

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ В № 9 1968 г.

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
1290	21 снизу	..., $I_{ij}(k, x) = \int I_{ij}(k, x) d\omega$ . (11)	..., $I_{ij}(k, x) = \int I_{ij}(x, x) d\omega$ . (11)
1293	13 снизу	... $\omega_c = 3 \sin \varphi \omega_H \eta^{-3/2}$ ...	... $\omega_c = \frac{3 \sin \varphi}{2} \omega_H \eta^{-3}$ ...
1294	7 сверху	... $ v  \ll X$ ...	... $ v  \gg X$ ...
1294	8 сверху	$ v  \gg X$ ..	$ v  \ll X$ ..

Формулы (17) и (19) следует читать так:

$$\alpha_{12}^f = -i \left[ \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} (n v_{\parallel} - \cos \varphi) \frac{v}{X} + \frac{\partial N}{\partial p_{\parallel}} \left( \sin \varphi - \frac{v}{X} n v_{\perp} \right) \right] v_{\perp} J_{\nu}(X) J'_{\nu}(X), \quad (17)$$

$$\alpha_{21}^f = i \left[ \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} + n \cos \varphi \left( v_{\perp} \frac{\partial N}{\partial p_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} \right) \right] \left( v_{\parallel} \sin \varphi - \frac{v}{X} v_{\perp} \cos \varphi \right) J_{\nu}(X) J'_{\nu}(X).$$

$$\alpha_{11, 22}^f = -i \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \frac{e^2}{\omega^3} \int dp p^2 \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial p} \frac{\omega_H \sin \varphi}{\eta} \frac{\omega}{\omega_c} \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(z) dz \pm K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right]. \quad (19)$$

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Сазонов В. Н., Цытович В. Н. Поляризационные эффекты при генерации и переносе излучения релятивистских электронов в магнитоактивной плазме . . . . .	1287
Файнштейн С. М. О стационарных волнах в плазме с электрическим полем . . . . .	1300
Якименко И. П. и Троицкий С. В. Рассеяние основной волны на электромагнитных флуктуациях в прямоугольном волноводе с плазмой . . . . .	1309
Митяков Н. А., Митякова Э. Е., Череповицкий В. А. Состояние $F$ -области ионосферы по измерениям радиосигналов спутника «Эксплорер-22» в полярных и умеренных широтах . . . . .	1318
Митяков Н. А., Митякова Э. Е., Череповицкий В. А. Неоднородности электронной концентрации в ионосфере по измерениям разности фаз когерентных сигналов ИСЗ . . . . .	1324
Игнатъев Ю. А. О времени формирования спорадического слоя $E$ . . . . .	1332
Скροцкая Е. Г. и Скροцкий Г. В. Влияние диффузии спинов на сигнал спинового эха в неоднородном переменном вихревом соленоидальном поле . . . . .	1340
Фрейдман Г. И. О самовозбуждении параметрически связанных колебаний в резонаторах оптического диапазона при монохроматической накачке . . . . .	1345
Гурвич А. С., Каллистратова М. А., Тиме Н. С. Флуктуации параметров световой волны от лазера при распространении в атмосфере . . . . .	1360
Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов В. А., Урядов В. П. О статистических свойствах флуктуаций интенсивности волны за хаотическим фазовым экраном . . . . .	1371
Арсавев И. Е., Кинбер Б. Е. К вопросу о геометрикооптическом подходе при распространении волн в неоднородных поглощающих средах . . . . .	1377
Горский С. М. В вопросе об измерении формы эмиссионных спектральных линий по кривым видимости . . . . .	1388
Авербах В. С., Власов С. Н., Шеронова Н. М. Экспериментальное исследование открытых резонаторов с несферическими зеркалами . . . . .	1393
Хестанов Р. Х. Дифракция волнового пучка на полуплоскости . . . . .	1398
Малушков Г. Д. Осесимметричное возбуждение цилиндра с переменным поверхностным импедансом . . . . .	1410
Бербасов В. А., Кузнецов М. И., Степанов С. В. Экспериментальное исследование роли флуктуаций электрического поля в механизме токопрохождения в магнетронном диоде в режиме отсечки . . . . .	1423
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Кисляков А. Г., Кукина Э. П. Сравнение интенсивностей радиоизлучения Солнца и Луны в интервале длин волн 3,6 — 4 мм . . . . .	1431
Литвак А. Г. О возможности самофокусировки электромагнитных волн в ионосфере . . . . .	1433
Плечков В. М. Поглощение в атмосфере радиоволн в диапазоне 1,8—2,7 см . . . . .	1435
Скупой В. Ф. Усредненные уравнения, описывающие действие флуктуаций на низкодобротные автоколебательные системы . . . . .	1439
Радин А. М. О самосогласованном решении задачи дифракционного излучения . . . . .	1440

УДК 621.3.095.1 : 533.9.082.7

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ И ПЕРЕНОСЕ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*В. Н. Сазонов, В. Н. Цытович*

Получено уравнение, описывающее поляризационные эффекты при переносе и генерации излучения в однородной анизотропной магнитоактивной плазме. Уравнение справедливо в предположении о слабой анизотропии плазмы. Степень анизотропии релятивистских электронов предполагается произвольной, однако считается, что плотность релятивистских электронов много меньше плотности плазмы. Полученное уравнение учитывает эффекты реабсорбции, связанные с процессами индуцированного излучения и поглощения волны (в частности, и отрицательную реабсорбцию), а также эффекты спонтанного излучения. Рассчитана интенсивность круговой поляризации спонтанного синхротронного излучения, для которой ранее существовали лишь оценки порядка величины. Показано, что в условиях отрицательной реабсорбции возникают эффекты индуцированной поляризации излучения (преимущественного излучения одной из поляризаций). Указано на возможность преимущественного усиления круговой поляризации в условиях синхротронной неустойчивости, связанной, в частности, с анизотропным распределением релятивистских электронов.

1. В последнее время усилился интерес к возможностям проявления эффектов отрицательной реабсорбции (усиления) излучения в космических условиях. В частности, в [1] было обнаружено, что при наличии холодной плазмы отрицательная реабсорбция излучения релятивистских электронов возможна даже при изотропном распределении электронов и излучения. Насколько нам известно, поляризационные явления, возникающие при отрицательной реабсорбции [1], не изучались. Вместе с тем эффекты поляризации излучения являются едва ли не самым характерным признаком космического синхротронного излучения. Другой возможностью возникновения отрицательной реабсорбции является анизотропия в распределении релятивистских электронов. Такого рода неустойчивость аналогична хорошо известной в теории плазмы циклотронной неустойчивости, возникающей при анизотропном распределении нерелятивистских электронов и ионов [2]. Исследование такого рода неустойчивости (мазерного эффекта) для релятивистских электронов отсутствует. Наконец, при наличии магнитоактивной плазмы поляризационные свойства излучения релятивистских электронов могут меняться из-за эффекта вращения поляризации в магнитном поле. Учет всех перечисленных поляризационных эффектов в уравнениях переноса излучения высоких частот ( $\omega \gg \omega_H, \omega_0$ ) составляет предмет настоящей статьи.

Полученные ниже уравнения переноса (разделы 2—4) позволяют исследовать изменение как интенсивности, так и поляризации излучения. Существенным качественным следствием этих уравнений является возможность проявления эффекта индуцированной поляризации излучения при наличии неустойчивости (отрицательной реабсорбции). Физи-

ческий смысл этого эффекта весьма прост: при наличии неустойчивости электромагнитных волн достаточно лишь небольшой разности в инкрементах раскачки различных компонент поляризации, чтобы преимущественно возбуждалась одна из поляризаций и излучение на длинах порядка оптической толщины (длины возбуждения) стало почти полностью поляризованным. Применительно к аномальному излучению *ОН* этот эффект обсуждался В. Л. Гинзбургом (частное сообщение), а для излучения турбулентной плазмы — в работе [3].

Обсуждению некоторых эффектов индуцированной поляризации излучения релятивистских электронов в магнитоактивной плазме посвящен раздел 6 настоящей работы.

2. Выведем уравнения переноса для тензора поляризации\*

$$I_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (1)$$

Используем уравнения Максвелла для поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность внешнего тока,  $\hat{\epsilon}$  — оператор диэлектрической проницаемости.

Разложив решение (2) по плоским волнам, получим

$$(\mathbf{k}^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \omega^2 \epsilon_{ij}(\mathbf{k})) E_{kj} = 4\pi i \omega j_{ki}, \quad (3)$$

где

$$E_{ki} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d^3r E_i \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

$$j_{ki} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dt d^3r j_i \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$$

— компоненты Фурье поля и плотности тока,  $\mathbf{k} = \{\mathbf{k}, \omega\}$ , а  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости. Предполагая анизотропию в  $\epsilon_{ij}$  малой, будем считать, что  $\epsilon_{ij}$  можно представить в виде

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k}) \delta_{ij} + \tilde{\epsilon}_{ij}(\mathbf{k}),$$

где  $\epsilon$  — вещественная и положительная функция  $\mathbf{k}$ , а

$$|\tilde{\epsilon}_{ij}(\mathbf{k})| \ll \epsilon(\mathbf{k}). \quad (4)$$

Для магнитоактивной плазмы при  $\omega \gg \omega_H$  и  $\omega \gg \omega_0$  имеем, например,  $\epsilon = 1 - \omega^2/\omega_0^2$ ,  $\tilde{\epsilon}_{xy} = -i\omega_H \omega_0^2/\omega^3$ . Кроме того компоненты  $\tilde{\epsilon}_{xy}$  учитывают также вклад релятивистских электронов.

Спроектируем уравнение (3) на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{k}$  (картинную плоскость):

$$(\mathbf{k}^2 - \omega^2 \epsilon) E_{ki}^t = 4\pi i \omega j_{ki}^t + \omega^2 \tilde{\epsilon}_{ip}^t E_{kp}. \quad (5)$$

\* Новые обозначения ниже часто будем вводить знаком  $\equiv$ ;  $E_i$  — напряженность электрического поля волны; скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по статистическому ансамблю (фазам волн).

Здесь

$$E_{ki}^t = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_{kj}, \quad j_{ki}^t = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) j_{kj},$$

$$\epsilon_{ip}^t = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon_{jp}.$$

В анизотропной плазме плоские высокочастотные электромагнитные волны не являются, строго говоря, поперечными [4]. Однако при условии (4) продольная часть вектора  $E$  заведомо будет мала.

Отбрасывая в правой части равенства (5) члены второго порядка по  $\epsilon_{ij}^t$ , можно написать

$$(k^2 - \omega^2 \epsilon) E_{ki}^t = 4\pi i \omega j_{ki}^t + \omega^2 \epsilon_{ip}^t E_{kp}^t. \quad (6)$$

Из последнего уравнения нетрудно получить

$$[(k^2 - \omega^2 \epsilon) - (k'^2 - \omega'^2 \epsilon'^*)] I_{ij}(k, k') = i [\omega \langle j_{ki}^t E_{k'j}^{t*} \rangle + \omega' \langle E_{ki}^t j_{k'j}^{t*} \rangle] + \omega^2 \epsilon_{ip}^t I_{pi}(k, k') - \omega'^2 \epsilon_{iq}^{t'*} I_{iq}(k, k'), \quad (7)$$

где

$$I_{ij}(k, k') \equiv \frac{1}{4\pi} \langle E_{ki}^t E_{k'j}^{t*} \rangle.$$

Введем вместо  $k, k'$  две другие величины  $x = (k + k')/2$ ,  $\Delta k = k - k'$  и будем рассматривать  $I_{ij}$  как функцию  $x$  и  $\Delta k$ :

$$I_{ij} = I_{ij}(x, \Delta k).$$

В силу условия (4) уравнение (2) допускает решения в виде слаботухающих (или усиливающихся) волн. В этом случае корреляторы  $\langle E_{ki}^t E_{k'j}^{t*} \rangle$  в уравнении (7) будут приближенно пропорциональны  $\delta(k - k') \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon)$ .

В левой части (7) следует учесть слабое отличие  $k$  от  $k'$ :

$$[(k^2 - \omega^2 \epsilon) - (k'^2 - \omega'^2 \epsilon'^*)] = \left[ \Delta k \frac{\partial}{\partial k} + \Delta \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \right] (k^2 - \omega^2 \epsilon) =$$

$$= \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} [\Delta k v_{\text{гp}} - \Delta \omega] \quad \left( v_{\text{гp}} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} \right).$$

Здесь, простоты ради, среда считается однородной и стационарной. Обобщения на случай слабонеоднородной и слабонестационарной среды хорошо известны.

В квадратные скобки в правой части (7) подставим  $E_{ki}^t$  и  $E_{k'j}^{t*}$  из (6), сохраняя члены первого порядка по  $\epsilon_{ij}^t$ ; кроме того, в этих членах оставим лишь мнимые части  $1/(k^2 - \omega^2 \epsilon \pm i\delta)$ , так как только они дадут вклад в окончательные уравнения:

$$\frac{1}{k^2 - \omega^2 \epsilon} \rightarrow 2\pi i \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon),$$

$$\frac{1}{k'^2 - \omega'^2 \epsilon'^*} \rightarrow -2\pi i \delta(k'^2 - \omega'^2 \epsilon'^*) = -2\pi i \delta(k'^2 - \omega'^2 \epsilon').$$

Мнимые части мы взяли удвоенными, поскольку при интегрировании

обойдутся оба полюса  $\omega = +|\mathbf{k}|/\sqrt{\epsilon}$  и  $\omega = -|\mathbf{k}|/\sqrt{\epsilon}$ , а в дальнейшем удобнее считать  $\omega > 0$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} [\Delta \mathbf{k} \mathbf{v}_{\text{гр}} - \Delta \omega] I_{ij}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) = i [-8\pi^2 \omega \omega' (\delta(\mathbf{k}^2 - \omega^2 \epsilon) + \\ + \delta(\mathbf{k}'^2 - \omega'^2 \epsilon')) \langle j_{ki}^i j_{k'j}^{i*} \rangle - 8\pi \omega'^2 (\mathbf{k}^2 - \omega^2 \epsilon) \delta(\mathbf{k}'^2 - \omega'^2 \epsilon) \epsilon_{jq}^{i*} I_{iq}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) - \\ - 8\pi \omega^2 (\mathbf{k}'^2 - \omega'^2 \epsilon) \delta(\mathbf{k}^2 - \omega^2 \epsilon) \epsilon_{ip}^i I_{pj}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k})] + \omega^2 \epsilon_{ip}^i I_{pj}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) - \\ - \omega'^2 \epsilon_{jq}^{i*} I_{iq}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (8)$$

Введем теперь параметры Стокса

$$I_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv \int d\Delta \mathbf{k} d\Delta \omega \exp[i(\Delta \mathbf{k} \mathbf{r} - \Delta \omega t)] I_{ij}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, t\}$ . Для стационарного и однородного поля излучения

$$I_{ij}(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k}) = I_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\Delta \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega(\mathbf{k}))$$

и, следовательно,  $I_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  не зависят от  $\mathbf{x}$ . Далее в (9) учитывается слабая неоднородность и слабая нестационарность поля излучения, приводящая к тому, что  $I_{ij}$  медленно зависят от  $\mathbf{x}$ .

Умножим (8) на  $\exp[i(\Delta \mathbf{k} \mathbf{r} - \Delta \omega t)]$  и проинтегрируем по  $d\Delta \mathbf{k} = d\Delta \mathbf{k} d\Delta \omega$  и по  $d\omega$ . В результате уравнение примет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) I_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = 4\pi^2 S_{ij}(\mathbf{k}) + i \frac{\omega}{2} [\epsilon_{ip}^i(\mathbf{k}) \delta_{jq} - \delta_{ip} \epsilon_{jq}^{i*}(\mathbf{k})] I_{pq}(\mathbf{k}, \mathbf{x}). \quad (10)$$

Здесь учтено, что  $\epsilon$  мало отличается от единицы, т. е.  $\partial(\omega^2 \epsilon)/\partial \omega \simeq 2\omega$ ,  $\mathbf{v}_{\text{гр}} \simeq \mathbf{k}/k$  и введено обозначение

$$S_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \int d\omega d\Delta \mathbf{k} \epsilon^{i\Delta k x} \langle j_{ki}^i j_{k'j}^{i*} \rangle, \quad I_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \int I_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\omega. \quad (11)$$

В (10) и ниже  $\mathbf{x}$  заменено на  $\mathbf{k}$ , поскольку различие между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{k}$  выходит за пределы применимости приближения, использованного при получении (10). Кроме того, вместо  $\omega$  можно использовать соответствующее решение дисперсионного уравнения  $\omega^2(\mathbf{k}) \epsilon(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}) = \mathbf{k}^2$  и рассматривать все величины, зависящие от  $\mathbf{k}$ , как функции  $\mathbf{k}$ , что и сделано в (10).

Отметим, что замена  $\tilde{\epsilon}_{ij} \rightarrow \tilde{\epsilon}_{ij} + a \delta_{ij}$ , где  $a$  — вещественное число, не меняет правой части (10) (чем исключается влияние неоднозначности в определении  $\tilde{\epsilon}_{ij}$ ) и что уравнение (10) справедливо только в случае слабой дисперсии и малого затухания на длине волны.

Очевидно,  $4\pi^2 S_{ij} d^3 \mathbf{k}$  — параметры Стокса мощности излучения одного электрона, отнесенной к единице объема, в элемент объема  $d^3 \mathbf{k}$  в пространстве волновых векторов. Часто удобно отнести объемную мощность к единичному интервалу частот и единичному телесному углу. В том приближении, в котором выведено (10) ( $\omega \simeq |\mathbf{k}|$ ), параметры Стокса мощности излучения в телесный угол  $dO$  и интервал частот  $d\omega$  равны  $4\pi^2 S_{ij} k^2 dO d\omega$ .

Тензор  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  удобно вычислять в системе координат, в которой магнитное поле направлено по оси  $Z$ , а вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $XZ$ . Однако вычислять тензор  $S_{ij}$  и решать уравнение (10) удобнее

в другой системе координат, такой, что ось 1 совпадает с осью  $Y$ , ось 3 направлена по  $\mathbf{k}$ , а ось 2 образует правую тройку с осями 1 и 3 (см. рис. 1).

Перейдя из системы  $XYZ$  в систему 123 с помощью матрицы

$$a_{\alpha i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

перепишем уравнение (10) в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) I_{\alpha\beta} = (2\pi)^2 k^2 S_{\alpha\beta} + i \frac{\omega}{2} \left[ \varepsilon_{\alpha\gamma}^t \delta_{\beta\tau} - \delta_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\tau}^* \right] I_{\gamma\tau}. \quad (12)$$

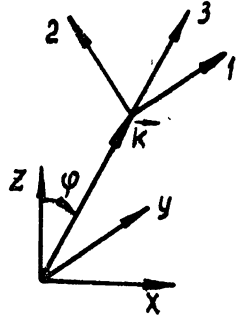


Рис. 1.

Здесь

$$I_{\alpha\beta} \equiv a_{\alpha i} a_{\beta j} I_{ij}(\mathbf{k}, x) k^2, \quad S_{\alpha\beta} \equiv a_{\alpha i} a_{\beta j} S_{ij}(\mathbf{k}),$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^t \equiv a_{\alpha i} a_{\beta q} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \tilde{\varepsilon}_{jq}(\mathbf{k}).$$

Индексы  $i, j, p, q$  обозначают оси  $X, Y, Z$ , индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$  — оси 1, 2, 3.

Тензор поляризации (5), (6)  $I_{\alpha\beta}$ , отнесенный к единичному телесному углу и к единичному интервалу частот, обычным образом выражается через параметры Стокса (6), (7):

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$I_{3\alpha} = I_{\alpha 3} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Как известно,  $\text{Sp} I_{\alpha\beta} = I$  — полная интенсивность излучения,  $(Q^2 + U^2)^{1/2}$  — интенсивность линейной поляризации,  $|V|$  — интенсивность круговой поляризации.

3. Вычислим коэффициенты  $S_{\alpha\beta}$ , характеризующие мощность синхронного излучения системы релятивистских электронов, находящихся в нерелятивистской плазме. Из уравнения (12) ясно, что коэффициенты  $S_{\alpha\beta}$  ответственны за спонтанное излучение, а изменение тензора поляризации за счет индуцированных процессов дается вторым слагаемым в правой части (12).

Приведем с нашей точки зрения наиболее простой и наглядный вывод коэффициентов  $S_{\alpha\beta}$ . Усредним  $j_{ka}^t j_{k'\beta}^*$  (где  $j_{ka}^t$  — компоненты Фурье плотности тока отдельного электрона) по начальным положениям электрона в некотором объеме  $V$  и по времени в некотором интервале  $T$ . Считая спонтанное излучение отдельных электронов некоррелированным, умножим результат усреднения на функцию распределения электронов в этом объеме и проинтегрируем по импульсам электронов.

Траектория электрона в магнитном поле имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \frac{v_{\perp}}{\omega_H} \{ \mathbf{i} \sin [\omega_H(t - t_0)] - \mathbf{j} \cos [\omega_H(t - t_0)] \} + v_{\parallel} \mathbf{s}(t - t_0) + \mathbf{r}_0.$$

Здесь  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{s}$  — орты осей  $X, Y, Z$ ,  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — проекции скорости на пло-

скость  $XU$  и ось  $Z$ ,  $\omega_H = eH/\epsilon_p$  ( $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_p$  — его полная энергия, а  $H$  — магнитное поле).

Компонента Фурье плотности тока равна

$$\mathbf{j}_k = - \frac{e}{(2\pi)^4} \int dt \mathbf{v}(t) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r}(t) - \omega t)].$$

С помощью формулы

$$\exp(-ix \sin a) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_\nu(x) e^{-i\nu a}$$

найдем, спроектировав вектор  $\mathbf{j}_k$  на плоскость 1 2,

$$j'_{k1} = j_{ky} = -i \frac{e}{(2\pi)^3} \exp[i(\omega t_0 - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)] v_\perp \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J'_\nu\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H}\right) \delta(\omega - \nu\omega_H - k_\parallel v_\parallel),$$

$$j'_{k2} = \frac{k_\perp}{k} j_{kz} - \frac{k_\parallel}{k} j_{kx} = \frac{e}{(2\pi)^3} \exp[i(\omega t_0 - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)] \frac{k_\parallel \omega - k^2 v_\parallel}{k_\perp k} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_\nu\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H}\right) \delta(\omega - \nu\omega_H - k_\parallel v_\parallel);$$

здесь  $J_\nu$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ , штрих означает дифференцирование по аргументу.

Усредним  $j'_{k\alpha} j'^*_{k'\beta}$  по положениям в объеме  $V$  и по времени. Например,

$$\langle j'_{k1} j'^*_{k'1} \rangle = \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{VT} \frac{e^2}{(2\pi)^2} v_\perp^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J'^2_\nu\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H}\right) \delta^2(\omega - \nu\omega_H - k_\parallel v_\parallel). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11) и устраняя одну из  $\delta$ -функций интегрированием по времени, найдем

$$S_{11} = \frac{1}{V} \frac{e^2 v_\perp^2}{(2\pi)^3} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J'^2_\nu\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H}\right) \delta(\omega - \nu\omega_H - k_\parallel v_\parallel). \quad (14)$$

Поскольку  $\omega > 0$  и в плазме  $\epsilon < 1$ , то всегда  $\omega - k_\parallel v_\parallel > 0$ , поэтому суммирование в последней формуле по  $\nu \leq 0$  не дает вклада и можно учитывать только  $\nu > 0$ .

Пусть в объеме  $V$  в элементе импульсного пространства  $d\tau_p = 2\pi p^2 dp \sin \theta d\theta$  находится  $N(p, \theta) V d\tau_p$  электронов ( $\theta$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{H}$ ) и пусть  $N(p, \theta)$  не зависит от  $\mathbf{r}$  и  $t^*$ . Тогда тензор объемной мощности излучения

$$P_{\alpha\beta} \equiv (2\pi)^2 k^2 \int d\tau_p N(p, \theta) V S_{\alpha\beta}.$$

Величина  $\text{Sp } P_{\alpha\beta} d\omega dO dt dV$  — энергия, вывеченная в виде поперечных электромагнитных волн в интервале частот  $d\omega$  в направлении  $dO$  за время  $dt$  из объема  $dV$ .

Во всех имеющих практический интерес случаях  $\omega \gg \omega_H$ . Следова-

\* Учет зависимости  $N(p, \theta)$  от  $\mathbf{r}$  приводит лишь к тому, что объемная мощность меняется от точки к точке, эффекты, возникающие вследствие зависимости  $N(p, \theta)$  от  $t$ , разбираются в [8].



тельно, спектр излучения состоит из близко расположенных линий и поэтому можно заменить суммирование по  $\nu$  интегрированием по  $d\nu$ , что эквивалентно усреднению  $P_{\alpha\beta}$  по некоторому интервалу  $\Delta\omega$ , такому, что  $\omega \gg \Delta\omega \gg \omega_H$ .

В результате получим

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \frac{e^2}{2\pi} \int d\tau_p N(p, \theta) \frac{k^2}{\omega_H} v_{\perp}^2 J_q'^2(X), \\
 P_{22} &= \frac{e^2}{2\pi} \int d\tau_p N(p, \theta) \frac{k^2}{\omega_H} \left( \frac{\omega k_{\parallel} - k^2 v_{\parallel}}{k k_{\perp}} \right)^2 J_q'^2(X), \\
 P_{12} = P_{21}^* &= -i \frac{e^2}{2\pi} \int d\tau_p N(p, \theta) \frac{k^2}{\omega_H} v_{\perp} \frac{\omega k_{\parallel} - k^2 v_{\parallel}}{k k_{\perp}} J_q'(X) J_q(X),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $q \equiv \omega(1 - nv_{\parallel} \cos \varphi)/\omega_H$ ,  $X \equiv \omega n v_{\perp} \sin \varphi/\omega_H$ ,  $n$  — показатель преломления нерелятивистской плазмы.

Выполнив интегрирование по углам (см. Приложение)\*, найдем

$$\begin{aligned}
 P_{11, 22} &= \sqrt{3} \frac{e^2}{4\pi} \int dp p^2 N(p, \varphi) \frac{\omega_H \sin \varphi}{\eta} \frac{\omega}{\omega_c} \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(z) dz \pm K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right], \\
 P_{12} = P_{21}^* &= -i \sqrt{3} \frac{e^2}{3\pi} \int dp p^2 N(p, \varphi) \omega_H \cos \varphi \left[ \frac{\omega}{\omega_c} K_{1/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) + \right. \\
 &\left. + \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz \right] - i \sqrt{3} \frac{e^2}{6\pi} \int dp p^2 \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial \varphi} \omega_H \sin \varphi \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz.
 \end{aligned} \tag{15a}$$

Здесь  $\eta = \sqrt{(m/\varepsilon_p)^2 + (\omega_0/\omega)^2}$  ( $\omega_0$  — плазменная частота нерелятивистской плазмы,  $\omega_c = 3 \sin \varphi \omega_H \eta^{-3/2}$ ),  $K_{1/3}$ ,  $K_{2/3}$  и  $K_{5/3}$  — функции Макдональда.

Полученные формулы учитывают отличие  $\varepsilon$  от единицы, что в определенных условиях может привести к эффекту отрицательной реабсорбции.

4. Вычислим далее антиэрмитову релятивистскую часть тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}^t$ . Легко видеть, что она описывает изменение тензора поляризации за счет индуцированного излучения и поглощения на релятивистских электронах. Решая самосогласованную систему линеаризованного кинетического уравнения и уравнений Максвелла, легко получить

$$x_{\alpha\beta}^t \equiv \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^t}{4\pi} = -2\pi \frac{e^2}{\omega} \int dp_{\parallel} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}}{\omega_H} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{x_{\alpha\beta}^t(\nu)}{\nu - q - i\delta}, \tag{16}$$

где

$$x_{11}^t(\nu) = \left[ \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} + n \cos \varphi \left( v_{\perp} \frac{\partial N}{\partial p_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} \right) \right] v_{\perp} J_{\nu}^2(X),$$

\* Часть вычислений выполнена в Приложении, которое цитируется как П.

$$x'_{22}(\nu) = \left[ \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} (n\nu_{\parallel} - \cos \varphi) \frac{\nu}{X} + \frac{\partial N}{\partial p_{\parallel}} \left( \sin \varphi - \frac{\nu}{X} n\nu_{\perp} \right) \right] \left( \nu_{\parallel} \sin \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\nu}{X} \nu_{\perp} \cos \varphi \right) J'_{\nu}(X), \quad (17)$$

$$x'_{12}(\nu) = -i \left[ \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} + n \cos \varphi \left( \nu_{\perp} \frac{\partial N}{\partial p_{\parallel}} - \nu_{\parallel} \frac{\partial N}{\partial p_{\perp}} \right) \right] \nu_{\perp} J_{\nu}(X) J'_{\nu}(X).$$

Здесь  $n = \frac{k}{\omega}$ , а распределение электронов по импульсам рассматривается как функция  $p_{\perp}$  и  $p_{\parallel}$ ;  $q = \frac{\omega}{\omega_H} (1 - n\nu_{\parallel} \cos \varphi)$ .

Если  $X \gg 1$ , то в сумме по  $\nu$  основную роль играют члены с  $|\nu| \propto X$ , так как функции Бесселя при  $|\nu| \ll X$  экспоненциально малы, а при  $|\nu| \gg X$  осциллируют как функции  $\nu$ . Для релятивистских электронов  $X = \frac{\omega}{\omega_H} n\nu_{\perp} \sin \varphi \gg 1$ , если только  $\sin \varphi$  не слишком мал\*, поэтому суммирование по  $\nu$  можно заменить интегрированием и написать, оставляя только антиэрмитовую часть,

$$\sum_{\nu} \frac{x'_{\nu}(\nu)}{\nu - q - i\delta} = i\pi x'_{\nu}(\nu) \delta(q). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), найдем, выполнив интегрирование по углам (см. П.),

$$x'_{12} = -x'_{21} = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \frac{e^2}{\omega^3} \int dpp^2 \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial p} \omega_H \cos \varphi \times \\ \times \left[ \frac{\omega}{\omega_c} K_{1/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz \right] - \\ - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \frac{e^2}{\omega^3} \int dpp^2 \left( \frac{\partial^2 N(p, \varphi)}{\partial p \partial \varphi} - \frac{1}{p} \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \omega_H \sin \varphi \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz. \quad (19)$$

Формулы (15), (19) получены в предположении, что  $\eta \ll 1$  и  $\frac{\partial N}{\partial \varphi} \ll \eta^{-1} N$ . Выражения для  $P_{11,22}$  и  $x'_{11,22}$  имеют относительную ошибку порядка  $\eta^2$ , выражения для  $P_{12}$  и  $x'_{12}$  — порядка  $\eta$ .

5. Подробный анализ уравнения (12) с учетом взаимодействия излучения как с релятивистскими электронами, так и с нерелятивистской плазмой, будет предметом отдельного исследования одного из авторов [9]. Здесь же мы ограничимся рядом качественных оценок.

\* Далее мы считаем, что  $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$  и что  $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \ll 1$  (см. также П.).

а) Можно показать, что, если  $\mu \equiv 2\pi\omega \operatorname{Im} \operatorname{Sp} x'_{\alpha\beta} < 0$ , уравнение (12) допускает экспоненциально возрастающие решения типа\*

$$I_{\alpha\beta} \propto e^{-\lambda l},$$

т. е. описывает усиление излучения по мере прохождения его через плазму.

Здесь  $\lambda$  — один из характеристических корней уравнения (12), причем  $\lambda \leq \mu$ .

Условия, при которых  $\mu < 0$ , исследовались в [1], там же был сделан вывод о возможности усиления (отрицательной реабсорбции) синхротронного излучения в плазме и приведены некоторые численные оценки (см., кроме того, [10]).

Уравнение (12) с  $\varepsilon'_{\alpha\beta} = 4\pi x'_{\alpha\beta}$ , где  $x'_{\alpha\beta}$  дается (19), в основном подтверждает выводы [1].

Однако при учете реабсорбций интенсивность излучения дается формулой (42) работы [1]

$$I = \frac{I_0}{\mu} (1 - e^{-\mu l}), \quad I_0 \equiv \operatorname{Sp} P_{\alpha\beta},$$

только если собственное излучение источника полностью деполаризовано (например, когда магнитное поле в источнике хаотично по направлениям (см. [9, 11])). В этом случае можно пользоваться уравнением переноса в форме

$$\frac{dS}{dl} = S_0 - \bar{\mu} S,$$

где  $S = I, Q, V, U$  — один из параметров Стокса,  $S_0$  — его объемная мощность, а  $\bar{\mu} = 2\pi\omega \operatorname{Im} \operatorname{Sp} x'_{\alpha\beta}$  (черта означает усреднение по направлениям магнитного поля).

Во всех других случаях уравнение переноса надо брать в форме (12), даже тогда, когда исследуется изменение только полной интенсивности излучения (параметр Стокса  $I$ ) и не рассматривается изменение его поляризации.

Так, например, если магнитное поле в источнике однородно, составляет угол с лучом зрения  $\varphi \gg \eta$  и проекция его на картинную плоскость параллельна оси 2, то при условиях

$$-l4\pi\omega \operatorname{Im} x'_{11} \gg 1, \quad -l2\pi\omega \operatorname{Im} (x'_{11} - x'_{22}) \gg 1, \quad l4\pi\omega |x'_{12}| \ll 1 \quad (20)$$

полная интенсивность будет меняться в зависимости от  $l$  по закону

$$I \propto \exp(-l4\pi\omega \operatorname{Im} x'_{11}) (\neq e^{-\mu l})^{**}, \quad (20a)$$

$$Q = I.$$

Последнее равенство означает, что излучение полностью линейно поляризовано перпендикулярно проекции магнитного поля на картинную плоскость.

Рассмотрим другой пример, когда магнитное поле в источнике состоит из однородной компоненты, направленной на наблюдателя, на ко-

\* Далее мы рассматриваем стационарный случай и записываем левую часть (12) как  $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k}{k} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial l}$ , где  $\frac{\partial}{\partial l}$  — производная по направлению  $k$ .

\*\* Следует, однако, отметить, что показатель экспоненты в этой формуле превосходит  $l\mu$  не более, чем вдвое, что для астрофизических приложений, разумеется, несущественно. См. по этому поводу [8].

торую наложено полностью хаотическое поле, причем  $1 \gg \frac{H_{\text{звот}}}{H_{\text{одн}}} \gg \eta$ . В этом случае, усредняя (12) по направлениям магнитного поля (см. [9]), легко показать, что при условиях

$$-l\mu \gg 1, \quad l4\pi\omega |x_{12}^f| \gg 1 \quad (21)$$

полная интенсивность излучения

$$I \propto \exp(-l\mu + l4\pi\omega |x_{12}^f|),$$

$$|V| = I. \quad (21a)$$

Последнее равенство означает, что излучение будет полностью поляризовано по кругу.

б) Случай  $\mu = 2\pi\omega \text{Im Sp } x_{\alpha\beta}^f < 0$  реализуется только в присутствии нерелятивистской плазмы [1] и только за счет неравновесности в распределении электронов по энергиям (если  $x_{\alpha\beta}^f$  дается (19)).

Однако усиление излучения может происходить и за счет анизотропии по направлениям импульсов. Так, если при всех значениях импульса, существенных в (19),

$$\frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial p} \ll \eta \frac{N(p, \varphi)}{p} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial \varphi} \propto N(p, \varphi), \quad (22)$$

то

$$|x_{12}^f| \gg x_{1,2}^f \quad (22a)$$

и из уравнения (12) следует, что при условиях (22) будет усиливаться круговая поляризация:

$$|V| = I \propto \exp(4\pi\omega |x_{12}^f| l) \quad (4\pi\omega |x_{12}^f| l \gg 1). \quad (22b)$$

Формулы (20)—(22) будут, вероятно, иметь приложение при интерпретации радиоизлучения космических источников.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность В. Л. Гинзбургу и С. И. Сыроватскому за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегрирование по углам в (14) и (16) проведем для случая релятивистских электронов и достаточно разреженной нерелятивистской плазмы, так что

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{m}{\epsilon_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \ll 1.$$

Предположим, что максимум в распределении мощности излучения по частотам приходится на частоту  $\omega \propto \omega_H \eta^{-3}$  и что в (14), (16) при интегрировании по  $\theta$  существенна лишь область  $|\theta - \varphi| \propto \eta$ . Эти предположения будут оправданы всем ходом дальнейших вычислений, в которых мы ограничимся случаем  $\varphi \gg \eta$  и  $\pi - \varphi \gg \eta$ .

Очевидно, в интересующей нас области изменения углов

$$q = \frac{\omega}{\omega_H} (1 - n\nu \cos \theta \cos \varphi) \propto \eta^{-3} \gg 1,$$

$$X = \frac{\omega}{\omega_H} n v \sin \theta \sin \varphi \propto \eta^{-3} \gg 1, \quad (23)$$

$$1 - \frac{X}{q} \propto \eta^2 \ll 1,$$

поэтому разумно воспользоваться асимптотическими выражениями для функции Бесселя.

По формулам Лангера [12] с учетом (23) найдем

$$J_q(X) = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} \left(1 - \frac{X^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} K_{1/3} \left[ \frac{q}{3} \left(1 - \frac{X^2}{q^2}\right)^{3/2} \right] \{1 + O(\eta^3)\}.$$

Используя рекуррентные соотношения для цилиндрических функций, получим с той же точностью

$$J'_q(X) = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} \left(1 - \frac{X^2}{q^2}\right) K_{2/3} \left[ \frac{q}{3} \left(1 - \frac{X^2}{q^2}\right)^{3/2} \right] \{1 + O(\eta^3)\}.$$

Разложим в (14), (16) все функции угла  $\theta$  в ряд по  $\psi \equiv \theta - \varphi$ . Существенные углы  $|\psi| \propto \eta$ ; при  $|\psi| \gg \eta$  аргумент функций Макдональда  $\gg 1$  и все выражения экспоненциально малы; по этой же причине, заменив интегрирование по  $\theta$  интегрированием по  $\psi$ , можно распространить его от  $-\infty$  до  $+\infty$ , если только  $\varphi \gg \eta$  и  $\pi - \varphi \gg \eta$ . Кроме того, разложим  $n$  и  $v$  в ряд по  $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$  и  $\left(\frac{m}{\varepsilon_p}\right)^2$  соответственно и будем считать,

что  $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \propto \left(\frac{m}{\varepsilon_p}\right)^2 \propto \eta^2$ . В разложении каждого сомножителя в (14), (16)

ограничимся первыми двумя членами по степеням  $\psi$  или  $\eta$ . Так, напри мер,

$$\frac{q}{3} \left(1 - \frac{X^2}{q^2}\right)^{3/2} = \frac{\omega}{3 \sin \varphi \omega_H \eta^{-3}} \left(1 + \frac{\psi^2}{\eta^2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{\psi}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right).$$

$$\left(v_{\parallel} \sin \varphi - \frac{q}{X} v_{\perp} \cos \varphi\right) = -\psi - \frac{(\psi^2 + \eta^2)}{2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + n \cos \varphi \left(v_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} - v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}}\right)\right] N(p_{\parallel}, p_{\perp}) =$$

$$= \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial p} + \psi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \varphi}{p} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\right] \left[N(p, \varphi) + \psi \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial \varphi}\right] =$$

$$= \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial p} + \psi \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \varphi}{p} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial p \partial \varphi}\right)\right] N(p, \varphi).$$

Аналогично следует записать и другие сомножители. Производя необходимые преобразования, найдем

$$P_{11} = 3 \frac{e^2}{4\pi^2} \int dp p^2 N(p, \varphi) \frac{\omega_H \sin \varphi}{\eta} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dX (1 + X^2)^2 K_{2/3}^2(g),$$

$$P_{22} = \frac{3e^2}{4\pi^2} \int dp p^2 N(p, \varphi) \frac{\omega_H \sin \varphi}{\eta} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dX X^2 (1 + X^2) K_{1/3}^2(g),$$

$$\begin{aligned}
 P_{12} = P_{21}^* = & -i \frac{3e^2}{4\pi^2} \int dp p^2 \left( \cos\varphi N + \sin\varphi \frac{\partial N}{\partial\varphi} \right) \omega_H \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dX X^2 (1 + \\
 & + X^2) K_{1/3}(g) K_{2/3}(g) - i \frac{3e^2}{8\pi^2} \int dp p^2 N(p, \varphi) \omega_H \cos\varphi \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dX (1 + \\
 & + X^2)^{5/2} K_{1/3}(g) K_{2/3}(g) - i \frac{3e^2}{16\pi^2} \int dp p^2 N(p, \varphi) \omega_H \cos\varphi \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dX X^2 \times \\
 & \times (1 + X^2)^3 [K_{1/3}^2(g) + K_{2/3}^2(g)],
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\text{где } g = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + X^2)^{3/2}, \quad \omega_c = \frac{3 \sin\varphi}{2} \omega_H \gamma^{-3}.$$

Соответствующие компоненты  $x_{\beta}^{\prime}$  получаются из (24), если умножить правую часть на  $-i \frac{2\pi^2}{\omega^3}$  и сделать замену  $N(p, \varphi) \rightarrow \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial p}$ :

$$\frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial\varphi} \rightarrow \frac{\partial^2 N(p, \varphi)}{\partial p \partial\varphi} - \frac{1}{p} \frac{\partial N(p, \varphi)}{\partial\varphi}.$$

Интегралы входящие в  $P_{11}$  и  $P_{22}$ , вычислены в [13]

$$J_{11, 22} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\omega_c}{\omega} \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(z) dz \pm K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right]. \tag{25}$$

Интегралы, входящие в  $P_{12}$ , вычислены нами с помощью аналогичной методики:

$$\begin{aligned}
 J_{12}^{(1)} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz, \\
 J_{12}^{(2)} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left[ 3 \frac{\omega}{\omega_c} K_{1/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) + \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz \right], \\
 J_{12}^{(3)} &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^3 \left[ \frac{\omega}{\omega_c} K_{1/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) + \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(z) dz \right].
 \end{aligned} \tag{25a}$$

Преобразовать (24) с учетом (25) к виду (14) не составляет труда.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В В Железняков, ЖЭТФ, 51, 570 (1966)
- 2 А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 802 (1961).
- 3 В. Н. Цытович, Астрон ж (в печати).
- 4 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., Физматгиз. 1960.

- 5 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., Физматгиз, 1967.
- 6 Г. В. Розенбург, УФН, **56**, 77 (1955).
- 7 В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН, **87**, 65 (1965).
- 8 В. Л. Гинзбург, В. Н. Сазонов, С. И. Сыроватский, УФН (в печати).
- 9 В. Н. Сазонов, Астрон. ж. (в печати).
- 10 R. M. S. Gray, Science, **154**, 1320 (1966).
- 11 А. А. Корчак, С. И. Сыроватский, Астрон. ж., **38**, 885 (1961).
- 12 Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, М., Наука, 1964.
- 13 К. С. Westufold, Ap. J., **130**, 241 (1959).

Институт теоретической физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
17 июля 1967 г.

## POLARIZATION EFFECTS IN GENERATION AND RADIATION TRANSFER OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

*V. N. Sazonov, V. N. Tsytovich*

The equation describing the polarization effects in generation and radiation transfer in a homogeneous anisotropic magnetoactive plasma is obtained. The equation is valid under the assumption of a weak anisotropy of plasma. The degree of anisotropy of relativistic electrons is assumed to be arbitrary, however, the density of relativistic electrons is held to be much less (than the plasma density). The equation derived takes into account the reabsorption effects associated with the processes of induced radiation and wave absorption (the negative reabsorption also), as well as the effects of spontaneous radiation. The intensity of circular polarization of spontaneous synchrotron radiation, estimated earlier only to the order of values, is calculated. For the negative reabsorption there occur the effects of induced polarization of radiation (primarily the radiation of one of polarizations). The possibility of primary amplification of the circular polarized radiation under the condition of synchrotron instability associated with an anisotropic distribution of relativistic electrons is emphasized.

---

УДК 533.9.01

## О СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ В ПЛАЗМЕ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

С. М. Файнштейн

Рассматривается вопрос о существовании стационарных электростатических волн в столкновительной электронно-ионной плазме с постоянным электрическим полем. Показано, что при определенных условиях в холодной плазме возможны решения типа автоколебаний; амплитуда колебаний определена методом Ван дер Поля. В плазме с тепловым разбросом по скоростям у электронов возможны решения типа автоколебаний и ударных волн. Исследование проводится на основе квазигидродинамических уравнений.

Рассматривается задача об установившихся нелинейных электростатических колебаниях в системе из электронно-ионной плазмы, помещенной в постоянное электрическое поле. Известно (см., например, [1-3]), что в линейном приближении указанная система неустойчива относительно раскачки электронно-ионных волн, поэтому представляет интерес исследование существования решений типа «автоколебаний» [4, 5] в такой плазме с учетом диссипации.

Таким образом, мы попытаемся отыскать нелинейные стационарные волны в плазме, состоящей из «холодных» ионов, дрейфующих в постоянном электрическом поле  $E_0$  со скоростью  $V_{0i}$ , и нагретых до температуры  $T$  электронов, движущихся со средней скоростью  $V_0$ . Электроны и ионы плазмы описываются квазигидродинамическими уравнениями

$$\operatorname{div} E = 4\pi e (\rho - \rho_i),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{eE}{m} - v_T^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} - \nu_{\text{эфф}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{eE}{M} - \nu_{\text{эфф}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \frac{m}{M}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \operatorname{div} (\tilde{\rho}_i \mathbf{v}_i) = 0,$$

$$\operatorname{rot} E = 0.$$

Здесь  $\tilde{\rho} = N + \rho$ ;  $\tilde{\rho}_i = N + \rho_i$ ;  $\rho$  и  $\rho_i$  — отклонения концентрации электронов и ионов от их равновесных значений  $N$ ;  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_i$  — скорости электронов и ионов;  $m$  и  $M$  — массы электрона и иона;  $v_T^2 = \frac{\chi T}{m}$  — тепловая скорость электронов;  $\chi$  — постоянная Больцмана;  $E$  — напряженность электрического поля\*;  $\nu_{\text{эфф}}$  — эффективная частота соударений

\* Магнитным полем, создаваемым движением электронов относительно ионов; мы пренебрегаем, что справедливо для достаточно высокочастотных колебаний (см. [6]).



электронов с ионами, которая, вообще говоря, зависит от разности скоростей электронов и ионов [7].

В системе координат, движущейся со скоростью стационарной волны  $u$  вдоль электрического поля  $E_0$  (рис. 1), все переменные считаем зависящими от координаты  $x$ , тогда (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= 4\pi e(\rho - \rho_i), \\ \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v^2}{2} + v_T^2 \ln \frac{\tilde{\rho}}{N} \right\} &= \frac{eE}{m} - \nu_{\text{эфф}}(v - v_i), \\ \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v_i^2}{2} \right\} &= -\frac{eE}{M} - \nu_{\text{эфф}} \frac{m}{M} (v_i - v), \\ \frac{d}{dx} (\tilde{\rho} v) &= 0, \quad \frac{d}{dx} (\tilde{\rho}_i v_i) = 0. \end{aligned} \quad (1a)$$

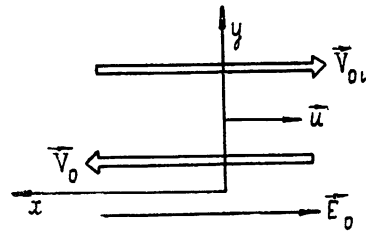


Рис. 1.

Система (1a) имеет следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} (N + \rho_i)v_i &= A_1, \\ (N + \rho)v &= A_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{m}{M} \frac{v^2}{2} + \frac{v_i^2}{2} + \frac{m}{M} v_T^2 \ln \left( 1 + \frac{\rho}{N} \right) = B.$$

Вводя безразмерные переменные

$$X = \frac{eE}{\frac{\omega_0}{|V_0|} \left( \frac{mV_0^2}{2} \right)}, \quad Y = \frac{\rho}{N}, \quad \zeta = \frac{\omega_0}{|V_0|} x \quad \left( \omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} \right) \quad (3)$$

и выражая остальные функции через  $X$  и  $Y$ , получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\zeta} &= 2 \left\{ Y + 1 - \frac{\delta_1}{\sqrt{\gamma - \mu \left( \frac{\delta_2}{1+Y} \right)^2 - \mu \beta_T \ln(1+Y)}} \right\}, \\ \frac{dY}{d\zeta} &= \frac{X + \tilde{\nu} \left\{ \sqrt{\gamma - \mu \left( \frac{\delta_2}{1+Y} \right)^2 - \mu \beta_T \ln(1+Y)} - \frac{\delta_2}{1+Y} \right\}}{\frac{\beta_T}{1+Y} - \frac{2\delta_2^2}{(1+Y)^3}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\delta_1 = \frac{A_1}{N|V_0|}, \quad \delta_2 = \frac{A_2}{N|V_0|}, \quad \gamma = \frac{2B}{V_0^2}, \quad \beta_T = \frac{2v_T^2}{V_0^2}, \quad \tilde{\nu} = \frac{2\nu_{\text{эфф}}}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{m}{M}.$$

Исследуем (4) на фазовой плоскости  $(X, Y)$ .

1. Рассмотрим случай «холодной» плазмы, т. е.  $\beta_T = 0$ . Тогда эффективная частота соударений  $\nu_{\text{эфф}}$  электронов с ионами имеет вид [7]

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{q}{(v_i - v)^3},$$

где  $q$  — коэффициент, зависящий от так называемого кулоновского логарифма. После необходимых подстановок получим, что во втором уравнении системы (4) функция  $\tilde{v}(Y)$  выражается формулой

$$\tilde{v}(Y) = \frac{v}{\left( \sqrt{\gamma - \frac{\mu \delta_2^2}{(1+Y)^2} - \frac{\delta_2}{1+Y}} \right)^3}, \quad v = \frac{2q}{V_0^3 \omega_0}.$$

Система (4) с учетом зависимости  $\tilde{v}(Y)$  имеет одно состояние равновесия ( $X=X_0$ ,  $Y=0$ ) типа фокус или узел\*. В этом легко убедиться, рассмотрев корни характеристического уравнения [8]

$$\lambda^2 + \sigma \lambda + \Delta = 0,$$

$$\sigma = -(a+d), \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$a = 0, \quad b = 2 \left( 1 + \mu \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \right), \quad c = -\frac{1}{2\delta_2^2}, \quad d = -v \left\{ \frac{1}{\delta_2} + \frac{\mu}{\delta_1} \right\}.$$

Покажем, что уравнения (4) допускают при определенных условиях решения типа «автоколебаний», и найдем амплитуду этих колебаний. Разложим правые части системы (4) в ряд Тейлора с точностью до кубичной нелинейности; после необходимых преобразований получим

$$\frac{dX'}{d\zeta} = -Yk^2 + M_1 Y^2 + M_2 Y^3, \quad (5)$$

$$\frac{dY}{d\zeta} = X' + Y(N_1 X' + M_3) + Y^2(N_2 X' + M_4) + Y^3(N_3 X' + M_5);$$

$$X' = -\frac{X}{2\delta_2^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{\mu}{\delta_1^2}, \quad M_3 = -v \left( \frac{\mu}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right),$$

$$M_5 = -\frac{v}{2} \left[ \frac{\mu}{\delta_1} + \frac{2}{\delta_2} + \frac{\mu^3 \delta_2^4}{\delta_1^5} + (3+4\delta_2) + 3 \left( 1 - \frac{\mu^2 \delta_2^3}{\delta_1^3} - \frac{\mu \delta_2^2}{\delta_1^2} \right) \frac{\mu \delta_2}{\delta_1} + \right. \\ \left. + 4 \frac{\mu \delta_2^2}{\delta_1} \left( \frac{\mu^2 \delta_2^2}{\delta_1^2} + 3 \frac{\mu \delta_2}{\delta_1} + 3 \right) \right], \quad M_2 = -\frac{\gamma \mu}{\delta_1^6} (4\gamma + \mu \delta_2^2).$$

Выражения для остальных коэффициентов не выписываем, поскольку, как будет показано ниже, они не входят в окончательную формулу амплитуды колебаний.

Воспользуемся методом Ван дер Поля для определения амплитуды автоколебаний [8, 9] и будем искать решение в виде

$$Y = C(\zeta) \cos [k\zeta - \theta(\zeta)], \\ X' = -C(\zeta) k \sin [k\zeta - \theta(\zeta)],$$

где  $C(\zeta)$  и  $\theta(\zeta)$  — медленно меняющиеся функции координаты  $\zeta$ . Урав-

\* Координата  $X = X_0$  соответствует равновесному значению электрического поля  $E_0$ . В дальнейшем мы сделаем замену переменного  $\tilde{X} = X - X_0$  и значок „~“ над  $X$  будем опускать.

нения (5) справедливы при условии  $|Y| \ll 1$ , поэтому необходимо, чтобы  $C(\zeta) \ll 1$ . После усреднения по быстрым осцилляциям получим укороченные уравнения:

$$\frac{dC}{d\zeta} = C \left( \frac{M_3}{2} + \frac{3}{8} M_5 C^2 \right); \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{3}{8} C^2 \left( \frac{M_2}{k} - k \right). \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет два состояния равновесия на плоскости переменных Ван дер Поля  $(C, \theta)$ :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0, \\ C &= \left( -\frac{4}{3} \frac{M_3}{M_5} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение (9) определяет амплитуду предельного цикла.

Исследуя (9) в зависимости от параметра  $\frac{u}{|V_0|}$ , можно убедиться, что предельный цикл существует при условии  $u < 0$  и  $\left| \frac{u}{V_0} \right| < 1$ , что соответствует возбуждению электронно-ионных колебаний дрейфующим потоком электронов (рис. 2, 3). Приближенная формула амплитуды автоколебаний имеет вид

$$X_{\max} \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1 - \mu / \left( \left| \frac{u}{V_0} \right| + \mu \right)}{\mu^3 / \left( \left| \frac{u}{V_0} \right| + \mu \right)^5} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

$$E_{\max} - E_0 = (X_{\max} - X_0) \frac{2\pi e N |V_0|}{\omega_0}.$$

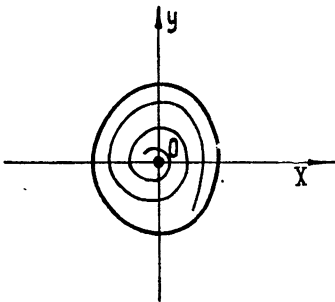


Рис. 2.

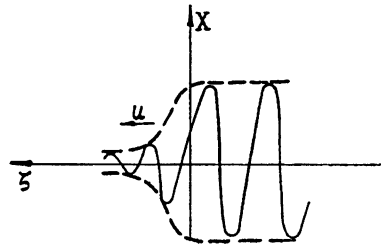


Рис. 3.

Заметим, что (9) и (10) справедливы при условии  $\left| \frac{u}{V_0} \right| \leq \mu^{3/5}$ ,  $\mu \ll 1$ , так как в этом случае предельный цикл существует и  $|Y_{\max}| \ll 1$ . Необходимо указать, что амплитуда колебаний концентрации ионов  $Y_i = \frac{\rho_i}{N}$  велика по сравнению с амплитудой колебаний для электронов  $Y$ :

$$Y_i \simeq - \frac{\mu Y}{\left( \left| \frac{u}{V_0} \right| + \mu \right)^2}.$$

Например, при  $\left| \frac{u}{V_0} \right| \sim \mu^{4/5}$   $\left| \frac{Y_i}{Y} \right| \sim \mu^{-3/5} \gg 1$ .

Пространственный период структуры  $\lambda$  определяется выражением

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \left( \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{\mu}{\delta_1^2} \right)^{1/2} \frac{\omega_0}{|V_0|}, \quad (11)$$

что соответствует дисперсионному уравнению линейной теории [1]\*. Из уравнений (7) и (8) можно найти характер установления амплитуды колебаний (рис. 3) и поправку к безразмерному волновому числу  $k$ :

$$C(\zeta) = \frac{2}{V_3} \left| \frac{M_3}{M_5} \right| \frac{\exp(-|M_3|\zeta)}{1 + \exp(-|M_3|\zeta)},$$

$$\Delta k \simeq - \frac{3}{8} C_{\max}^2 \left( 1 + \frac{4\mu}{\delta_1^2} \right).$$

2. Рассмотрим плазму с тепловым разбросом по скоростям у электронов ( $\beta_T \neq 0$ ). Здесь частоту соударений можно считать не зависящей от разности скоростей электронов и ионов (см. [7]), т. е.

$$\nu = \frac{2\nu_{\text{эфф}}}{\omega_0} = \text{const.}$$

Исследование системы (4) в общем виде значительно усложняется, поэтому проанализируем возможные решения в области  $Y \ll 1$ , но при произвольных значениях  $X$ . При этом условии, разложив нелинейные члены (4) в ряд по  $Y$  с точностью  $Y^3$ , получим

$$\frac{dX}{d\zeta} = Y(a_1 + b_1 Y + C_1 Y^2),$$

$$\frac{dY}{d\zeta} = d_1 X + Y(d_2 X + b_2) + Y^2(d_3 X + b_3) + Y^3(d_4 X + b_4),$$

где

$$a_1 = 2 + \frac{2\mu}{\delta_1^2} \left[ \delta_2^2 - \frac{\beta_T}{2} \right],$$

$$b_1 = \frac{\mu^2}{\delta_1^4} \left( -3\delta_2^4 + 3\beta_T \delta_2^2 - \frac{3}{4}\beta_T^2 \right) + \frac{\mu}{\delta_1^2} \left( -3\delta_2^2 + \frac{\beta_T}{2} \right),$$

\* Дисперсионное уравнение электронно-ионных колебаний имеет вид [1]

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \omega_0^2 / (\omega - \mathbf{k}V_0)^2 - \omega_0^2 \mu / (\omega + \mathbf{k}V_0 \mu)^2 = 0.$$

Исследуя  $D(\omega, \mathbf{k})$  в зависимости от  $\frac{u}{V_0}$ , можно убедиться, что при условии  $\left| \frac{u}{V_0} \right| < \mu^{1/3}$  групповая скорость волн  $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$  направлена против  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u}$  считаем параллельным  $V_0$ ), т. е. волна нарастает в направлении, противоположном фазовой скорости

$$c_1 = \frac{\mu^3}{\delta_1^6} \left[ 5\delta_2^6 + \frac{5}{4} \beta_T^2 \delta_2^2 - \frac{5}{2} \delta_2^4 \beta_T - \frac{5}{8} \beta_T^3 \right] + \\ + \frac{\mu^2}{\delta_1^4} \left[ 9\delta_2^4 - 6\beta_T \delta_2^2 + \frac{3}{4} \beta_T^2 \right] + \frac{\mu}{\delta_1^2} \left[ 4\delta_2^2 - \frac{\beta_T}{3} \right],$$

$$b_2 = \nu \left( -\frac{\mu}{2\delta_1} + \frac{\delta_2}{\beta_T - 2\delta_2^2} \right),$$

$$b_3 = \frac{\nu}{4} \left[ -\frac{16\delta_2^3}{(\beta_T - 2\delta_2^2)^2} + \frac{\mu^2(2\delta_2 - \beta_T)}{2\delta_1^2} - \frac{\mu(6\delta_2^2 - \beta_T)}{\delta_1(\beta_T - 2\delta_2^2)} \right],$$

$$b_4 = \frac{\nu}{2} \left[ \frac{4\delta_2^3(2\delta_2^2 + 3\beta_T)}{(\beta_T - 2\delta_2^2)^3} - \frac{\mu^3(2\delta_2^2 - \beta_T)^2}{8\delta_1^5} - \frac{\mu(12\delta_2^4 - \beta_T^2 + 20\beta_T \delta_2^2)}{6\delta_1(\beta_T - 2\delta_2^2)^2} \right],$$

$$d_1 = \frac{1}{\beta_T - 2\delta_2^2}, \quad d_2 = \frac{\beta_T - 6\delta_2^2}{(\beta_T - 2\delta_2^2)^2}, \quad d_3 = \frac{2\delta_2^2(\beta_T + 6\delta_2^2)}{(\beta_T - 2\delta_2^2)^3},$$

$$d_4 = -\frac{2\delta_2^2[(\beta_T + 2\delta_2^2)^2 + 8\beta_T \delta_2^2]}{(\beta_T - 2\delta_2^2)^4}.$$

У системы (12), вообще говоря, могут быть три состояния равновесия:  $X_0=0$ ,  $Y_0=0$ ,  $Y_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2c_1}$ ,  $X_{1,2}$  определяются вторым уравнением из (12). В зависимости от соотношения параметров, определяющих знак  $(b_1^2 - 4a_1c_1)$ , может изменяться «фазовый портрет» системы:

$$b_1^2 - 4a_1c_1 = \frac{\mu^4}{\delta_1^8} \left[ -31\delta_2^8 + 22\delta_2^6\beta_T - 6,5\delta_2^4\beta_T^2 + 5,5\beta_T^3\delta_2^2 - \frac{15}{16}\beta_T^4 \right] + \\ + \frac{\mu^3}{\delta_1^6} \left[ -66\delta_2^6 + 83\delta_2^4\beta_T - 32,5\delta_2^2\beta_T + 7,25\beta_T^3 \right] + \\ + \frac{\mu^2}{\delta_1^4} \left[ -65\delta_2^4 + 63\frac{2}{3}\delta_2^2\beta_T - 7\frac{1}{12}\beta_T^2 \right] + \frac{\mu}{\delta_1^2} \left[ -32\delta_2^2 + \frac{8}{3}\beta_T \right].$$

Рассмотрим разные случаи.

а)  $\frac{\mu}{\delta_1^2} \ll 1$ , т. е.  $\left| \frac{u}{V_0} \right| \ll \sqrt{\mu}$ . Тогда  $X_0=0$ ,  $Y_0=0$  — состояние равновесия типа фокус или узел, а  $Y_{1,2}$  — седла, возможные при  $\beta_T > 12\delta_2^2$ . Предельного цикла в области, где  $|Y| \ll 1$ , не существует.

б)  $\frac{\mu}{\delta_1^2} \gg 1$ ;  $\left| \frac{u}{V_0} \right| \gg \sqrt{\mu}$ . В начале координат плоскости  $(X, Y)$  одно состояние равновесия — фокус (узел). Этот вариант аналогичен случаю  $\beta_T = 0$ ; здесь существует предельный цикл, который легко найти методом Ван дер Поля (см. п. 1).

в)  $\frac{\mu}{\delta_1^2} \simeq 1$ , т. е.  $\left| \frac{u}{V_0} \right| \simeq \sqrt{\mu}$ ,  $\delta_2 \simeq 1$ . Мы приведем численные результаты для двух типичных картин на фазовой плоскости.

г)  $\beta_T \approx 1,7$ , т. е.  $\frac{v_T}{|V_0|} \approx 0,85$  и  $v^2 \gg 3$ , тогда  $(X_0, Y_0)$  — устойчивый узел;  $(X_1 = -0,07v; Y_1 = 0,5)$  — неустойчивый фокус;  $(X_2 = -0,07v; Y_2 = -0,11)$  — седло. Фазовые траектории изображены на рис. 4. Сепаратриса, соединяющая седло и узел, соответствует ударной волне типа «скачка» (рис. 5) с параметрами

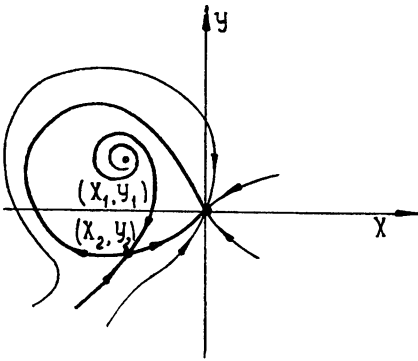


Рис. 4.

$$\Delta Y_1 \approx -0,11, \quad \Delta X_1 \approx -0,07v.$$

Другая сепаратриса седла, идущая к фокусу, соответствует ударной волне с осцилляциями (рис. 6).

д)  $\beta_T \approx 3,6$ ;  $\left(\frac{v_T}{V_0}\right)^2 \approx 1,8$ .  $(X_0, Y_0)$  — седло;  $(X_1 = 0,28v; Y_1 = -0,4)$  —

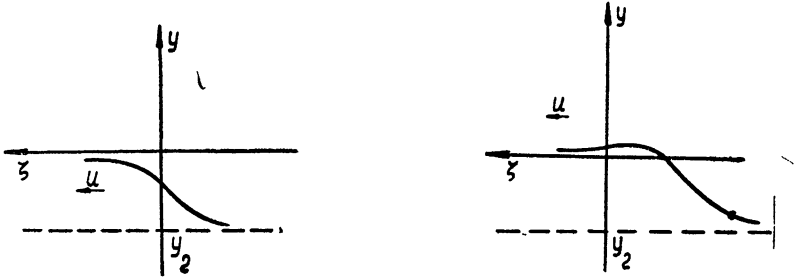


Рис. 5.

неустойчивый фокус или узел;  $(X_2 = -0,27v, Y_2 = 0,2)$  — неустойчивый фокус или узел; «фазовые портреты» изображены на рис. 7, 8. В этом случае решения, соответствующие сепаратрисам седла, представляют ударные волны с осцилляциями (рис. 9) при малых  $v$  и без осцилляций (рис. 10) при больших значениях параметра  $v$ . Расчет профиля ударной волны без осцилляций требует численного решения дифференциальных уравнений (12); для ударной волны с осцилляциями можно использовать метод усреднения и найти приближенный характер изменения амплитуды колебаний на фронте волны, как это делается в работе [10].

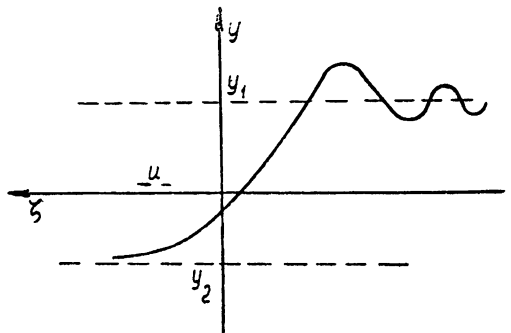


Рис. 6.

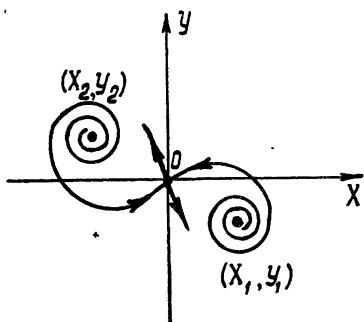


Рис. 7.

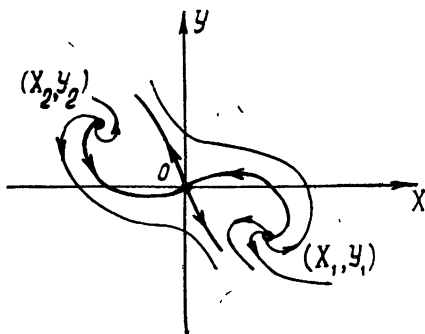


Рис. 8.

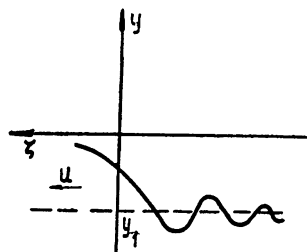
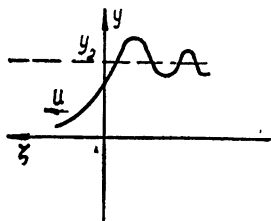


Рис. 9.

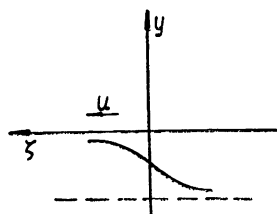
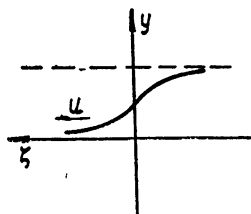


Рис. 10.

Автор признателен М. С. Ковнеру, просмотревшему рукопись статьи, А. А. Андронову, В. В. Железнякову, М. И. Рабиновичу, В. Ю. Трахтенгерцу за ценные замечания и обсуждение данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ, 27, 19 (1954).
2. М. С. Ковнер, ЖЭТФ, 40, 527 (1961).
3. В. Д. Шапиро, ЖТФ, 31, 522 (1961).
4. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 794 (1965).
5. С. М. Файнштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 834 (1968).
6. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, сб. Физика плазмы, Тр. ФИАН СССР, 32, 206 (1966).
7. Б. А. Трубников, Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 1, Атомиздат, М., 1963; Д. В. Си в у х и н, Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
8. А. А. Андронов, А. А. В и т т, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
10. Р. В. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 июля 1967 г.

## STATIONARY WAVES IN A PLASMA WITH ELECTRIC FIELD

*S. M. Fainshtein*

The problem on stationary electrostatic waves in a collision ion-electron plasma with a constant electric field is considered. It is shown that at the definite conditions in a cold plasma, the solutions of the auto-oscillation type may be obtained. The amplitude of oscillations are determined by Van der Pol's method. In the plasma with thermal dispersion of electron velocities there may exist the solutions of auto-oscillation and shock wave types. Investigation is made on the basis of quasi-hydrodynamic equations.

---



УДК 621.372.822

## РАССЕЯНИЕ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЛАЗМОЙ

И. П. Якименко и С. В. Троицкий

Получено сечение рассеяния  $H_{10}$ -волны на флуктуациях плотности заряда в изотропной плазме, заполняющей прямоугольный волновод. Рассмотрены процессы типа  $H_{10} \rightarrow H_{m0}$ . Вычислены сечения некогерентного рассеяния электромагнитных волн в волноводе с плазмой.

1. Распространение обычной волны в волноводе с плазмой сопровождается ее рассеянием на флуктуациях плотности заряда. Это явление может быть использовано для получения некоторой информации о состоянии плазмы. Кроме того, оно становится причиной дополнительных потерь энергии распространяющейся волны, не связанных со столкновениями или затуханием Ландау. Если учесть сравнительно небольшую величину сечения рассеяния волн на флуктуациях в плазме [1, 2], то вряд ли можно ожидать серьезного влияния этого процесса на общий энергетический баланс волноводной волны. Зато возможность применения этого эффекта для исследования свойств лабораторной плазмы представляется бесспорной, поскольку сейчас создана достаточно чувствительная измерительная техника. Это стимулирует интерес к теоретическому исследованию рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях в волноводах с плазмой, одна из попыток которого предпринимается в настоящей работе.

Решение поставленной задачи может быть проведено различными способами. Один из них основан на общей теореме взаимности и по существу эквивалентен решению задачи о возбуждении волновода заданными токами [3], с той лишь разницей, что токи имеют статистическую природу [4]. В основу другого подхода можно положить концепцию Бриллюэна, которая позволяет свести задачу некогерентного рассеяния в волноводе к задаче рассеяния в периодически слоистой безграничной среде, решение которой уже легко проводится методом разложения Фурье. Этот способ, тесно примыкающий к теории рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях в безграничной плазме [1, 2], и используется в настоящей работе.

2. Рассмотрим волновод прямоугольного поперечного сечения, полностью заполненный однородной изотропной плазмой. Исследуя распространение обычных электромагнитных волн в таком волноводе, можно ограничиться гидродинамическими уравнениями колебаний плазмы без учета газокINETического давления. Тогда падающая и рассеянная волны распространяются в среде с эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2} \quad (1)$$

( $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $n_0$  — равновесная плотность плазмы), причем частоты падающей  $\omega_0$  и рассеянной  $\omega$  волн, вообще гово-

ря, различны, и это различие определяется временным ходом флуктуаций в плазме, который последовательно может быть описан только при учете пространственной дисперсии. Таким образом, если пространственной дисперсией можно пренебречь при записи рассеивающего тока и электромагнитного поля обычных волноводных мод, то на втором этапе, при усреднении сечений рассеяния, учет пространственной дисперсии принципиально необходим.

Как показано в [5], фурье-компонента рассеивающего тока по времени может быть представлена в виде суммы двух частей

$$I_{\omega} = I_{1\omega} + I_{2\omega}, \quad (2)$$

где

$$I_{1\omega} = \frac{ie^2}{m\omega_0} E_{0\omega_0} \delta n_{\Delta\omega}, \quad I_{2\omega} = \frac{e^2 n_0}{m\omega_0 \omega} \nabla (E_{0\omega_0} \delta v_{\Delta\omega}). \quad (3)$$

Поскольку влияние тока  $I_{2\omega}$  на объемное рассеяние несущественно [4, 5], то в дальнейшем под рассеивающим током мы будем понимать величину

$$I_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{ie^2}{m\omega_0} E_{0\omega_0}(\mathbf{r}) \delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $E_{0\omega_0}(\mathbf{r})$  — вектор электрического поля падающей волны,  $\delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r})$  — фурье-компонента флуктуации плотности электронного заряда,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  — изменение частоты при рассеянии.

Ограничиваясь исследованием рассеяния только основной  $H_{10}$ -волны, запишем

$$E_{x0} = E_{z0} = 0, \quad E_{y0} = \frac{i\omega_0 a}{c\pi} \sin \frac{\pi x}{a} E_0 \exp(ik_{z0}z), \quad (5)$$

где  $a$  — размер волновода в направлении оси  $Ox$ , а

$$k_{z0} = \left\{ \varepsilon(\omega_0) \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Поток энергии падающей волны вдоль волновода, отнесенный к площади поперечного сечения, дается при этом выражением

$$P_0 = \frac{\omega_0 k_{z0} a^2}{16\pi^3} |E_0|^2. \quad (7)$$

Тогда единственная отличная от нуля составляющая рассеивающего тока

$$I_{y\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{car_e}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r}) E_0 \exp(ik_{z0}z), \quad (8)$$

где  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  — классический радиус электрона.

Теперь, в соответствии с концепцией Бриллюэна, мы можем заметить задачу о поле в волноводе задачей о возбуждении плоских волн периодически расположенными источниками (в обоих поперечных направлениях). Для того, чтобы граничные условия на стенках волновода удовлетворялись автоматически, следует при этом потребовать

$$I_{y\omega}(+x) = -I_{y\omega}(-x), \quad I_{y\omega}(+y) = I_{y\omega}(-y), \quad (9)$$

т. е. нечетности тока по  $x$  и четности этого тока по  $y$ . Условие (9) будет выполнено, если только

$$\delta n_{\Delta\omega}(+x) = \delta n_{\Delta\omega}(-x), \quad \delta n_{\Delta\omega}(+y) = \delta n_{\Delta\omega}(-y), \quad (10)$$

т. е.  $\delta n_{\Delta\omega}(x, y)$  необходимо четным образом продолжить из интервалов  $(0, a)$ ,  $(0, b)$  на интервалы  $(0, -a)$ ,  $(0, -b)$  ( $b$  — размер волновода вдоль оси  $Oy$ ).

Отметим, что речь идет о чисто математической операции продолжения функции из одного интервала на другой, и это, конечно, совсем не означает, что реальная флуктуация  $\delta n(\mathbf{r})$ , заданная только на интервале  $(0, a)$ , удовлетворяет требованию четности. Это необходимо иметь в виду при построении функции корреляции для  $\delta n(x, y)$ .

Учитывая периодичность тока по  $x$  и  $y$  с периодами  $2a$  и  $2b$ , а также условия (9) и однородность системы по  $z$ , представим  $I_{y\omega}(\mathbf{r})$  в виде следующего разложения в интеграл Фурье:

$$I_{y\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{y\omega mnk_z} \exp(i\mathbf{k}_{mn}\mathbf{r}) dk_z, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{k}_{mn} = ik_x + jk_y + kk_z, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (12)$$

Фурье-компонента этого разложения

$$I_{y\omega mnk_z} = \frac{1}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \int_{-b}^b I_{y\omega}(\mathbf{r}) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-ik_z z) dr. \quad (13)$$

В силу (10) и однородности системы вдоль  $z$   $\delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r})$  также можно разложить в ряды Фурье по  $x$  и  $y$  на замкнутых интервалах  $2a$  и  $2b$  и интеграл Фурье по  $z$ :

$$\delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta n_{\Delta\omega mnk_z} \exp(i\mathbf{k}_{mn}\mathbf{r}) dk_z. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим связь между фурье-компонентами тока и флуктуации плотности заряда:

$$I_{y\omega mnk_z} = -\frac{car_e}{2\pi} (\delta n_{\Delta\omega, m-1, n, \Delta k_z} - \delta n_{\Delta\omega, m+1, n, \Delta k_z}) E_0, \quad (15)$$

где

$$\Delta k_z = k_z - k_{z0}. \quad (16)$$

Наконец, рассеянное электромагнитное поле мы также представим в виде суперпозиции плоских волн с «квантованными» поперечными волновыми числами:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\omega mnk_z} \exp(i\mathbf{k}_{mn}\mathbf{r}) dk_z. \quad (17)$$

3. Связь между компонентами Фурье рассеянного поля и рассеивающего тока может быть теперь легко установлена из уравнений Максвелла, которые сводятся к следующему неоднородному волновому уравнению:

$$\Delta E_{\omega} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E_{\omega} = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left( I_{\omega} - \frac{c^2}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \text{grad div } I_{\omega} \right). \quad (18)$$

Отсюда

$$E_{i\omega mnk_z} = \frac{\pi \omega}{c^2 \Delta} \left\{ I_{i\omega mnk_z} - \frac{c^2}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} k_i (k_j I_{j\omega mnk_z}) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\Delta = k_z^2 - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} + \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (20)$$

Подстановка (19) в (17) приводит к выражению для поля, рассеянного на флуктуациях в волноводе с плазмой. Пользуясь тем, что в рассматриваемом случае падения  $H_{10}$ -волны  $I_x = I_z = 0$  и, в силу (13),

$$I_{ym, n} = -I_{y-m, n}, \quad I_{ymn} = I_{ym, -n}, \quad (21)$$

легко заметить, например, что фурье-компонента  $E_z$  антисимметрична по обоим индексам  $m$  и  $n$ , что сразу приводит к правильному выражению для поля в волноводе, автоматически удовлетворяющему граничным условиям.

Необходимо отметить, что поле (19) есть суммарное электрическое поле, связанное с рассеянными как  $E$ -, так и  $H$ -волнами. Поскольку при  $m \neq 0$ ,  $n \neq 0$  все собственные значения, соответствующие этим волнам, являются вырожденными (так называемое вырождение  $E-H$  [3]), сечение рассеяния сразу записывается для пары  $E_{mn} - H_{mn}$ , в отличие от метода, основанного на теореме взаимности [4], где естественным образом определяются сечения рассеяния для процесса  $H_{10} \rightarrow H_{mn}$  и отдельно — для процесса  $H_{10} \rightarrow E_{mn}$ .

4. Для вычисления сечения рассеяния необходимо статистически усреднить приращение энергии рассеянных волн в единицу времени

$$I = -\frac{1}{2} \text{Re} \int E(\mathbf{r}, t) I^*(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (22)$$

Усреднение осуществляется с помощью функции корреляции для фурье-компоненты  $\delta n_{\omega mnk_z}$ . Из (14) следует, что

$$\delta n_{\omega mnk_z} = \frac{1}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \delta n_{\omega}(\mathbf{r}) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-ik_z z) d\mathbf{r}. \quad (23)$$

Учитывая, что  $\delta n_{\omega}(\mathbf{r})$  совпадает с истинными флуктуациями плотности заряда только на интервалах  $(0, a)$ ,  $(0, b)$ , перепишем (23) с помощью (10) в виде

$$\delta n_{\omega mnk_z} = \frac{2}{\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \delta n_{\omega}(\mathbf{r}) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-ik_z z) d\mathbf{r}. \quad (24)$$

Очевидно, что искомая функция корреляции для  $\delta n_{\omega mnk_z}$  может быть выражена через пространственно-временную корреляционную функцию для плотности заряда. Вычисление последней для волновода, вообще говоря, представляет самостоятельную и трудную задачу, поскольку речь идет об учете пространственной дисперсии в ограниченной плазме. Однако, если размеры волновода велики по сравнению с радиу-

сом корреляции, то в качестве хорошего приближения достаточно воспользоваться известной корреляционной функцией плотности электронного заряда для безграничной плазмы [1]. Именно так мы и поступим в настоящей работе, хотя вопрос о строгой формулировке условий справедливости такого подхода в волноводных задачах остается открытым и представляет несомненный интерес.

Итак, используя (24), имеем

$$\langle \delta n_{\omega mn k_z} \delta n_{\omega' m' n' k'_z}^* \rangle = \frac{16 \pi^2}{ab} (1 + \delta_{m0}) (1 + \delta_{n0}) \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta(\omega - \omega') \delta(k_z - k'_z) \langle \delta n^2 \rangle_{k_{mn} \omega}, \quad (25)$$

где  $\langle \delta n^2 \rangle_{k_{mn} \omega}$  — обычная фурье-компонента корреляционной функции для безграничной плазмы (см., например, [1]).

Подставляя в (22) (11) и (17) с учетом (15) и (19) и производя усреднение с помощью (25), получим

$$\bar{I} = \frac{2\pi a}{b} r_e^2 V \operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \right) \times \quad (26)$$

$$\times \{ \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m-1, n \Delta \omega}} (1 + \delta_{m1}) + \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m+1, n \Delta \omega}} \} d\omega dk_z |E_0|^2,$$

где

$$q_{mn} = i \left( \frac{m\pi}{a} \right) + j \left( \frac{n\pi}{b} \right) + k \Delta k_z,$$

а  $V$  — объем рассеивающего участка.

Учитывая, что вклад в мнимую часть дают только полюса подынтегрального выражения, введем формальную замену

$$\Delta^{-1} = i\pi \delta \left\{ k_z^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}. \quad (27)$$

Отсюда видно, что после интегрирования величина

$$k_z = \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (28)$$

приобретает смысл продольного волнового числа рассеянных волн в волноводе, а приращение энергии для каждой пары индексов состоит из суммы двух членов, один из которых,  $\bar{I}^+$ , соответствует рассеянию в направлении вперед (т. е. в направлении падающей волны), а второй,  $\bar{I}^-$ , — обратному рассеянию, причем

$$\bar{I}_{\omega mn}^{\pm} = \frac{a\omega\pi^2 r_e^2}{b k_z} \left( 1 - \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \right) \{ \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m-1, n \Delta \omega}^{\pm}} (1 + \delta_{m1}) + \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m+1, n \Delta \omega}^{\pm}} \} V |E_0|^2, \quad (29)$$

где величины  $q^{\pm}$  должны определяться с учетом того, что

$$\Delta k_z^{\pm} = \pm k_z - k_{z0}. \quad (30)$$

Разделив (29) на (7) и величину рассеивающего объема  $V$ , получим дифференциальное сечение рассеяния для процесса  $H_{10} \rightarrow E_{mn} - H_{mn}$

$$\sigma_{\omega mn}^{\pm} = \frac{16\pi^5 (\omega/\omega_0)}{k_z k_{z0} ab} \left( 1 - \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2 \varepsilon(\omega)} \right) \{ \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m-1}, n^{\Delta\omega}}^{\pm} (1 + \delta_{m1}) + \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m+1}, n^{\Delta\omega}}^{\pm} \} r_e^2. \quad (31)$$

Заметим, что из двух возможных типов невырожденных волн  $H_{0n}$  и  $H_{m0}$  в результате рассеяния на флуктуациях возникает только  $H_{m0}$ -гармоника, поскольку из (15) сразу следует, что при  $m = 0$  фурье-компонента рассеивающего тока равна нулю. Таким образом, процессы рассеяния типа  $H_{10} \rightarrow H_{0m}$  запрещены. Поэтому мы проиллюстрируем основные свойства некогерентного рассеяния в прямоугольном волноводе с плазмой на примере второго невырожденного типа, т. е.  $H_{m0}$ -волн. Из (31) следует, что сечение рассеяния для этих волн есть

$$\sigma_{\omega m0} = \frac{16\pi^5 (\omega/\omega_0)}{k_z k_{z0} ab} \{ \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m-1}, 0^{\Delta\omega}} (1 + \delta_{m1}) + \langle \delta n^2 \rangle_{q_{m+1}, 0^{\Delta\omega}} \} r_e^2. \quad (32)$$

5. Как видно из (32), спектральный состав рассеянного излучения определяется как дисперсионными свойствами волновода, так и функцией корреляции для флуктуаций плотности электронного заряда, которая в общем случае квазиравновесной неизотермической электронно-ионной плазмы (с температурами электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$ ) имеет вид [1]

$$\langle \delta n^2 \rangle_{k\Delta\omega} = \frac{\sqrt{6\pi} n_0}{(2\pi)^4 ks} \Phi(z, k), \quad (33)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\omega}{ks}, \quad s^2 = \frac{3T_e}{m}. \quad (34)$$

Здесь  $\Phi(z, k)$  — некоторая довольно громоздкая функция, которая, однако, значительно упрощается для ряда частотных интервалов в условиях, когда  $(kd)^2 \ll 1$  ( $d^2 = \frac{T_e}{4\pi e^2 n_0}$  — квадрат дебаевского радиуса для

электронов). Учитывая, что в обычной низкотемпературной лабораторной плазме дебаевский радиус весьма мал, для наших целей достаточно ограничиться именно этим приближением, когда как раз наиболее ярко проявляются коллективные свойства плазмы. Таким образом,

$$\sigma_{\omega m0} = \frac{\pi \sqrt{6\pi} n_0 (\omega/\omega_0)}{k_z k_{z0} abs} \left\{ \frac{\Phi(z, q_{m-1,0})}{k_{m-1,0}} (1 + \delta_{m1}) + \frac{\Phi(z, q_{m+1,0})}{k_{m+1,0}} \right\} r_e^2, \quad (35)$$

причем  $\Phi$  определяется приближенными формулами, приведенными в [1] (стр. 119—122).

Формула (35) является основной для численных расчетов. На рис. 1 показано сечение рассеяния для процесса  $H_{10} \rightarrow H_{10}$  в стандартном волноводе 3-сантиметрового диапазона с изотермической водородной плазмой ( $T_e = 0,86$  эВ) в зависимости от равновесной плот-

ности электронов  $n_0$ . Сплошными линиями изображено сечение обратного рассеяния, пунктирными—рассеяние вперед, в направлении падающей волны. Как и в безграничном пространстве, доплеровское уширение основной линии определяется тепловыми скоростями ионов, хотя рассеяние происходит на электронах, но угловое распределение излучения принципиально отличается от безграничной плазмы. Если там рассеиваемая энергия непрерывным образом распределена по всем участкам, то в волноводе выделено лишь два направления—вперед и назад, причем сечение обратного рассеяния значительно превышает сечение рассеяния вперед.

Влияние неизотермичности плазмы показано на рис. 2 (обратное рассеяние) и рис. 3 (прямое рассеяние). Плотность плазмы  $n_0$  принята

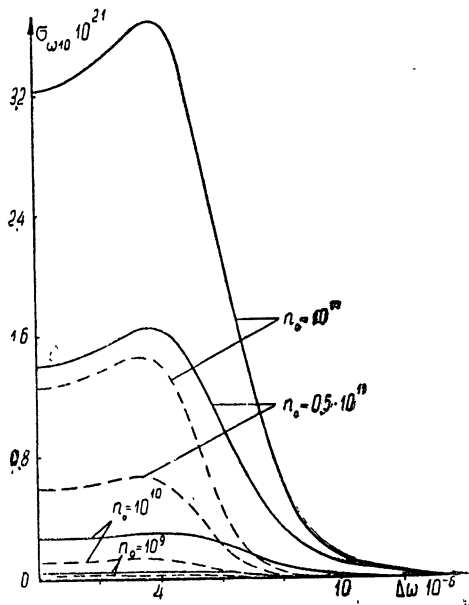


Рис. 1.

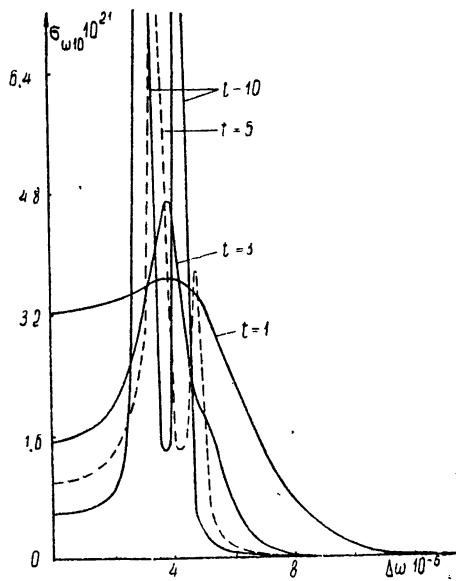


Рис. 2.

равной  $10^{11} \text{ см}^{-3}$ , а неизотермичность характеризуется параметром  $t = T_e/T_i$ . При усилении неизотермичности центральный максимум постепенно исчезает, а вместо него появляется боковой максимум на частоте, примерно соответствующей частоте неизотермического звука в плазме, т. е. при  $\Delta\omega \simeq qu(u^2 = T_e/M)$ .

Качественным отличием рассеяния в волноводе по сравнению с безграничной плазмой является возникновение в сильно неизотермической плазме двух сателлитов, обусловленных рассеянием на звуковых колебаниях и соответствующих двум значениям  $q_{m-1,0}$  и  $q_{m+1,0}$  (см. рис. 2; при  $t = 5$  первый максимум равен 9,35 при  $\Delta\omega = 3,6 \cdot 10^6$ , а для  $t = 10$  достигаются следующие максимальные значения: 124,5 при  $\Delta\omega = 3,17 \cdot 10^6$  и 46,4 при  $\Delta\omega = 4,31 \cdot 10^6$ ).

Однако при рассеянии вперед (рис. 3) первый резонанс (связанный с  $q_{00} \simeq 0$ ) совершенно не выражен, поскольку почти при всех  $\Delta\omega$  справедливо  $\Delta\omega \gg q_{00}S$  и  $\Phi(z, q_{00})$  экспоненциально мало на всех частотах, кроме частоты ленгмюровских колебаний плазмы. На рис. 3 не показаны резонансные значения сечений для  $t = 5$  и  $t = 10$ , которые равны соответственно 3,69 при  $\Delta\omega = 3,18 \cdot 10^6$  и 63,6 при  $\Delta\omega = 2,93 \cdot 10^6$ .

Сечения обратного рассеяния для других процессов типа  $H_{10} \rightarrow H_{m0}$  представлены на рис. 4 ( $\lambda_0 = 1,5 \text{ см}$ ,  $t = 1$ ,  $n_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ). Как видно, увеличение номера  $m$  ведет к возрастанию сечения рассеяния. Это, по-видимому, связано с приближением к критическому режиму в волноводе.

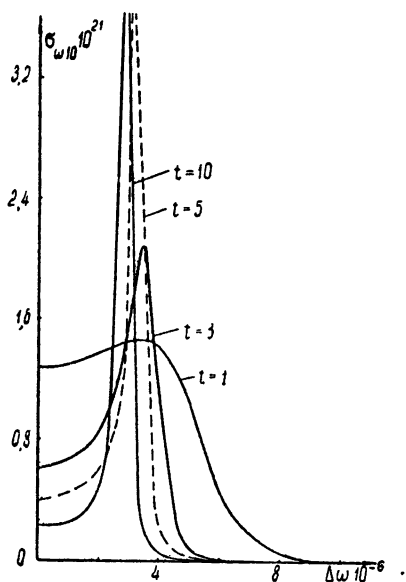


Рис. 3.

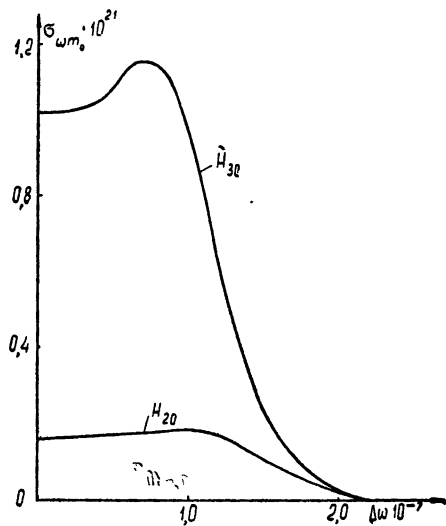


Рис. 4.

На рис. \*1—4 изображены спектральные распределения рассеянного излучения только в области частот  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Как известно [1, 2], именно эта область дает основной вклад в сечение рассеяния, хотя необходимо иметь в виду, что во всех случаях имеют место боковые сателлиты, связанные с рассеянием на плазменных колебаниях, роль которых в бесстольноновительной плазме и при условии  $(d/\lambda)^2 \ll 1$  относительно невелика. Как следует из приведенных графиков, сечения некогерентного рассеяния в волноводе с плазмой имеют вполне измеримую величину и постановка соответствующего эксперимента приобретает большой интерес.

Отметим в заключение, что методом, изложенным в настоящей работе, может быть исследовано также рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях в волноводе с магнитоактивной плазмой, а также процессы трансформации плазменных волн в электромагнитные и наоборот, когда учет пространственной дисперсии необходим не только при усреднении, но и при формулировке исходных уравнений поля и движения частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. Харьковского университета, 1965.
2. А. И. Ахизер, И. А. Ахизер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
4. И. П. Якименко, ЖТФ (в печати).
5. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 5, 637 (1967).



---

SCATTERING OF A FUNDAMENTAL WAVE BY ELECTROMAGNETIC  
FLUCTUATIONS IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE FILLED  
WITH PLASMA

*I. P. Yakimenko and S. V. Troitskii*

$H_{10}$ -wave scattering cross-section due to fluctuations of the charge density in an isotropic plasma filling a rectangular waveguide is obtained. The processes of  $H_{10} \rightarrow H_{m0}$  type are considered. The cross-sections of incoherent scattering of electromagnetic waves in a waveguide with plasma are calculated.

---

УДК 629.195 : 621.371.32

## СОСТОЯНИЕ F-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ РАДИОСИГНАЛОВ СПУТНИКА «ЭКСПЛОРЕР-22» В ПОЛЯРНЫХ И УМЕРЕННЫХ ШИРОТАХ

Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий

Приводятся результаты одновременных наблюдений ИСЗ «Эксплорер-22» (S-66) в Горьком (56° с. ш., 43° 39' в. д.) и Мурманске (68° 58' с. ш., 33° 03' в. д.) в 1965—1966 гг. Получены сведения о содержании электронов в вертикальном столбе единичного сечения и об эффективной толщине ионосферы в зависимости от времени суток, сезона и солнечной активности. Сравнивается состояние полярной и среднеширотной ионосферы.

В работе [1] представлены результаты измерений электронной концентрации в области F ионосферы в Мурманске путем регистрации разности фаз сигналов когерентных частот 20 и 40 МГц спутника «Эксплорер-22» (S-66). Аналогичные наблюдения проводились также в Горьком. Сведения об аппаратуре, а также описание методики наблюдений и обработки результатов изложены в работах [2, 3].

На рис. 1а приведены все полученные в Горьком значения интегральной концентрации электронов  $N_n = \int_0^{z_c} N dz$ , где  $z_c^*$  — высота спутника в момент верхней кульминации спутника в зависимости от времени суток за период август 1965 г. — январь 1966 г. — усредненные суточные

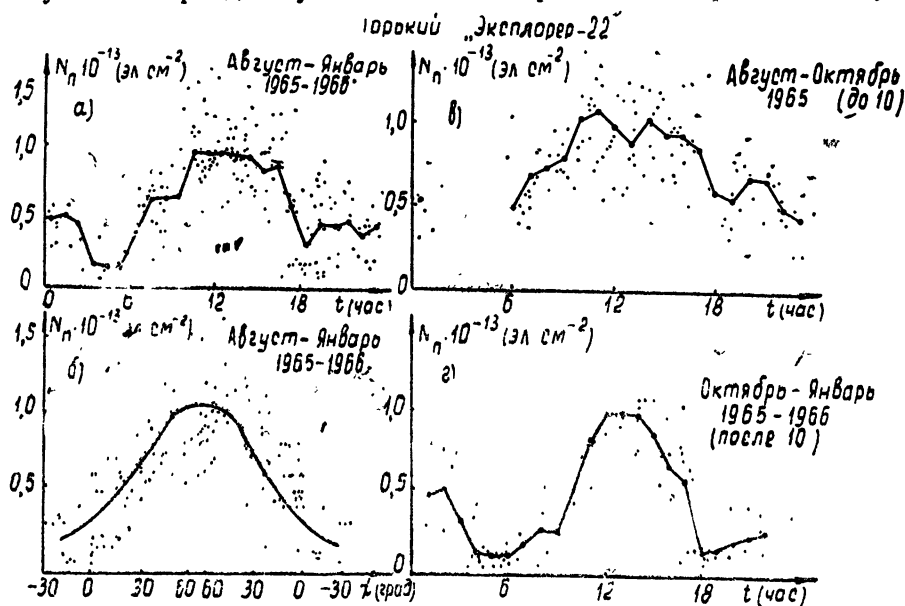


Рис. 1.

\* Высота спутника  $z_c$  за время наблюдений изменялась в пределах 890—1090 км.

ные величины  $N_p$  в дневные часы в 4—5 раз больше по сравнению с минимальными значениями, которые приходится на 4—6 час. На рисунке виден значительный разброс величины  $N_p$  относительно среднего значения. Разброс несколько уменьшается, если построить те же значения  $N_p$  в зависимости от угла возвышения Солнца над горизонтом  $\chi^\circ$  на высоте 400 км (рис. 16). Левая часть рис. 16 соответствует времени до полудня, правая — после полудня. В зависимости от сезона суточный ход величины  $N_p$  изменяется.

На рис. 1в проиллюстрирован суточный ход  $N_p$  для августа, сентября и начала октября, а на рис. 1г — для конца октября, ноября, декабря 1965 г. и начала января 1966 г. В первом случае имеет место плавное спадание, минимальное значение отличается от максимального в 2 раза. Во втором случае наблюдается резкий максимум в полуденные часы,  $N_p$  в минимуме в 5 раз меньше, чем в максимуме.

Одновременные наблюдения в Горьком и Мурманске позволили получить интегральную электронную концентрацию на средних и высоких широтах. На рис. 2 показаны усредненные графики суточного хода  $N_p$  (слева) и концентрации в максимуме слоя  $F N_m$  (справа) для различных периодов 1965—1966 гг. в Горьком (крестики) и Мурманске (точки). Электронная концентрация  $N_m$  в максимуме слоя  $F$  получена по данным станций вертикального зондирования ионосферы\*.

Дневные значения интегральной электронной концентрации в Горьком всегда больше, чем в Мурманске, причем, если сравнить октябрьские данные 1965 и 1966 гг., то для полуденных значений  $N_p$  получаются одинаковые соотношения

$$\left( \frac{N_p \text{ горьк.}}{N_p \text{ мурм.}} \right)_{1966} = \left( \frac{N_p \text{ горьк.}}{N_p \text{ мурм.}} \right)_{1965} = 1,23.$$

Это соотношение сохранилось несмотря на то, что солнечная активность с 1965 г. по 1966 г. сильно возросла ( $\overline{W}_{\text{окт. 1965}} \sim 20$ ;  $\overline{W}_{\text{окт. 1966}} \sim 65$ ). Несколько сложнее дело обстоит ночью. В работах [4, 5] уже отмечалось, что, если для дневных часов имеет место обычная широтная зависимость, т. е. с ростом широты полная электронная концентрация убывает, то ночью  $N_p$  плавно уменьшается до широт  $\sim 60^\circ N$ , а затем вновь возрастает. Аналогичная картина часто имела место и в наших наблюдениях: ночные значения в Мурманске были больше, чем в Горьком (см. рис. 2).

На рис. 3 приведена зависимость интегральной электронной концентрации  $N_p$  от широты подыоносферной точки. Интегральная электронная концентрация уменьшается с ростом широты от  $56^\circ$  до  $62^\circ$  (по наблюдениям в Горьком) и увеличивается с ростом широты от  $67^\circ$  до  $73^\circ$  (по наблюдениям в Мурманске) при больших зенитных углах  $\chi^\circ = -5^\circ \div +5^\circ$ , где  $(90 - \chi^\circ)$  — зенитный угол Солнца на высоте 400 км. Возрастание электронной концентрации с ростом широты в ночные часы связано, возможно, с корпускулярной ионизацией приполярной ионосферы низкоэнергичными вторичными электронами. Их энергия в этом случае должна быть меньше 1 кэв, так как электроны с большими энергиями достигают высоты 180 км без заметной ионизации слоя  $F_2$  [6]. На существование таких электронов в полярной области указывалось в работе [7].

Интересно, что увеличение  $N_p$  в ночные часы с ростом широты не всегда соответствует аналогичной зависимости электронной концентра-

\* Данные станций вертикального зондирования ионосферы любезно предоставлены нам Л. В. Гришкевичем (Горький) и З. Ц. Рапопортом (Мурманск).

ции  $N_m$  в максимуме слоя  $F_2$  (см. рис. 2). Это может означать, что корпускулярная ионизация наиболее существенна выше максимума слоя  $F$ .

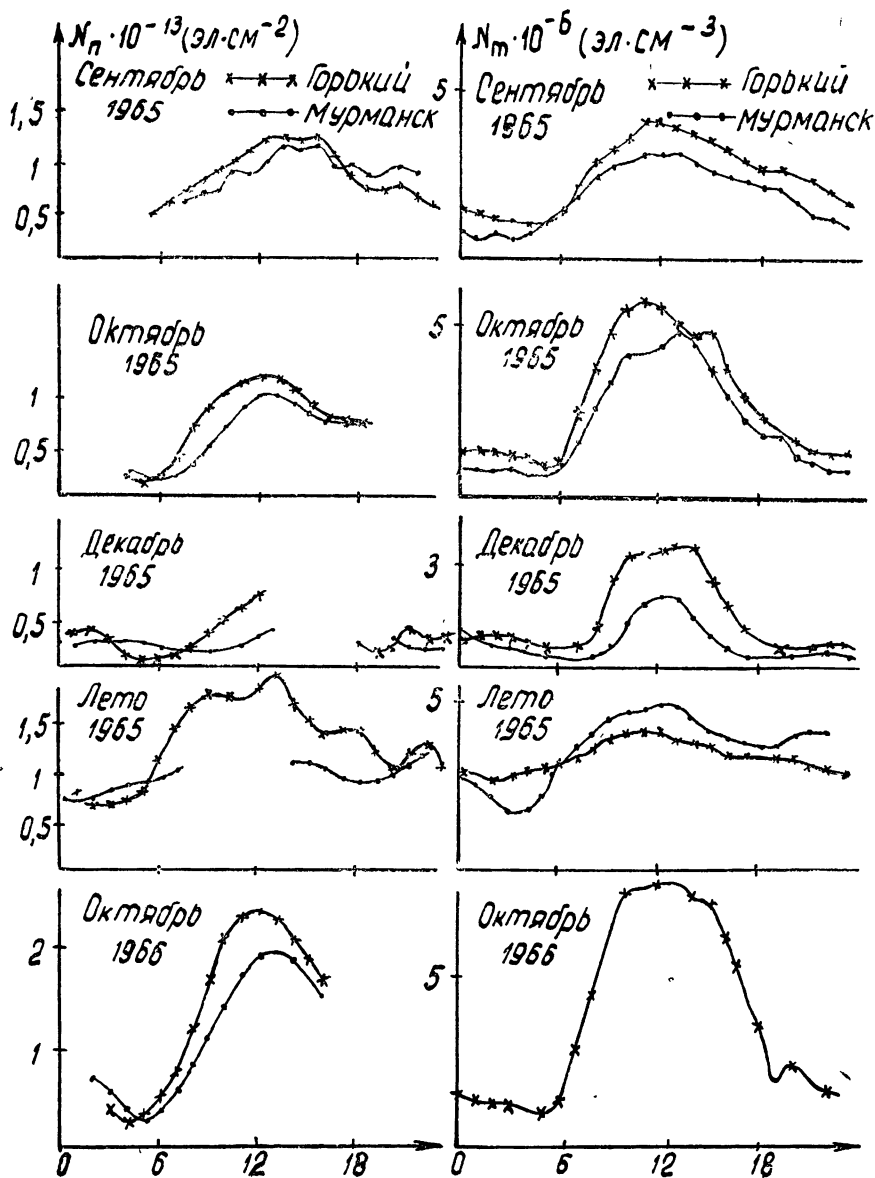


Рис. 2.

По данным, приведенным на рис. 2, можно проследить также зависимость интегральной электронной концентрации от солнечной активности. За период с октября 1965 г. по октябрь 1966 г. число Вольфа в среднем возросло в 3 раза. При этом значение полной электронной концентрации в околополуденные часы возросло как в Горьком, так и в Мурманске примерно в 2 раза. Эти результаты согласуются с данными работ [8, 9].

Необходимо отметить, что в максимуме слоя  $F$  (в Горьком) за этот же период полная электронная концентрация увеличилась лишь в 1,3 раза. Отсюда следует, что в верхней ионосфере (выше максимума

слоя  $F_2$ ) с ростом солнечной активности электронная концентрация на всех высотах увеличивается быстрее, чем в нижней ионосфере. С этим также связано увеличение эффективной толщины ионосферы  $\tau = \frac{N_{\infty}}{N_m}$ , где  $N_{\infty} = \int_0^{\infty} N dz$ , с ростом солнечной активности [9].

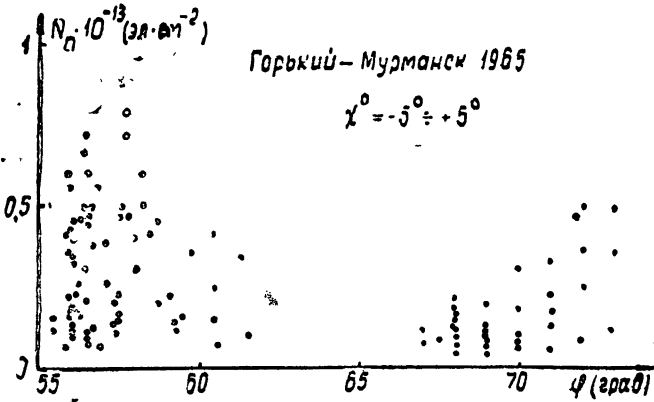


Рис. 3.

На рис. 4 приведены усредненные  $N(h)$ -профили для различных периодов суток, построенные в предположении экспоненциального спада электронной концентрации выше максимума слоя  $F_2$  для наблюдений в Горьком в 1965 г. (рис. 4б) и в 1966 г. (рис. 4а). Можно про-

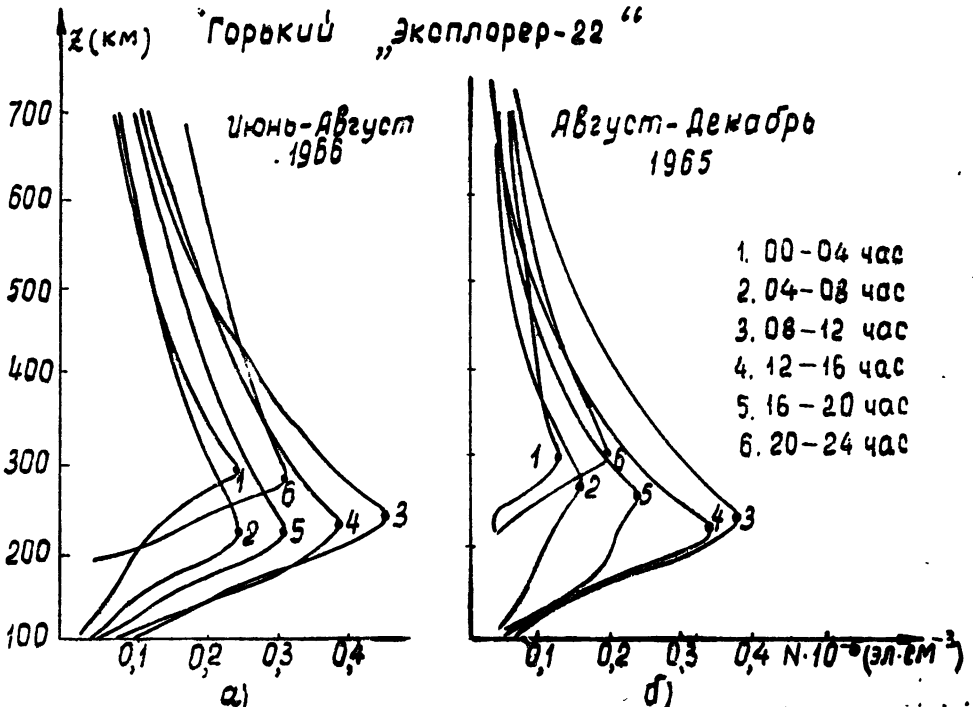


Рис. 4.

следить, как с ростом солнечной активности электронная концентрация увеличивается на всех высотах.

Интересно сравнить аналогичные  $N(h)$ -профили, полученные по

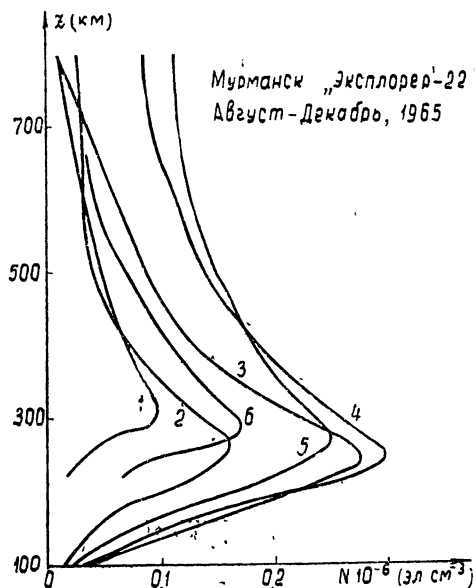


Рис. 5.

данным наблюдений в Мурманске в августе—декабре 1965 года (рис. 5). При сравнении  $N(h)$ -профилей, относящихся к одним и тем же интервалам времени, можно заметить те же особенности широтного хода, на которые указывалось выше. В полуденные часы электронная концентрация в Горьком больше на всех высотах. В вечерние часы (кривая 5) и ранние утренние часы (кривая 2) электронная концентрация в Мурманске оказывается большей, а в ночные часы (кривая 1) электронная концентрация на всех высотах в Горьком и Мурманске примерно одинаковая.

Как уже отмечалось выше, в нашем распоряжении были записи ионосферных станций, расположенных вблизи

зи пунктов наблюдений, поэтому мы могли почти в каждом случае определить эффективную толщину ионосферы  $\tau$  в предположении экспоненциального спада электроннои концентрации выше максимума слоя  $F_2$ .

На рис. 6 приведены усредненные суточные зависимости  $\tau$  для Горького (крестики) и Мурманска (точки) для различных периодов наблюдений. Из рисунка видно, что отчетливого суточного хода  $\tau$  не наблюдается, хотя заметно некоторое увеличение значений  $\tau$  в утренние и вечерние часы. Последнее согласуется с результатами работ [10, 11]. Из рисунка также видно, как уменьшается дневное значение  $\tau$  от лета к зиме. В дневные часы значения примерно одинаковы в Горьком и Мурманске, а в вечерние и утренние часы средние значения  $\tau$  в Мурманске немного превышают аналогичные значения в Горьком.

Некоторыми авторами [12, 13] отмечалась обратная зависимость полной электронной концентрации от суммарного индекса  $\Sigma K_p$ . Мы тоже пытались получить

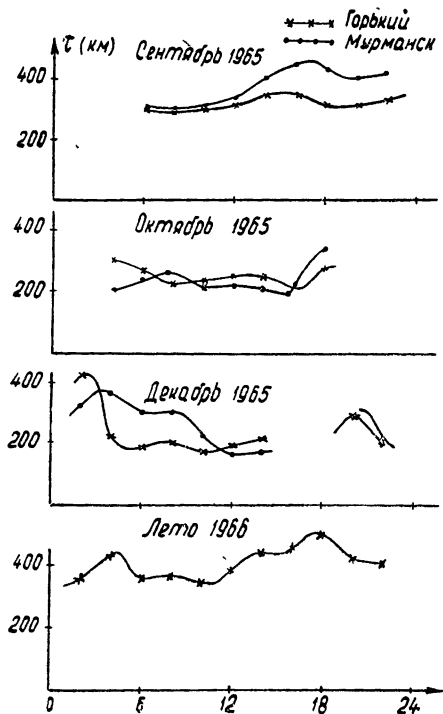


Рис. 6.

связь между отклонением  $N_{\Pi}$  от среднего значения и увеличением или уменьшением  $\Sigma k_p$ . Для Мурманска имеет место обратная зависимость  $N_{\Pi}$  от  $\Sigma k_p$  днем и почти прямая ночью; для данных, полученных в Горьком, четкой зависимости  $N$  от  $\Sigma k_p$  получить не удалось. Это, возможно, связано с отсутствием сильных магнитных возмущений в период наблюдений (величина  $\Sigma k_p$  не превышала 30).

В заключение авторы благодарят Л. М. Барсукову, В. В. Комракову, Т. И. Макарову, С. К. Малышева, Л. В. Нелюбовскую, Т. И. Ушакову за помощь в проведении наблюдений и обработке результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1070 (1967).
2. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Космические исследования, **4**, № 2, 249 (1966).
3. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, Геомagnetизм и аэрономия, **3**, № 5, 858 (1963).
4. L. Liszka, Acta Geophys. Pol., **13**, № 4, 221 (1965).
5. L. Liszka, Nature, **208**, 280 (1965).
6. M. H. Ress, Planet. Space Sci., **11**, 1209 (1963).
7. R. D. Sharp, J. E. Evans, R. G. Jonson and J. B. Reagan, Paper Presented at Fifth Inter. Space Sci. Symposium, Florence, 1964.
8. R. V. Blouste, Aldo V de Rosa, O. K. Garriott, Rad. Sci. Jor. Res., NBS, **69D**, № 7, 929 (1965).
9. R. C. Yuen, B. J. Flaherty, J. Geophys. Res., **71**, 4557 (1966).
10. Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 1, 7 (1967).
11. P. C. Yuen and T. H. Roclofs, J. Geophys. Res., **71**, 849 (1966).
12. W. J. Ross, J. Geophys. Res., **65**, 2601 (1960).
13. Fernando de Mendonga, J. Geophys. Res., **67**, 2315 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 июля 1967 г.

#### IONOSPHERIC F-REGION ACCORDING TO MEASUREMENTS OF „EXPLORER-22“ RADIO SIGNALS IN AURORAL AND MIDDLE LATITUDES

*N. A. Mitykov, E. E. Mityakova, V. A. Cherepovitskii*

The authors present the results of observations of the „Explorer-22“ (S-66) signals made simultaneously in Gorky (56° north latitude, 43°39' east longitude) and in Murmansk (68°58' north latitude, 33°03' east longitude) in 1965—1966. The data on the electron concentration in a vertical column of the unit section and the effective thickness of the ionosphere depending on the time of day, season and solar activity are given. The state of the auroral ionosphere is compared with that in the middle latitude.

УДК 629 195 : 621.371.32

## НЕОДНОРОДНОСТИ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ИОНОСФЕРЕ ПО ИЗМЕНЕНИЯМ РАЗНОСТИ ФАЗ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ ИСЗ

*Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий*

Приводятся результаты обработки флуктуаций разности фаз когерентных сигналов спутника «Эксплорер-22», наблюдавшихся в Горьком и Мурманске в 1965 г. Дана классификация неоднородностей и оценены их основные параметры

В августе—декабре 1965 г. проводились наблюдения спутника «Эксплорер-22». Этот, специальный ионосферный спутник был запущен 9 октября 1964 г. Высота спутника в апогее  $z_{\max} = 1070$  км, высота в перигее  $z_{\min} = 890$  км, угол наклона орбиты к плоскости экватора  $i = 79,69^\circ$ . На спутнике имеется, в частности, передатчик, излучающий сигналы с кратными частотами 20,005 и 40,010 МГц. Это позволило организовать наблюдения за сигналами ИСЗ как в Горьком ( $56^\circ$  с. ш.,  $43^\circ 39'$  в. д.), так и в Мурманске ( $68^\circ 58'$  с. ш.,  $33^\circ 03'$  в. д.) с целью изучения структуры ионосферы на средних и полярных широтах.

В указанных пунктах проводилась регистрация разности фаз когерентных сигналов, излучаемых искусственным спутником Земли. Полученные записи были использованы для определения интегральной электронной концентрации в ионосфере. Результаты такой обработки изложены в работе [1]. Однако, кроме регулярного хода разности фаз во времени (рис. 1 б), часто имели место случаи нерегулярного изменения разности фаз (рис. 1 а, в, г, д). Такие нерегулярности обусловлены влиянием неоднородностей электронной концентрации. При этом крупномасштабные неоднородности с размерами  $l > \sqrt{z_m \lambda} \sim 2$  км ( $z_m \sim 300$  км — высота неоднородностей,  $\lambda = 15$  м — максимальная длина волны) вызывают медленные вариации разности фаз, повторяющие вариации интегральной концентрации электронов. Параметры неоднородностей более мелкого масштаба ( $l < 2$  км) можно определить, используя теорию дифракции радиоволн на случайном фазовом экране (см., например, [2]).

Нерегулярности в записях разности фаз встречались довольно часто, особенно в ночное время. Средний период флуктуаций изменялся от 0,2 сек до нескольких минут. Протяженность возмущенных областей ионосферы также была различна. Иногда на записях фазы встречались небольшие участки с флуктуациями, иногда возмущения длились несколько минут или полностью весь сеанс наблюдений ( $\sim 10$  мин). Имели место случаи, когда возмущения регистрировались при каждом пролете в течение нескольких суток. Для оценок возмущенности ионосферы был введен индекс  $\Delta T/T$  (в процентах) как отношение времени, когда на записях разности фаз когерентных частот имели место флуктуации того или другого типа, к длительности всего сеанса наблюдений.



Ввиду обилия флуктуаций с различными периодами и интенсивностями вполне естественно разделить наблюдаемые возмущения на несколько типов.

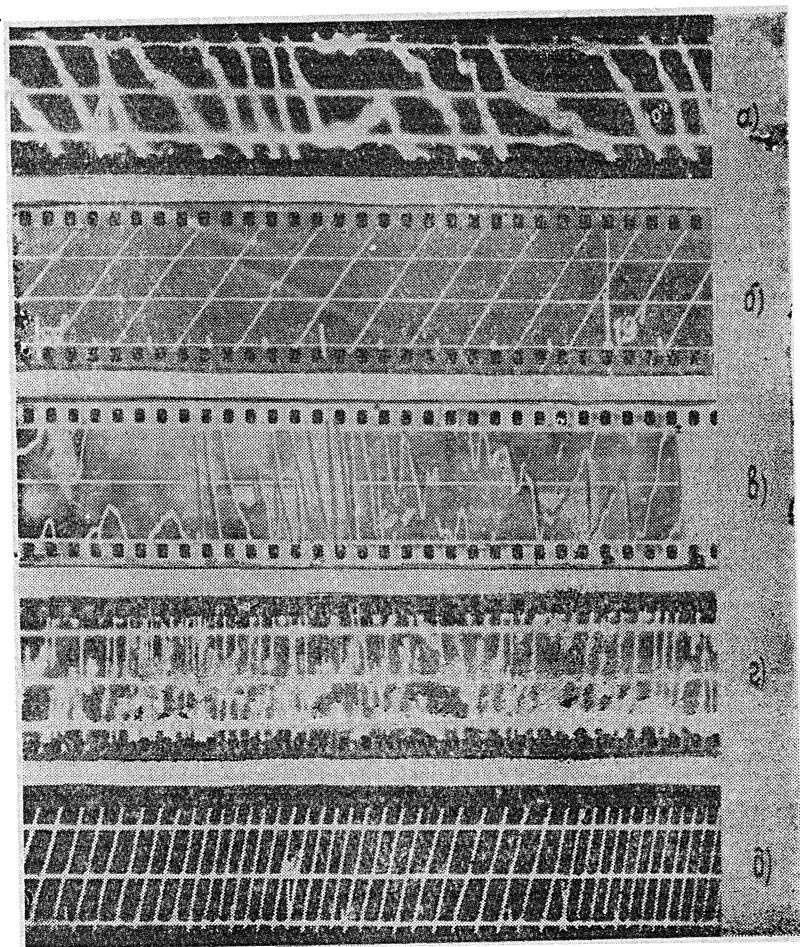


Рис 1.

### ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ТИПА А

К этому типу мы относили флуктуации с длительностью от 0,2 до 0,5 сек, не изменяющие направление регулярного хода фазы. На рис. 1а приведен пример записи разности фаз при наличии флуктуаций типа А. Для сравнения рядом приведена запись (1б), где отсутствуют какие-либо флуктуации.

Подобные флуктуации могут быть вызваны неоднородностями электронной концентрации с размерами  $l \sim 0,5 \div 1,5 \text{ км}^2$  и относительной дисперсией электронной плотности  $\sqrt{(\Delta N/N)^2} \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ .

\* Размеры неоднородностей определялись по формуле  $l = \frac{z_m}{z_c} v T$ , где  $z_m$  — высота расположения неоднородностей,  $z_c$  и  $v$  — высота и скорость спутника,  $T$  — средний период флуктуаций. При этом предполагалось, что неоднородности, ответственные за флуктуации фазы, расположены, в основном, на высоте максимума слоя F (см. например [3]).

На рис. 2а приведена зависимость от времени суток средних за час значений индекса возмущенности для флуктуаций типа А в Горьком и Мурманске. При этом мы учитывали наблюдения, относящиеся к магнитоспокойным дням ( $k_p < 25$ ). Максимальная возмущенность как в Горьком ( $\Delta T/T \sim 70\%$ ), так и в Мурманске ( $\Delta T/T \sim 90\%$ ) наблюдается около 3 часов ночи. Днем в Горьком имеет место слабая возмущенность ( $\Delta T/T \sim 20\%$ ), а в Мурманске—значительно больше ( $\sim 60\%$ ). Эти результаты согласуются с данными о мелкомасштабных ионосферных неоднородностях, полученными другими методами [3].

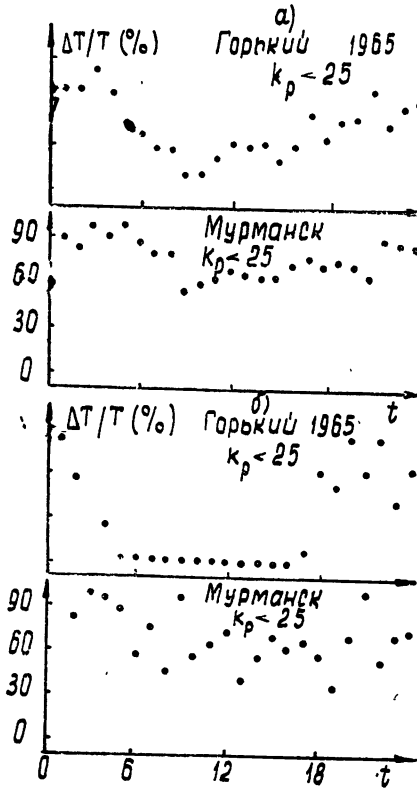


Рис. 2.

### ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ТИПА В

К этому типу мы относили флуктуации фазы, изменяющие направление фазы и имеющие длительность от долей секунд до нескольких секунд (см. рис. 1 в). Часто встречались случаи, когда наблюдались на записях фазы флуктуации обоих типов А и В (рис. 1г).

Флуктуации фазы типа В обусловлены неоднородностями электронной концентрации с размерами  $l \sim 1,5 \div 30$  км и относительными отклонениями интегральной концентрации электронов,  $\frac{\Delta N_n}{N_n} \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$

$$(N_n = \int_0^{z_c} N dz, z_c \text{—высота ИСЗ}).$$

На рис. 2б представлен суточный ход индекса возмущенности флуктуаций фазы типа В в Горьком и Мурманске для магнитоспокойных дней ( $k_p < 25$ ). В Горьком в описываемый нами период наблюде-

ний (август—декабрь 1965 г.). днем флуктуации типа  $B$  отсутствовали в Мурманске они наблюдались круглосуточно, причем днем индекс флуктуаций снижались лишь незначительно. Флуктуации типа  $B$  существенно затрудняют обработку регулярного хода разности фаз, часто делая ее невозможной. Неоднородности, вызывающие флуктуации фазы типа  $B$ , можно сопоставить с фокусирующими неоднородностями линзового типа [2].

### ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ТИПА $C$

Часто наряду с флуктуациями типа  $A$  и  $B$  имеют место плавные изменения разности фаз, которые отчетливо проявляются при дальнейшей обработке записей разности фаз — при построении графиков производной разности фаз (приведенной доплеровской частоты) и вычислении интегральной электронной концентрации. Пример такой записи фазы представлен на рисунке 1д. На рис. 3 приведена типичная зависимость полной электронной концентрации  $N_n = \int_0^{z_c} N dz$  от времени Эд-ного пролета. Помимо регулярного изменения  $N_n$ , имеют место флуктуации типа  $C$ , которые, по-видимому, обусловлены крупномасштабными неоднородностями электронной концентрации по пути распространения радиоволн. Подобного рода неоднородности отмечались в работах [4–8].

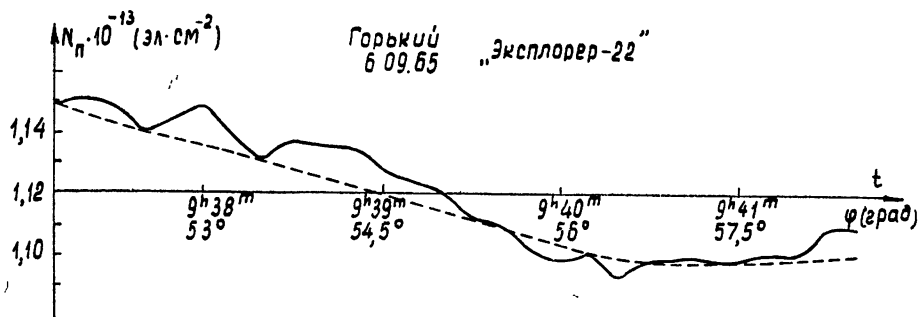


Рис. 3.

Наблюдения за сигналами ИСЗ «Эксплорер-22» дали возможность получить сведения о крупномасштабных неоднородностях как в Горьком, так и в Мурманске. На рис. 4 представлена гистограмма размеров неоднородностей по наблюдениям в Горьком\*. Дневные (04—16 час) и ночные (16—04 час) данные мало отличаются друг от друга; средний размер неоднородностей  $l=140$  км. Здесь также представлены гистограммы относительных флуктуаций полного столба электронной концентрации  $\Delta N_n/N_n$ . Средняя величина  $\Delta N_n/N_n$  для дневных часов составляет 1%, ночью  $\Delta N_n/N_n \sim 1,6\%$ . Результаты наблюдений в Мурманске представлены на рис. 5. Так же, как и в Горьком, размеры крупномасштабных неоднородностей мало зависят от времени суток и составляют в среднем  $l=130 \div 150$  км, однако, в отличие от Горького, распределение относительных флуктуаций интегральной концентрации электронов не зависит от времени суток (в среднем  $\Delta N_n/N_n \approx 1,6\%$ ,

\* На рис. 4 и 5 по оси ординат отложено  $n$ —число случаев, а по оси абсцисс  $l$ —размеры неоднородностей в километрах и величина относительных флуктуаций полного столба электронной концентрации  $\Delta N_n/N_n$  в процентах.

как днем, так и ночью). Максимальные значения  $\Delta N_n/N_n$  в Мурманске 12—15% — почти в два раза превышают соответствующие значения в Горьком (7—9%). Как в Горьком, так и в Мурманске практически отсутствует зависимость размеров неоднородностей и флуктуаций электронной плотности от магнитной возмущенности.

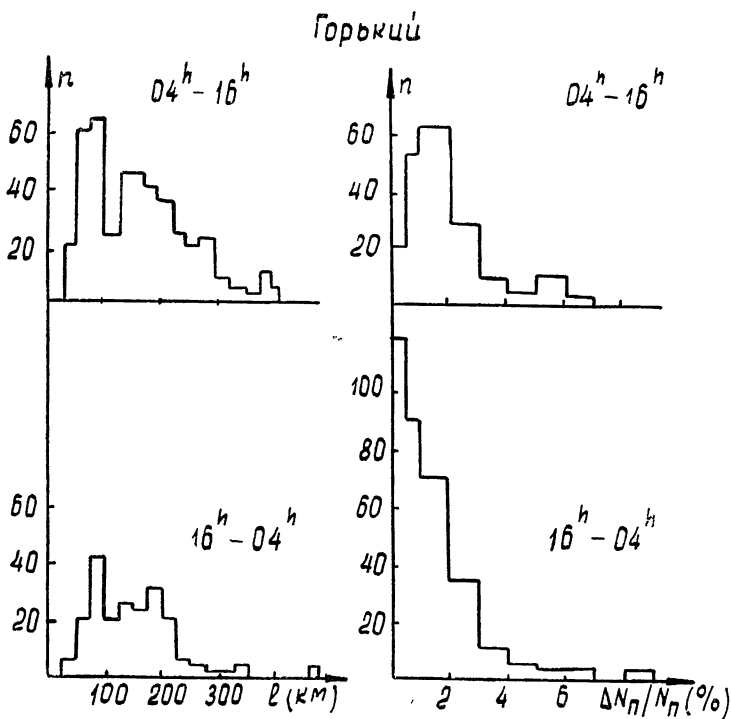


Рис. 4.

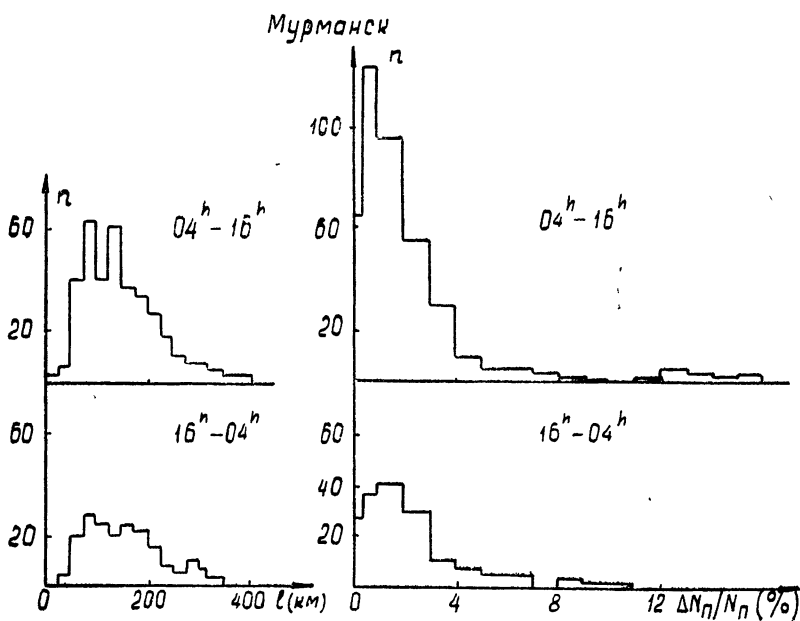


Рис. 5.

На рис. 6 приведена зависимость величины  $\Delta N_n/N_n$  от размеров неоднородностей  $L$  по результатам наблюдений в Горьком и Мурманске. Существенно, что в обоих случаях относительные флуктуации электронной плотности  $\Delta N_n/N_n$  растут с ростом размеров неоднородностей. Если для неоднородностей с размерами  $L < 100$  км средняя величина  $\Delta N_n/N_n$  составляет около 0,5%, то для  $L \sim 300$  км  $\Delta N_n/N_n \sim 2 \div 3\%$ .

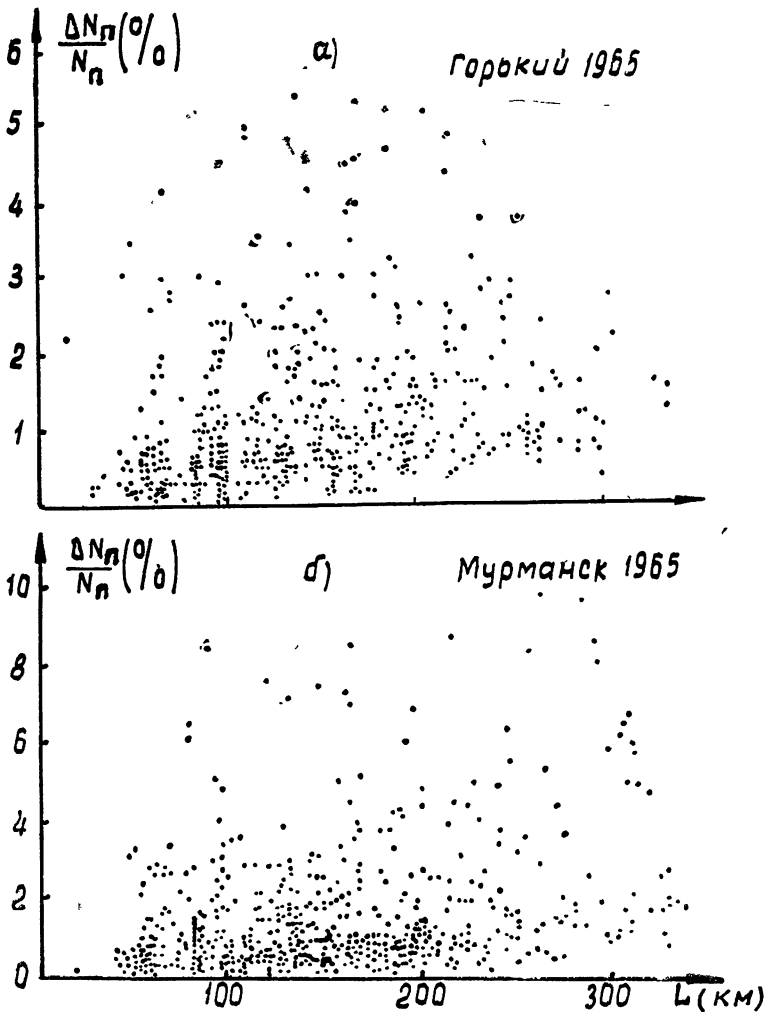


Рис. 6.

### КВАЗИСИНУСОИДАЛЬНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ

Иногда на графиках разности фаз сигналов когерентных частот имели место квазисинусоидальные возмущения (см. рис. 7а). В этом примере производная разности фаз несколько раз меняет знак. Это свидетельствует о сильном ионосферном возмущении периодического типа [9]. Значительно чаще встречались более слабые квазисинусоидальные неоднородности, которые лишь слегка деформировали регулярный временной ход производной разности фаз  $\Phi$ . Неоднородности подобного типа встречались в Горьком примерно в 5% всех записей разности фаз, причем преимущественно днем в период равноденствия. Ночью они также имеют место, но обычно сопровождаются наличием флуктуаций других описанных выше типов.

В Мурманске квазисинусоидальные возмущения встречаются несколько реже (3% всех наблюдений), причем при пролетах ИСЗ с севера на юг неоднородности квазисинусоидального типа обычно появлялись лишь в конце сеанса, а для пролетов с юга на север — в начале сеанса, т. е. на широтах севернее Мурманска подобного типа возмущения встречались крайне редко. Выше широты  $68^\circ$  для подыоносферной точки неоднородности квазисинусоидального типа наблюдались лишь в 4-х случаях.

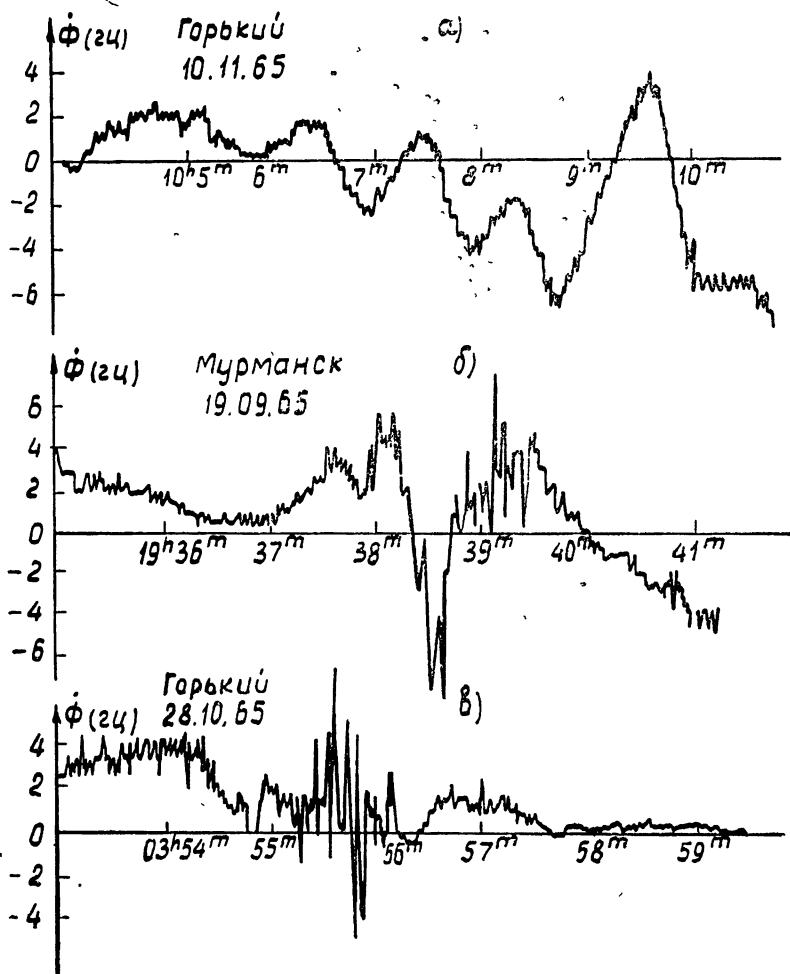


Рис. 7.

При сопоставлении случаев фазовых наблюдений неоднородностей квазисинусоидального типа с данными станции вертикального зондирования ионосферы в Горьком оказалось, что почти все эти случаи сопровождалось появлением на ионограммах различного рода ионосферных возмущений. Днем квазисинусоидальные флуктуации разности фаз сигнала ИСЗ обычно сопровождаются либо сильной деформацией слоя с резким изменением критических частот, либо появлением крупных неоднородностей типа «перемещающихся возмущений» [10]. Ночью квазисинусоидальные возмущения обычно сопровождалось сильной диффузностью слоев, иногда имело место появление  $E_s$  с частичной или полной экранировкой слоя  $F$ .

По-видимому, такие возмущения обусловлены периодическими структурами из крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации с большими по величине горизонтальными градиентами концентрации. Оценки показывают, что характерный период неоднородностей  $L \sim 200$  км, а  $\Delta N_p/N_p \sim (1 \div 5) 10^{-2}$ .

Кроме описанных выше типов возмущений на записях разности фаз сигналов когерентных частот иногда появляются возмущения локального характера (рис. 7б, в) с размерами 300—400 км. Такие локальные неоднородности встречались как в Горьком, так и в Мурманске, чаще в вечернее и ночное время.

В заключение авторы благодарят Л. М. Барсукову, Т. И. Закатову и В. В. Комракову за помощь в обработке материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, 11, № 9, 1318 (1968).
2. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрномия, 2, 688 (1962); Космические исследования, 3, 584 (1965).
3. G. G. Getmantsev, L. M. Erokhimov, Annals of IQSY, 1968 (in press).
4. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Геомагнетизм и аэрномия, 3, 816 (1963).
5. Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 7 (1967).
6. Tuhi Ram Tyagi and Y. V. Somoyajni, Rad. Sci., 1, № 10, 1125 (1966).
7. J. A. Blobuchar, H. E. Whitey, Rad. Sci., 1, № 10, 1149 (1966).
8. R. V. Bhousele, J. Geoph. Res., 71, № 19, 4571 (1966).
9. Э. Е. Митякова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 770 (1968)
10. L. H. Heisler, J. Atm. Terr. Phys., 25, 71 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 июля 1967 г.

#### ELECTRON DENSITY IRREGULARITIES IN THE IONOSPHERE ACCORDING TO THE MEASUREMENTS OF SATELLITE SIGNALS BY THE DIFFERENTIAL DOPPLER METHOD

*N. A. Mityakov, E. E. Mityakova, V. A. Cherepovitskii*

The authors present the results of processing the fluctuations of the phase difference of „Explorer-22” coherent signals observed in Gorky and Murmansk in 1965. A classification of irregularities is given and their main parameters are estimated.

УДК 551.510.535

## О ВРЕМЕНИ ФОРМИРОВАНИЯ СПОРАДИЧЕСКОГО СЛОЯ E

Ю. А. Игнатьев

На основе теории образования спорадического слоя E за счет ветровых сдвигов получено уравнение, описывающее временные изменения электронной концентрации. Найдено решение этого уравнения и проведены оценки времени формирования слоя E<sub>s</sub> в случае, когда скорость ветра достигла определенной величины. Показано, что после установления ветровой системы слой E<sub>s</sub> формируется с характерным временем τ порядка нескольких минут.

Исследования спорадического слоя E являются одним из актуальных вопросов физики верхней атмосферы. В настоящее время разработана теория, объясняющая формирование E<sub>s</sub> на средних широтах перераспределением электронной концентрации N в ионосфере. Этот процесс связывают с наличием вертикальных сдвигов в ветре нейтральных частиц и влиянием магнитного поля Земли [1-4]. В [4, 5] анализируются модели слоя E<sub>s</sub> в установившемся режиме и указывается действие диффузии на профиль стационарного E<sub>s</sub>. Накоплен значительный экспериментальный материал, подтверждающий теорию ветрового сдвига [6-8].

Наряду с анализом стационарных моделей E<sub>s</sub> представляет интерес определение времени формирования спорадического слоя E. Именно этому вопросу и посвящена данная работа. Здесь будет рассмотрена задача об образовании E<sub>s</sub> в условиях, когда система ветров с вертикальным сдвигом считается заданной. В разделе 1 получено уравнение, описывающее изменения N в E-слое при наличии неоднородного по высоте ветрового движения. Это уравнение позволяет определить не только форму стационарного слоя E<sub>s</sub>, но также описать переходный процесс от регулярного распределения ионизации к локальным повышенным (или пониженным) плотностям электронной концентрации. В разделе 2 дано решение указанного уравнения, удовлетворяющее определенным начальным и граничным условиям. Проведена оценка характерного времени формирования τ среднеширотного слоя E<sub>s</sub> (в условиях, когда возникли ветровые сдвиги).

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ИЗМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ПРИСУТСТВИИ ВЕТРОВОГО СДВИГА

Будем исходить из квазигидродинамических уравнений для ионов и электронов, считая скорость движения молекул U заданной:

$$mN_e \frac{\partial U_e}{\partial t} + mN_e (U_e \nabla) U_e + mN_e \gamma_e (U_e - U) = -\kappa T_e \nabla N_e - e N_e E - m \omega_H N_e [U_e h]; \quad (1)$$

$$MN_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + MN_i (U_i \nabla) U_i + MN_i \gamma_i (U_i - U) = \quad (2)$$



$$= -\kappa T_i \nabla N_i + e N_i E + M \Omega_H N_i [U_i h];$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} (N_e U_e) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div} (N_i U_i) = 0, \quad (4)$$

где  $N_i$  и  $N_e$  — концентрации ионов и электронов,  $m$  и  $M$  — их массы,  $U_i$  и  $U_e$  — скорости упорядоченного движения,  $T_e$  и  $T_i$  — температуры электронов и ионов,  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — их гирочастоты,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $h$  — единичный вектор в направлении магнитного поля Земли,  $H_0$ ,  $\nu_e$  и  $\nu_i$  — эффективные числа столкновений электронов и ионов с нейтральными молекулами. Столкновения между заряженными частицами на уровне  $E$ -слоя можно не принимать во внимание.

Движение нейтральных молекул в присутствии ионов и электронов приводит к появлению внутреннего электрического поля  $E$ , препятствующего возникновению значительного пространственного заряда. Введение такого поля характерно для задач, связанных с процессом диффузии и увлечения заряженных частиц нейтральными. Поле  $E$  в условиях ионосферы будем считать потенциальным, т. е.  $E = -\nabla\varphi$  [9]. Кроме того, на высотах, где наблюдается спорадический слой  $E$ , выполняются условия

$$\nu_i^2 \gg \Omega_H^2, \quad \omega_H^2 \gg \nu_e^2. \quad (5)$$

В силу квазинейтральности плазмы примем, что  $N_i = N_e = N$ . Будем также считать, что  $T_i \simeq T_e = T$ . В (1), (2) можно пренебречь членами  $m N_e (U_e \nabla) U_e$  и  $M N_i (U_i \nabla) U_i$  по сравнению с  $m N_e U_e$  и  $M N_i U_i$  [10]. Далее интересуемся процессами с временами, большими интервалов времени между соударениями  $\tau_e \sim \frac{1}{\nu_e}$  и  $\tau_i \sim \frac{1}{\nu_i}$ . Тогда в (1), (2) могут быть опущены члены с производными  $\partial/\partial t$ .

Используя указанные выше предположения, выражаем скорости  $U_e$  и  $U_i$  из (1), (2) и подставляем в (3), (4):

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\nu_e}{\omega_H} \operatorname{div} N [U_i h] + \operatorname{div} N h (U_i h) - \frac{\kappa T}{m \nu_e} \left\{ \operatorname{div} h (\nabla N h) - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu_e}{\omega_H} \operatorname{div} [\nabla N h] \right\} = \frac{e}{m \nu_e} \left\{ \operatorname{div} N h (\nabla \varphi h) - \frac{\nu_e}{\omega_H} \operatorname{div} N [\nabla \varphi h] \right\}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\Omega_H}{\nu_i} \operatorname{div} N [U_e h] + \operatorname{div} N U_e - \frac{\kappa T}{M \nu_i} \left\{ \nabla^2 N + \frac{\Omega_H}{\nu_i} \operatorname{div} [\nabla N h] \right\} =$$

$$= - \frac{e}{M \nu_i} \left\{ \operatorname{div} N \nabla \varphi + \frac{\Omega_H}{\nu_i} \operatorname{div} N [\nabla \varphi h] \right\}. \quad (7)$$

Горизонтальные размеры  $E_s$  ( $\sim 100$  км) малы по сравнению с радиусом Земли, поэтому ионосферу можно считать плоской. Используем прямоугольную систему координат с осью  $z$ , направленной вертикально вверх. Полагаем, что магнитное поле Земли находится в плоскости  $xz$ . Тогда единичный вектор  $h$  имеет компоненты  $\sin \alpha$ ,  $0$ ,  $\cos \alpha$  ( $\alpha$  — угол между вертикалью и геомагнитным полем  $H_0$ ).

Измерения скорости движения нейтральных частиц в нижней ионосфере показали, что ветер в основном горизонтален [11, 12]. Поэтому предположим, что  $U_z = 0$ . В [2] показано, что восточно-западная ком-

понента  $U_y$  горизонтального ветра частиц вносит значительно более существенный вклад в формирование  $E_s$ , чем северо-южная компонента  $U_x$ . В связи с этим оставляем только восточно-западную компоненту нейтрального ветра.

Вертикальные размеры спорадического слоя  $E$  ( $\sim 1$  км) малы по сравнению с его характерными горизонтальными размерами ( $\sim 100$  км), поэтому можно пренебречь градиентами в горизонтальном направлении по сравнению с градиентами в вертикальном, т. е. можно принять, что  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ . В этом случае, опираясь на неравенство  $Mv_i \gg mv_e$ , можно исключить из уравнений (6), (7) потенциал  $\varphi$  и перейти к уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha \frac{\partial (NU_y)}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где  $D_a = \frac{2\kappa T}{Mv_i}$  — коэффициент амбиполярной диффузии.

В уравнениях (3), (4) не отражен вклад рекомбинации и ионизации. Заметим, что при учете диффузии вполне возможно построение моделей  $E_s$  без учета влияния этих процессов [4]. Образование и исчезновение заряженных частиц представляет интерес при определении предельных частот  $f_0 E_s$ . При оценке времени установления  $E_s$  процессы ионообразования не должны, по-видимому, играть определяющей роли.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ФОРМИРОВАНИЯ СПОРАДИЧЕСКОГО СЛОЯ $E$

Будем считать, что ветровой механизм образования  $E_s$  действует в области  $\Delta z = z_2 - z_1$ , где и происходит перераспределение электронной концентрации, приводящее к формированию  $E_s$ . Вне  $\Delta z$  полагаем, что ветер не имеет вертикальных сдвигов и регулярное распределение  $N$  остается невозмущенным. В соответствии с этим решение уравнения (8) должно удовлетворять граничным условиям

$$N(z_1, t) = N_1, \quad N(z_2, t) = N_2 \quad (9)$$

и начальному условию

$$N(z, 0) = N_0(z), \quad (10)$$

где  $N_0(z)$  — регулярное распределение электронной концентрации в  $E$ -слое ионосферы при отсутствии ветровых сдвигов, а  $N_1$  и  $N_2$  — значения  $N_0(z)$ , не зависящие от времени  $t$ , на уровнях  $z = z_1$  и  $z = z_2$ .

Решение уравнения (8) ищем в виде суммы

$$N(z, t) = \bar{N}(z) + v(z, t).$$

Распределение электронной концентрации  $\bar{N}(z)$ , отвечающее сформированному  $E_s$ , определяется уравнением

$$D_a \frac{d^2 \bar{N}}{dz^2} + \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha \frac{d(\bar{N}U_y)}{dz} = 0 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\bar{N}(z_1) = N_1, \quad \bar{N}(z_2) = N_2.$$

Решение уравнения (11) дает профиль стационарного слоя  $E_s$  [4].

Функция  $v(z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha \frac{\partial (\varphi U_y)}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$v(z_1, t) = 0, \quad v(z_2, t) = 0 \quad (13)$$

и начальным условием

$$v(z, 0) = N_0(z) - \bar{N}(z). \quad (14)$$

Отметим, что из смысла стационарного распределения  $\bar{N}(z)$  следует, что  $N(z, t)$  стремится к  $\bar{N}(z)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда ясно, что  $v(z, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При решении уравнения (12) с однородными граничными условиями (13) и начальным условием (14) используем метод разделения переменных, полагая

$$v(z, t) = \psi(z) \varphi(t). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12), получим, что

$$\varphi(t) = C e^{-Lt}; \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha \frac{1}{D_a} U_y \frac{d\psi}{dz} + \frac{1}{D_a} \left( \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha \frac{dU_y}{dz} + L \right) \psi = 0, \quad (17)$$

где  $C$  — некоторая постоянная,  $L$  — постоянная разделения. Решение уравнения (17) должно удовлетворять граничным условиям

$$\psi(z_1) = 0, \quad \psi(z_2) = 0. \quad (18)$$

Полагаем

$$\psi(z) = y(z) \exp\left(-\frac{A}{2} \int U_y dz\right),$$

где

$$A = \frac{1}{D_a} \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha.$$

Тогда уравнение (17) приводится к виду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left( \frac{A}{2} \frac{dU_y}{dz} - \frac{A^2 U_y^2}{4} + \frac{L}{D_a} \right) y = 0. \quad (19)$$

Эксперименты показали, что ветры на уровне  $E$ -слоя ионосферы, обладающие сдвигами скорости по высоте, часто близки к синусоидальным [11, 13]. Профиль ветра выбирался синусоидальным в [2, 4]. И в нашем случае распределение ветра нейтральных частиц по высоте  $z$  предполагаем вида  $U_y = U_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} z$  ( $U_0$  и  $\lambda$  — амплитуда и длина волны ветровой системы соответственно).

Далее в уравнении (19) делаем замену переменных:  $x = \frac{2\pi}{\lambda} z$ . В этом случае (19) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x) y = 0, \quad (20)$$

где

$$A_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left( \frac{L}{D_a} - \frac{A^2 U_0^2}{8} \right),$$

$$A_1 = \frac{\lambda}{8\pi} A U_0, \quad A_2 = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} A^2 U_0^2.$$

Уравнение (20) имеет решение вида [14]

$$y(x) = B_1 e^{\mu x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} + B_2 e^{-\mu x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx},$$

где  $B_1$ ,  $B_2$  и  $c_k$  — постоянные,  $\mu$  — характеристический показатель, определяемый через коэффициенты  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  уравнения (20), — в общем случае может быть комплексным:  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — действительны.

Для исследования (20) в применении к поставленной выше задаче требуется некоторая конкретизация. Проведем оценку коэффициентов в уравнении (20). Считая, что на высоте  $z \simeq 110$  км  $D_a = 50$  м<sup>2</sup>·сек<sup>-1</sup>,  $\frac{\Omega_H}{U_0} \sim \frac{3}{7}$ ,  $\sin \alpha \sim 0,7$  (на умеренных широтах в северном полушарии),  $U_0 = 50$  м·сек<sup>-1</sup> и  $\lambda = 5 \cdot 10^3$  м, получим

$$A_0 \simeq (14L - 7,7) \cdot 10^3, \quad A_1 \simeq 60, \quad A_2 \simeq 7,7 \cdot 10^3.$$

Рассмотрим случай

$$L < \frac{A^2 U_0^2 D_a}{8}. \quad (21)$$

Если  $L > \frac{A^2 U_0^2 D_a}{8}$ , то характерные времена изменения  $N$  будут значительно меньшими. Нас же интересуют наибольшие из  $\tau$ , характеризующие время образования  $E_c$ . В уравнении (20) можно пренебречь членом с  $A_1$  при условии (21). В области  $A_0 < 0$ ,  $A_2 > 0$  и  $|A_0| \leq A_2$  характеристический показатель  $\mu$  вычисляется через  $A_0$  и  $A_2$  по формуле [15]

$$\operatorname{ch}(\pi\mu) = \operatorname{ch}(\operatorname{Im} J) \cos(\operatorname{Re} J), \quad (22)$$

где

$$J = \int_0^\pi (A_0 + A_2 \cos 2x)^{1/2} dx.$$

Обозначим

$$a = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{L}{D_a}, \quad A_0 = a - A_2.$$

Интеграл  $J$  равен

$$J = \sqrt{a} \int_0^\pi \left( 1 - \frac{2A_2}{a} \sin^2 x \right)^{1/2} dx = 2\sqrt{a} E(p),$$

где  $p = \sqrt{\frac{2A_2}{a}}$  и  $E(p)$  — полный эллиптический интеграл второго рода.

При выполнении условия (21)  $p \gg 1$ . В этом случае [16]

$$E(p) = \pi(4p)^{-1} \pm ip.$$

Тогда

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{a}{\sqrt{2A_2}} \pm 2i\sqrt{2A_2}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получаем

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch} \left\{ \operatorname{ch} \left( 2\sqrt{2A_2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{a}{\sqrt{2A_2}} \right) \right\}. \quad (24)$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \exp \left( \frac{AU_0\lambda}{4\pi} \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \left( B_1 \exp \left( \frac{2\pi}{\lambda} \mu z \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \times \right. \\ & \times \exp \left( ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) + B_2 \exp \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \mu z \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( -ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \left. \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Полагаем,  $z_1=0$ ,  $z_2 = \frac{3\lambda}{2}$ . Тогда  $\Delta z = \frac{3\lambda}{2}$ . По теории ветровых сдвигов перераспределение электронной концентрации, приводящее к образованию локальных неоднородностей, происходит в области  $\Delta z = \lambda$ . В нашем случае выбрана более широкая область для того, чтобы была возможность образования слоя как с повышенным (по отношению к однородной ионосфере) значением  $N$  на уровне  $z=\lambda$ , так и с пониженным значением  $N$  на уровне  $z = \frac{\lambda}{2}$ . Отметим, что проводились расчеты для нескольких различных  $\Delta z$ . Результаты показали, что картина качественно не меняется из-за относительного произвола в выборе  $\Delta z$ .

Решение (25) уравнения (18) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi \left( \frac{3\lambda}{2} \right) = 0. \quad (26)$$

Подстановка (26) в (25) дает

$$\begin{aligned} B_1 = -B_2, \\ \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{2n}{3}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

В этом случае решение уравнения (8), удовлетворяющее граничным условиям (9), имеет вид

$$\begin{aligned} N(z, t) = & \bar{N}(z) + De^{-Lt} \exp \left( \frac{AU_0\lambda}{4\pi} \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \times \\ & \times \left\{ \exp \left( in \frac{4\pi}{3\lambda} z \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) - \exp \left( -in \frac{4\pi}{3\lambda} z \right) \times \right. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( -ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \Big\}.$$

Коэффициенты  $c_k$  находятся по методу, указанному Хиллом [14, 15]. Постоянная  $D = CB_1$  определяется из начального условия (10).

В силу линейности и однородности уравнения (8) сумма частных решений (28) удовлетворяет этому уравнению, а также начальному и граничным условиям. Тогда общее решение уравнения (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} N(z, t) = & \bar{N}(z) + \exp \left( \frac{AU_0\lambda}{4\pi} \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-L_n t} \times \\ & \times \left\{ \exp \left( in \frac{4\pi}{3\lambda} z \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) - \exp \left( -in \frac{4\pi}{3\lambda} z \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( -ik \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (27) в (24), можно определить постоянную разделения

$$L_n = \frac{U_0 \Omega_H}{\lambda \nu_i} \sin \alpha \arccos \left\{ \cos \frac{2\pi n}{3} [\operatorname{ch} (2\sqrt{2A_2})]^{-1} \right\}. \quad (29)$$

Так как  $2A_2 = 1,5 \cdot 10^4 \gg 1$ , в (29) возможно разложение

$$L_n = \frac{U_0 \Omega_H}{\lambda \nu_i} \sin \alpha \left\{ \frac{\pi}{2} (1 + 4n) - \cos \frac{2\pi n}{3} [\operatorname{ch} (2\sqrt{2A_2})]^{-1} \right\}.$$

Чем меньше  $L_n$ , тем медленнее будут изменения  $N(z, t)$ , поэтому для оценки временей формирования  $E_s$  из  $L_n$  надо выбирать наименьшее, что соответствует  $n=0$ . В этом случае получим

$$L_0 = \frac{U_0 \Omega_H}{\lambda \nu_i} \sin \alpha \left\{ \frac{\pi}{2} - [\operatorname{ch} (2\sqrt{2A_2})]^{-1} \right\}. \quad (30)$$

Используя приведенные выше значения величин, входящих в правую часть (30), получим, что характерное время формирования спорадического слоя  $E$  равно  $\tau_0 \simeq 2,2 \cdot 10^2$  сек.

После того, как в некоторой области  $\Delta z$  слоя  $E$  ионосферы возникли ветровые сдвиги,  $E_s$  формируется с характерным временем порядка нескольких минут. Реальное время образования  $E_s$  может быть несколько больше, так как скорость горизонтальных ветров достигает значения порядка  $50 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  за некоторое конечное время.

Из уравнения (2) видно, что с ветровым сдвигом можно связать некоторую вертикальную эффективную скорость, абсолютная величина которой равна

$$V_{\text{эфф}} = \frac{\Omega_H}{\nu_i} \sin \alpha |U_y|.$$

Тогда, согласно (30), приближенно имеем\*

$$L_0 = \tau_0^{-1} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{V_{эфф}}{\lambda}.$$

Это означает, что основную роль в процессе формирования  $E_s$  при указанных ограничениях играет механизм «собираания» ионов в области вблизи  $z = \lambda$ . При этом получается, что ионизация как бы поставляется из области  $\Delta z \sim \lambda$  и движется со средней скоростью  $V_{эфф}$ . Как следует из (30), диффузия играет второстепенную роль при определении  $\tau_0$ . Этот вывод трудно получить из уравнений движения, не прибегая к проведенному анализу.

Автор считает своим долгом выразить благодарность Б. Н. Гершману и Г. И. Григорьеву за ценные обсуждения и помощь, оказанную при выполнении данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Whitehead, J. Atm. Terr. Phys., **20**, № 1, 49 (1961).
2. J. D. Whitehead, Ionospheric Sporadic E, Pergamon Press, 1962.
3. L. H. Heisler, J. D. Whitehead, Nature, **187**, 676 (1960).
4. W. I. Axford, J. Geophys. Res., **68**, № 3, 769 (1963).
5. W. I. Axford, D. M. Cunnold, Radio Science, **1**, № 2, 191 (1966).
6. L. G. Smith, Radio Science, **1**, № 2, 178 (1966).
7. L. M. Lalone, J. Geophys. Res., **71**, № 21, 5059 (1966).
8. S. A. Bowhill, Radio Science, **1**, № 2, 187 (1966).
9. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрoномия, **5**, № 2, 251 (1965).
10. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Ю. А. Игнатьев, Геомагнетизм и аэрoномия, **8**, № 1, 72 (1968).
11. P. M. Millman, J. Geophys. Res., **64**, № 12, 2122 (1959).
12. H. Edwards, J. Geophys. Res., **68**, № 10, 3021 (1963).
13. N. W. Rosenber, C. G. Justus, Radio Science, **1**, № 2, 149 (1966).
14. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.
15. М. Д. О Стретт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, ГНТИУ, Харьков, 1935.
16. А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, изд. АН СССР, 1941.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 мая 1967 г.

#### ON THE TIME OF FORMATION OF SPORADIC E-REGION

Yu. A. Ignat'ev

The equation describing the time variations of the electron density is derived on the basis of the theory of sporadic E-region formation due to the wind drifts. The solution of the equation is found and the time of E-region formation is estimated for the case when the wind velocity reached the definite value. The  $E_s$  region is shown to be formed with the characteristic time  $\tau$  of about some minutes after the formation of the wind system.

\* Второе слагаемое в (30) при оценке  $\tau_0$  можно опустить. В случае синусоидального профиля ветра  $L_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda} |V_{эфф}|_{z=\lambda}$ .

УДК 539.183.4

## ВЛИЯНИЕ ДИФФУЗИИ СПИНОВ НА СИГНАЛ СПИНОВОГО ЭХА В НЕОДНОРОДНОМ ПЕРЕМЕННОМ ВИХРЕВОМ СОЛЕНОИДАЛЬНОМ ПОЛЕ

*Е. Г. Скροцкая и Г. В. Скροцкий*

Рассматриваются особенности сигналов спинового эха в случае, когда неоднородность магнитного поля создается слабым переменным полем низкой частоты, протекающим через образец. Показано, что учет влияния диффузии спинов в этом случае приводит к простому выражению для изменения скорости релаксации, пропорциональному коэффициенту диффузии и зависящему от частоты и фазы переменного тока.

Для наблюдения явления спинового эха образец помещают в сильное постоянное магнитное поле  $H_0 = H_z$  с небольшим известным градиентом и радиочастотное поле  $H_1(t)$  частоты  $\omega$ , близкой к резонансной. Такой градиент поля можно создать, пропуская через ампулу, наполненную раствором парамагнитной соли, слабый ток.

Ниже рассматривается случай, когда вдоль образца радиуса  $R$  пропускается не постоянный, а переменный ток  $j = j_y$  низкой частоты  $\Omega$ , создающий в нем магнитное поле

$$H_{2x} = \alpha z \sin(\Omega t + \delta), \quad H_{2y} = 0, \quad H_{2z} = -\alpha x \sin(\Omega t + \delta), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi}{c} (j_+ - j_-) = \frac{2\pi e}{c} (n_+ u_+ - n_- u_-), \quad u_{\pm} = \frac{e E_0}{6\pi\eta a_{\pm}}, \quad (2)$$

$\eta$  — коэффициент вязкости,  $a_{\pm}$  — эффективные радиусы ионов в растворе. Это магнитное поле соленоидально, так как  $\text{div } H_2 = 0$ , откуда следует, что и для намагниченности образца имеет место условие  $\text{div } M = 0$ .

Наличие градиента приводит к диффузии намагниченности, поэтому уравнения, описывающие ее изменение во времени, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial t} + \frac{M_{xy}}{T_2} - D\nabla^2 M_{xy} &= \gamma [M, H]_{xy}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial t} + \frac{M_z - M_0}{T_2} - D\nabla^2 (M_z - M_0) &= \gamma [M, H]_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_0 = \chi_0 H_0$  — равновесная намагниченность в поле  $H_0$ ,  $D$  — коэффициент диффузии парамагнитных ионов в растворе,

$$H \equiv \{ \alpha z \sin(\Omega t + \delta) + H_1 \cos(\omega t), \quad -H_1 \sin(\omega t), \quad H_0 - \alpha x \sin(\Omega t + \delta) \}, \quad (4)$$

$H_1$  — амплитуда вращающегося радиочастотного магнитного поля. Для получения сигналов спинового эха радиочастотное поле включается в течение коротких промежутков времени определенной длительности и в определенной последовательности.



Влияние неоднородного поля, создаваемого переменным током низкой частоты, проходящим через электролит, на сигналы спинового эха рассматривалось в работе Гейслера и Пфейфера [2], экспериментально наблюдавших периодическую зависимость амплитуды эха от промежутка времени между двумя импульсами. Однако авторы при объяснении наблюдавшихся явлений не учитывали самодиффузии магнитных ионов, которая, как будет показано в этом случае играет существенную роль. Ядерная намагниченность в неоднородном поле становится не только функцией времени, но и координат, причем ее градиент даже при небольшой неоднородности медленно изменяющегося поля может быть очень велик.

На протяжении действия импульса  $t_1$  будем пренебрегать неоднородностью поля, релаксационными членами и диффузией. Будем считать, что период переменного тока  $2\pi/\Omega \gg t_1$ , а амплитуда импульса  $H_1$  достаточно мала, чтобы не вызвать насыщения. Нетрудно убедиться, что этим условиям всегда можно удовлетворить.

Переходя в систему координат, вращающуюся с резонансной частотой:

$$\frac{M_x \pm iM_y}{M_0} = m_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t}, \quad \frac{M_z}{M_0} = m_z, \quad (5)$$

при сделанных предположениях, согласно (3) и (4), получим

$$\frac{dm_x}{dt} = 0, \quad \frac{dm_y}{dt} = \omega_1 m_z, \quad \frac{dm_z}{dt} = -\omega_1 m_y, \quad (6)$$

где  $\omega_1 = \gamma H_1$ .

Общее решение этой системы уравнений в лабораторной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} m_x(t) &= m_x(t') = \text{const}, \\ m_y(t) &= m_y(t') \cos[\omega_1(t - t')] + m_z(t') \sin[\omega_1(t - t')], \\ m_z(t) &= -m_y(t') \sin[\omega_1(t - t')] + m_z(t') \cos[\omega_1(t - t')], \end{aligned} \quad (7)$$

$m_{x, y, z}(t')$  находятся из начальных условий. После выключения радиочастотного импульса, когда система остается под действием постоянного поля  $H_0$  и неоднородного поля  $H_2(t)$ , в ней происходят релаксационные и диффузионные процессы.

Производя в (3) замену переменных

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm} &= m_{\pm} e^{\mp \Delta\omega t + t/T_2}, \\ \psi &= (m_z - 1) e^{t/T_2}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0, \end{aligned} \quad (8)$$

получим, опустив быстроосциллирующие члены вида  $m_x(t) e^{i\omega_0 t + t/T_2}$  уравнение для  $\varphi_{\pm}$ :

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial t} = \pm i \gamma \alpha x \cos(\Omega t + \delta) \varphi_{\pm} + D \nabla^2 \varphi_{\pm}. \quad (9)$$

Пренебрегая несущественным диффузионным членом  $D \nabla^2 \varphi_{\pm}$  в уравнении для  $\psi$ , будем считать  $\partial \psi / \partial t = 0$ . Тогда решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi_{\pm}(x, t') = \Phi_{\pm}(x, t') = m_{\pm}(t') \pm i m_y(t') \quad \text{для } t > t',$$

при всех значениях  $x$  имеет вид

$$\varphi_{\pm}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t')}} \exp\left(\pm ik_{t, t'} x - D \int_{t'}^t k_{t, t'}^2 dt\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\pm}(\xi, t) \exp\left(\frac{\left[i(\xi - x) + 2D \int_{t'}^t k_{t, t'} dt\right]^2}{4D(t-t')}\right) d\xi, \quad (10)$$

$$\psi(x, t) = \text{const},$$

где

$$k_{t, t'} = \frac{\gamma\alpha}{\Omega} [\sin(\Omega t + \delta) - \sin(\Omega t' + \delta)]. \quad (11)$$

Рассмотрим в качестве примера классический случай, когда радиочастотное поле подается в виде двух импульсов  $90^\circ$  и  $180^\circ$  длительности  $t_1 = \pi/2\omega_1$  и  $t_2 = \pi/\omega_1$ , разделенных промежутком времени  $\tau$ . Воспользовавшись (7) и (10), найдем составляющие вектора намагниченности по осям вращающейся системы координат для момента времени  $t > \tau + t_2$ :

$$m_x(t) + im_y(t) = -i \exp\left[i\Theta - \frac{t - t_1 - t_2}{T_2} - D(L_{t, \tau+t_2} - L_{\tau, t})\right], \quad (12)$$

$$m_z(t) - 1 = \exp\left(\frac{t - t_1 - t_2}{T_1}\right) - 2 \exp\left(-\frac{t - \tau - t_2}{T_1}\right),$$

где

$$\Theta = (k_{t, \tau+t_2} - k_{\tau, t_1})x + \Delta\omega(t - 2\tau + t_1 - t_2),$$

$$L_{\tau, t_1} = \int_{\tau_1}^{\tau} k_{t, t}^2 dt, \quad (13)$$

$$L_{t, \tau+t_2} = \int_{\tau+t_2}^t (k_{t, \tau+t_2} - k_{\tau, t})^2 dt.$$

Полученные выражения для вектора  $m$  зависят от координаты  $x$  так как вектор намагниченности  $M$  из-за неоднородности поля разложится в «веер».

Для определения формы сигнала эха необходимо просуммировать сигналы от отдельных составляющих веера по всем возможным значениям неоднородного поля. Для цилиндрического образца длины  $l$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{\pi R^2 l} \int_{-R}^R f(x) dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^l dz. \quad (14)$$

Выполнив операцию усреднения (14), получим к моменту собирания «веера»  $t_0 = 2\tau + t_2 - t_1$  выражения

$$\langle m_x(t_0) \rangle = 0, \quad \langle m_y(t_0) \rangle = -\frac{2}{\Delta K_0 R} J_1(\Delta K_0 R) \exp\left[-\frac{2\tau}{T_2} - D \frac{\gamma^2 \alpha^2}{\Omega^2} f(\tau)\right], \quad (15)$$

$$\langle m_z(t_0) \rangle = 1 + \exp\left(-\frac{2\tau}{T_1}\right) - 2 \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right),$$

где  $J_1$  — функция Бесселя,

$$\begin{aligned} \Delta K_0 &= -\frac{4\gamma\alpha}{\Omega} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \sin(\Omega t + \delta), \\ f(\tau) &\simeq \tau \left[ 1 + 2 \sin^2 \delta + 8 \sin \frac{\Omega\tau}{2} \cos \left( \frac{\Omega\tau}{2} + \delta \right) \sin(\Omega\tau + \delta) \right] - \\ &- \frac{1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) \cos[2(\Omega\tau + \delta)] + \frac{8}{\Omega} \sin \delta \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \cos(\Omega\tau + \delta) - \\ &- \frac{8}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sin \left( \frac{3\Omega\tau}{2} + \delta \right) \sin(\Omega\tau + \delta). \end{aligned} \quad (16)$$

Релаксационные процессы приводят к тому, что «веер» магнитных моментов не будет плоским, поэтому суммарная намагниченность к моменту  $t_0$  не будет лежать строго вдоль оси  $y'$ . Однако это обстоятельство только несколько уменьшает максимальную амплитуду эха.

Затухание амплитуды эха обуславливается релаксационным и диффузионным механизмами. Если через электролит течет постоянный ток  $\Omega = 0$ ,  $\delta = 0$ , то имеет место обычно наблюдаемое диффузионное затухание эха, связанное с неоднородностью магнитного поля в образце.

В этом случае, как и следовало ожидать [3],  $\frac{1}{\Omega^2} f(\tau) = \frac{2}{3} \tau^3$ . Однако и этот случай не является тривиальным, так как создаваемую током хорошо известную и строго линейную неоднородность полного подмагничивающего поля можно легко изменять в широких пределах.

Если пропускать через электролит переменный ток низкой частоты  $\Omega\tau \ll 1$ , то затухание сигнала, обусловленное диффузией, будет также происходить по закону  $e^{-k\tau}$ .

При определенных частотах переменного поля, таких, что  $\Omega\tau = 2\pi n$  (например, для  $\tau \simeq 10^{-2}$  сек,  $\Omega = 6 \cdot 10^2$  н), характер затухания существенно изменяется, так как

$$\frac{f(\tau)}{\Omega^3} = \frac{1 + 2 \sin^2 \delta}{\Omega^2} \tau, \quad (17)$$

а экспоненциальный множитель в  $\langle m_y(t_0) \rangle$  принимает вид  $\exp(-2\tau/T_2^*)$ , где

$$\frac{1}{T_2^*} \equiv \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_D} = \frac{1}{T_2} + D \frac{\gamma^2 \alpha^2 (1 + 2 \sin^2 \delta)}{2\Omega^2}. \quad (18)$$

В этом случае релаксацию в системе можно описать, вводя характерное время релаксации  $T_D$ , зависящее от амплитуды силы тока протекающего через образец, его частоты  $\Omega = 2\pi n/\tau$  и фазы  $\delta$ . Если  $T_2$  известно из отдельных измерений, то соотношение (18) подсказывает удобный способ измерения подвижностей ионов в растворе и коэффициента диффузии  $D$ .

Амплитуда сигнала эха

$$F(\Omega\tau) = \frac{2}{\Delta K_0 R} J_1(\Delta K_0 R) \quad (19)$$

осциллирует при изменении промежутка времени  $\tau$  между импульсами. Характер осцилляций зависит от величины  $\Omega$ . С ростом  $\Omega$  число осцилляций быстро уменьшается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Померанцев, УФН, **65**, 87 (1958).
2. D. Geissler und H. Pfeifer, Zs. für Naturforsch, **12a**, 70 (1957).
3. H. C. Torrey, Phys. Rev., **101**, 563 (1956).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
31 июля 1967 г.

INFLUENCE OF SPIN DIFFUSION UPON SPIN ECHO SIGNALS IN AN  
INHOMOGENEOUS ALTERNATING ROTATIONAL SOLENOIDAL FIELD

*E. G. Skrotskaya and G. V. Skrotskii*

The peculiarities of spin echo signals are considered for the case when the magnetic field inhomogeneity is produced by a weak alternating low-frequency field running through a sample. It is shown that when the effect of spin diffusion is taken into account, a simple expression, to be proportional to the diffusion coefficient and depending upon the frequency and phase of alternating current, is derived for the change of a relaxation velocity.

---

УДК 621.378 001

## О САМОВОЗБУЖДЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРАХ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА ПРИ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ НАКАЧКЕ

Г. И. Фрейдман

Показано, что для интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами, описывающих в одномерном приближении самовозбуждение параметрически связанных колебаний в резонаторах оптического диапазона при немонохроматической накачке, выполняется аналог теоремы Флоке. С учетом расстройки от пространственного синхронизма и частотной расстройки спектральных составляющих (мод) накачки определена зависимость среднего значения инкремента колебаний от коэффициентов отражения зеркал и ширины частотного спектра накачки при квазинепрерывном и дискретном спектре ее мод со случайными фазами, а также при синхронизации мод накачки с дискретным спектром.

При параметрическом взаимодействии бегущих волн в кристаллах уменьшение эффективности отбора энергии у накачки с увеличением ширины ее спектра  $\Delta\omega$  связано с нарушением условий синхронизма для разных частотных составляющих волн [1]. Если ширина спектра накачки меньше ширины полосы синхронизма, то она эффективнее отдает энергию взаимодействующим волнам, чем гармоническая накачка той же средней мощности [1].

Для параметрического взаимодействия в резонаторе существенна обратная связь по параметрически связанным волнам. Это обстоятельство приводит в ряде случаев к качественному изменению зависимости эффективности отбора энергии у излучения накачки от ширины и вида ее частотного спектра. Однако рассмотрение процесса самовозбуждения параметрически связанных колебаний в резонаторах оптического диапазона при немонохроматической накачке проводилось [2, 6, 7] лишь для некоторых частных случаев. При этом различные расстройки, (например, расстройка от пространственного синхронизма, разность между периодом модуляции амплитуды накачки и временем прохождение сигнала через резонатор) предполагались пренебрежимо малыми. Целью настоящей работы является учет влияния этих существенных факторов на зависимость среднего\* значения инкремента колебаний от ширины и вида частотного спектра накачки.

Показано, что увеличение инкремента параметрически связанных колебаний в резонаторе при немонохроматической накачке (по сравнению с инкрементом при монохроматической накачке той же мощности) даже без учета нарушения пространственного синхронизма происходит только при определенном виде ее частотного спектра, когда мало спектральных составляющих накачки (мод накачки) с большой частот-

\* Полученные в работе уравнения позволяют также исследовать интересный в оптическом диапазоне вопрос о флуктуациях инкремента колебаний при случайных фазах спектральных составляющих накачки. Качественная оценка (см. примечание на стр. 1354) показывает, что при постоянном числе мод накачки флуктуации инкремента увеличиваются с уменьшением ширины спектра.

ной расстройкой. Если спектральных составляющих накачки с большой частотной расстройкой достаточно много, то они будут отбирать у параметрически связанных колебаний энергию, сравнимую с энергией, отдаваемой этим колебаниям модами накачки с малой частотной расстройкой. Это, в частности, приводит к тому, что при непрерывном (квазинепрерывном) спектре накачки инкремент колебаний не зависит от коэффициентов отражения зеркал (коэффициента передачи цепи обратной связи) для холостой волны. Следует отметить, что этот эффект, а также возможность увеличения инкремента при дискретном спектре накачки связаны с распределенностью параметров рассматриваемых систем и многомодовостью резонаторов оптического диапазона, вследствие чего не имеют аналога в простейших системах с сосредоточенными постоянными [3].

При исследовании параметрически связанных колебаний в резонаторах оптического диапазона обычно пользуются уравнениями для амплитуд мод (см., например, [2, 6]). Однако эти уравнения становятся неудобными для исследования при малых коэффициентах отражения зеркал резонатора и необходимости рассматривать влияние спектральных составляющих накачки с большой частотной расстройкой. Поэтому, используя предположение о малости параметра усиления, получены интегральные уравнения с запаздывающим аргументом и переменными коэффициентами для амплитуд волн в некотором сечении резонатора, одинаково удобные для исследования при произвольной величине коэффициентов отражения зеркал и любой форме спектра излучения накачки.

### 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим в одномерном приближении параметрически связанные колебания в резонаторе, который образован плоскими зеркалами, расположенными в сечениях  $z = -l_-$ ,  $z = l_+$  и прозрачными для излучения накачки. Между зеркалами находится одноосный кристалл, нелинейная восприимчивость  $\chi_{abc}$  которого отлична от нуля в области  $0 < z < d$ . Поле накачки на входе в кристалл ( $z = 0$ ) запишем в виде

$$E_3(t; 0) = e_3 \mathcal{E}_0 [\mathcal{E}'_3(t) \exp(-i\omega_3 t) + \mathcal{E}_3^{*'}(t) \exp(i\omega_3 t)], \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{E}_0$  связана со средней плотностью потока мощности  $P_{30}$  соотношением  $P_{30} = c\mathcal{E}_0^2/2\pi n_3$ ;  $\mathcal{E}'_3(t)$  (безразмерная амплитуда накачки) — функция, мало меняющаяся за период колебания с частотой  $\omega_3$ .

Поле внутри резонатора будет суперпозицией плоских квазигармонических волн с частотами  $\omega_1, \omega_2$  ( $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ) бегущих вдоль оси  $z$  ( $k_+^{(i)} = k_i z_0$ ) и в обратном направлении ( $k_-^{(i)} = -k_i z_0$ ). Считая, что в области  $0 < z < d$  для волн с поляризациями  $e_{1,2}$  выполняется условие синхронизма ( $k_{10} + k_{20} = k_{30}$ ), и вводя безразмерные амплитуды  $\mathcal{E}_{1,2} = (\sigma_{2,1}/\sigma_3)^{1/2} \mathcal{E}_0^{-1} \mathcal{E}'_{1,2}$ , где  $\sigma_i = 2\pi\omega_i(e_2\chi(\omega_3; -\omega_1): e_3 e_2)/cn_i$ , укороченные уравнения для  $\mathcal{E}_{\pm i}$  в линейном по  $\mathcal{E}_{\pm 1,2}$  приближении можно записать в виде [4]

$$\begin{aligned} \pm \frac{\partial \mathcal{E}_{\pm 1,2}}{\partial z} + s_{1,2} \frac{\partial \mathcal{E}_{\pm 1,2}}{\partial t} + \alpha_{1,2} \mathcal{E}_{\pm 1,2} &= i\gamma_0 \mathcal{E}_{\pm 3} \mathcal{E}_{\pm 2,1}^*, \\ \pm \frac{\partial \mathcal{E}_{\pm 3}}{\partial z} + s_3 \frac{\partial \mathcal{E}_{\pm 3}}{\partial t} + \alpha_3 \mathcal{E}_{\pm 3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha_i$  — коэффициенты затухания,  $s_i$  — величины, обратные групповым скоростям  $v_i$ ,  $\gamma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ .

Уравнения (1.2) для  $\varepsilon_{+1,2}$  удобно записать также в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{+1,2}(t; z) = \exp(-\alpha_{1,2}z) \{ \varepsilon_{+1,2}(t - s_{1,2}z; 0) + \\ + i\gamma_0 \int_0^z dz_1 \exp(\alpha_{1,2}z_1) \varepsilon_3(t - s_{1,2}(z - z_1); z_1) \varepsilon_{2,1}^*(t - s_{1,2}(z - z_1); z_1) \}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Кроме уравнений (1.2), (1.3) изменение поля в системе определяется граничными условиями. Если пренебречь отражением на границах нелинейного кристалла (сечения  $z = 0; d$ ), то соотношения между амплитудами  $\varepsilon_{\pm i}$  на зеркалах примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{-1,2}(t; l_+) = \exp(2i\varphi_{1,2}(l_+)) r_{+1,2} \varepsilon_{+1,2}(t; l_+), \\ \varepsilon_{+1,2}(t; -l_-) = \exp(2i\varphi_{1,2}(l_-)) r_{-1,2} \varepsilon_{-1,2}(t; -l_-), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\varphi_{1,2}(l_{\pm}) = \int_0^{l_{\pm}} k_{1,2}(z) dz.$$

Учитывая эти граничные условия и формулы преобразования амплитуд бегущих невзаимодействующих волн, легко выразить значения амплитуд на входе в нелинейный кристалл через значения на выходе и с помощью (1.3) получить соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}(t; z) - \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \exp[-\alpha_{1,2}(d - z)] \varepsilon_{1,2}(t - 2\Delta t_{1,2} + \\ + s_{1,2}(d - z)) = i\gamma_0 \exp(-\alpha_{1,2}z) \int_0^z dz_1 \exp(\alpha_{1,2}z_1) \times \\ \times \varepsilon_{+3}(t - s_{1,2}(z - z_1); z_1) \varepsilon_{2,1}^*(t - s_{1,2}(z - z_1); z_1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\varepsilon_{1,2}(t) = \varepsilon_{+1,2}(t; d), \quad \bar{\varphi}_{1,2} = \int_{-l_-}^{l_+} k_{1,2}(z) dz, \quad \Delta t_{1,2} = \int_{-l_-}^{l_+} s_{1,2}(z) dz,$$

$$R_{1,2} = r_{+1,2} r_{-1,2} \exp(-2\bar{\alpha}_{1,2}L), \quad \bar{\alpha}_{1,2}L = \int_{-l_-}^{l_+} \alpha_{1,2}(z) dz.$$

Решение системы интегральных уравнений (1.5), определяющих поле внутри кристалла, будем искать как сумму двух решений

$$[\varepsilon_{1,2}(t; z); \varepsilon_2(t; z)] = [A_1(t; z); a_2(t; z)] + [a_1(t; z); A_2(t; z)],$$

каждое из которых определяется лишь начальными условиями для амплитуд  $\varepsilon_{1,2}(t; z)$  соответственно (т. е.  $a_{1,2}(t; z) = 0$  при  $t \leq 0$ )\*.

\* Аналогичные рассуждения можно провести и в случае существования сторонних источников.

Применяя к (1.5) при  $z = d$  преобразование Лапласа, амплитуды «холостых» колебаний  $a_{2,1}(t; d) = a_{2,1}(t)$  легко выразить через амплитуды «сигнальных» волн  $A_{1,2}(t; z)$  соответственно:

$$a_{2,1}^*(t) = -i\gamma_0 \int_0^\infty dt_1 \int_0^d dz_1 \exp(\alpha_{2,1} z_1) \psi_{2,1}(t + 2\Delta t_{2,1} - t_1) \times \\ \times \mathcal{E}_3^*(t - s_{2,1}(d - z_1); z_1) A_{1,2}(t_1 - s_{2,1}(d - z_1); z_1). \quad (1.6)$$

Здесь

$$\psi_{2,1}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} dp \frac{\exp(p\tau)}{\exp(2\Delta t_{2,1} p) - R_{2,1} \exp(-2i\bar{\varphi}_{2,1})}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) во второе слагаемое левой части (1.5), найдем соответствующее выражение для  $a_{2,1}^*(t; z)$  и затем, снова учитывая (1.5), получим интегральные уравнения для  $A_{1,2}(t; z)$ . Предположим при этом, что накачка на входе в кристалл равна сумме гармонических колебаний (мод)\*

$$\mathcal{E}_3(t - s_{1,2}d) = \sum_N' \exp(-i\omega_n t) B_{1,2}(\omega_n).$$

Тогда уравнения для  $A_{1,2}(t; z)$  примут вид

$$A_{1,2}(t; z) = \exp[2i\bar{\varphi}_{1,2} + \alpha_{1,2}(d - z)] R_{2,1} A_{1,2}(t - 2\Delta t_{1,2} + \\ + s_{1,2}(d - z)) + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \left\{ 2 \exp(-\alpha_{1,2} z) d^{-2} \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \times \right. \\ \times \exp[\pm \Delta \alpha z_1 + \alpha_{2,1} z_2 - \alpha_3(z_1 + z_2)] f_{1,2}[(z_1 - z_2) \times \\ \times \Delta s_{1,1;3}; t + \Delta s_{1,2;3} z_1] A_{1,2}(\zeta; z_2) + 2 \exp(2i\bar{\varphi}_{2,1} - \\ - \alpha_{2,1} z) \int_0^t d\tau \int_0^d dz_1 \int_0^d dz_2 \exp[\Delta \alpha z_1 + \alpha_{2,1} z_2 - \alpha_3(z_1 + z_2)] \times \\ \left. \times f_{1,2}[\tau + (z_1 - z_2) \Delta s_{2,1;3}; t + \Delta s_{1,2;3} z_1] \psi_{1,2}(\tau) A_{1,2}(\zeta - \tau; z_1) \right\}. \quad (1.8)$$

Здесь  $\zeta = t - s_{2,1}(z_1 - z_2) - s_{1,2}(z - z_1)$ ,  $\Delta \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\Delta s_{2,1;3} = s_{2,1} - s_3$ ,  $\Delta s = s_1 - s_2$ , а  $f_{1,2}(x; y)$  определяется соотношением

$$f_{1,2}(x; y) = \bar{f}_{1,2}(x) + \tilde{f}_{1,2}(x; y) = \sum_{-N}^N |B_{1,2}(\omega_n)|^2 \times \\ \times \exp(i\omega_n x) + \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N (1 - \delta_{nm}) \exp\{i[\omega_m x + (\omega_n - \omega_m) y]\} \times \\ \times B_{1,2}(\omega_n) B_{1,2}^*(\omega_m), \quad (1.9)$$

\* Поскольку на конечном интервале времени шумовую накачку можно представить как суперпозицию колебаний с дискретными частотами, полученные в работе соотношения можно использовать и для исследования параметрически связанных колебаний при шумовой накачке.



где

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (\omega_n - \omega_m = 0) \\ 0 & (\omega_n - \omega_m \neq 0) \end{cases}.$$

Выражение в фигурной скобке правой части (1.8) связано с параметрическим взаимодействием амплитуд  $A_{1,2}$  с  $a_{2,1}$  соответственно. В отличие от аналогичного выражения для систем с сосредоточенными параметрами (см., например, [3]) оно содержит кроме резонансного (второго) слагаемого, зависящего от обратной связи на «холостой» волне, нерезонансное (первое) слагаемое, связанное с непосредственным усилением «сигнальной» волны в кристалле.

Заметим, что резонансное слагаемое может быть в  $(\gamma_0 d)^{-1}$  раз больше первого. Несмотря на это при  $|\gamma_0 d f_{1,2}(0; 0)| < 1$ , когда максимальное усиление за один проход не очень велико, второе слагаемое в правой части (1.8) меньше первого. Поэтому, пренебрегая величинами порядка  $\gamma_0^2 d^2 f_{1,2}^2(0; 0)/6$  по сравнению с единицей, приближенное уравнение для амплитуды  $A_{1,2}(t)$  на выходе кристалла можно получить, считая  $A_{1,2}(\zeta; z_2)$  в фигурной скобке равными первому слагаемому с соответствующим аргументом:

$$\begin{aligned} A_{1,2}(t) = & \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) \left\{ A_{1,2}(t - 2\Delta t_{1,2}) + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \times \right. \\ & \times \left[ (2d)^{-2} \int_0^d dz_1 \int_0^d dz_2 \exp[\pm \Delta\alpha(z_1 - z_2) - \alpha_3(z_1 + z_2)] \times \right. \\ & \times f_{1,2}[\Delta s_{2,1,3}(z_1 - z_2); t + \Delta s_{1,2,3} z_1] A_{1,2}(\zeta) + \\ & + \exp(-2i\bar{\varphi}_{2,1}) R_{2,1}(2d^{-2}) \int_0^t d\tau \int_0^d dz_1 \int_0^d dz_2 \exp[\pm \Delta\alpha(z_1 - z_2) - \\ & \left. - \alpha_3(z_1 + z_2)] f_{1,2}(\tau + \Delta s_{2,1,3}(z_1 - z_2); t + \Delta s_{1,2,3} z_1) \psi_{2,1}(\tau) A_{1,2}(\xi - \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\xi = t - 2\Delta t_{1,2} \pm \Delta s(z_1 - z_2).$$

Применив к (1.10) преобразование Лапласа, для изображения получим уравнение

$$\begin{aligned} A_{1,2}(p) \left[ \exp(2\Delta t_{1,2} p) - \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \theta_{1,2}(p) \right) \right] - \\ - \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \sum_n \sum_m (1 - \delta_{nm}) B_{1,2}(\omega_n) B_{1,2}^*(\omega_m) \times \\ \times \Psi_{1,2}(p - i\omega_n; \omega_n; \omega_m) A_{1,2}(p - i(\omega_n - \omega_m)) = Q_{1,2}(p). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $Q_{1,2}(p)$  — заданная функция, определяемая начальными условиями (значениями  $A_{1,2}(t)$  при  $-2\Delta t_{1,2} < t < 0$ ), а функции  $\theta_{1,2}(p)$ ;  $\Psi_{1,2}(p - i\omega_n; \omega_n; \omega_m)$ , имеющие резонансные (вторые) и нерезонансные (первые) составляющие, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \theta_{1,2}(p) = & \zeta_{1,2}(p) + \chi_{1,2} R_{2,1} \exp(-2i\bar{\varphi}_{2,1}), \\ \Psi_{1,2}(p - i\omega_n; \omega_n; \omega_m) = & \exp[2i\Delta t_{1,2}(\omega_n - \omega_m)] [\varphi_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m) + \\ & + \exp(-2i\bar{\varphi}_{2,1}) R_{2,1} \psi_{1,2}(p - i\omega_n) \eta_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m)], \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\zeta_{1,2}(p) = \sum_n |B_{1,2}(\omega_n)|^2 \varphi_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m),$$

$$\chi_{1,2}(p) = 2 \sum_n |B_{1,2}(\omega_n)|^2 \psi_{2,1}(p - i\omega_n) \eta_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m),$$

где  $\psi_{1,2}(p) = [\exp(2\Delta t_{1,2} p) - R_{1,2} \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2})]^{-1}$  — изображение  $\psi_{1,2}(\tau)$ , а функции  $\varphi_{1,2}$ ;  $\eta_{1,2}$  характеризуют расстройку взаимодействующих волн от пространственного синхронизма:

$$\varphi_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m) = 2d^{-2} \int_0^d dz_1 \int_0^d dz_2 \exp\{-\alpha_3(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2) \times$$

$$\times [i\omega_m \Delta s_{2,1;3} \pm (\Delta\alpha + (p - i(\omega_n - \omega_m)) \Delta s)] + i(\omega_n - \omega_m) \Delta s_{1,2;3} z_1\}, \quad (1.13)$$

$$\eta_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m) = d^{-2} \int_0^d dz_1 \int_0^d dz_2 \exp\{-\alpha_3(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2) \times$$

$$\times [i\omega_m \Delta s_{2,1;3} \pm (\Delta\alpha + (p - i(\omega_n - \omega_m)) \Delta s)] + i(\omega_n - \omega_m) \Delta s_{1,2;3} z_1\}.$$

При слабом затухании и малой расстройке от пространственного синхронизма ( $\alpha_3 d \ll 1$ ;  $\Delta s_{1,2;3} \omega_n d \ll 1$ ) эти функции равны единице. С увеличением расстройки они убывают. Для оценок их можно аппроксимировать в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m) \\ 2\eta_{1,2}(p; \omega_n; \omega_m) \end{aligned} \right\} \simeq \exp \left\{ - \left( \frac{\omega_n}{\Delta\omega_{1,2;3}} \mp \frac{p''}{\Delta\omega_{1,2}} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\omega_m}{\Delta\omega_{2,1;3}} \mp \frac{\omega_n + p''}{\Delta\omega_{1,2}} \right)^2 + i\sqrt{\pi} \left( \frac{\omega_n}{\Delta\omega_{1,2;3}} \pm \frac{\omega_n}{\widetilde{\Delta\omega}_{1,2}} - \frac{\omega_m}{\widetilde{\Delta\omega}_{2,1;3}} \right) \right\}. \quad (1.14)$$

Здесь величина  $\Delta\omega_{1,2} = 2\sqrt{\pi} / d\Delta s$  определяет частотный интервал взаимодействующих волн, которые можно считать в синхронизме с монохроматической накачкой, а величины\*  $\Delta\omega_{1,2;3} = 2\pi / d\Delta s_{2,1;3}$  — частотный интервал излучения накачки, эффективно взаимодействующий с монохроматической волной поляризации  $e_{1,2}$  соответственно\*\*.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ

а) Уравнение для характеристических чисел и общие свойства собственных решений. Решение уравнения (1.11) для изображения  $A_{1,2}(p)$  будем искать в виде

$$A_{1,2}(p) = A_{1,2}^0(p) + \sum_{l>1} \left[ \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \right]^l A_{1,2}^{(l)}(p), \quad (2.1)$$

\* В кристалле КДР для взаимодействия  $1^0 + 2^e = 3^e$  и  $\lambda_{1,2} \simeq 1,06 \mu$ ,  $\lambda_3 = 0,53 \mu$ ,  $\Delta s \simeq 0,025 s$ ,  $\Delta s_{1,3} \simeq -0,015 s$ ,  $\Delta s_{2,3} \simeq 0,01 s$  ( $s = n_1 c$ ). Соответственно  $\Delta\omega_{2,3} \simeq 8 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta\omega_{1,3} \simeq -12 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta\omega_{1,2} \simeq 20 \text{ см}^{-1}$  при  $d = 3 \text{ см}$ .

\*\* Величины  $\Delta\omega_{lk}$  равны  $\Delta\omega_{lk}$  в случае преобладающего вклада слагаемых, связанных с обратной связью по холостой волне, и  $2\Delta\omega_{lk}$  — в случае малой роли этих слагаемых.

где  $A_{1,2}^{(l)}(p)$  выражаются через  $A_{1,2}^0(p)$  рекуррентными соотношениями

$$A_{1,2}^{(l+1)}(p) = \left[ \exp(2\Delta t_{1,2} p) - \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \theta_{1,2}(p) \right) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \sum_n \sum_m B(\omega_n) B^*(\omega_m) \Psi_{1,2}(p - i\omega_n; \omega_n; \omega_m) (1 - \delta_{nm}) \times \right. \\ \left. \times A_{1,2}^{(l)}(p - i(\omega_n - \omega_m)) \right\}^{(-)}. \quad (2.2)$$

Здесь символ  $\{ \}^{(-)}$  означает, что из выражения в фигурных скобках исключены слагаемые с  $A_{1,2}^0(p)$ . Для  $A_{1,2}^0(p)$  при этом получим

$$A_{1,2}^0(p) = Q_{1,2}(p) D_{1,2}^{-1}(p), \quad (2.3)$$

где

$$D_{1,2}(p) = \left[ \exp(2\Delta t_{1,2} p) - \exp(-2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \theta_{1,2}(p) \right) \right] - \\ - \sum_{l>1} \left[ \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \right]^l \theta_{1,2}^{(l)}(p), \quad (2.4)$$

а функции  $\theta_{1,2}^{(l)}(p)$  равны

$$\theta_{1,2}^{(l)}(p) = (A_{1,2}^0(p))^{-1} \left\{ \sum_n \sum_m B_{1,2}(\omega_n) B_{1,2}^*(\omega_m) (1 - \delta_{nm}) \times \right. \\ \left. \times \Psi_{1,2}(p - i\omega_n; \omega_n; \omega_m) A_{1,2}^{(l)}(p - i(\omega_n - \omega_m)) \right\}^{(0)}. \quad (2.5)$$

Символ  $\{ \}^{(0)}$  означает, что у выражения в скобках оставлены только слагаемые, пропорциональные  $A_{1,2}^0(p)$ .

Из (2.2), (2.4), (2.5) следует, что при стремлении к бесконечности  $\Psi_{1,2}$  или первого множителя в правой части (2.2) бесконечно увеличивается и знаменатель  $D_{1,2}(p)$  выражения (2.3). Поэтому  $A_{1,2}(p)$  имеет полюса только в точках  $D_{1,2}(p) = 0^*$ . При этом в каждом слагаемом выражения (2.1) есть полюса в точках  $\tilde{p}$ , реальная часть которых одинакова, а мнимая отличается на некоторую сумму частот мод накачки  $\omega_n$ . Это значит, что для уравнения (1.9) выполняется аналог теоремы Флоке; его собственные функции имеют вид

$$A_{1,2}^{(j)}(t) = \exp(p_{1,2;j} t) \left[ 1 + \sum_{l>1} \left( \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \right)^l A_{1,2}^{(j;l)}(t) \right]. \quad (2.6)$$

Здесь  $p_{1,2;j}$  — корни характеристических уравнений

$$D_{1,2}(p) = 0, \quad (2.7)$$

$A_{1,2}^{(j;l)}$  — некоторые ограниченные функции, которые можно записать в виде  $A_{1,2}^{(j;l)}(t) = \sum_n A_{1,2}^{(j;l;n)} \exp(i\omega_n t)$ . В частности, при эквидистантности спектральных составляющих (мод) накачки  $(\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta)$

$A_{1,2}^{(j;l)}(t)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi/\Delta$ .

\* Полюса  $Q_{1,2}(p)$  мы не будем рассматривать, поскольку они соответствуют вынужденным колебаниям.

Оба характеристических уравнения (2.7) должны иметь одинаковые корни. Это следует из того, что каждое из уравнений (1.11) мы могли бы получить, не представляя решения в виде двух слагаемых, а просто выразив  $\mathcal{E}_{2,1}(t)$  через  $\mathcal{E}_{1,2}(t)$  соответственно\*. Однако сравнительно просто (см. п. б) из каждого уравнения (2.7) определяется только одна пара ветвей характеристических чисел.

б) *Параметрически связанные колебания при хаотических фазах мод накачки.* Рассмотрим некоторые свойства корней характеристического уравнения (2.7) в первом приближении (положив  $\theta_{1,2}^{(0)} = 0$ ). Будем считать, что накачка состоит из большого числа спектральных составляющих (мод) с настолько малым частотным интервалом между ними, что суммирование в выражениях (1.12) для функций  $\zeta_{1,2}$ ,  $\chi_{1,2}$  можно заменить интегрированием\*\*. Распределение спектральной интенсивности накачки  $|B(\omega)|^2$  возьмем в виде  $|B(\omega)|^2 = \frac{a^2(\omega)}{\Delta\omega\sqrt{\pi}} \times \exp\left(-\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2}\right)$ , где  $a^2(\omega)$  — периодическая функция с периодом  $\pi/\Delta t$ , нормированная так, что  $\int_0^{\pi/\Delta t} a^2(\omega)d\omega = 1$ . Тогда из (1.12) с учетом (1.14) получим

$$\theta_{1,2}(p) = \zeta_{1,2}(p) + R_{2,1} \exp(-2i\bar{\varphi}_{2,1}) \chi_{1,2}(p),$$

$$\zeta_{1,2}(p''^2; \Delta\omega^2) = \left(1 + \frac{5\Delta\omega^2}{4\Delta\omega_{1,2,3}^2}\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{5(p'')^2}{4\Delta\omega_{1,2}^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{5\Delta\omega^2}{4\Delta\omega_{1,2,3}^2}\right)^{-1}\right\}, \quad (2.8)$$

$$\chi_{1,2}(p) = 2 \frac{\exp[-(p''/\Delta\omega_{1,2})^2]}{\Delta\omega\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left[-\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2} \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_{1,2,3}^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{4p''\omega}{\Delta\omega_{1,2}\Delta\omega_{1,2,3}}\right] a^2(\omega) [\exp[-2\Delta t_{2,1}(p - i\omega)] - R_{2,1} \exp(2i\bar{\varphi}_{2,1})] \times \\ \times [\exp(4\Delta t_{2,1}p') - 2 \exp(2\Delta t_{2,1}p') R_{2,1} \cos[2\Delta t_{2,1}(p'' - \omega) + \\ + 2\bar{\varphi}_{2,1}] + R_{2,1}^2]^{-1}.$$

Второе (резонансное) слагаемое у функции  $\theta_{1,2}(p)$ , связанное с существованием обратной связи на «холостой» волне, вычислим, считая период модуляции амплитуды мод накачки равным расстоянию между модами «холостой» волны ( $\Delta t = \Delta t_{2,1}$ ):

\* Точнее, полученные таким образом уравнения для  $\mathcal{E}_{1,2}(p)$  отличались бы от (1.11) только правой частью, которая зависела бы от начальных условий как для  $\mathcal{E}_1$ , так и  $\mathcal{E}_2$ .

\*\* Легко видеть, что это можно заведомо сделать, если расстояние между модами накачки  $\Delta$  удовлетворяет неравенству  $2\Delta t_{1,2}\Delta \ll [\exp(2\Delta t_{1,2}p') - R_{1,2}]$ . Если, однако, ширина спектра накачки много больше  $(2\Delta t_{1,2})^{-1}$ , то, поскольку существенно общее число мод накачки, для которых частотная расстройка достаточно мала, пренебречь дискретностью их спектра можно, по-видимому, и при выполнении более слабого условия.

$$\chi_{2,1}(p) \simeq 2f_{1,2}(p) \zeta_{1,2} \left[ \frac{8}{5} (p'')^2; \frac{8}{5} \Delta\omega^2 \right],$$

$$f_{1,2}(p) = \frac{R_{2,1}^{-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy a_1^2(\Delta p'' - y) \frac{\xi_{2,1} \cos y - \cos(2\bar{\varphi}_{2,1}) + i \sin(2\bar{\varphi}_{2,1})}{1 - 2\xi_{2,1} \cos(y - 2\bar{\varphi}_{2,1}) + \xi_{2,1}^2}. \quad (2.9)$$

Здесь  $\xi_{2,1} = R_{2,1}^{-1} \exp(2\Delta t_{2,1} p')$ ,  $y = 2\Delta t_{2,1} \omega$ ,  $a_1^2(y) = a^2(y/2\Delta t_{2,1})$ ,  $0 \leq \Delta p'' = 2\pi q - 2\Delta t_{2,1} p'' < \pi$ .

Если  $a^2(\omega) = \text{const}$ , т. е. спектр накачки квазинепрерывен, то при равной нулю частотной расстройке середины линии накачки ( $2\bar{\varphi}_{2,1} = 2\pi k$ )  $f_{1,2}(p) = 0$  для колебаний, отбирающих энергию у накачки (при  $\xi_{2,1} > 1$ ) и  $f_{2,1}(p) = -R_{2,1}$  при  $\xi_{2,1} < 1$ . Это значит, что в первом случае, которым мы в дальнейшем ограничимся, составляющие накачки с большой частотной расстройкой отбирают у полей в резонаторе столько энергии, сколько отдают ему за счет резонансного взаимодействия, составляющие с малой расстройкой. Поэтому энергия у накачки отбирается только за счет нерезонансного взаимодействия, а инкремент колебаний  $p'$  не зависит от коэффициента обратной связи по холостой волне и определяется в этом случае выражением, близким к соответствующему выражению для системы с резонатором только на сигнальную волну ( $R_{2,1} = 0$ ) при гармонической накачке [5]:

$$p'_{1,2;j} = \frac{1}{2\Delta t_{1,2}} \ln \left[ R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \right) \zeta_{1,2} [(p''_{1,2;j})^2; \Delta\omega^2] \right], \quad (2.10)$$

$$p''_{1,2;j} = \frac{\pi}{\Delta t_{1,2}} j \quad (j = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Положение можно улучшить, промодулировав спектр накачки (это можно сделать, применяя в генераторе накачки резонансные отражатели). Например, если при  $R_2 = R_1 = R$

$$a_1(y) = \begin{cases} 2\pi(2\delta\omega)^{-1} & (-\delta\omega < y < \delta\omega) \\ 0 & (\delta\omega < y < 2\pi - \delta\omega) \end{cases}, \quad (2.11)$$

где  $\delta\omega \leq \pi/16$ ;  $\sqrt{(\xi_{2,1} - 1)/2\xi_{2,1}}$ ,  $f_{1,2}(p) \simeq \frac{2R_{2,1}^{-1}}{\delta\omega \sqrt{\xi_{2,1}}} \arctg \left[ \frac{\delta\omega}{(\xi_{2,1} - 1)\sqrt{\xi_{2,1}}} \right]$ .

Тогда при  $\sqrt{\xi_{2,1} - 1} > \delta\omega \gg (\xi_{2,1} - 1)$  инкремент равен

$$p'_{1,2;j} \simeq \frac{1}{2\Delta t_{1,2}} \ln \left[ R \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{\delta\omega} \right) \zeta_{1,2} \left( \frac{8}{5} (p''_j)^2; \frac{8}{5} \Delta\omega^2 \right) \right) \right]. \quad (2.12)$$

Если же ширина отдельной линии накачки близка к нулю ( $\delta\omega \ll (\xi_{2,1} - 1)$ ), то инкремент стремится к инкременту при одномодовой накачке. Например, при  $R_1 = R_2 = R \simeq 1$

$$p'_{1,2;j} = \frac{1}{2\Delta t_{1,2}} \ln \left[ R \left( 1 + \gamma_0 d \sqrt{\zeta_{1,2} \left( \frac{8}{5} (p''_j)^2; \frac{8}{5} \Delta\omega^2 \right)} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Однако при рассмотрении этого случая необходимо учесть следующие слагаемые в характеристическом уравнении.

Функции  $\theta_{1,2}^{(j)}(p)$ , в отличие от  $\theta_{1,2}(p)$ , входящей в характеристическое уравнение первого приближения, зависят от фазовых соотношений мод накачки:

$$\begin{aligned} \theta_{1,2}^{(l)}(p) &= \prod_{i=0}^{l-1} \left\{ \sum_{n_j} \sum_{m_j} (1 - \delta(n_j; m_j)) B(n_j) B^*(m_j) \times \right. \\ &\times \tilde{X}(p - i\Phi_j) \Psi_{1,2}[p - i(\Phi_j + \omega(m_j)); \omega(n_j); \omega(m_j)] \times \\ &\times \sum_{n_l} \sum_{m_l} (1 - \delta(n_l; m_l)) B(n_l) B^*(m_l) \Psi_{1,2}[p - i(\Phi_l + \\ &\left. + \omega(m_l)); \omega(n_l); \omega(m_l)] \delta(0, \Phi_l) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь

$$\delta(n; m) = \begin{cases} 1 & (\omega(n) = \omega(m)) \\ 0 & (\omega(n) \neq \omega(m)) \end{cases}, \quad \Phi_j = \sum_{k=0}^j [\omega(n_k) - \omega(m_k)],$$

$$\tilde{X}_{1,2}(p) = \left[ \exp(2\Delta t_{1,2} p) - \exp(2i\bar{\varphi}_{1,2}) R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \theta_{1,2}(p) \right) \right].$$

Если число мод велико, а их фазы случайны, то, за исключением особых случаев, сумма слагаемых  $\tilde{\theta}_{1,2}^{(l)}$  в (2.14), зависящих от фазовых соотношений мод накачки, будет вызывать малые флуктуации величины характеристических чисел  $p_{1,2}$  около их средних значений\*. Поэтому для определения средних значений характеристических чисел достаточно вычислить  $\bar{\theta}_{1,2}^{(l)}(p)$  — не зависящие от фаз мод накачки составляющие функций  $\theta_{1,2}(p)$ .

Оценим величину  $\bar{\theta}_{1,2}^{(1)}(p)$  для случая, когда спектр накачки состоит из отдельных линий с расстоянием  $\Delta = \pi/\Delta t$  между ними\*\* и интенсивностью  $|B(\omega_n)|^2 = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi} \Delta \omega} \exp(-\omega_n^2/\Delta \omega^2)$ , где  $\omega_n = n\Delta$ ,  $\Delta \ll \Delta \omega$ .

Ограничимся случаем небольшой относительной разницы расстояний между модами накачки и модами резонатора  $\delta_{1,2} = (\Delta t_{1,2} - \Delta t) \Delta t$  и такой ширины спектра накачки  $\Delta \omega$ , что формулу резонансных множителей в (2.14) можно считать Лоренцовой ( $\Delta \omega^2 \delta_{1,2}^2 / \Delta^2 < X_{1,2}$ ). Кроме того, ограничиваясь нулевой частотной расстройкой центральной моды ( $\bar{\varphi}_{1,2} = 0$ ), рассмотрим существующее в этом случае колебание с  $p_{1,2}'' = 0$ , которое будет, очевидно, иметь наибольший инкремент\*\*\*. Учитывая, что при сделанных предположениях тригонометрические функции в (2.14) можно разложить в ряд около точек ( $2\pi n$ ) и заменить суммирование интегрированием, получим

$$\bar{\theta}_{1,2}^{(1)}(p) \simeq X_{1,2}^{-1} \left( \frac{x_{2,1}^{(+)}}{x_{2,1}^{(-)}} \right)^2 \zeta_{1,2}^{(1)}. \quad (2.15)$$

\* Оценки, которые можно провести, учитывая полученные ниже результаты, показывают, что характеризующая интенсивность флуктуаций величина  $\sum_l (\gamma_0^2 d^2 / 2)^{l-1} \times$

$\times \langle (\tilde{\theta}^{(l)})^2 \rangle^{1/2} (\bar{\theta}_{1,2}^{(1)})^{-1} \sim N^{-1/2} \sum_l \varepsilon_l(\Delta \omega)$ . Здесь  $N$  — число мод;  $\varepsilon_l(\Delta \omega)$  — функции,

которые убывают с увеличением  $l$  тем медленнее, чем меньше ширина спектра  $\Delta \omega$ . Следовательно, при конечном числе мод  $N$  и  $\Delta \omega \rightarrow 0$  флуктуации будут увеличиваться

\*\* Для линий конечной ширины ( $\delta \omega \geq X_{1,2}$ ) вместо  $x_{1,2}$ ,  $X_{1,2}$  в полученных ниже формулах будет стоять безразмерная ширина линии  $\delta \omega$  (см. (2.11)), и результаты мало отличаются от полученных в первом приближении (см. (2.10), (2.12))

\*\*\* Такой же примерно инкремент будут иметь и колебания с  $p_{1,2} \simeq \pi j / \Delta t_{1,2}$  ( $j = \pm 1; \pm 2; \dots$ ) при не слишком больших  $j$ .

Здесь

$$X_{1,2} = [\exp(2\Delta t_{1,2} p') - \tilde{R}_{1,2}], \quad x_{1,2}^{(\pm)} = [\exp(2\Delta t_{1,2} p') \pm R_{1,2}],$$

$$\tilde{R}_{1,2} = R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \theta_{1,2} \right), \quad \bar{\zeta}_{1,2}^{(1)} = \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \tilde{\Omega}_{1,2}^2} \right) \bar{\xi}_{1,2}^{(1)}(\Delta \omega). \quad (2.16)$$

Величины  $\tilde{\Delta}_{1,2} = \Delta X_{1,2} \tilde{R}_{1,2}^{-1} / 2\pi \delta_{1,2}$ ,  $\Delta_{1,2} = \Delta x_{1,2}^{(-)} R_{1,2}^{-1} / 2\pi \delta_{1,2}$  определяют интервал мод накачки, частотную расстройку которых относительно «сигнального» и «холостого» колебаний соответственно можно считать равной нулю. Величины

$$\Delta \Omega_{1,2}^2 = (1/\sqrt{\pi} \Delta_{2,1}^2 + 1/\Delta \omega_{1,2,3}^2)^{-1}, \quad \bar{\Delta} \omega_{1,2,3}^2 = (\Delta \omega_{1,2,3}^{-2} + \Delta \omega_{1,2,3}^2)^{-1},$$

$$\Delta \Omega_{1,2}^2 = \Delta \omega^2 \left[ 2 \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \Omega_{1,2}^2} \right) \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\sqrt{\pi} \tilde{\Delta}_{1,2}} + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \omega_{1,2}^2} + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \omega_{2,1,3}^2} + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \omega_{1,2,3}^2} \right) - 1 - \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \omega_{1,2,3}^2} \right)^2 \right]^{-1}$$

учитывают также расстройку от пространственного синхронизма. Близкий к единице множитель  $\bar{\xi}_{1,2}^{(1)}$  зависит от знаков величин  $\tilde{\Delta}_{1,2}$ ,  $\Delta_{1,2}$ ,  $\Delta \omega_{ik}$ .

Запишем его, положив  $\tilde{\Delta} \Omega_{1,2} (\Delta \omega_{1,2,3}^{-1} - \Delta \omega_{1,2,3}^{-1}) \simeq 0$ :

$$\bar{\xi}_{1,2}^{(1)} \simeq \left\{ 1 - \frac{R_{2,1}}{16} \frac{\Delta \omega^2}{\Delta_{2,1}^2} \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \Omega_{1,2}^2} \right)^{-1} - \frac{\sqrt{R_{2,1}/R_{1,2}}}{2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Delta \omega^2}{\Delta_{2,1} \tilde{\Delta}_{1,2}} \left( 1 + \frac{\Delta \omega^2}{\Delta \tilde{\Omega}_{1,2}^2} \right)^{-1} \right\}.$$

Из (2.14) следует, что  $\bar{\theta}_{1,2}^{(l)}(p) \neq 0$  только при  $l = (2s+1)$ , причем

$$\theta_{1,2}^{(2s+1)}(p) = \bar{\theta}_{1,2}^{(1)} \left[ X_{1,2}^{-1} \frac{x_{2,1}^{(+)}}{x_{2,1}^{(-)}} \zeta_{1,2}^{(s)}(\Delta \omega) \right]^{2s}.$$

Здесь функции  $\zeta_{1,2}^{(s)} = 1$  при  $\Delta \omega^2 \ll \Delta \omega_{ik}^2$ ,  $\tilde{\Delta}_{1,2}^2$ ,  $\Delta_{1,2}^2$  и уменьшаются при увеличении  $\Delta \omega$ . Поскольку ряд в выражении (2.4) для правой части характеристического уравнения быстро сходится, при оценках величины  $p_{1,2}$  функции  $\zeta_{1,2}^{(s)}(\Delta \omega)$  можно считать одинаковыми, равными  $\bar{\zeta}_{1,2}^{(s)} \simeq \bar{\zeta}_{1,2}^{(1)}$ , и, просуммировав этот ряд, записать характеристическое уравнение (2.7) в виде

$$X_{1,2} x_{2,1}^{(-)} = \pm \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} R_{1,2} x_{2,1}^{(+)} [\bar{\zeta}_{1,2}^{(1)} + (\bar{\zeta}_{1,2}^{(s)})^2]^{1/2}. \quad (2.17)$$

Корни уравнения (2.17), соответствующие знаку минус его правой части, существенно зависят от величины  $\bar{\zeta}_{1,2}^{(s)}$  и должны быть отброшены.

Учитывая, что в рассматриваемом приближении

$$\theta_{1,2}(p) = \left(1 + \frac{5}{4} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_{1,2,3}^2}\right)^{-1/2} + 2R_{2,1}(x_{2,1}^{(-)})^{-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{2\Delta\omega^2}{\Delta\omega_{1,2,3}^2} + \frac{\Delta\omega^2}{\sqrt{\pi} \Delta_{2,1}^2}\right)^{-1/2}$$

для инкремента нарастания колебаний в генераторе с обратной связью по обем ( $R_1 \simeq R_2 = R$ ) и только по одной из взаимодействующих волн ( $R_{2,1} = 0$ ) из (2.17) получим соответственно\*

$$p'_{1,2} = \frac{1}{2\Delta t'_{1,2}} \ln \left[ R \left( 1 + \gamma_0 d \sqrt{\zeta_{1,2}^{(0)} + \sqrt{\zeta_{1,2}^{(1)} + (\bar{\zeta}_{1,2}^{(s)})^2}} \right) \right]; \quad (2.18a)$$

$$p'_{1,2} = \frac{1}{2\Delta t_{1,2}} \ln \left[ R_{1,2} \left( 1 + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \left( \zeta_{1,2}^0 + \sqrt{\bar{\zeta}_{1,2}^{(1)} + (\bar{\zeta}_{1,2}^{(s)})^2} \right) \right) \right]. \quad (2.18б)$$

Здесь  $\zeta_{1,2}^0 = (1 + 2\Delta\omega^2/\Delta\omega_{1,2,3})^{-1/2}$ . Таким образом, при достаточно малой расстройке величины интервала между модами накачки ( $|\Delta_{2,1}|$ ,  $|\bar{\Delta}_{1,2}| > \Delta\omega$ ) и не слишком большой ширине ее спектра ( $|\Delta\omega_{1,2,3}| > \Delta\omega$ ) порог самовозбуждения по сравнению с монохроматической накачкой снижается примерно в два раза.

Интересен спектральный состав возбуждающихся в рассматриваемом случае колебаний. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, заметим, что при возбуждении лишь одного типа колебаний «сигнальная» волна будет состоять из колебания с основной частотой ( $\omega_{1,2} \pm p'_{1,2}$ ) амплитуды  $A_{1,2}^0$  и колебаний со случайными (зависящими от фаз мод накачки) амплитудами на частотах  $\omega_{1,2} \pm p''_{1,2} + \Delta(n - m)$ . Из (2.1), (2.2) можно показать, что колебания со случайными амплитудами несут в среднем примерно столько же энергии, сколько и центральное колебание, но эта энергия распределена в спектральном интервале, близком к ширине спектра накачки. Спектр «холостой» волны, как следует из (1.6), (2.1), примерно повторяет спектр излучения накачки. Поскольку при достаточно большой ширине спектра накачки инкременты колебаний, в которых рабочими волнами являются волны разной поляризации, различны даже при  $R_1 = R_2$  за счет того, что  $\Delta\omega_{1,3} \neq \Delta\omega_{2,3}$ , эта асимметрия спектров генерации волн с разной поляризацией может, по-видимому, наблюдаться экспериментально.

в) *О параметрически связанных колебаниях при синхронизированных модах накачки.* Если амплитуда волны накачки имеет вид коротких импульсов, следующих друг за другом через интервалы  $2\Delta t = 2\pi/\Delta$ , совпадающие с временами  $2\Delta t_{1,2}$  прохождения через резонатор сигналов параметрически связанных колебаний, то довольно очевидно [6, 7], что при  $\Delta\omega\Delta\omega_{ik}^{-1} = 0$  условие самовозбуждения будет определяться не средней, а пиковой мощностью накачки. Для анализа реальных случаев необ-

\* Величины  $\Delta_{2,1}$  и  $\bar{\Delta}_{1,2}$ , входящие в правые части (2.18) (а также аналогичные соотношения (2.22), зависят от  $p'$ . Однако в практически интересном случае  $\Delta\omega|\Delta_{2,1}^{-1}|$ ,  $\Delta\omega|\bar{\Delta}_{1,2}^{-1}| \ll 1$  с достаточной точностью можно считать, что в выражениях для  $\Delta_{2,1}$ ,  $\bar{\Delta}_{1,2}$  стоят  $p_0$ , т. е. правые части (2.18), (2.22) при  $\zeta_{1,2}^{(i)} = 1$ . Это позволяет легко построить зависимость  $p'_{1,2}(\Delta\omega)$  и в области  $\Delta\omega|\Delta_{2,1}^{-1}| \gg 1$ .



ходимо найти зависимость инкремента от длительности импульса накачки  $\delta t$  (ширины ее спектра  $\Delta\omega$ ) с учетом влияния расстройки от пространственного синхронизма ( $\Delta\omega\Delta\omega_{ik}^{-1} \neq 0$ ) и конечной разности между  $\Delta t$  и  $\Delta t_{1,2}$ .

Оценим эту зависимость, считая фазы всех мод одинаковыми, амплитуды  $B(\omega_n^* = n\Delta) = \sqrt{\Delta/\sqrt{\pi}\Delta\omega} \exp(-\omega_n^2/2\Delta\omega^2)$ , а расстройку  $\delta_{1,2} = (\Delta t_{1,2} - \Delta t) \Delta t^{-1}$  и ширину спектра  $\Delta\omega$  — не очень большими\*

( $\delta_{1,2}^2 \frac{\Delta\omega^2}{\Delta^2} < x_{1,2}^{(-)}$ ). При этом из (2.14) следует, что в предельных случаях большого и малого вклада в (2.14) слагаемых, связанных с обратной связью по холостой волне, функции  $\theta_{1,2}^{(l)}(p)$  можно записать в виде\*\*

$$\theta_{1,2}^{(l)}(p) = \left[ \begin{matrix} x_{2,1}^{(+)} \\ x_{2,1}^{(-)} \end{matrix} \tilde{N}_{1,2}^{(l)} \right]^l \frac{x_{2,1}^{(+)} \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega_{1,2}^2}\right)^{-1}}{x_{2,1}^{(-)}}, \quad \tilde{N}^{(l)} = ND_{1,2}^{(l)}. \quad (2.19)$$

Здесь  $N = 2\sqrt{\pi}\Delta\omega/\Delta$  — превышение пиковой мощности накачки над ее средним значением (среднее число мод накачки), а дискриминирующие множители  $D_{1,2}^{(l)}$  определяются выражением

$$D_{1,2}^{(l)}(\Delta\omega) = \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega_{1,2}^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\tilde{\Omega}_{1,2}^2}\right)^{-1/2} \tilde{\xi}_{1,2}^{(l)}(\Delta\omega), \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \left(1 + \Delta\omega^2/\Omega_{1,2}^2\right) &= \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\sqrt{\pi}\Delta_{2,1}^2} + \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega_{1,2;3}^2}\right), \quad \frac{\Delta\omega^2}{\tilde{\Omega}_{1,2}^2} = \left(\frac{\Delta\omega^2}{\sqrt{\pi}\Delta_{1,2}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta\omega^2}{\sqrt{\pi}\Delta_{2,1}^2} + \frac{2\Delta\omega^2}{\Delta\omega_{2,1;3}^2}\right), \quad \left(1 + \frac{\Delta\omega^2}{\tilde{\Omega}_{1,2}^2}\right) = \\ &= \left(2 - \frac{(1+2\Delta\omega^2/\Delta\omega_{1,2;3}\tilde{\Delta}\omega_{2,1;3})^2 + (1+2\Delta\omega^2/\Delta\omega_{1,2;3}\Delta\omega_{2,1;3} + 2\Delta\omega^2/\sqrt{\pi}\Delta_{2,1}^2)}{2(1 + \Delta\omega^2/\Omega_{1,2}^2)} + \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta\omega^2/\tilde{\Omega}_{1,2}^2\right). \end{aligned}$$

При определении инкремента в характеристическом уравнении (2.4) существенны слагаемые с большими номерами  $l$ . Значения же

множителей  $\tilde{\xi}_{1,2}^{(l)}$  в (2.20) удается аппроксимировать достаточно простыми выражениями лишь при выполнении определенных условий, когда они при любом  $l$  близки к единице и без большой ошибки могут быть приравнены  $\tilde{\xi}_{1,2}^{(l)}$ . Условиями применимости такого приближения при  $|\Delta_{2,1}| \ll |\Delta\omega_{1,2;3}|$  являются разные знаки группового запаздывания для волн ( $\Delta_1\Delta_2 < 0$ ); при  $|\Delta_{2,1}| \gg |\Delta\omega_{1,2;3}|$  необходимо, чтобы  $\Delta s_{1,3}\Delta s_{2,3} < 0$ .

Близкую к единице величину  $\tilde{\xi}_{1,2}^{(l)}$  запишем, считая  $\Omega_{1,2}(\Delta\omega_{1,2;3}^{-1} - \Delta\omega_{1,2;3}^{-1}) \simeq 0$ ,

\* Если расстройка  $\delta_{1,2}$  превышает значение  $\frac{\Delta}{\Delta\omega} \sqrt{x_{1,2}^{(-)}}$ , дискриминирующие множители  $D$  в (2.19) будут уменьшаться с ростом  $\Delta\omega$  быстрее, чем это следует из (2.20).  
\*\* В последнем случае необходимо в (2.19) коэффициент обратной связи по холостой волне  $R_{2,1}$  независимо от его величины считать равным нулю.

$$\tilde{\xi}_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{R_{2,1}}}{2x_{2,1}^{(+)} \left( 1 + \frac{\Delta\omega^2}{\tilde{\Omega}_{1,2}^2} \right)^{-1}} \frac{\Delta\omega^2}{\Delta_{1,2}\Delta_{2,1}} \left[ 1 - \frac{\Delta\omega^2/\sqrt{\pi} \Delta_{2,1}^2}{2(1 + \Delta\omega^2/\Omega_{1,2}^2)} + \frac{\sqrt{R_{2,1}}\Delta_{1,2}}{4\Delta_{2,1}} \left( \frac{1 + \Delta\omega^2/\Delta\omega_{1,2;3}\tilde{\Delta}\omega_{2,1;3}}{1 + \Delta\omega^2/\Omega_{1,2}^2} \right) \right] \right\}.$$

Подставив (2.19) в (2.4), получим характеристическое уравнение (2.4) в виде

$$x_{1,2}^{(-)} \left[ x_{1,2}^{(-)} - \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} R_{1,2} \frac{x_{2,1}^{(+)} x_{2,1}^{(-)}}{x_{2,1}^{(-)}} \tilde{N}_{1,2}^{(1)} \right] = \left( \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} R_{1,2} \frac{x_{2,1}^{(+)}}{x_{2,1}^{(-)}} \right)^2 \times \left( 1 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega_{1,2}^2} \right)^{-1/2} \tilde{N}_{1,2}^{(1)}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что при  $\tilde{N}_{1,2}^{(1)} > 1$  выражения для инкремента колебаний в системе с обратной связью только по одной волне ( $R_{2,1} = 0$ ) и одинаковой обратной связью по обеим волнам ( $R_1 = R_2 = R$ ) можно записать в виде

$$p'_{1,2}(R_{2,1} = 0) = \frac{1}{2\Delta t} \ln \left[ R_{1,2} \left( 1 + \tilde{N}_{1,2}^{(1)}(R_{2,1} = 0) \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \right) \right],$$

$$p'_{1,2}(R_1 = R_2) = \frac{1}{2\Delta t} \ln \left[ R \left( 1 + \sqrt{\gamma_0^2 d^2 \tilde{N}_{1,2}^{(1)}(R_1 = R_2)} + \frac{\gamma_0^2 d^2}{2} \tilde{N}_{1,2}^{(1)}(R_{2,1} = 0) \right) \right]. \quad (2.22)$$

Из (2.19) — (2.22) видно, что ширину спектра накачки не имеет смысла брать больше  $\Delta\omega_{\max} \simeq \Delta\omega_{1,2,3}$  (длительность отдельного пика накачки  $\delta t$  соответственно меньше  $\delta t_{\min} \simeq \Delta\omega_{\max}^{-1}$ ). При этом  $\tilde{N}_{1,2\max}^{(1)}(R_{2,1} = 0) = \tilde{N}_{\max}^{(1)} \simeq \frac{\Delta\omega_{\max}}{\Delta}$  (например, для КДР при  $\lambda_{1,2} \simeq 1,06 \mu$ ,  $\delta t_{\min} \simeq 0,01 n_1 d/c$ ,  $N_{\max} \simeq 300 \frac{(l_+ + l_-)}{d}$ ). Поскольку обычно  $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$ ,

$$\tilde{N}_{1,2\max}^{(1)}(R_1 = R_2) < \tilde{N}_{\max}^{(1)}.$$

Таким образом, при синхронизации мод накачки может быть получено значительное уменьшение порогового значения ее средней мощности по сравнению с пороговым значением при одномодовой накачке (при  $R_{2,1} = 0$  — в  $\tilde{N}_{\max}^{(1)}$  раз), причем это уменьшение больше для системы с обратной связью только по одной из волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, В. В. Бакланова, А. С. Чиркин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 146 (1967).
2. S. E. Haggis, IEEE, QE-2, № 10, 701 (1966).
3. М. Е. Герценштейн, Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 8, 1145 (1963); 9, № 11, 2004 (1964).

4. С. А. А х м а н о в, Р. В. Х о х л о в, Проблемы нелинейной оптики, ВИНТИ, М., 1964.
5. Г. И. Ф р е й д м а н, Тр. 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966.
6. S. E. H a r r i s, IEEE, QE-3, № 5, 205 (1967).
7. В. М. Ф о р т у с, Г. И. Ф р е й д м а н, Тр. 3-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Ереван, 1967 г.

Научно-исследовательский радио-физический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
21 июня 1967 г.

## SELF-EXCITATION OF PARAMETRICALLY-COUPLED OSCILLATIONS IN RESONATORS IN OPTICAL RANGE AT NON-MONOCHROMATIC PUMPING

*G. I. Freidman*

An analogue of Flokke's theorem is shown to be satisfied for the integral equations with slow-down argument and variable coefficients, describing in the one-dimensional approximation the self-excitation of parametrically-coupled oscillations in resonators of optical range at the non-monochromatic pumping. When the detuning due to spatial synchronism and the frequency detuning of spectral components of pumping are taken into account, the dependence of the mean value of oscillation increment from the reflection coefficients of mirrors and the width of the frequency spectrum of pumping is determined for a quasi-continuous and discrete spectrum of its modes with the random phases and for synchronization of pumping modes with a discrete spectrum.

---

УДК 621 371 24 621 378 3

**ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ЛАЗЕРА  
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В АТМОСФЕРЕ***А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме*

В работе исследовались вызванные атмосферной турбулентностью флуктуации параметров квазимонохроматической световой волны от газового лазера. Измерения производились на горизонтальных трассах протяженностью 50, 100, 150, 650 и 6500 м в условиях слабых и сильных флуктуаций. Измерялись дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности плоской и сферической волн и определялись частотные спектры и законы распределения вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности. На длинных трассах проводились также измерения дисперсии и частотных спектров флуктуаций угла прихода волн. Полученные данные подтверждают следующий из теории факт, что в области слабых флуктуаций нет существенных различий между характером флуктуаций белого света и света от оптического квантового генератора. В области сильных флуктуаций обнаружено отклонение закона распределения вероятностей флуктуаций от нормально-логарифмического в сторону более глубоких замираний сигнала. Насыщение дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности в этой области носит такой же характер, как и в случае белого света.

В связи с быстрым внедрением оптических квантовых генераторов в области связи, локации и т. д. в настоящее время непрерывно усиливается внимание к флуктуационным явлениям, возникающим при прохождении света от ОКГ через атмосферу и создающим значительные помехи и трудности в использовании ОКГ.

За последнее десятилетие были достигнуты большие успехи в изучении природы флуктуаций параметров световых волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Результаты, полученные Татарским [1] и подтвержденные экспериментальными исследованиями [2-9] с обычными источниками белого света, позволяют в настоящее время полностью определять статистические характеристики флуктуаций при условии малости относительных флуктуаций интенсивности.

В последние годы было проведено экспериментальное исследование насыщения дисперсии флуктуаций интенсивности света, которое наблюдается при больших турбулентных флуктуациях показателя преломления воздуха и на трассах большой протяженности [4, 6], и дано теоретическое объяснение этого явления [10, 11]. В области насыщения, которая получила название области «сильных флуктуаций», изучены корреляционные функции, спектры и функции распределения флуктуаций интенсивности [6]. Хорошее согласие экспериментов по распространению белого света с теорией Татарского [1], построенной для монохроматического излучения, подтверждает слабую зависимость флуктуационных явлений от длины световой волны и указывает на возможность использования основных результатов этих экспериментов для анализа флуктуаций параметров световых волн от ОКГ.

Вместе с тем, в области сильных флуктуаций, теория которых еще не завершена, не исключена возможность появления при распространении волн от ОКГ некоторых особенностей, не проявляющихся при распространении белого света.

В последнее время появились работы, посвященные исследованию флуктуаций света ют ОКГ [12, 13]. Настоящее исследование отличается от них тем, что, кроме оптических измерений, большое внимание уделялось определению характеристик турбулентности на трапсе, что облегчило интерпретацию результатов и их сравнение с теоретическими расчетами.

Измерения флуктуаций интенсивности и угла прихода света от ОКГ были проведены с целью 1) доказать возможность перенесения результатов экспериментов, проводившихся в 1960—1965 гг. с немонахроматическими источниками света [2-4, 6, 7, 9], на случаи флуктуации монохроматического света от газового лазера; 2) исследовать закон распределения вероятностей флуктуаций интенсивности света от ОКГ в условиях «слабых» и «сильных» флуктуаций; 3) сравнить дисперсию флуктуаций уровня сигнала и угла прихода света для плоской и сферической волны.

### 1. ТЕОРИЯ

Теоретические зависимости дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности света  $\sigma^2 = [\ln I - \overline{\ln I}]^2$  и угла прихода  $(\Delta\alpha)^2$  от структурной постоянной пульсаций коэффициента преломления  $C_n$ , длины трапсы  $L$  и параметров волны, а также вид энергетического частотного спектра флуктуаций получены и детально обсуждены в [1]. В этой же работе, а также в [2-5] указана методика определения  $C_n$  по измерениям метеорологических параметров.

Здесь мы приведем окончательные формулы, с которыми сопоставлялись результаты измерений.

1. Дисперсия флуктуаций интенсивности света для плоской волны

$$\sigma_{пл}^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (1)$$

для сферической волны

$$\sigma_{сф}^2 = 0,52 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (2)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ .

2. Дисперсия флуктуаций угла прихода для плоской волны

$$\Delta\alpha_{пл}^2 = 2,8 b^{-1/3} C_n^2 L, \quad (3)$$

для сферической волны

$$\Delta\alpha_{сф}^2 = 1,05 b^{-1/3} C_n^2 L, \quad (4)$$

где  $b$  — диаметр приемного объектива.

Формулы (1) — (4) справедливы в предположении

$$\frac{l_0^2}{\lambda} \ll L \ll \frac{L_0^2}{\lambda} \quad (5)$$

( $l_0$  — внутренний масштаб турбулентности, порядка нескольких миллиметров;  $L_0$  — внешний масштаб турбулентности,  $L_0 \approx 2z$ ;  $z$  — высота луча над поверхностью земли). Кроме того, выражения (1) и (2) пригодны лишь для случая слабых флуктуаций, когда  $\sigma < 1$ ; (3) и (4) сохраняют свою справедливость и при увеличении  $\sigma$  до значений по крайней мере в несколько единиц [7].

3. Произведение частоты на спектральную плотность  $W(f)$  флуктуаций уровня плоской и сферической волн, отнесенное к дисперсии

$\sigma^2 = \int_0^{\infty} W(f) df$ , является универсальной функцией безразмерной частоты  $f/f_0$  ( $f_0 = v_{\perp} / \sqrt{2\pi\lambda L}$ ), т. е.

$$\frac{fW(f)}{\int_0^{\infty} W(f) df} = U(f/f_0). \quad (6)$$

Функция  $U(f/f_0)$  имеет максимум при  $f = 1,4 f_0$ .

Аналогично произведение спектральной плотности флуктуаций угла прихода на частоту, отнесенное к дисперсии  $\overline{\Delta\alpha^2}$ , является универсальной функцией безразмерной частоты  $f/f_0$  ( $f_0 = \frac{v_{\perp}}{b}$ ,  $b$  — диаметр объектива). Функция  $\frac{fW_{\Delta\alpha}(f)}{\int_0^{\infty} W_{\Delta\alpha}(f) df}$  имеет максимум при  $f = 0,22 f_0$ .

## 2. ТРАССА

Измерения флуктуаций интенсивности света проводились на трассах протяженностью 50, 100, 150, 650 и 6500 м.

Короткие трассы (50, 100 и 150 м) проходили на высоте одного метра над однородной ровной поверхностью в степи. Измерения вертикальных профилей средней температуры и скорости ветра, по которым вычислялись значения  $C_n$  и  $v_{\perp}$ , проводились вблизи трассы и достаточно надежно характеризовали метеорологические условия на всей трассе.

Трасса в 650 м проходила над холмистым полем на средней высоте 3,5 м над уровнем почвы; трасса 6500 м — над слабо пересеченной местностью с участками леса на средней высоте 20 м над уровнем почвы. Часть этой трассы протяженностью около одного километра проходила над рекой. Метеорологические измерения проводились в одной точке вблизи приемника света. Все исследования были выполнены в дневное время в июле—августе 1966 г.

## 3. АППАРАТУРА

Источником света служил газовый ОКГ He—Ne с длиной волны  $\lambda = 0,63$  мкм. ОКГ работал в квазимодевом режиме (отсутствовали поперечные моды). Диаметр пучка на выходе составлял 2,4 мм, угол расхождения пучка—1°.

Для получения плоской волны использовалась телескопическая система. Никакие диафрагмы в системе не ограничивали пучок, и форма кривой спада интенсивности от центра к краям пучка определялась формой пучка, выходящего из лазера. Из объектива выходил параллельный пучок света диаметром около 8 см по половинной интенсивности. Диаметр пучка в точке приема превышал выходной диаметр пучка на величину дифракционного расхождения ( $\sqrt{L\lambda}$ ) и был соответственно равен 13,5 см на 650 м и 27 см на 6500 м.

Волновой параметр  $D^2/L\lambda$  на расстояниях 150 и 650 м равнялся соответственно 65 и 16, т. е. приемник находился в прожекторной зоне излучателя, и световую волну можно было с достаточно хорошим приближением рассматривать как плоскую. Для трассы 6500 м волновой параметр равнялся 1,6. Сравнить результаты, полученные на этой трассе с теоретическими расчетами, выполненными для плоской волны, необходимо с осторожностью.

Для получения сферической волны удалялся окуляр системы. Угол раствора лучка, выходящего из объектива, составлял при этом 13'.

На приемном конце трассы устанавливалась бленда длиной один метр. Размер входной диафрагмы всегда был много меньше зоны Френеля  $\sqrt{\lambda L}$ , которой приблизительно соответствует пространственный радиус корреляции флуктуаций интенсивности света. Поэтому приемник можно было рассматривать как точечный. Поле зрения приемника составляло 3'.

Сигнал, получаемый на фотоумножителе, закрепленном на конце бленды, поступал на логарифмический усилитель с динамическим диапазоном 25 дб. Напряжение с логарифмического усилителя, пропорциональное логарифму флуктуаций интенсивности света  $\ln I$ , записывалось на шлейфовом осциллографе Н-700. Кроме того, для статистической обработки полученного сигнала в полевых условиях использовались аналоговые устройства—квадратор и частотный анализатор. Квадратор давал сигнал, пропорциональный дисперсии логарифма флуктуаций  $\sigma^2$  с временем усреднения 100 сек; 26-канальный частотный анализатор давал частотный спектр сигнала в области частот 0,06—900 гц.

На трассах 650 и 6500 м попеременно с измерениями флуктуаций интенсивности проводились измерения дисперсии и частотного спектра флуктуаций угла прихода от того же источника света. Эти измерения представляли самостоятельный интерес и, кроме того, служили для определения среднего значения  $C_n^2$  на трассе по формуле (3). Измерения флуктуации угла прихода проводились с помощью аппаратуры, описанной в [3, 7], спектральная плотность и  $\overline{\Delta\alpha^2}$  определялись также с помощью аналоговых устройств.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

а) Распределение вероятности  $P(I < I_1)$  флуктуаций интенсивности были получены путем полуавтоматической обработки записей сигнала. Примеры распределений, полученных на коротких трассах при величи-

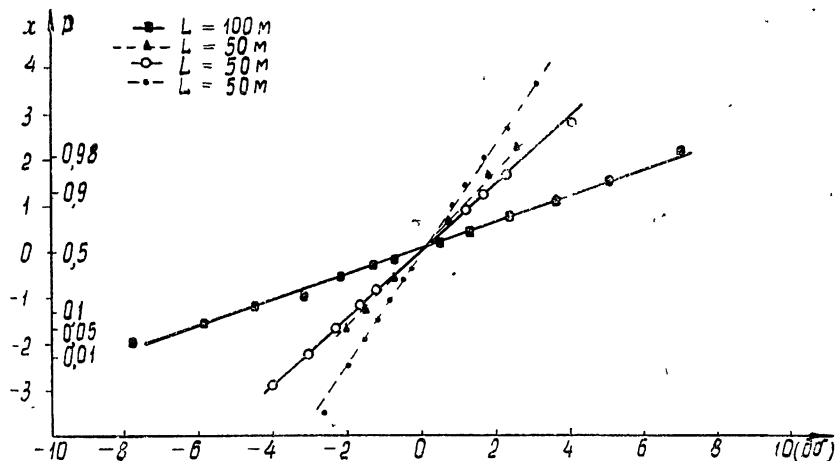


Рис. 1. Примеры распределений вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности плоской волны на коротких трассах ( $\sigma_0 < 1$ ). По оси ординат отложен аргумент функции нормального распределения  $P = \Phi(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

не\*  $\sigma_0 = 0,19 \div 0,84$ , т. е. в области слабых флуктуаций, приведены на рис. 1. Здесь по оси ординат отложена величина  $\bar{P}(I < I_1)$  в вероятностном масштабе, а по оси абсцисс уровни интенсивности в децибеллах. Все полученные распределения (около 20) изображаются в этом масштабе прямыми линиями, что соответствует нормально-логарифмическому закону.

Распределения вероятностей флуктуаций интенсивности плоской волны, полученные на трассе 650 м, были разбиты на две группы по значениям дисперсии ( $\sigma_0 < 0,8$  — слабые флуктуации и  $1 \leq \sigma_0 \leq 1,7$  — переходная область от слабых флуктуаций к сильным) и пронормированы на дисперсию. Как видно из графика рис. 2, при дисперсии

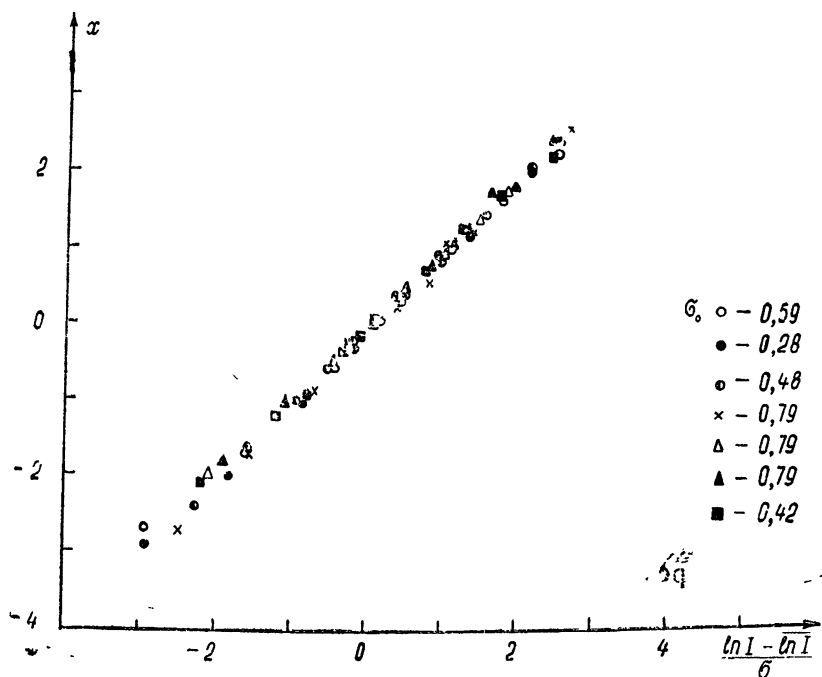


Рис. 2а. Распределения вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности плоской волны на трассе  $L=650$  м:  
 $\sigma_0 < 0,8$ .

$\sigma_0 > 1$  вероятность более глубоких замираний увеличивается по сравнению с логарифмически-нормальным законом. Примеры распределения вероятностей флуктуаций интенсивности света, полученных в условиях заведомо сильных флуктуаций ( $\sigma_{\text{экср}} = 1,2 - 1,9$ , рассчитанное по формуле (1) значение  $\sigma_0 = 2 \div 4$ ), приведены на рис. 3. Отклонение от нормально-логарифмического закона имеет такой же вид, что и для переходной области (рис. 3). Случаи распределений вероятности, отличные от нормально-логарифмического, были отмечены Хеном [13]. Однако ввиду отсутствия данных о величине коэффициента  $C_n$  на трассе, Хен не смог обнаружить, в каких условиях имеют место такие отклонения.

Нами была произведена проверка гипотезы о релеевском законе распределения вероятностей для интенсивности сигнала. Для этого полученные распределения были построены в координатах  $\ln(1 - P), I,$

\* Здесь и ниже через  $\sigma_0^2$  мы будем обозначать величину дисперсии флуктуаций плоской волны, рассчитанную по формуле (1), а через  $\sigma_{\text{экср}}^2$  — величину измеренной дисперсии.



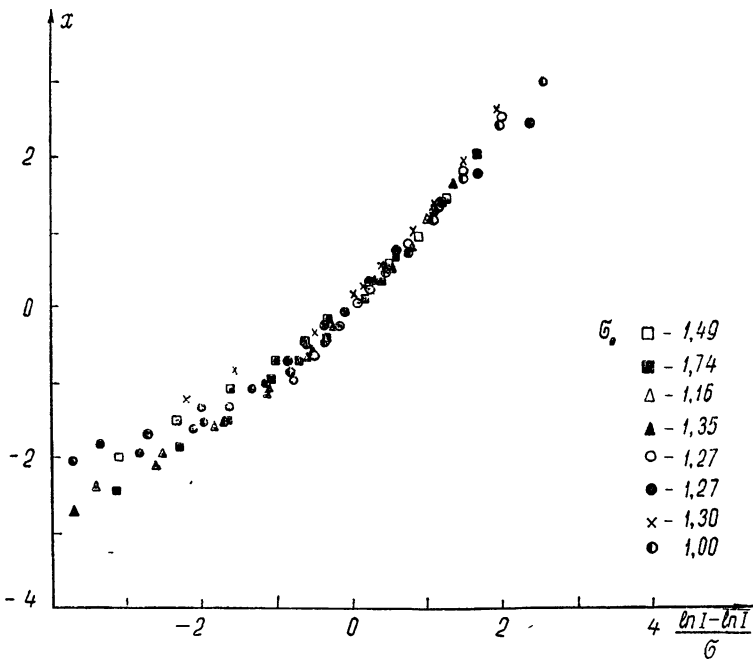


Рис. 26. Распределения вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности плоской волны на трассе  $L=650$  м:  
 $1 < \sigma_0 < 1,7$ .

в которых релейевскому закону соответствует прямая линия. Отклонения экспериментальных точек от прямой значительно больше, чем ошибки измерений, что приводит к отказу от выдвинутой гипотезы о релейев-

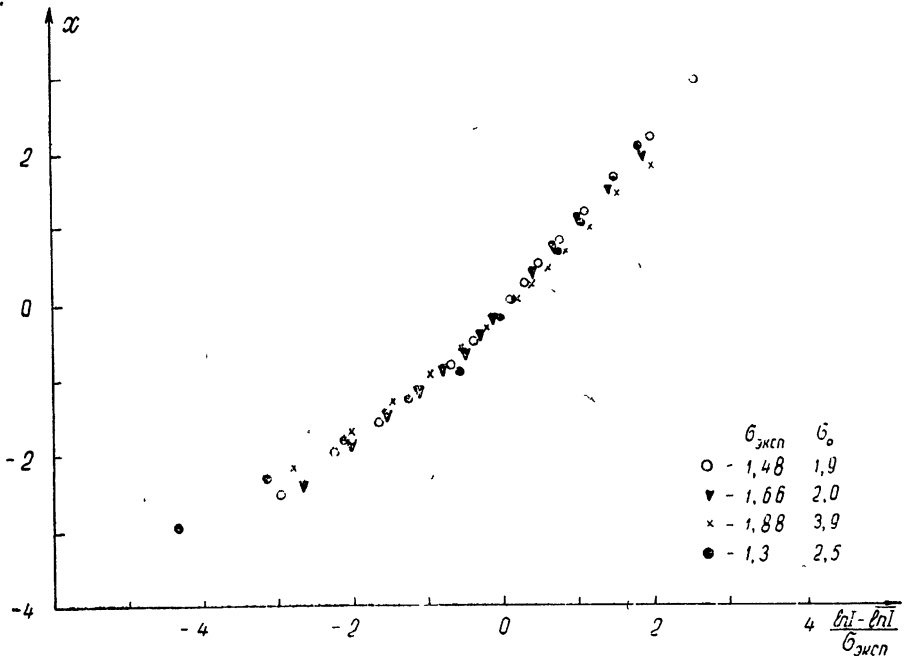


Рис. 3. Распределения вероятностей флуктуаций логарифма интенсивности плоской волны на трассе  $L=6500$  м ( $\sigma_{\text{эксп}} = 1,2 \div 1,9$ ,  $\sigma_0 = 2 \div 4$ ).

ском распределении. Обобщенный релейевский закон также не соответствует экспериментальным данным.

б) Дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности света, измеренные с помощью квадратора, арифметически усреднялись по 10-минутному интервалу. На коротких трассах было получено около 70 значений дисперсии для плоской волны и столько же для сферической, на трассе 650—около 35 значений для плоской волны и 15 для сферической, и на трассе 6500 м—около 40 значений для плоской волны. Значение отношения дисперсии логарифма плоской и сферической волн, усредненное по всем метеоусловиям, оказалось равным  $\sigma_{пл}^2/\sigma_{сф}^2 = 2,3$ , что близко к теоретическому значению 2,4, следующему из формул (1) и (2).

На рис. 4 нанесены значения  $\sqrt{\sigma_{эксп}^2}$ , полученные на трассах 50, 100 и 150 м, в зависимости от значения  $\sqrt{\sigma_{пл}^2}$ , рассчитанного по формуле

(1), где структурная постоянная показателя преломления  $C_n$  вычислялась из метеорологических измерений. Прямая на этом графике означает полное соответствие рассчитанных и измеренных данных.

Аналогичное сопоставление экспериментальных и расчетных данных для трасс длиной 650 и 6500 м провести не удалось, так как оказалось, что  $C_n$ , рассчитанное по метеоизмерениям в одной точке слабонеоднородной трассы, не является одинаковым для всей трассы, и величина  $\sigma_0$ , найденная по формуле (1), позволяет в этом случае лишь грубо оценить порядок величины флуктуаций. По этой причине для теоретического расчета ожидаемой величины дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности на этих трассах  $C_n$  определялось

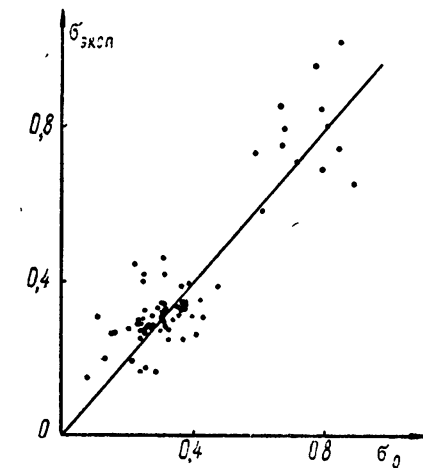


Рис. 4. Сравнение измеренных значений  $\sigma$  для плоской волны с теоретическим расчетом по метеорологическим данным для коротких трасс.

из проводимых одновременно измерений флуктуаций угла прихода по формуле (3).

На рис. 5 а, б представлено сравнение измеренных и рассчитанных указанным образом значений  $\sqrt{\sigma^2}$ . Из рис. 5 а, на котором приведены данные, полученные в области слабых флуктуаций и переходной области, видно, что пересчет данных о флуктуациях угла прихода на флуктуации интенсивности дает вполне удовлетворительные результаты, т. е. достаточно иметь измерения одной из этих величин ( $\sigma^2$  или  $\Delta\alpha^2$ ), чтобы вычислить и вторую.

На графике рис. 5 б видно явление насыщения флуктуаций, впервые обнаруженное в экспериментах с немонахроматическими источниками света [4, 6]. Небольшое количество и значительный разброс данных не позволяют точно указать зависимость  $\sigma_{эксп}$  от  $\sigma_0$ . Можно лишь отметить, что в области, где  $\sqrt{\sigma_0^2}$ , рассчитанное по формуле (1), превышает величину 1,5, среднее значение экспериментально измеренной величины  $\sqrt{\sigma_{эксп}^2}$  остается на уровне, близком к 1,5. Это значение несколько больше, чем полученное в работах [4, 6].

в) Частотный спектр флуктуаций логарифма амплитуды. На коротких трассах было получено 15 частотных спектров (усредненных за 10 мин) для плоской волны и 10 для сферической волны. Поскольку величина

$$W(f)f \left| \int_0^{\infty} W(f) df \right.$$

является универсальной функцией безразмерной частоты (см. (6)), экспериментальные спектры  $W(f)$ , пронормированные и умноженные на частоту, были построены в зависимости от  $f/f_0$  (при использовании экспериментальных данных о направлении и скорости ветра) и усреднены. На рис. 6 приведены усредненные частотные спектры плоской и сферической волн и теоретический спектр плоской волны [1].

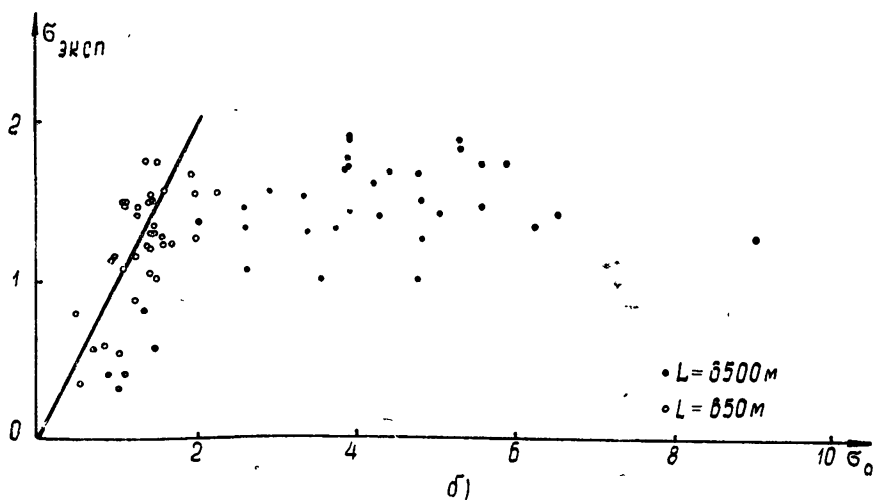
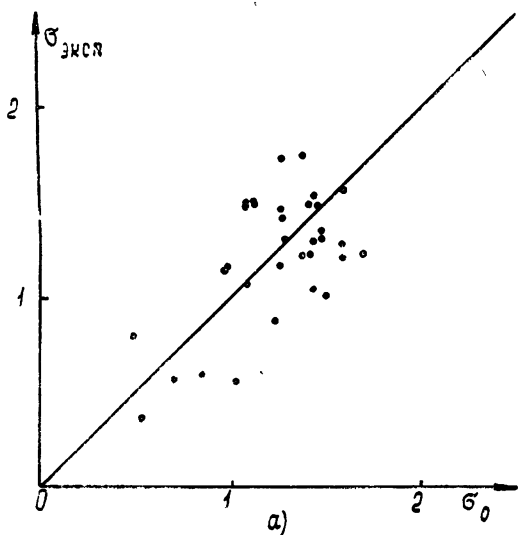


Рис. 5. Сравнение измеренных значений  $\sigma$  для плоской волны с теоретическими, рассчитанными по значениям  $C_n$ , полученным из измерений флуктуаций угла прихода  $\overline{\Delta\alpha^2}$ :

а) на трассе  $L=650$  м, б) на трассе  $L=6500$  м.

г) Дисперсия флуктуаций угла прихода и эффективный диаметр приемного объектива при супергетеродинном приеме. Одновременно с измерениями флуктуаций логарифма интенсивности света были измерены около 30 значений дисперсии флуктуаций угла прихода  $\overline{\Delta\alpha^2}$  плоской волны и 10 значений  $\overline{\Delta\alpha^2}$  для сферической волны на трассе 650 м. Среднее отношение  $\overline{\Delta\alpha_{пл}^2} / \overline{\Delta\alpha_{сф}^2} = 2,42$ , что близко к теоретическому значению 2,75 (формулы (3), (4)). Измеренные величины  $\overline{\Delta\alpha_{пл}^2}$  на

трассе 650 м в дневное время лежат в пределах от 1 до 6'', а на трассе 6500 м от 3 до 9''.

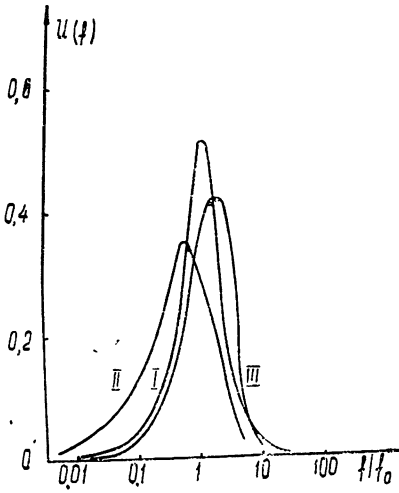


Рис. 6. Усредненные безразмерные частотные спектры флуктуаций логарифма интенсивности, полученные на коротких трассах:

1—плоская волна, 2—сферическая волна, 3—теоретический спектр для плоской волны.

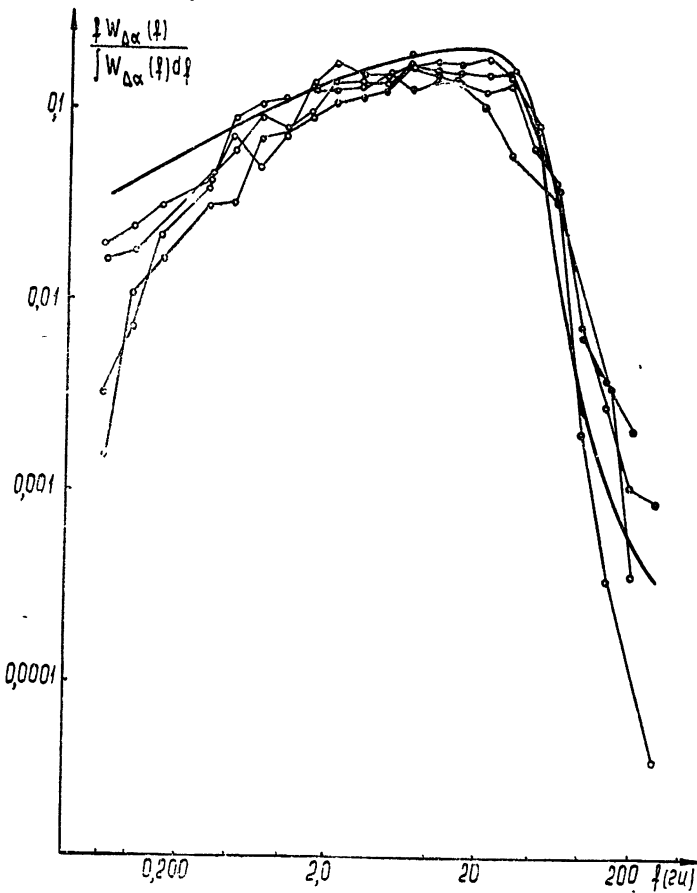


Рис. 7. Нормированные частотные спектры флуктуаций угла прихода плоской волны на трассе 650 м. Жирной линией проведен теоретический спектр.

Полученные значения  $\overline{\Delta\alpha^2}$  дают возможность рассчитать величину  $C_n^2 L$  и оценить в условиях эксперимента эффективный диаметр  $b_{эфф}$  приемного объектива при супергетеродинном приеме по формуле, полученной в работе [14]:

$$b_{эфф} = \left[ 0,0588 \frac{\lambda^2}{C_n^2 L} \right]^{3/5}. \quad (7)$$

Расчет по формуле (7) показывает, что для наших трасс и условий эффективный диаметр приемного объектива при супергетеродинном приеме лежит в следующих пределах:

$$\begin{aligned} \text{при } L = 650 \text{ м} & \quad b_{эфф} = 60 \text{ мм} \div 6 \text{ мм}, \\ \text{при } L = 6500 \text{ м} & \quad b_{эфф} = 12 \text{ мм} \div 3 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Эти оценки по порядку величины сходятся с полученными в [14].

д) Частотные спектры флуктуаций угла прихода. На рис. 7 приведена группа безразмерных частотных спектров флуктуаций угла прихода плоской волны, полученных на трассе 650 м при значениях  $\sigma_0 = 1 \div 1,5$ . Средняя скорость ветра, нормальная к трассе,  $v_{\perp}$  составляла во время этих измерений около 2 м·сек<sup>-1</sup>.

На этом же графике приведен теоретический спектр, полученный в [1], при скорости ветра  $v_{\perp} = 2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  и диаметре приемного объектива  $b = 8 \text{ см}$ , что соответствует использовавшемуся при измерениях. Из графика видно удовлетворительное совпадение измеренных спектров с теоретическим.

## ВЫВОДЫ

Результаты измерений флуктуаций интенсивности света показывают, что:

- 1) в области слабых флуктуаций, как и следует из теории, не обнаруживается отличия характера флуктуаций монохроматического света от флуктуаций белого света;
- 2) различия величины дисперсии флуктуаций логарифма интенсивности и угла прихода для плоских волн и для сферических волн хорошо согласуются с теоретическими;
- 3) в области сильных флуктуаций насыщение флуктуаций интенсивности монохроматического света имеет тот же характер, что и для белого света;
- 4) в области сильных флуктуаций интенсивности монохроматического света обнаружены отклонения от нормально-логарифмического закона в сторону более глубоких замираний сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, ДАН СССР, 123, № 4, 655 (1958).
3. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 886 (1961).
4. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
5. М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 50 (1966).
6. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 775 (1967).
7. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 66 (1968).

8. А С Гурвич, А. И. Кон, Изв. высш уч зав. — Радиофизика, 7, № 4, 790 (1964)
9. D. Y Portman, F. C. Elder, E. Ryznar, V. E. Noble, J. Geophys. Res., 67, 201 (1962).
- 10 В И Татарский, ЖЭТФ, 49, № 4, 1581 (1965).
- 11 В. И Татарский, Изв. высш уч зав — Радиофизика, 10, № 1, 48 (1967).
12. E. Ryznar, Appl. Opt., 4, 1416 (1965).
13. D. H. Höhn, Appl. Opt., 5, 1427 (1966).
14. J. Goldstein, P. A. Miles, A. Chabot, Proc. IEEE, 53, № 9, 1172 (1965).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
26 июля 1967 г.

## FLUCTUATIONS OF THE PARAMETERS OF A LASER LIGHT WAVE PROPAGATING IN THE ATMOSPHERE

*A. S. Gourvich, M. A. Kallistratova, N. S. Time*

In this paper the fluctuations of the parameters of a quasi-monochromatic light wave from a gas laser associated with the atmosphere turbulences are investigated. The measurements were made along the horizontal distances of 50, 100, 150, 650 and 6500 meters under the conditions of weak and strong fluctuations. The dispersion of intensity logarithm fluctuations of a plane and spherical wave was measured. The frequency spectrum is determined, as well as the distribution law of the fluctuation probabilities of the intensity logarithm. The dispersion and frequency spectrum of fluctuations of the arrival angle of waves are also measured for long paths. The data obtained confirms the fact which is followed from the theory that in the region of weak fluctuations there are no considerable differences between the character of fluctuations of white light and laser light. For strong fluctuation region the deflection from the normal logarithmic distribution of fluctuation probabilities to more deep fading was observed. The saturation of the dispersion of the intensity logarithm fluctuations in this region has the same character as in the case of white light.

---

УДК 621.371.167

**О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФЛУКТУАЦИЙ  
ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ ЗА ХАОТИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ  
ЭКРАНОМ**

Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов

Приведены результаты вычислений корреляционных характеристик (дисперсии, автокорреляционной функции и функции частотной корреляции) за хаотическим фазовым экраном при больших возмущениях фазы волны на экране. Приведены результаты расчета индекса флуктуаций интенсивности волны в зависимости от угловых размеров источника излучения.

Как известно, наиболее распространенными при исследовании неоднородной структуры ионосферы и межпланетного пространства являются измерения флуктуаций интенсивности радиоволн. Однако для больших возмущений фазы волны в неоднородном слое связь между характеристиками неоднородностей слоя и корреляционными функциями флуктуаций интенсивности удается установить только на больших расстояниях от рассеивающего слоя (в зоне Фраунгофера) [1].

В то же время решение задачи в общем случае может быть получено непосредственным расчетом корреляционных моментов четвертого порядка для поля. Некоторые результаты с помощью указанной методики были получены в [2-5].

В настоящей работе этим же методом проведены вычисления функций частотной корреляции и других корреляционных характеристик флуктуаций интенсивности при больших возмущениях фазы волны в слое (фазовом экране) (см. [4]).

Рассмотрим нормальное падение плоской волны на тонкий слой с неоднородностями, вызывающий только флуктуации фазы  $\Delta S_\omega$  волны. Предположим, что размеры неоднородностей слоя  $l$  много больше длины волны  $\lambda$ , т. е. углы рассеяния радиоволн в слое  $\theta \approx (\lambda/l) \sqrt{\overline{\Delta S_0^2}} \ll 1$ . Тогда поле волны  $E_\omega(x_1, y_1, z)$  в точке наблюдения с координатами  $(x_1, y_1)$  на расстоянии  $z$  от экрана можно представить в виде (см. [8])

$$E_\omega(x_1, y_1, z) = \frac{i\omega}{2\pi z c} e^{-ik_0 z} \iint_{-\infty}^{\infty} E_\omega(x, y, 0) \exp\left\{-\frac{i\omega}{2zc} [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]\right\} dx dy, \quad (1)$$

где  $E_\omega(x, y, 0)$  — поле на экране;  $(x, y)$  — горизонтальные координаты в плоскости экрана;  $\omega$  — частота волны;  $c$  — скорость света.

По определению функция корреляции флуктуаций интенсивности на разных частотах  $R_{I_\omega} = \overline{I_{\omega_1}(r_1, z) I_{\omega_2}(r_2, z)} - \overline{I_{\omega_1}(r_1, z)} \overline{I_{\omega_2}(r_2, z)}$ . Используя (1), получим

$$\overline{I_{\omega_1} I_{\omega_2}} = I_{0\omega_1} I_{0\omega_2} \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(2\pi z c)^4} \iiint \iiint \iiint \exp\{i[\Delta S_{\omega_1}(x, y) - \Delta S_{\omega_1}(x', y') + \dots]\}$$

$$+ \overline{\Delta S_{\omega_2}(p, q) - \Delta S_{\omega_2}(p', q')} \exp \left\{ -\frac{i\omega_1}{2zc} (x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2) - \right. \quad (2)$$

$$\left. - \frac{i\omega_2}{2zc} [(p - \xi')^2 + (q - \eta')^2 - (p' - \xi')^2 - (q' - \eta')^2] \right\} dx dy dx' dy' dp dq dp' dq',$$

где  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = r = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ .

Предположим, что флуктуации фазы на экране распределены по нормальному закону. Тогда

$$\overline{\exp [i\Sigma\Delta S]} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \overline{(\Sigma\Delta S)^2} \right]. \quad (2a)$$

Перейдем в (2) к новым переменным [2]

$$x' = x', \quad u_x = x - x', \quad v_x = p' - p, \quad \delta_x = p - x',$$

$$y' = y', \quad u_y = y - y', \quad v_y = q' - q, \quad \delta_y = q - y'.$$

Тогда после интегрирования по координатам  $x'$ ,  $y'$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  получим

$$R_{I_\omega}(\xi', \eta') = I_{0\omega_1} I_{0\omega_2} \left\{ \frac{\omega_2^2}{(2\pi zc)^2} \int \int \int \int \exp \left[ -\langle \overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2} + \overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2} - \overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2} \rho_{12} - \right. \right. \quad (3)$$

$$\left. \left. - \overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2} \rho_{34} + \sqrt{\overline{(\Delta S)_{\omega_1}^2} \overline{(\Delta S)_{\omega_2}^2}} (\rho_{13} + \rho_{24} - \rho_{23} - \rho_{14}) \rangle \right] \times \right.$$

$$\left. \times f(v_x, v_y, \delta_x, \delta_y) dv_x dv_y d\delta_x d\delta_y - 1 \right\},$$

где

$$f(v_x, v_y, \delta_x, \delta_y) = \exp \left\{ -\frac{i\omega_2}{2zc} \left[ \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) (v_x^2 + v_y^2) + 2v_x \delta_x + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2v_y \delta_y + 2v_x \xi' + 2v_y \eta' \right] \right\}$$

и  $\rho_{ik}$  — корреляционные функции флуктуаций фазы волны на выходе слоя. Для гауссовой функции корреляции неоднородностей слоя

$$\rho_{12} = \exp \left\{ -\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{v_x^2 + v_y^2}{l^2} \right\}, \quad \rho_{13} = \exp \left\{ -\frac{(v_x + \delta_x)^2 + (v_y + \delta_y)^2}{l^2} \right\},$$

$$\rho_{14} = \exp \left\{ -\frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{l^2} \right\}, \quad \rho_{23} = \exp \left\{ -\frac{[(1 - \omega_2/\omega_1)v_x + \delta_x]^2 + [(1 - \omega_2/\omega_1)v_y + \delta_y]^2}{l^2} \right\}, \quad (4)$$

$$\rho_{34} = \exp \left\{ -\frac{v_x^2 + v_y^2}{l^2} \right\}, \quad \rho_{24} = \exp \left\{ -\frac{(\omega_2 v_x / \omega_1 - \delta_x)^2 + (\omega_2 v_y / \omega_1 - \delta_y)^2}{l^2} \right\}.$$

Здесь  $l$  — средний размер неоднородностей. Если  $\omega_1 = \omega_2$ , то (3) переходит в выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности [2, 3].

Полученные формулы легко могут быть обобщены на случай, когда на слой с неоднородностями в некотором телесном угле падает поток некогерентных плоских волн. Последнее имеет непосредственное отношение к сцинтилляциям радиозвезд на неоднородностях ионосферы и



межпланетной среды, когда угловые размеры радиозвезд становятся сравнимыми с угловыми размерами неоднородностей.

Представим поле волны на выходе слоя с неоднородностями (1) в виде

$$E(x, y, 0) = \exp[i\Delta S(x, y)] \iint E(\theta_x, \theta_y) \exp[i(k_x x \theta_x + k_y y \theta_y)] d\theta_x d\theta_y, \quad (5)$$

где  $\theta_x, \theta_y$  — угловые координаты соответственно в плоскостях ( $xz$ ) и ( $yz$ ). В (5) мы пренебрегаем зависимостью возмущений фазы волны в слое  $\Delta S$  от угла падения волны, что, очевидно, всегда можно сделать при  $\theta_x, \theta_y \ll 1$ . Кроме того, будем считать, что различные участки источника излучают радиоволны некогерентно. Тогда  $E(\theta_x, \theta_y)E^*(\theta'_x, \theta'_y) = I(\theta_x, \theta_y) \delta(\theta_x - \theta'_x) \delta(\theta_y - \theta'_y)$  (точки над левой частью равенства означают высокочастотное усреднение за время  $t > 1/\omega$ ). Используя это соотношение и подставляя (5) в формулу (1), имеем выражение для нормированной величины  $\bar{I}^2(\theta_0)$ :

$$\begin{aligned} \bar{I}^2(\theta_0) = & \frac{\omega^2}{(2\pi z c)^2} \frac{1}{2} I_0^2 \iint \iint \exp \left\{ - \left\langle 2\Delta S_0^2 - 2\Delta S_0^2 \left[ \rho(v_x, v_y) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \rho(\delta_x, \delta_y) - \frac{\rho(v_x - \delta_x, v_y - \delta_y) + \rho(v_x + \delta_x, v_y + \delta_y)}{2} \right] \right\rangle \right\} \times \\ & \times \left[ \exp \left\{ - \frac{k^2 \theta_0^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2)}{2} \right\} + \exp \left\{ - \frac{k^2 \theta_0^2 (v_x^2 + v_y^2)}{2} \right\} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{i\omega}{2cz} (2v_x \delta_x + 2v_y \delta_y) \right\} dv_x dv_y d\delta_x d\delta_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\theta_0$  — угловой размер источника,  $\left( I(\theta_x, \theta_y) = I_0 \exp \left\{ - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{\theta_0^2} \right\} \right)$ ,  $\rho_{ik}$  определяются формулами (4).

Проинтегрируем (3), разложив экспоненциальную функцию под знаком интеграла в степенной ряд\*. При этом получается следующее выражение для функции корреляции:

$$\begin{aligned} R_{I_\omega}(r, z) = & I_{0\omega_1} I_{0\omega_2} \left\{ \exp \left( - \frac{\alpha(1+p^2)}{p} \right) \left\langle 1 + \frac{16p^2}{D^2(1+p)^2} \times \right. \right. \\ & \times \sum_{n=1}^{n-m} \alpha^n \sum_{S_1=0}^{S_1=n} \frac{(-1)^{S_5+S_6} p^{S_5-S_6}}{S_1! \dots S_6!} \frac{\exp[-B/g(1+t^2)]}{g \sqrt{1+t^2}} \times \\ & \left. \left. \times \cos \left[ \arctg t - \frac{Bt}{g(1+t^2)} \right] \right\rangle - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $l_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $\sum_{l_1=1}^6 S_{l_1} = n$ ;  $t = \frac{4p}{Dg(1+p)} [\Delta(S_2 - S_1) + (1+p)(S_6 - S_5)]$ ;

$$B = \frac{16p^2 r^2}{D^2(1+p)^2} (S_2 + S_3 + S_5 + S_6);$$

\* Разложение в ряд проводится только для той части подынтегральной функции которая непосредственно зависит от  $\rho_{ik}$ .

$$g = \frac{16\rho^2}{D^2(1+\rho)^2} + (S_1+S_2+S_5+S_6)(S_1\Delta^2+S_3\rho^2+S_4+S_5+S_6\rho^2) - (S_1\Delta+S_5-S_6\rho)^2;$$

$$\Delta = 1 - \rho; \quad \rho = \frac{1-\delta}{1+\delta}; \quad D = \frac{4zc}{\bar{\omega}l^2}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2};$$

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}; \quad \alpha = \sqrt{\overline{\Delta S_{\omega_1}^2} \overline{\Delta S_{\omega_2}^2}};$$

$I_{0\omega_1}$ ,  $I_{0\omega_2}$  — интенсивности радиоволн на входе слоя. Подобным же образом может быть представлен интеграл (6), соответствующее выражение которого здесь не приводится.

Аналогичные, но более громоздкие выражения можно получить для анизотропной модели неоднородностей.

Расчет по формуле (7) был проведен на ЭВМ БЭСМ-2. Некоторые результаты приведены на рис. 1а. Как видно из рис. 1а, где сплошная и пунктирная кривые относятся соответственно к изотропным и анизотропным неоднородностям, средний квадрат флуктуаций интенсивности  $F = (\bar{I}^2 - \bar{I}^2)/\bar{I}^2$  для случая изотропных неоднородностей достигает максимальной величины, связанной с эффектом фокусировки радиоволн неоднородностями, при значениях волнового параметра  $D \leq 1$ . Положение максимума  $F$  смещается в сторону малых  $D$  ( $D_{\max} \approx 1/\sqrt{\overline{\Delta S_0^2}}$ ) с ростом флуктуаций фазы  $\overline{\Delta S_0^2} = \alpha$  (при  $\omega_1 = \omega_2$ ). Величина максимума  $F$  увеличивается с ростом  $\overline{\Delta S_0^2}$  примерно как  $\ln \overline{\Delta S_0^2}$ , т. е. при больших  $\overline{\Delta S_0^2}$  флуктуации стремятся к «насыщению».

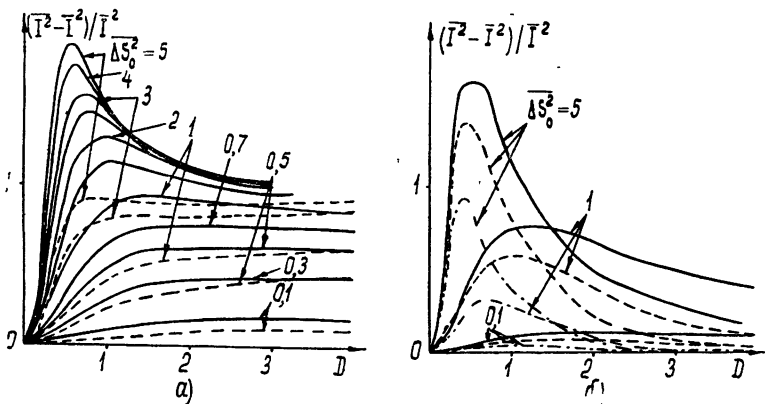


Рис. 1. Зависимость индекса флуктуаций от волнового параметра  $D$  при различных значениях набега фазы волны в слое  $\overline{\Delta S_0^2}$  и отношения

$$\theta = \frac{4}{D} \frac{\theta_0}{l|z|};$$

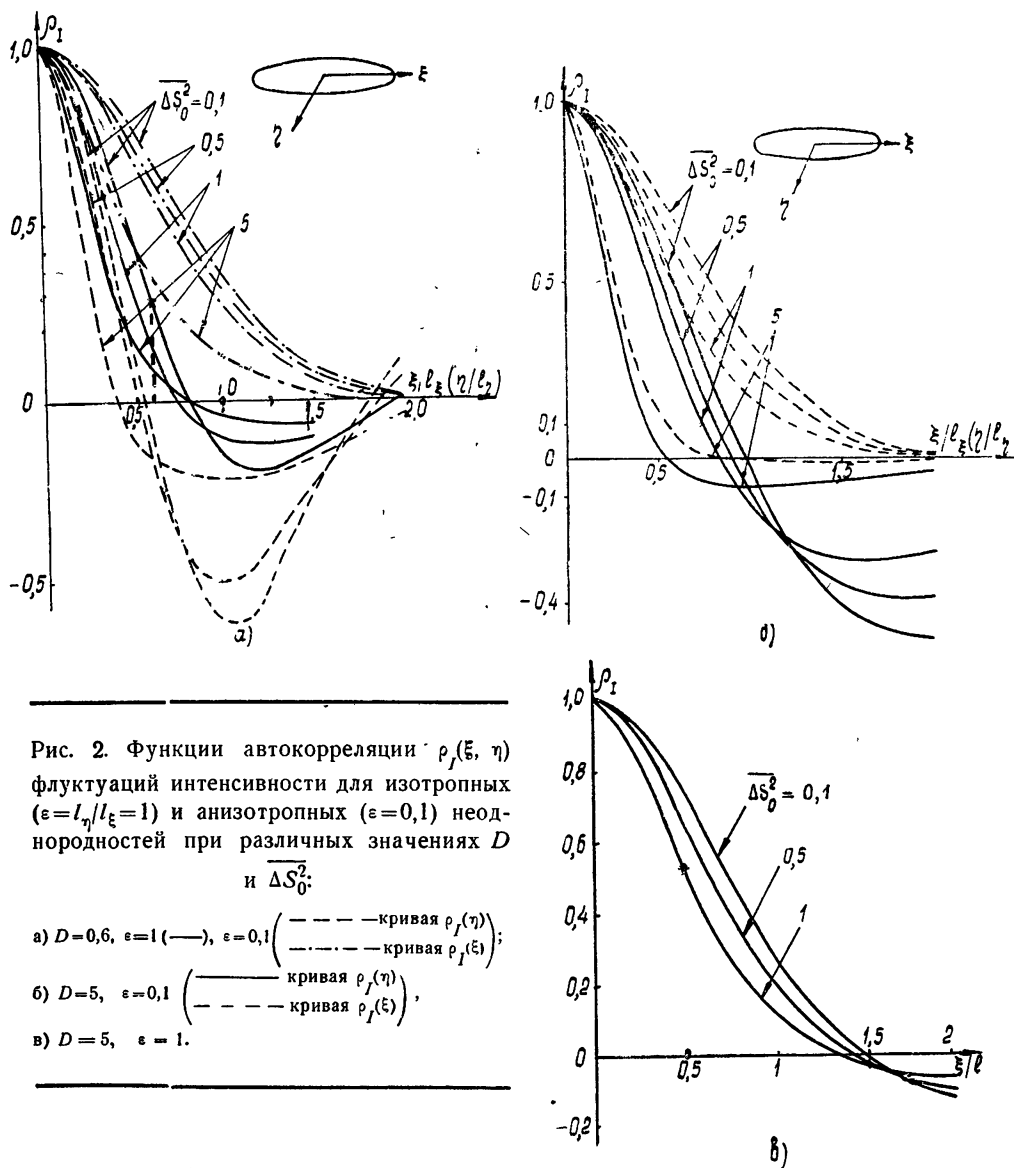
а)  $\theta=0$ , б)  $\theta=0,5$  (кривая —),  $\theta=1$  (кривая ---),  $\theta=2$  (кривая -.-.-).

Для анизотропных неоднородностей с отношением размеров  $l_x/l_y=0,1$  при  $\overline{\Delta S_0^2}=5$  величина  $F$  в области значений  $D \leq 1$  существенно отличается от изотропного случая (рис. 1а). При  $D > 1$  величина флуктуаций стремится к известному пределу  $F \approx 1 - \exp(-2\overline{\Delta S_0^2})$ .

Конечные угловые размеры источника приводят к уменьшению

флуктуаций. Зависимость  $F$  от  $D$  для изотропных неоднородностей при различных значениях параметра  $\theta = \frac{4}{D} \frac{\theta_0}{l/z}$  приведена на рис. 1 б.

Рис. 2а, б, в иллюстрируют поведение автокорреляционных функций флуктуаций при разных значениях  $\overline{\Delta S_0^2}$  и  $D$  для изотропной и анизотропной моделей неоднородностей. Легко видеть, что заметное уменьшение радиуса корреляции флуктуаций с ростом набега фазы происходит уже при значениях  $\overline{\Delta S_0^2} < 1$ . (В области геометрической оптики это обстоятельство менее выражено, чем в случае  $D > 1$ .) С ростом флуктуаций фазы уменьшается величина френелевских осцилляций корреляционных функций.



Отметим существенные отличия в поведении корреляционных функций вдоль большой ( $\xi$ ) и малой ( $\eta$ ) осей анизотропной неоднородности

(рис. 2а). Для функции  $R_{I_\omega}(0, \eta)$  характерны глубокие френелевские осцилляции, которые отсутствуют для функции  $R_{I_\omega}(\xi, 0)$ . Отношение радиуса корреляции  $R_{I_\omega}(0, \eta)$  к соответствующему размеру  $l_\eta$  неоднородности меньше, чем соответствующее отношение для  $R_{I_\omega}(\xi, 0)$ .

На рис. 3а, б приведены характерные кривые частотной корреляции флуктуаций радиоволн в зависимости от  $\alpha$  и  $D$ . При значениях  $\alpha > 1$  заметное уменьшение частотной корреляции флуктуаций происходит даже в области геометрической оптики. При  $D \gg 1$  корреляция между флуктуациями волн разной частоты существенно уменьшается даже при  $\alpha \ll 1$  (см. [4, 6, 7]).

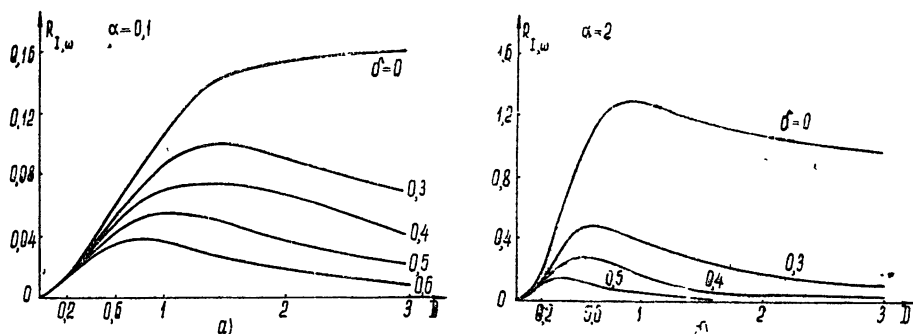


Рис. 3. Зависимость величины частотной корреляции флуктуаций от волнового параметра  $D$  при  $\epsilon=1$  и значениях  $\alpha = \sqrt{(\Delta S^2)_{\omega_1} (\Delta S^2)_{\omega_2}} = 0,1$  (а) и  $\alpha = 2$  (б).

В заключение отметим, что при малых углах рассеяния все приведенные результаты легко могут быть использованы и для случая сферической волны. В этом случае необходимо провести следующую трансформацию параметров:  $D \rightarrow D(1 - z/z_c)$  и  $\xi', \eta' \rightarrow \xi', \eta'(1 - z/z_c)$ . Здесь  $z_c$  — высота источника излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Ратклифф, Проблемы современной физики, № 10, 3 (1957).
2. В. В. Писарева, Астрон. ж., 35, № 1, 112 (1958).
3. R. P. Mercier, Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 382 (1962).
4. Л. М. Ерухимов, Диссертация, Горьковский университет, 1965.
5. В. И. Погорелов, Геомагнетизм и аэронавигация, 7, № 4, 637 (1967).
6. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, № 1, 62 (1964).
7. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэронавигация, 6, № 1, 400 (1966).
8. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 июля 1967 г.

#### STATISTICAL PROPERTIES OF WAVE INTENSITY FLUCTUATIONS BEHIND A RANDOM PHASE SCREEN

Ya. I. Al'ber, L. M. Eroukhimov, V. A. Ryzhov, V. P. Uryadov

The results from calculations of the correlation characteristics (dispersion, auto-correlation function and frequency correlation functions) behind a random phase screen at great phase disturbances of a wave on the screen are given. The index of intensity fluctuations of a wave as dependent on the angular dimensions of the radiation source is calculated.

УДК 621.371.123

**К ВОПРОСУ О ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ  
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ  
ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ**

*И. Е. Арсаев, Б. Е. Кинбер*

Решение волнового уравнения с комплексной диэлектрической проницаемостью берется в форме геометрооптического ряда. Для уравнений эйконала и амплитуды применено разложение в ряд по малому параметру  $\kappa$  (относительное поглощение). Исследованы первые три приближения для эйконала. В первом приближении учет затухания сводится, как обычно, к интегрированию комплексного показателя преломления вдоль невозмущенного луча. Полученные поправки пропорциональны квадрату малого параметра. Линии потока плотности энергии, которые, очевидно, и следует трактовать как лучи в поглощающих средах, совпадают с траекториями, ортогональными к поверхностям  $\text{Re}S = \text{const}$ . Показано, что эти линии меняют свою кривизну по сравнению со случаем  $\epsilon'' = 0$  и изгибаются в область с более сильным поглощением, точнее — в сторону  $\nabla(\epsilon''/\epsilon')$ .

При анализе распространения волн в неоднородных средах широко используется решение  $[1-4]$  в форме асимптотического ряда

$$u = A(\mathbf{r}, k) e^{ikS(\mathbf{r})} = e^{ikS(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(ik)^m}, \quad (1)$$

подстановка которого в скалярное волновое уравнение

$$\Delta u + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) u = 0 \quad (2)$$

приводит к системе уравнений для эйконала  $S$  и амплитуд  $A_m$ :

$$(\nabla S)^2 = \epsilon(\mathbf{r}); \quad (3)$$

$$2\nabla A_0 \nabla S + A_0 \Delta S = 0; \quad (4)$$

$$2\nabla A_m \nabla S + A_m \Delta S = -\Delta' A_{m-1}. \quad (5)$$

Первый член в (1), т. е. член с  $m=0$ , дает приближение геометрической оптики, в которой лучами являются линии  $\text{grad} S$ . Описанная выше процедура была разработана для случая сред без поглощения ( $\text{Im} \epsilon(\mathbf{r}) = 0$ ). Как известно [9], в случае малого поглощения учет последнего сводится только к изменению амплитуд и не меняет лучевой структуры поля. В общем случае поглощающих сред [ $\epsilon = \epsilon'(\mathbf{r}) + i\epsilon''(\mathbf{r})$ ]  $\nabla S$  следует считать комплексным, и не ясно, что следует понимать под лучами. Хотя этот вопрос и рассматривался в литературе [5-8], однако в подходе к нему нет единой точки зрения. В работах [6-8] предлагается формально использовать понятие комплексных лучей, являющихся комплексными характеристиками уравнения эйконала.

В настоящей работе уравнение (3) рассматривается как система двух нелинейных уравнений для действительной  $S_1$  и мнимой  $S_2$  частей

эйконала. Хотя оба подхода в сущности тождественны, второй представляется более удобным для исследования слабо поглощающих сред. В этом случае функции  $S_1$  и  $S_2$  могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра  $\alpha$ , что дает возможность использовать старое понятие лучей.

Такой подход кроме общей схемы решения позволяет получить ряд качественных результатов. В частности, как и в работе Гильберта [9], в первом приближении по  $\alpha$  для эйконала учет затухания сводится к интегрированию комплексного показателя преломления вдоль невозмущенного луча (характеристики). Полученные к первому приближению поправки пропорциональны квадрату малого параметра. Показано также, что линии потока плотности энергии, которые, очевидно, и следует трактовать как лучи в поглощающих средах, совпадают с ортогональными траекториями к поверхностям  $S_1 = \text{const}$ , меняют свою кривизну по сравнению со случаем  $\varepsilon'' = 0$  и изгибаются в сторону  $\nabla(\varepsilon''/\varepsilon')$ .

### 1. УРАВНЕНИЕ «ЭЙКОНАЛА»

Вводя комплексный «эйконал»  $S = S_1 + iS_2$  и отделяя в (3) действительную и мнимую части, для двумерного случая получим нелинейную систему уравнений для  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial y}\right)^2\right] = \varepsilon'(x, y), \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} \frac{\partial S_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \varepsilon''(x, y).$$

Введем новые величины  $U$ ,  $V$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ , которые имеют смысл модулей и углов с осью  $x$  векторов  $\nabla S_1$  и  $\nabla S_2$ :

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = U \cos \varphi, \quad \frac{\partial S_1}{\partial y} = U \sin \varphi, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = V \cos \psi, \quad \frac{\partial S_2}{\partial y} = V \sin \psi.$$

Подставляя (7) в (6), получим для  $U$  и  $V$  систему уравнений, разрешив которую, определим  $U$  и  $V$  через  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$ :

$$U = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}; \quad (8)$$

$$V = \frac{\sqrt{2\varepsilon'} \alpha}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}}, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \sec(\varphi - \psi).$$

Таким образом, для определения  $\text{grad } S_1$  и  $\text{grad } S_2$  и, следовательно,  $S_1$  и  $S_2$  достаточно определить только  $\varphi$  и  $\psi$ . Систему квазилинейных уравнений для  $\varphi$  и  $\psi$  получим из (7), приравнявая вторые смешанные производные  $S_1$  и  $S_2$  и используя (8), (9):

$$A_1 \varphi'_x + A_2 \varphi'_y + A_3 \psi'_x + A_4 \psi'_y + D_1 = 0, \quad (10)$$

$$C_1 \varphi'_x + C_2 \varphi'_y + C_3 \psi'_x + C_4 \psi'_y + D_2 = 0.$$

Коэффициенты  $A_1 \dots A_4, C_1 \dots C_4, D_1, D_2$  в (10) являются функциями  $x, y, \varphi$  и  $\psi$ ; они непосредственно не понадобятся и не выписываются ввиду своей громоздкости. В соответствии с общей теорией [10] для системы (10) можно поставить граничную задачу для функций  $\varphi$  и  $\psi$ .

## 2. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В случае, когда  $\varepsilon''/\varepsilon' < 1$ , решение системы квазилинейных уравнений (10) можно искать в виде разложения по малому параметру  $x$ , который введем следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i x \varepsilon''.$$

Разлагая  $\varphi$  и  $\psi$ , а также коэффициенты  $A_i, C_i$  и  $D_\alpha$  ( $i = 1-4, \alpha = 1, 2$ ) в степенные ряды по  $x$ , запишем

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + x \varphi_1 + x^2 \varphi_2 + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + x \psi_1 + x^2 \psi_2 + \dots; \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_1 = A_{10} + x A_{11} + \dots = \cos \varphi_0 - x \varphi_1 \sin \varphi_0 + \dots,$$

$$A_2 = A_{20} + x A_{21} + \dots = \sin \varphi_0 + x \varphi_1 \cos \varphi_0 + \dots,$$

$$A_3 = x^2 A_{32} + \dots = -x^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \sin \varphi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0) \sec^2(\varphi_0 - \psi_0) + \dots,$$

$$A_4 = x^2 A_{42} + \dots = x^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \cos \varphi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0) \sec^2(\varphi_0 - \psi_0) + \dots,$$

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{10} + x D_{11} + \dots = \frac{\partial \ln \sqrt{\varepsilon'}}{\partial x} \sin \varphi_0 - \frac{\partial \ln \sqrt{\varepsilon'}}{\partial y} \cos \varphi_0 + \\ &+ x \varphi_1 \left[ \frac{\partial \ln \sqrt{\varepsilon'}}{\partial x} \cos \varphi_0 + \frac{\partial \ln \sqrt{\varepsilon'}}{\partial y} \sin \varphi_0 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_1 = x C_{11} + \dots = x \sin \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0) + \dots,$$

$$C_2 = x C_{21} + \dots = -x \cos \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0) + \dots,$$

$$C_3 = x C_{31} + \dots = x [\cos \psi_0 - \sin \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0)] + \dots,$$

$$C_4 = x C_{41} + \dots = x [\sin \psi_0 + \cos \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0)] + \dots,$$

$$D_2 = x D_{21} + \dots = x \left[ \sin \psi_0 \frac{\partial \ln(\varepsilon''/\sqrt{\varepsilon'})}{\partial x} - \cos \psi_0 \frac{\partial \ln(\varepsilon''/\sqrt{\varepsilon'})}{\partial y} \right] + \dots$$

Формулы (11), (12) являются также определением величин  $\varphi_n, \psi_n, A_{1n}, C_{1n}, D_{1n}$  и  $D_{2n}$ . Подставляя (11), (12) в (10), получим для  $n$ -го приближения

$$A_{10}(\varphi_0) \varphi'_{n,x} + A_{20}(\varphi_0) \varphi'_{n,y} = -D_n; \quad (13)$$

$$C_{31}(\psi_0) \psi'_{n-1,x} + C_{41}(\psi_0) \psi'_{n-1,y} = -\bar{D}_n, \quad (14)$$

где

$$D_n = \sum_{k=1}^n (A_{1k} \varphi'_{n-k,x} + A_{2k} \varphi'_{n-k,y}) + \sum_{k=2}^n (A_{3k} \psi'_{n-k,x} + A_{4k} \psi'_{n-k,y}) + D_{1n}, \quad (15)$$

$$\bar{D}_n = \sum_{k=1}^n (C_{1k} \varphi'_{n-k,x} + C_{2k} \varphi'_{n-k,y}) + \sum_{k=2}^n (C_{3k} \psi'_{n-k,x} + C_{4k} \psi'_{n-k,y}) + D_{2n}.$$

Отметим следующие особенности системы (13), (14).

1. Уравнения для определения  $\varphi_n$  и  $\psi_{n-1}$  стали независимы. Это обстоятельство связано с тем, что разложения  $A_1$ ,  $A_2$  и  $D_1$  начинаются с  $x^0$ ,  $A_3$  и  $A_4$  — с  $x^2$ ,  $C_1$  и  $D_2$  — с  $x$ .

2. Левые части этих уравнений имеют одинаковый вид для всех приближений, т. е. от  $n$  не зависят; правые части являются функциями как предыдущих приближений, так и  $n$ -го приближения для  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно.

3. Уравнения для определения  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  являются квазилинейными, для  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  ( $n \geq 1$ ) — линейными и могут быть проинтегрированы в явном виде. Линейность левых частей (13), (14) при  $n \geq 1$  очевидна, так как коэффициенты зависят только от нулевого приближения; входящие же в правые части коэффициенты  $A_{1n}$ ,  $A_{2n}$ ,  $D_{1n}$  и  $C_{in}$ ,  $D_{2n}$  линейным образом зависят от  $\varphi_n$  и  $\psi_{n-1}$  соответственно. В самом деле, коэффициенты при  $x^n$  в разложении  $A_1$ ,  $A_2$  и  $D_1$  по  $x$ , т. е.  $A_{1n}$ ,  $A_{2n}$  и  $D_{1n}$ , являются комбинацией производных  $\varphi$  и  $\psi$ , причем производная  $\partial^n \varphi / \partial x^n |_{x=0} \equiv \varphi_n$  входит только линейно (а производные более низкого порядка — нелинейно). Что касается  $A_{3n}$  и  $A_{4n}$ , то они содержат лишь члены с  $\varphi_{n-2}$  и члены более низкого порядка. Учитывая далее, что  $C_1$  и  $D_2$  начинают свои разложения с  $x$ , аналогично получим линейную зависимость  $C_{in}$  и  $D_{2n}$  от  $\psi_{n-1}$ .

4. Проекции характеристик на плоскость  $XU$  для всех  $\varphi_n$  совпадают. Действительно, коэффициенты левой части (14) не зависят от  $n$ , поэтому наклон касательной к проекции характеристики для любых  $n$  одинаков и равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{20}}{A_{10}} = \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (16)$$

Здесь правая часть — известная функция координат, найденная из нулевого приближения.

Одинаковые характеристики имеют также и все  $\psi_n$ . Покажем теперь, что эти два семейства характеристик совпадают друг с другом. Составим угол наклона касательной к характеристике для  $\psi_n$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_{41}}{C_{31}} = \frac{\sin \psi_0 + \cos \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0)}{\cos \psi_0 - \sin \psi_0 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0)} \equiv \operatorname{tg} \beta. \quad (17)$$

После несложных преобразований в (17) получим  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi_0$ . Поскольку характеристики определяются из уравнений для нулевого приближения  $\varphi$ , т. е. из уравнений, в которых не учитывается затухание, то они совпадают с лучами для среды без поглощения ( $\epsilon = \epsilon'$ ), т. е. находятся из системы

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos \varphi_0, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \sin \varphi_0, \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\sigma} = \frac{\partial \ln \sqrt{\epsilon'}}{\partial y} \cos \varphi_0 - \frac{\partial \ln \sqrt{\epsilon'}}{\partial x} \sin \varphi_0,$$

где  $\sigma$  — длина дуги вдоль характеристики. Исключая отсюда  $\varphi_0$ , получим хорошо известные лучевые уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( \sqrt{\epsilon'} \frac{dx}{d\sigma} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\epsilon'}, \\ \frac{d}{d\sigma} \left( \sqrt{\epsilon'} \frac{dy}{d\sigma} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\epsilon'}. \end{aligned} \quad (19)$$



### 3. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ (13), (14). ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Чтобы единственным образом определить решения уравнений (13), (14), необходимо задать граничные значения для всех  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  на некоторой начальной кривой (задача Коши).

Пусть точечный источник расположен в области, где среду можно считать однородной, т. е.  $\varepsilon' = \text{const}$ ,  $\varepsilon'' = \text{const}$ . В этом случае из уравнения эйконала следует, что  $U = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ,  $\cos(\varphi - \psi) = \text{const}$ . Далее можно показать, что векторные линии  $\nabla S_1$  и  $\nabla S_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{d\tau} \left( U \frac{dx}{d\tau} \right) = \nabla U, \quad \frac{d}{d\tau} \left( V \frac{dx}{d\tau} \right) = \nabla V, \quad (20)$$

где  $\tau$  — длина дуги вдоль векторной линии. В однородной среде решением уравнений (19) и (20) являются прямые, и по необходимости они совпадают друг с другом. Поскольку направление касательной к характеристике задается углом  $\varphi_0$ , направление  $\text{grad } S_1$  — углом  $\varphi$  и направление  $\text{grad } S_2$  — углом  $\psi$ , то мы приходим к следующему равенству:  $\varphi = \psi = \varphi_0$ . Таким образом, при  $\sigma = 0$  имеем следующие начальные условия для  $\varphi_n$  и  $\psi_n$ :

$$\varphi_0 = \psi_0 = \alpha, \quad \varphi_n = \psi_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad (21)$$

$\alpha$  — угол выхода характеристики.

Вдоль характеристик (19) величины  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  определяются единственным образом как решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_n}{d\sigma} = -D_n, \quad \frac{d\psi_n}{d\sigma} = -\bar{D}_n \cos(\varphi_0 - \psi_0) \quad (22)$$

с граничными условиями (21).

Выпишем уравнения для  $\psi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (уравнение для  $\varphi_0$  было приведено ранее (18)), поскольку в дальнейшем они будут использованы при вычислении эйконала с точностью до членов порядка  $x^3$  и кривизны лучей с точностью до членов порядка  $x^2$ . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{d\sigma} = \cos(\varphi_0 - \psi_0) \left[ -\sin \varphi_0 \frac{\partial \ln(\varepsilon''/\sqrt{\varepsilon'})}{\partial x} + \cos \varphi_0 \frac{\partial \ln(\varepsilon''/\sqrt{\varepsilon'})}{\partial y} \right] + \\ + \sin(\varphi_0 - \psi_0) (\varphi'_{0y} \cos \varphi_0 - \varphi'_{0x} \sin \varphi_0); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\sigma} = -\varphi_1 \{ -(N_0 \nabla \varphi_0) + (\sigma \nabla \ln \sqrt{\varepsilon'}) \}; \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\sigma} = -\varphi_2 P_2 + Q_2, \quad (25)$$

где

$N_0 = i \sin \varphi_0 - j \cos \varphi_0$ ,  $\sigma = i \cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0$  — орты нормали и касательной к характеристике,

$$P_2 = - (N_0 \nabla \varphi_0) + (\sigma \nabla \ln \sqrt{\varepsilon'}), \quad (26)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right)^2 (N_0 \nabla \text{tg}^2(\varphi_0 - \psi_0)) - \frac{1}{2} \left( N_0 \nabla \left( \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right)^2 \right) \sec^2(\varphi_0 - \psi_0).$$

Относительно решения системы (18), (23)—(25) отметим следующее. Чтобы найти  $\varphi_0$ , нет надобности интегрировать (18). Действительно, поскольку  $\varphi_0$  — угол наклона касательной к характеристике (16), то, зная уравнение характеристики  $x = x(\sigma, \alpha)$ ,  $y = y(\sigma, \alpha)$  как решение системы (19), можно определить  $\varphi_0$  из соотношения  $\operatorname{tg} \varphi_0 = (dy/d\sigma)/(dx/d\sigma)$ . Интегрирование нелинейного уравнения (23) представляет основную трудность в предлагаемой схеме. Что касается решения (24) и (25), то с учетом граничных условий (21)  $\varphi_1 = 0$ , а  $\varphi_2$  выражается в квадратах:

$$\varphi_2 = \exp\left(-\int^{\sigma} P_2 d\sigma\right) \int^{\sigma} Q_2 \exp\left(\int^{\sigma} P_2 d\sigma'\right) d\sigma. \quad (27)$$

Аналогичными формулами определяются решения и для высших приближений  $\varphi$  и  $\psi$ .

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «ЭЙКОНАЛА» ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК

Покажем теперь, как, зная  $\varphi$  и  $\psi$ , определить исходные величины  $S_1$  и  $S_2$ . Используя (7) и (18), составим вдоль характеристики приращения  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\begin{aligned} dS_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial x} dx + \frac{\partial S_1}{\partial y} dy = U \cos(\varphi - \varphi_0) d\sigma, \\ dS_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial x} dx + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy = V \cos(\psi - \varphi_0) d\sigma. \end{aligned} \quad (28)$$

Интегрируя (28), получим

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \int_0^{\sigma} U \cos(\varphi - \varphi_0) d\sigma, \\ S_2 &= \int_0^{\sigma} V \cos(\psi - \varphi_0) d\sigma, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $U$  и  $V$  определяются формулами (8), (9). Разлагая подынтегральное выражение в ряд, выразим  $S_1$  и  $S_2$  также в виде рядов по  $x$ :

$$S_1(\sigma, \alpha) = S_{10} + x^2 S_{12} + \dots = S_0 + \int_0^{\sigma} V \sqrt{\varepsilon'} d\sigma + \frac{x^2}{8} \int_0^{\sigma} V \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \sec^2(\varphi_0 - \psi_0) d\sigma + \dots; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S_2(\sigma, \alpha) &= x S_{21} + x^3 S_{23} + \dots = \frac{x}{2} \int_0^{\sigma} \frac{\varepsilon''}{V \sqrt{\varepsilon'}} d\sigma - \\ &- \frac{x^3}{2} \int_0^{\sigma} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'}\right)^2 \sec^2(\varphi_0 - \psi_0) - \varphi_2 \operatorname{tg}(\varphi_0 - \psi_0) \right] d\sigma + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Характерно, что в (30) равен нулю член с  $x$ , а в (31) — с  $x^2$ . Из (30), (31) следует, что в первом порядке по  $x$

$$S - S_0 = \int_0^{\sigma} \left( V \sqrt{\varepsilon'} + i \frac{x}{2} \frac{\varepsilon''}{V \sqrt{\varepsilon'}} \right) d\sigma \simeq \int_0^{\sigma} V \sqrt{\varepsilon} d\sigma = \int_0^{\sigma} (n' + in'') d\sigma, \quad (32)$$

т. е. нахождение эйконала сводится к интегрированию комплексного показателя преломления вдоль невозмущенного луча (характеристики). Формула (32) строго справедлива в некоторых специальных случаях, когда  $\varphi = \psi = \varphi_0$ , т. е., когда наличие  $\text{Im } \varepsilon(x, y)$  не изменяет направленности луча\*. Например, в случае нормального падения плоской волны на плоско-слоистую среду; в случае аксиально-слоистой среды с источником (линейным током) в начале координат, а также при  $\varepsilon''(x, y) = \text{const } \varepsilon'(x, y)$ .

Поскольку в методе малого параметра каждый член в (30), (31) представляет собой интеграл от неосциллирующей функции, модуль каждого члена растет при движении по характеристике, т. е. при увеличении  $\sigma$ . Так как для расчетов важны не относительные, а абсолютные значения каждого члена, то вопрос о сходимости ряда по малому параметру имеет важное значение и должен быть исследован особо в каждом конкретном случае.

### 5. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим решение уравнения переноса для амплитуды  $A_m$ , т. е. для члена в (1), пропорционального  $k^{-m}$ . Указанное уравнение имеет вид

$$2\nabla A_m \nabla S + A_m \Delta S = -\Delta A_{m-1}. \quad (5a)$$

Решение для  $A_0$  получим, полагая  $m = 0$  и  $A_{-1} = 0$ . Комплексную функцию  $S(x, y)$  будем считать уже известной. Следуя методике, изложенной в разделе 1, представим  $A_m$  в виде ряда по  $x$ :

$$A_m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n [A'_{mn} + iA''_{mn}]. \quad (33)$$

Принимая, что амплитуда в среде без поглощения ( $n = 0$ ) — действительная величина, получим, что  $A''_{m0} = 0$ . Отделим в (5a) действительную и мнимую части и после подстановки (33) в (5a) получим для  $n$ -го приближения

$$2\nabla A'_{mn} \nabla S_{10} + A'_{mn} \Delta S_{10} = -Q_{mn} - \Delta A'_{m-1, n}; \quad (34)$$

$$2\nabla A''_{mn} \nabla S_{10} + A''_{mn} \Delta S_{10} = -\bar{Q}_{mn} - \Delta A''_{m-1, n}, \quad (35)$$

где

$$Q_{mn} = \sum_{k=1}^n (2\nabla S_{1k} \nabla A'_{m, n-k} + \Delta S_{1k} A'_{m, n-k}) - \sum_{k=1}^{n-1} (2\nabla S_{2k} \nabla A''_{m, n-k} + \Delta S_{2k} A''_{m, n-k}), \quad (36)$$

$$\bar{Q}_{mn} = \sum_{k=1}^{n-1} (2\nabla S_{1k} \nabla A''_{m, n-k} + \Delta S_{1k} A''_{m, n-k}) + \sum_{k=1}^n (2\nabla S_{2k} \nabla A'_{m, n-k} + \Delta S_{2k} A'_{m, n-k}).$$

Правые части (34) и (35) являются известными функциями координат, поскольку зависят от предыдущих приближений (как по  $k$ , так

\* Под лучом мы всюду в дальнейшем понимаем направление потока интенсивности волны, которое, как будет показано ниже, совпадает с направлением вектора  $\nabla S_1$ .

и по  $\kappa$ ). Прежде всего из этой системы видно, что уравнения для  $A'_{mn}$  и  $A''_{mn}$  не связаны друг с другом и оба совпадают по форме с уравнениями переноса для среды без поглощения. Поскольку линии  $\nabla S_{10}$  совпадают с характеристиками, введенными выше, то

$$\nabla S_{10} = \sqrt{\varepsilon'} \sigma, \quad \nabla S_{10} \nabla f = \sqrt{\varepsilon'} \frac{df}{d\sigma}, \quad (37)$$

где  $\sigma$  — единичный вектор касательной к характеристике, а  $f$  — произвольная функция координат.

Учитывая (37), систему (34), (35) можно переписать в виде

$$\frac{dA'_{mn}}{d\sigma} + A'_{mn} \frac{\Delta S_{10}}{2\sqrt{\varepsilon'}} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon'}} (Q_{mn} + \Delta A'_{m-1, n}); \quad (38)$$

$$\frac{dA''_{mn}}{d\sigma} + A''_{mn} \frac{\Delta S_{10}}{2\sqrt{\varepsilon'}} = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon'}} (\bar{Q}_{mn} + \Delta A''_{m-1, n}). \quad (39)$$

В нулевом приближении по  $k$  и  $\kappa$  из (39) получим хорошо известное выражение для изменения амплитуды  $A_{00}$  вдоль невозмущенного луча (характеристики):

$$A_{00} = A_{00}(\alpha) \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS_0}{dS(\sigma)} \right]^{1/2}, \quad (40)$$

где  $dS_0/dS(\sigma)$  — отношение поперечных сечений «характеристической» трубки в начальной и текущей точках характеристики (две соседние характеристики образуют «характеристическую» трубку).

Выпишем теперь общее решение (38), (39), используя (40) как решение однородного уравнения:

$$A'_{mn} = B_{mn} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS_0}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \int^{\sigma} \frac{Q_{mn} + \Delta A'_{m-1, n}}{\sqrt{\varepsilon'(\sigma')}} \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sigma')}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS(\sigma')}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} d\sigma'; \quad (41)$$

$$A''_{mn} = C_{mn} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS_0}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \int^{\sigma} \frac{\bar{Q}_{mn} + \Delta A''_{m-1, n}}{\sqrt{\varepsilon'(\sigma')}} \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sigma')}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS(\sigma')}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} d\sigma'. \quad (42)$$

Суммируя по  $m$  и  $n$ , получим полную амплитуду в точке  $(\sigma, \alpha)$

$$A = A(\alpha, k) \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(\sigma)}} \frac{dS_0}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(ik)^m} \int^{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'(\sigma')}} \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sigma')}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS(\sigma')}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} \Delta A_{m-1} d\sigma' - \frac{1}{2} \int^{\sigma} \frac{q(\sigma')}{\sqrt{\varepsilon'(\sigma')}} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon'(\sigma')}{\varepsilon'(\sigma)}} \frac{dS(\sigma')}{dS(\sigma)} \right]^{1/2} d\sigma', \quad (43)$$

где  $A(\alpha, k)$  — начальное значение амплитуды при  $\sigma = 0$ ,

$$q = \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ik}\right)^m (Q_{mn} + i\bar{Q}_{mn}) x^n.$$

Формулы (1), (29) и (43) формально решают задачу о нахождении геометрикооптического поля вдоль характеристики в среде с поглощением.

## 6. О НАПРАВЛЕНИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

В среде без поглощения, когда амплитуда  $A$  и фаза  $S$  — вещественные величины, в нулевом приближении геометрической оптики вектор плотности потока энергии (интенсивности)  $\mathbf{P}$  параллелен вектору  $\nabla S$  и направлен по нормали к фазовому фронту, т. е. линии потока энергии совпадают с ортогональными траекториями к поверхностям равных фаз (с лучами). Это следует, например, из уравнения переноса (3) для амплитуды  $A_0$ .

В средах с поглощением имеются два, вообще говоря, несовпадающих направления:  $\nabla S_1$  (направление распространения фазы) и  $\nabla S_2$  (направление наиболее быстрого затухания волны) (рис. 1). Чтобы отве-

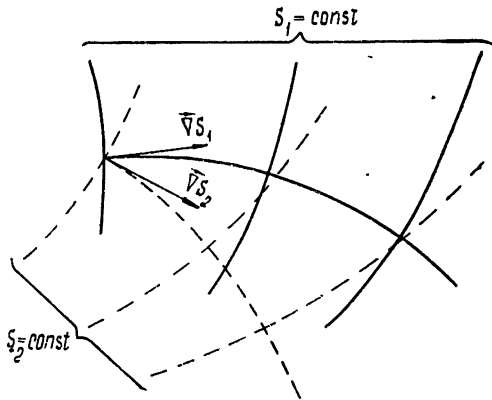


Рис. 1.

тить на вопрос о направлении потока энергии, составим вектор плотности потока интенсивности. Усредненный по времени вектор тока равен

$$\mathbf{P} = \frac{c}{8\pi k} \operatorname{Im} (u^* \nabla u). \quad (44)$$

Подставляя сюда  $u = A \exp(ikS)$ , где  $A = A' + iA''$ ,  $S = S_1 + iS_2$ , получим

$$\mathbf{P} = \frac{c}{8\pi} e^{-2kS_2} \left\{ |A|^2 \nabla S_1 + \frac{1}{k} A'^2 \nabla \left( \frac{A''}{A'} \right) \right\}. \quad (45)$$

Из этой формулы видно, что энергия с точностью до члена  $k^{-1}$  распространяется в направлении  $\nabla S_1$ , т. е. по нормали к поверхностям  $S_1 = \text{const}$ , и экспоненциально затухает с ростом  $S_2$ , причем направление максимального затухания определяется вектором  $\nabla S_2$  (это можно показать, взяв градиент от  $|\mathbf{P}|$ ). Таким образом, для потока энергии имеем формулу

$$P = \frac{c}{8\pi} e^{-2kS_2} |A|^2 \nabla S_1. \quad (46)$$

Выясним теперь, как связано направление потока энергии, т. е. вектора  $\nabla S_1$ , с локальными свойствами среды. Составим радиус кривизны линии градиента  $S_1$ . Поскольку направление вектора  $\nabla S_1$  определяется углом  $\varphi$ , то имеем

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = |\cos \varphi \varphi'_x + \sin \varphi \varphi'_y|, \quad (47)$$

где  $s$  — длина дуги векторной линии. Подставляя в (47) разложение (12), с точностью до членов порядка  $x^2$  получим следующую формулу для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = |\cos \varphi_0 \varphi'_{0x} + \sin \varphi_0 \varphi'_{0y} + x^2 \{ \cos \varphi_0 \varphi'_{2x} + \sin \varphi_0 \varphi'_{2y} + \varphi_2 (\cos \varphi_0 \varphi'_{0y} - \sin \varphi_0 \varphi'_{0x}) \}|. \quad (48)$$

Используя уравнения для  $\varphi_0$  (19) и  $\varphi_2$  (25), получим

$$\frac{1}{\rho} = \left| (N_0 + x^2 \varphi_2 \sigma, \nabla \ln \sqrt{\varepsilon'}) + x^2 \left( N_0, \frac{1}{2} \frac{\nabla \operatorname{tg}^2 (\varphi_0 - \psi_0)}{(2\varepsilon'/\varepsilon'')^2} + \frac{\nabla (\varepsilon''/2\varepsilon')^2}{\cos^2 (\varphi_0 - \psi_0)} \right) \right|. \quad (49)$$

Для оценки положим  $x^2 \varphi_2 \ll 1$ ,  $\varphi_0 \sim \psi_0$ ,

$$|(\varepsilon''/\varepsilon')^2 \nabla \operatorname{tg}^2 (\varphi_0 - \psi_0)| \ll |\sec^2 (\varphi_0 - \psi_0) \nabla (\varepsilon''/\varepsilon')^2|.$$

Тогда из (49) находим

$$\frac{1}{\rho} \simeq \left| (N_0 \nabla \ln \sqrt{\varepsilon'}) + \frac{x^2}{4} (N_0 \nabla (\varepsilon''/\varepsilon')^2) \right|. \quad (50)$$

В этой формуле первое слагаемое совпадает с выражением для кривизны невозмущенного луча, т. е. луча в среде без поглощения с  $\varepsilon = \varepsilon'$ ; второе слагаемое (поправка к первому) учитывает поглощение. Характерно, что эта поправка пропорциональна квадрату малого параметра и такова, что лучи имеют тенденцию изгибаться в область с более сильным поглощением, точнее, в сторону  $\nabla (\varepsilon''/\varepsilon')$  (рис. 2).

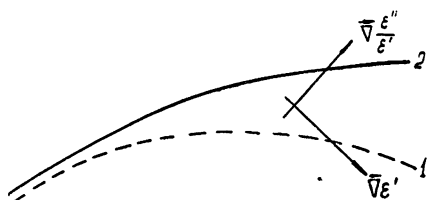


Рис. 2. Изменение кривизны луча в средах с поглощением:

1 — невозмущенный луч,  $\varepsilon'' = 0$ ; 2 — возмущенный луч,  $\varepsilon'' \neq 0$ .

В заключение сделаем следующее замечание. В средах без поглощения градиент амплитуды вдоль фронта (т. е. в поперечном сечении лучевой трубки) является малым. Поэтому перераспределение амплитуды (точнее, поперечная диффузия) возникает в порядке  $k^{-1}$ . В средах с поглощением направление потока энергии  $\nabla S_1$  не совпадает с направлением ее максимального затухания  $\nabla S_2$ , т. е. по фронту волны существуют сильные поперечные градиенты амплитуды. Однако и в этом случае эффект поперечной диффузии скажется только в порядке  $k^{-1}$ , так как угол между вектором  $P$  и  $\nabla S_1$  порядка  $k^{-1}$  (см. (45)).

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. В. Соколовскому за ряд ценных советов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. D. Seckler, J. B. Keller, J. Acoust. Soc. Amer., **31**, 192 (1959).
2. G. S. Avila, J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Math., **16**, 363 (1963).
3. D. S. Jones, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A, **255**, 341 (1963).
4. С. М. Рытов, ДАН, **13**, № 4, 217 (1938).
5. P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci. Amer., **16**, 37 (1930).
6. Ю. С. Саясов, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению радиоволн, Горький, 1962.
7. Ю. С. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10 (1283 (1967)).
8. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
9. D. Hilbert, Phys. Zeitschrift, **13**, 1056 (1912).
10. Р. Курант, Уравнения в частных производных, изд. Мир, М., 1964.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
27 июня 1967 г.

ON GEOMETRIC-OPTICS APPROACH IN CONSIDERATION OF WAVE  
PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS ABSORBING MEDIA

*I. E. Arsaev, B. E. Kinber*

The solution of the wave equation with the complex dielectric permittivity is taken in the form of geometric optics series. For eikonal and amplitude equations, the expansion in a series over a small parameter  $\alpha$  (relative absorption) is used. The first three terms for eikonal are investigated. In the first approximation the account for damping is reduced, as a rule, to integrating the complex refractive index along an undisturbed ray. The corrections obtained are proportional to the square of the small parameter. The lines of the energy density flux which must be treated as the rays in absorbing media coincide with the trajectories orthogonal to the surfaces  $\text{Re } S = \text{const}$ . The lines are shown to change their curvature as compared with the case  $\epsilon'' = 0$  and bend into the region with the more strong absorption, i. e., in the direction where  $\nabla(\epsilon''/\epsilon')$ .

УДК 535.338.3

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ФОРМЫ ЭМИССИОННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПО КРИВЫМ ВИДИМОСТИ

С. М. Горский

Метод интерференционной фурье-спектроскопии, использующий фильтрацию пространственных частот, применен для анализа формы спектральных линий по кривым контраста. Метод не требует предварительной фильтрации исследуемого сигнала и применим к измерению слабых сигналов.

Однозначное соответствие, существующее между функцией корреляции сигнала и его спектральным распределением мощности [1], дает возможность получать информацию о форме спектральных линий непосредственно по форме огибающей корреляционной кривой. В оптическом диапазоне за меру корреляции принимают абсолютное значение коэффициента корреляции, называемое также видимостью или контрастом интерферограммы [2]. Кривые видимости представляют собой зависимость видимости от разности хода.

Впервые анализ формы эмиссионных спектральных линий по кривым видимости был проведен Майкельсоном [3], измерявшим контраст визуально. В более поздних работах [4, 5] для измерения контраста использовались соответственно фотоэлектрическая и фотографическая регистрация интерферограммы.

Но несмотря на то, что инструментальные объективные способы допускают более точное (по сравнению с визуальным) измерение кривых контраста, метод не нашел широкого применения. Основные причины этого кроются, во-первых, в том, что метод дает правильные результаты только для симметричных спектральных распределений, поскольку в огибающей функции корреляции отсутствует информация о фазе корреляционной кривой, и, во-вторых, в технических трудностях, возникающих при реализации метода. В частности, метод измерения в том виде, в котором он был рассмотрен в работах [3-5], требует предварительной фильтрации исследуемого сигнала, применим в ограниченном участке спектра и не дает возможности автоматизировать процесс измерения. Заметим, однако, что технические трудности могут быть устранены путем применения к измерению кривых контраста интерференционных с преобразованием Фурье способов измерения спектра. В настоящей работе проводится анализ возможностей такого применения, причем за основу выбран метод интерференционной фурье-спектроскопии с фильтрацией пространственных частот [6, 7]. В этом методе для получения спектра производится фильтрация пространственных частот изображения интерферограммы из линий равной толщины, получаемой в интерферометре Майкельсона. При этом каждой пространственной частоте поставлена в соответствие частота излучения. В работе [7] было показано, что фильтр пространственных частот может быть настроен на любую спектральную линию, поэтому можно получать информацию о временных изменениях исследуемого сигнала.

При измерении кривой видимости это свойство метода использует-



ся следующим образом. Фильтр настраивается на частоту спектральной линии, форму которой необходимо исследовать, и в одно из плеч интерферометра вводится задержка путем равномерного перемещения одного из зеркал интерферометра параллельно самому себе. При этом регистратор запишет сигнал, пропорциональный функции контраста.

Действительно, как показано в работе [7], переменная составляющая сигнала на выходе фильтра имеет вид

$$I(\nu) = A_0 \cos [\varphi(t)] \int_0^{\infty} \Phi(\nu - \nu_0) \left\{ \frac{\sin(kD/2)}{kD/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(R\Omega/2)}{R\Omega/2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \{ [2\pi\nu\beta(1 - \Omega/4\pi) - k]D/2 \}}{[2\pi\nu\beta(1 - \Omega/4\pi) - k]D/2} \cos [2\pi\nu\beta(1 - \Omega/4\pi)x] \right\} d\nu, \quad (1)$$

где  $A_0$  — постоянная;  $\varphi(t)$  — фазовый сдвиг сигнала в фильтре;  $k$  — пространственный период фильтра;  $\Phi(\nu - \nu_0)$  — спектральная интенсивность исследуемого сигнала;  $D$  — интервал усреднения сигнала фильтром;  $\beta = \vartheta/c$ , где  $\vartheta$  — угол наклона зеркал и  $c$  — скорость света;  $\nu$  — частота света;  $\Omega$  — входная апертура интерферометра;  $R$  — удвоенное число периодов интерферограммы, укладываемые на  $x$ , где  $x$  — разность хода в интерферометре.

Настроим фильтр таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$kD = 2\pi \quad (2)$$

и кроме того выберем входную апертуру такой, чтобы

$$\Omega \ll 4\pi \quad \text{и} \quad \sin(R\Omega/2) = 1. \quad (2a)$$

В этом случае для (1) получаем

$$I(\nu) = A_1 \cos [\varphi(t)] \int_0^{\infty} \Phi(\nu - \nu_0) \cos(2\pi\beta\nu x) d\nu. \quad (3)$$

Соотношение (3) представляет собой косинус-преобразование Фурье спектральной плотности сигнала, т. е.

$$I(\nu_0, x) = A_1 \cos [\varphi(t)] B(x) = A_1 |B(x)|. \quad (4)$$

Знак модуля появился вследствие того, что  $|\varphi(t)| \gg 2\pi$  и прибор регистрирует уровень сигнала. При изменении  $x$  от  $x = 0$  до  $x = x_{\max}$  будет зарегистрирована вся кривая контраста. Применительно к проведенному рассмотрению сделаем два замечания.

Во-первых, фильтр производит усреднение входного сигнала на интервале  $D$ . Поэтому для точного воспроизведения кривой контраста необходимо, чтобы  $D$  было много меньше интервала изменения исследуемого сигнала.

Во-вторых, предлагаемый способ измерения требует равномерного изменения разности хода в интерферометре. Именно нестабильность скорости приводит к необходимости применения в интерференционной с преобразованием фурье-спектроскопии референтного сигнала [8].

Оценим влияние нестабильности скорости движения зеркала на точность измерения формы линии в предлагаемом методе и сравним ее с точностью измерения в методе фурье-спектроскопии [8, 9] при условии, что референтный сигнал отсутствует. С этой целью оценим число точек функции корреляции, которое необходимо измерить для представления спектра с достаточной точностью. В соответствии с теоремой Ко-

тельникова это число в предлагаемом методе и методе фурье-спектроскопии определяется соответственно выражениями

$$N_1 = \frac{2x_{\max}}{D}; \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{2x_{\max}}{\lambda}. \quad (6)$$

Из сравнения соотношений (5) и (6) следует, что допустимая нестабильность скорости движения зеркала, приводящая к потере точек, представляющих функцию корреляции, в первом случае в  $D/\lambda$  раз ниже, чем во втором, поскольку интервал между точками больше в соответствующее число раз. Поэтому метод кривых контраста может быть использован для измерения сложных спектров, причем без использования референтного сигнала может быть достигнута (при соответствующем выборе отношения  $D/\lambda$ ) более высокая, чем в методе фурье-спектроскопии, разрешающая способность.

Таким образом, предложенный метод не требует предварительной фильтрации измеряемого сигнала, дает возможность автоматизировать процесс измерения кривых контраста и позволяет измерять сложные спектры с разрешающей способностью, более высокой, чем в интерференционной с преобразованием фурье-спектроскопии, но без референтного сигнала.

С целью экспериментальной проверки указанных положений проводилось измерение кривых контраста и их спектров для газового разряда ртути (лампа ПРК 2). Измерения проводились для линии  $5460 \text{ \AA}$  (при пониженном токе разряда и охлаждении лампы потоком воздуха) и дублета  $5770 \text{ \AA}$ — $5790 \text{ \AA}$  при паспортном значении тока разряда. Соответствующие корреляционные кривые приведены на рис. 1а, 2а, где по оси абсцисс отложена разность хода в микронах, а по оси ординат—значение корреляционной функции в относительных единицах.

Для линии  $5460 \text{ \AA}$  кривая монотонно спадает с ростом разности хода, а для дублета она представляет кривую биений, амплитуда которых уменьшается с ростом разности хода.

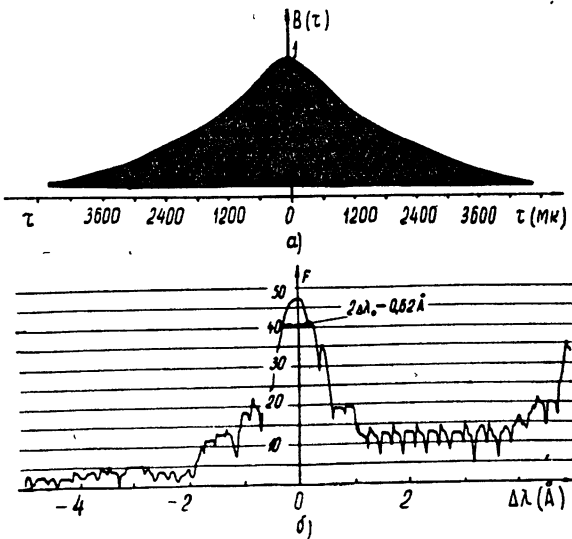


Рис. 1. Кривая контраста (а) и ее фурье-преобразование (б) для спектральной линии  $5460 \text{ \AA}$  при пониженном токе разряда.

Результаты фурье-преобразования кривых контраста приведены на рис. 1б и 2б, где по оси абсцисс отложена расстройка  $\Delta\lambda$  в  $\text{\AA}$ , а по оси ординат — значение спектральной интенсивности в децибельном масштабе. На рис. 2б распределение интенсивности приведено дважды слева и справа по оси ординат. Пик при нулевом значении  $\Delta\lambda$  соответствует суммарному распределению спектральной интенсивности дублета. Второй пик соответствует частоте биений. Определенная по графику расстройка равна  $20 \text{\AA}$ , а ширина спектральных линий  $0,5 \text{\AA}$ . Ширина линии по половинной мощности на рис. 1а равна  $0,65 \text{\AA}$ .

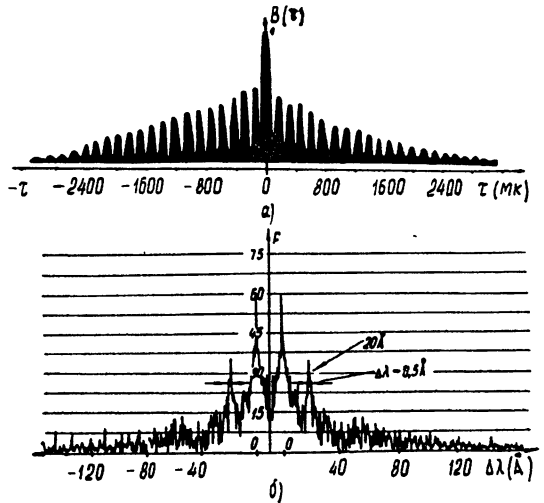


Рис. 2. Кривая контраста (а) и ее фурье-преобразование (б) для дублета  $5770\text{--}5790 \text{\AA}$ .

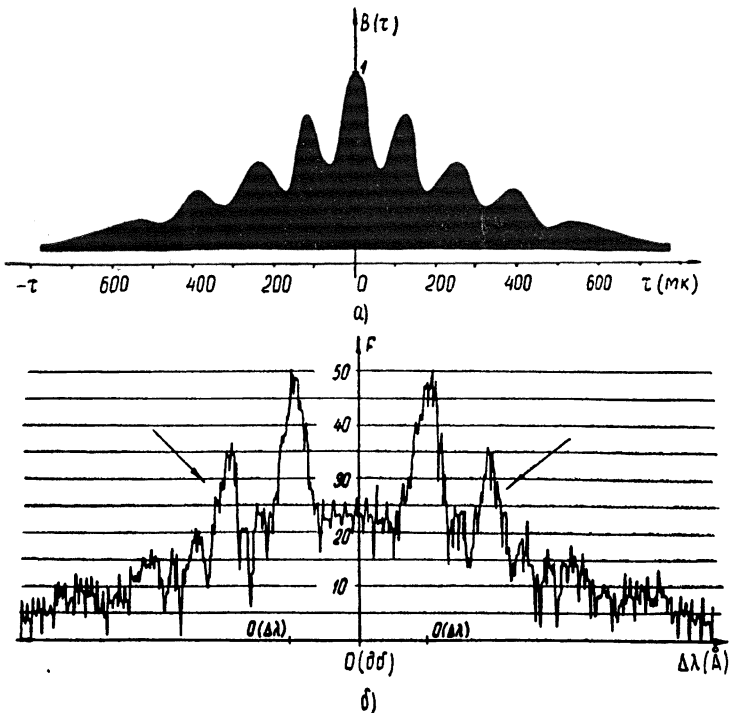


Рис. 3. Кривая контраста (а) и ее фурье-преобразование (б) для линии  $5460 \text{\AA}$  при паспортном значении тока разряда.

Преобразование Фурье осуществлялось на оптическом спектроанализаторе изображений [10]. Эквивалентная разрешающая способность метода составила  $\lambda/\Delta\lambda = 10^4$ , т. е. на два порядка выше разрешающей способности метода интерференционной спектроскопии без референтного сигнала.

По спектральным кривым видно, что линии значительно уширены по сравнению с расчетными значениями [3]. По-видимому, уширение линий обусловлено реабсорбцией. Это подтверждается тем обстоятельством, что для линии 5460 Å при паспортном значении тока разряда лампы наблюдалось самообращение, что иллюстрируется рис. 3а, б, где приведены соответственно корреляционная и спектральная кривые. Биения на первой кривой и пик на второй (отмечен стрелкой) свидетельствуют о появлении в спектре на месте одиночной линии ложного дублета, возникшего в результате самообращения.

Таким образом, результаты эксперимента подтверждают сделанные предположения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, УМН, 5, № 5, 42 (1938).
2. С. И. Вавилов, Микроструктура света, изд. АН СССР, М., 1950.
3. А. А. Майкельсон, Исследование по оптике, ГИ М.-Л., 1929.
4. J. Terrien, J. Phys. et Radium, 19, 390 (1958).
5. J. Ericsson, L. P. Johansson, Optica Acta, 7, 2 (1960).
6. С. М. Горский, В. А. Зверев, Прикладная спектроскопия, № 4, 7 (1967).
7. С. М. Горский, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. Б. А. Киселев, Ю. Д. Пушкин, Оптико-механическая промышленность, № 8, 33 (1966).
9. П. Жакино, УФН, 78, 123 (1962).
10. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, И. В. Мосалов, В. С. Сибиряков, ПТЭ, № 1, 110 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 июня 1967 г.

#### ON MEASURING THE FORM OF EMISSION SPECTRAL LINES USING THE VISIBILITY CURVES

*S. M. Gorskii*

The method of interference Fourier-spectroscopy, using filtration of spatial frequencies, is applied to analyze the form of the spectral lines by the contrast curves. The method does not require a preliminary filtration of the investigated signal and is usable in measuring the weak signals.

УДК 621 372.4

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ С НЕСФЕРИЧЕСКИМИ ЗЕРКАЛАМИ

*В. С. Авербах, С. Н. Власов, Н. М. Шеронова*

В работе экспериментально исследована селекция аксиальных типов колебаний в резонаторе с зеркалами специальной формы. Показано, что в рассмотренных системах можно добиться существенного подавления неаксиальных типов колебаний.

В работе [1] показано, что применение зеркал специального профиля (рис. 1) позволяет существенно повысить степень подавления неаксиальных типов колебаний. Это достигается подбором таких параметров системы, при которых только одна аксиальная мода ограничена каустикой, благодаря чему ее дифракционные потери малы и слабо зависят от изменения профиля периферийной части зеркала. В то же время именно последняя определяет потери всех остальных типов колебаний, не имеющих каустик.

Здесь приведены результаты более подробного исследования открытых высокоселективных резонаторов подобного типа. Экспериментальная установка 8-миллиметрового диапазона длин волн и методика измерений та же, что и в работе [2].

Исследуемый резонатор состоял из двух круговых зеркал: одного плоского (диаметром 200 мм), другого с профилем, изображенным на рис. 1. Этот профиль характеризуется параметрами:  $2a$  — диаметр зеркала (равный 200 мм),  $2a_1$  — диаметр центральной сферической части,  $(a_2 - a_1)$  — ширина плоского пояса,  $R$  — радиус кривизны сферической части,  $\theta$  — угол отгиба внешнего конуса. Профиль зеркал выдерживался с точностью до  $5 \cdot 10^{-2}$  мм, что соответствует  $10^{-2} \lambda$ . Зеркала имели плавные переходы с радиусом кривизны  $\sim 2$  мм между сферой и плоской частью, а также между последней и отгибом. Для возбуждения как основного, так и несимметричного типов колебаний отверстие связи было смещено на 30 мм от центра зеркала.

С целью выбора размеров центральной и плоской частей вначале были проведены эксперименты с зеркалами с радиусом кривизны  $R = 50$  см. При увеличении диаметра сферической части  $2a_1$  с 70 до 100 мм\* для зеркала без отгиба ( $\theta = 0$ ) селекция улучшалась, оставаясь значительно ниже, чем

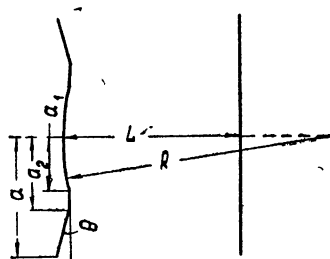


Рис. 1. Общий вид резонатора.

\* Радиусы каустик нулевой и первой мод в резонаторе ( $L = 25$  см,  $R = 50$  см) равны соответственно 32,5 и 50 мм и слабо меняются при увеличении  $R$  от 50 до 100 см.

в полуконфокальном резонаторе\*. Дискриминация мод увеличивалась при введении отгиба, особенно сильно для зеркал с  $2a_1 = 90$  мм, достигая максимума при  $\theta \approx 4^\circ$  [1]; для зеркал с  $2a_1 = 70$  и  $100$  мм она оказывалась существенно меньше. Исследование резонаторов с различной шириной плоской части зеркал показали, что по мере уменьшения последней дискриминация увеличивается, но при малой ширине (от 15 мм до нуля) изменяется слабо.

Последующие измерения были проведены при величине центральной части 90 мм и плоской 15 мм для зеркал радиусом кривизны  $R = 70$  и  $100$  см. Зависимости коэффициентов потерь нулевой и первой мод от  $L$  для них приведены на рис. 2 и 3, где параметром является угол

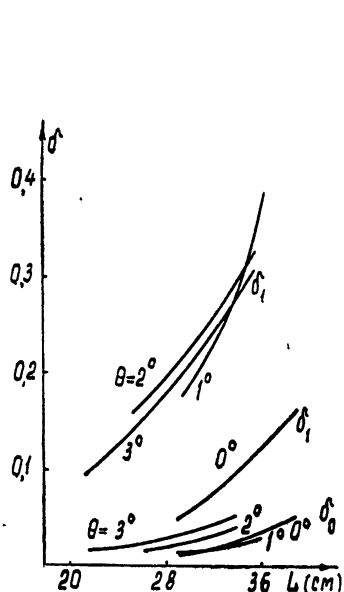


Рис. 2. Зависимость коэффициентов потерь нулевого и первого типов колебаний от расстояния между зеркалами при различных углах отгиба ( $a_1 = 45$  мм,  $a_2 = 60$  мм,  $R = 70$  см).

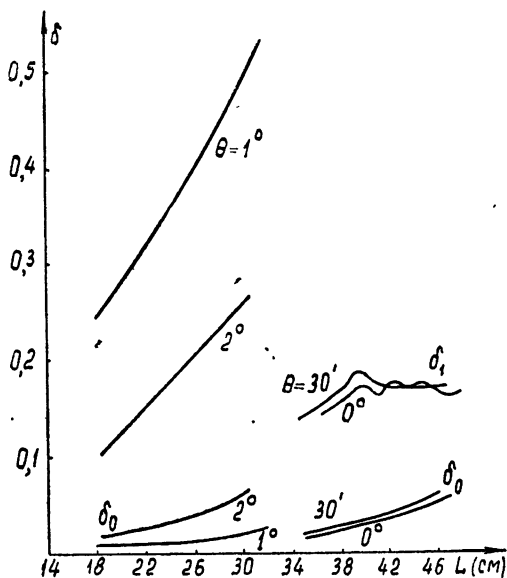


Рис. 3. Зависимость коэффициентов потерь нулевого и первого типов колебаний от расстояния между зеркалами при различных углах отгиба ( $a_1 = 45$  мм,  $a_2 = 60$  мм,  $R = 100$  см).

отгиба. Измерения потерь низшего типа колебаний проводились в области, где дифракционные потери составляют существенную долю омических; с другой стороны, чувствительность аппаратуры не позволяла измерять коэффициент потерь неаксиального типа колебаний, больший 0,5. В связи с этим области  $L$ , в которых проводились измерения  $\delta_0$  и  $\delta_1$  для зеркал  $R = 100$  см при малых и больших отгибах (рис. 3), неперекрываются. Небольшой отгиб сильно увеличивает потери несимметричного типа колебаний, но сравнительно слабо влияет на основной, как правило, несколько повышая потери последнего\*\*. При этом селективность возрастает, при угле  $1^\circ$  достигает максимума и затем снова падает. С дальнейшим ростом угла отгиба потери обеих мод при посто-

\* Мы характеризуем селективные свойства резонаторов разностью коэффициентов полных потерь  $d = \delta_1 - \delta_0$  первого несимметричного и основного типов колебаний при постоянной величине  $\delta_0$  [3]. Величина  $\delta$  связана с добротностью следующим образом:  $Q = kL/\delta$ , где  $L$  — длина резонатора.

\*\* При  $R = 70$  см в небольшом диапазоне углов ( $0-1^\circ$ ) наблюдается уменьшение потерь основного типа колебаний.

янием  $L$  обнаруживают колебания (рис. 4), что связано с изменением коэффициента отражения. Амплитуды колебаний для первой и нулевой мод различны по величине, а положения максимумов колебаний не совпадают между собой по углу. Последнее обстоятельство особенно благоприятно для получения высокой селективности.

На рис. 5 показано, как ведут себя потери рассматриваемых типов колебаний при перекосе зеркал в резонаторе. Для низкоселективного резонатора без отгиба, рис. 5\*, потери основного типа колебаний

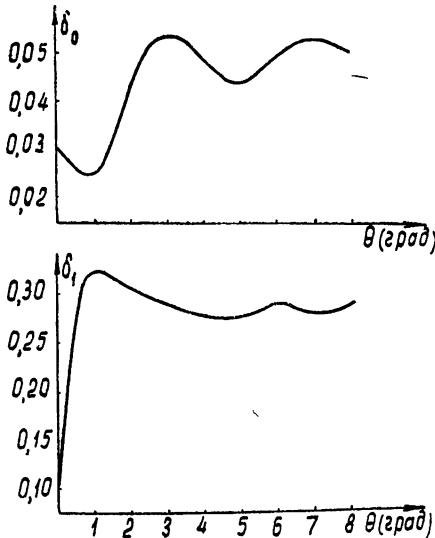


Рис. 4. Зависимость коэффициента потерь нулевой и первого типов колебаний от угла отгиба зеркал ( $a_1=45$  мм,  $a_2=60$  мм,  $R=70$  см,  $L=35$  см).

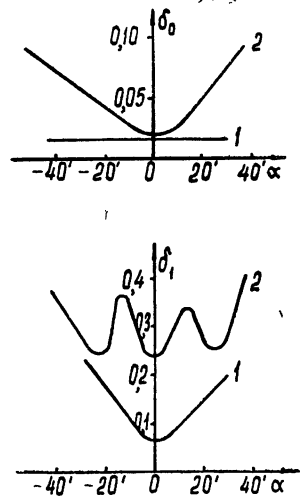


Рис. 5. Зависимость коэффициентов потерь нулевой и первого типов колебаний от угла перекоса зеркала:

1—зеркала без отгиба ( $a_1=45$  мм,  $a_2=100$  мм,  $R=70$  см); 2—зеркала с отгибом ( $a_1=45$  мм,  $R=70$  см,  $a_2=60$  мм,  $\theta=1^\circ$ ).

при перекосе почти не возрастают, а потери несимметричного увеличиваются весьма значительно, что приводит к некоторому росту селективности (рис. 6), не достигающей, правда, значений, получаемых при оптимальном отгибе зеркал\*\*. Совершенно по-другому ведет себя высокоселективная система. При перекосе потери нулевой моды быстро растут, а потери первой испытывают колебания\*\*\*, поэтому для таких систем необходима точная юстировка ( $\pm 5'$ ).

На рис. 7 изображены кривые максимальной селективности, достигнутой различными способами: перекосом системы без отгиба, оптимальным отгибом при различных радиусах кривизны зеркал. Для сравнения приведена кривая полуконфокальной системы.

При переносе полученных результатов в другие диапазоны длин волн необходимо выбирать профиль зеркал так, чтобы не изменились

\* Зависимости потерь при перекосе на рис. 5 несимметричны вследствие того, что отверстия связи смещены относительно центров зеркал.

\*\* Заметим, что, когда размер центральной части велик и введением отгиба селекцию повысить не удастся ( $2a_1=100$  мм), перекося зеркал также приводит к росту селективности.

\*\*\* У резонаторов со сферическими зеркалами, находящимися в зоне устойчивости, потери всех типов колебаний при перекосе растут.

параметры  $\sqrt{c_1} = a_1 \sqrt{k/L}$ ,  $\sqrt{c_2} = a_2 \sqrt{k/L}$  и  $\sqrt{c} = a \sqrt{k/L}$ , определяющие поперечные размеры зеркал, а также  $g = 1 - L/R$  и  $\eta = \theta \sqrt{kL}$ , характеризующие кривизну центральной части и угол отгиба внешнего конуса. Резонатор с  $R = 100$  см и отгибом в  $1^\circ$

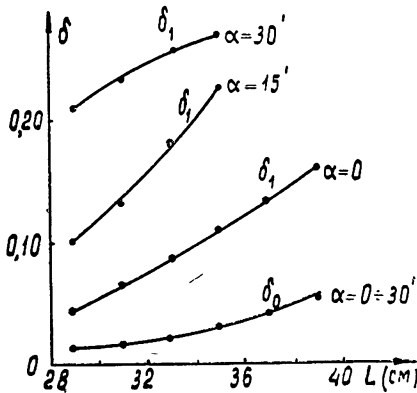


Рис. 6. Коэффициенты потерь нулевого и первого типов колебаний для различных углов перекоса зеркала без отгиба ( $a_1 = 45$  мм,  $a_2 = a = 100$  мм,  $R = 70$  см).

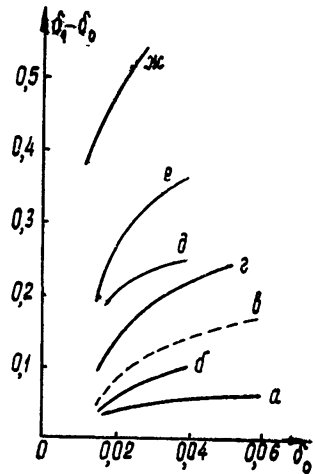


Рис. 7. Селекция мод в резонаторах с несферическими зеркалами:

- а)  $R = 50$  см,  $\theta = 0^\circ$ ; б)  $R = 70$  см,  $\theta = 0^\circ$ ; в) сферическое зеркало диаметром 115 мм ( $R = 70$  см); г)  $R = 50$  см,  $\theta = 4^\circ$ ; д)  $R = 70$  см,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\alpha = 30'$ ; е)  $R = 70$  см,  $\theta = 1^\circ$ ; ж)  $R = 100$  см,  $\theta = 1^\circ$ .

( $\sqrt{c_1} = 2,5$ ;  $\sqrt{c_2} = 3,3$ ;  $\sqrt{c} = 5,6$ ;  $g = 0,75$ ;  $\eta = 0,2$ ) можно практически считать одномодовым, так как даже при выбранном нами способе связи, обеспечивающем примерно одинаковый коэффициент возбуждения обоих низших колебаний, коэффициент передачи для первого колебания на 20 дБ ниже, чем для основного.

На основе проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Неквадратичный закон фазовой коррекции (рис. 1) позволяет получить селекцию лучше, чем в любой системе со сферическими зеркалами.

2. Существует оптимальный угол отгиба, при котором селекция достигает максимума.

3. Селекция при оптимальной величине отгиба возрастает с увеличением радиуса кривизны центральной части (рис. 7).

4. В резонаторах с зеркалами без отгиба ( $\theta = 0$ ) перекося приводит к улучшению селекции, а в высокоселективных с оптимальным углом отгиба — к ее уменьшению.

Отметим, в заключение, что повышение селективности может быть достигнуто и при другой форме центральной части зеркала, важно лишь, чтобы она была вогнутой и допускала существование низшего типа колебаний, ограниченного каустикой. Отгиб также может быть не обязательно коническим: периферийная часть зеркал должна выбирать так, чтобы обеспечить минимальный коэффициент отражения неаксиальных типов колебаний от края зеркал.

Авторы искренне благодарят В. И. Таланова за советы и дискуссию.



ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **11**, № 5, 945 (1966).
2. В. С. Авербах, Радиотехника и электроника, **11**, № 4, 757 (1966)
3. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Радиотехника и электроника, **10**, № 3, 552 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 июня 1967 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF OPEN RESONATORS WITH  
NON-SPHERICAL MIRRORS

*V. S. Averbakh, S. N. Vlasov, N. M. Sheronova*

The selection of axial modes in a resonator with special mirrors is experimentally investigated. It is shown that in the considered systems, the non-axial modes may be considerably suppressed.

---

УДК 621.371.167

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛНОВОГО ПУЧКА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

*Р. Х. Хестанов*

Произведен расчет радиационных потерь, связанных с образованием краевой волны у кромки полуплоскости при дифракции на ней волнового пучка. Первичное поле записано в виде интеграла по плоским волнам. Решение поставленной задачи дает интеграл от решений Зоммерфельда для дифракции плоской волны на полуплоскости. Исследованы характеристики краевой волны для случаев, когда кромка освещена первичным полем, т. е. находится между каустиками первичной волны и когда кромка находится в области тени.

### ВВЕДЕНИЕ.

Известно, что расчет дифракционных потерь в открытых резонаторах произведен лишь путем численного решения интегрального уравнения, а явное выражение получено для некоторых частных случаев [1]. Между тем, механизм образования дифракционных потерь можно интерпретировать следующим образом: стоячая собственная волна открытого резонатора может рассматриваться в виде суммы двух бегущих навстречу друг другу волн, которые преобразуются одна в другую при отражении от зеркала. Конечные размеры зеркал приводят к тому, что наряду с геометрическим отражением образуются краевые волны, излучение которых и обуславливает дифракционные потери. Поэтому для расчета потерь достаточно рассмотреть модельную ситуацию, когда на кромку зеркала падает волна, аналогичная одной из двух бегущих собственных волн, содержащихся в открытом резонаторе.

Поскольку радиус кривизны зеркал велик, на образование краевой волны он влияет слабо, и поэтому в настоящей работе рассмотрена более простая модельная задача дифракции на полуплоскости волнового пучка. В качестве пучка, ограниченного двумя каустическими поверхностями, выбрана волна Губо—Шверинга [2], частным случаем которой является собственная волна эллиптического резонатора. Эта задача представляет также самостоятельный интерес, так как ранее [3] исследовалось рассеяние пучка без каустики.

Из решения поставленной задачи следует связь между характеристиками краевой волны и параметрами поля пучка вблизи кромки полуплоскости, в частности, в наиболее интересном случае, когда кромка находится в тени (за каустикой). Главный член асимптотического выражения для краевого поля (компонента, соответствующая первичному полю) имеет вид

$$V_{\text{кр}} = - \frac{\exp [i(k\rho' + \pi/4)]}{2 \sqrt{2\pi k\rho'}} V_A \bar{f},$$

где  $V_A$  — поле пучка в кромке  $Q$ ;  $\rho'$  — расстояние от кромки до точки наблюдения;  $\bar{f}$  — диаграмма направленности, имеющая вид

$$\bar{f} = \frac{2(kR/2)^{1/3}}{i \cos(\psi/2) v(\eta)} \int_0^\infty \exp[-2i(kR/2)^{1/3} \operatorname{tg}(\psi/2) \xi] v(\eta + \xi) d\xi$$

и зависящая от следующих параметров, характеризующих поле вблизи кромки:  $R$  — радиуса кривизны в точке  $N_0$ , кратчайшей к кромке  $Q$ .  $l = N_0Q$ ,  $\eta = kl(kR/2)^{-1/3}$  — аргумента функции Эйри  $v(\eta)$  и  $\psi$  — угла между касательной к точке  $N_0$  и дифракционным лучом, приходящим в точку наблюдения. Можно ожидать, что  $\bar{f}$  имеет тот же вид и для других гладких каустик.

В выражение для  $\bar{f}$  входит интеграл, играющий ту же роль, что и интеграл Френеля в случае дифракции цилиндрической волны на полуплоскости. В последнем случае диаграмма направленности краевой волны существенно отличается от  $\bar{f}$  вблизи направления максимума, которое для пучка не является границей свет—тьень. Однако при  $\psi \neq 0$  асимптотика диаграммы  $\bar{f}$  совпадает с угловой частью асимптотики интеграла Френеля:

$$\bar{f} \simeq \frac{1}{\sin(\psi/2)}.$$

### 1. ПЕРВИЧНОЕ ПОЛЕ

Зададим двумерное первичное поле  $V_0$  в виде интеграла по плоским волнам

$$V_0 = \int_{\Gamma} g(\alpha) \exp[ik\rho \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha \tag{1}$$

со спектром

$$g(\alpha) = C \sin \alpha H_n \left( \sqrt{\frac{ka}{\cos \hat{\alpha}}} \cos \alpha \right) \exp \left\{ -\frac{ka \cos^2 \alpha}{2 \cos \hat{\alpha}} \right\}, \tag{2}$$

заданным относительно центра полярной системы координат  $\rho, \varphi$ . Величины  $a$  и  $\hat{\alpha}$  — параметры пучка;  $H_n$  — полином Эрмита порядка  $n = (ka \cos \hat{\alpha} - 1)/2$ ;  $C$  — постоянная, определяемая из условия нормировки  $V_0$ ; контур  $\Gamma$  идет из  $i \infty \operatorname{sgn} \sin \varphi$  в  $\pi - i \infty \operatorname{sgn} \sin \varphi$ .

При больших  $n$  поле  $V_0$  представляет волновой пучок, распространяющийся снизу вверх, с осью  $\varphi = \pm \pi/2$  (см. рис. 1). Лучевая структура поля получена при вычислении (1) методом стационарной фазы.

При подстановке в интеграл (1) асимптотики функции  $H_n \left( \sqrt{ka/\cos \hat{\alpha}} \times \times \cos \alpha \right) \exp \left\{ -(ka \cos^2 \alpha)/2 \cos \hat{\alpha} \right\}$  [4] в области

$$\left( ka \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha} \right)^{1/3} \gg 1, \tag{3}$$

где амплитуда подынтегральной функции (1) существенно отлична от нуля, есть две точки стационарной фазы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Величины  $\alpha_1, \alpha_2$  соответствуют углам наклона двух лучей к оси  $\varphi = 0$ , приходящих в точку наблюдения  $P$ .

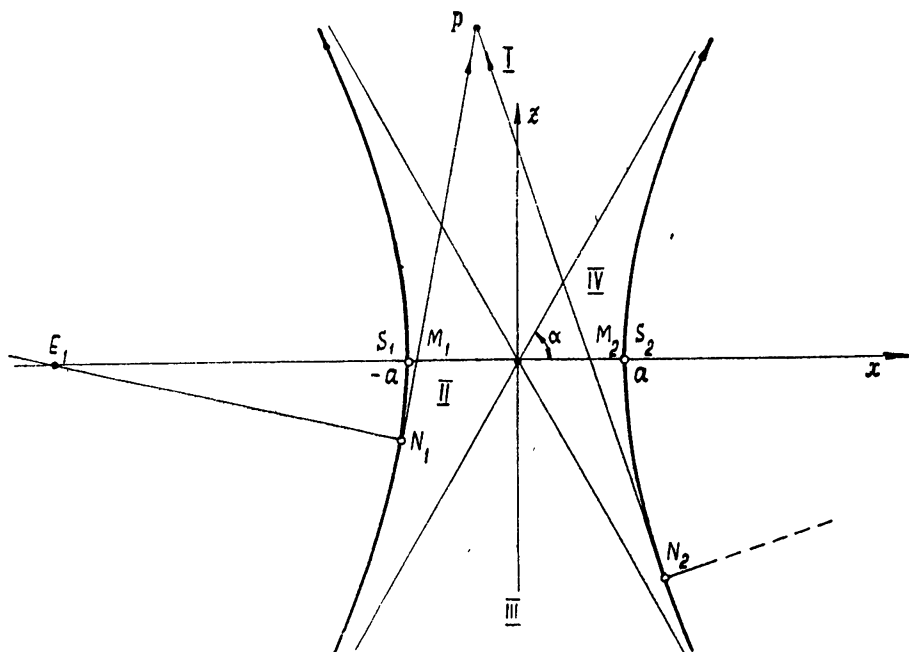


Рис. 1.

В геометрических терминах выражение поля  $V_0$  имеет вид

$$V_0(\rho, \varphi) = \frac{(-1)^{n/2+1}}{2} \sum_{\lambda=1,2} (-1)^n \left( \frac{E_\lambda M_\lambda \cos \hat{\alpha}}{N_\lambda P} \right)^{1/2} \exp [ik(\widehat{S_\lambda N_\lambda} + N_\lambda P) \mp i\pi/4] \left\{ 1 + O\left( [ka \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha_\lambda}]^{-1/3} + [kN_\lambda P]^{-1/2} \right) \right\}. \quad (4)$$

Как видно из рис. 1,  $N_1$  и  $N_2$  — точки касания лучей  $N_1P$ ,  $N_2P$  к каустикам;  $\widehat{S_1 N_1}$ ,  $\widehat{S_2 N_2}$  — длины дуг каустики от точек  $S_1$ ,  $S_2$ , находящихся на оси  $\varphi=0, \pi$ , до точек  $N_1$ ,  $N_2$ ;  $E_1 M_1$  и  $E_2 M_2$  — отрезки оси  $\varphi=0, \pi$ , отсекаемые касательными и перпендикулярами в точках  $N_1$  и  $N_2$ . Таким образом, лучевое поле (4) имеет обычный характер, если учитывать, что в точку наблюдения  $P$  приходят два луча.

Огибающие геометрикооптических лучей — каустики, изображенные на рис. 1, определены в декартовых координатах  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $z = \rho \sin \varphi$  параметрическими уравнениями

$$x = \mp a \frac{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^4 \alpha}{\cos \hat{\alpha} \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha}}, \quad (5)$$

$$z = \mp a \frac{\cos \alpha \sin^3 \alpha}{\cos \hat{\alpha} \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha}},$$

где независимый параметр  $\alpha$  равен углу между касательной к каустике и осью  $x$ , а знаки „ $\mp$ “ относятся к левой и правой каустикам. Из уравнений (5) непосредственно вытекает, что величина  $2a$  является

минимальным сечением пучка, а  $\hat{\alpha}$  и  $\pi - \hat{\alpha}$  — углами наклона асимптот. Отметим, что при  $\cos \hat{\alpha} \ll 1$  каустиками искомого пучка приближенно являются сопряженные гиперболы с межфокусным расстоянием  $2d = 2a/\cos \hat{\alpha}$  (ср. с [1]).

Если точка наблюдения  $P$  находится вблизи одной из каустик, как показано на рис. 2, то стационарные точки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  сближаются. В этом

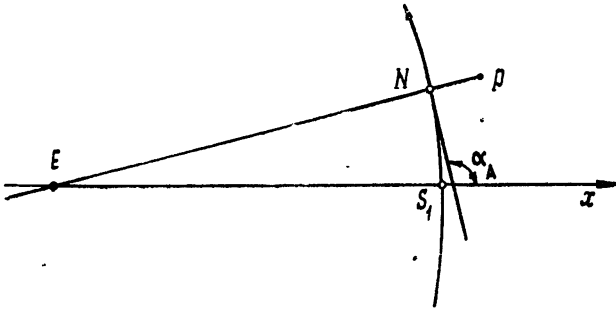


Рис. 2.

случае вычисление вклада в интеграле (1) точки перегиба  $\alpha_A$  дает формулу для поля:

$$V_0(\rho, \varphi) = \frac{(-1)^{n/2+1}}{\sqrt{2}} \frac{(kEM \cos \hat{\alpha})^{1/2}}{[(kR + kNP)/2]^{1/3}} v(\eta) \exp(ik\widehat{S_1N}) \times \quad (6)$$

$$\times \left\{ 1 + O\left[ \left( ka \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha_A} \right)^{-1/3} \right] + \frac{v'(\eta)}{[(kR + kNP)/2]^{1/3} v(\eta)} \right\},$$

где  $v(\eta)$  — функция Эйри аргумента

$$\eta = \frac{kNP}{[(kR + kNP)/2]^{1/3}},$$

$NP$  — кратчайшее расстояние от точки наблюдения  $P$  до каустики,  $R$  — радиус кривизны каустики в точке  $N(\alpha_A)$ . Если  $P$  перемещается обратно в пучок, так что  $-kNP \gg [(kR + kNP)/2]^{1/3}$ , то подстановка в (6) соответствующей асимптотики функции Эйри смыкает (6) с формулой (4). С другой стороны, в закаустической области поле  $V_0$  экспоненциально затухает, так как при  $kNP \gg [(kR + kNP)/2]^{1/3}$

$$v(\eta) \sim \exp\left\{ -\frac{2}{3} \eta^{3/2} \right\}.$$

## 2. ДИФРАКЦИЯ ПЕРВИЧНОГО ПОЛЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим задачу дифракции на полуплоскости поля  $V_0$ . Ограничимся горизонтальным положением полуплоскости. Как показано на рис. 3, 4,  $\rho_0, \varphi_0$  — координаты кромки полуплоскости  $Q(\rho_0, \varphi_0)$ .

Решение искомой задачи, очевидно, есть интеграл по контуру  $\Gamma$

$$V(\rho, \varphi) = V_1(\rho, \varphi) \mp V_2(\rho, \varphi) = \int_{\Gamma} g_1(\alpha) \left[ \exp [ik\rho' \cos(\varphi' - \alpha)] \times \right.$$

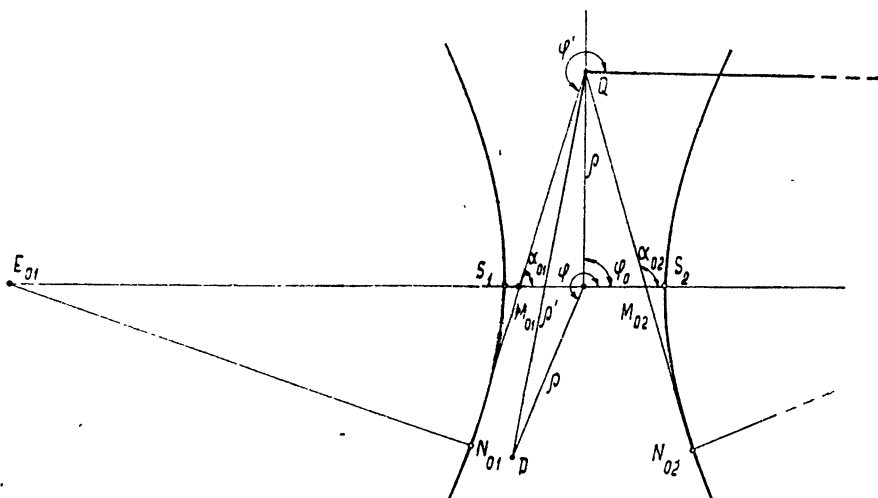


Рис. 3.

$$\times W\left(\sqrt{2k\rho'} \sin \frac{\varphi' - \alpha}{2}\right) \mp \exp[ik\rho' \cos(\varphi' + \alpha)] \times \quad (7)$$

$$\times W\left(\sqrt{2k\rho'} \sin \frac{-\varphi' - \alpha}{2}\right) d\alpha$$

от решения Зоммерфельда [5] задачи дифракции плоской волны на полуплоскости (в квадратных скобках), умноженного на спектр

$$g_1(\alpha) = g(\alpha) \exp[ik\rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha)].$$

Знаки „ $\mp$ “ в (7) соответствуют граничным условиям Дирихле и Неймана;  $\rho'$ ,  $\varphi'$  — полярные координаты точки наблюдения с полюсом в кромке;  $W$  — интеграл Френеля. Отличие спектра  $g_1(\alpha)$  от  $g(\alpha)$  связано с переносом начала координат из точки  $\rho = 0$  в кромку  $Q(\rho_0, \varphi_0)$ .

Формула (7) является строгим решением поставленной задачи, но нас интересуют его асимптотики. Оценим поле (7) при  $k\rho' \rightarrow \infty$  (дальнее поле). Так как первый и второй члены формулы (7) ( $V_1$  и  $V_2$ ) имеют одинаковую структуру, достаточно исследовать только

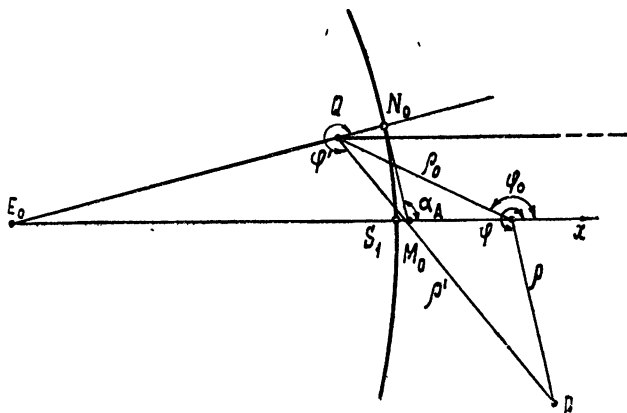


Рис. 4.

$$V_1(\rho, \varphi) = \int_{\Gamma} g_1(\alpha) \exp [ik\rho' \cos (\varphi' - \alpha)] W \left( \sqrt{2k\rho'} \sin \frac{\varphi' - \alpha}{2} \right) d\alpha. \quad (8)$$

Мы рассмотрим подробно вычисления для случая, когда точка наблюдения расположена выше полуплоскости. Однако последующие формулы справедливы и тогда, когда точка наблюдения расположена ниже полуплоскости. Поскольку при  $\varphi' < \pi$  на всем контуре  $\Gamma$  для интеграла Френеля справедлива асимптотика [6], т. е.

$$W(y) = 1 - \frac{\exp [i(y^2 + \pi/4)]}{2 \sqrt{\pi} y} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \right], \quad (9)$$

то, подставляя (9) в (8), получим

$$V_1 \simeq \int_{\Gamma} g(\alpha) \exp [ik\rho \cos (\varphi - \alpha)] d\alpha - \frac{\exp [i(k\rho' + \pi/4)]}{2 \sqrt{2\pi k\rho'}} \times \\ \times \int_{\Gamma} \frac{g(\alpha) \exp [ik\rho_0 \cos (\varphi_0 - \alpha)]}{\sin [(\varphi' - \alpha)/2]} d\alpha. \quad (10)$$

Первый член в (10) совпадает с (1), т. е. представляет первичное поле  $V_0(\rho, \varphi)$ . Поэтому дифракционная компонента решения определяется вторым членом в (10). В самом деле, сомножитель, стоящий перед знаком интеграла в (10), есть просто цилиндрическая волна, исходящая из кромки  $Q$ . Интеграл же определяет только угловую зависимость и амплитуду этой краевой волны. Вычисление интеграла, входящего во второй член, аналогично вычислению первичного поля  $V_0$  для точки наблюдения  $P(\rho_0, \varphi_0)$ , расположенной на кромке  $Q$ . Действительно, подынтегральное выражение искомого интеграла отличается от интегранды  $V_0(\rho_0, \varphi_0)$  лишь на сомножитель  $\left(\sin \frac{\varphi' - \alpha}{2}\right)^{-1}$ , ограниченный при  $\varphi' > \pi$  и не содержащий больших параметров.

Будем различать два случая: 1) когда кромка находится в пучке (как показано на рис. 3), 2) когда кромка расположена вблизи каустики (см. рис. 4). Используя то обстоятельство, что  $\left(\sin \frac{\varphi' - \alpha}{2}\right)^{-1}$  — медленно меняющийся сомножитель, проинтегрируем второй член в (10) так, как это сделано в разделе 1 для первичного поля  $V_0$ . В первом случае в кромку  $Q$  попадают два луча первичного поля под углами  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{02}$  к горизонту. В результате поле краевых волн

$$V_{кр} \simeq - \frac{\exp [i(k\rho' + \pi/4)]}{2 \sqrt{2\pi k\rho'}} \sum_{\lambda=1,2} \frac{V_{0\lambda}}{\sin [(\varphi' - \alpha_{0\lambda})/2]} \quad (11)$$

является суммой двух цилиндрических волн  $e^{ik\rho'}/\sqrt{k\rho'}$ , уходящих от кромки с диаграммами направленности

$$\frac{1}{\sin [(\varphi' - \alpha_{0\lambda})/2]}. \quad (12)$$

Амплитуда этих волн пропорциональна первичному полю лучей  $V_{01}$  и  $V_{02}$ , падающих на кромку:

$$V_{0\lambda} \equiv \frac{(-1)^{\lambda/2+1}}{2} \left( \frac{E_{0\lambda} M_{0\lambda} \cos \hat{\alpha}}{N_{0\lambda} Q} \right)^{1/2} \exp \left[ ik (\widehat{S}_1 N_{0\lambda} + N_{0\lambda} Q) \pm i \frac{\pi}{4} \right].$$

Таким образом, когда кромка освещена пучком, краевые волны (11) отличаются от краевой волны, образующейся при освещении полуплоскости цилиндрической волной, только тем, что в кромку приходят два луча.

### 3. ПОЛЕ КРАЕВЫХ ВОЛН. КРОМКА ЗА КАУСТИКОЙ.

Вычислим поле краевой волны для случая, когда ни один из лучей не освещает кромку. Этот случай интересен как сам по себе, так и с точки зрения оценки дифракционных потерь. Когда кромка находится вблизи каустики или за ней, как показано на рис. 4, вычисление вклада в точке перегиба  $\alpha_A$  фазовой функции интегранды второго члена в (10) дает формулу для поля краевых волн:

$$V_{кр} \simeq -V_A \frac{\exp\left[i\left(k\rho' + \frac{\pi}{4}\right)\right]}{2\sqrt{2\pi k\rho'} \sin[(\varphi' - \alpha_A)/2]}. \quad (13)$$

Амплитуда единственной цилиндрической волны в (13) пропорциональна первичному полю в кромке

$$V_A = \frac{(-1)^{n/2+1}}{\sqrt{2}} \frac{(kE_0 M_0 \cos \alpha)^{1/2}}{[(kR + kN_0 Q)/2]^{1/3}} v(\eta) \exp(ik\widehat{S}_1 N_0),$$

интерпретация которого аналогична формуле (6).

Диаграмма направленности

$$f(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)}, \quad (14)$$

очевидно, имеет максимум в направлении  $\psi = \varphi' - \alpha_A = 0$ . В аналогичной ситуации в первом случае значение диаграммы (12) в направлении максимума известно, так как на границе свет-тень амплитуда краевой волны приблизительно равна половине амплитуды геометрического поля. Когда же кромка за каустикой, поведение диаграммы направленности в области максимума неясно. Формула, пригодная для любых значений угла наблюдения, вычислена в Приложении при следующих условиях:

$$k\rho' \rightarrow \infty, \quad \left(\frac{kR}{2}\right)^{1/3} \gg 1, \quad R \gg N_0 Q, \quad \left(\frac{kR}{2}\right)^{1/2} - \eta^{3/2} \gg 1. \quad (15)$$

Там же приводятся оценки порядка следующих членов асимптотического ряда. Из сравнения формулы (П.3) с выражением краевого поля (13), записанным в виде

$$V_{кр} = V_{11} = \Lambda \bar{f}(\psi, \eta, kR), \quad (16)$$

где

$$\Lambda = -V_A \frac{\exp[i(k\rho' + \pi/4)]}{2\sqrt{2\pi k\rho'}}, \quad (17)$$

получаем выражение для диаграммы направленности, пригодное для любых значений  $\psi$ :



$$\bar{f}(\psi, \eta, kR) = \frac{2(kR/2)^{1/3}}{i \cos(\psi/2) v(\eta)} \int_0^{\infty} \exp \left[ -i \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} 2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \xi \right] \times \\ \times \left[ v(\xi + \eta) + O \left( v'(\xi + \eta) \left( \frac{kR}{2} \right)^{-1/3} \right) \right] d\xi. \quad (18)$$

Таким образом, формулы (16) — (18) определяют дифракционное поле волнового пучка с каустикой в случае, когда кромка полуплоскости находится вблизи или за каустикой.

При  $\left| 2 \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi}{2} \right) \right| \gg 1$  интеграл в (18) берется по частям, а первый член получающегося ряда, как и следовало ожидать, совпадает с диаграммой (14):

$$\bar{f}(\psi, \eta, kR) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} \left[ 1 + O \left( \frac{v'(\eta)}{(kR/2)^{1/3} v(\eta) \psi/2} \right) \right]. \quad (19)$$

С другой стороны, можно получить асимптотическое представление для  $\bar{f}$  при  $\left| 2(kR/2)^{1/3} \operatorname{tg}(\psi/2) \right| \ll 1$ , используя разложение

$$\int_0^{\infty} \exp \left[ -i 2 \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \xi \right] v(\xi + \eta) d\xi = \exp \left[ i 2 \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \eta \right] \times \\ \times \left\{ x(\eta) + 2i v(\eta) \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \dots \right\}, \quad (20)$$

где

$$x = \int_{\eta}^{\infty} v(\xi) d\xi.$$

Для промежуточных значений  $2 \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/3} \operatorname{tg} \left( \frac{\psi}{2} \right)$  интеграл в (18) легко табулировать.

#### 4. ЭНЕРГИЯ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ

Вычислим энергию излучения краевой волны  $\mathcal{E}$ , соответствующей члену  $V_1$  в решении (7). При этом воспользуемся формулой

$$\mathcal{E} = \int_0^{2\pi} |V_{\text{кр}}|^2 k\rho' d\varphi', \quad (21)$$

где  $k\rho' \rightarrow \infty$ . Если подставить в (21)

$$|V_{\text{кр}}|^2 = |\Lambda|^2 |\bar{f}(\psi, \eta, kR)|^2,$$

то интегрирование можно провести численным способом. Оставляя последний в качестве контрольной проверки, аппроксимируем  $|\bar{f}|^2$  выражением, которое переходит в первые члены асимптотических формул (19) и (20) соответственно для больших и малых  $\psi$  и вместе с тем легко интегрируется:

$$|f_{\text{ас}}|^2 = \frac{1}{\gamma^2 \cos(\psi/2) + \sin(\psi/2)}, \quad \gamma = \frac{v(\eta)}{2(kR/2)^{1/3} x(\eta)}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и интегрируя, получим

$$\mathcal{E} = |\Lambda|^2 \int_0^{2\pi} \frac{k\rho' d\psi}{\gamma^2 \cos(\psi/2) + \sin(\psi/2)} = \frac{kE_0 M_0 \cos \hat{\alpha} v(\eta) x(\eta)}{4(kR/2)^{1/3}}.$$

Рассмотрим коэффициент рассеяния

$$\sigma = 2\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 = \frac{E_0 M_0 \cos \hat{\alpha} v(\eta) x(\eta)}{\sqrt{2} \pi a (kR/2)^{1/3}}, \quad (23)$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |V_0|^2 d(kx) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} ka$$

— энергия первичного поля, а удвоение  $\mathcal{E}$  связано с учетом энергии краевой волны, соответствующей члену  $V_2$  в (7). Зависимость  $\sigma(\eta) \sqrt{2} \pi a \left(\frac{kR}{2}\right)^{1/3} (E_0 M_0 \cos \hat{\alpha})^{-1} = vx$  от  $\eta$  приведена на рис. 5. При больших положительных  $\eta$  коэффициент рассеяния выражается формулой

$$\sigma = \frac{E_0 M_0 \cos \hat{\alpha}}{8 \sqrt{2} \pi ka l} \exp\left(-\frac{4}{3} \eta^{3/2}\right). \quad (24)$$

Полученные результаты (23), (24) можно применять для оценки дифракционных потерь открытых резонаторов при условии, что на краях зеркал дифракционное поле много меньше первичного:

$$|V_{\text{кр}}|^2 \ll |V_0|^2, \quad (25)$$

т. е., когда истинное поле резонатора мало отличается от невозмущенного поля  $V_0$ .

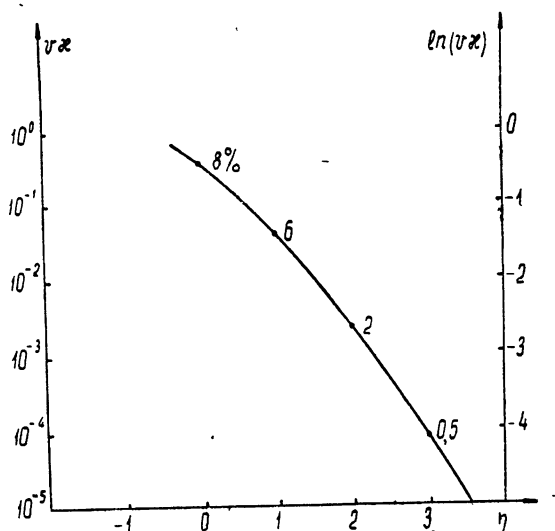


Рис. 5. Зависимость  $vx$  от  $\eta$  в логарифмическом масштабе. В процентах указано занижение потерь по сравнению с контрольными вычислениями.

Поясним выше сказанное на примере эллиптического резонатора с параметрами:  $2d$ —расстояние между фокусами,  $2x_1$ —ширина зеркал,  $2d \operatorname{tg} \beta$ —расстояние между зеркалами ( $\beta = \pi/4$ —софокусный резонатор).

При  $\cos \hat{\alpha} \ll 1$  каустиками собственных волн эллиптического резонатора (см. раздел 1) являются гиперболы, софокусные эллипсы:

их параметры  $ka$ ,  $\hat{\alpha}$  связаны с  $d$  соотношением  $kd = ka/\cos \hat{\alpha}$ .

Определяя через  $kd$ ,  $n$ ,  $\hat{\alpha}$  параметры, входящие в выражение краевой волны и первичного поля, из условия (25) получим связь между  $\eta$  и  $\beta$ :

$$2\pi \sin \beta \operatorname{tg} \beta (2n + 1) \gg 1. \quad (26)$$

Так как значения  $\beta$  ограничены условием (3),

$$\left(ka \sqrt{\cos^2 \hat{\alpha} - \cos^2 \alpha_A}\right)^{1/3} = [(2n + 1) \cos \beta]^{1/3}, \quad (27)$$

то оценка рассеяния по формулам (23), (24) может проводиться только для собственных волн с большим номером  $n$ .

В заключение приведем выражение для коэффициента рассеяния софокусного резонатора ( $\beta = \pi/4$ ):

$$\sigma_1 = 2\sigma = \frac{2^{7/6} \nu(\eta) \chi(\eta)}{\pi(2n + 1)},$$

где

$$\eta = 2^{2/3} (2n + 1)^{1/6} (c - \sqrt{2n + 1})$$

является функцией безразмерного параметра  $c = kx_1/(2kd)^{1/2}$  и номера волны  $n$ .

Автор благодарит Б. Е. Кинбера за руководство работой.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Представляя первый член решения (7) с входящим в него интегралом Френеля в виде интеграла по поверхности, запишем  $V_1$  в виде суммы

$$V_1 = V_{11} + V_{12},$$

где

$$V_{11, 12} = \int_0^\infty \int_0^\infty G_0(\alpha) \exp[ik\Phi_{1,2}(\alpha, \tau)] d\alpha d\tau, \quad G_0(\alpha) = |g(\alpha)| \frac{\exp[i(k\rho' - \pi/4)]}{\sqrt{2\pi k\rho'}}$$

$$k\Phi_{1,2}(\alpha, \tau) = k\rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha) - 2\tau \sin \frac{\varphi' - \alpha}{2} + \frac{\tau^2}{2k\rho'} \pm ka \cos \hat{\alpha} \Psi(\alpha),$$

$$\Psi(\alpha) = \int_0^{\cos \alpha / \cos \hat{\alpha}} \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Поверхность фазовой функции интегранды  $V_{11}$  в сечении  $\tau = \text{const}$  имеет экстремумы  $\tilde{\alpha}_1(\tau)$  и  $\tilde{\alpha}_2(\tau)$ , найденные из уравнения

$$k\Phi'_1(\alpha, \tau) = k\rho_0 \sin(\varphi_0 - \alpha) + \tau \cos \frac{\varphi' - \alpha}{2} = 0,$$

только в областях  $\alpha < \hat{\alpha}$ ,  $\alpha > \pi - \hat{\alpha}$ ,  $\tau \geq 0$ , где амплитудная функция  $G_0$  экспоненциально мала. При выполнении условий (3) и (15) вклады, соответствующие этим экстремумам, экспоненциально меньше вклада (11), обусловливаемого линией перегиба фазовой функции  $\Phi_1(\alpha, \tau)$  в области  $\hat{\alpha} < \alpha < \pi - \hat{\alpha}$ ,  $\tau \geq 0$ .

Упомянутая линия перегиба  $\alpha_n(\tau)$ , являющаяся решением уравнения

$$k\Phi''_1(\alpha, \tau) = -k\rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha) + ka \cos \hat{\alpha} \Psi''(\alpha) + \frac{\tau}{2} \sin \frac{\varphi' - \alpha}{2} = 0,$$

при  $0 \leq \tau < \infty$  принимает значения в пределах  $[\alpha_A, \varphi']$ . Однако точка перегиба  $\alpha_n$  дает вклад в интеграле по  $\alpha$  только при  $\tau < \tau_0$ , т. е. когда  $\Phi''_1(\alpha_n) > 0$ , так как  $\tau_0$ ,  $\alpha_n(\tau_0)$  полагаем решением системы уравнений

$$\Phi''_1(\alpha, \tau) = 0,$$

$$\Phi'''_1(\alpha, \tau) = 0.$$

Поэтому, пренебрегая вкладом от экстремумов, заключаем, что

$$V_{11} = \int_0^{\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\alpha) \exp [ik\Phi_1(\alpha, \tau)] \left[ 1 + O\left(\frac{\tau^2}{k\rho'}\right) \right] dad\tau, \quad (\text{П.1})$$

где фазовая функция  $\Phi_1(\alpha, \tau)$  от  $\tau$  зависит линейно:

$$k\Phi_1(\alpha, \tau) = k\rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha) + ka \cos \alpha \Psi(\alpha) - 2\tau \sin \frac{\varphi' - \alpha}{2}.$$

Докажем, что при условиях (15) в интеграле (П. 1), представленном в виде суммы

$$V_{11} = \left\{ \int_0^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_0} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\alpha) \exp (ik\Phi_1) dad\tau \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k\rho'}\right) \right],$$

где  $\tau_1 = \left(\frac{kR}{2}\right)^{2/3} \left(\cos \frac{\psi}{2}\right)^{-1}$ , второе слагаемое может быть отброшено. Разлагая  $\Phi_1(\alpha, \tau)$  и  $G_0(\alpha)$  в ряды Тейлора в точке  $\alpha_A$ , а  $\tau$  полагая параметром, запишем  $V_{11}$  в виде

$$\begin{aligned} V_{11} = & \left\{ \int_0^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_0} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} [G_0(\alpha_A) + G_0'(\alpha_A)(\alpha - \alpha_A) + \dots] \left[ 1 + \Phi_1''(\alpha_A, \tau) \frac{(\alpha - \alpha_A)^2}{2!} + \right. \\ & + \Phi_1''''(\alpha_A, \tau) \frac{(\alpha - \alpha_A)^4}{4!} + \dots \left. \right] \exp \left\{ ik \left[ \Phi_1(\alpha_A, \tau) + \Phi_1'(\alpha_A, \tau) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\alpha - \alpha_A) + \Phi_1'''(\alpha_A, \tau) \frac{(\alpha - \alpha_A)^3}{3!} \right] \right\} dad\tau, \quad (\text{П.2}) \end{aligned}$$

где опущена поправка  $O(1/k\rho')$ , а выражения для фазовой функции и ее производных имеют вид

$$k\Phi_1(\alpha_A, \tau) = k\widehat{S_1 N} - 2\tau \sin \frac{\psi}{2}, \quad k\Phi_1'(\alpha_A, \tau) = kl + \tau \cos \frac{\psi}{2},$$

$$k\Phi_1''(\alpha_A, \tau) = \frac{\tau}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \quad k\Phi_1'''(\alpha_A, \tau) = k(R - l) - \frac{\tau}{4} \cos \frac{\psi}{2}, \dots \quad (l = N_0 Q).$$

Вводя новую переменную интегрирования

$$\beta = (\alpha - \alpha_A) \left[ \frac{k\Phi_1'''(\alpha_A, \tau)}{2} \right]^{1/3},$$

запишем первый интеграл в (П. 2) в виде

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi} \left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/3} \int_0^{\tau_1} G_0(\alpha_A) \exp \left[ i \left( k\widehat{S_1 N_0} - 2\tau \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \left[ v(\xi + \eta) + \right. \\ \left. + O\left(v'(\xi + \eta) \left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/3}\right) \right] d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\xi = \tau \cos \frac{\psi}{2} \left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/3}, \quad \eta = kl \left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/3},$$

$v(\eta)$  — функция Эйри Далее, переходя к переменной  $\xi$ , получим

$$\begin{aligned} V_{11} = & \frac{2\sqrt{\pi} G_0(\alpha_A) \exp (ik\widehat{S_1 N_0})}{\cos (\psi/2)} \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left[ -i \left(\frac{kR}{2}\right)^{1/3} 2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \xi \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ v(\xi + \eta) + O\left(\frac{v'(\xi + \eta)}{\left(kR/2\right)^{1/3}}\right) \right] d\xi + O\left[\exp \left(-\frac{2}{3} \left(\frac{kR}{2}\right)^{1/2}\right)\right] \right\}, \quad (\text{П.3}) \end{aligned}$$

так как оценка второго слагаемого в (П. 2) дает величину  $\sim \exp \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{kR}{2} \right)^{1/2} \right]$ , экспоненциально малую по сравнению с интегралом (П. 3) даже при  $\eta \gg 1$ . Следовательно, в (П. 3) можно отбросить экспоненциально малые в силу условий (15) поправки. Так как фазовая функция интегранды  $V_{12}$  не имеет линии перегиба, (П. 3) является искомой формулой для краевого поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966
2. F. Schweging, Arch. elektr. Übertr., 15, № 12, 555 (1966).
3. Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев, ДАН СССР, 109, № 3, 473 (1956).
4. Н. Л. Коган, Б. М. Машковец, К. Н. Цибизов, Сложные волноводные системы, Судпромгиз, Л., 1963
5. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, ГИТТЛ, М., 1953.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
20 июня 1967 г.

## DIFFRACTION OF A WAVE BEAM ON A HALF-PLANE

*R. Kh. Khestanov*

The radiation losses associated with formation of the boundary wave near the edge of the half-plane at the diffraction of the wave beam on it are estimated. The primary field is written as the plane wave integral. The solution of the problem gives the integral from Sommerfeld's solutions for diffraction of a plane wave on a half-plane. The characteristics of the boundary wave are investigated when the edge is illuminated by the primary field, i. e. oriented between the caustics of the primary wave and when the edge is in the shade region.

УДК 621.372.833.1

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

*Г. Д. Малушков*

Методом интегральных уравнений первого рода с различными областями изменения точек наблюдения и интегрирования решается задача осесимметричного возбуждения конечного цилиндра с переменным вдоль образующей поверхностным импедансом. Цилиндр возбуждается поперечной круговой щелью с нулевой вариацией по азимутальной координате напряженности стороннего электрического поля. Излагается методика получения интегрального уравнения и метод его решения, приводятся расчетные формулы. Показаны результаты расчета распределений тока на цилиндре с полосой индуктивного реактанса, с линейно меняющимся индуктивным реактансом, а также с изменяющимся по квадратичному закону активным импедансом. Диаграммы направленности представлены для линейно нарастающего и линейно спадающего законов изменения импеданса.

Известен широкий класс излучающих систем в виде импедансных тел вращения. В качестве примера можно указать на ребристо-стержневые антенны [1], дисковые антенны поверхностных волн [2] и т. д. При заданных размерах поле излучения этих антенн определяется величиной и законом изменения поверхностного импеданса, а также типом и местом расположения возбуждающего источника. Основные антенные характеристики таких излучателей (диаграмма направленности, коэффициент полезного действия и др.) легко находятся после решения электродинамической задачи внешнего возбуждения тела вращения, на поверхности которого выполняются импедансные граничные условия. Результаты решения этой задачи, естественно, могут быть использованы и для ряда других практически интересных приложений.

В [3] дано общее решение задачи возбуждения произвольными сторонними источниками импедансного тела вращения и приведены примеры расчета распределений тока на цилиндре конечной длины с однородным поверхностным импедансом. В то же время используемый в этой работе для нахождения тока метод интегральных уравнений первого рода с различными областями изменения точек наблюдения и интегрирования позволяет без дополнительных трудностей решить задачу возбуждения тела вращения с произвольным вдоль образующей тела импедансом. Отметим, что решение двумерной задачи возбуждения бесконечного цилиндра с переменным по азимутальной координате импедансом получено также методом интегральных уравнений в [4].

Целью настоящей работы является изложение методики и анализ некоторых результатов решения задачи осесимметричного возбуждения цилиндра конечной длины с плоскими торцами с неоднородным по длине образующей цилиндра поверхностным импедансом. Цилиндр возбуждается круговой поперечной щелью с нулевой вариацией по азимутальной координате напряженности стороннего электрического поля, причем ширина щели и ее положение на цилиндре в принципе произвольны. При таком возбуждении продольная составляющая магнитного поля отсутствует, т. е. возникает волна типа ТМ.

В работе используются системы координат вращения  $v, u, \varphi$  и цилиндрическая  $z, R, \varphi$  такие, что направление азимутальной координаты  $\varphi$  для обеих систем одинаково. Зависимость от времени предполагается в виде  $e^{i\omega t}$ .

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОЛЕ

Задача внешнего возбуждения импедансного тела вращения заключается в нахождении тока, наводимого на поверхности рассматриваемого тела некоторыми сторонними источниками, расположенными вне его объема  $V$ . Искомым является либо электрический ток  $J^s = [nH]$ , либо магнитный  $J^m = -[nE]$ . Здесь  $E, H$  — электромагнитное поле, возбуждаемое заданными сторонними источниками на поверхности тела;  $n$  — внешняя единичная нормаль к поверхности тела, т. е. фактически требуется определение тангенциальных составляющих либо магнитного поля  $H$ , либо электрического  $E$ . Поскольку в данном случае на поверхности тела тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей связаны импедансным граничным условием

$$[nE] = Z[nH], \quad (1)$$

где  $Z$  — тензор поверхностного импеданса, то достаточным является определение именно одной из этих составляющих. После нахождения тока на теле поле излучения в любой точке пространства легко определяется по теореме эквивалентности.

Интегральное уравнение первого рода относительно вектора поверхностной плотности электрического тока  $J^s$  на теле с импедансными граничными условиями при возбуждении его сторонним магнитным током с объемной плотностью  $j^{m \text{ ст}}$  имеет вид

$$\int_{\Sigma} \{E^b - Z[nH^b]\} J^s d\sigma = \int_W H^b j^{m \text{ ст}} d\omega. \quad (2)$$

В этом выражении  $\Sigma$  — поверхность возбуждаемого тела  $V$ ;  $E^b, H^b$  — некоторое вспомогательное поле, создаваемое вспомогательными источниками, находящимися внутри тела  $V$  (здесь полагается, что это поле удовлетворяет во всем пространстве неоднородным уравнениям Максвелла и условию излучения на бесконечности, хотя иногда может быть полезным наложение на него еще некоторого дополнительного граничного условия); интегрирование в правой части осуществляется по объему  $W$ , в котором сторонний магнитный ток  $j^{m \text{ ст}}$  отличен от нуля.

Пусть рассматриваемое тело  $V$  (рис. 1) ограничивается поверхностью вращения  $\Sigma$ , образованной вращением образующей тела  $u = u_0 = \text{const}$  вокруг оси  $z$  и возбуждается витком магнитного тока с объемной плотностью

$$j_{\varphi}^{m \text{ ст}} = -E_{tg}^{\text{ст}} \delta(u - u_0), \quad (3)$$

эквивалентным поперечной круговой щели с не зависящей от азимутальной координаты  $\varphi$  напряженностью электрического поля  $E_{tg}^{\text{ст}}$ . В (3) и далее  $\delta(u - u_0)$  — дельта-функция Дирака.

Для вспомогательного поля, как показано в [2], в данном случае оптимальным является выбор источника этого поля в виде рамки с  $\varphi$ -м магнитным током, занимающим объем  $W'$  внутри возбуждаемого тела. Для объемной плотности такого тока с гармонической зависимостью по азимутальной координате можно написать [5]

$$i_{m\varphi}^m(\zeta, \eta, \gamma) = I_{\varphi}^{m \text{ ст}} \delta(\zeta - z') \delta(\eta - R') \exp[i m(\gamma - \varphi')], \quad (4)$$

где  $\zeta, \eta, \gamma$  — пространственные цилиндрические координаты,  $I_{\varphi}^{m \text{ в}}$  — амплитуда бегущей азимутальной волны,  $m$  — номер гармоники.

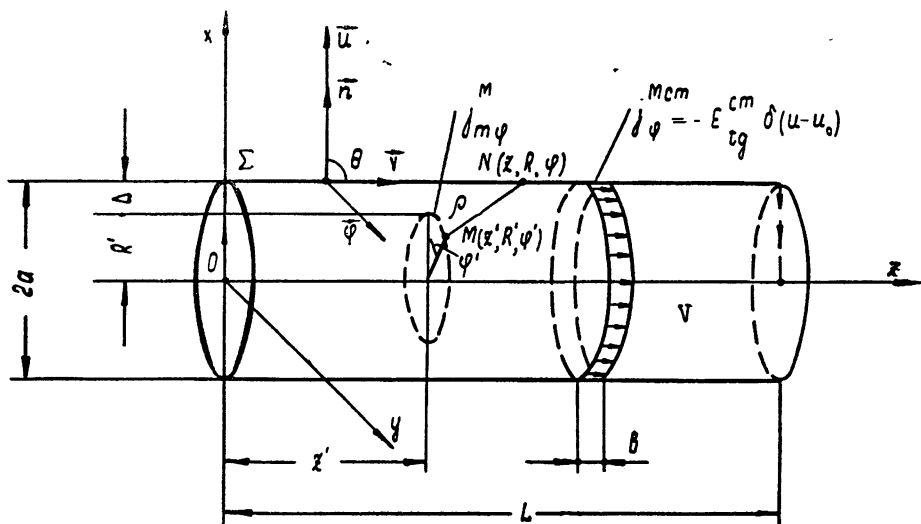


Рис. 1. Геометрия задачи.

Под углом  $\varphi'$  следует понимать просто некоторый начальный угол отсчета, который обычно полагается равным нулю.

Составляющие векторного потенциала тока (4) в системе координат  $z, R, \varphi$  определяются по формулам

$$A_{mz}^m(z, R, \varphi) = 0,$$

$$A_{mR}^m(z, R, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{W'} j_{m\varphi}^m \sin(\varphi - \gamma) \frac{e^{-ikr}}{r} \eta d\eta d\zeta d\gamma, \quad (5)$$

$$A_{m\varphi}^m(z, R, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{W'} j_{m\varphi}^m \cos(\varphi - \gamma) \frac{e^{-ikr}}{r} \eta d\eta d\zeta d\gamma,$$

где  $r = \sqrt{(z - \zeta)^2 + R^2 + \eta^2 - 2\eta R \cos(\varphi - \gamma)}$  — расстояние между точкой наблюдения  $z, R, \varphi$  и точкой интегрирования  $\zeta, \eta, \gamma$ .

Если считать  $\frac{I_{\varphi}^{m \text{ в}}}{2} = 1$  и полагать линейные размеры нормированными (т. е. умноженными на волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ), то интегрирование в (5) с использованием (4) приводит к выражениям

$$A_{mR}^m = iR' \left( \frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2} \right) e^{-im\psi}, \quad (6)$$

$$A_{m\varphi}^m = R' \left( \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} \right) e^{-im\psi}.$$

В (6) и далее функция  $S_m$ , введенная в [6] и подробно исследованная в [7], является  $m$ -м коэффициентом разложения функции Грина для свободного пространства  $[\exp(-i\rho)]/\rho$  в ряд Фурье по угловой координате  $\Psi = \varphi - \varphi'$ , т. е.



$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\varphi}}{\rho} e^{-im\Psi} d\Psi, \quad (7)$$

где  $\rho = \sqrt{(z-z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \Psi}$  — нормированное расстояние между точками с координатами  $z, R, \varphi$  и  $z', R', \varphi'$ . Отметим, что при выборе вспомогательного источника (4) внутри тела  $V$  расстояние  $\rho$  ни в одной точке не обращается в нуль и  $S_m$  не имеет особых точек.

Для составляющих вспомогательного поля (в дальнейшем индекс вспомогательного поля опускается) в цилиндрической системе координат  $z, R, \varphi$  из (6) и соотношений

$$E = -\operatorname{rot} A^M, \quad H = -\frac{1}{ikW_0} \operatorname{rot} E \quad (8)$$

получим

$$\begin{aligned} E_{mz}^{M\varphi} &= R' \frac{\partial S_m}{\partial R'} e^{-im\Psi}, \\ E_{mR}^{M\varphi} &= R' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} \right) e^{-im\Psi}, \\ E_{m\varphi}^{M\varphi} &= -iR' \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2} \right) e^{-im\Psi}, \\ H_{mz}^{M\varphi} &= -\frac{m}{W_0} \frac{\partial S_m}{\partial z} e^{-im\Psi}, \\ H_{mR}^{M\varphi} &= \frac{R'}{W_0} \left[ \frac{m}{R} \frac{\partial S_m}{\partial R'} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2} \right) \right] e^{-im\Psi}, \\ H_{m\varphi}^{M\varphi} &= -\frac{iR'}{W_0} \left( \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} - \frac{m^2}{RR'} S_m \right) e^{-im\Psi}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $W_0 = 120\pi$  [ом] — волновое сопротивление свободного пространства. (Верхние индексы у полей указывают тип и направление возбуждающего тока, нижние — номер гармоники и ось, на которую проектируется вектор поля.) При выводе этих формул использованы следующие функциональные соотношения для  $S_m$  [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_m}{\partial R'} &= \frac{(m-1)S_{m-1} - (m+1)S_{m+1}}{2R} - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} \right), \\ \frac{\partial^2 S_m}{\partial R \partial R'} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} \right) &= \frac{S_{m-1} + S_{m+1}}{2} - \frac{m^2}{RR'} S_m. \end{aligned} \quad (10)$$

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Записанные выше составляющие вспомогательного поля (9) определяют ядро и правую часть интегрального уравнения задачи.

Будем полагать, что на поверхности  $\Sigma$  импеданс является анизотропным и тензор поверхностного импеданса в (1) записывается в виде

$$Z = \left\| \begin{array}{cc} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{array} \right\|, \quad (11)$$

где  $Z_1 = \frac{E_v}{H_\varphi} = \frac{J_\varphi^M}{J_v^3}$  и  $Z_2 = -\frac{E_\varphi'}{H_v} = \frac{J_v^M}{J_\varphi^3}$  — продольный и поперечный импедансы, не зависящие от азимутальной координаты  $\varphi$ . Тогда из (2) получается интегральное уравнение относительно продольной  $J_v^3$  и поперечной  $J_\varphi^3$  составляющих электрического тока:

$$\int_{\Sigma} \{ (E_z \sin \Theta - E_R \cos \Theta - Z_1 H_\varphi) J_v^3 + [E_\varphi + Z_2 (H_z \sin \Theta - H_R \cos \Theta)] J_\varphi^3 \} d\sigma = \int_W H_\varphi j_\varphi^M \text{ct} d\omega, \quad (12)$$

где  $\Theta$  — угол между нормалью к поверхности тела  $\mathbf{n}$  и осью  $z$  (рис. 1).

Поскольку ток возбуждающего источника (3) не зависит от азимутальной координаты, очевидно, что и вспомогательное поле должно быть осесимметричным, т. е. при подстановке его из (9) в (12) следует положить  $m=0$ . В противном случае в правой части уравнения (12) вследствие свойства ортогональности системы функций  $e^{im\varphi}$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2\pi & \text{при } m = n \end{cases} \quad (13)$$

получился бы нуль и решением уравнения (12) могли бы быть лишь свободные колебания. Если теперь в левой части (12) искомый ток представить также в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате, то использование свойства (13) приводит (12) к виду

$$\int_v \left( \frac{\partial S_0}{\partial R'} \sin \Theta - \frac{\partial S_1}{\partial z} \cos \Theta + \frac{iZ_1}{W_0} S_1 \right) J_{0v}^3 R R' dv = \frac{i}{k W_0} \int_v E_{\text{tg}}^{\text{ct}} S_1 R R' dv. \quad (14)$$

В левой части (14) интегрирование ведется по образующей тела вращения  $v$ , а в правой — по ширине щели  $b$ .

После использования функционального соотношения для  $S_m$

$$\frac{\partial S_m}{\partial R'} = \frac{m}{R'} S_m + R' S_m^1 - R S_{m+1}^1, \quad (15)$$

где  $S_m^1 = \frac{1}{z-z'} \frac{\partial S_m}{\partial z}$ , интегральное уравнение записывается относительно полного тока  $I_v = 2\pi R J_{0v}^3$  в окончательном и удобном для численного решения виде:

$$\int_v K(v, v') I_v(v) dv = f(v'), \quad (16)$$

где

$$K(v, v') = \left[ (R' S_0^1 - R S_1^1) \sin \Theta - (z - z') S_1^1 \cos \Theta + \frac{iZ_1}{W_0} S_1 \right] R'; \quad (17)$$

$$f(v') = \frac{2\pi i}{k W_0} \int_v E_{\text{tg}}^{\text{ct}} S_1 R R' dv. \quad (18)$$

Если в (18)  $\frac{1}{k} \int_b E_{tg}^{ct} dv$  выразить в вольтах, то искомый ток  $I_v$  получится в амперах.

Подчеркнем следующее. В результате проделанного вывода получено интегральное уравнение относительно продольной составляющей электрического тока  $J_v^s$ , что для случая осесимметричного возбуждения тела вращения волной ТМ является физически очевидным, так как поперечного электрического тока в данном случае на импедансном теле вращения не возникает. Из более общих интегральных уравнений задачи возбуждения импедансного тела вращения легко видеть, что в осесимметричном случае продольный электрический ток  $J_v^s$  может возбуждаться только сторонним продольным электрическим током  $j_v^{ct}$  или поперечным магнитным током  $j_\varphi^{mct}$ , а поперечный ток  $J_\varphi^s$  — только магнитным током  $j_v^{mct}$  или поперечным электрическим током  $j_\varphi^{ct}$ . При этом для определения рассматриваемым методом поперечного электрического тока  $J_\varphi^s$  помимо соответствующего выбора стороннего возбуждающего источника для составления интегрального уравнения необходимо выбрать в качестве вспомогательного источника рамку с продольным ( $v$ -м) магнитным током.

При несимметричном возбуждении ( $m \neq 0$ ) любой сторонний источник возбуждает как продольную составляющую тока  $J_v^s$ , так и поперечную  $J_\varphi^s$ , что находит свое отражение в неразделяемости интегральною уравнения относительно этих токов. Однако важно, что по гармоникам интегральные уравнения разделяются, т. е., если ток стороннего источника представляет собой одну азимутальную гармонику, то и на импедансном теле вращения при не зависящем от азимутальной координаты импедансе возбуждается ток с той же зависимостью по  $\varphi$ . Отметим также, что в (16)—(18) не входит импеданс  $Z_2$ , т. е. распределение тока в случае осесимметричного возбуждения волной ТМ от него не зависит.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $S_m$ и $S_m^I$

Метод решения интегрального уравнения (16) заключается в замене его системой линейных алгебраических уравнений высокого порядка, которая затем методом обращения матрицы решается на электронной вычислительной машине (ЭВМ). Для сведения интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений интервал интегрирования по  $v$  разбивается на  $N$  в общем случае неравной длины элементарных отрезков  $\Delta v_n$ , в результате чего интеграл в левой части (16) может быть заменен суммой интегралов по этим отрезкам. Затем замена искомой функции на отрезке интегрирования некоторой интерполяционной формулой приводит к тому, что значения искомой функции в узлах интерполяции могут быть вынесены из-под знака интеграла. Например, считая значения искомой функции постоянными на элементарных отрезках интегрирования  $\Delta v_n$  и равными значению функции в средней точке отрезка [3], для (16) получим

$$\sum_{n=1}^N I_v(v_n) \int_{\Delta v_n} K(v, v') dv = f(v'). \quad (19)$$

Полагая теперь последовательно  $v' = v'_1, v'_2, \dots, v'_N$  из (19), придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^N I_v(v_n) \int_{\Delta v_n} K(v, v'_k) = f(v'_k), \quad (20)$$

где  $k=1, 2, \dots, N$ , которую можно записать в матричной форме

$$\alpha I = f, \quad (21)$$

где  $\alpha$  — комплексная матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений, определяемых по формуле

$$\alpha_{kn} = \int_{\Delta v_n} K(v, v'_k) dv, \quad (22)$$

$I$  — комплексная матрица-столбец искомых токов,  $f$  — комплексная матрица-столбец правых частей.

После определения обратной к  $\alpha$  матрицы  $\alpha^{-1}$  решение находится умножением ее на правую часть (21):

$$I = \alpha^{-1} f.$$

Такой метод решения системы алгебраических уравнений является наиболее оптимальным при необходимости рассмотрения нескольких возбуждающих источников.

Успех решения интегрального уравнения в значительной мере определяется точностью и быстротой расчета коэффициентов матрицы  $\alpha_{kn}$  и правых частей, зависящих от функции  $S_m$  и ее производных. Поэтому остановимся на вопросе вычисления этих функций.

Для расчета функции  $S_m$  и ее производной  $S_m^I$  наиболее применимыми являются разложения этих функций в ряды либо по функциям Ганкеля полуцелого индекса, либо по гипергеометрическим функциям [7]. В первом случае эти разложения имеют вид

$$S_m = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{v^{2(2l+m)}}{l!(l+m)! 2^{2l+m} \rho_{\pi/2}^{\rho_{\pi/2}}} H_{\left(2l+m+\frac{1}{2}\right)}^{(2)}(\rho_{\pi/2}); \quad (23)$$

$$S_m^I = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{v^{2(2l+m)}}{l!(l+m)! 2^{2l+m} \rho_{\pi/2}^{\rho_{\pi/2}}} H_{\left(2l+m+\frac{3}{2}\right)}^{(2)}(\rho_{\pi/2}), \quad (24)$$

где  $v^2 = RR'$ ,  $\rho_{\pi/2} = \sqrt{(z-z')^2 + R^2 + R'^2}$ .

Выражения (23) и (24) могут быть получены из (7) с использованием формулы [8]

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i(-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(zdz)^n} \left( \frac{e^{-iz}}{z} \right) \quad (25)$$

и разложения функции  $[\exp(-i\sqrt{x^2-\xi})]/\sqrt{x^2-\xi}$  в ряд Маклорена по переменной  $\xi$ :

$$\frac{\exp(-i\sqrt{x^2-\xi})}{\sqrt{x^2-\xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( \frac{\exp(-i\sqrt{x^2-\xi})}{\sqrt{x^2-\xi}} \right) \Big|_{\xi=0}. \quad (26)$$

Ряды (23), (24) хорошо сходятся для всех значений  $v^2$  и  $\rho_{\pi/2}$  в случае вычисления мнимых частей  $S_m$  и  $S_m^I$ . Действительные части  $S_m$  и  $S_m^I$  вычисляются по этим формулам лишь для достаточно больших  $\rho_{\pi/2}$ . В противном случае расчет ведется через разложение в виде ряда по гипергеометрическим функциям [7].

Точность вычисления функций  $\epsilon$ , которая определяется как отношение последнего вычисленного члена ряда к сумме всех предыдущих, полагается обычно равной  $5 \cdot 10^{-3} \div 10^{-4}$ .

После расчета функций  $S_1$ ,  $S_0^i$  и  $S_1^i$  по (17), (18) просто вычисляются ядро и правая часть интегрального уравнения. В связи со сложностью вида ядра при вычислении коэффициентов матрицы по (22) интегрирование по элементарному отрезку  $\Delta v_n$  следует проводить с заданной точностью, например, по формуле Симпсона [9]. Тогда точность решения системы алгебраических уравнений после вычисления определителя может быть оценена по формулам работы [10].

#### 4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОКА И ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ

При построении импедансной антенны поверхностный импеданс может рассматриваться как параметр, управляющий распределением тока и диаграммой направленности. Ниже приводятся результаты численного решения изложенной методом задачи о возбуждении цилиндра с плоскими торцами длиной  $kL = 16,5$  и радиусом  $ka = 0,9$  с некоторыми характерными законами изменения поверхностного импеданса  $\tilde{Z}_1 = \frac{Z_1}{W_0} = Z_1' + iZ_1''$ .

Для нахождения полного тока интегральное уравнение (16) сводилось к комплексной системе линейных алгебраических уравнений, максимальный порядок которой равнялся 40. Длина элементарных отрезков интегрирования  $\Delta v_n$  выбиралась порядка 0,5. Ширина щели

$b = 0,5$ ,  $\frac{E_{ct}}{k} = 1v$ . Относительная точность вычисления функций  $S_1$ ,  $S_0^i$  и  $S_1^i$   $\epsilon = 0,3 \cdot 10^{-2} \div 10^{-3}$ . При нахождении коэффициентов матрицы и правых частей интегралы вычислялись по формуле Симпсона с заданной относительной точностью, которая равнялась  $10^{-3}$ . Вспомогательный источник был удален от поверхности цилиндра на расстояние  $\Delta = 0,15$ . Время счета на ЭВМ М-20  $t \simeq 5 \div 6$  мин.

Результаты расчета распределения полного электрического тока  $I_v = |I_v| e^{i\psi}$  на цилиндре с полосой постоянного индуктивного реактанса  $\tilde{Z}_1 = 0,5 i$  при возбуждении его щелью, находящейся у одного из тор-

цов, показаны на рис. 2. (На этом и следующих рисунках  $\tilde{l}$  — коэффициент нормировки. Вертикальные пунктирные линии отмечают место перехода от торцевой части к цилиндрической. Положение щели показано на оси абсцисс. На нижних рисунках приведены также законы распределения импеданса.) В случае расположения щели у левого торца на импедансной полосе (кривая 1) значительная часть энергии переходит в поверхностную волну, которая на полосе меняется сравнительно слабо. Это говорит, во-первых, о небольшом излучении и, во-вторых, о малой величине коэффициента отражения от конца полосы. На идеально проводящей части поверхности распределение тока имеет известный осциллирующий характер, обусловленный существенным отражением от конца цилиндра. Здесь заметны потери на излучение.

Совсем другая картина получается при расположении щели у правого торца (кривая 2). Здесь уже основная часть энергии, дошедшая до полосы с индуктивным реактансом переходит в поверхностную волну, которая, отражаясь от левого конца цилиндра, дает распределение тока, характерное для стоячей волны. Это видно как по распределению амплитуды тока, так и по распределению фазы. Таким образом, коэф-

эффициент отражения от края импедансной полосы получается значительно меньшим по сравнению с коэффициентом отражения от края цилиндра.

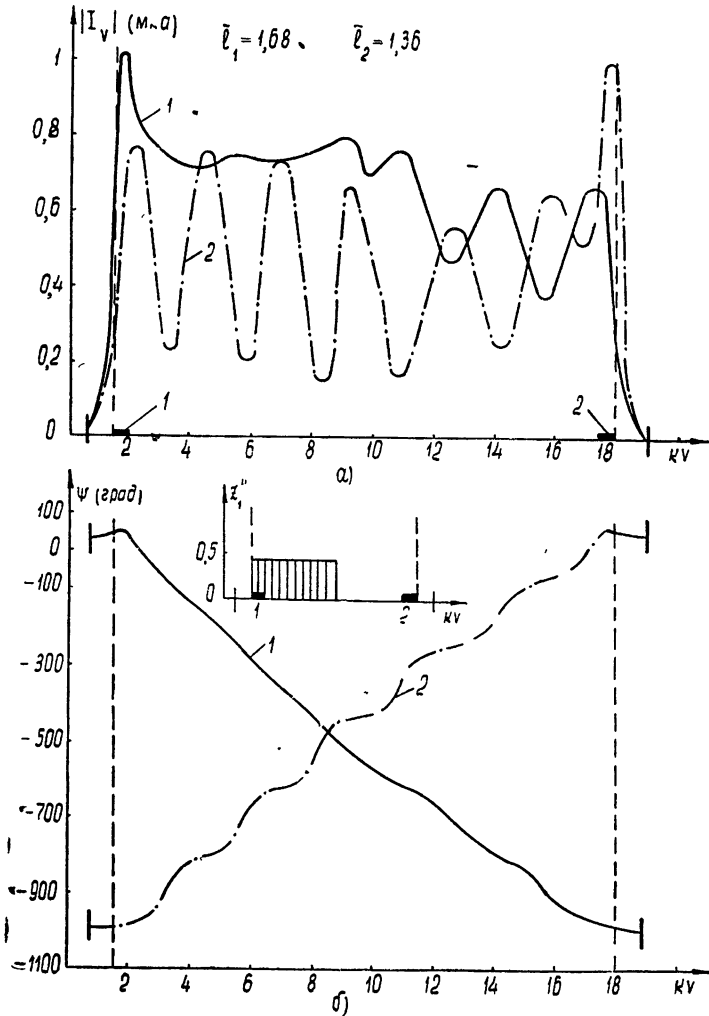


Рис. 2. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) нулевой гармоники электрического тока на цилиндре с полосой постоянного индуктивного реактанса.

На следующем рисунке представлены результаты расчета распределения тока на цилиндре с линейно нарастающим и линейно спадающим индуктивными реактансами. Заметно, что в случае линейно нарастающего при удалении от источника возбуждения индуктивного реактанса (кривая 1, рис. 3) имеет место сильное отражение от конца цилиндра, и распределение тока получается характерным для стоячей волны. Однако в связи с тем, что постоянная распространения вдоль цилиндра из-за непостоянства импеданса меняется, период этой волны также переменен: Для линейно спадающего при удалении от источника индуктивного реактанса (кривая 2, рис. 3) отражение от конца получается меньшим, и в области малых значений импеданса заметны потери на излучение. В результате можно заключить, что коэффициент отра-

жения определяется не только видом неоднородности поверхности, но и характером импеданса.

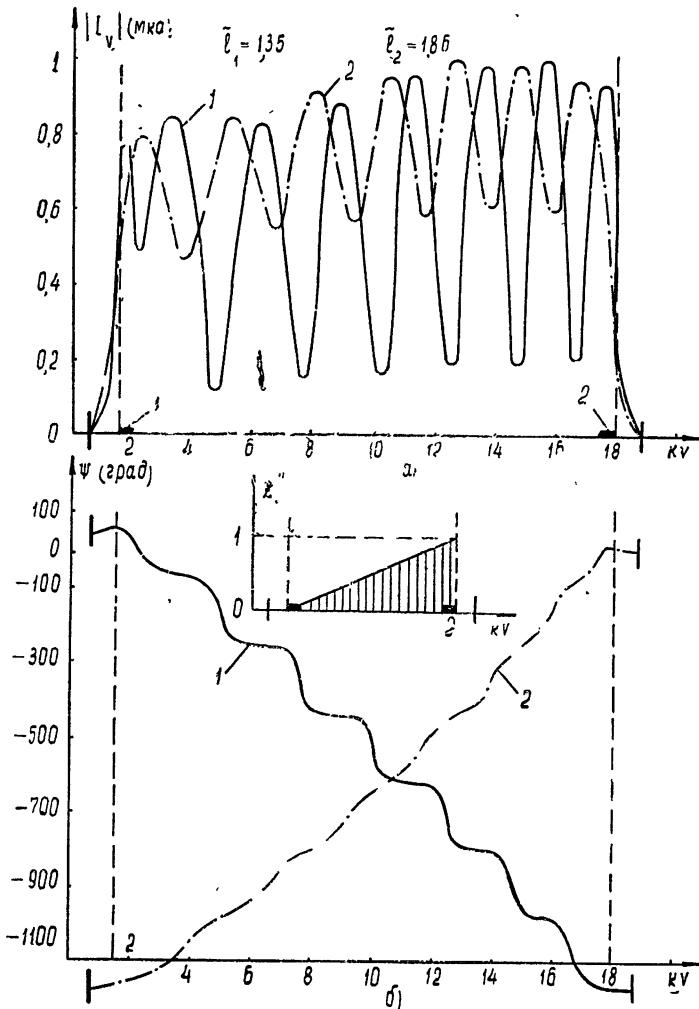


Рис. 3. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) нулевой гармоники электрического тока на цилиндре с индуктивным реактансом, меняющимся по линейному закону.

На рис. 4 показано распределение тока для следующего закона изменения импеданса: индуктивный реактанс вдоль образующей цилиндра постоянен, а на противоположном от щели конце цилиндра располагается согласующая насадка из поглощающего материала (для этого при расчете на конце задавался чисто активный импеданс, меняющийся по квадратичному закону). В результате уменьшения отражения от конца цилиндра получается волна тока, по виду близкая к падающей. Характерной является, во-первых, наглядная зависимость степени возбуждения поверхностной волны от величины индуктивного реактанса, и, во-вторых, из распределения фазы сразу же видно влияние величины индуктивного реактанса на скорость распространения волны тока вдоль цилиндра.

После определения распределения электрического и магнитного токов на теле легко может быть найдено поле излучения в любой точке

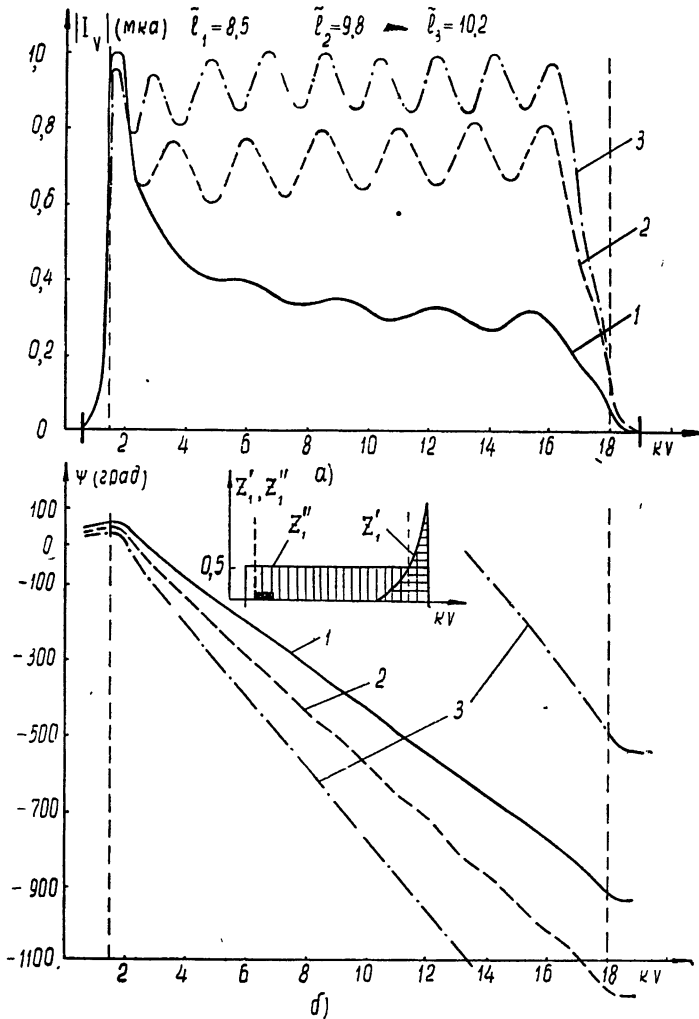


Рис. 4. Распределение нулевой гармоники электрического тока на идеально проводящем и импедансном цилиндрах с поглощающей насадкой на конце:

1 —  $Z_1'' = 0$ ; 2 —  $Z_1'' = 0.5$ ; 3 —  $Z_1'' = 1$ .

пространства. Полное поле будет равно сумме первичного и вторичного полей:

$$E = E_{\text{перв}} + E_{\text{втор}},$$

где  $E_{\text{перв}}$  — поле, создаваемое токами заданных сторонних источников (поле щели),  $E_{\text{втор}}$  — поле, создаваемое электрическими и магнитными токами, возбужденными на рассматриваемом теле.

В случае осесимметричного возбуждения волной ТМ поле в дальней зоне имеет только меридиональную составляющую, которая определяется по формуле

$$E_{\theta}(\vartheta) = - \int_0^{\vartheta} \{ W_0 J_0^2 [\cos \Theta \cos \vartheta J_1(R \sin \vartheta) -$$



$$\begin{aligned}
 & - i \sin \theta \sin \vartheta [J_0(R \sin \vartheta)] + J_{\varphi}^m J_1(R \sin \vartheta) \} \times \\
 & \times e^{iz \cos \vartheta} R d\vartheta + \int_{\vartheta} E_{\text{ср}}^{\text{ср}} J_1(R \sin \vartheta) e^{iz \cos \vartheta} R d\vartheta,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где  $J_0(R \sin \vartheta)$ ,  $J_1(R \sin \vartheta)$  — функции Бесселя.

Результаты расчета полного поля  $E_{\vartheta}(\vartheta)$  для цилиндра с линейно нарастающим (1) и линейно спадающим (2) импедансами представлены на рис. 5.

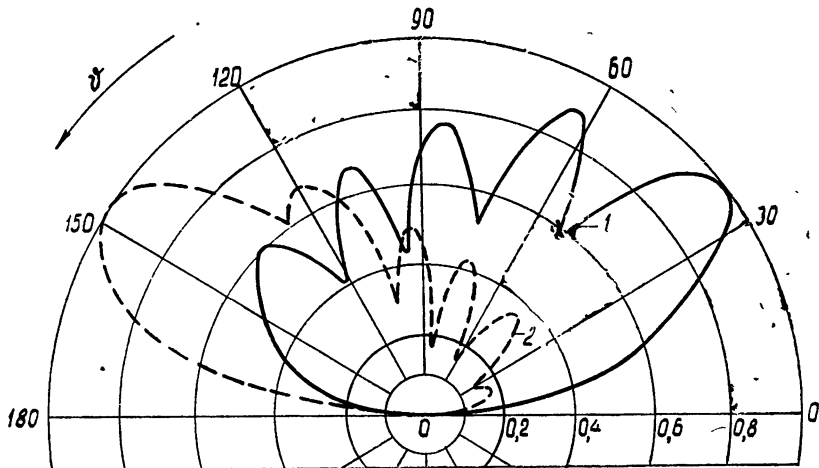


Рис. 5. Диаграммы направленности цилиндра с линейно нарастающим (1) и линейно спадающим (2) индуктивными реактансами.

Как уже отмечалось, в первом случае наведенный на цилиндре электрический ток по виду близок к стоячей волне, во втором — к бегущей. Соответствующий характер имеет и магнитный ток (он сдвинут по фазе относительно электрического на  $90^\circ$ , а по амплитуде равен электрическому, умноженному на линейную функцию импеданса). Поэтому для линейно нарастающего импеданса получается диаграмма направленности с большим уровнем боковых лепестков и значительным излучением в диапазоне углов  $90^\circ$ — $180^\circ$ . Для линейно спадающего индуктивного реактанса отражение от левого торца цилиндра не так велико и для диаграммы направленности характерно наличие существенного главного лепестка со сравнительно небольшим уровнем в диапазоне углов  $0^\circ$ — $90^\circ$ .

В заключение за руководство данной работой автор выражает благодарность Е. Н. Васильеву.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малушков, сб. Антенны, № 2, 117 (1967).
2. М. С. Жук, Ю. Б. Молочков, Проектирование антенно-фидерных устройств, изд. Энергия, М—Л, 1966
3. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалунин, ЖТФ, 37, 3, 431 (1967)
4. M. G. Andreassen, Proc. IEEE, 53, № 8, 812 (1965).
5. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М—Л, 1967.
6. Е. Н. Васильев, НДВШ. Радиотехника и электроника, 1, 1, 188 (1958).
7. Е. Н. Васильев, ЖВМФ, 5, № 5, 841 (1965).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М, 1963

9. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, ГИФМЛ, М., 1963.  
10. М. М. Лаврентьев, Матем. сб., новая серия, 34(76), 1, № 2, 259 (1954).

Московский энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
12 июня 1967 г.

## AXIAL-SYMMETRIC EXCITATION OF A CYLINDER WITH VARIABLE SURFACE IMPEDANCE

*G. D. Maloushkov*

The problem on axial-symmetric excitation of a finite cylinder with variable along the envelope surface impedance is solved using the integral equations of the first kind with different variation regions of the observation and integration points. The cylinder is excited by a transverse electric field slot with the zero variation along the azimuth coordinate of the external electric field. The procedure of obtaining the integral equation and the method of solving it as well as estimated formula are given. Calculation results on the current distribution on a cylinder with a band of inductive reactance, linear varying inductive reactance and square law active impedance are presented. Radiation patterns are shown for linearly increasing and linearly decreasing law of impedance variation.

---

УДК 621 385.64

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РОЛИ ФЛУКТУАЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В МЕХАНИЗМЕ ТОКОПРОХОЖДЕНИЯ В МАГНЕТРОННОМ ДИОДЕ В РЕЖИМЕ ОТСЕЧКИ***В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, С. В. Степанов*

Приведены результаты осциллографирования флуктуаций анодного тока и электрического поля магнетронного диода в режиме отсечки. Они подтверждают предположение о том, что ток в этом режиме обусловлен диффузионным движением электронов от катодов к аноду. Указанное движение осуществляется под действием наиболее интенсивных флуктуаций поля, энергия которых сосредоточена в узких полосах вблизи частот наиболее длинноволновых видов собственных колебаний электронного облака магнетрона, имеющих характер вращающихся волн.

В последние годы был опубликован ряд работ, в которых анодный ток магнетронного диода в режиме отсечки трактуется как результат диффузионного движения электронов [1-5]. В двух последних работах [4, 5] предполагалось, что причиной диффузионного движения электронов являются флуктуации электрического поля, энергия которых в основном сосредоточена вблизи частот наиболее длинноволновых видов собственных колебаний электронного облака типа вращающихся волн. При расчетах использовали экспериментальные данные об этих флуктуациях [6-8], из которых, в частности, следует, что подавляющая часть энергии флуктуаций связана с собственными колебаниями первых двух-трех номеров, частота которых обычно значительно меньше циклотронной. Учитывались экспериментальные данные об интенсивности флуктуаций

Указанные предположения существенно отличаются от исходных предпосылок, на которых основаны диффузионные теории токопрохождения в магнетронном диоде, развитые в работах [1-3]. В [3] предполагается, что спектральная плотность флуктуаций электрического поля равна нулю на частотах, меньших циклотронной, и постоянна на частотах, больших циклотронной (вплоть до частот порядка  $1/\tau_{эл}$ , где  $\tau_{эл}$  — время между последовательными близкими электронными соударениями). Это предположение о характере спектра полностью расходится с экспериментальными данными. Работа [1] основана на предположении, что пространственный заряд магнетрона представляет собой классический электронный газ, диффузионное движение которого обусловлено не флуктуациями электрического поля, а высокой температурой. В [2] механизм диффузионного движения не конкретизируется и сам автор отмечает, что введение им «среднего универсального коэффициента диффузии» обусловлено отсутствием «количественного описания преобладающих видов собственных колебаний или колебаний пространственного заряда». Эксперименты, которые описываются в настоящей работе, имели целью проверку правильности указанных выше исходных предположений работ [4, 5].

Если эти предположения являются справедливыми, то величина тока должна быть коррелирована с интенсивностью флуктуационных колебаний поля типа вращающейся волны того вида, для которого она имеет наибольшую величину. (Чаще всего наибольшую интенсивность

имеют те виды колебаний, при которых число волн  $n$  в междуэлектродном пространстве равно единице или двум.) В частности, анодный ток должен быть очень малым в те интервалы времени, когда амплитуда колебаний этого вида практически равна нулю. Именно такая закономерность была обнаружена нами путем сопоставления осциллограмм анодного тока магнетрона с осциллограммами огибающей напряженности флукуационного поля. Точнее, было обнаружено, что анодный ток пропорционален квадрату огибающей напряженности флукуационного электрического поля, обусловленного, в основном, колебаниями видов  $n=1$  и  $n=2$  со случайно меняющимися амплитудами и фазами.

Для получения указанных выше осциллограмм нами был изготовлен магнетронный диод специальной конструкции с радиусом анода  $r_a = 9$  мм и радиусом катода  $r_k = 3,15$  мм. Анод магнетрона выполнен в виде цилиндра с прорезанными по образующей двумя узкими щелями. В эти щели для наблюдения высокочастотных колебаний вставлены измерительные зонды, нагруженные на 75-омную коаксиальную линию. Схематический чертеж экспериментальной лампы приведен на рис. 1.

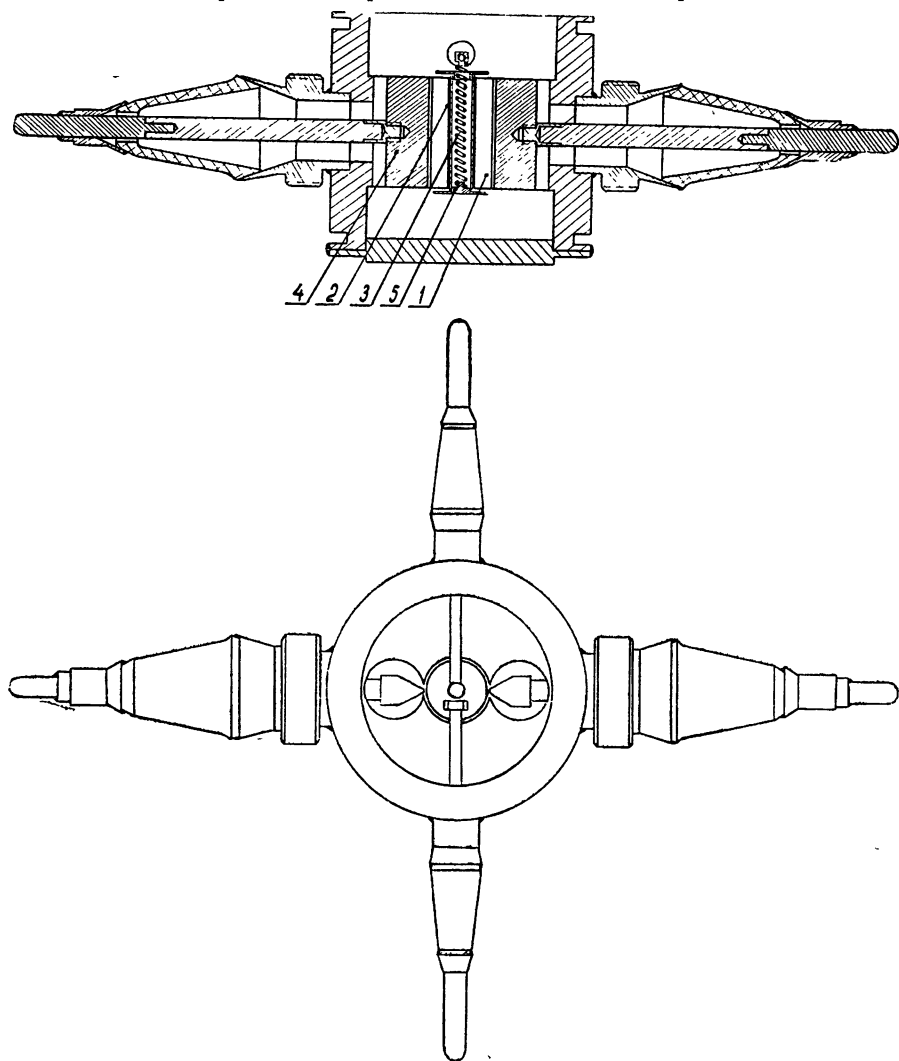


Рис. 1. Экспериментальная лампа:

1—анод, 2—оксидно-ториевый катод, 3—подогреватель, 4—зонд, 5—экранирующий диск

Сопоставление осциллограмм анодного тока экспериментального магнетрона, находящегося в режиме отсечки, и огибающей наведенного на измерительный зонд высокочастотного поля (см., например, [9]), было проведено с помощью измерительной установки, схема которой изображена на рис. 2. Одновременное осциллографирование анодного тока и огибающей высокочастотного тока, наведенного на зонд, проводилось на импульсном двухлучевом осциллографе ОК-17М. Для этого между

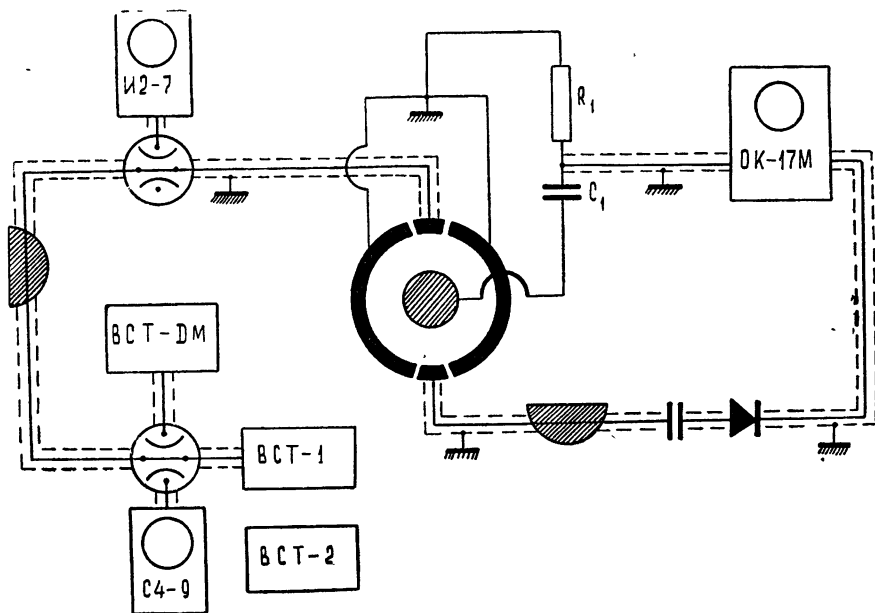


Рис. 2. Схема измерительной установки.

катодом и анодом магнетрона через емкость  $C_1$  включено сопротивление  $R_1$ , сигнал с которого подавался на один из усилителей двухлучевого осциллографа с полосой усиления  $10 \text{ Мгц}$ . На другой усилитель осциллографа ОК-17М с полосой  $4 \text{ Мгц}$  через квадратичный детектор был подан сигнал с одного из измерительных зондов экспериментального магнетрона, т. е. было подано напряжение, пропорциональное квадрату огибающей напряженности высокочастотного поля в магнетроне. Высокочастотный сигнал со второго зонда через коаксиальный переключатель мог быть передан или на быстродействующий осциллограф И2-7, или на анализатор спектра С4-9, или на один из резонансных волномеров средней точности (ВСТ-1, ВСТ-2, ВСТ-ДМ). Анализатор спектра С4-9 и волномеры служили в основном для обнаружения флуктуационного сигнала, определения его частоты и спектрального распределения. С помощью этих приборов было установлено, что флуктуации в исследуемом диоде и, в частности, зависимость спектра, времени корреляции, интенсивности от режима подчиняются закономерностям, подробно изученным в [5-8]. Поскольку в настоящей работе не ставилась задача сопоставления мощности флуктуаций и величины анодного тока (подобное сопоставление выполнено ранее в [9]), проводилась только оценка относительной величины средней интенсивности флуктуационных колебаний различных видов по спектральным измерениям. Осциллограммы сигналов, сфотографированные с экрана двухлучевого осциллографа, при напряжении  $U_a = 7,8 \text{ кв}$  и магнитном поле  $H = 1500 \text{ э}$  приведены на рис. 3.

На рис. 4 даны осциллограммы напряжения, наведенного на измерительный зонд, фотографии которых получены с экрана быстродействующего осциллографа И2-7. Как видно из рис. 4, флуктуации поля в магнетронном диоде имеют вид следующих друг за другом цугов вы-

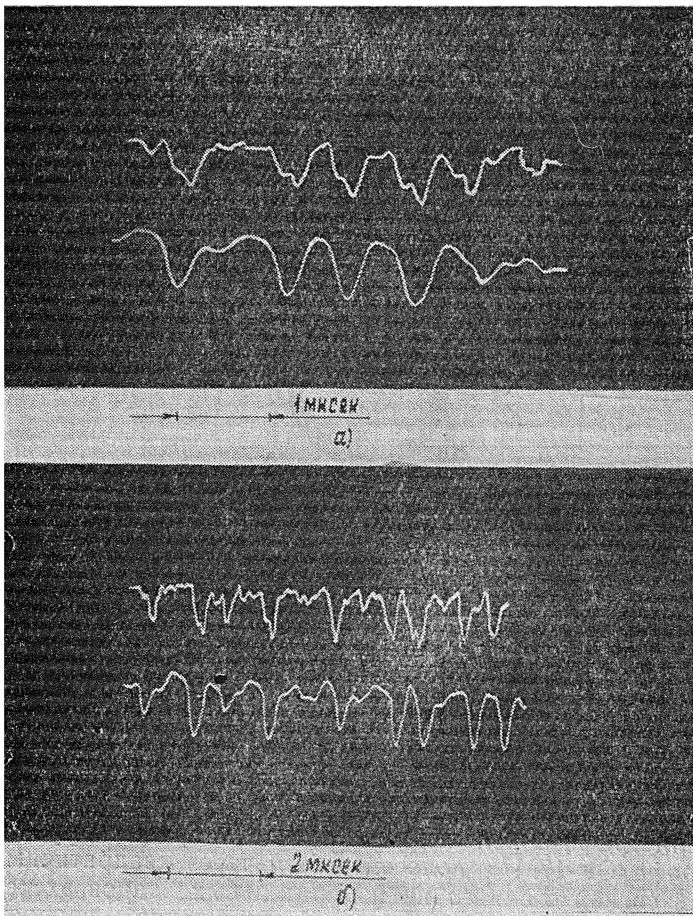


Рис. 3. Осциллограммы анодного тока (верхний луч) и тока с выхода детектора (нижний луч). Время развертки осциллограмм на рис. б (в два раза больше, чем на рис. а).

сокочастотных колебаний различной длительности. Наблюдение этих колебаний при однократной развертке луча длительностью 100—200 нсек показывают, что заполнение цугов почти гармоническое\*, т. е. флуктуации поля представляют собой почти гармонические колебания с амплитудой, медленно меняющейся случайным образом. Частота этих колебаний соответствовала чаще всего первому виду колебаний облака пространственного заряда. Но иногда можно было заметить сигнал вдвое большей частоты. Это согласуется с результатами работ [6, 7], утверждающих, что колебательные процессы в облаке пространственного заряда имеют многоволновый характер. Кроме того, в некоторые

\* К сожалению, качество фотографий, полученных при таких длительностях развертки, очень плохое, и они здесь не приведены.

интервалы времени колебательные процессы происходят сразу на нескольких частотах. В этом случае квазигармонический характер сигнала резко нарушается, а его огибающая претерпевает резкие скачки, что приводит к размытию огибающей флукуационного сигнала при сравнительно больших временах наблюдения (рис. 4б)\*.

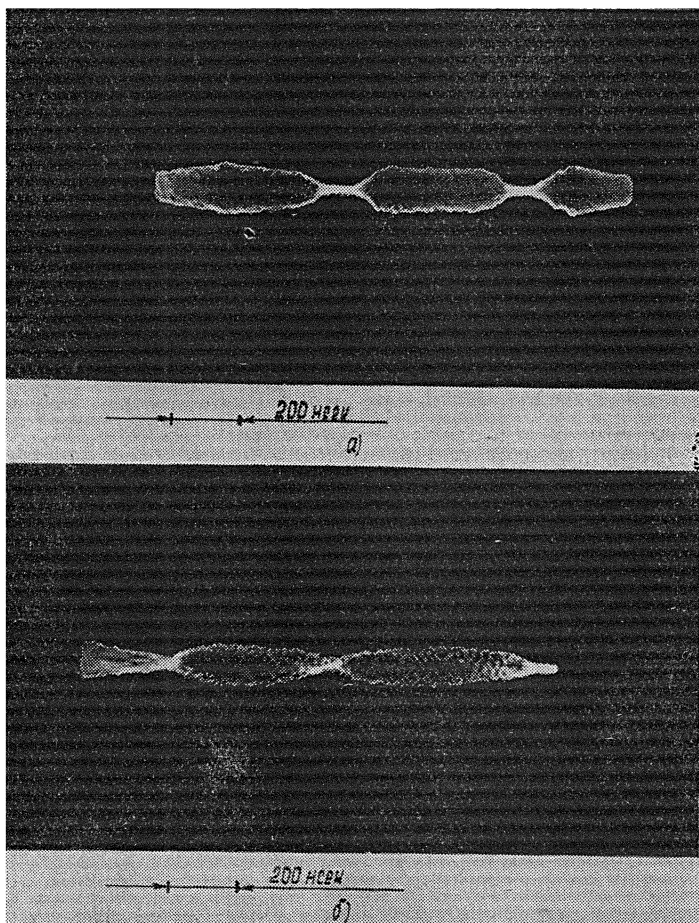


Рис. 4. Осциллограммы высокочастотного тока, наведенного на измерительный зонд.

Изучение осциллограмм с различными скоростями развертки позволило сопоставить среднюю продолжительность цуга (время корреляции флукуаций) и период его почти гармонического заполнения. В полном соответствии с выводами работ [6-8], сделанными на основании спектральных характеристик флукуаций в магнетронном диоде, длительность цуга оказалась равной 30—40 периодам, т. е. добротность соответствующего собственного колебания составляла несколько десятков.

\*\* Одновременное существование двух типов колебаний с различными номерами опровергает гипотезу авторов работы [10] о том, что шумы в магнетроне обусловлены только перескоками частоты.

Спектральные измерения, выполненные при помощи анализатора спектра С4-9, показали, что основная энергия флуктуаций была сосредоточена в узкой полосе частот ( $\Delta f \simeq 5 \text{ Мгц}$ ) в окрестности частоты  $f = 157 \text{ Мгц}$  ( $n = 1$ ). Энергия флуктуационных колебаний вида  $n = 2$  была примерно в четыре раза меньше, чем энергия колебаний, вида  $n = 1$ , а энергия остальных видов была ничтожно малой. Следовательно, как спектральные измерения, так и анализ осциллограмм показали, что время корреляции флуктуаций электрического поля примерно равно  $200 \text{ нсек}$  и, в полном соответствии с данными [6-8], составляет несколько десятков периодов самого длинноволнового вида колебаний  $n = 1$ . Таким образом, было получено дополнительное экспериментальное подтверждение правильности представлений о флуктуационном электрическом поле, которые использовались в работе [4, 5].

Но наиболее интересные на наш взгляд результаты следуют из сопоставления осциллограмм анодного тока (верхняя осциллограмма на рис. 3 а, б) с огибающей высокочастотного сигнала с выхода квадратичного детектора (нижняя осциллограмма на рис. 3 а, б) при разовом запуске двухлучевого осциллографа. Эти осциллограммы практически повторяют друг друга. Незначительное отличие, по-видимому, вызвано тем, что полосы пропускания усилителей осциллографа ОК-17М составляют соответственно 10 и 4 Мгц.

Осциллограммы были дополнены нулевыми уровнями токов и напряжений, измеренными стрелочными приборами. Одна из таких осциллограмм приведена на рис. 5. Оказалось, что минимумы анодного тока и квадрата огибающей высокочастотного тока, наведенного на измерительном зонде, на осциллограммах соответствуют практически нулевым значениям этих величин. Таким образом, анодный ток магнетрона в режиме отсечки пропорционален квадрату огибающей напряженности флуктуационного поля. Последнее, как уже было отмечено выше, представляет собой последовательность цугов почти гармонических собственных колебаний пространственного заряда вида  $n = 1$  (иногда  $n = 2$  или одновременно  $n = 1$  и  $n = 2$ ). Следовательно, анодный ток магнетрона действительно обусловлен собственными колебаниями пространственного заряда низших номеров, амплитуда и фаза которых случайным образом изменяется. Это особенно убедительно подтверждается тем обстоятельством, что анодный ток практически отсутствует в те интервалы времени, когда флуктуационное поле очень мало. Наличие таких интервалов времени отчетливо видно на рис. 4.

Выше уже было отмечено, что время корреляции флуктуаций оказалось порядка нескольких десятков периодов собственных колебаний пространственного заряда вида  $n = 1$ . Частота этих колебаний была равна  $157 \text{ Мгц}$ , а время корреляции, как видно на рис. 3—5—порядка  $0,2 \text{ мксек}$ . Как показывает рис. 5, такую же величину имеет и время корреляции флуктуаций анодного тока. Этот факт совершенно не может быть объяснен на основании [3], так как, согласно принятым там предположениям о спектре флуктуаций поля, время корреляции должно быть значительно меньше  $2 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$ —периода циклотронных колебаний.

Таким образом, результаты настоящей работы, как и данные работ [6-8], свидетельствуют о несостоятельности исходных положений [3] и подтверждают правильность предположений, принятых в [4, 5].

В заключение необходимо отметить, что на первый взгляд пропорциональность анодного тока квадрату огибающей напряженности флуктуационного поля противоречит представлению о диффузионном характере анодного тока. Действительно, при диффузии электронов, обусловленной высокочастотным полем, коэффициент диффузии элект-



ронов должен быть пропорциональным квадрату напряженности электрического поля, усредненному за время, существенно превосходящее время корреляции флуктуаций. Иными словами, анодный ток не должен, казалось бы, воспроизводить детали ошибающей флуктуационного поля, характерное время существования которых меньше, чем время

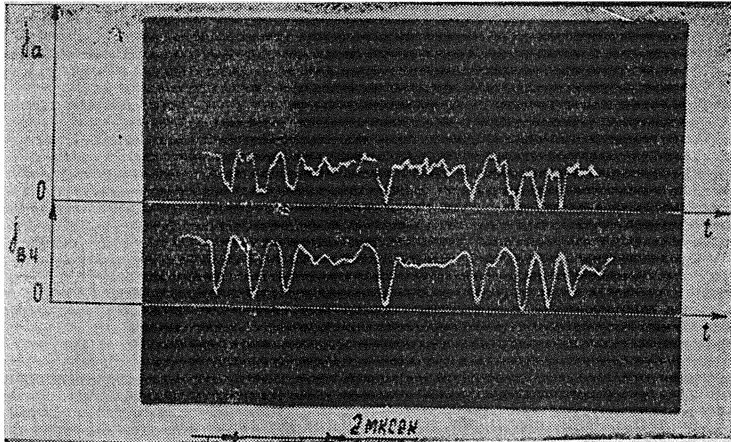


Рис. 5. Оциллограммы анодного тока  $j_a$  (верхний луч) и тока с выхода детектора  $j_{вч}$  (нижний луч), дополненные нулевыми уровнями.

корреляции. Но из рис. 5 следует, что такое воспроизведение имеет место. Это кажущееся противоречие может быть объяснено на основании результатов работ [4, 5]. Согласно [4, 5], плотность пространственного заряда в ближайшей окрестности анода пропорциональна расстоянию от точки наблюдения до плоскости, расположенной на расстоянии  $\Delta$  от анода. Это расстояние равно среднему радиусу вращения электронов, т. е.

$$\rho(y) = \begin{cases} A(y - \Delta) & (y > \Delta) \\ 0 & (y \leq \Delta) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $y$  — расстояние точки наблюдения от анода,  $A$  — постоянный коэффициент, определяемый геометрией и режимом работы магнетронного диода. Очевидно, что за половину периода колебаний электрического поля на анод в силу флуктуационного характера этих колебаний попадает половина электронов, центры орбит которых в начале данного полупериода расположены от плоскости  $\Delta$  не далее, чем на расстоянии  $\delta = \pi E_{\sim} / \omega B$ , где  $E_{\sim}$  — амплитуда тангенциальной составляющей флуктуационного поля, усредненного за время, равное половине периода колебаний,  $B$  — индукция внешнего магнитного поля,  $\omega$  — средняя частота колебательного процесса. Следовательно, за время, равное половине периода колебаний, на единицу поверхности анода попадает заряд

$$\Delta q = \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\Delta + \delta} \rho(y) dy = \frac{A}{4} \frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{E_{\sim}^2}{B^2}, \quad (2)$$

а величина плотности тока, текущего на анод,

$$j = \frac{\pi A}{4\omega B^2} E_{\sim}^2. \quad (3)$$

Следовательно, согласно [4, 5], значение плотности анодного тока, усредненного за время, большее или равное половине периода колебаний, должно быть пропорционально квадрату амплитуды флуктуационного электрического поля, усредненного за то же время. Таким образом, совпадение осциллограмм анодного тока и квадрата огибающей флуктуационного поля с точностью до деталей, характерное время которых значительно меньше времени корреляции, является дополнительным подтверждением адекватности диффузионного характера прохождения тока через магнетронный диод в режиме отсечки\*.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Э. Паргаманик, М. Я. Минц, ЖТФ, 27, 1301 (1957).
2. Г. Хок, сб. Электронные СВЧ приборы со скрещенными полями, I, ИЛ, М, 1959, стр. 204.
3. K. Mouthaan, C. Süskind, J. Appl. Phys., 37, № 7, 1598 (1966).
4. Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 998 (1966).
5. М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1165 (1967).
6. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 1, 1102 (1960).
7. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 290 (1960).
8. М. И. Кузнецов, Ю. А. Яблоков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 634 (1966).
9. Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, С. В. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 763 (1968).
10. K. I. Thomassen, D. A. Dunn, Proceeding of the IEEE, 53, № 2, 203 (1965).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 июня 1967 г.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ELECTRIC FIELD FLUCTUATIONS IN A CURRENT PASSAGE MECHANISM IN MAGNETRON DIODE IN A CUTOFF REGIME

V. A. Berbasov, M. I. Kouznetsov, S. V. Stepanov

The results of oscilloreording fluctuations of the anode current and the electric field of the magnetron diode in the cutoff regime are given. They confirm the assumption that the current in this regime is associated with diffusion of electrons from cathode to anode. The diffusion motion is realized under the action of the more intensive field fluctuations the energy of which is concentrated in the narrow bands near the frequencies of the longest modes of an electron cloud of the magnetron having the character of rotating waves.

\* По-видимому, пропорциональность анодного тока квадрату напряженности высокочастотного поля, усредненного за время, значительно меньше времени корреляций, может быть получена из любой диффузионной теории, построенной при тех же исходных предположениях, как в работах [4, 5].

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164.32 : 523.164.34

### СРАВНЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА И ЛУНЫ В ИНТЕРВАЛЕ ДЛИН ВОЛН 3,6 — 4 мм

А. Г. Кисляков, Э. П. Кукина

Радиоизлучение Луны исследовано в широком диапазоне от миллиметровых до дециметровых волн. Интенсивность интегрального излучения лунного диска на этих волнах известна с точностью не менее 5% [1]. Сравнение интенсивностей радиоизлучения Солнца и Луны дает возможность определения яркостной температуры Солнца практически с такой же точностью. Точные измерения интенсивности солнечного радиоизлучения представляют интерес в аспекте исследования его медленных вариаций.

Измерения интенсивностей радиоизлучения Солнца и Луны в интервале волн 3,6 — 4 мм производились летом и зимой 1966 г на высокогорной астрофизической обсерватории Государственного астрономического института им П. И. Штернберга. Для наблюдений использовался радиотелескоп с параболической антенной диаметром 600 мм и модуляционным детекторным радиометром. Частотная характеристика радиометра определялась с помощью интерферометра [2]. Антенна и радиометр были смонтированы на азимутально-вертикальной установке, обеспечивавшей точность ориентации антенны  $\pm 2'$ . Ширина диаграммы направленности антенны по точкам половинной мощности составляла  $31'$ .

Сравнение интенсивностей радиоизлучения Солнца и Луны производилось только при условии их оптической видимости и при достаточно близких зенитных расстояниях этих объектов. Последнее условие весьма существенно, так как в этом случае поглощение, вносимое атмосферой Земли, для Луны и Солнца почти одинаково. Небольшая разница в поглощениях, связанная с разницей зенитных расстояний, учитывалась; при этом использовались экспериментальные данные о поглощении радиоволн атмосферой Земли, полученные на том же радиотелескопе. Атмосферное поглощение измерялось по ее собственному радиоизлучению. Использовавшаяся методика измерений описана в [2]. В результате измерений получено, что полное вертикальное поглощение в атмосфере описывается формулой  $\Gamma_h = 0,148 + 0,0067 \rho$ , где  $\rho$  — абсолютная влажность в приземном слое воздуха в  $г \cdot м^{-3}$ . Точность этой формулы  $\pm 15\%$ . Данные измерений атмосферного поглощения, полученные в настоящей работе, находятся в удовлетворительном согласии с результатами работы [3]. Ошибка, допускавшаяся при сравнении интенсивностей радиоизлучения Луны и Солнца из-за негочностей в определении атмосферного поглощения, не превышала 0,5 — 1%.

Процедура измерений заключалась в том, что антенна радиотелескопа несколько раз подряд наводилась на Луну и соседнюю область неба. Затем то же самое делалось с Солнцем. Обработка полученных записей производилась по известным формулам [4]. Для каждого дня наблюдений вычислялось среднее отношение усредненных по диаграмме направленности антенны яркостных температур Луны  $T_L$  и Солнца  $T_S$ . При этом принималась во внимание разница угловых размеров этих объектов. Результаты всех измерений приведены в таблице. Там же указаны яркостные температуры солнечного диска, вычисленные в предположении, что [5]

$$T_L = [204 + 56 \cos(\Phi - 23^\circ)]^\circ K, \quad (1)$$

где  $\Phi$  — фазовый угол Луны.

Данные об интенсивности радиоизлучения Солнца в интервале волн 3,6 — 4 мм сопоставлялись с результатами наблюдений радиоизлучения Солнца на волнах 2 и 5 см [6]. Иллюстрацией этого сравнения может служить график на рис. 1.

Из этого графика видно, что между данными о радиоизлучении Солнца в интервале длин волн 3,6 — 4 мм и на сантиметровых волнах имеется некоторая корреляция. Наиболее четко она проявляется на волнах 5 см и 3,6 — 4 мм. Следует отметить, что полученные изменения интенсивности радиоизлучения Солнца в миллиметровом диапазоне волн связаны также и с ошибками измерений (величина среднеквадратичной

ошибки составляет около  $\pm 5\%$  \*. Этим, по-видимому, можно объяснить существенно большие вариации  $T_C$  на миллиметровых волнах по сравнению с наблюдавшимися в то же время вариациями  $T_C$  в сантиметровом диапазоне. Как показывают оценки, флуктуации атмосферного поглощения за время между отдельными измерениями радиоизлучения Солнца и Луны, а также существование горизонтальных градиентов атмосферного поглощения не могут быть причиной ошибок, величина которых была бы сравнима с наблюдавшимися вариациями поглощений  $T_C/T_L$ .

Таблица 1

Дата	$T_C/T_L$	$\Phi_L$ (град)	$T_C$ (°K)
15.05.66	31,4	118	6260
16.05.66	35,8	131	6680
23.05.66	50,4	214	7500
25.05.66	53	218	7950
27.05.66	41	264	7250
30.05.66	24,4	312	5760
10.06.66	32,2	78	7600
12.06.66	40	100	8700
14.06.66	40,7	121	7970
15.06.66	44	134	8100
16.06.66	47,5	148	8170
19.11.66	30	262	5250
21.11.66	26	264	4600
1.12.66	24,6	38	6350
2.12.66	27,3	50	6930
3.12.66	28,1	63	6950

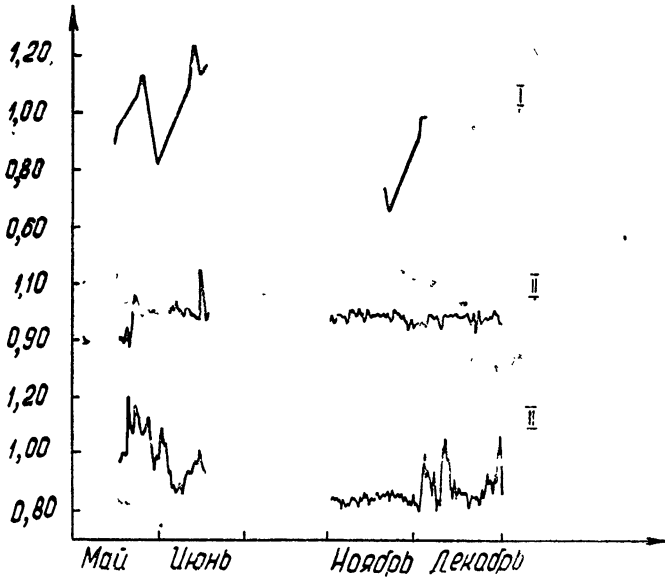


Рис. 1. Относительные интенсивности радиоизлучения Солнца на волнах 3,64 мм (I), 2 см (II), 5 см (III)\*\*.

На всех трех волнах можно заметить уменьшение средней интенсивности радиоизлучения Солнца за период от лета к зиме 1966 г. Наибольшей величины это уменьшение достигает на волнах 5 см и 3,6—4 мм (около 20%). За период с мая по декабрь 1967 г. суммарная площадь кальциевых флоккул на Солнце уменьшилась примерно втрое [6]. Как известно [7], кальциевые флоккулы обычно дают повышенное радиоизлучение на миллиметровых волнах. Поскольку миллиметровое радиоизлучение

\* Эта ошибка определяется неточностью формулы (1) ( $\pm 4\%$ ) и ошибкой в определении атмосферного поглощения ( $\pm 1\%$ ).

\*\* Нижний ряд рис 1 относится к 5 см.

исходит из более глубоких слоев солнечной атмосферы, чем сантиметровое, то на миллиметровых волнах следует ожидать более сильной корреляции с оптическими явлениями, чем на сантиметровых. Недостаточное количество измерений интенсивности радиоизлучения Солнца на миллиметровых волнах не позволяет провести подробное сравнение изменений яркостной температуры Солнца на миллиметровых и сантиметровых волнах, а также сопоставление полученных данных с оптическими деталями на диске.

Средняя за период наблюдений яркостная температура Солнца составляет  $\bar{T}_C = 7000 \pm 350^\circ\text{K}$ . Этот результат находится в согласии с данными работы [5], где получено, что  $\bar{T}_C = 7200 \pm 200^\circ\text{K}$  (на волне 4,1 мм).

Для получения более полных сведений о медленных изменениях яркостной температуры Солнца на миллиметровых волнах необходимы дальнейшие регулярные наблюдения. Наибольшая точность абсолютных измерений интенсивности может быть достигнута при использовании известного метода сравнения исследуемого излучения с излучением эталонного диска [4].

Авторы пользуются случаем выразить свою признательность А. И. Наумову, В. Н. Воронову и Н. Н. Орлову за помощь в наладке аппаратуры и участие в наблюдениях, а также Л. В. Лубяко за выполненные им исследования частотной характеристики детектора на интерферометре.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, № 4, 489 (1963)
2. А. Г. Кисляков, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1161 (1968)
3. А. Г. Кисляков, В. Н. Никонов, К. М. Стрельнева, Физика атмосферы и океана, 13, № 3, 321 (1968).
4. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 393 (1961).
5. А. Г. Кисляков, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 1, 46 (1964).
6. Солнечные данные, бюлл. №№ 5, 6, 11, 12 (1966).
7. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 39, № 2, 260 (1962).
8. Л. В. Лубяко, ПТЭ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 сентября 1967 г.

УДК 621.371.3

### О ВОЗМОЖНОСТИ САМОФОКУСИРОВКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

А. Г. Литвак

Явление самофокусировки волн [1] привлекает все большее внимание исследователей. Интерес к этому явлению обусловлен, в первую очередь, потребностями нелинейной оптики, в которой было экспериментально обнаружено, что эффекты самофокусировки оказывают заметное влияние на различные нелинейные эффекты, сопровождающие распространение интенсивного светового пучка в нелинейной среде. Известно, что в плазме в широком диапазоне частот достижимы напряженности поля, при которых становятся существенными нелинейные эффекты. Это позволяет надеяться на осуществление в ней самофокусировки электромагнитных волн. Цель настоящего сообщения — проиллюстрировать возможность самофокусировки радиоволн в ионосфере. Для простоты оценок ограничимся диапазоном частот  $\omega \gg \omega_{He}$  ( $\omega_{He}$  — гирочастота электронов), для которого ионосферу можно считать изотропной слабо поглощающей ( $\omega \gg \nu_{em}$ ) средой.

В плазме, находящейся в неоднородном электромагнитном поле, происходит перераспределение концентрации заряженных частиц (вытеснение из области максимума поля), обусловленное как нагревом плазмы полем, так и пондеромоторным взаимодействием. Возникающая электрическая неоднородность среды вызывает рефракцию лучей в область сильного поля. В частности, оказывается возможным образование однородного (вдоль направления распространения), волноводного канала, в котором дифракционная расходимость лучей скомпенсирована их рефракцией [1].

В типичных для распространения волн в ионосфере условиях выполняется соотношение  $L_E \gg l/\sqrt{\delta}$ ,  $L_E$  — характерный размер неоднородности поля,  $l$  — длина свободного пробега электрона,  $\delta$  — средняя доля энергии, теряемая электроном при одном соударении с молекулой. При этом тепловые нелинейные эффекты оказываются сильнее стрикционных, а электронная концентрация в стационарном состоянии является локальной функцией амплитуды поля [2]  $N = N_0 (1 - |E|^2/E_p^2)$  (здесь  $E_p^2 = 6 T m \omega^2 \delta/e^2$ ,  $T$  — температура,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона), т. е. диэлектрическая проницаемость плазмы может быть представлена в стандартном для кубичной нелинейной среды виде  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' |E|^2$ ,  $\epsilon' = \omega_p^2/\omega^2 E_p^2$ ,  $\omega_p^2$  — плазменная частота, и для описания самофокусировки можно воспользоваться результатами работ [3, 4].

Стационарное распределение концентрации в поле устанавливается крайне медленно — за время амбиполярной диффузии ионов  $\tau_N = \frac{L_E^2 \nu_{im} M}{2T}$ ,  $\nu_{im}$  — частота ион-молекулярных соударений,  $M$  — масса иона. Это обстоятельство является наиболее сильным ограничением возможностей осуществления самофокусировки в ионосфере, так как характерные размеры неоднородности поля в ионосфере даже при самых благоприятных условиях весьма велики (порядка сотни метров). В частности, на высотах  $h < 100$  км по этой причине электронную концентрацию можно считать невозмущенной.

В первую очередь оценим амплитуды электрических полей, которые можно получить в ионосфере с помощью мощных наземных направленных излучателей электромагнитных волн. В приближении геометрической оптики  $E^2(h) = \langle PG \rangle / h^2 n(h) c$ , где  $P$  — средняя мощность передатчика,  $h$  — высота над антенной (в случае вертикального зондирования),  $n$  — показатель преломления,  $G = 4\pi S/\lambda^2$  — коэффициент направленного действия антенны,  $S$  — ее действующая площадь,  $c$  — скорость света. Отсюда получаем, что отношение  $E^2/E_p^2$  зависит от частоты лишь через показатель преломления\*.

$$E^2/E_p^2 \approx 0,8 \cdot 10^{-7} \frac{P(\text{вт}) S (\text{м}^2)}{h^2(\text{км}) T^\circ \delta n}$$

Например, на высотах  $h \approx 100$  км ( $T = 300^\circ\text{K}$ ,  $\delta = 10^{-3}$ ,  $N_e \approx 10^5 \text{ см}^{-3}$ ) отношение  $E^2/E_p^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-10} P(\text{вт}) S (\text{м}^2)$ , и для передатчиков типа тех, которые используются в установках некогерентного расстояния [5] ( $P \approx 10^6 \text{ вт}$ ,  $S \approx (10^4 \div 10^5) \text{ м}^2$ )  $E^2/E_p^2 \geq 1$ .

Самосогласованные эффекты самофокусировки оказываются существенными в значительно менее сильных полях, так как в плазме со слабым поглощением имеется возможность накопления нелинейных эффектов на больших длинах  $L \gg \lambda$ . Например, мощность, необходимая для образования однородного самоподдерживающегося волнового канала в плазме, равна\*\*.

$$P_{\text{одн}} = \frac{5,76 c^3 n E_p^2}{4 \pi \omega_p^2} \approx 6 \cdot 10^{-8} \frac{f^2 \delta T^\circ n}{N_e} (\text{вт})$$

и для  $h = 100$  км,  $f = 10^8 \text{ сек}^{-1}$   $P_{\text{одн}} = 2 \cdot 10^3 \text{ вт}$ . Если пучок имеет мощность  $P > P_{\text{одн}}$ , самодействие приводит к его «схлопыванию» (сужение пучка) Это справедливо, если геометрическая расходимость пучка равна нулю, на входе же в ионосферу геометрическая расходимость электромагнитного пучка обычно весьма велика\*\*\*. Оценки показывают, что для самофокусировки таких пучков как единого целого необходимы чрезвычайно большие мощности, при которых нарушается приближение слабой нелинейности.

Если интенсивный пучок достаточно широк, он оказывается неустойчивым относительно малых возмущений его пространственной структуры [3]. Развитие этой неустойчивости приводит к развалу электромагнитного пучка на набор более узких пучков с мощностью порядка  $P_{\text{одн}}$  и шириной  $\Delta_\perp$ , зависящей от плотности мощности исходного пучка. Поскольку, в принципе, в ионосфере существуют возмущения любых мас-

\* Это отношение заметно возрастает с приближением к точке отражения волны  $n(h) = 0$ . Поэтому учет влияния нелинейности на отражение электромагнитных волн в ионосфере в ряде случаев оказывается существенным даже для волн сравнительно небольшой мощности.

\*\* В лабораторной плазме зачастую нелинейные ponderomotory эффекты сильнее тепловых ( $l \gg L_E$ ). Тогда  $P_{\text{одн}} \approx 8 \cdot 10^{-8} f^2 T^\circ n/N_e (\text{вт})$  и при  $f = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ,  $N_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 300^\circ\text{K}$   $P_{\text{одн}} = 2 \cdot 10^4 \text{ вт}$ .

\*\*\* Исключение составляет случай, когда исходная расходимость пучка устраняется при его распространении в неоднородной ионосфере. В частности, эффекты самофокусировки могут оказать существенное влияние на поведение пучка вблизи каустики.

штабов, оценим характерный размер  $\Delta_{\perp}$  и инкремент  $\Gamma$  наиболее быстро растущего возмущения\*:

$$\Delta_{\perp} = \lambda/2 \left( \frac{\omega_p}{\omega} \frac{E}{E_p} \right)^{-1}, \quad \Gamma = k \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E^2}{E_p^2}$$

$E$  — амплитуда поля в пучке. Например, при довольно скромных значениях параметров передатчика  $f = 2 \cdot 10^7$  сек $^{-1}$ ,  $S = 10^4$  м $^2$ ,  $P = 10^4$  вт, что соответствует мощности эквивалентного изотропного излучателя  $P_{\text{эkv}} = \langle PG \rangle = 3 \cdot 10^6$  вт; характерный размер образующихся узких пучков  $\Delta_{\perp} = 600$  м; расстояние, на котором развивается неустойчивость  $\Delta_{\parallel} = 1/\Gamma \approx 20$  км, а характерное время установления  $\tau_N \approx 10^3$  сек. Для более мощного излучателя с  $f = 5 \cdot 10^8$  сек $^{-1}$ ,  $S = 10^5$  м $^2$ ,  $P = 10^5$  вт, что соответствует  $P_{\text{эkv}} = 3 \cdot 10^{11}$  вт,  $\Delta_{\perp} \approx 50$  м,  $\Delta_{\parallel} \approx 6$  км,  $\tau_N \approx 10$  сек. При дальнейшем распространении происходит самофокусировка возникающих пучков, сопровождающаяся образованием в ионосфере областей с пониженной электронной концентрацией\*\*.

Приведенные оценки свидетельствуют о возможности осуществления самофокусировки радиоволн в ионосфере при использовании мощных передатчиков, работающих в непрерывном режиме\*\*\* Экспериментальное и теоретическое исследование этого явления представляет несомненный интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962); В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 564 (1964); R. Y. Chia o, E. Garmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett, 13, 479 (1964).
- 2 D. T. Farley, Jr., J. Geophys. Res., 68, 401 (1963); А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронаомия, 5, 70 (1965).
- 3 В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 2, 218 (1965). В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 47 (1966); А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 539 (1967)
- 4 В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Самовоздействие электромагнитных волн в кубичных изотропных средах Тр. II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике Новосибирск, 1966
- 5 Некогерентное рассеяние радиоволн, сб переводов, Мир, М., 1965
- 6 А. Г. Литвак, Письма в ЖЭТФ, 4, 341 (1966); А. Г. Литвак, Доклад на 8 Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Вена, 1967, А. Г. Литвак, Диссертация, Горький, 1967.
- 7 А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронаомия, 7, 291 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 января 1968 г.

УДК 621.371.166

#### ПОГЛОЩЕНИЕ В АТМОСФЕРЕ РАДИОВОЛН В ДИАПАЗОНЕ 1,8—2,7 см

В. М. Плечков

Для выяснения количественной стороны вопроса о поглощении радиоволн в атмосфере становится существенным измерение атмосферного поглощения в возможно более широком диапазоне волн. В связи с этим в июле-сентябре 1965 г. на полигоне НИРФИ были проведены измерения полного вертикального поглощения радиоволн в атмосфере

\* Приведенные выражения справедливы, если  $\Delta_{\perp} \gg l/\sqrt{\delta}$ , что выполняется при умеренных мощностях излучателя:  $P$  (вт)  $S$  (м $^2$ )  $\ll 5 \cdot 10^{10}$ . Если  $\Delta_{\perp} \approx l/\sqrt{\delta}$ , необходимо учитывать пространственную дисперсию нелинейности, обусловленную нелокальностью нагрева. Соответствующее рассмотрение проведено в [6].

\*\* Возможность «пробивания» ионосферы с помощью мощных радиоволн оценивалась Фарлеем [2], А. В. Гуревичем [7] и Г. Г. Гетманцевым и Н. А. Митяковым. Учет накапливающихся эффектов самофокусировки волн приводит к существенному смягчению оценок.

\*\*\* Можно также использовать импульсные излучатели, у которых период следования импульсов мал по сравнению с временем релаксации температуры.

на волнах 1,8; 2; 2,5; 2,7 см. Для этой цели использовался радиотелескоп с радиометром модуляционного типа [1] и параболической антенной диаметром 1,5 м. Диаграмма направленности на уровне  $3 \text{ дБ}$  по мощности соответственно равна  $60^\circ$ ;  $65^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $80^\circ$ . Флуктуационный порог чувствительности при постоянной времени наблюдений  $3 \text{ сек}$  в указанном диапазоне составлял  $1,5\text{--}2$  градуса.

Измерения полного вертикального поглощения выполнялись по методике, аналогичной описанной в работах [2, 3]. Она состояла в том, что в отсутствие облачности записывались уровни теплового радиоизлучения атмосферы под разными углами  $h_1$ ,  $h_2$  над горизонтом, а также уровень излучения поверхности Земли. Соответствующие отклонения на регистрирующем приборе обозначим  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_0$ . В данном эксперименте углы  $h_1$  менялись от  $60$  до  $7^\circ$ . Обработка измерений проводилась по формуле, полученной, в частности, в [4] для плоско-слоистой атмосферы со стандартным градиентом температуры по высоте:

$$\tau = \frac{\ln [(n_0 - n_1)/(n_0 - n_2)]}{\operatorname{cosec} h_2 - \operatorname{cosec} h_1} + \xi,$$

$$\tau = \tau_{\text{O}_2} + \tau_{\text{H}_2\text{O}},$$

$\tau_{\text{O}_2}$  и  $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$  — вертикальные поглощения радиоволн в кислороде и парах воды,

$$\xi = \frac{\ln \{ [T_0 + \Delta T_1(\psi_2) + \Delta T_2(\psi_2)] / [T_0 + \Delta T_1(\psi_1) + \Delta T_2(\psi_1)] \}}{\operatorname{cosec} h_2 - \operatorname{cosec} h_1},$$

$$\psi_{1,2} = \tau \operatorname{cosec} h_{1,2}.$$

$T_0$  — температура опорной области (Земли) в  $^\circ\text{K}$ ,  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  — учитываемые при известной  $T_0$  поправки на неізотермичность атмосферы и неізотропность рассеяния антенны вне ее главного лепестка [3, 4].

Поправки на неізотермичность в нашем случае составляли  $+1\%$ , а на неізотропность —  $\pm 3\%$ . Одновременно со снятием «разрезов» атмосферы проводилась регистрация у поверхности Земли абсолютной влажности  $\rho_0$  ( $\text{г}\cdot\text{м}^{-3}$ ), температуры,  $T_0$  и давления  $P_0$ . Как показали оценки, небольшие изменения температуры и давления за период измерений дают неопределенность в нахождении  $\tau$  не более чем  $\pm 3\%$ . Общая среднеквадратичная ошибка в определении  $\tau$  составляет  $\pm 12\%$ . Для каждой из волн было получено не менее 50 «разрезов» атмосферы при изменении абсолютной влажности от 2 до 15 ( $\text{г}\cdot\text{м}^{-3}$ ). Это позволило известным способом [4] выделить вертикальное поглощение в кислороде и найти коэффициент затухания на единицу влагосодержания, т. е. величину

$$a = \tau_{\text{H}_2\text{O}} / \rho_0 H_{\text{H}_2\text{O}} \quad (\text{дБ}\cdot\text{м}^3\cdot\text{к}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{г}^{-1}).$$

Характерная зависимость  $\tau = \tau(\rho_0)$  для  $\lambda = 2,7 \text{ см}$  приведена на рис. 1.

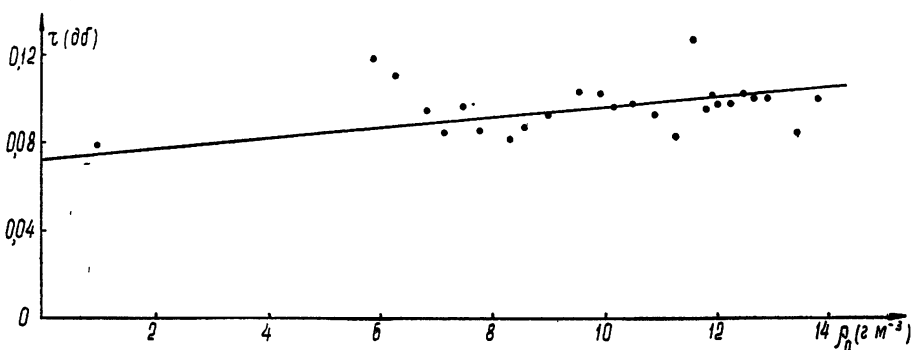


Рис. 1. Зависимость  $\tau$  от абсолютной влажности у поверхности Земли,  $\rho$  — среднее значение из 5—10 замеров в интервале влажности  $0,5$  ( $\text{г}\cdot\text{м}^{-3}$ ).

Если принять, что характеристические высоты равны для кислорода  $5,1 \text{ км}$ , а для паров воды —  $1,5 \text{ км}$  [5, 6], то получим значения коэффициентов поглощения в кислороде  $\gamma_{\text{O}_2}$  ( $\text{дБ}\cdot\text{к}\cdot\text{м}^{-1}$ ) и парах воды  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$  ( $\text{дБ}\cdot\text{к}\cdot\text{м}^{-1}$ ), отнесенные к нормальным

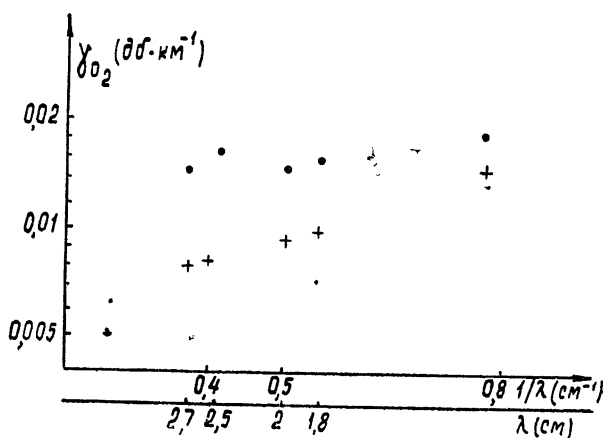


условиям  $\rho_0 = 7,5$  ( $г \cdot м^{-3}$ ),  $P_0 = 760$  ( $мм$  рт. ст.),  $T = 293$  ( $^{\circ}K$ ), которые приведены в табл. 1. В таблице приведены также для сравнения значения  $\gamma_{O_2}$  и  $\gamma_{H_2O}$ , полученные в работе [7] по той же методике для  $\lambda = 1,3$   $см$ . На рис. 2 и 3 даны зависимости  $\gamma_{O_2}$  и  $\gamma_{H_2O}$  от длины волны, полученные экспериментально и из расчетов по кинетическому уравнению (КУ) [5, 6].

Т а б л и ц а 1

$\lambda$ (см)	$H_{O_2}$ (кМ)	$H_{H_2O}$ (кМ)	Измерения			Расчет по (КУ)		
			$\gamma_{O_2}$ ( $дб \cdot км^{-1}$ )	$\gamma_{H_2O}$ ( $дб км^{-1}$ )	$a$ ( $дб м^3 \cdot км^{-1} г^{-1}$ )	$\gamma_{O_2}$ ( $дб \cdot км^{-1}$ )	$\gamma_{H_2O}$ ( $дб км^{-1}$ )	$a$ ( $дб м^3 \cdot км^{-1} г^{-1}$ )
1,3	5,1	1,95	0,0185	0,195	0,026	0,015	0,185	0,0247
1,8	5,1	1,5	0,0155	0,0344	0,0046	0,0098	0,0285	0,0038
2,0	5,1	1,5	0,0145	0,0254	0,0034	0,0092	0,0168	0,00224
2,5	5,1	1,5	0,0162	0,0177	0,00236	0,008	0,00769	0,00102
2,7	5,1	1,5	0,0155	0,0128	0,0017	0,0078	0,00566	0,00075

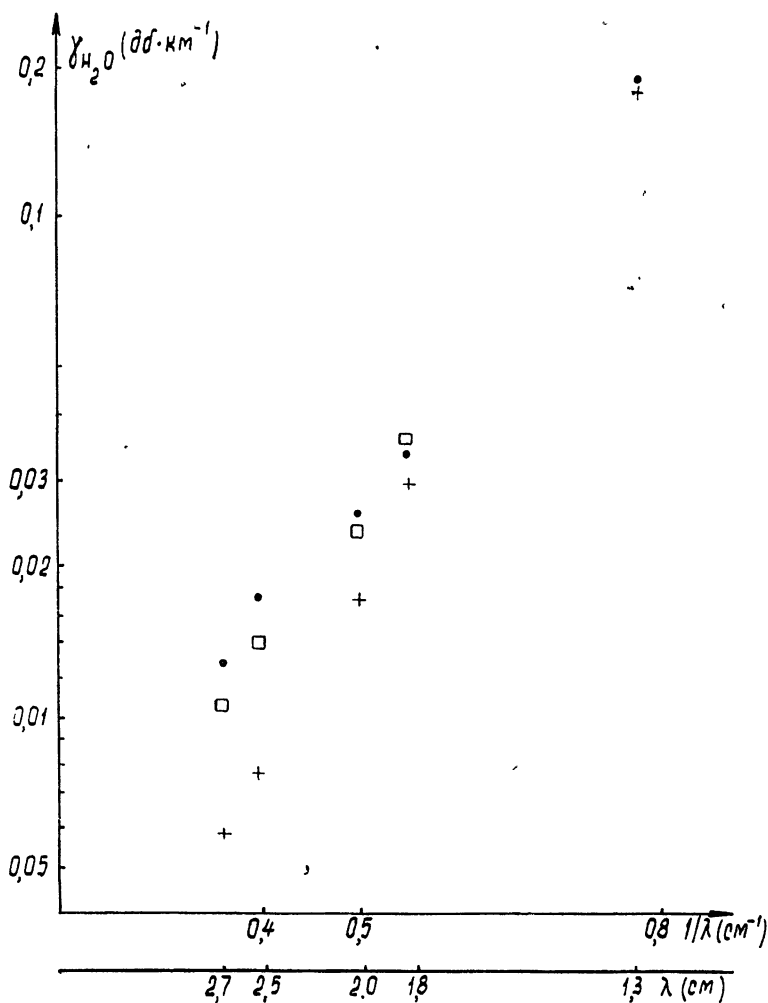
Вне линии 1,35  $см$  найденные описанным способом коэффициенты поглощения в водяном паре ( $\gamma_{эксп}$ ) расходятся с вычисленными коэффициентами поглощения мономеров водяного пара ( $\gamma_{теор мон}$ ) [6] от 1,37 раза при  $\lambda = 1,8$   $см$  ( $\gamma_{эксп} = 0,0344$   $дб \cdot км^{-1}$ ,  $\gamma_{теор мон} = 0,0255$   $дб \cdot км^{-1}$ ) до 2,2 раза при  $\lambda = 2,7$   $см$  ( $\gamma_{эксп} = 0,0128$   $дб \cdot км^{-1}$ ,  $\gamma_{теор мон} = 0,00566$   $дб \cdot км^{-1}$ ).

Рис. 2. Зависимость  $\gamma_{O_2}$  от  $\lambda$ :

● — экспериментальные значения; + — по (КУ).

Но если учесть поглощение радиоволн димерами водяного пара, согласно расчетам Викторовой и Жевакина [8] (см. также рис. 3в [9]), то данные эксперимента находятся в хорошем согласии с вычисленными суммарными коэффициентами ( $\gamma_{вод пара}$ ) мономеров и димеров водяного пара:  $\gamma_{вод пара} = 0,0352$  ( $дб \cdot км^{-1}$ ) при  $\lambda = 1,8$   $см$  и  $\gamma_{вод пара} = 0,1026$  ( $дб \cdot км^{-1}$ ) при  $\lambda = 2,7$   $см$ . При выбранном выше значении характеристической высоты расхождения между измеренными и вычисленными коэффициентами поглощения  $O_2$  также выходят за пределы погрешностей эксперимента.

Автор выражает признательность И. И. Маловой, В. С. Лазаревскому за помощь при обработке наблюдений и В. С. Троицкому, А. П. Наумову за полезное обсуждение данного сообщения.

Рис. 3. Зависимость  $\gamma_{H_2O}$  от  $\lambda$ :

● — экспериментальные значения, + — по (КУ); □ — зависимость  $\gamma_{вод}$  пара от  $\lambda$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. И. Герштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 771 (1965).
- 2 В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 393 (1961).
- 3 А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 433 (1961).
- 4 Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 747 (1967).
- 5 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 9, № 8, 1332 (1964).
- 6 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
- 7 В. М. Плечков, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 2, 182 (1968).
- 8 А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, 171, 1061 (1966).
- 9 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).

## УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДЕЙСТВИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА НИЗКОДОБРОТНЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В. Ф. Скупой

Имеется большое число работ, посвященных анализу воздействия флуктуаций на высокодобротные автоколебательные системы, например, [1, 2]. Но применительно к системам с низкой добротностью или релаксационным эта проблема почти не рассматривалась. Ниже показано, что, используя метод усреднения, можно построить уравнения, которые описывают плавные изменения амплитуды и фазы автоколебаний под малым флуктуационным воздействием при любой величине добротности генератора.

Пусть генератор описывается уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0 F \left( x, \frac{dx}{dt} \right) + e,$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — резонансная частота колебательного контура;  $\varepsilon$  — параметр, обратно пропорциональный добротности системы,  $0 < \varepsilon < \infty$ ;  $e$  — малая флуктуационная сила. После замены переменных

$$\begin{aligned} \tau &= pt, \\ x &= A^* \cos(\tau - \vartheta^*), \\ \dot{x} &= -A^* \sin(\tau - \vartheta^*) \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь  $p$  — частота автоколебаний генератора) и усреднения по явно содержащемуся времени в предположении независимости формы автоколебаний от внешней силы получаются уравнения [3]

$$\dot{A} = P(A, p) - M \left\{ \frac{e}{p^2} \sin(\tau - \vartheta^*) \right\}, \quad (2)$$

$$\dot{\vartheta} = Q(A, p) + M \left\{ \frac{e}{p^2} \frac{\cos(\tau - \vartheta^*)}{A^*} \right\}, \quad (3)$$

в которых точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ ;

$$M \left\{ \xi(\tau) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-2\pi}^{\tau} \xi(t) dt;$$

$A$  и  $\vartheta$  — плавно меняющиеся части величин  $A^*$  и  $\vartheta^*$ , соответственно равные

$$\begin{aligned} A &= M \left\{ \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} \right\}, \\ \vartheta &= M \left\{ \tau - \arctg(-\dot{x}/x) \right\}; \end{aligned}$$

$A$  и  $\vartheta$  можно рассматривать как амплитуду и фазу колебаний автогенератора. Методика вычисления функций  $P(A, p)$ ,  $Q(A, p)$  изложена в [4]

Считая известной форму автономных колебаний

$$x_0 = A_0 f(\tau)$$

(где  $f$  определяется по формулам (5) работы [4]) и полагая, что под действием малой внешней силы она не меняется, т. е.

$$x = A f(\tau - \vartheta),$$

получим из (1)

$$\sin(\tau - \vartheta) = - \frac{\dot{f}(\tau - \vartheta)}{\sqrt{f^2 + \dot{f}^2}}; \quad (4)$$

$$\frac{\cos(\tau - \vartheta)}{A^*} = \frac{f(\tau - \vartheta)}{f^2 + \dot{f}^2}. \quad (5)$$

Выражения (4), (5) дают возможность определить функции  $\sin(\tau - \vartheta^*)$ ,  $\frac{\cos(\tau - \vartheta^*)}{A^*}$  и найти их разложения в ряды Фурье, используемые при построении усредненных уравнений [3]

$$\sin(\tau - \vartheta^*) = \sum_{k=1, 2, \dots} b_k \sin[k(\tau - \vartheta) + \beta_k]; \quad (6)$$

$$\frac{\cos(\tau - \vartheta^*)}{A^*} = \sum_{k=1, 2, \dots} c_k \cos[k(\tau - \vartheta) + \gamma_k]. \quad (7)$$

С учетом (6), (7) уравнения (2), (3) записываются следующим образом:

$$\dot{A} = P(A, p) - \frac{1}{2} \sum_{k=1, 2, \dots} b_k [e_{\perp k}(\tau) \cos(k\vartheta - \beta_k) - e_{\parallel k}(\tau) \sin(k\vartheta - \beta_k)], \quad (8)$$

$$\dot{\vartheta} = Q(A, p) - \frac{1}{2A} \sum_{k=1, 2, \dots} c_k [e_{\parallel k}(\tau) \cos(k\vartheta - \gamma_k) + e_{\perp k}(\tau) \sin(k\vartheta - \gamma_k)]. \quad (9)$$

Здесь в соответствии с [1]

$$e_{\parallel k}(\tau) = M \left\{ 2 \frac{e(\tau)}{p^2} \cos k\tau \right\},$$

$$e_{\perp k}(\tau) = M \left\{ 2 \frac{e(\tau)}{p^2} \sin k\tau \right\}.$$

Нетрудно видеть, что (8), (9) являются обобщением уравнений, полученных в [1], и к ним можно применить методы решения, разработанные для высокочастотных систем [5, 6]. Эти уравнения могут быть полезны, в частности, при анализе генераторных схем на туннельных диодах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв высш уч зав — Радиофизика, 6, № 3, 495 (1963)
2. А. Н. Малахов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 710 (1964)
3. В. Ф. Скупой, Изв высш уч зав. — Радиофизика, 11, № 3, 475 (1968)
4. В. Ф. Скупой, Радиотехника и электроника, 13, № 1, 147 (1968).
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
6. Р. Я. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд Сов. радио, М., 1961

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию  
9 октября 1967 г.

УДК 538.574.6

#### О САМОСОГЛАСОВАННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. М. Радин

В настоящее время значительное внимание уделяется исследованию излучения электромагнитных волн зарядами, движущимися вблизи дифракционных препятствий. В приближении заданного тока эта задача рассматривалась в ряде работ [1-3]. Представляет интерес постановка и решение самосогласованной задачи, в которой наряду с полем излучения следует учитывать также обратное влияние этого поля на электронный поток. К настоящему времени известна работа [4], в которой приводится самосогласованное решение задачи об излучении волн электронным потоком, движущимся над ленточной дифракционной решеткой. Для получения дисперсионного уравнения авторами был использован метод поперечного резонанса. Решение граничной электродинами-

ческой задачи проведено при этом в длинноволновом приближении для решетки с узкими щелями. Полученные результаты имеют весьма ограниченную область применимости, и предлагаемый метод исследования не может быть обобщен на более широкий и практически интересный диапазон изменения рабочих параметров структуры. Кроме того, необходимость предварительных численных расчетов, связанных с решением вспомогательного трансцендентного уравнения, в значительной степени затрудняет использование формул, полученных в [4].

Пусть электронный поток толщины  $h$  движется в направлении оси  $OY$  со скоростью  $v_0$  параллельно плоскости  $XOY$ , в которой расположена ленточная решетка, с периодом  $l$  и шириной лент  $d$ . Ось  $OY$  перпендикулярна образующим лент, ось  $OZ$  направлена в пучок, начало координат помещено в середину одной из лент. Расстояние между нижней плоскостью пучка и решеткой для упрощения формул положено равным нулю. Для получения самогласованного решения на фиксированной частоте с учетом взаимодействия пучка только с продольным электрическим полем воспользуемся линеаризованной системой уравнений в гидродинамическом приближении

$$\Delta \Pi_y + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_y = -4\pi P_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} - 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\omega^2}{v_0^2} P_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{v_0^2} \left( \frac{c^2 \Pi_y}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_y \right),$$

где  $\Pi_y$  — потенциал Герца,  $P_y$  — поляризационный потенциал,  $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{3/2}$  — плазменная частота.

Для удобства рассмотрения разобьем все пространство на три области  $1 - z < h$ ,  $2 - 0 < z < h$ ,  $3 - z < 0$ . Разыскивая неизвестные функции  $\Pi_y$  и  $P_y$  в виде разложений в ряды Фурье и требуя непрерывности тангенциальных компонент полей при  $z = h$  и  $z = 0$  получим систему функциональных уравнений, которая методом, развитым в [3, 5], может быть сведена к бесконечной однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно некоторых неизвестных коэффициентов  $Y_n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \left( \frac{|n|}{n} \epsilon_n W_m^n - \delta_m^n \right) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{2}$$

где

$$\epsilon_n = 1 - 2i \frac{|n|}{n} \frac{\beta_n}{\eta + n} \frac{\epsilon_n - i \operatorname{tg}(\Gamma_n H)}{i(1 + \rho_n^2) \operatorname{tg}(\Gamma_n H) - 2\rho_n}, \tag{2a}$$

$$\beta_n^2 = \alpha^2 - (\eta + n)^2, \quad \Gamma_n^2 = \beta_n^2 \rho_n^2, \quad \rho_n^2 = 1 - \left[ \frac{\alpha_e}{\alpha - \beta(\eta + n)} \right]^2,$$

$$\beta = \frac{v_0}{c}, \quad \alpha_e = \frac{\omega_p l}{2\pi c}, \quad \alpha = \frac{\omega l}{2\pi c} = \frac{l}{\lambda}, \quad \eta = \frac{kl}{2\pi}, \quad H = 2\pi \frac{h}{l},$$

$k$  — неизвестное волновое число в направлении  $OY$ ,  $W_m^n = V_m^n - R_m \frac{V_\alpha^n}{R_\alpha}$ ,  $\delta_m^n$  — символ

Кронекера. Коэффициенты  $V_m^n(u)$ ,  $R_m(u)$ ,  $V_\alpha^n(u, \eta)$ ,  $R_\alpha(u, \eta)$  ( $u = \cos(\pi d/l)$ ) для подобных систем приводятся в [3] и записаны в принятых там обозначениях.

Приравняв нулю определитель однородной системы уравнений (2), получаем дисперсионное уравнение для отыскания безразмерных волновых чисел  $\eta$ . Это уравнение допускает решение методом редукции, так как из (2a) следует, что при  $n \rightarrow \infty$   $\epsilon_n \rightarrow 0$  как  $\frac{1}{n^2}$ .

В рамках линейной теории, описываемой уравнениями (1), все переменные величины, характеризующие пучок (скорость, ток, плотность), должны мало меняться около их стационарных значений, поэтому волновые числа  $\eta$  можно представить в виде  $\eta = \frac{\alpha}{\beta} + \xi$ , где  $\xi$  — малое комплексное число ( $|\xi| \ll 1$ ), и дисперсионное уравнение можно решать методом разложения в ряд по степеням  $\xi$ . Ввиду того, что параметр  $\alpha_e$  в электронике СВЧ мал ( $\alpha_e \ll 1$ ), будем считать, что

$$\epsilon_n = 1 + i \frac{|n|}{n} \frac{\beta_n}{\eta + n} + O(x_e^2). \quad (3)$$

При  $n = 0$  такое приближение неприменно, так как  $\Gamma_0$  из (2а) содержит резонансные члены вида  $\frac{x_e}{\xi}$ . Кроме того, при  $n > 0$  величины  $\epsilon_n$  настолько малы по сравнению с максимальными значениями  $\epsilon_n$  для  $n < 0$ , что ими можно пренебречь.

Ограничимся в (2) определителем третьего порядка. При этом может быть достигнута удовлетворительная точность вычисления определителя (0,1—0,5%) в диапазоне изменения  $0 < x < 2,5$  [6]. Найдем решение для значений  $\eta = \frac{x}{\beta} + \xi = 1 + \xi$ , так как формулы при этом выглядят наиболее просто (режим излучения основной гармоники  $n = -1$ ). Для других значений  $\frac{x}{\beta}$  рассуждения аналогичны. Представив  $\Gamma_0$  рядом Лорана и учитывая (3), разложим определитель (2) в ряд по  $\xi$ , и, ограничиваясь величинами первого порядка малости, получим

$$\operatorname{tg} \left( \frac{C_{-1} H}{\xi} \right) = \frac{M}{C_{-1}} \xi,$$

$$M = \frac{\hat{Q}}{Q}, \quad \hat{Q} = -(1-x^2) \left[ \frac{(u-1)^2(3+u)}{8} (1 - \sqrt{1-x^2}) (1 + ix b_1) - \right. \quad (4)$$

$$\left. - ix \frac{(1-u)^2}{2} - (1-u)(1 + ix b_1) \right], \quad C_{-1} = \frac{x_e}{x} \sqrt{1-x^2}, \quad b_1 = \ln \frac{1+u}{2},$$

$$Q = \frac{(1-u)^2(3+u)}{16} (1 - \sqrt{1-x^2}) (1 + ix b_1) + ix \frac{(1-u)^2}{4} (3 - 2\sqrt{1-x^2}) +$$

$$+ \frac{1-u}{2} [\sqrt{1-x^2} + ix b_1 (3 - 2\sqrt{1-x^2})] (1 + ix b_1).$$

Спектр корней уравнения (4) расположен в малой окрестности величины  $\xi_m^0 = C_{-1} H / m\pi$  и может быть определен методом итераций. В первом приближении получаем

$$\xi_m = \frac{m\pi C_{-1} H}{m^2 \pi^2 + M H} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

$\operatorname{Im} \xi_m$  определяют нарастание (затухание) волн, генерируемых пучком

Следует отметить, что характер зависимости  $\operatorname{Im} \xi_m$  от плотности тока и толщины пучка, полученный в [4] численным способом для частных случаев, прослеживается из формулы (5) тривиально. На параметр  $u$  и на величину угла, определяющего направление излучения, в отличие от [4], никаких ограничений не накладывается. Если на расстоянии  $L$  от плоскости решетки поместить отражающий экран, то (5) описывает распределение собственных частот прибора типа оротрон [7]. Величину  $ix b_1$  в  $M$  нужно домножить при этом на  $1 - \exp \left[ i4\pi \frac{L}{\lambda} \right]$  ( $\lambda$  — длина волны,  $\frac{L}{\lambda} \gg 1$ ). Отметим, что уравнение (4) обладает достаточной общностью. Оно остается справедливым, если решетку заменить гребенкой или брусьями прямоугольного поперечного сечения.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность В. П. Шестопалову за руководство работой и О. А. Третьякову за помощь и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Toraldo di Francia, Nuovo Cimento, ser. 10, v. 16 (1960).
2. Б. М. Болотовский, УФН, 88, № 2, 209 (1966).
3. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1233 (1965).
4. I. Palocz, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 55, № 1 (1967).
5. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, № 4, 372 (1962).
6. Е. Н. Подольский, Уч. зап. мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва, сер. 4, 30 (1964).
7. Ф. С. Русин, Г. Д. Богомолов, Письма в ЖЭТФ, 4, № 6, 236 (1966).

Харьковский институт радиоэлектроники.

Поступила в редакцию  
22 января 1968 г.