Sigma(k_1, k_2, -k_2, k_1)] = \frac{1,71 n_0 e^4 k_-^2 v_e}{\omega_- m_e^3 \omega_1^2 \omega_2 \Omega \Omega_e} \delta_{lj} \delta_{ls}.$$

Свертывая с одним продольным и одним поперечным ортом  $e_{k_1}^t$ , получим, что формулы взаимодействия продольных и поперечных волн отличаются от формул взаимодействия продольных волн между собой заменой  $(k_1 k_2)^2/k_1^2 k_2^2$  на  $(k_1 e_{k_1}^t/k_1)^2$ . Последний коэффициент после усреднения по поляризациям имеет вид  $[k_1 k_2]^2/k_1^2 k_2^2$ . Аналогично для взаимодействия поперечных волн с поперечными вместо  $(k_1 k_2)^2/k_1^2 k_2^2$  получаем после усреднения по поляризациям

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right).$$

2. В качестве примера рассмотрим рассеяние поперечных волн на акустических колебаниях\*. Как нетрудно показать, взаимодействие акустических и поперечных волн носит характер рассеяния при выполнении следующего неравенства

$$k_s v_{\text{гр}} \gg v_e \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^2, \quad (3)$$

где  $k_s$  — волновое число акустических колебаний,  $v_{\text{гр}}$  — групповая скорость поперечных волн ( $v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ ,  $\omega$  — частота поперечных волн),  $\omega_{0e}$  — электронная ленгмюровская частота.

Условие (3) вытекает из возможности записать знаменатели типа  $[\omega_k - \omega_{k-k_1} + \omega_s]^{-1}$  через  $\delta(\omega_k - \omega_{k-k_1} + \omega_s)$ , что выражает законы сохранения при рассеянии.

При этом можно воспользоваться общими выражениями для вероятностей рассеяния  $w_{k', k, k_s}$  [7]:

$$w_{k', k, k_s} = 4\pi (2\pi)^6 \left| e_{ik}^t S_{1jl}(k', k, k_s) \frac{k_{sl}}{|k_s|} e_{jk}^t \right|^2 \quad (4)$$

\* Акустическими колебаниями мы называем звуковые колебания в области  $\omega_s \ll v_e, v_i$  ( $\omega_s$  — частота акустических колебаний), которые могут существовать и в изотермической плазме. Подробно см. [6].

$$\times \frac{\omega^2}{\frac{\partial}{\partial \omega'} [\omega'^2 \epsilon(k', \omega')] \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon(k, \omega)] \frac{\partial}{\partial \omega_s} [\epsilon^s(k_s, \omega_s)]},$$

где  $e_k^t$ ,  $e_k^t$  — соответственно орты рассеянной и рассеиваемой поперечных волн. Используя формулы (2), (4) и выражения для коэффициента диффузии (об общих формулах диффузного и упругого рассеяния см [8])

$$D_{ij} = \int \frac{dk_s}{(2\pi)^3} k_{si} k_{sj} w_{k', k, k_s} N_{k_s}^s \delta(\omega_s - k_s v_{rp})$$

(где  $N_{k_s}^s$  — плотность числа квантов  $s$ ), получим оценку характерного обратного времени диффузного рассеяния на угол порядка единицы:

$$\gamma \sim \frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{\omega^2} \sim \frac{W^s}{n_0 m_e v_{T_e}^2} \frac{T_e}{T_i} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^4 \frac{k_s}{k} \frac{\omega_{0e}}{1 + T_e/T_i} \quad (5)$$

при  $\omega_s \gg k_s^2 v_{T_e}^2 / \nu_e$  («низкочастотный» акустический звук [3]) и

$$\gamma \sim \frac{1}{\tau} \sim \frac{D}{\omega^2} \sim \frac{W^s}{n_0 m_e v_{T_e}^2} \frac{T_e}{T_i} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^4 \frac{k_s}{k} \frac{\omega_{0e}}{5/3 + T_e/T_i} \quad (6)$$

при  $\omega_s \ll k_s^2 v_{T_e}^2 / \nu_e$  («высокочастотный» акустический звук [6]). Здесь  $W^s$  — плотность энергии акустических квантов.

Если рассеяние диффузное, неравенство (3) в «низкочастотной» области принимает вид  $\omega_{0e} \gg ck \gg \omega_{0e}(v_{T_e}/c) \sqrt{m_l/m_e}$  или  $v_{T_e}/c \ll \sqrt{m_e/m_l}$ , если  $\omega \approx \omega_{0e}$ , и  $v_{T_e}/c \ll \sqrt{m_e/m_l} (\omega/\omega_{0e})^2$ , если  $\omega \approx ck$ . Аналогично, в «высокочастотной» области  $\omega_{0e} \gg ck \gg \omega_{0e}(v_{T_e}/c)$  при  $\omega \approx \omega_{0e}$  и  $(v_{T_e}/c) \ll (\omega/\omega_{0e})^2$  при  $\omega \approx ck$ , что всегда выполняется.

Оценим теперь обратное время при однократном рассеянии на угол порядка единицы ( $k_s \sim k$ ):

$$\gamma \sim \int \gamma(n, n') dn' \sim \frac{W^s}{n_0 m_e v_{T_e}^2} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^3 \omega_{0e} \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{1 + (T_e/T_i)} \quad (7)$$

— в «низкочастотной» области при  $\omega \approx ck$ ,

$$\gamma \sim \int \gamma(n, n') dn' \sim \frac{W^s}{n_0 m_e v_{T_e}^2} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^3 \omega_{0e} \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{5/3 + T_e/T_i} \quad (8)$$

— в «высокочастотной» области при  $\omega \approx ck$ .

Условие (3) для однократного рассеяния в «низкочастотной» области принимает вид  $N_{D_e} \ll c^2 m_e v_{T_e}^2 m_l$  при  $\omega \approx \omega_{0e}$  и  $\nu_e/v_{T_e} > k_s > \omega_{0e}/c$  или  $N_{D_e} \ll c/v_{T_e}$  — при  $\omega \approx ck$ . В «высокочастотной» области  $N_{D_e} \ll c^2/v_{T_e}^2$ , если  $\omega \approx \omega_{0e}$ , и  $N_{D_e} \ll c/v_{T_e}$ , если  $\omega \approx ck$ . Здесь  $N_{D_e}$  — количество электронов в дебаевской сфере.

Полученные формулы представляют интерес для астрофизических приложений. Рассеяние на ионозвуковых колебаниях может происходить на фронтах волн, где выполнено условие неизотермичности  $T_e \gg T_i$ . Рассмотренный здесь эффект рассеяния возможен и в изотермической плазме.

Кроме того, интенсивность гидродинамической турбулентности может быть в ряде случаев определена по результатам наблюдений. Такова, например, ситуация для гидродинамической турбулентности Солнца. Поэтому полученные результаты представляют интерес для интерпретации экспериментальных данных по радиолокации Солнца.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
3. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Астрон. ж., 44, 1036 (1967).
4. В. Г. Маханьков, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 53, 1789 (1967).

5. В. Н. Цытович, УФН, 90, 435 (1966).
6. В. Г. Маханьков, В. Н. Цытович, ЖЭТФ (в печати).
7. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
8. Д. М. Сахокия, В. Н. Цытович, Ядерный синтез, 8, 241, 1968.

Тбилисский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 января 1968 г.

УДК 538.574.5 : 517

## К ВОПРОСУ О НАСЫЩЕНИИ КПУ В ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ

*Н. Т. Черпак, Я. Л. Шамфаров*

При оценке насыщающей мощности входного сигнала в КПУ (квантовый параметрический усилитель) обычно исходят из предположения о непрерывности мощности сигнала [1, 2]. Во многих практических случаях КПУ работает в качестве усилителя импульсных сигналов. В работе [3] приводятся некоторые экспериментальные данные по зависимости насыщающей мощности от длительности импульсов в КПУ бегущей волны, но, насколько нам известно, в литературе этот вопрос подробно не рассматривался.

Зависимость насыщающей мощности от длительности и периода следования импульсов можно найти из общего решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение во времени динамической разности населенности энергетических уровней активного вещества КПУ.

Рассмотрим трехуровневую систему. Пусть переход 2—3 будет сигнальным переходом, а мощность накачки насыщает уровни 1—3. Запишем кинетические уравнения для этой системы [4]:

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 (w_{ji} n_j - w_{ij} n_i) + \sum_{j=1}^3 W_{ij} (n_j - n_i) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь  $n_i$  — динамическая населенность  $i$ -го уровня,  $w_{ij}$  — вероятность релаксационных переходов с  $i$ -го на  $j$ -й уровень,  $W_{ij} = W_{ji}$  — вероятность индуцированных переходов между уровнями  $i$  и  $j$ . Мощность накачки предполагается большой, так что  $W_{13} \gg w_{ij}$ , и  $n_1 = n_3$ .

В приближении  $h\nu_3 \ll kT$  систему уравнений (1) можно свести к одному уравнению для  $\Delta n_{32} = n_3 - n_2$  ( $n_1 + n_2 + n_3 = N$ ):

$$\frac{d\Delta n_{32}}{dt} = -\frac{3}{2} (w_{32} + w_{12} + W_{32}) \Delta n_{32} + \frac{hN}{2kT} (w_{12}\nu_{21} - w_{23}\nu_{32}). \quad (2)$$

В случае воздействия непрерывного сигнала общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta n_{32}(t) = (\Delta n_{32}^0 - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}) \exp(-t/\tau) + \Delta n_{32}^{\text{стаци}}, \quad (3)$$

где  $\Delta n_{32}^0$  — разность населенностей рабочего перехода при  $t = 0$  ( $t = 0$  — начало действия сигнала);  $\Delta n_{32}^{\text{стаци}}$  — стационарная разность населенностей рабочего перехода, определяемая выражением [4]

$$\Delta n_{32}^{\text{стаци}} = \frac{hN}{3kT} \frac{w_{12}\nu_{21} - w_{23}\nu_{32}}{w_{23} + w_{12} + W_{23}},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3}{2} (w_{23} + w_{12} + W_{23}).$$

Для упрощения дальнейшего рассмотрения предположим, что  $w_{ij} = w$ , тогда

$$\Delta n_{32}^{\text{стаци}} = \frac{\Delta n_{32}^0}{1 + W_{23}/2w}. \quad (4)$$

Пусть на сигнальный переход воздействует последовательность импульсов длительностью  $t_u$  и с периодом следования  $T$ . В этом случае  $W_{23}$  является уже функцией времени.

$$W_{23} = \begin{cases} W_{23} = \text{const} \neq 0 & (nT \leq t < nT + t_u) \\ W_{23} = 0 & (nT + t_u < t < (n+1)T) \end{cases}$$

где  $n$  — число импульсов.

В течение времени действия первого импульса разность населенностей будет изменяться по закону (3) и в момент окончания импульса  $t_u$  будет равной

$$\Delta n_{32}(t_u) = (\Delta n_{32}^0 - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}) \exp(-t_u/\tau) + \Delta n_{32}^{\text{стаци}}. \quad (5)$$

В течение паузы, следующей за первым импульсом до прихода второго импульса,  $\Delta n_{32}$  увеличивается:

$$\Delta n_{32}(t) = \exp\left(-\frac{t-t_u}{T_1}\right) \left\{ \Delta n_{32}^0 \left[ \exp\left(\frac{t-t_u}{T_1}\right) - 1 \right] + \Delta n_{32}(t_u) \right\}.$$

Здесь  $T_1 \approx 1/3w$ . По истечении промежутка времени, равного периоду следования импульсов  $T$ ,  $\Delta n_{32}$  становится равной

$$\Delta n_{32}(T) = [\Delta n_{32}(t_u) - \Delta n_{32}^0] \exp\left(-\frac{T-t_u}{T_1}\right) + \Delta n_{32}^0.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \Delta n_{32}(t_u + T) &= [\Delta n_{32}(T) - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}] \exp(-t_u/\tau) + \Delta n_{32}^{\text{стаци}}, \\ \dots &\dots \\ \Delta n_{32}(nT) &= [\Delta n_{32}(t_u + (n-1)T) - \Delta n_{32}^0] \exp\left(-\frac{T-t_u}{T_1}\right) + \Delta n_{32}^0, \\ \Delta n_{32}(nT + t_u) &= [\Delta n_{32}(nT) - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}] \exp(-t_u/\tau) + \Delta n_{32}^{\text{стаци}}. \end{aligned}$$

Из приведенных выражений для разности населенностей в момент окончания импульсов получаем

$$\begin{aligned} \Delta n_{32}(nT + t_u) &= (\Delta n_{32}^0 - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}) \exp(-t_u/\tau) - (\Delta n_{32}^0 - \Delta n_{32}^{\text{стаци}}) \times \\ &\times (1 - \exp(-t_u/\tau)) \sum_{m=1}^n \exp\left[-m\left(t_u/\tau + \frac{T-t_u}{T_1}\right)\right] + \Delta n_{32}^{\text{стаци}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражения (6) можно получить зависимость насыщающей мощности в импульсном режиме от длительности и периода следования импульсов. Рассмотрим два случая: 1)  $T \gg T_1$ ; 2)  $T < T_1$ .

В первом случае на сигнальный переход воздействует мощность излучения в форме одиночного прямоугольного импульса. Определим насыщающую мощность импульса  $P_u$  как мощность, при воздействии которой на переход 2—3 динамическая разность населенностей в момент времени  $t_u$  становится равной

$$\Delta n_{32}(t_u) = \frac{\Delta n_{32}^0}{e}. \quad (7)$$

Из (5) с учетом (7) и (4) получим

$$t_u = \frac{2}{3(2w + W_{23})} \ln \frac{1 - 2/[2 + (W_{23}/w)]}{1/e - 2/[2 + (W_{23}/w)]}. \quad (8)$$

Имея в виду, что

$$\frac{P_u}{P_{\text{стаци}}} = \frac{W_{23}}{(W_{23})_{\text{стаци}}}, \quad (9)$$

из (8) можно определить зависимость  $P_u/P_{\text{стаци}} = F(t_u)$ . Здесь  $P_{\text{стаци}}$  — непрерывная мощность, при которой

$$\Delta n_{32}^{\text{стаци.}} = \frac{\Delta n_{32}^0}{e}. \quad (10)$$

Из равенства (4) установим соотношенис между вероятностями релаксационных и индуцированных переходов:

$$(W_{3,3})_{\text{стаци}} = 2(e - 1) w. \quad (11)$$

Если  $T_1 \approx 1/3w$ , то (8) и (9) приводят к выражению

$$\frac{t_u}{T_1} = \frac{1 - \ln(1 - P_{\text{стаци}}/P_u)}{1 + (e - 1) P_u/P_{\text{стаци}}}. \quad (12)$$

Зависимость  $F(t_u)$ , определенная с помощью (12), представлена на рис. 1. Из рисунка видно, что при длительности  $t_u \ll T_1$  мощность насыщения значительно превосходит ее стационарное значение.

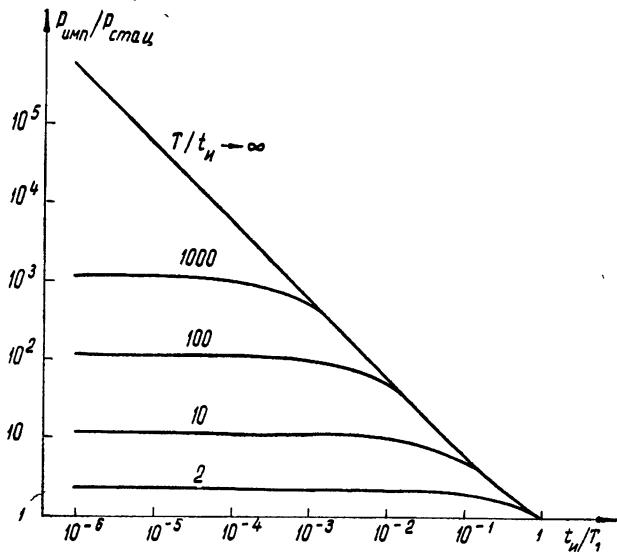


Рис. 1. Зависимость относительной насыщающей мощности  $P_u/P_{\text{стаци}}$  от относительной длительности импульса  $t_u/T_1$  при различной скважности  $T/t_u$ .

При  $T < T_1$  насыщающую мощность определим как мощность импульсов, при действии которых на переход 2—3 динамическая разность населенностей падает за время  $t_{\text{нас}}$  до значения

$$\Delta n_{3,2}(t_{\text{нас}}) = \frac{\Delta n_{3,2}^0}{e}, \quad (13)$$

где  $t_{\text{нас}} = nT + t_u$  удобно положить равным  $T_1 (t_{\text{нас}} = T_1)$ . С учетом (13), (4), (9) и (11), из выражения (6) нетрудно получить

$$\frac{y - e}{y - 1} = \exp\left(-y \frac{t_u}{T_1}\right) + \left[1 - \exp\left(-y \frac{t_u}{T_1}\right)\right] \sum_{m=1}^n \exp\left[-m\left(y + \frac{T}{t_u} - 1\right) \frac{t_u}{T_1}\right], \quad (14)$$

где  $y = 1 + (e - 1) P_u/P_{\text{стаци}}$ .

Трансцендентное уравнение (14) использовалось для определения зависимости  $P_u/P_{\text{стаци}} = F(t_u)$  на ЭВМ при заданных значениях параметра  $T/t_u$ . Полученные данные приведены на рис. 1. Как видно из графика, при конечном отношении  $T/t_u$  и при  $T < T_1$  зависимость  $P_u/P_{\text{стаци}} = F(t_u)$  значительно слабее, чем в случае  $T \gg T_1$ . Кроме того, из графика видно, в каких пределах изменения  $t_u/T_1$  выполняется соотношение  $P_u/P_{\text{стаци}} \approx T/t_u$ .

В заключение авторы выражают благодарность Е. М. Гацопольскому за полезное обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Карлов, Ю. П. Пименов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 6, 410 (1961).
2. А. Сигмен, Мазеры, изд. Мир, М., 1966.
3. S. B. Adler, Electronics, A Mc Grow-Hill Publication, 40, 115 (1967).
4. N. Bloembergen, Phys. Rev., 104, 324 (1956).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
3 июня 1968 г.

УДК 621.378.56

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В РАСХОДЯЩИХСЯ ПУЧКАХ

A. C. Гурвич

Флуктуации логарифма интенсивности (уровня) света, возникающие при распространении в турбулентной атмосфере, рассчитаны Татарским [1] для двух предельных случаев, неограниченной плоской и сферической волн. В [1] показано, что дисперсия уровня  $\sigma^2$  на приемном конце статистически однородной трассы длиной  $z$  равна  $\sigma^2 = KC_n^2 k^{7/6} z^{11/6}$ , где  $C_n$  — структурная постоянная поля показателя преломления,  $k$  — волновое число. Коэффициент  $K = 1,23$  — для плоской и  $K = 0,496$  — для сферической волн. Это выражение для  $\sigma^2$  справедливо при условиях  $\sigma^2 < 1$  и  $z^{1/2} k^{-1/2} \gg l_0$ , где  $l_0$  — внутренний масштаб турбулентности; в приемном слое  $l_0 \approx 0,1 - 1$  см.

Во всех экспериментах по исследованию распространения света от оптических квантовых генераторов (ОКГ) в атмосфере не осуществляются предельные типы волн, рассмотренные в [1]. Поэтому представлялось целесообразным рассчитать дисперсию уровня на оси пространственно-ограниченного расходящегося пучка света, излучаемого ОКГ, при распространении в атмосфере. Для расчета оказалось возможным использовать общие формулы, полученные Шмельцером [2], который применил метод плавных возмущений Рытова—Обухова для анализа распространения «ограниченного» пучка мнохроматического излучения

«Ограниченнный» пучок на входе в турбулентную среду задается комплексной амплитудой волны  $u(x, y, z)$ , равной

$$u(x, y, z)|_{z=0} = \exp\left(-\frac{p^2}{2a_0^2} + \frac{ikp^2}{2R}\right) = \exp\left(-\frac{p^2}{2a^2}\right), \quad (1)$$

где ось  $z$  совпадает с осью пучка,  $p^2 = x^2 + y^2$ ,  $a_0$  — эффективный радиус пучка,  $a^{-2} = a_0^{-2} - ikR^{-1}$ ,  $R$  — радиус кривизны фазового фронта;  $R > 0$  соответствует расходящемуся пучку,  $R = \infty$  — коллимированному. Граничное условие (1), по-видимому, хорошо описывает волны, выходящие из ОКГ при работе в режиме осевых мод. В случае невозмущенной среды, не содержащей неоднородностей, амплитуда волны  $u_0$  на расстояниях  $z \gg a_0 \gg k^{-1}$  равна

$$u_0(x, y, z) = -i \frac{k a^3}{Z} \exp(-k^2 a^2) \exp\left[ik\left(z + \frac{p^2}{2Z}\right)\right], \quad (2)$$

где  $Z = z - ik^2 a^2$ .

Для расчета дисперсии уровня при распространении в турбулентной атмосфере можно принять, что показатель преломления  $n$  является случайной функцией координат:  $n = \langle n \rangle + n_1$ , где  $\langle n \rangle \approx 1$ ,  $n_1 \ll 1$ . Полагая амплитуду волны  $u(x, y, z) = \exp[i\psi(x, y, z)]$ , будем искать комплексную фазу  $\psi$  в виде ряда  $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ , причем  $\psi_0 = \ln u_0$ . Следуя [1, 2], находим первое приближение  $\psi_1$ :

$$\psi_1(r) = 2k^2 \int n_1(r') \frac{u_0(r')}{u_0(r)} G(|r - r'|) d^3 r', \quad (3)$$

где  $G(r) = (4\pi r)^{-1} \exp(ikr)$  — функция Грина, которая в дальнейшем используется во френелевском приближении. Флуктуации логарифма амплитуды  $\chi$  в первом приближении равны  $\chi = \operatorname{Re} \psi_1$ , а поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то флуктуации уровня равны  $2\chi$ .

\* Здесь и далее угловые скобки  $\langle \rangle$  означают среднее.

Для расчета  $\sigma^2 = 4 \langle \chi^2 \rangle$ , следуя [1], удобно представить  $n_1(r')$  разложением в двумерный интеграл Фурье—Стильтьеса в плоскости  $z = \text{const}$ . Учитывая, что  $\sigma^2 = 2 \operatorname{Re} [\langle |\psi_1(0, 0, z)|^2 \rangle + \langle (\psi_1(0, 0, z))^2 \rangle]$ , можно легко вычислить значения  $\langle |\psi_1|^2 \rangle$  и  $\langle (\psi_1)^2 \rangle$ , используя локальную изотропность и однородность поля показателя преломления и свойства двумерных спектральных разложений корреляционных функций. Вычисления, аналогичные тем, что проводятся в [1] для нахождения вторых моментов случайной величины  $\psi_1$  для неограниченной плоской волны, приводят к следующему результату.

$$\sigma^2 = -8k^2\pi^2 \operatorname{Re} \int_0^z dz' \int_0^\infty x dx \Phi_n(x) \exp[x^2\gamma(z, z')] \{ \exp[x^2\gamma(z, z')] - \exp[x^2\gamma^*(z, z')] \}, \quad (4)$$

где  $\gamma(z, z') = (z - z')Z'(2ikZ) - 1$ ,  $\Phi_n(x)$  — трехмерная спектральная плотность поля показателя преломления. Формула (4) справедлива при  $z \gg a_0 \gg k^{-1}$ .

Для наиболее часто встречающегося случая, когда  $L_0 \gg z^{1/2}k^{-1/2} \gg l_0$  ( $L_0$  — внешний масштаб турбулентности), в качестве  $\Phi_n(x)$  можно использовать степенной спектр  $\Phi_n(x) = AC_n^2 x^{-11/3}$ , соответствующий «закону 2/3» Колмогорова—Обухова ( $A=0,033$ ). При подстановке этого спектра в (4) получаем

$$\sigma^2 = 4k^2\pi^2 AC_n^2 \frac{6}{5} \Gamma(1/6) \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z [-2\gamma(z, z')]^{5/6} dz' - \int_0^z [-(\gamma(z, z') + \gamma^*(z, z'))]^{5/6} dz' \right\}. \quad (5)$$

Подставляя далее значения  $\gamma(z, z')$  в (5) и вводя замену переменных  $z_0 = z' z^{-1}$ , находим

$$\sigma^2 = K(X, B) C_n^2 k^{7/6} z^{11/6}, \quad (6)$$

где

$$K(X, B) = \frac{24}{5} \pi^2 A \Gamma \left( \frac{1}{6} \right) \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{i(1-z_0)[z_0(X+iB^2)+1]}{X+1+iB^2} \right]^{5/6} dz_0 - \frac{3}{8} \frac{B^{5/3}}{[(1+X)^2+B^4]^{5/6}} \right\}$$

$B^2 = z/k a_0^2$ ,  $X = z/R$ . Смысл параметров  $B$  и  $X$  очевиден.  $B$  выражает радиус первой зоны Френеля в радиусах эффективной апертуры, а  $X$  дает расстояние от источника до точки наблюдения в радиусах кривизны фазового фронта на апертуре

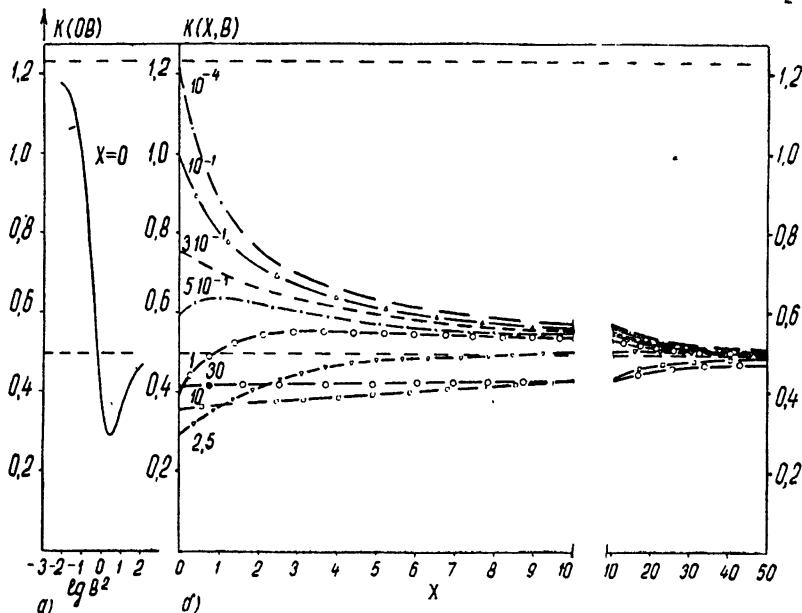


Рис. 1. а) Зависимость  $K(0, B)$  для коллимированного пучка [3];  
б) зависимость  $K(X, B)$  для расходящегося пучка.

Значения  $B^2 = z/k a_0^2$  — параметра семейства кривых — нанесены цифрами около каждой кривой.

Коллимированному пучку соответствует  $X = 0$ ; этот случай рассмотрен в [3]. Предельный переход к неограниченной плоской волне получается при  $B \rightarrow 0$ ; в этом случае  $X = 0$  и  $K(0,0) = 1.23$ . Переход к сферической волне имеет место при  $B \rightarrow \infty$  ( $K \rightarrow 0.496$ ). Для промежуточных значений  $X$  и  $B$  проведены численные расчеты коэффициента  $K(X, B)$ , результаты которых нанесены на график рис. 1. Из этого графика видно, что в зависимости от характера волны, излучаемой ОКГ, флюктуации интенсивности могут изменяться более чем в 4 раза. Это обстоятельство необходимо учитывать при интерпретации экспериментов по изучению флюктуаций излучения ОКГ в атмосфере.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. R. A. Schmeltzer, Quart. Appl. Mathem., 24, 339 (1967).
3. D. L. Fried, J. B. Seidman, J. Opt. Soc. Amer., 57, 181 (1967).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
5 июня 1968 г.

621.372 82.6

## УСРЕДНЕНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПО ПРИЕМНОЙ АПЕРТУРЕ

*A. И. Кон*

Если источник света находится в турбулентной среде или на небольшом расстоянии от турбулентного слоя, то падающую волну нельзя считать плоской и во всех расчетах следует учитывать ее сферичность. Представляющая практический интерес задача о падении волны, прошедшей турбулентный слой, на протяженный объектив решена в [1] только для плоской волны. В настоящей работе результаты [1] обобщаются на случай сферической волны.

Пусть на круглый объектив площадью  $\Sigma = \pi R^2$  падает прошедшая в неоднородной среде путь  $L$  сферическая волна от источника, находящегося на расстоянии  $x_0$  от турбулентного слоя. Если  $I(y, z)$  — интенсивность падающей волны в плоскости приемника, то полный световой исток через объектив равен

$$P = \iint_{\Sigma} I(y, z) dy dz. \quad (1)$$

Для флюктуаций  $P' = P - \langle P \rangle$  имеем, обозначая  $I' = I - \langle I \rangle$ ,

$$P' = \iint_{\Sigma} I'(y, z) dy dz. \quad (2)$$

Средний квадрат флюктуаций полного светового потока определяется формулой

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} B_I(y_1, z_1, y_2, z_2) dy_1 dz_1 dy_2 dz_2, \quad (3)$$

где  $B_I(y_1, z_1, y_2, z_2) = \langle I(y_1, z_1)I'(y_2, z_2) \rangle$ . Флюктуации интенсивности света сферической волны, вообще говоря, неоднородны в плоскости объектива, однако, поскольку продольный радиус корреляции имеет порядок длины трассы [2], легко показать, что внутри конуса с углом раствора  $\theta \ll 1$  флюктуации с высокой точностью можно считать однородными в плоскости объектива. Следовательно,  $B_I(y_1, z_1, y_2, z_2) = B_I(y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ . Ясно, что на практике условие  $\theta \ll 1$  хорошо выполняется, так как телесный угол, под которым виден приемный объектив из источника, обычно мал.

Используя однородность и изотропность корреляционной функции флюктуаций интенсивности  $B_I$  и проходя рассуждения, аналогичные приведенным в [1], можно получить для функции  $G(R)$ , представляющей собой отношение величины  $F(R) = \langle P'^2 \rangle / \langle P \rangle^2$  для протяженного приемника к такому же выражению для точечного приемника, следующую формулу:

$$G(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} b_I(\rho) \left[ \arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho, \quad (4)$$

где  $b_I(\rho) = B_I(\rho)/B_I(0)$  — коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности в сферической волне. Ясно, что величина  $G(R)$  характеризует уменьшение относительных флуктуаций полного светового потока через объектив в зависимости от его размера

Учитывая равенство  $I = A_0^2 \exp(2\chi)$ , где  $\chi = \ln(A/A_0)$ , и тот факт, что величина  $\chi$  распределена нормально, можно получить для случая  $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$  (т. е. в области применимости метода плавных возмущений [9]) следующее соотношение:

$$b_I(\rho) = \frac{B_\chi(\rho)}{\langle \chi^2 \rangle} \equiv b_\chi(\rho). \quad (5)$$

Здесь  $\langle \chi^2 \rangle$  — средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны;  $B_\chi$  — корреляционная функция флуктуаций логарифмов амплитуд в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей источник с приемником С помощью (5) формулу для  $G(R)$  можно переписать в виде

$$G(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} b_\chi(\rho) \left[ \arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho. \quad (6)$$

Для вычисления коэффициента корреляции  $b_\chi(\rho)$  можно воспользоваться корреляционными функциями флуктуаций комплексной фазы сферической волны  $\Psi_1 = \chi + iS_1$  ( $S_1 = S - \langle S \rangle$  — флуктуации действительной фазы). Для корреляционных функций комплексной фазы имеем\*

$$B_{\Psi\Psi} = \langle \Psi_1(x_0 + L, \rho_1) \Psi_1(x_0 + L, \rho_2) \rangle = -4\pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^\infty dz \times \\ \times z \Phi_n(z) \exp\left[-\frac{i z^2 x(x_0 + L - x)}{k(x_0 + L)}\right] J_0\left(\frac{z x}{x_0 + L} |\rho_1 - \rho_2|\right); \quad (7)$$

$$B_{\Psi\Psi^*} = \langle \Psi_1(x_0 + L, \rho_1) \Psi_1^*(x_0 + L, \rho_2) \rangle = +4\pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^\infty dz \times \\ \times z \Phi_n(z) J_0\left(\frac{z x}{x_0 + L} |\rho_1 - \rho_2|\right). \quad (8)$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя,  $\Phi_n(z)$  — трехмерный спектр флуктуаций коэффициента преломления.

Используя очевидное соотношение для корреляционной функции  $B_\chi = \operatorname{Re}(B_{\Psi\Psi} + B_{\Psi\Psi^*})/2$ , нетрудно найти

$$B_\chi(|\rho_1 - \rho_2|) \equiv B_\chi(\rho) = 2\pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^\infty \Phi_n(z) J_0\left(\frac{z x}{x_0 + L} \rho\right) \times \\ \times \left[1 - \cos \frac{z^2 x(x_0 + L - x)}{k(x_0 + L)}\right] z d z. \quad (9)$$

Подставляя корреляционную функцию (9) в выражение (6), получим для функции  $G(R)$

$$G(R) = \frac{8\pi k^2}{R^2 \langle \chi^2 \rangle} \int_0^{2R} \left[ \arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho \times \\ \times \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^\infty \Phi_n(z) \left[1 - \cos \frac{z^2 x(x_0 + L - x)}{k(x_0 + L)}\right] J_0\left(\frac{z x}{x_0 + L} \rho\right) z d z, \quad (10)$$

\* Формулы для корреляционных функций комплексной фазы были сообщены автору Ю. А. Кравцовым и З. И. Фейзуллиным.

где средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны

$$\langle \chi^2 \rangle = 2\pi^2 k^2 \int_{x_0}^{x_0+L} dx \int_0^\infty \Phi_n(x) \left[ 1 - \cos \frac{x^2 x(x_0+L-x)}{k(x_0+L)} \right] \chi d\chi. \quad (11)$$

Меняя порядок интегрирования в (10), можно вычислить интеграл по  $\rho$  [4]:

$$G(R) = \frac{8\pi^2 k^2 (x_0+L)^2}{R^2 \langle \chi^2 \rangle} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx}{x^2} \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi} \left[ 1 - \cos \frac{x^2 x(x_0+L-x)}{k(x_0+L)} \right] \times \\ \times J_1^2 \left( \frac{\chi R x}{x_0+L} \right) \Phi_n(\chi). \quad (12)$$

После подстановки спектра  $\Phi_n(\chi) = A C_n^2 \chi^{-11/3}$ , соответствующего «закону 2/3», и перехода к безразмерным переменным интегрирования  $\xi = x/L$  и  $y = \chi^2 L/k$  выражение (15) принимает вид

$$G(R) = \frac{4\pi^2 A C_n^2 k^{1/6} L^{17/6} \left(1 + \frac{x_0}{L}\right)^2}{R^2 \langle \chi^2 \rangle} \int_{x_0/L}^\infty d\xi \int_0^\infty \xi^{-2} y^{-17/6} \times \\ \times \left[ 1 - \cos \frac{\xi y (1+x_0/L-\xi)}{1+x_0/L} \right] J_1^2 \left( \frac{k^{1/2} R}{L^{1/2}} \frac{\xi y^{1/2}}{1+x_0/L} \right) dy. \quad (13)$$

Из формулы (13) предельным переходом  $x_0 \rightarrow \infty$  можно получить соответствующую формулу для плоской волны, при этом указанный предельный переход надо осуществлять и в выражении (14) для  $\langle \chi^2 \rangle$ .

Исследуем более подробно случай  $x_0 = 0$  (источник находится в турбулентной среде). Используя (11) и (13), в этом случае можно получить для функции  $G(R)$  следующую формулу:

$$G(R) = \frac{8\Gamma(11/3) \cos(\pi/12)}{\pi\Gamma(11/6)\alpha_R^2} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty y^{-17/6} \frac{1 - \cos[y\xi(1-\xi)]}{\xi^2} J_1^2(\alpha_R \xi y^{1/2}) dy, \quad (14)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $\alpha_R = k^{1/2} R / L^{1/2}$  — величина, характеризующая размер приемного объектива по сравнению с радиусом первой зоны Френеля для плоской волны на данном расстоянии  $L$ .

Результаты численного расчета функции  $G(R)$ , описывающей осредняющее действие объектива на флуктуации сферической волны, представлены на рис. 1.

Автор благодарен В. И. Татарскому за ценные советы и помощь в работе.

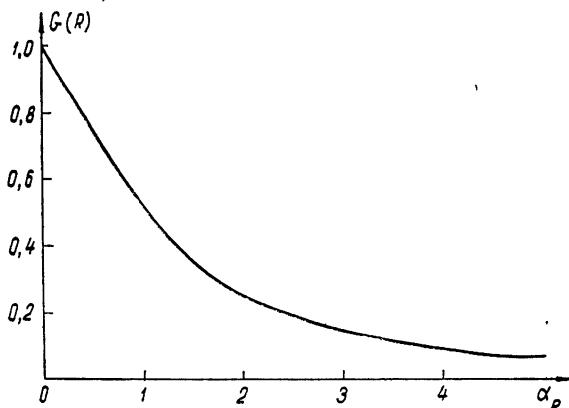


Рис. 1. Функция, описывающая усреднение флуктуаций сферической волны по приемной апертуре ( $\alpha_R = k^{1/2} R / L^{1/2}$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
3. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 2, 306 (1964).
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
22 апреля 1968 г.

УДК 621.391.244

## К ВОПРОСУ О СПЕКТРЕ РАДИОЧАСТОТНОГО СИГНАЛА

Ю. Э. Аптек

Развитие основных направлений радиоэлектроники (связь, телеуправление, радиолокация) поставило в последние годы вопрос о конкретной форме тонкой структуры спектров радиочастотных генераторов. Наибольшие трудности в решении этой задачи представляет определение спектра сигнала  $u(t)$  автогенератора, обусловленного флюктуациями его частоты:

$$u(t) = A_0 \cos [2\pi f_0 t + \varphi(t)]; \quad (1)$$

$$\varphi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t v(x) dx, \quad (2)$$

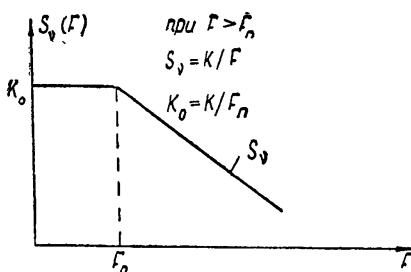
Здесь  $A_0$  — амплитуда сигнала,  $f_0$  — частота,  $v(t)$  — флюктуации частоты.

Как известно, в области низких частот ( $F$ ) флюктуации частоты генераторов обусловлены воздействием фликкер-шумов, вследствие чего спектр  $S_v(F)$  имеет вид

$$S_v(F) = \frac{K}{F^\alpha}, \quad (3)$$

где  $\alpha \approx 1$ , а уровень  $K$  может колебаться в широких пределах ( $10^{-8} \text{ Гц}^2 < K < 10^4 \text{ Гц}^2$ ).

Вследствие специфической формы спектра  $S_v(F)$  процессы  $v(t)$  и  $u(t)$  — нестационарны. Однако для некоторых важных приложений (см., например, [1]) представляется возможным рассматривать процесс  $v(t)$  как стационарный, со спектром  $S_v(F)$ , форма которого представлена на рис. 1 (в области частот  $0 < F < F_n$   $S_v = \text{const}$  а для  $F > F_n$   $S_v(F)$  определяется формулой (3))

Рис. 1. Спектр  $S_v(F)$ .

Согласно [2], имеем для составляющей спектра сигнала (1), обусловленной гауссовыми флюктуациями частоты (при нормировке  $A_0 = 1$ )

$$S_{uv}(f) = \int_0^\infty e^{-\xi(\tau)} \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $f = f_0 \pm F$ ,

$$\xi(\tau) = 2 \int_0^\infty \frac{S_v(F)}{F^2} \sin^2(\pi F \tau) dF. \quad (5)$$

Для формы  $S_v(F)$ , представленной на рис. 1,

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= |y(\tau)|, \\ y(\tau) &= K \left[ \frac{\pi\tau}{F_n} \operatorname{Si}(2\pi F_n \tau) - (\pi\tau)^2 \operatorname{Ci}(2\pi F_n \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi\tau}{2F_n} \sin(2\pi F_n \tau) - \frac{1}{2F_n^2} \sin^2(\pi F_n \tau) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (4) и (6), можно определить ширину спектральной линии  $\Delta f_L$ :

$$\Delta f_L = \frac{1}{2S_u(f_0)}. \quad (7)$$

В зависимости от параметра  $p = K/F_n^2$ , имеем предельные значения

$$\Delta f_{L_1} = \frac{\pi^2}{2} \frac{K}{F_n} \quad (p \ll 1); \quad (8)$$

$$\Delta f_{L_2} = \sqrt{\pi K \ln(10^2 K F_n^{-2})} \quad (p \gg 1). \quad (9)$$

Из (8) следует, что при  $p \ll 1$  ширина линии совпадает с шириной для известного предельного случая модуляции по частоте белым шумом (см., например, [3]).

Выражение (9) по своему характеру близко к ширине линии при квазистатической идеализации спектра  $S_v$  [3]. Однако в (9) ширина линии зависит не от интенсивности флуктуаций частоты (которая для формы спектра рис. 1 бесконечно велика), а в соответствии с (6) только от параметров  $K$  и  $F_n$ . Это объясняется тем, что составляющие высоких частот  $F$  спектра  $S_v(F)$  дают исчезающе малый вклад в  $\Delta f_L$ , а не равновесный, как это следовало бы при квазистатической идеализации.

Численное интегрирование (7) показало, что с погрешностью, не превышающей 0,01 для  $p < 0,1$ , справедлива формула (8), а для  $p > 10$  — формула (9). В переходной области  $0,1 < p < 10$  ширина линии может быть определена как

$$\Delta f_L = \Delta f_{L_1} k_1(p),$$

где  $k_1(p)$  представлен на рис. 2. На рисунке также представлены результаты, дава-

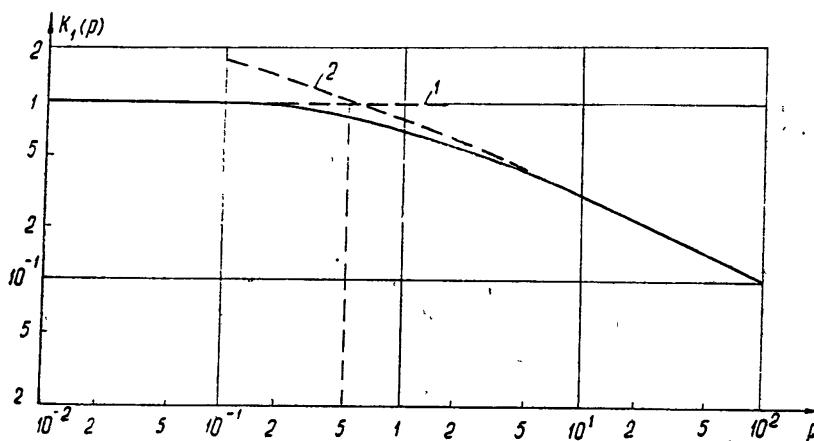


Рис. 2. График для определения  $\Delta f_L$  в переходной области; 1 — результат, даваемый (8); 2 — результат, даваемый (9).

мые в указанной области формулами (8) и (9) (эквивалентные  $k_1(p)$ ), из которых следует, что с погрешностью, не превышающей 0,1, можно принимать  $\Delta f_L = \Delta f_{L_1}$  для  $p < 0,5$  и  $\Delta f = \Delta f_{L_2}$  для  $p \geq 0,5$ .

Выражение (4) для спектра  $S_{uv}(f)$  может быть представлено в виде

$$S_{uv}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\tau_b(i-1)}^{\tau_b i} \beta_i(\tau) \sin(2\pi f \tau) d\tau, \quad (10)$$

где

$$\tau_b = \frac{1}{4} F^{-1},$$

$$\begin{aligned} \beta_i = e^{-\xi(4i\tau_b - 3\tau_b - \tau)} - e^{-\xi(4i\tau_b - 3\tau_b + \tau)} + \\ + e^{-\xi(4i\tau_b - \tau_b + \tau)} - e^{-\xi(4i\tau_b - \tau_b - \tau)}, \end{aligned} \quad (11)$$

что позволяет провести вычисление (4) путем разложения (11) в ряд на отрезке  $\tau_b(i-1) < \tau < \tau_b i$  с последующим интегрированием составляющих и суммированием (10).

В результате вычислений было установлено, что в области частот  $F < \Delta f_L$  в зависимости от параметра  $p$  форма спектра меняется от предельной лоренцовой (для  $p \ll 1$ ) до гауссовой (для  $p \gg 1$ ) [3].

В этой области частот с достаточной точностью можно полагать, что для  $p < 0,5$  спектр близок к лоренцовой, а для  $p > 0,5$  — к гауссовой форме. В области же частот  $F \gg \Delta f_L$ , как известно, спектр  $S_{uv}(f)$  сходится к линейному:

$$S_{uv}(f) = \frac{1}{4} |S_\varphi(F)|, \quad (12)$$

где  $f = f_0 \pm F$  (в соответствии с (2)  $S_\varphi = S_v / F^2$ ), т. е. для  $S_v(F)$  типа (3)

$$S_{uv}(f) = \frac{1}{4} \frac{K}{|F^3|}. \quad (13)$$

Вычисления показали, что для спектра  $S_v(F)$  рис. 1 эта сходимость наступает достаточно быстро. На рис. 3 представлен расчетный график, устанавливающий частоту

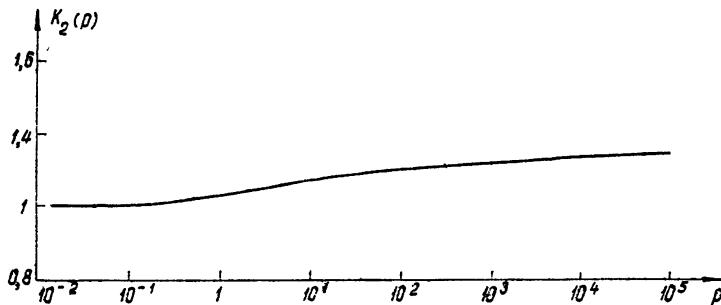


Рис. 3. График для определения  $F_{min}$ .

$F_{min}$ , начиная с которой (для  $F \geq F_{min}$ ) погрешность выражения (13) не превосходит 0,1. Частота  $F_{min}$  дается в виде  $F_{min} = \Delta f_L k_2(p)$ . Из графика следует, что для  $p < 10^6$   $F_{min} = (1 \pm 1,5) \Delta f_L$ .

В качестве иллюстрации на рис. 4 представлен типичный вид спектра  $S_{uv}(f)$  при  $p = 10^2$ , вычисленный по формуле (10). На графике также даны квазистатическая — 1 (гауссов спектр с эквивалентной дисперсией флюктуаций частоты  $\sigma_v^2 = \frac{1}{2} K \ln(10^2 p)$ ) и линейная — 2 идеализации, поясняющие, как спектральная линия переходит в крылья (12).

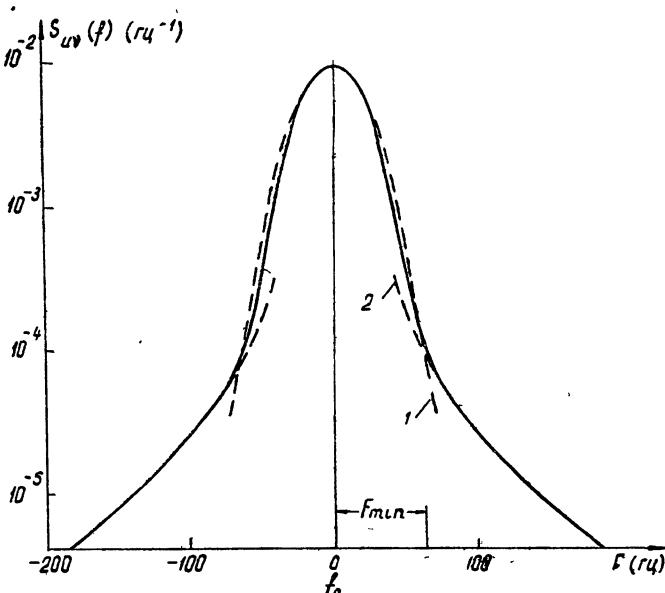


Рис. 4. Спектр  $S_{uv}$  при  $p = 10^3$  ( $K = 10^2$  гц $^3$ ;  $F_n = 1$  гц,  $\Delta f_n = 53,6$  гц,  $F_{min} = 64,5$  гц, ): 1—гауссова идеализация ( $\sigma_v = 21,4$  гц); 2 — линейная идеализация.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 2. E. Baghdady, R. Lincoln, B. Nelin, Proc. IEEE, 53, 811 (1965).
- 3. J. D. Middleton, Phil. Mag., 41, 689 (1951).
- 3. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.

Институт радиотехники и электроники

Поступила в редакцию  
20 сентября 1967 г.