

## СОДЕРЖАНИЕ

Бененсон З. М., Хазен Э. М. Меры информации в задачах оптимальных статистических решений . . . . .	963
Тай М. Л. К отысканию плотности вероятности перехода марковского процесса . . . . .	980
Валеев К. Г. К теории метода точечных отображений . . . . .	985
Эшмурадов К. О ячейках трехмерной динамической системы . . . . .	997
Брускин В. А. Об абсолютной стохастической устойчивости по отношению к одному классу возмущений . . . . .	1003
Григоренко В. П., Неймарк Ю. И., Рапопорт А. Н. Оптимизация коллективом независимых автоматов и игры автоматов . . . . .	1019
Капранов М. В. Асимптотические значения полосы захвата при фазовой автоподстройке частоты . . . . .	1028
Мошкина Т. В. О возможности параметрических колебаний в схеме с динисторами . . . . .	1041
Тарантович А. С. Параметрическая синхронизация генератора на тунNELьных диодах . . . . .	1046
Кармов Л. Н. О приближенном отыскании периодических движений автономных систем . . . . .	1053
Перельмутер В. М. Об итерационных способах идентификации динамических объектов для целей самонастройки . . . . .	1060
Островский Г. М., Борисов В. В., Волин Ю. М., Шумунов Л. Н. О применении метода квазилинеаризации для расчета оптимальных систем . . . . .	1072
Неймарк Ю. И., Васин Ю. Г. Об одном методе кодирования больших массивов информации в связи с задачами медицинской диагностики . . . . .	1081
Яблонская К. А. Реализация дробно-рациональных функций второй степени схемами без повышения степени . . . . .	1086
Ланда П. С., Стрелков С. П., Яковлева М. В. Изгибно-крутильный флаттер крыла с балансиром . . . . .	1098
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Крикунова И. М. Люфт в системе автоматического регулирования с сухим трением . . . . .	1107
Дерендяев Н. В. Об установлении стационарных движений газа . . . . .	1109
Корнейчук В. И., Ситников Л. С., Скорик А. Г., Утяков Л. Л. Десятичные регистры на фазоимпульсных элементах . . . . .	1111
Курилин Б. И. О некоторых частных решениях уравнения Риккати . . . . .	1114
Курилин Б. И. К решению общего уравнения Риккати с помощью цепных дробей . . . . .	1115

УДК 621.391 : 51

## МЕРЫ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

3. М. Бененсон, Э. М. Хазен

Рассматриваются оценки, связывающие уменьшение шенноновского количества информации и увеличение риска в задачах оптимальных статистических решений при редукции наблюдаемых данных, при переходе от достаточных статистик к другим, а также при изменениях законов распределения вероятностей. Указанные оценки важны для построения статистических решающих правил при наличии ограничений на используемый «объем памяти», требований простоты реализации и устойчивости. Даётся новое, статистическое доказательство известной теоремы Шеннаона о пропускной способности канала. При этом задача декодирования рассматривается как задача о различии многих статистических гипотез. Решаются некоторые задачи оптимального планирования экспериментов при последовательном анализе.

В работе [1] было дано единое построение последовательных решающих правил в задачах о различии многих и сложных гипотез. При построении решающего правила используется одномерная или многомерная функция  $L(x_1, \dots, x_m)$  от наблюденных данных  $x_1, \dots, x_m$  (статистика  $L(x_1, \dots, x_m)$ ). Решение принимается в зависимости от полученных значений  $L(x_1, \dots, x_m)$ .

При использовании марковской достаточной статистики  $L(x_1, \dots, x_m)$  последовательное правило является оптимальным по критерию минимума математического ожидания потерь, складывающихся из штрафов за неверные решения и стоимости проведенных наблюдений.

При построении последовательных решающих правил необходимо учитывать ограничения по «объему памяти» кибернетических устройств, требования простоты реализации и устойчивости по отношению к изменениям законов распределения.

В данной работе, являющейся развитием [1], рассматриваются меры информации в задачах статистических решений и выводятся некоторые оценки потерь информации при переходе от одной статистики  $L(x_1, \dots, x_m)$  к другой и связанного с ними увеличения времени анализа или вероятностей ложных решений.

Полученные соотношения конкретизируются для задачи обнаружения в многоканальной системе (раздел 2).

Дается новое статистическое доказательство теоремы Шеннаона о пропускной способности канала (раздел 3).

В разделе 4 рассматриваются некоторые задачи планирования последовательных экспериментов.

### 1. ОЦЕНКИ ПОТЕРЬ ИНФОРМАЦИИ И СВЯЗАННОГО С НИМИ УВЕЛИЧЕНИЯ РИСКА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОЙ СТАТИСТИКИ $L(x_1, \dots, x_m)$ К ДРУГОЙ

Рассмотрим задачи статистических решений с фиксированным числом наблюдений  $(x_1, \dots, x_n) = x$ . Пусть  $\theta$  — неизвестный параметр (например, номер истинной гипотезы в задаче о различии гипотез)  $p(x|\theta)$

— известная условная плотность вероятности для  $x$  при истинном значении  $\theta$ ;  $p(\theta)$  — априорное распределение для  $\theta$ .

Величина

$$J(p) = \int p(x, \theta) \ln \frac{p(x, \theta)}{p(x)p(\theta)} dx d\theta, \quad (1.1)$$

где

$$p(x, \theta) = p(x|\theta) p(\theta), \quad p(x) = \int p(x, \theta) d\theta,$$

называется количеством информации по Шеннону в  $x$  относительно  $\theta$ . При редукции пространства  $x, \theta$  к другому  $x', \theta'$  с плотностью вероятности  $p'(x', \theta')$ , порожденной  $p(x, \theta)$  на пространстве  $x, \theta$ , количество информации (1.1) меняется; имеем

$$J(p') = \int p'(x', \theta') \ln \frac{p'(x', \theta')}{p'(x') p'(\theta')} dx' d\theta'. \quad (1.2)$$

Равенство  $J(p) = J(p')$  имеет место в том случае, если функция  $x'(x)$  является достаточной статистикой для оценки  $\theta$  (при совпадении пространств  $\theta$  и  $\theta'$ ).

Пусть  $b(x)$  — решающая функция;  $W(\theta; b(x))$  — функция, оценивающая потери при принятии решения  $b(x)$  и истинном значении параметра  $\theta$ .

Риск

$$r = r(b; p; W) = \int W(\theta; b(x)) p(x, \theta) dx d\theta; \quad (1.3)$$

байесовский риск по определению равен

$$r_0(p) = \inf_{b \in B} \int W(\theta; b(x)) p(x, \theta) dx d\theta, \quad (1.4)$$

где  $B$  — множество всех возможных решающих функций  $b(x)$ .

Обозначим  $r' = r(p')$  или  $r'_0 = r_0(p')$  риск, соответствующий редуцированной задаче с плотностью  $p'(x', \theta')$ .

Из [2, 3] можно вывести следующие оценки.

1) Если функция потерь ограничена,  $W(\theta; b(x)) \leq W_0$ , то

$$J(p) - J(p') \geq \frac{1}{W_0} \left[ r_0 \ln \frac{r_0}{r'_0} + (W_0 - r_0) \ln \frac{W_0 - r_0}{W_0 - r'_0} \right]. \quad (1.5)$$

2) В общем случае

$$r'_0 - r_0 \leq (2r_0(p', W^2) [J(p) - J(p')])^{1/2}. \quad (1.6)$$

3) Если  $p(x, \theta)$  и  $p'(x, \theta)$  — два разных распределения вероятностей, действующих на одном и том же вероятностном пространстве  $(x, \theta)$ , и мера  $p(x, \theta)$  абсолютно непрерывна по отношению к  $p'(x, \theta)$  (т. е.  $p(x, \theta) = 0$  в точках, где  $p'(x, \theta) = 0$ ),

$$J(p) - J(p') \leq \int p(x, \theta) \ln \frac{p(x, \theta)}{p'(x, \theta)} dx d\theta = I(p : p'). \quad (1.7)$$

Можно доказать, что неравенства (1.5), (1.6) оценивают разность рисков  $r' - r$ , а также байесовских рисков  $r'_0 - r_0$ , если заменить в них  $J(p) - J(p')$  значением  $I(p : p')$ .

Краткий вывод указанных оценок дан в Приложении.

Заметим, что выражение  $I(p : p')$  совпадает с «информационным направленным расхождением» между распределениями  $p(x, \theta)$  и  $p'(x, \theta)$ , введенным Кульбаком [4].

Рассмотрим задачу о различении  $N$  гипотез:  $\theta = \theta_1, \dots, \theta_N$ . Зададим функцию  $W(\theta; b(x))$  следующим образом:  $W(\theta; b(x)) = 1$  при  $x \in E_j$ , где  $E_j$  — область принятия гипотезы  $H_j(\theta = \theta_j)$ ;  $W(\theta; b(x)) = 0$ , если  $x$  не принадлежит  $E_j$ . Положим  $p(x, \theta) = p(x|\theta_k)$  и  $p'(x, \theta) = p(x|\theta_i)$ . Тогда  $r(p) = \alpha_{kj}$  — вероятности принять гипотезу  $H_j$  при истинности  $H_k$ ;  $r(p') = \alpha_{ij}$ ;  $W_0 = 1$ .

Тогда из (1.5) (для случая 3) получаем

$$I(i:k) \geq \alpha_{kj} \ln \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_{ij}} + (1 - \alpha_{kj}) \ln \frac{1 - \alpha_{kj}}{1 - \alpha_{ij}}, \quad (1.8)$$

где

$$I(i:k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta_i) \ln \frac{p(x|\theta_i)}{p(x|\theta_k)} dx. \quad (1.9)$$

При  $j = k$ , обозначая  $\alpha_{kk} = 1 - \beta_k$ , находим

$$I(i:k) \geq (1 - \beta_k) \ln \frac{1 - \beta_k}{\alpha_{ik}} + \beta_k \ln \frac{\beta_k}{1 - \alpha_{ik}}, \quad (1.10)$$

$$I(i:k) \geq \alpha_{ki} \ln \frac{\alpha_{ki}}{1 - \beta_i} + (1 - \alpha_{ki}) \ln \frac{1 - \alpha_{ki}}{\beta_i}. \quad (1.11)$$

В случае двух гипотез оценка (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned} I(1:2) &\geq \beta \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}, \\ I(2:1) &\geq \alpha \ln \frac{\alpha}{1 - \beta} + (1 - \alpha) \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\alpha = \alpha_{21}$ ,  $\beta = 1 - \alpha_{11}$ . Последние неравенства другим способом выведены в [4].

Соотношения (1.5) — (1.12) связывают потери информации и увеличение риска при редукции наблюденных данных  $x$  (при переходе от одной статистики к другой, при квантовании значений  $x$  и др.) и при редукции пространства  $\theta$  (при «исключении» мешающих параметров и др.), а также дают некоторые оценки устойчивости решающего правила по отношению к изменениям законов распределения (так как при переходе от  $p(x, \theta)$  к  $p'(x, \theta)$  неравенства выполняются не только для байесовских рисков, но и при фиксированной решающей функции  $b(x)$  — случай 3).

## 2. ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Пусть  $H_k$  — гипотеза о наличии сигнала в  $k$ -м канале ( $\theta = \theta_k$ ;  $k = 1, \dots, N$ );  $H_0(\theta = \theta_0)$  — гипотеза об отсутствии сигнала во всех каналах. На выходе  $k$ -го канала в момент времени  $m$  наблюдается величина  $x_k(m)$ , имеющая гауссовское распределение с дисперсией  $\sigma^2$  и математическим ожиданием, равным нулю в отсутствие сигнала и равным  $a$  при наличии сигнала в  $k$ -м канале.

Логарифм отношения правдоподобия гипотез  $H_k$  и  $\bar{H}_k$  после  $m$  наблюдений равен

$$L_k(m) = \frac{a}{\sigma^2} \sum_{j=1}^m x_k(j) - \frac{ma^2}{2\sigma^2}. \quad (2.1)$$

В качестве статистики  $L(m)$  берем, следуя [1],

$$L(m) = \max_{1 \leq k \leq N} L_k(m). \quad (2.2)$$

Оценим потери информации при использовании статистики (2.2) по сравнению с достаточной статистикой  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_N)$ .

Пусть априорная вероятность отсутствия сигнала во всех каналах равна  $1/2$ , а при наличии сигнала его присутствие априори равновероятно для каждого из каналов. Тогда

$$J(p') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ P_1(L) \ln \frac{2P_1(L)}{P_0(L) + P_1(L)} + P_0(L) \ln \frac{2P_0(L)}{P_0(L) + P_1(L)} \right] dL, \quad (2.3)$$

где  $P_0(L)$  — плотность вероятности для значения  $L$  (2.2) при отсутствии сигнала во всех каналах,  $P_1(L)$  — при наличии сигнала в одном из каналов.

Случайные величины  $L_k(m)$  при разных  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) статистически независимы, поэтому имеем

$$P_0(L) = N(2\pi md)^{-1/2} \exp [-(L+md/2)^2 (2md)^{-1}] \left[ \Phi \left( \frac{L+md/2}{\sqrt{2md}} \right) \right]^{N-1}, \quad (2.4)$$

где

$$d = a^2/\sigma^2, \quad \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

$$P_1(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi md}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(L-md/2)^2}{2md} \right] \int_{-\infty}^L P_0(l; N-1) dl + \right. \\ \left. + P_0(L; N-1) \int_{-\infty}^L \exp \left[ -\frac{(u-md/2)^2}{2md} \right] du \right\}. \quad (2.5)$$

При  $N \gg md$  для определения  $P_0(L)$  можно использовать асимптотические формулы ([5], гл. 28) для распределения максимума из  $N$  независимых гауссовских величин с одинаковыми средними значениями  $-md/2$  и дисперсиями  $md$ :

$$P_0(L) = [(2 \ln N)/md]^{1/2} \exp [-v(L) - e^{-v(L)}],$$

где

$$v(L) = L \left( \frac{2 \ln N}{md} \right)^{1/2} - \left( \frac{md \ln N}{2} \right)^{1/2} - 2 \ln N + \frac{\ln 4\pi \ln N}{2}.$$

Для достаточной статистики  $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_N)$  находим в рассматриваемом случае

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\mathbf{L}) \ln \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{L_j} \right)^{-1} \right] d\mathbf{L} + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\mathbf{L}) \ln \left[ \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N e^{L_j} \left( 1 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{L_j} \right)^{-1} \right] d\mathbf{L}, \quad (2.6)$$

где  $P_0(\mathbf{L})$  и  $P_1(\mathbf{L})$  — плотность распределения  $\mathbf{L}$  при отсутствии сиг-

нала во всех каналах и при наличии в одном из каналов (соответственно).

Имеем

$$P_0(L) = (2\pi md)^{-N/2} \exp \left[ - \sum_{j=1}^N (L_j + md/2)^2 (2md)^{-1} \right],$$

$$P_1(L) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (2\pi md)^{-N/2} \exp \left[ -(L_j - md/2)^2 (2md)^{-1} - \sum_{i \neq j} (L_i + md/2)^2 (2md)^{-1} \right].$$

Графики функций (2.3) и (2.6) показаны на рис. 1. Разность  $J(p) - J(p')$  не превышает 0,01 и с ростом числа наблюдений быстро стремится к нулю.

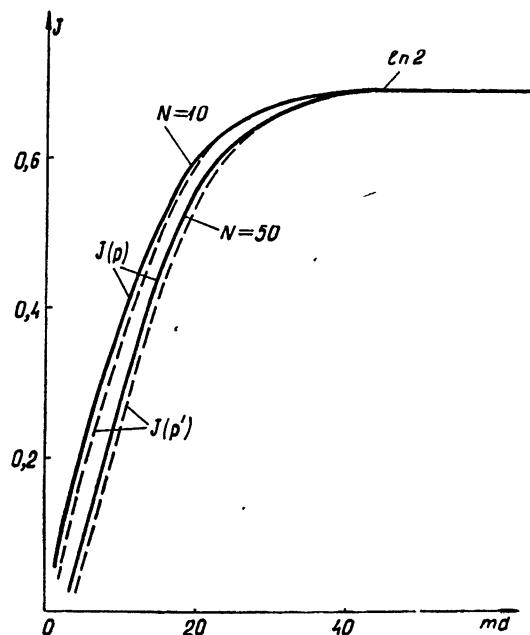


Рис. 1. Шенноновское количество информации  $J(p)$  (сплошные линии) для различения гипотез  $H_0$  и  $\bar{H}_0$  при использовании достаточной статистики  $L = (L_1, \dots, L_N)$  и  $J(p')$  (пунктирные линии) при использовании статистики  $L = \max_{1 \leq k \leq N} L_k$ .

На рис. 2 приведены графики «информационного расстояния» (1.9) между гипотезами  $H_0$  и  $\bar{H}_0 = \bigcup_{k=1}^N H_k$  при использовании статистики  $L(m)$  (2.2) и достаточной статистики  $L = (L_1, \dots, L_N)$  при истинности гипотезы  $H_0$  (кривые  $I_1$ ) и гипотезы  $\bar{H}_0$  (кривые  $I_2$ ):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(L) \ln [P_0(L)/P_1(L)] dL,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(L) \ln [P_1(L)/P_0(L)] dL. \quad (2.7)$$

Из этих результатов следует, что при переходе от  $L$  к  $L$  при обеспечении решающим правилом одной и той же вероятности «ложной тревоги» и вероятности пропуска сигнала необходимое число наблюдений возрастает не более, чем на 3—5%.

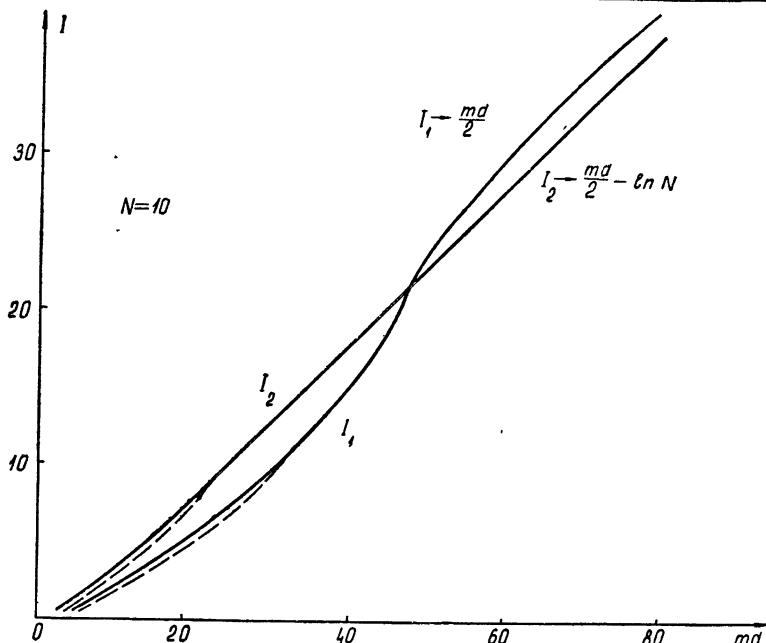


Рис. 2. „Информационные расстояния“  $I_1, I_2$  при использовании достаточной статистики  $L$  (сплошные линии) и статистики  $L = \max_{1 \leq k \leq N} L_k$  (пунктирные линии).

### 3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ШЕННОНА

Рассмотрим случайное кодирование, при котором кодовые слова строятся при помощи независимого случайного выбора символов  $\alpha$  из некоторого алфавита  $D$ . Пусть  $p_\alpha$  — вероятность выбора символа  $\alpha$ . Кодовая книга составляется из  $N = e^{Hn}$  кодовых слов длины  $n$ , построенных независимо таким способом (здесь  $H$  — заданная константа). Рассматривается множество всех таких кодовых книг.

Искажения символов в канале связи независимы; канал задается матрицей  $p_\beta^\alpha$  вероятностей перехода символа  $\alpha$  на входе канала в символ  $\beta$  на выходе.

Рассматривается следующая процедура передачи сообщений. При помощи независимого случайного выбора символов заполняется кодовая книга. Кодовая книга известна на входе и на выходе канала;  $s$ -му сообщению ставится в соответствие  $s$ -е слово из полученной кодовой книги. Это слово передается через канал связи. На выходе канала решается задача: определить номер передававшегося кодового слова (т. е. номер переданного сообщения). В следующий раз для передачи берется другая кодовая книга, построенная вновь, независимо, путем случайного выбора символов, и т. д.

Вероятность правильного декодирования  $\bar{P}_1$  при такой процедуре передачи совпадает со средней вероятностью правильного декодирования по множеству всевозможных кодовых книг, получаемых при помощи независимого случайного выбора символов\*.

\*  $\bar{P}_1 = \sum_A P_A P(A)$ , где  $P(A)$  — вероятность получения данной кодовой книги  $A$ ,

$P_A$  — вероятность правильного декодирования при использовании кодовой книги  $A$ .

Отметим, что при случайном заполнении кодовой книги символами могут получиться и совпадающие кодовые слова, скажем,  $s$ -е и  $k$ -е. В этом случае использование данной книги приведет к ошибке декодирования при передаче  $s$ -го или  $k$ -го сообщения. Вероятность такого события учтена в оценке (3.12) для  $P_1$ .

Найдем вероятность правильного декодирования  $\bar{P}_1$ .

Пусть  $x_u = (x_1^{(u)}, \dots, x_n^{(u)})$  — переданное кодовое слово,  $x_v = (x_1^{(v)}, \dots, x_n^{(v)})$  ( $v \neq u$ ) — другое слово из той же кодовой книги;  $y = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  — принятая последовательность символов на выходе канала. Результатом одного опыта, т. е. единичной выборкой из генеральной совокупности, являются  $x_1, \dots, x_N$  и  $y$ .

Задача декодирования состоит в различении следующих  $N$  гипотез: гипотеза  $H_k$  состоит в том, что передавалось  $k$ -е кодовое слово ( $k = 1, \dots, N$ ). При истинности  $H_k$  случайные величины  $x_1, \dots, x_N$  и  $y$  имеют следующее совместное распределение вероятностей:

$$p(x_1, \dots, x_N, y|H_k) = p(y|x_k) p(x_k) \prod_{l \neq k} p(x_l), \quad (3.1)$$

где  $p(y|x_k) = \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i^{(k)}) = \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i^{(k)}}^{\beta_i}$  — вероятность перехода  $x_k$  на входе канала в  $y$  на выходе;  $p(x_l) = \prod_{i=1}^n p_{\alpha_i^{(l)}}$ .

В отличие от вероятности перехода  $p(y|x_k)$  обозначим  $p_{x_s}(y)$  условную вероятность для  $y$  при условии, что фиксировано  $x_s$ . Как нетрудно видеть,

$$p_{x_s}(y) = \begin{cases} p(y|x_s) & (s = u) \\ p(y) & (s \neq u) \end{cases}, \quad (3.2)$$

если  $u$  — номер передававшегося кодового слова. Здесь  $p(y)$  — безусловная вероятность  $y$ . При  $s \neq u$  случайные величины  $x_s$  и  $y$  независимы.

Для различия  $N$  гипотез  $H_1, \dots, H_N$  достаточно  $N$  раз решить задачу о различении двух гипотез  $H_k$  и  $\bar{H}_k$  (где  $\bar{H}_k$  — отрицание  $H_k$ ;  $k = 1, \dots, N$ ).

При различении гипотез  $H_k$  и  $\bar{H}_k$  будем использовать только значения  $x_k$  и  $y$ . При истинности гипотезы  $H_k$  совместное распределение вероятностей для  $x_k$  и  $y$  равно

$$p(x_k, y|H_k) = p(y|x_k) p(x_k), \quad (3.3)$$

а при истинности  $\bar{H}_k$   $x_k$  и  $y$  независимы и

$$p(x_k, y|\bar{H}_k) = p(y) p(x_k). \quad (3.4)$$

Символы  $(x_i^{(k)}, y_i)$ , стоящие на разных местах ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), статистически независимы при гипотезе  $H_k$  и при гипотезе  $\bar{H}_k$ . «Информационное расстояние» между распределениями (3.3) и (3.4) равно

$$\begin{aligned} & \int p(x_k, y|H_k) \ln \frac{p(x_k, y|H_k)}{p(x_k, y|\bar{H}_k)} dx_k dy = \\ & = \int p(y|x_k) p(x_k) \ln \frac{p(y|x_k)}{p(y)} dx_k dy = nI, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$I = \int p(x_i^{(k)}) p(y_i|x_i^{(k)}) \ln \frac{p(y_i|x_i^{(k)})}{p(y_i)} dy_i dx_i^{(k)} \equiv \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha p_\alpha^\beta \ln \frac{p_\alpha^\beta}{q_\beta}. \quad (3.6)$$

Здесь  $q_\beta = \sum_a p_a p_a^\beta$  — безусловная вероятность появления символа  $\beta$  на выходе канала.

Обозначим  $\alpha(n)$  вероятность принять гипотезу  $H_k$  при истинности  $\bar{H}_k$ , а  $\beta(n)$  — вероятность принять  $\bar{H}_k$  при истинности  $H_k$ .

Покажем, что можно обеспечить

$$\alpha(n) = \exp[-nI + o(n)], \quad \beta(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.7)$$

Укажем решающее правило для различения  $H_k$  и  $\bar{H}_k$ , для которого выполняются соотношения (3.7). Пусть  $E_1$  — множество  $(x_k, y)$ , при попадании в которое принимается гипотеза  $H_k$ , — определяется условием

$$\prod_{i=1}^n p(y_i|x_i^{(k)}) p(x_i^{(k)}) \geq e^{n(I-\varepsilon)} \prod_{i=1}^n p(x_i^{(k)}) p(y_i). \quad (3.8)$$

Из закона больших чисел следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  и  $\beta > 0$  при достаточно большом  $n$  будет (при истинности  $H_k$ )

$$P\left\{\frac{1}{n} \ln \left[ \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i^{(k)}) p(x_i^{(k)}) / \prod_{i=1}^n p(y_i) p(x_i^{(k)}) \right] < I - \varepsilon\right\} < \beta. \quad (3.9)$$

Интегрируя (3.8) по области  $E_1$ , получаем

$$1 \geq P\{E_1|H_k\} \geq e^{n(I-\varepsilon)} P\{E_1|\bar{H}_k\}, \quad (3.10)$$

т. е.  $e^{-n(I-\varepsilon)} \geq P\{E_1|\bar{H}_k\} = \alpha(n)$ , тогда как  $P\{E_1|H_k\} > 1 - \beta$ . Существует столь медленно убывающая последовательность  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ , что соответствующие ей значения  $\beta(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Например, такую  $\varepsilon(n)$  можно построить следующим образом: пусть  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $\delta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ; при  $n \geq n_k$  (зависящего от  $\varepsilon_k$ ,  $\delta_k$ ) имеем

$$P\left\{\frac{1}{n} \ln \left[ \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i^{(k)}) p(x_i^{(k)}) / \prod_{i=1}^n p(y_i) p(x_i^{(k)}) \right] < I - \varepsilon_k\right\} < \delta_k.$$

Положим  $\varepsilon(n) = \varepsilon_k$  при  $n_k \leq n < n_{k+1}$ ; тогда  $\beta(n) < \delta_k$  при  $n > n_k$ . При  $n \rightarrow \infty$  будет одновременно  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  и  $\beta(n) \rightarrow 0$ . Заменяя  $\varepsilon$  на  $\varepsilon(n)$  в (3.8), получим решающее правило, для которого  $\alpha(n) \leq \exp[-nI + o(n)]$ ,  $\beta(n) \rightarrow 0$ . Тем самым, соотношение (3.7) доказано.

Правильное распознавание  $N$  гипотез будет достигаться, когда при различии  $H_k$  и  $\bar{H}_k$  принимается  $H_k$ , если  $k$  — номер передававшегося сообщения, а при различии  $H_l$  и  $\bar{H}_l$  принимается гипотеза  $\bar{H}_l$  ( $l \neq k$ ;  $l = 1, \dots, N$ ). Вероятность одновременного осуществления нескольких событий можно оценить, зная вероятности каждого из них, при помощи неравенства Буля [6]

$$P(\bigcap_{i=1}^M C_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^M [1 - P(C_i)], \quad (3.11)$$

где  $C_i$  — некоторое событие,  $P(C_i)$  — его вероятность.

Вследствие (3.11) вероятность правильного декодирования удовлетворяет соотношению

$$1 - \beta(n) - (N-1) \alpha(n) \leq \bar{P}_1(n) \leq 1. \quad (3.12)$$

При  $n \rightarrow \infty$  с учетом (3.7) находим

$$1 - \beta(n) - (e^{Hn} - 1) \exp[-nI + o(n)] \leq \bar{P}_1(n) \leq 1. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что при  $H < I$  вероятность правильного распознавания гипотез (правильного декодирования) стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим также случай  $H > I$ . Пусть гипотезы  $H_1, \dots, H_N$  имеют априорные вероятности  $p_1, \dots, p_N$ ; пусть  $p_s = p_k = N^{-1} = e^{-nH}$ , т. е. гипотезы априори равновероятны.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int p(x_1, \dots, x_N, y|H_k) \ln \frac{p(x_1, \dots, x_N, y|H_k)}{\sum_{s=1}^N p(x_1, \dots, x_N, y|H_s) p_s} dx_1 \dots dx_N dy. \quad (3.14)$$

Нетрудно показать, что

$$J = nI + o(1), \quad (3.15)$$

где  $o(1)$  обозначает член, который стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$\frac{p(x_1, \dots, x_N, y|H_k)}{\sum_{s=1}^N p(x_1, \dots, x_N, y|H_s) p_s} = \frac{p(y|x_k)}{N^{-1} \sum_{s=1}^N p(y|x_s)}. \quad .$$

При фиксированном значении  $y$  и случайных  $x_s$  случайные величины  $\zeta_s = p(y|x_s)/p(y)$  независимы, причем  $M\zeta_s = 1$ . По закону больших чисел при  $n \rightarrow \infty$  с вероятностью единица

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \frac{p(y|x_s)}{p(y)} = 1.$$

Доказательство невозможности сколь угодно точного различения  $N = e^{Hn}$  гипотез при  $H > I$  проведем от противного.

Обозначим  $\beta_k(n)$  вероятность отвергнуть гипотезу  $H_k$ , когда она верна,  $\alpha_{lk}(n)$  — вероятность принять  $H_k$ , когда верна  $H_l$ .

Если при  $n \rightarrow \infty$  вероятность правильного распознавания гипотез стремится к единице, то хотя бы для одного  $k$  (в действительности, как нетрудно видеть, для подавляющего большинства) должно быть  $\beta_k(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\sum_{l \neq k} \alpha_{lk}(n) \rightarrow 0$ .

Пусть  $E_k$  — множество, при попадании в которое принимается гипотеза  $H_k$ ,  $\bar{E}_k$  — дополнение к этому множеству во всем пространстве возможных выборочных значений.

Представив интеграл (3.14) в виде суммы двух интегралов (по  $E_k$  и по  $\bar{E}_k$ ) и используя неравенство

$$\int_E f_1(x) \ln \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx \geq \int_E f_1(x) dx \ln \frac{\int_E f_1(x) dx}{\int_E f_2(x) dx} \quad (3.16)$$

(где  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  — плотности вероятности), доказательство которого дано в [4], гл. 2, находим

$$J = nI + o(1) \geq [1 - \beta_k(n)] \ln \left\{ [1 - \beta_k(n)] \left\{ p_k [1 - \beta_k(n)] + \sum_{s \neq k} p_s \alpha_{sk}(n) \right\}^{-1} \right\} + \\ + \beta_k(n) \ln \left\{ \beta_k(n) \left\{ 1 - p_k [1 - \beta_k(n)] - \sum_{s \neq k} p_s \alpha_{sk}(n) \right\}^{-1} \right\}. \quad (3.17)$$

При  $\beta_k(n) \rightarrow 0$  и  $\sum_{s \neq k} \alpha_{sk}(n) \rightarrow 0$  из (3.17) следует

$$nI + o(1) \geq -\ln p_k. \quad (3.18)$$

Так как априорная вероятность  $p_k = p_s = e^{-nH}$ , то из (3.18) получим  $nI + o(1) \geq nH$  и, следовательно,  $I \geq H$ . Это противоречит принятому вначале допущению  $H > I$ .

Следовательно, при  $H > I$  вероятность правильного решения не стремится к единице.

Итак, при  $H < I$  возможно сколь угодно точное различие  $e^{Hn}$  сообщений при  $n \rightarrow \infty$ , а при  $H > I$  безошибочное различение невозможно.

Выберем теперь вероятности  $p_\alpha$ , используемые при построении кодов, так, чтобы величина  $I$  была максимальной

$$C = \max I = \max_{\{p_\alpha\}} \sum_{\alpha, \beta} p_\alpha p_\beta^\beta \ln(p_\alpha^\beta q_\beta^{-1}). \quad (3.19)$$

Величина  $C$  является пропускной способностью канала связи.

Доказанные соотношения  $\bar{P}_1(n) \rightarrow 1$  при  $H < C$  и  $\bar{P}_1(n) \rightarrow 0$  при  $H > C$  ( $n \rightarrow \infty$ ) составляют содержание известной теоремы Шеннона о пропускной способности канала [7].

В [6] Флейшманом проведено статистическое доказательство теоремы Шеннона с использованием комбинаторных методов.

*Пример. Передача сообщений в двоичном симметричном канале связи.* Пусть  $(y_1, \dots, y_n)$  — принятая на выходе канала связи двоичная последовательность,  $y_i = 0, 1$ ;  $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) — набор кодовых слов, которые могут передаваться,  $x_i^{(k)} = 0, 1$ . Гипотеза  $H_k$  состоит в том, что передавалось  $k$ -е сообщение; гипотеза  $\bar{H}_k$  — передавалось какое-либо другое сообщение из  $N$  возможных. Различные кодовые слова  $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  были построены при помощи случайного выбора 0 и 1 в качестве символов, причем 0 выбирался с вероятностью  $p_0 = p$ , а 1 — с вероятностью  $p_1 = 1 - p$ . Для симметричного канала вероятности искажения символов  $p_0^1 = p_1^0 = q$ .

При описанной выше процедуре передачи сообщений, когда кодовые слова строятся случайным образом, имеем при истинности  $H_k$

$$y_i = \begin{cases} 0 & (\text{с вероятностью } p(1-q) + q(1-p) = q_0) \\ 1 & (\text{с вероятностью } pq + (1-p)(1-q) = q_1) \end{cases}$$

независимо от значения  $x_i^{(k)}$ . Пару  $z_i^{(k)} = (x_i^{(k)}, y_i)$  можно рассматривать как случайную величину, принимающую следующие значения:

$$z_i^{(k)} = \begin{cases} (1, 1) & (\text{с вероятностью } (1-p)q_1) \\ (1, 0) & (\text{с вероятностью } (1-p)q_0) \\ (0, 1) & (\text{с вероятностью } pq_1) \\ (0, 0) & (\text{с вероятностью } pq_0) \end{cases} \quad (H_0)$$

при истинности  $H_k$ , а при истинности  $\bar{H}_k$  будет

$$z_i^{(k)} = \begin{cases} (1, 1) & (\text{с вероятностью } (1-p)(1-q)) \\ (1, 0) & (\text{с вероятностью } (1-p)q) \\ (0, 1) & (\text{с вероятностью } pq) \\ (0, 0) & (\text{с вероятностью } p(1-q)) \end{cases} \quad (H_1)$$

От исходной задачи о различении  $H_k$  и  $\bar{H}_k$  переходим к задаче о различении гипотез  $H_1$  и  $H_0$  [6] относительно величин  $z_i^{(k)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). «Информационное направленное расхождение» между  $H_1$  и  $H_0$  равно  $nI$ . Найдем, раскрывая (3.17),

$$I = q \ln q + (1-q) \ln(1-q) - q_1 \ln q_1 - (1-q_1) \ln(1-q_1).$$

Максимум  $I$  при фиксированном  $q$  (канал связи задан) достигается, как нетрудно убедиться, при  $p = 1/2$  и равен

$$C = \ln 2 + q \ln q + (1-q) \ln(1-q).$$

#### 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ НАБЛЮДЕНИЯ И ПОИСКА

В [1] записано рекуррентное уравнение для функции условного риска  $S(L; m)$  — условного математического ожидания потерь, понесенных статистиком при применении оптимального решающего правила при условии, что после  $m$  наблюдений статистика  $L(x_1, \dots, x_m)$  принимает значение  $L$ .

Рассмотрим теперь случай, когда в ходе наблюдения можно не только решать, продолжать ли наблюдения или нет, но и выбирать тип эксперимента, при помощи которого надо осуществлять следующее наблюдение. Пусть, например, возможные типы экспериментов перенумерованы индексом  $l$ ;  $l \in \mathcal{E}(L; m)$  т. е. множеству экспериментов, проведение которых возможно в момент  $m$  при условии  $L(x_1, \dots, x_m) = L$ .

Условное математическое ожидание будущих потерь для оптимального решающего правила (при оптимальном управлении процессом наблюдения) при условии  $L(x_1, \dots, x_m) = L$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{S}(L; m) = \min \{ W(L; m); & \quad \min_{l \in \mathcal{E}(L; m)} [G(L; m; l) + \\ & + M\{\tilde{S}(L + \Delta L; m + 1) | L; m; l\}] \}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $W(L; m)$  — математическое ожидание штрафа за ложные решения при остановке в момент  $m$  при условии  $L(x_1, \dots, x_m) = L$ ;  $G(L; m; l)$  — математическое ожидание стоимости проведения эксперимента типа  $l$  в момент  $m$  при условии  $L(x_1, \dots, x_m) = L$ ;  $L(x_1, \dots, x_m)$  — марковская достаточная статистика. (Как и в [1], при использовании марковской недостаточной статистики соотношение (4.1) определяет правило, оптимальное при выбранной статистике  $L(x_1, \dots, x_m)$ ).

Решение рекуррентного уравнения (4.1) определяет одновременно и момент остановки, и выбор типа эксперимента в зависимости от получающихся в ходе наблюдений значений  $L$ .

Выбор управления  $l$  может предполагаться рандомизированным. Пусть  $p = \{p_l(L; m)\}$ , где  $p_l(L; m)$  обозначает вероятность выбора управления  $l$  при  $L(x_1, \dots, x_m) = L$ . Тогда функция условного риска  $\tilde{S}(L; m)$  и значения  $p(L; m)$  для оптимального правила определяются рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \tilde{S}(L; m) = \min \{ W(L; m); & \quad \min_p \left[ \sum_{l \in \mathcal{E}} p_l G(L; m; l) + \right. \\ & \left. + M\{\tilde{S}(L + \Delta L; m + 1) | L; m; p\} \right] \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как и в [1], здесь

$$M\{\tilde{S}(L+\Delta L; m+1) | L; m; l\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(L+\Delta L; m+1) P(\Delta L | L; m; l) d\Delta L,$$

$$M\{\tilde{S}(L+\Delta L; m+1) | L; m; p\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(L+\Delta L; m+1) \sum_{l \in \varepsilon} p_l P(\Delta L | L; m; l) d\Delta L.$$

Если оптимальное решение нерандомизированное, это должно получаться автоматически из (4.2).

При отсутствии необходимости остановки процесса наблюдения, т. е. в задачах оптимального управления, уравнения (4.1), (4.2) принимают вид уравнений Беллмана

$$S(L; m) = \min_{l \in \varepsilon(L; m)} M\{S(L+\Delta L; m+1) | L; m; l\}, \quad (4.3)$$

$$S(L; m) = \min_p M\{S(L+\Delta L; m+1) | L; m; p\}.$$

Функция риска  $S(L; m)$  представляет здесь некоторый критерий качества управления.

Рассмотрим следующий пример, в котором решение уравнений (4.1), (4.2) нетрудно найти в явном виде.

*a) Оптимальное планирование экспериментов в задаче о различии двух близких гипотез.* Пусть  $l = 1, 2, \dots, \varepsilon$  — номера возможных типов экспериментов; при проведении эксперимента типа  $l$  наблюдаемая величина имеет плотность распределения вероятностей  $f_i^{(l)}(x)$  при гипотезе  $H_i$  ( $i=1, 2$ ). Стоимость эксперимента типа  $l$  равна  $G_l$ . Рассмотрим задачу о различии двух гипотез  $H_1$  и  $H_2$ . Пусть наблюдения — при выбранных типах экспериментов — независимы. Тогда марковской достаточной статистикой является логарифм отношения правдоподобия

$$L(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m \ln \frac{f_1^{(l_k)}(x_k)}{f_2^{(l_k)}(x_k)}, \quad (4.4)$$

где  $l_k$  — номер эксперимента, проведенного для получения  $k$ -го наблюдения. Для приращения  $\Delta L$  при проведении  $l$ -го эксперимента при гипотезе  $H_i$  имеем

$$M\{\Delta L | H_i; l\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^{(l)}(x) \ln \frac{f_1^{(l)}(x)}{f_2^{(l)}(x)} dx. \quad (4.5)$$

В случае близких гипотез, как показано в [8], имеем асимптотические соотношения

$$M\{\Delta L | H_1; l\} = -M\{\Delta L | H_2; l\} = \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{2} D\{\Delta L | H_1; l\} = \frac{1}{2} D\{\Delta L | H_2; l\} = \alpha_l, l;$$

обозначим  $\alpha_l$ ,  $l$  через  $\alpha_l$ . Величина  $\alpha_l = I_l (1:2)$  — средняя информация в  $x$  для различия  $H_1$  и  $H_2$  при проведении эксперимента  $l$ -го типа.

Аналогично [1] уравнение (4.2) можно записать тогда в виде

$$-\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \min_{p=\{p_l\}} \left\{ \sum_{l \in \varepsilon} p_l \alpha_l \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial L^2} + \frac{\gamma e^L - 1}{\gamma e^L + 1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial L} \sum_{l \in \varepsilon} p_l \alpha_l + \sum_l p_l G_l \right\}, \quad (4.7)$$

что соответствует непрерывному времени наблюдения или асимптотическому случаю большого числа наблюдений, каждое из которых дает малое приращение величине  $L$ .

В стационарной задаче, где  $f_i^{(t)}(x)$  не зависит от времени наблюдения,  $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$ , для  $\tilde{S}(L)$  получается уравнение эллиптического типа

$$\min_p \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial^2 L} + \frac{\gamma e^L - 1}{\gamma e^L + 1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial L} + \frac{\sum_{l \in \varepsilon} p_l G_l}{\sum_{l \in \varepsilon} p_l \alpha_l} \right\} = 0 \quad (4.8)$$

в области продолжения наблюдений с граничным условием

$$\tilde{S}(L)|_{L \in \Gamma} = \min \left[ W_{12} \frac{\gamma e^L}{1 + \gamma e^L}; \quad W_{21} \frac{1}{1 + \gamma e^L} \right] \quad (4.9)$$

на границе области (здесь  $W_{ij}$  — штраф за выбор гипотезы  $H_j$  при истинности  $H_i$ ;  $W_{11} = W_{22} = 0$ ;  $\gamma = P_{1 \text{ априор}}/P_{2 \text{ априор}}$  — отношение априорных вероятностей гипотез  $H_1$  и  $H_2$ ).

Наименьшему риску  $\tilde{S}(L)$  соответствует выбор  $p = \{p_l\}$ , который обращает в минимум величину  $\sum_l p_l G_l / \sum_l p_l \alpha_l$ . Это следует из принципа максимума для эллиптических уравнений. Если  $M(x)$  — функция, удовлетворяющая эллиптическому уравнению

$$\sum_{i,j} b_{ij}(x) \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x) \frac{\partial M(x)}{\partial x_i} = -C$$

в некоторой области  $x \in D$  и  $g(x)$  — некоторая функция, такая, что на границе области

$$g(x)|_{\Gamma} \geq M(x)|_{\Gamma},$$

а внутри области

$$\sum_{i,j} b_{ij}(x) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i} \leq -C,$$

то  $g(x) \geq M(x)$ .

Минимум  $\sum_l p_l G_l / \sum_l p_l \alpha_l$  достигается при  $p_k = 1, p_j = 0 (j \neq k)$ , где  $k$  — номер, соответствующий максимуму  $\max_l \{a_l/G_l\} = \alpha_k/G_k$ . Таким образом, в рассматриваемой задаче следует выбирать тот тип экспериментов, для которого максимально отношение ожидаемого количества информации к стоимости эксперимента.

б) *Планирование экспериментов в задаче о различении  $N$  равноправных гипотез.* В задачах о различении  $N$  гипотез  $H_1, \dots, H_N$ , где ложные решения одинаково нежелательны при истинности любой из гипотез (т. е. одинаковы допустимые вероятности ложных решений или штрафы), можно предложить следующее последовательное решающее правило.

Пусть  $p_i^n$  — апостериорная вероятность гипотезы  $H_i$  после  $n$  наблюдений;  $p^n = \{p_i^n\}$ ;

$$H(p^n) = - \sum_{i=1}^N p_i^n \ln p_i^n \quad (4.10)$$

— энтропия. Величина  $H(p^n)$  сравнивается с некоторым уровнем  $\varepsilon$ , который выбирается в зависимости от требуемых вероятностей ложных решений или заданных штрафов за ошибки. При  $H(p^n) > \varepsilon$  делается еще одно наблюдение  $x_{n+1}$ ; апостериорные вероятности гипотез пересчитываются по рекуррентной формуле

$$p_i^{n+1} = p_i^n p(x_{n+1}|H_i) / \sum_{k=1}^N p_k^n p(x_{n+1}|H_k) \quad (4.11)$$

$$(i = 1, \dots, N)$$

(где  $p(x_{n+1}|H_i)$  — плотность распределения для  $x_{n+1}$  при истинности гипотезы  $H_i$ ; наблюдения независимы); вычисляется  $H(p^{n+1})$  и снова сравнивается с уровнем  $\varepsilon$ . При  $H(p^n) \leq \varepsilon$  принимается та гипотеза  $H_k$  апостериорная вероятность которой максимальна:

$$p_k^n = \max_{1 \leq i \leq N} p_i^n.$$

Если, как и выше,  $l = 1, \dots, \mathcal{E}$  — номера возможных типов экспериментов, причем  $p(x|H_l; l) = f_l(x)$  и стоимость эксперимента  $G_l$ , то для указанного выше последовательного решающего правила оптимальное планирование экспериментов сводится к выбору того эксперимента  $l$  для проведения  $(n+1)$ -го наблюдения, для которого максимальна величина

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_l} [H(p^n) - M\{H(p^{n+1}) | p^n; l\}] = \\ = \frac{1}{G_l} \sum_{l=1}^N \int p_l^n f_l^{(l)}(x) \ln \frac{f_l^{(l)}(x)}{\sum_{k=1}^N p_k^n f_k^{(l)}(x)} dx, \end{aligned} \quad (4.12)$$

представляющая собой отношение ожидаемого количества информации при выборе  $l$ -го эксперимента для  $(n+1)$ -го наблюдения к его стоимости  $G_l$ .

Подобное последовательное решающее правило было предложено и использовано в работе Неймарка и Стронгина [9] в более сложной обстановке — в задаче последовательного планирования экспериментов при поиске экстремума.

*в)* Решение уравнения (4.1) можно построить при помощи метода последовательных приближений по схеме

$$\begin{aligned} S_{n+1}(L; m) = \min \{ W(L; m); \min_{l \in \mathcal{E}(L; m)} [G(L; m; l) + \\ + M\{S_n(L + \Delta L; m + 1) | L; m; l\}] \} \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$(n \geq 0).$$

При этом, если в качестве начального приближения берется

$$S_0(L; m) \equiv W(L; m), \quad (4.14)$$

получается убывающая последовательность

$$S_0 \geq S_1 \geq \dots \geq \tilde{S}; \quad S_n(L; m) \rightarrow \tilde{S}(L; m) \quad (n \rightarrow \infty)$$

и уравнение  $S_n(L; m) = W(L; m)$  дает оценку «изнутри» для области продолжения наблюдений. Если же положить  $S_0 \equiv 0$  или (что эквива-

лентно)  $S_0(L; m) = \min_{l \in \Sigma} [W(L; m); \min_{l \in \Sigma} G(L; m; l)]$ , получится возрастающая последовательность  $S_n(L; m) \rightarrow \tilde{S}(L; m)$  и оценки «извне» для области продолжения наблюдений [10].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Выход оценок 1)–3) раздела 1 сводится кратко к следующему. Рассмотрим случай 3). Выход оценки (1.5) для случая 3), (где  $J(p) - J(p')$  заменено на  $I(p:p')$ ) основан на решении задачи на условный экстремум [2, 3].

Найти функцию  $u_0(x, \theta)$  ( $p_0(x, \theta) = u_0(x, \theta)p'(x, \theta)$ ), для которой

$$I(p_0: p') = \int [u_0(x, \theta) \ln u_0(x, \theta)] p'(x, \theta) dx d\theta = \min \quad (\text{П.1})$$

при условиях

$$\int u_0(x, \theta) p'(x, \theta) dx d\theta = 1, \quad (\text{П.2})$$

$$\int u_0(x, \theta) p'(x, \theta) W(\theta; b(x)) dx d\theta = r. \quad (\text{П.3})$$

Используя метод множителей Лагранжа для решения задачи на условный экстремум, находим, что

$$u_0(x, \theta) = \exp [\lambda W(\theta; b(x)) + \mu],$$

где константы  $\lambda$  и  $\mu$  следует определить из условий

$$\int \exp [\lambda W(\theta; b(x)) + \mu] p'(x, \theta) dx d\theta = 1, \quad (\text{П.4})$$

$$\int W(\theta; b(x)) \exp [\lambda W(\theta; b(x)) + \mu] p'(x, \theta) dx d\theta = r. \quad (\text{П.5})$$

Предполагая, что  $\lambda$  и  $\mu$  как функции от  $r$  дифференцируемы, получим из (П.4), (П.5)

$$\lambda'(r) = \frac{1}{r(W^2) - r^2}, \quad \mu'(r) = -\frac{r}{r(W^2) - r^2}, \quad (\text{П.6})$$

где обозначено

$$r(W^2) = \int W^2(\theta; b(x)) p_0(\theta; x) dx d\theta.$$

Имеем также

$$I(p_0: p') = \int (\lambda W + \mu) \exp(\lambda W + \mu) p'(\theta; x) dx d\theta = \lambda r + \mu.$$

Обозначим  $I(p_0: p') = I_0(r)$ ; с учетом (П.6) находим

$$\frac{d}{dr} I_0(r) = \lambda(r), \quad I_0(r') = \lambda(r') = \mu(r') = 0. \quad (\text{П.7})$$

Если  $W(\theta; b(x)) < W_0$ , то  $r(W^2) - r^2 < W_0 r - r^2$ ,

$$\lambda'(r) = \frac{1}{r(W^2) - r^2} > \frac{1}{r(W_0 - r)}.$$

Отсюда с учетом (П.7) получаем

$$I_0(r) \geq \frac{1}{W_0} \left[ r \ln \frac{r}{r'} + (W_0 - r) \ln \frac{W_0 - r}{W_0 - r'} \right], \quad (\text{П.8})$$

что и доказывает оценку.

Выход оценки (1.6) для случая 3), (где  $J(p) - J(p')$  заменено на  $I(p:p')$ ) также элементарен и состоит в следующем.

Имеем

$$\begin{aligned} r' - r &= \int W(\theta; b(x)) [p'(x, \theta) - p(x, \theta)] dx d\theta = \\ &= \int W(\theta; b(x)) [1 - u(x, \theta)] p'(x, \theta) dx d\theta < \int_B W(\theta; b(x)) [1 - u(x, \theta)] p'(x, \theta) dx d\theta < \\ &\leq \left[ \int_B W^2(\theta; b(x)) p'(x, \theta) dx d\theta \right]^{1/2} \left\{ \int_B [1 - u(x, \theta)]^2 p'(x, \theta) dx d\theta \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

где  $u(x, \theta)$ , как и выше, равно  $p(x, \theta)/p'(x, \theta)$ ;  $B$ — множество точек  $(x, \theta)$ , в которых  $u(x, \theta) < 1$ .

Имеем также

$$\begin{aligned} I(p:p') &= \int u(x, \theta) \ln u(x, \theta) p'(x, \theta) dx d\theta = \\ &= \int \left\{ [u(x, \theta) - 1] + \frac{1}{2h(x, \theta)} [u(x, \theta) - 1]^2 \right\} p'(x, \theta) dx d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{[u(x, \theta) - 1]^2}{2h(x, \theta)} p'(x, \theta) dx d\theta, \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

где значение  $h(x, \theta)$  лежит между  $u(x, \theta)$  и 1. При записи соотношения (П.10) использовано представление функции  $u$  лн  $u$  отрезком ряда Тейлора в окрестности точки  $u=1$ :

$$u \ln u = (u-1) + (u-1)^2/2h.$$

Имеем далее

$$I(p:p') \geq \frac{1}{2} \int_B \frac{[u(x, \theta) - 1]^2}{h(x, \theta)} p'(x, \theta) dx d\theta \geq \frac{1}{2} \int_B [u(x, \theta) - 1]^2 p'(x, \theta) dx d\theta, \quad (\text{П.11})$$

так как на множестве  $B$   $u(x, \theta) < 1$  и  $h(x, \theta) < 1$ . Отсюда и следует неравенство

$$r' - r \leq [r(W^2) 2I(p:p')]^{1/2}. \quad (\text{П.12})$$

Аналогично можно доказать, что

$$r - r' \leq [r(W^2) 2I(p':p)]^{1/2}.$$

Нетрудно доказать, что оценки (П.8), (П.12) выполняются (и подавно) и для разности байесовских рисков  $r_0 - r_0'$ .

Справедливость оценок (1.5), (1.6) для случаев редукции пространства  $(x, \theta)$  к  $(x', \theta')$  следует из того, что можно установить [2] соответствие между редуцированным пространством  $(x', \theta')$  с мерой  $p'(x', \theta')$  и исходным пространством  $(x, \theta)$  с мерой  $p(x, \theta)$ , причем  $J(p(x, \theta)) = J(p'(x', \theta'))$ , байесовские риски  $r_0(p(x, \theta)) = r_0(p'(x', \theta'))$  и  $I(p:p') = J(p) - J(p')$ .

Оценки (1.5), (1.6) выполняются в случае, когда вероятностная мера  $p'(x', \theta')$  на редуцированном пространстве  $(x', \theta')$  порождена мерой  $p(x, \theta)$  на исходном пространстве  $(x, \theta)$ . Здесь  $x$  может представлять результаты наблюдений или функции от них (статистики), а  $x' = x'(x)$  — величина, значения которой и распределение вероятностей  $p'(x', \theta')$  определяются значениями  $x$  и распределением  $p(x, \theta)$  на исходном пространстве  $(x, \theta)$ . Неравенства (1.5), (1.6) позволяют, в частности, оценивать увеличение риска при переходе от достаточных статистик  $x$  к другим  $x'$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. З. М. Бененсон, Э. М. Хазен, Изв АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 14 (1966).
2. А. Регез, Kybernetika, 1, № 4, 1 (1965).
3. А. Регез, Kybernetika, 3, № 1, 1 (1967).
4. S. Kullback, Information Theory and Statistics, N.—Y., Wiley, 1959 (русский перевод, С. Кульбак, Теория информации и статистика, изд. Наука, М., 1967).
5. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948
6. Б. С. Флейшман, Конструктивные методы кодирования для каналов с шумами, изд. АН СССР, М., 1963.
7. К. Шеннон, Математическая теория связи, сб. К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963
8. M. S. Bartlett, Proc. Camb. Phil. Soc., 42, 239 (1946).
9. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Автоматика и телемеханика, 23, 113 (1966); Изв АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 17 (1966)
10. Э. М. Хазен, сб. Статистические методы оптимизации, изд. Зиннатне, Рига, 1968.

INFORMATION MEASURES IN OPTIMAL STATISTICAL  
DECISION PROBLEMS*Z. M. Benenson, E. M. Khazen*

Some estimations are considered connecting the decrease of Shannon's information and increasing of risk in optimal statistical decision problems when the observed data is reduced, or sufficient statistic is substituted by another one, or probability distributions are changed. These estimations are important for designing optimal statistical decision rules when the necessary "storage space" is limited and some requirements for simplicity of implementation and stability are imposed. A new statistical proof is provided for the known Shannon's theorem on the transfer capacity of channel. In this case the decoding problem is considered as discrimination between many statistical hypothesis. Some problems of optimal design of experiments in sequential analysis are solved.

---

УДК 519.21

## К ОТЫСКАНИЮ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

*M. L. Tai*

Предложен метод отыскания плотности вероятности перехода марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии. Приведен пример.

В [1] было предложено использовать аппарат теории марковских процессов для статистического рассмотрения динамических систем. Этот подход позволил найти некоторые общие закономерности влияния случайных возмущений на динамические системы, а также исследовать ряд конкретных задач. Для изучения влияния случайных воздействий на разрывные динамические системы Хазен [2] были исследованы марковские процессы с разрывными коэффициентами сноса и полученные результаты применены к анализу систем автоматического управления. Марковские процессы с разрывными коэффициентами сноса  $A_i(x)$  и диффузии  $B_{ij}(x)$  рассматривались в [3–5], причем в [4] доказано, что при естественных предположениях плотность вероятности перехода  $f(x, t, y)$  многомерного марковского процесса, к которому сводится исследование влияния случайных возмущений на существенно нелинейные динамические системы с помощью кусочно-непрерывных моделей, удовлетворяет вне поверхностей разрыва уравнению Фоккера—Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t, y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (A_i(y) f(x, t, y))}{\partial y_i} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 (B_{ij}(y) f(x, t, y))}{\partial y_i \partial y_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

а на каждой поверхности — двум условиям сопряжения

$$[B_n(u) f(x, t, u)] = 0, \quad (2)$$

$$[(P(u) n(u)) \sqrt{\Delta(u)}] - \frac{1}{2} \operatorname{div} [Q(u)] = 0. \quad (3)$$

Если поверхность  $S$  задана в виде  $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_{n-1})$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то в (2) и (3)  $\Delta(u) = \sum_{i=1}^n \Delta_{in}^2(u)$ , причем  $\Delta_{ij}(u)$  — алгебраическое дополнение элемента  $i$ -й строки,  $j$ -го столбца матрицы

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_1 u_1 & \varphi_1 u_2 & \dots & \varphi_1 u_{n-1} & \Delta^{1,n} \\ \varphi_2 u_1 & \varphi_2 u_2 & \dots & \varphi_2 u_{n-1} & \Delta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n u_1 & \varphi_n u_2 & \dots & \varphi_n u_{n-1} & \Delta_{n,n} \end{vmatrix}$$

$n(n_1, \dots, n_n)$  — вектор единичной нормали к  $S$  в точке  $u$ ,  $n_i = \Delta_{in}(u)/\sqrt{\Delta(u)}$ ,  $P(u)$  — поток плотности вероятности перехода в точке  $u$ ;  $Q(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ , где  $Q_k = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} f \frac{\Delta_{ik} \Delta_{jn}}{\Delta}$ ,  $B_n = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} n_i n_j$ , а  $[F] = F(u_1, \dots, u_{n-1}, +0) - F(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)$ .

В настоящей заметке излагается один из способов, позволяющий найти плотность вероятности перехода  $f(x, t, y)$   $n$ -мерного марковского процесса.

Пусть на гладких двухсторонних поверхностях  $S_1, \dots, S_m$  без пересечений и особых точек имеют место разрывы коэффициентов сноса и диффузии. Обозначим непересекающиеся области непрерывности коэффициентов  $A_i(x)$  и  $B_{ij}(x)$ , разделенные поверхностями  $S_1, \dots, S_m$ , через  $V_1, V_2, \dots, V_{m+1}$  и введем вспомогательные функции  $Z_1(x, t, y)$ ,  $Z_2(x, t, y), \dots, Z_{m+1}(x, t, y)$ , определенные на всем пространстве  $V$  и удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_k(x, t, y)}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial y_l} \{A_l^{(k)}(y) Z_k(x, t, y)\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \{B_{ij}^{(k)}(y) Z_k(x, t, y)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_l^{(k)}(y)$  и  $B_{ij}^{(k)}(y)$  — аналитические продолжения на все пространство функций  $A_l(y)$  и  $B_{ij}(y)$ , определенных в области  $V_k$ . Тогда

$$Z_k(x, t, y) = \int_V \psi_k(x, \xi) G_k(\xi, t, y) dV_\xi, \quad (5)$$

где  $G_k(\xi, t, y)$  — функция Грина для  $k$ -го уравнения (4), а  $\psi_k(x, \xi) = Z_k(x, 0, \xi)$ . Используя произвол в выборе  $\psi_k(x, \xi)$ , потребуем выполнения равенства  $f(x, t, y) = Z_k(x, t, y)$  при всех  $t, x$  и  $y \in V_k$ . Для этого необходимо, чтобы при  $\xi \in V_k$

$$\psi_k(x, \xi) = \begin{cases} \delta(x - \xi), & \text{если } x \in V_k \\ 0, & \text{если } x \notin V_k \end{cases}. \quad (6)$$

Кроме того, условия сопряжения дают систему интегральных уравнений, которым должны удовлетворять  $\psi_k(x, \xi)$ ,  $\xi \in \bar{V}_k = V - V_k$ . Пусть  $\bar{V}_k$  состоит из  $r_k$  компонент (связных областей)  $\bar{V}_{k1}, \dots, \bar{V}_{kr_k}$ . Тогда каждая подлежащая определению функция  $\psi_k(x, \xi)$  ( $k=1, \dots, m+1$ ;  $\xi \in \bar{V}_k$ ) порождает  $r_k$  функций  $\psi_{kr_l}(x, \xi) = \psi_k(x, \xi)$ , определенных при  $\xi \in \bar{V}_{k,r_l}$  ( $l=1, \dots, k$ ). Поскольку  $\sum_{k=1}^{m+1} r_k = 2m^*$ , подставляя (5) в условия

\* Доказательство легко проводится по индукции.

сопряжения (2) и (3), получаем систему  $2m$  интегральных уравнений Фредгольма первого рода с  $2m$  неизвестными функциями  $\psi_1, \dots, \psi_{m+1}, \varphi_{m+1}$ . Решение этой системы интегральных уравнений дает явное выражение для плотности вероятности перехода и может быть выполнено численно с помощью ЭВМ, а в некоторых случаях и аналитически.

Приведем пример, допускающий аналитическое решение.

Пусть  $\eta(t)$  —  $n$ -мерный марковский процесс, коэффициенты сноса и диффузии которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A_\alpha(y) &= 0 \quad (1 \leq \alpha \leq n), \\ B_{ij}(y) &= b_{ij}, \quad B_{in}(y) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n-1), \\ B_{nn}(y) &= \begin{cases} b_1^2, & y_n < 0, \\ b_2^2, & y_n > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку поверхностью разрыва является плоскость  $y_n = 0$  (положим  $u_i = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), условия сопряжения (2) и (3) дают

$$\begin{aligned} [B_{nn} f(x, t, y)] &= 0 \\ \sqrt{n} [(P_n)] - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_k} [B_{kn} f] &= 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

и в силу (7)

$$[B_{nn} f] = 0, \left[ \frac{\partial}{\partial y_n} (B_{nn} f) \right] = 0. \quad (8b)$$

Обозначим через  $V_1$  область  $y_n < 0$ , а через  $V_2$  область  $y_n > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} G_k(\xi, t, y) &= \frac{1}{b_k[(2\pi)^n M_{nn} t]^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^{(k)} (y_i - \xi_i) (y_j - \xi_j) + M_{nn} (y_n - \xi_n)^2}{2b_k^2 M_{nn} t} \right], \end{aligned}$$

где  $M_{ij}^{(k)}$  — алгебраическое дополнение элемента  $i$ -й строки,  $j$ -го столбца матрицы  $\|B_{ij}^{(k)}\|$ .

Рассмотрим плотность вероятности перехода  $f(x, t, y)$  при  $x \in V_1$ . Тогда согласно (5), (6), (8b)  $\psi_1(x, \xi) = \delta(\xi - x)$ ,  $\xi \in V_1$  и  $\psi_2(x, \xi) = 0$ ,  $\xi \in V_2$ , а неизвестные функции  $\psi_{11}(x, \xi)$ ,  $\xi \in V_2$  и  $\psi_{21}(x, \xi)$ ,  $\xi \in V_1$  являются решениями системы

$$\begin{aligned} B_{nn}^{(1)} [G_1(x, t, y) + \int_{V_1} \psi_{11}(x, \xi) G_1(\xi, t, y) dV_\xi] |_{y_n=0} &= \\ = B_{nn}^{(2)} \int_{V_1} \psi_{21}(x, \xi) G_1(\xi, t, y) dV_\xi |_{y_n=0}, & \quad (9) \\ \int_{V_2} \psi_{11}(x, \xi) \frac{\partial G_1(\xi, t, y)}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} dV_\xi + \frac{\partial G_1(x, t, y)}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} &= \\ = \int_{V_1} \psi_{21}(x, \xi) \frac{\partial G_2(\xi, t, y)}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0} dV_\xi. & \end{aligned}$$

Будем искать функции  $\psi_{11}$  и  $\psi_{21}$  в виде

$$\psi_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \xi) = k_\alpha \delta(\xi - \mathbf{x}^{(\alpha)}), \quad \mathbf{x}^{(\alpha)} \in V_\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \quad (10)$$

где  $k_\alpha$  и  $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \{x_1^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)}\}$  — искомые константы. Подстановка (10) в (9) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} & b_1 \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(1)} (y_i - x_i)(y_j - x_j)}{2b_1^2 M_{nn} t} - \frac{x_n^2}{2b_1^2 t} \right] + \\ & + k_1 b_1 \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(1)} (y_i - x_i^{(1)})(y_j - x_j^{(1)})}{2b_1^2 M_{nn} t} - \frac{(x_n^{(1)})^2}{2b_1^2 t} \right] = \\ & = k_2 b_2 \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(2)} (y_i - x_i^{(2)})(y_j - x_j^{(2)})}{2b_2^2 M_{nn} t} - \frac{(x_n^{(2)})^2}{2b_2^2 t} \right], \\ & \frac{1}{b_1} x_n \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(1)} (y_i - x_i)(y_j - x_j) + M_{nn} x_n^2}{2b_1^2 M_{nn} t} \right] + \\ & + \frac{1}{b_1} k_1 x_n^{(1)} \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(1)} (y_i - x_i^{(1)})(y_j - x_j^{(2)})}{2b_1^2 M_{nn} t} - \frac{(x_n^{(1)})^2}{2b_1^2 t} \right] = \\ & = \frac{x_n^{(2)} k_2}{b_2} \exp \left[ - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} M_{ij}^{(2)} (y_i - x_i^{(2)})(y_j - x_j^{(2)})}{2b_2^2 M_{nn} t} - \frac{(x_n^{(2)})^2}{2b_2^2 t} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$k_2 = \frac{2}{1+\gamma}, \quad k_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \gamma = \frac{b_2}{b_1},$$

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = x_i \quad (i < n), \quad x_n^{(1)} = -x_n, \quad x_n^{(2)} = \gamma x_n$$

и, следовательно, при  $\mathbf{x} \in V_1$

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \begin{cases} G_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + k_1 G_1(\mathbf{x}^{(1)}, t, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in V_1 \\ k_2 G_2(\mathbf{x}^{(2)}, t, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in V^2 \end{cases}.$$

Аналогично при  $\mathbf{x} \in V_2$

$$f(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \begin{cases} l_1 G_1(\mathbf{x}^{(1)}, t, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in V_1 \\ G_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + l_2 G_2(\mathbf{x}^{(2)}, t, \mathbf{y}), & \mathbf{y} \in V_2 \end{cases},$$

причем

$$l_1 = \frac{2}{1+\gamma}, \quad l_2 = -\frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad \gamma = \frac{b_1}{b_2},$$

$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = x_i \quad (i < n), \quad x_n^{(2)} = -x_n, \quad x_n^{(1)} = \gamma x_n.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт, ЖЭТФ, 3, 165 (1933).
2. Э. М. Хазен, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 3, 58 (1961). Теория вероятностей и ее применения, 6, 130 (1961); 6, 234 (1961); 7, (1962)
3. К. Дж. Мерклингер, Труды II международного конгресса ИФАК, Оптимальные системы. Статистические методы, изд. Наука, М., 1965
4. М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 341 (1965), 8, 834 (1965); 9, 749 (1966).
- 5 Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, 704 (1963).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 мая 1967 г.

TO THE DETERMINATION OF TRANSITION  
PROBABILITY DENSITY FOR THE MARKOVIAN PROCESS

*M. L. Tay*

A method for transition probability density determination for the Markovian process with discontinuous carry-over factor and diffusion coefficient is suggested. An example is provided.

УДК 517.93

## К ТЕОРИИ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*К. Г. Валеев*

Излагаются замечания, связанные с методом точечных отображений, стробоскопическим методом и асимптотическим методом решения нелинейных дифференциальных уравнений. Указывается взаимосвязь этих методов с нелинейными разностными уравнениями. Для последних изучаются свойства решений. Многие выводы приводятся в упрощенной форме.

### 1. ВВЕДЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система дифференциальных уравнений  $m$ -го порядка

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X, \mu). \quad (1.1)$$

Правая часть  $F(t, X, \mu)$  предлагается  $N$  раз дифференцируемой по всем аргументам в области  $D$

$$|t| < \infty, |X| < H_0, |\mu| < M_0. \quad (1.2)$$

За норму вектора  $X = (x_1, \dots, x_m)$  и матрицы  $A = \|a_{sj}\|_1^m$  будем принимать соответственно

$$|X| = \max_j |x_j|, |A| = \max_j \sum_{s=1}^m |a_{sj}| \quad (j = 1, \dots, m). \quad (1.3)$$

Особо будет рассматриваться случай аналитической правой части  $F(t, X, \mu)$ . В большей части работы будем предполагать, что время  $t$  входит периодически в (1.1).

$$F(t + 2\pi, X, \mu) \equiv F(t, X, \mu). \quad (1.4)$$

Обозначим через  $\Phi(t, X, \mu)$  решение системы (1.1) с начальным условием

$$\Phi(0, X_0, \mu) = X_0. \quad (1.5)$$

Предположим, что решения системы (1.1) таковы, что при  $\mu = 0$  они становятся периодическими с периодом  $2\pi$ , т. е.

$$\Phi(t + 2\pi, X_0, 0) \equiv \Phi(t, X_0, 0). \quad (1.6)$$

Это предположение часто выполняется для систем с колебательными решениями. Иногда удается систему (1.1) привести к стандартной форме

$$\frac{dX}{dt} = \mu F(t, X, \mu), \quad F(t + 2\pi, X, \mu) \equiv F(t, X, \mu), \quad (1.7)$$

удобной для применения асимптотических методов [1]. В этом случае при  $\mu = 0$  все решения системы (1.7) постоянны и удовлетворяют условию (1.5).

Положим по определению

$$X_n = \Phi(2\pi n, X_0, \mu). \quad (1.8)$$

В силу периодичности правой части системы (1.1) будет выполняться условие

$$X_{n+1} = \Phi(2\pi, X_n, \mu). \quad (1.9)$$

Таким образом, систему нелинейных разностных уравнений можно записать в виде

$$X_{n+1} = X_n + \mu \Psi(X_n, \mu). \quad (1.10)$$

Это следует из (1.6), так как при  $\mu = 0$  отображение  $X_n$  в  $X_{n+1}$  является тождественным. Рассмотрению системы (1.9) посвящено большое число работ, часть из которых указана в [2]. Приложению метода точечных отображений много внимания уделено в [3]. Наибольшее развитие метод точечных отображений получил в работах математиков г. Горького. Основной недостаток метода точечных отображений состоит в малой изученности свойств решений разностных уравнений, в отсутствии общих методов их решения. В настоящей работе рассматриваются разностные уравнения частного вида (1.10), для которых предлагается асимптотический способ решения.

Предварительно перейдем от системы (1.10) к более общей системе разностных уравнений с непрерывно изменяющимся аргументом  $\tau$ . Положив

$$X_n = Z(n\mu, \mu) \quad (n\mu = \tau, \mu \geq 0), \quad (1.11)$$

получим систему разностных уравнений

$$Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu \Psi(Z(\tau, \mu), \mu), \quad Z(0, \mu) = X_0. \quad (1.12)$$

Переменную  $\tau$  обычно называют медленным временем [40]. Чтобы выполнялись равенства (1.11), достаточно считать

$$\tau = \frac{\mu}{2\pi} t. \quad (1.13)$$

*Замечание 1.* Переменная  $\tau$  (медленное время) может с самого начала входить в систему дифференциальных уравнений (см. [4]), т. е. может быть рассмотрена система

$$\frac{dX}{dt} = \mu F(t, X, \mu, \tau) \quad (\tau = \mu t/2\pi). \quad (1.14)$$

В этом случае отображение, подобное (1.10), примет вид

$$X_{n+1} = X_n + \mu \Psi(n\mu, X_n, \mu). \quad (1.15)$$

Соответственно система (1.12) будет иметь вид

$$Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu \Psi(\tau, Z(\tau, \mu), \mu), \quad Z(0, \mu) = X_0; \quad (1.16)$$

$$\Psi(\tau, Z, \mu) = \Psi_0(\tau, Z) + \mu \Psi_1(\tau, Z) + \mu^2 \Psi_2(\tau, Z) + \dots \quad (1.17)$$

Общие способы исследования будут применены сразу к системе (1.16).

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основной смысл перехода от системы (1.10) к системе (1.12) состоит в возможности применения к системе (1.12) дифференциального и интегрального исчисления. Будем рассматривать систему разностных

уравнений (1.16) более общую, чем (1.12). Предполагаем, что правая часть  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  имеет ограниченные производные до  $N$ -го порядка включительно в некоторой области  $D_1$ ,  $D_1 \subset D$  (1.2). Берем предположение, что рассматриваемые решения  $\Phi(t, X, \mu)$  системы (1.1) и  $Z(\tau, \mu)$  системы (1.16) лежат вместе с некоторой окрестностью в области  $D$  (1.2). Решение системы (1.16) будем искать в виде разложения по степеням малого параметра

$$Z(\tau, \mu) = Z_0(\tau) + \mu Z_1(\tau) + \dots + \mu^{N-1} Z_{N-1}(\tau) + \mu^N R_N(\tau, \mu). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.16) и разлагая полученный результат по степеням  $\mu$  до  $N$  степени включительно, приходим к уравнениям для отыскания векторов  $Z_j(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_0}{d\tau} &= \Psi(\tau, Z_0, 0), \quad Z_0(0) = X_0; \\ \frac{dZ_j}{d\tau} &= \frac{D\Psi(\tau, Z_0, 0)}{DZ_0} Z_j + G_j(Z_0, \dots, Z_{j-1}), \\ Z_j(0) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор  $Z_0(\tau)$  будет зависеть от  $m$ -произвольных параметров — проекций вектора  $X_0$ . Система (2.2) в общем случае нелинейна. Системы (2.3) будут линейными неоднородными. Однородная их часть будет совпадать с уравнениями в вариациях для системы (2.2). Неоднородная часть  $G_j(Z_0, \dots, Z_{j-1})$  обозначает вектор, проекции которого являются полиномами от проекций уже вычисленных векторов  $Z_0, \dots, Z_{j-1}$ . Они содержат операцию дифференцирования. При этом векторы  $Z_j(\tau)$  будут  $N+1-j$  раз дифференцируемы по  $\tau$ .

*Замечание 2.* Если правая часть  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  в (1.16) аналитична по всем переменным, то все векторы  $Z_j(\tau)$  также получаются аналитическими. При этом ряд

$$Z(\tau, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j(\tau) \mu^j \quad (2.4)$$

может оказаться расходящимся при любом  $\mu \neq 0$ . Одну из причин этого можно уяснить на следующем примере, где показано, что параметр  $\mu$  может входить в решение сложным образом.

*Пример 1.* Рассмотрим разностное уравнение

$$z(\tau + \mu, \mu) - z(\tau, \mu) = \mu(\tau + i)^{-2} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (2.5)$$

Его решение можно получить, заменяя в (2.5)  $\tau$  на  $\tau + \mu k$  и складывая полученные равенства

$$z(\tau, \mu) = -\mu \sum_{k=0}^{\infty} (\tau + i + k\mu)^{-2}. \quad (2.6)$$

Решение (2.6) не разлагается в сходящийся степенной ряд по степеням  $\mu$ , хотя ряд (2.6) сходится при любых вещественных значениях  $\mu \neq 0$ . Введем мероморфную функцию с полюсами на вещественной оси

$$s(w) = -\sum_{k=0}^{\infty} (w + i)^{-2}. \quad (2.7)$$

Используя  $s(w)$ , решение (2.6) можно записать в виде

$$z(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} s \left( \frac{\tau + i}{\mu} \right). \quad (2.8)$$

Решение  $z(\tau, \mu)$  имеет в точке  $\mu = 0$  особенность. Из (2.6) следует, что при каждом закрепленном  $\tau$  точка  $\mu = 0$  является точкой сгущения полюсов, расположенных в точках

$$\mu = -k^{-1}(\tau + i) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

*Замечание 3.* Разложение (2.1) определяет лишь частное решение системы (1.16), содержащее  $m$  произвольных параметров. Общее решение зависит от  $m$  периодических функций с периодом, равным  $\mu$  [5].

### 3. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Применим способ, изложенный в разделе 2, к решению простейшего разностного уравнения

$$z(\tau + \mu, \mu) - z(\tau, \mu) = \mu f(\tau), \quad (3.1)$$

где  $f(\tau)$  предполагается аналитической функцией  $\tau$  в полосе, содержащей вещественную ось  $\operatorname{Im} \tau = 0$ . Подставляя в (3.1) ряд

$$z(\tau, \mu) = z_0(\tau) + \mu z_1(\tau) + \mu^2 z_2(\tau) + \dots, \quad (3.2)$$

находим дифференциальные уравнения для  $z_j(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{d\tau} &= f(\tau), \quad z_0(\tau) = \int f(\tau) d\tau, \\ \frac{dz_j}{d\tau} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 z_{j-1}}{d\tau^2} + \frac{1}{3!} \frac{d^3 z_{j-2}}{d\tau^3} + \dots + \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^{j+1} z_0}{d\tau^{j+1}} &= 0 \\ (j &= 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.3) значения

$$z_{j+1} = \frac{d^j f(\tau)}{d\tau^j} \alpha_{j+1} \quad (j=0, 1, 2, \dots, \alpha_0 \equiv 1), \quad (3.4)$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для  $\alpha_k$ :

$$\alpha_{j+1} + \frac{1}{2!} \alpha_j + \frac{1}{3!} \alpha_{j-1} + \dots + \frac{1}{(j+2)!} \alpha_0 = 0 \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что коэффициенты  $\alpha_k$  можно найти из разложения

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots &= \frac{x}{e^x - 1} = \\ &= 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \dots \quad (3.7)$$

Коэффициенты  $B_j$  называются коэффициентами Бернулли. Их значения приведены в [6] (стр. 290). Окончательно получаем решение уравнения (3.1) в виде разложения

$$\begin{aligned} z(\tau, \mu) = & \int f(\tau) d\tau - \frac{\mu}{2} f(\tau) + \frac{\mu^2}{2!} B_1 f^{(1)}(\tau) - \\ & - \frac{\mu^4}{4!} B_2 f^{(3)}(\tau) + \frac{\mu^6}{6!} B_3 f^{(5)}(\tau) - \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.1) находим значение суммы

$$\begin{aligned} \mu \sum_{k=0}^n f(\tau + \mu k) = & \mu f(\tau_n) + z(\tau_n, \mu) - z(\tau, \mu) = \\ = & \int_{\tau}^{\tau_n} f(s) ds + \frac{\mu}{2} [f(\tau) + f(\tau_n)] + \frac{\mu^2}{2!} B_1 [f^{(1)}(\tau_n) - \\ & - f^{(1)}(\tau)] - \frac{\mu^4}{4!} B_2 [f^{(3)}(\tau_n) - f^{(3)}(\tau)] + \dots, \\ \tau_n = & \tau + n \mu. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Получаем известную формулу Эйлера, изложенную в [6-9].

*Пример 2.* Найдем решение уравнения (2.5) с помощью формулы (3.8).

$$z(\tau, \mu) = -\frac{1}{\tau + i} - \frac{\mu}{2(\tau + i)^2} - \frac{\mu^2}{6(\tau + i)^3} + \frac{2\mu^4}{5(\tau + i)^5} - \dots \quad (3.10)$$

Изучим сходимость ряда (3.10). Используя формулу Стирлинга [9] (стр. 373) и разложение (3.6), приходим к приближенному выражению общего члена ряда (3.10)

$$(-1)^{k+1} \frac{\mu^{2k}}{(2k)!} B_k f^{(2k-1)}(\tau) \simeq (-1)^k \frac{4\sqrt{\pi}}{\tau + i} \left[ \frac{\mu k}{\pi e(\tau + i)} \right]^{2k}. \quad (3.11)$$

Общий член ряда (3.10) неограничен при  $k \rightarrow +\infty$ . Следовательно, ряд (3.10) расходится при  $\mu \neq 0$ . На возможную расходимость рядов, получаемых при использовании формулы Эйлера, указано, например, в [9] (стр. 547).

#### 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР РАЗЛОЖЕНИЯ

Покажем, что разложение (2.1) имеет асимптотический характер при  $\mu \rightarrow 0$ , т. е.

$$R_N(\tau, \mu) = O(1) \quad (\mu \rightarrow 0), \quad (4.1)$$

а именно, докажем теорему.

*Теорема 1.* Пусть в системе разностных уравнений

$$Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu \Psi(\tau, Z(\tau, \mu), \mu), \quad Z(0, \mu) = X_0 \quad (4.2)$$

правая часть  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  имеет ограниченные производственные до  $N$ -го порядка включительно по всем переменным в области  $D_2$ :

$$|\tau| < T, \quad |Z| < H_0, \quad |\mu| < M_0; \quad (4.3)$$

Найдем разложение решения  $Z(\tau, \mu)$  по степеням  $\mu$

$$Z(\tau, \mu) = Z_0(\tau) + \mu Z_1(\tau) + \dots + \mu^{N-1} Z_{N-1}(\tau) + \mu^N R_N(\tau, \mu) \quad (4.4)$$

способом, указанным в разделе 2. Найдется решение  $Z(\tau, \mu)$  и постоянные  $T^*$ ,  $M_1$  ( $0 < T^* \leq T$ ,  $0 < M_1 \leq M_0$ ) такие, что при  $|\tau| \leq T^*$ ,  $|\mu| \leq M_1$  будет выполнено неравенство

$$|R_N(\tau, \mu)| \leq c = \text{const}. \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$Z^*(\tau, \mu) = Z_0(\tau) + \mu Z_1(\tau) + \dots + \mu^{N-1} Z_{N-1}(\tau) \quad (4.6)$$

и сделаем в (4.2) замену неизвестного вектора

$$Z(\tau, \mu) = Z^*(\tau, \mu) + \mu^N R_N(\tau, \mu). \quad (4.7)$$

Приходим к системе разностных уравнений для  $R_N(\tau, \mu)$

$$\begin{aligned} \mu^N R_N(\tau + \mu, \mu) - \mu^N R_N(\tau, \mu) &= Z^*(\tau, \mu) - \\ &- Z^*(\tau + \mu, \mu) + \mu \Psi(\tau, Z^*(\tau, \mu) + \mu^N R_N(\tau, \mu), \mu). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для разложения правой части используем формулу Лагранжа

$$\begin{aligned} \mu \Psi(\tau, Z^*(\tau, \mu) + \mu^N R_N(\tau, \mu), \mu) &= \\ = \mu \Psi(\tau, Z^*(\tau, \mu), \mu) + A(\tau, R_N(\tau, \mu), \mu) \mu^{N+1} R_N(\tau, \mu). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выберем  $T^*$  так, чтобы  $Z^*(\tau, \mu)$  при

$$|\tau| \leq T^*, \quad |\mu| \leq M_1 < M_0 \quad (4.10)$$

удовлетворяло условию

$$|Z^*(\tau, \mu)| < H_0 - \varepsilon. \quad (\varepsilon > 0). \quad (4.11)$$

В этом случае при

$$|\mu^{N+1} R_N(\tau, \mu)| < \varepsilon \quad (4.12)$$

элементы матрицы  $A(\tau, R_N(\tau, \mu), \mu)$  ограничены.

Так как имеет место следующая оценка при выполнении (4.10) и достаточно малом значении  $M_1 > 0$

$$|\mu \Psi(\tau, Z^*(\tau, \mu), \mu) + Z^*(\tau, \mu) - Z^*(\tau + \mu, \mu)| \leq \mu^{N+1} b, \quad (4.13)$$

то, сокращая (4.8) на  $\mu^N$ , приходим к системе разностных уравнений для  $R_N(\tau, \mu)$ :

$$R_N(\tau + \mu, \mu) - R_N(\tau, \mu) = \mu A(\tau, R_N(\tau, \mu), \mu) R_N(\tau, \mu) + B(\tau, \mu), \quad (4.14)$$

где для матрицы  $A$  и вектора  $B$  при выполнении (4.10), (4.12) имеем оценки

$$|A(\tau, R_N(\tau, \mu), \mu)| \leq a, \quad |B(\tau, \mu)| \leq b \quad (a, b = \text{const}). \quad (4.15)$$

Пусть для  $R_N(\tau, \mu)$  выполняется начальное условие

$$R_N(\tau, \mu) = 0 \quad (-\mu < \tau \leq 0). \quad (4.16)$$

Решение системы (4.14) мажорируется по норме при  $\tau > 0$  решением разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$z(\tau + \mu, \mu) - z(\tau, \mu) = \mu a z(\tau, \mu) + \mu b. \quad (4.17)$$

Решая (4.17), находим оценку для  $R_N(\tau, \mu)$  при  $|\tau| < T^*$ :

$$|R_N(\tau, \mu)| \leq |z(\tau, \mu)| < \frac{b}{a} [(1 + \mu a)^{T^*/\mu} - 1] \leq c = \text{const}. \quad (4.18)$$

Правая часть ограничена при достаточно малых значениях  $|\mu|$ ,  $a > 0$ . Постоянную  $M_1$  в (4.10) можно всегда выбрать столь малой, чтобы выполнялось неравенство (4.12), достаточное для выполнения (4.18). Теорема доказана.

**Замечание 4.** Если вектор  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  аналитичен по всем переменным, то некоторое частное решение  $Z(\tau, \mu)$  можно разложить в ряд вида (2.4), который имеет асимптотический характер при  $\mu \rightarrow 0$ , т. е.

$$\left| Z(\tau, \mu) - \sum_{j=0}^k Z_j(\tau) \mu^j \right| = O(\mu^{k+1}) \quad (\mu \rightarrow 0). \quad (4.19)$$

Асимптотический характер разложения (4.4) служит основой дальнейших вычислений.

## 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Возможность явного построения решения (2.1) зависит от интегрируемости системы (2.2). Если можно найти решение системы (2.2) при произвольном  $X_0$ , то системы дифференциальных уравнений (2.3) тоже интегрируются, так как однородная часть совпадает с уравнениями в вариациях для (2.2) ([10], стр. 393). Пусть система дифференциальных уравнений (2.2) не интегрируется или является очень сложной. Чтобы иметь возможность применить методы качественной теории дифференциальных уравнений, построим вспомогательную систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет с точностью до малых  $O(\mu^N)$  решение  $Z(\tau, \mu)$  (2.1). Пусть искомая вспомогательная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dZ}{d\tau} = S(\tau, Z, \mu), \quad (5.1)$$

$$S(\tau, Z, \mu) = S_0(\tau, Z) + \mu S_1(\tau, Z) + \dots + \mu^{N-1} S_{N-1}(\tau, Z) + \mu^N Q_N(\tau, Z, \mu). \quad (5.2)$$

Систему уравнений (5.1) можно получить, исключая из  $Z(\tau, \mu)$  и  $\frac{dZ(\tau, \mu)}{d\tau}$   $m$  параметров  $X_0$  и составляя систему дифференциальных уравнений  $m$ -параметрического семейства. Это сложный путь. Другой способ состоит в прямом отыскании вектор-функций  $S_k(\tau, Z)$ , таких, чтобы они могли тождественно удовлетворять систему разностных уравнений (4.2). Для этого, задавая  $Z(\tau, \mu) \equiv Z$ , вычислим  $Z(\tau + \mu, \mu)$  с помощью формулы Тейлора. Производные  $Z$  по  $\tau$  вычисляем с помощью системы уравнений (5.1)

$$\begin{aligned} Z(\tau + \mu, \mu) - Z &= \mu \frac{dZ}{d\tau} + \frac{\mu^2}{2!} \frac{d^2Z}{d\tau^2} + \dots = \\ &= \mu [S_0(\tau, Z) + \mu S_1(\tau, Z) + \dots] + \frac{\mu^2}{2!} \left[ \frac{DS_0(\tau, Z)}{DZ} S_0(\tau, Z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial S_0(\tau, Z)}{\partial \tau} + \dots \right] + \dots \equiv \mu \Psi_0(\tau, Z) + \mu^2 \Psi_1(\tau, Z) + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получим уравнения для определения векторов  $S_k(\tau, Z)$ :

$$S_0(\tau, Z) = \Psi_0(\tau, Z),$$

$$S_1(\tau, Z) + \frac{1}{2} \frac{DS_0(\tau, Z)}{DZ} S_0(\tau, Z) + \frac{1}{2} \frac{\partial S_0(\tau, Z)}{\partial \tau} \Psi_1(\tau, Z), \quad (5.4)$$

$$S_j(\tau, Z) + G_j(S_0, S_1, \dots, S_{j-1}) = \Psi_j(\tau, Z) \quad (j = 2, \dots, N).$$

Здесь проекциями  $S_j$  являются полиномы от проекций уже вычисленных векторов  $S_0(\tau, Z), \dots, S_{j-1}(\tau, Z)$  и их производных. Векторы  $S_j(\tau, Z)$  получаются при  $j$ -кратном дифференцировании. Поэтому вектор-функции  $S_j(\tau, Z)$  имеют ограниченные в  $D_2$  производные до порядка  $N - j$  включительно. Это оправдывает запись разложения (5.2) с остаточным членом порядка  $\mu^N$ .

*Замечание 5.* Функции  $S_j(\tau, Z)$  определяются единственным образом по заданной функции  $\Psi(\tau, Z, \mu)$ . Поэтому функция  $Z^*(\tau, \mu)$  (4.6) с точностью до малых  $O(\mu^N)$  удовлетворяет системе (5.1).

*Замечание 6.* В случае аналитической по всем аргументам вектор-функции  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  вектор-функции  $S_j(\tau, Z)$  получается аналитическими по  $\tau, Z$ . Но разложение  $S(\tau, Z, \mu)$  в степенной ряд по степеням  $\mu$  может оказаться расходящимся. Проблема построения и изучения свойств  $S(\tau, Z, \mu)$  для заданной вектор-функции  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  или заданной системе (1.14) является сейчас одной из наиболее важных в теории нелинейных колебаний.

Члены порядка  $\mu^{N+1}$  и выше в  $\Psi(\tau, Z, \mu)$  всегда можно изменить так, чтобы разложение  $S(\tau, Z, \mu)$  по степеням  $\mu$  содержало бы лишь конечное число членов, например,

$$Q_N(\tau, Z, \mu) \equiv 0. \quad (5.5)$$

Можно развить метод, состоящий в изменении членов порядка  $\mu^N$  в системе дифференциальных уравнений так, чтобы вспомогательная система (5.1) удовлетворяла условию (5.5). Идея этого метода аналогична одной из идей, предложенных Мельниковым [11].

Замена (1.13) приводит систему (5.1) к виду

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} S_0(\tau, Z) + \frac{\mu^2}{2\pi} S_1(\tau, Z) + \dots + \quad (5.6)$$

$$+ \frac{\mu^N}{2\pi} S_{N-1}(\tau, Z) + \frac{\mu^{N+1}}{2\pi} Q_N(\tau, Z, \mu) \quad (\tau = \mu t/2\pi).$$

Основное достоинство вспомогательной системы (5.6) по сравнению с (1.14), состоит в отсутствии аргумента  $t$  в правой части (5.6).

*Замечание 7.* Укажем еще один способ построения вспомогательной системы (5.1). Для этого используем символические операторы  $\Delta d$  [8]

$$\Delta Z(\tau, \mu) \equiv Z(\tau + \mu, \mu) - Z(\tau, \mu) = \mu \Psi(\tau, Z(\tau, \mu), \mu), \quad (5.7)$$

$$dZ(\tau, \mu) \equiv \frac{dZ(\tau, \mu)}{d\tau} = S(\tau, Z(\tau, \mu), \mu).$$

Используя тождества

$$\Delta = e^{d\mu} - 1, \quad dZ = \frac{1}{\mu} \ln(1 + \Delta)Z, \quad (5.8)$$

приходим к уравнению, связывающему  $S$  и  $\Psi$ ,

$$S(\tau, Z, \mu) = \Psi(\tau, Z, \mu) - \frac{\Delta}{2} \Psi(\tau, Z, \mu) + \frac{\Delta^2}{3} \Psi(\tau, Z, \mu) - \dots \quad (5.9)$$

Выражения для  $\Delta^k \Psi$  вычисляются с помощью разностного уравнения (4.2) и имеют вид

$$\Phi_{k+1}(\tau, Z, \mu) = \Phi_k(\tau + \mu, Z + \mu \Psi(\tau, Z, \mu), \mu) - \Phi_k(\tau, Z, \mu), \quad (5.10)$$

где

$$\Phi_k(\tau, Z, \mu) \equiv \Delta^k \Psi(\tau, Z, \mu). \quad (5.11)$$

*Пример 3.* Решим разностное уравнение

$$z(\tau + \mu) - z(\tau) = \mu(\tau + 1)^{-1}. \quad (5.12)$$

Из формулы (5.9) получим

$$s(\tau, \mu) = \frac{1}{\tau + 1} + \frac{1! \mu}{2(\tau + 1)(\tau + 1 + \mu)} + \frac{2! \mu^2}{3(\tau + 1)(\tau + 1 + \mu)(\tau + 2 + \mu)} + \dots + \\ + \frac{n! \mu^n}{(n + 1)(\tau + 1)(\tau + 1 + \mu) \dots (\tau + 1 + n\mu)} + \dots \quad (5.13)$$

Из признака Гаусса [9] (стр. 281) следует, что ряд для  $s(\tau, \mu)$  сходится при  $\tau > -1$ . Решение  $z(\tau)$  находится интегрированием

$$z(\tau) = \int s(\tau, \mu) d\tau. \quad (5.14)$$

*Замечание 8.* Решение уравнения суммирования (5.12) с помощью формулы Эйлера (3.8) приведет к асимптотическому при  $\mu \rightarrow 0$ , но расходящемуся при всех  $\tau$  разложению. Способ, изложенный в замечании 7, позволит вывести новую формулу суммирования, а именно,

$$\sum_{k=0}^n f(\tau + k\mu) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau + (n-1)\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k f(s) ds. \quad (5.15)$$

## 6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ (1.7)

Для системы дифференциальных уравнений (1.7), не содержащей медленного времени  $\tau$ , взятой в стандартной форме

$$\frac{dX}{dt} = \mu F(t, X, \mu), \quad F(t + 2\pi, X, \mu) \equiv F(t, X, \mu), \quad (6.1)$$

вспомогательная система (5.6) принимает вид

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\mu}{2\pi} S_0(Z) + \frac{\mu^2}{2\pi} S_1(Z) + \dots + \frac{\mu^N}{2\pi} S_{N-1}(Z) + \frac{\mu^{N-1}}{2\pi} Q_N(Z, \mu), \quad (6.2)$$

где  $F(t, X, \mu)$  предполагается  $N$  раз дифференцируемой по всем аргументам. Пренебрегая малыми порядка  $\mu^{N+1}$ , получим, что решения систем (6.1), (6.2) с начальными значениями

$$X|_{t=0} = X_0, \quad Z|_{t=0} = X_0 \quad (6.3)$$

при  $t = 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) принимают одинаковые значения. Зная значения  $Z(t)$ , можно вычислить  $X(t)$  следующим образом. Продолжаем решение  $Z(t)$  до ближайшего значения  $t = 2(n+1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Полученное значение берем за начальное для системы (6.1) и вычисляем  $X(t)$ . В силу периодичности системы (6.1) можно считать, что  $0 \leq t < 2\pi$ . Из периодичности вытекает также, что, если значения  $Z, t$  соответствуют значениям  $X, t$ , значения  $Z, t+2\pi$  соответствуют значениям  $X, t+2\pi$ . Поэтому получим периодическую по  $t$  связь между  $X$  и  $Z$ :

$$X = P_0(t, Z, \mu), \quad P_0(t + 2\pi, Z, \mu) \equiv P_0(t, Z, \mu). \quad (6.4)$$

Так как решения пересекаются при  $t = 2n\pi$  и производные пропорциональны  $\mu$ , получим

$$X = Z + \mu P(t, Z, \mu), \quad P(t + 2\pi, Z, \mu) \equiv P(t, Z, \mu). \quad (6.5)$$

Соотношение (6.5) можно получить, исключая из решений (6.1), (6.2) начальный вектор  $X_0$ . Проще сразу искать замену (6.5) в виде разложения

$$X = Z + \mu P_1(t, Z) + \mu^2 P_2(t, Z) + \dots + \mu^N P_N(t, Z), \quad (6.6)$$

где векторы  $P_j(t, Z)$  периодичны по  $t$  с периодом  $2\pi$ . Они выбираются так, чтобы неавтономную систему (6.1) привести к автономной системе. Если на автономную систему наложить требование совпадения решений в моменты  $t = 2n\pi$ , то векторы  $P_j(t, Z)$  и  $S_j(Z)$  определяются единственным образом. Поэтому автономная система совпадает со вспомогательной системой (6.2), которая определяет асимптотическое решение (2.1) системы (1.12), а вследствие этого через (6.6) определяет асимптотическое при  $\mu \rightarrow 0$  решение системы (6.1).

Использование вспомогательной автономной системы (6.2) для изучения свойств решений системы (6.1) было предложено в работах Крылова, Боголюбова [1<sup>–</sup>10], развито Митропольским [4, 14] (см. также работы [15], [16] (стр. 236)).

В силу единственности вспомогательной системы (6.2) всевозможные формы асимптотических методов получаются из (6.2) заменой переменных.

Для уравнений второго порядка часто используют полярную систему координат. В частности, стробоскопический метод Минорского [17–19] использует обычно полярную систему координат. Он состоит в рассмотрении связи отдельных близких на фазовой плоскости точек на решении системы дифференциальных уравнений и переходе от разностных уравнений к дифференциальному. Минорский рассматривает лишь первый член в разложении, его метод полностью равносителен первому приближению асимптотического метода [12–16]. Это указано также в [20, 21].

В [21] Неймарк показал, что в первом приближении асимптотический метод или метод усреднения можно трактовать с точки зрения метода точечных отображений.

Из результатов настоящей работы следует, что в целом асимптотический метод [12–16] можно рассматривать как один из частных, хотя и очень удобных для практики приближенных приемов метода точечных отображений. Здесь дается также простое доказательство асимптотического характера разложения (6.2) при  $\mu \rightarrow 0$ .

Существенным недостатком разложения (6.2) является его расходимость даже для аналитической  $F(t, X, \mu)$  в (6.1).

В последнее время появился ряд работ, предлагающий другие приемы построения вспомогательной автономной системы (5.1) [22]. Понятно, требуется более глубокое изучение свойств разностных уравнений вида (1.10), (1.12), (1.15), (1.16).

## 7. ОТЫСКАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Как одно из приложений метода точечных отображений рассмотрим вопрос о соответствии метода малого параметра и асимптотического метода. Пусть отображение строится с помощью метода малого параметра, т. е. решение системы (1.1) — функция  $\Phi(t, X, \mu)$  и вектор-функция  $\Psi(X_n, \mu)$  в (1.10) определяются первыми членами разложения до степеням  $\mu$ .

Для  $\Psi(Z, \mu)$  из (1.12) получим

$$\Psi(Z, \mu) = \Psi_0(Z) + \mu \Psi_1(Z) + \dots + \mu^{N-1} \Psi_{N-1}(Z) + \dots \quad (7.1)$$

Зная вектор-функции  $\Psi_j(Z)$ , можно найти вектор-функции  $S_j(Z)$  в (6.2). Поэтому асимптотические методы для системы (6.1) вытекают из метода малого параметра, примененного для отыскания неуставновившихся движений, как это указано в настоящей работе.

При построении периодических решений методом Пуанкаре [16] для отыскания начального вектора  $X_0$  решают уравнение

$$\Psi(X_0, \mu) \equiv \Psi_0(X_0) + \mu \Psi_1(X_0) + \dots + \mu^{N-1} \Psi_{N-1}(X_0) + O(\mu^N) = 0. \quad (7.2)$$

При отыскании периодических решений с помощью асимптотических методов получают из (6.2) уравнения

$$S(X_0, \mu) \equiv S_0(X_0) + \mu S_1(X_0) + \dots + \mu^{N-1} S_{N-1}(X_0) + O(\mu^N) = 0. \quad (7.3)$$

Но это равносильные уравнения. Из (5.3) имеем равенство

$$S(X_0, \mu) = \Psi(X_0, \mu) - \frac{\Delta}{2} \Psi(X_0, \mu) + \frac{\Delta^2}{3} \Psi(X_0, \mu) - \dots, \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} \Psi(X_0, \mu) &= \Delta^k (\Psi(X_0 + \mu \Psi(X_0, \mu)) - \Delta^k \Psi(X_0, \mu)) \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (7.5)$$

т. е. если  $\Psi(X_0, \mu) = 0$ , то  $\Delta^k \Psi(X_0, \mu) = 0$ , следовательно,  $S(X_0, \mu) = 0$ . Из (5.3), (5.8) имеем равенство

$$\Psi(X_0, \mu) = S(X_0, \mu) + \frac{\mu}{1!} dS(X_0, \mu) + \frac{\mu^2}{2!} d^2S(X_0, \mu) + \dots, \quad (7.6)$$

где  $d$  — символ дифференцирования в силу системы (6.2):

$$d^{k+1} S(X_0, \mu) = \frac{D d^k S(X_0, \mu)}{DX_0} S(X_0, \mu). \quad (7.7)$$

Если  $S(X_0, \mu)$ , то  $d^k S(X_0, \mu) = 0$ , следовательно,  $\Psi(X_0, \mu) = 0$ . Поэтому периодические решения, полученные методом малого параметра и асимптотическим методом, будут совпадать с любой степенью точности. Для квазилинейных систем это было показано непосредственным вычислением в [23].

В следующих работах автор намерен изложить новые приложения метода точечных отображений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958
2. Ю. И. Неймарк, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 2, изд. АН УССР, Киев, 1963.
3. А. А. Андронов, А. А. Винт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

4. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, изд. Наука, М., 1964
5. A. Guldberg, G. Wallenberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen Leipzig und Berlin, 1911.
6. Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Э. Уиттакер, Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, Гостехиздат, М., 1933.
8. Е. С. Кунц, Численный анализ, изд. Техника, Киев, 1964
9. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 2, Физматгиз, М., 1959.
10. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
11. Г. И. Мельников, Автоматика и телемеханика, 26, № 1, 11 (1965).
12. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, изд. АН УССР, Киев, 1934.
13. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, Киев, 1937.
14. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Физматгиз, 1963.
15. В. М. Волосов, Н. Н. Моисеев, Б. И. Моргунов, Ф. Л. Черноусько, Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикладной мех., вып. 2, изд. Наука, М., 1965, стр. 35.
16. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
17. N. Minorsky, J. Franklin Inst., 21, 254 (1952).
18. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961, стр. 608
19. N. Minorsky, Comptes Rendus, № 19, 256 (1963).
20. Yogiaga Masataka, J. Sci. Hiroshima Univ., A 23, № 3, 37 (1960).
21. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 5, 1021 (1963).
22. В. И. Арнольд, УМН, 18, вып. 5, 13 (1963).
23. А. П. Проскуряков, ПММ, 18, № 4, 765 (1964).

Киевский институт инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию  
30 октября 1967 г.

## TO THE THEORY OF POINT TRANSFORMATIONS WETHOD

*K. G. Valeyev*

Some notes are presented concerning the method of point transformations, stroboscopic method and asymptotic method for solving nonlinear differential equations. The interrelation of this methods with nonlinear difference equations is shown. For the last the properties of solutions are studied. Many of the conclusions are given in the simplified form.

УДК 517.9

## О ЯЧЕЙКАХ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

К. Эшмурадов

Устанавливаются классификация особых и обыкновенных траекторий, число и основные характеристики ячеек, возможных в грубых трехмерных динамических системах без замкнутых траекторий.

В настоящей работе при предположениях, сделанных в [1], рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), \quad (1)$$

удовлетворяющая в некоторой области  $G$  необходимым условиям грубости  $\Gamma$  (условия 1—6 теоремы 1 работы [1]).\*

В дальнейшем будем рассматривать только траектории и полутраектории, целиком содержащиеся в области  $G$ , и будем пользоваться терминологией и результатами работы [1].

По аналогии с определениями, данными в [2—4], введем следующие определения.

*Определение 1.* Траекторию  $L_0$  будем называть  $\omega(\alpha)$ -орбитно-устойчивой, если для любой точки  $M_0$  траектории  $L_0$  и любого заданного  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что у всякой траектории  $L$ , проходящей при  $t=t_0$  через любую точку  $M$ , принадлежащую  $\delta$ -окрестности точки  $M_0$ , полутраектория  $L^+(L^-)$  целиком содержится в  $\varepsilon$ -окрестности полутраектории  $L_0^+(L_0^-)$ . В противном случае траекторию  $L_0$  будем называть  $\omega(\alpha)$ -орбитно-неустойчивой.

*Определение 2.* Траекторию, являющуюся либо  $\omega$ -, либо  $\alpha$ -орбитно-неустойчивой, будем называть особой. Траекторию будем называть обыкновенной, если она либо  $\omega$ - и  $\alpha$ -орбитно-устойчива, либо  $\omega$ -орбитно-устойчива и выходит из области  $G$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В [1] были перечислены возможные в области  $G$  типы траекторий и полутраекторий системы (1). Классификация этих траекторий на особые и обыкновенные дается следующей теоремой.

*Теорема 1.* Состояния равновесия и траектории, стремящиеся либо при  $t \rightarrow +\infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$  к седлу или седло-фокусу, являются особыми траекториями, все остальные траектории обыкновенные.

*Доказательство.* В силу определения простых узлов, фокусов, седел и седло-фокусов [5] устойчивые (неустойчивые) узлы и фокусы являются  $\alpha(\omega)$ -орбитно-неустойчивыми траекториями, а седла и седло-фокусы являются и  $\omega$ - и  $\alpha$ -орбитно-неустойчивыми. В силу определения седла, седло-фокуса и их усов и сепаратрицы всякая положительная (отрицательная) полутраектория, стремящаяся при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) к седлу или седло-фокусу, является  $\omega(\alpha)$ -орбитно-неустойчивой. В силу теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных данных и определения узла и фокуса всякая по-

\* В первой строке формулы (9) работы [1] следует читать  $U_0(u, v) \equiv 1$  (автор)

ложительная (отрицательная) полутраектория, стремящаяся при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) к устойчивому (неустойчивому) узлу или фокусу, является «(a)-орбитно-устойчивой». Откуда (в силу теоремы 2 работы [1] и определения 2) следует справедливость утверждения теоремы.

Пусть  $E_0$  — множество всех точек, принадлежащих в открытой области  $G$  обычным траекториям. Из определений 1 и 2 (в силу теоремы 2 работы [1] и теоремы 1) вытекает следующее. Если точка  $M_0$  принадлежит обычной траектории  $L_0$ , то через любую точку  $M$ , принадлежащую  $\delta$ -окрестности точки  $M_0$ , проходит обыкновенная траектория. Откуда следует, что множество  $E_0$  открытое, и следовательно, множество  $E = \overline{G} - E_0$  всех точек, принадлежащих в замкнутой области  $\overline{G}$  особым траекториям и граничной поверхности без контакта, замкнутое. Множество точек  $E_0$  может распадаться на связные области без общих точек. Эти области будем называть компонентами или ячейками. Компоненты разделяются на внутренние и на примыкающие к граничной поверхности без контакта.

Число и основные характеристики возможных в области  $G$  компонент определяются следующей теоремой.

**Теорема 2.** Если система (1) в области  $G$  удовлетворяет необходимым условиям грубости  $\Gamma$ , то 1) множество особых траекторий разбивает область  $G$  на конечное число связных компонент, заполненных обычными траекториями; 2) каждая внутренняя компонента состоит из целых обычных траекторий, идущих из одного и того же источника к одному и тому же стоку; 3) каждая примыкающая к граничной поверхности без контакта компонента состоит из положительных  $\omega$ -орбитно-устойчивых полутраекторий, которые при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к одному и тому же стоку и при  $t \rightarrow -\infty$  выходят из области  $G$ ; 4) граница каждой внутренней компоненты состоит из целых особых траекторий и содержит точно один сток и один источник; 5) граница каждой примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненты состоит из целых особых траекторий и  $\omega$ -орбитно-неустойчивых положительных полутраекторий, покидающих при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$ , а также из куска граничной поверхности без контакта, причем содержит точно один сток; часть граничной поверхности без контакта, входящая в состав границы рассматриваемой компоненты, является связной.

Доказательство каждого пункта теоремы будем проводить отдельно:

1) Введем сначала вспомогательное определение и докажем необходимые леммы.

**Определение 3.** Сепаратрису, идущую из одного седла или седлофокуса в другое, будем называть особой, а все остальные сепаратрисы будем называть неособыми.

Имеют место следующие леммы.

**Лемма 1.** Всякая неособая сепаратриса может входить в состав границы не более чем двух компонент.

**Доказательство.** Пусть  $M$  — некоторая точка неособой сепаратрисы  $L$  седла (седло—фокуса)  $O$ ,  $\Pi$  — плоскость, нормальная к траектории  $L$  в точке  $M$ . Берем на плоскости  $\Pi$  круг  $C$  радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $M$ , где  $\varepsilon$  — достаточно малая величина. Круг  $C$  является поверхностью без контакта. Обозначим сепаратрисную поверхность седла (седло—фокуса)  $O$  через  $S$  и пусть  $\gamma$  — множество точек  $S \cap C$ . Заметим, что  $\gamma$  есть простая гладкая дуга. Дуга  $\gamma$  делит круг  $C$  на две области, которые обозначим через  $C_1$  и  $C_2$ .

В области  $C$  не существуют точки, принадлежащие особым траекториям, но не принадлежащие  $\gamma$ . Действительно, предположим противное, т. е. пусть в сколь угодно малой окрестности кривой  $\gamma$  существует

точка  $N$ , принадлежащая некоторой особой траектории  $L_1$ , но не принадлежащая кривой  $\gamma$ . Пусть седло  $O$  устойчивое. Тогда все неособые сепаратрисы седла  $O$ , проходящие через точки дуги  $\gamma$ , являются  $\alpha$ -орбитно-устойчивыми (либо покидают область  $G$ ) и, следовательно, траектория  $L_1$  является  $\alpha$ -орбитно-устойчивой (либо покидает область  $G$ ). В силу грубости сепаратрис седла  $O$  траектория  $L_1$  при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к тому же устойчивому узлу (или фокусу), к которому стремится при  $t \rightarrow +\infty$  один из усов седла  $O$ . Откуда следует, что траектория  $L_1$  является обыкновенной. Любые две точки области  $C_1$  ( $C_2$ ) можно соединить дугой, через все точки которой проходят обыкновенные траектории. Следовательно, все траектории, проходящие через точки области  $C_1$  ( $C_2$ ), принадлежат одной и той же компоненте, откуда следует, что сепаратриса  $L$  не может входить в состав границы более чем из двух компонент.

**Лемма 2.** Всякая особая сепаратриса может входить в состав границы не более чем из четырех компонент.

**Доказательство.** Пусть траектория  $L$ , идущая из седла или седло—фокуса  $O_1$  в седло или седло—фокус  $O_2$ , является линией пересечения без касания сепаратрисных поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  указанных седел или седло—фокусов,  $M$ —некоторая точка траектории  $L$ ,  $\Pi$ —нормальная к траектории  $L$  в точке  $M$  плоскость. Берем  $\epsilon > 0$  достаточно малым. Тогда круг  $C$  с центром в точке  $M$  радиуса  $\epsilon$ , лежащий на плоскости  $\Pi$ , является поверхностью без контакта. Обозначим через  $\gamma_1$  ( $\gamma_2$ ) множество точек  $S_1 \cap C$  ( $S_2 \cap C$ ), причем  $\gamma_1$  ( $\gamma_2$ ) является простой гладкой дугой, в точке  $M$  дуги  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пересекаются без касания. Круг  $C$  дугами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  делится на четыре области  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ . Аналогично доказательству леммы 1 устанавливается, что все траектории, проходящие через точки области  $C_1$ , принадлежат одной и той же компоненте. Аналогичное утверждение справедливо и относительно областей  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , откуда следует, что траектория  $L$  не может входить в состав границы более чем четырех компонент.

Пусть дано устойчивое (неустойчивое) седло  $O$ , сепаратрисную поверхность которого обозначим через  $S$ , и пусть  $\Sigma$ —сфера достаточно малого радиуса с центром в точке  $O$ . Обозначим множество точек  $S \cap \Sigma$  через  $\gamma$ . Заметим, что  $\gamma$  является простой замкнутой кривой, лежащей на  $\Sigma$ . Через точки кривой  $\gamma$  проходят сепаратрисы данного седла  $O$ . Всякая неособая сепаратриса данного седла является  $\alpha$  ( $\omega$ )-орбитно-устойчивой траекторией. Пусть через точки  $M_1$  и  $M_2$  кривой  $\gamma$  проходят особые сепаратрисы седла  $O$ , стремящиеся к другим седлам, и пусть через точки дуги  $l$  кривой  $\gamma$ , заключенной между точками  $M_1$  и  $M_2$ , проходят неособые сепаратрисы седла  $O$ . Из теоремы 2 работы [1] в силу определений 1 и 3 следует, что всякая неособая сепаратриса устойчивого (неустойчивого) седла  $O$  является либо  $\alpha$  ( $\omega$ )-орбитно-устойчивой, либо покидает область  $G$ . Откуда следует, что все неособые сепаратрисы, проходящие через точки дуги  $l$ , либо имеют общий источник (сток), либо покидают при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$ . Пусть неособая сепаратриса  $L$  седла  $O$ , проходящая через точку  $M$  дуги  $l$ , входит в состав границы некоторой компоненты  $B$ . Тогда, пользуясь методом, примененным в доказательствах лемм 1 и 2, можно показать, что все неособые сепаратрисы, проходящие через достаточно близкие к  $M$  точки дуги  $l$ , входят в состав границы компоненты  $B$ . Теперь очевидно, что справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.** Все неособые сепаратрисы, проходящие через точки дуги  $l$ , и особые сепаратрисы, проходящие через точки  $M_1$  и  $M_2$ , также входят в состав границы компоненты  $B$ .

Легко устанавливается следующие леммы.

**Лемма 4.** Если какой-либо ус седла (седло—фокуса)  $O$  входит в состав границы некоторой компоненты  $B$ , то в состав границы рассматриваемой компоненты непременно входят рассматриваемое седло (седло—фокус) и бесчисленное множество сепаратрис рассматриваемого седла (седло—фокуса).

**Лемма 5.** Если какое-либо седло (седло—фокус)  $O$  входит в состав границы некоторой компоненты  $B$ , то в состав границы рассматриваемой компоненты непременно входит, по крайней мере, один ус и бесчисленное множество сепаратрис рассматриваемого седла (седло—фокуса).

**Лемма 6.** Если какая-нибудь сепаратриса седла (седло—фокуса)  $O$  входит в состав границы некоторой компоненты  $B$ , то в состав границы рассматриваемой компоненты непременно входят рассматриваемое седло (седло—фокус), по крайней мере, один ус и бесчисленное множество сепаратрис рассматриваемого седла (седло—фокуса).

В области  $G$  в силу выполнения условий  $\Gamma$  содержится конечное число седел и седло—фокусов, каждое из которых может иметь конечное число особых сепаратрис, а тогда из лемм 1—6 следует, что каждое седло или седло—фокус может входить в состав границы конечного числа компонент. Откуда непосредственно следует, что множество особых траекторий разбивает область  $G$  на конечное число компонент.

Прежде чем перейти к доказательству следующих пунктов теоремы, приведем некоторые вспомогательные утверждения. Следствиями теоремы 2 работы [1] и теоремы 1 являются следующие леммы.

**Лемма 7.** Всякая отличная от состояния равновесия  $\omega(\alpha)$ -орбитно-устойчивая положительная (отрицательная) полутраектория в качестве предельного множества имеет устойчивый (неустойчивый) узел или фокус.

**Лемма 8.** Всякая отличная от состояния равновесия  $\omega(\alpha)$ -орбитно-неустойчивая положительная (отрицательная) полутраектория в качестве предельного множества имеет седло или седло—фокус.

Устойчивые (неустойчивые) узлы и фокусы будем называть стоками (источниками).

**Лемма 9.** Если положительная (отрицательная) полутраектория  $L^+(L^-)$  является  $\omega(\alpha)$ -орбитно-устойчивой и стремится при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) к стоку (источнику)  $O$ , то все полутраектории, проходящие через достаточно малую окрестность любой точки  $M$  полутраектории  $L^+(L^-)$ , являются  $\omega(\alpha)$ -орбитно-устойчивыми и при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремятся к тому же стоку (источнику)  $O$ .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предложения 1 работы [4] (стр. 421, 422).

2) Каждая внутренняя компонента состоит из целых обыкновенных траекторий. Предположим противное, т. е. пусть какая-либо точка  $M_0$  сбыковенной траектории  $L$  принадлежит некоторой внутренней компоненте  $B$  и некоторая точка  $M$  той же траектории не принадлежит рассматриваемой компоненте. Тогда в силу лемм 7, 9 и теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий получаем, что точка  $M$  не принадлежит области  $G$ , следовательно, рассматриваемая компонента является примыкающей к граничной поверхности без контакта. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Утверждение о том, что все траектории, принадлежащие одной и той же внутренней компоненте, при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремятся к одному и тому же стоку (источнику), доказывается так же, как и теорема 5 работы [4] (стр. 422, 423).

3) Каждая примыкающая к граничной поверхности без контакта

компонента состоит из  $\omega$ -орбитно-устойчивых положительных полутраекторий, которые при  $t \rightarrow -\infty$  выходят из области  $G$ . Действительно, в противном случае (в силу сделанных в [1] предположений относительно граничной поверхности без контакта и теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий) рассматриваемая компонента является внутренней. Утверждение о том, что все траектории, принадлежащие одной и той же примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненте, при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к одному и тому же стоку, доказывается как и аналогичное утверждение предыдущего пункта, а тот факт, что все траектории, принадлежащие одной и той же примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненте, при  $t \rightarrow -\infty$  покидают область  $G$ , установлен выше.

4) Утверждение пункта 4 доказывается как аналогичное утверждение для плоскости ([4], стр. 421, сноска 2).

5) Граница каждой примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненты состоит из целых особых траекторий и  $\omega$ -орбитно-неустойчивых положительных полутраекторий, покидающих область  $G$  при  $t \rightarrow -\infty$ , а также связанного куска граничной поверхности без контакта. Действительно, если какая-нибудь отрицательная полутраектория  $L^-$  особой траектории  $L$  входит целиком в состав границы примыкающей к граничной поверхности без контакта ячейки  $B$ , то траектория  $L$  (в силу сделанных в [1] предположений относительно граничной поверхности без контакта) при  $t \rightarrow +\infty$  не может выходить из области  $G$ . Как и в пункте 4 можно доказать, что траектория  $L$  целиком входит в состав границы компоненты  $B$ .

Тот факт, что граница каждой примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненты содержит точно один сток, непосредственно следует из утверждения пункта 3 теоремы. Очевидно, что в состав границы каждой примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненты  $B$  входит некоторая часть  $\Pi$  граничной поверхности без контакта. Докажем теперь, что область  $\Pi$  связная, для чего предположим противное, т. е. пусть часть граничной поверхности без контакта  $\Pi$ , входящая в состав границы примыкающей к граничной поверхности без контакта компоненты  $B$ , несвязная и состоит из двух областей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — траектории, принадлежащие компоненте  $B$  и покидающие при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$  соответственно через точки  $M_1$  на  $\Pi_1$  и  $M_2$  на  $\Pi_2$ . Соединим какую-нибудь точку  $N_1$  на  $L_1$  и какую-нибудь точку  $N_2$  на  $L_2$  гладкой дугой  $l$ , целиком лежащей внутри компоненты  $B$ . Такая дуга всегда может быть проведена в силу того, что множество точек, принадлежащих компоненте  $B$ , связано и, по предположению, положительные полутраектории  $L_1^+$  и  $L_2^+$  принадлежат одной и той же компоненте.

В силу теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий на дуге  $l$  всегда найдутся точки двух типов: через точки первого типа проходят траектории, покидающие при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$  через точки области  $\Pi_1$ , через точки второго типа проходят траектории, покидающие при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$  через точки области  $\Pi_2$ . Очевидно, что точками первого типа являются все достаточно близкие к  $N_1$  точки дуги  $l$ , а точками второго типа являются все достаточно близкие к  $N_2$  точки дуги  $l$ . При движении по дуге  $l$  от точки  $N_1$  к точке  $N_2$  мы должны перейти от точек первого типа к точкам второго типа. Следовательно, на дуге  $l$  непременно должна существовать точка (обозначим ее через  $N$ ), являющаяся либо последней точкой первого типа, либо первой точкой второго типа, либо, наконец, через точку  $N$  проходит траектория, покидающая при  $t \rightarrow -\infty$

область  $G$  через точку  $M$  (границной поверхности без контакта), не принадлежащую ни к одной из областей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Рассматривая каждый случай отдельно и пользуясь теоремой о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий, нетрудно убедиться, что точка  $N$  не может быть последней точкой первого типа и первой точкой второго типа, а также через точку  $N$  не может проходить траектория, покидающая при  $t \rightarrow -\infty$  область  $G$  через точки  $M$ , не принадлежащую ни к одной из областей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Полученное таким образом противоречие доказывает наше утверждение.

**Замечание.** В силу условий Г очевидно, что в состав границы любой компоненты может входить конечное число седел, седло—фокусов, усов и особых сепаратрис.

Характер границ ячеек уточняется следующей теоремой, которая непосредственно следует из предыдущей теоремы.

**Теорема 3.** Всякая неустойчивая (устойчивая) неособая сепаратриса неустойчивого (устойчивого) седла, входящая в состав границы внутренней ячейки, при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремится к стоку  $O$  (источнику  $O$ ), содержащемуся в составе границы данных ячейки. Всякий неустойчивый (устойчивый) ус устойчивого (неустойчивого) седла, входящий в состав границы внутренней ячейки, при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремится к стоку  $O$  (источнику  $O$ ), содержащемуся в составе границы данной ячейки. Всякая неустойчивая (устойчивая) неособая сепаратриса неустойчивого (устойчивого) седла, входящая в состав границы примыкающей к границной поверхности без контакта ячейки, при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремится к стоку, содержащемуся в составе границы данной ячейки (покидает область  $G$ ). Всякий неустойчивый (устойчивый) ус устойчивого (неустойчивого) седла, входящий в состав границы примыкающей к границной поверхности без контакта ячейки, при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремится к столу  $O$ , содержащемуся в составе границы данной ячейки (покидает область  $G$ ).

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Эшмурадов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 333 (1968).
2. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, № 5, 247 (1937).
3. Е. А. Леонович и А. Г. Майер, ДАН СССР, 14, № 5, 251 (1937).
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Гостехиздат, М., 1959.
5. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
12 мая 1967 г.

#### ON THE CELLS OF THREE DIMENTIONAL DYNAMIC SYSTEM

K. Eshmooradov

This paper presents the classification of singular and ordinary trajectories, and number and main properties of cells which are possible in structurally stable three dimensional dynamic systems without closed trajectories.

УДК 531.391.5.

## ОБ АБСОЛЮТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОДНОМУ КЛАССУ ВОЗМУЩЕНИЙ

B. A. Брусин

Рассматривается задача об абсолютной стохастической устойчивости для одного класса стохастических возмущений. Получены критерии абсолютной стохастической устойчивости зависящие от параметров, характеризующих этот класс возмущений.

В [1] было введено понятие абсолютной стохастической устойчивости, сформулирован и доказан ряд теорем о достаточных условиях, по форме эти условия не отличаются от известных достаточных условий абсолютной устойчивости (критерии В. М. Попова, Я. З. Цыпкина) и, следовательно, в них не фигурируют статистические свойства случайного процесса на входе. Правда, для того, чтобы эти теоремы имели место, требуется выполнение некоторых ограничений на случайный процесс и на саму систему; например, чтобы условное среднее случайного процесса в момент  $t$  при фиксированной до момента  $t - \tau$  его предыстории равнялось нулю, а величина запаздывания в линейном звене была больше, чем  $\tau$  (см. пример 1). В общем же случае эти ограничения сформулированы в виде требования равномерной условной коррелированности.

Однако было бы желательным получение таких критериев, в которых эффективно использовались бы количественные характеристики случайного процесса и которые были бы применимы только к данному фиксированному классу случайных процессов. С другой стороны, естественно попытаться выйти за рамки требования равномерной условной коррелированности.

В настоящей работе делается первый шаг в этом направлении. Именно, здесь рассмотрен случай системы автоматического регулирования со структурной моделью, представленной на рисунке 1, со стохастическим возмущением на входе  $h(t)$ , принадлежащем простому, но практически достаточно важному классу случайных процессов. Отдельно рассматриваются класс непрерывных систем, когда линейное звено описывается интегро-дифференциальным уравнением, и класс импульсных (дискретных) систем, когда линейное звено описывается разностным уравнением.

В связи с поставленной здесь задачей введем следующее определение.

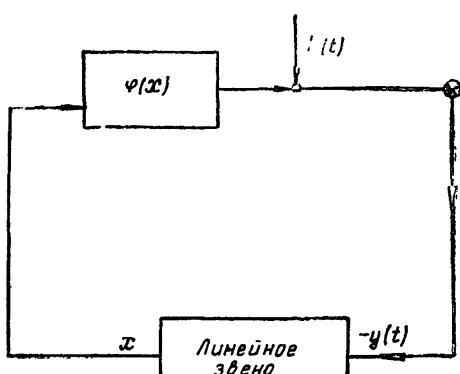


Рис. 1.

**Определение.** Пусть заданы класс стохастических процессов и некоторый класс систем управления (рис. 1). Будем говорить, что класс систем абсолютно стохастически устойчив по отношению к данному классу стохастических процессов, если при любом возмущении  $h(t)$  из этого класса процессов имеет место абсолютная стохастическая устойчивость в смысле [1].

Теоремы о достаточных условиях абсолютной стохастической устойчивости по отношению к классу возмущений формулируются в разделах 1, 2 соответственно для непрерывного и дискретного случаев. Доказательства отнесены в приложения.

### 1. КЛАСС НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Уравнения системы (рис. 1) в этом случае записываются в виде

$$x(t, \lambda) = - \int_0^t w(t-\tau) y(\tau, \lambda) d\tau + f(t), \quad (1.1)$$

$$y(t, \lambda) = \varphi(x(t, \lambda)) + h(t, \lambda) (\lambda \in \Lambda), \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  — параметр реализации,  $\Lambda$  — пространство реализаций [2],  $f(t)$  — функция, учитывающая влияние начального состояния системы.

Относительно входящих в эту систему функций мы будем полагать следующее:

$$1) \quad 0 \leq \varphi(x)/x \leq h < \infty, \quad (1.3)$$

если  $x \neq 0$ .

2) Функция  $\varphi(x)$  дифференцируема, причем существуют такие числа  $\mu_-$ ,  $\mu_+$ :  $-\infty < \mu_- \leq 0 < \mu_+ < \infty$ , что

$$\mu_- \leq \frac{d\varphi}{dx} \leq \mu_+. \quad (1.4)$$

3) Существуют такие числа  $C > 0$  и  $b$ , что

$$|\varphi(x) - bx| \leq C. \quad (1.5)$$

4) Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \{ |w(t)| + |\dot{w}(t)| + |f(t)| + |\dot{f}(t)| \} dt + \\ & + \sup_t \{ |w(t)|, |\dot{w}(t)|, |f(t)|, |\dot{f}(t)| \} < \infty. \end{aligned} \quad (1.6)$$

5) Существует такое  $\tau^* > 0$ , что

$$w(t) = 0 \quad (t \leq \tau^*). \quad (1.7)$$

6) Обозначим через  $W(p)$ ,  $F(p)$  изображения по Лапласу соответственно от  $w(t)$  и  $f(t)$ , а через  $\hat{w}_b(t)$ ,  $\hat{f}_b(t)$  — оригиналы соответственно от  $W_b(p) = W(p)[1 + bW(p)]^{-1}$  и  $F_b(p) = F(p)[1 + bW(p)]^{-1}$ .

Требуется, чтобы

$$\int_0^\infty \{ |\hat{w}_b(t)| + |\dot{\hat{w}}_b(t)| + |\hat{f}_b(t)| + |\dot{\hat{f}}_b(t)| \} dt + \quad (1.8)$$

$$+ \sup_t \{ |\overset{\wedge}{w}_b|, |\dot{\overset{\wedge}{w}}_b|, |\overset{\wedge}{f}_b|, |\dot{\overset{\wedge}{f}}_b| \} < \infty.$$

$$7) \quad y(t) \equiv 0 \quad (t < 0). \quad (1.9)$$

Условия 1)—6) определяют класс автоматических систем, который будет исследоваться на абсолютную стохастическую устойчивость.

Определим теперь класс  $H_{\beta, \bar{\tau}}$  случайных процессов  $h(t, \lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ,  $t > 0$ , который мы будем рассматривать (он зависит от двух параметров  $\beta > 0$ ,  $\bar{\tau} > 0$ ). Будем рассматривать случайные процессы, которые представим в виде

$$h(t, \lambda) = \int_0^t \frac{1}{\beta} e^{-\gamma \beta} \xi(t - \tau, \lambda) d\tau \quad (\lambda \in \Lambda), \quad (1.10)$$

где  $\xi(t, \lambda)$  — случайный процесс, характеризующийся свойством, что его условное математическое ожидание в момент  $t$  при фиксированной предыстории на отрезке  $(0, t - \bar{\tau}]$  равно нулю\*. Формально это можно записать (вводя оператор условно среднего [2]) так\*\*:

$$E\{\xi(t, \lambda)/\xi(s) = \mu(s); 0 \leq s \leq t - \bar{\tau}\} = 0. \quad (1.11)$$

Кроме этого, будем предполагать, что

$$E \xi^2(t, \lambda) \leq \sigma^2 < \infty. \quad (1.12)$$

*Замечание 1.* В рамках корреляционного анализа специфика процесса  $\{\xi\}$  состоит в том, что его корреляционная функция обращается в нуль при  $|t| > \bar{\tau}$ , что следует из (1.11). (Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.) Известная теорема Винера—Пэли [5] утверждает, что класс преобразований Фурье от четной финитной функции (т. е. функции, обращающейся к нулю вне конечного интервала) совпадает с классом  $E$  целых (вещественных) функций экспоненциального типа, принадлежащих  $L_2$  на вещественной оси. Преобразование Фурье от корреляционной функции стационарного случайного процесса называется, как известно, спектральной плотностью. Таким образом, мы можем сказать, что спектральная плотность процесса  $\{\xi\}$  есть функция класса  $E$ . Далее, из (1.10) вытекает, что отношение спектральных плотностей процессов  $\{h\}$  и  $\{\xi\}$  равно  $|\beta^2 \omega^2 + 1|^{-1}$ . Отсюда получаем, что в рамках корреляционной теории класс  $H$  совпадает с классом случайных процессов, спектральная плотность которых есть функция класса  $E$ , деленная на  $|\beta^2 \omega^2 + 1|$ .

*Замечание 2.* В [1] было введено понятие равномерной условной коррелированности. Требование равномерной условной коррелированности стохастического возмущения с процессами на выходе линейного звена входило в формулировку теоремы об абсолютной стохастической устойчивости. Процесс  $\xi(t, \lambda)$  будет удовлетворять этому требованию с константой  $L = 0$  (пример 1 в [1]). Поэтому в случае  $\beta = 0$ , когда  $h(t, \lambda) = \xi(t, \lambda)$ , применимы теоремы 1 и 2 работы [1].

\* Аксиоматика теории вероятности требует в этом случае определения при каждом  $t > 0$  множества борелевских функций, из которого мы берем «предысторию». Мы здесь сознательно не останавливаемся на этом, чтобы не перегружать изложение.

\*\* Более точно равенство нулю имеет место с вероятностью 1. Функции  $\mu(t)$  принадлежат некоторому классу  $F_t$  борелевских функций, заданных на отрезке  $[0, t - \bar{\tau}]$  [2].

**Теорема 1.** Класс систем управления (1)–(6) будет абсолютно стохастически устойчивым по отношению к классу  $H_{\beta, \bar{\tau}}$  стохастических возмущений с  $\beta > 0$ ,  $0 < \bar{\tau} \leq \tau^*$ , если существует число

$$q \geq \beta \max(h, \mu_+ + \mu_-) \quad (1.13a)$$

и положительное число  $\alpha$  такие, что при всех  $\omega \in [-\infty, +\infty]$

$$(1 + q\beta\omega^2) \operatorname{Re} W(j\omega) + (\beta h - q)\omega \operatorname{Im} W(j\omega) - \\ - (\beta^2\mu_-^2 - q\beta\mu_-) \omega^2 |W(j\omega)|^2 + \beta^2\omega^2 + 1 - \alpha h \geq 0. \quad (1.13b)$$

При этом будет справедлива следующая оценка:

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E y^2(t) dt \leq \frac{\sigma^2}{\alpha h}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим один частный случай. Пусть  $\mu_- = 0$  и  $h = \mu_+$ . Первое условие означает монотонность  $\varphi(x)$ . Второе же условие не является ограничением, ибо если оно не выполняется, можно определить новый класс функций  $\varphi(x)$ , для которого оно будет выполняться и который будет содержать в себе исходный класс нелинейностей. Положив в (1.13б)  $q = \beta h$ , приходим к неравенству

$$h(1 + \beta^2\omega^2) \left[ \operatorname{Re} W(j\omega) + \frac{1}{h} - \alpha \right] + \alpha\beta^2\omega^2 \geq 0.$$

Мы видим, что для выполнения неравенства (1.13б) в этом случае достаточно выполнения при всех  $\omega \in [-\infty, +\infty]$  неравенства

$$\operatorname{Re} W(j\omega) + \frac{1}{h} \geq \alpha, \quad (1.13b)$$

которое, как показано в [1], служит достаточным условием абсолютной стохастической устойчивости по отношению к классу  $H_{0, \bar{\tau}}$  (теорема 1 работы [1]). Таким образом, в случае  $\mu_- = 0$ ,  $h = \mu_+$  условие (1.13в) является достаточным условием абсолютной стохастической устойчивости по отношению к классу  $H_{\beta, \bar{\tau}}$  при всех  $\beta > 0$ .

Далее рассмотрим произвольный класс систем вида (1.1)–(1.7), у которого, однако, функция  $W(p)$  такова, что  $W(p)[1 + \mu_- W(p)]^{-1}$  аналитична в левой полуплоскости. Преобразование переменных вида  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = y - \mu_- x$  переводит этот класс в (!) только что рассмотренный [3]. Это позволяет, учитывая все вышесказанное, сделать следующее утверждение (как следствие из теоремы 1).

**Следствие.** Задан класс систем вида (1.1)–(1.7) с дополнительным условием, что функция  $[1 + \mu_- W(p)]^{-1}$  аналитическая в левой полуплоскости. Пусть для некоторого  $\alpha > 0$  выполнено условие

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{W(j\omega)}{1 + \mu_- W(j\omega)} \right\} + \frac{1}{h} \geq \alpha \quad (\omega \in [-\infty, +\infty]),$$

где

$$\tilde{h} = \max \{h - \mu_-, \mu_+ - \mu_-\}.$$

Тогда этот класс будет абсолютно стохастически устойчив по отношению

к классу возмущений  $H_{\beta, \tau}$  при всех  $\beta \geq 0$ ,  $\tau \leq \tau^*$  (или просто абсолютно стохастически устойчив) и будет выполняться оценка

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E x^2(t) dt \leq K^2 \frac{\sigma^2}{\alpha h},$$

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E y^2(t) dt \leq 2(1 + K^2) \frac{\sigma^2}{\alpha h},$$

где

$$K^2 = \max_{\omega \in [-\infty, +\infty]} \left| \frac{W(j\omega)}{1 + \mu_- W(j\omega)} \right|^2.$$

## 2. КЛАСС ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Перейдем к рассмотрению случая импульсных систем со структурной моделью, представленной на рисунке 1.

Соответствующая система разностных уравнений имеет вид

$$x_n(\lambda) = - \sum_{m=0}^n w(n-m) y_m(\lambda) + f_n, \quad (2.1)$$

$$y_n(\lambda) = \varphi(x_n(\lambda) + h_n(\lambda)) \quad (\lambda \in \Lambda). \quad (2.2)$$

Как и прежде,  $\lambda$  — параметр реализации,  $\Lambda$  — пространство реализаций,  $f_n$  — функция, учитывающая влияние начального состояния системы.

Определим класс систем (2.1), (2.2):

$$1) \quad 0 \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq h < \infty * \quad (x \neq 0)$$

$$\varphi(0) = 0; \quad (2.3)$$

$$2) \quad \mu_- \leq \frac{d\varphi}{dx} \leq \mu_+ ** \quad (-\infty < \mu_- \leq 0 < \mu_+); \quad (2.4)$$

$$3) \quad |\varphi(x) - bx| \leq C; \quad (2.5)$$

$$4) \quad \sum_n |w_n| + |f_n| < \infty; \quad (2.6)$$

$$5) \quad w_n = 0 \quad (n < N^*; N^* > 0). \quad (2.7)$$

*Замечание 3.* Число  $N^*$  характеризует (подобно параметру  $\tau^*$  в разделе 1) величину запаздывания в линейном элементе.

6) Обозначим через  $W(e^p)$ ,  $F(e^p)$   $D$ -преобразование решетчатых функций  $w_n$  и  $f_n$  [4]. Через  $\hat{w}_n$ ,  $\hat{f}_n$  обозначим оригиналы  $D$ -преобразования от функций

$$\hat{W}_b(e^p) = W(e^p) [1 + b W(e^p)]^{-1},$$

$$\hat{F}_b(e^p) = F(p) [1 + b W(e^p)]^{-1}.$$

\* Ради простоты здесь сохранены обозначения предыдущего раздела.

\*\* Имеет смысл считать, что  $h \leq \mu_+$ .

Потребуем, чтобы

$$\sum_h |\hat{w}_n| + |\hat{f}_n| < \infty. \quad (2.8)$$

Класс стохастических возмущений (обозначим его  $H^*(\beta, \bar{N})$ ), по отношению к которому будет рассматриваться абсолютная стохастическая устойчивость, состоит из случайных процессов  $\{h_n(\lambda)\}$ , представимых в виде

$$\beta(h_n(\lambda) - h_{n-1}(\lambda)) + h_n(\lambda) = \xi_{n-1}(\lambda), \quad (2.9)$$

где  $\xi_n(\lambda)$  — случайный процесс, характеризующийся свойствами (аналогичными (1.11), (1.12) для непрерывного случая)

$$E\{\xi_n(\lambda)/\xi_s = \mu_s; \quad s = 0, 1, \dots, k\} = 0 \quad (2.10)$$

(с вероятностью 1;  $k \leq n - \bar{N}$ ) и

$$E\xi_n^2 \leq \sigma^2 < \infty. \quad (2.11)$$

*Замечание 4.* В случае стационарности процесса  $\{\xi\}$  класс  $H^*(\beta, 1)$  будет совпадать с классом случайных процессов, функция корреляции которых равна  $(\beta + 1)^{-1} E\xi^2 (1 + \beta^{-1})^{-n}$ .

Имеют место следующие две теоремы.

*Теорема 2.* Класс систем импульсного управления (2.1) — (2.8) будет абсолютно стохастически устойчивым по отношению к классу  $H^*(\beta, \bar{N})$  при  $\beta > -1/2$  и  $0 < \bar{N} < N^*$ , если найдутся такие числа

$$b \geq \beta h \quad (2.12a)$$

и  $\alpha > 0$ , что при всех  $\omega \in [-\infty, +\infty]$

$$\begin{aligned} \Pi_1(\omega) &\equiv [(2\beta q + q + \beta h)(1 - \cos \omega) + h] \times \\ &\times \operatorname{Re} W(e^{j\omega}) - (q - h^2) \sin \omega \operatorname{Im} W(e^{j\omega}) - \\ &- [(1 + \beta) \mu_-^2 - (q + h)(1 + \beta) \mu_- + h \mu_+ + \frac{1}{2} (\beta h + q) \mu_+] \times \\ &\times (1 - \cos \omega) |W(e^{j\omega})|^2 + (1 - \cos \omega)(2\beta^2 + 2\beta) + 1 - ah > 0. \end{aligned} \quad (1.12b)$$

При этом будет справедлива оценка

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N E y_n^2 \leq \frac{\sigma^2}{ah}. \quad (2.13)$$

*Теорема 3.* Класс систем управления (2.1) — (2.8) будет абсолютно стохастически устойчивым по отношению к классу стохастических возмущений  $H^*(\beta, \bar{N})$  при  $-1/2 < \beta \leq 0$  и  $0 < \bar{N} \leq N^*$ , если существует число  $q$ , заключенное в интервале

$$(\mu_+ + \mu_-) \geq q \geq \beta h, \quad (2.14a)$$

и  $\alpha > 0$ , что при всех  $\omega \in [-\infty, +\infty]$

$$\Pi_2(\omega) \equiv [(2\beta q + q + \beta h)(1 - \cos \omega) + h] \operatorname{Re} W(e^{j\omega}) -$$

$$\begin{aligned}
 & - (q - h\beta) \sin \omega \operatorname{Im} W(e^{i\omega}) - \left\{ \beta^2 \mu_-^2 - q\beta\mu_- + \frac{1}{2} |q| \tilde{\mu} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} h\beta\mu_- \right\} (1 - \cos \omega) |W(e^{i\omega})|^2 + (1 - \cos \omega) \times \\
 & \quad (2\beta^2 + 2\beta) + 1 - ah \geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.146}$$

где

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_+ & (\text{если } q > 0) \\ |\mu_-| & (\text{если } q < 0) \end{cases}$$

При этом будет иметь место оценка (2.13).

*Замечание 4.* Из (2.14a) и (2.5) вытекает, что

$$\beta^2 \mu_- - q\beta\mu_- + \frac{1}{2} |q| \tilde{\mu} + \frac{1}{2} h\beta\mu_- \geq 0.$$

*Замечание 5.* По сравнению с теоремой 2 теорема 3 применима к более узкому классу стохастических возмущений. Однако она дает, вообще говоря, более слабое достаточное условие. Это видно на случае  $q < 0, \beta < 0$ , когда, как легко показать,  $\Pi_2(\omega) < \Pi_1(\omega)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

*Доказательство теоремы 1.* Введем новые переменные  $\bar{\varphi}, \bar{y}$ :

$$\bar{\varphi} = \beta\dot{\varphi} + \varphi, \quad \bar{y} = \bar{\varphi} + \xi(t) = \beta\dot{y} + y. \tag{П.1)$$

Тогда в силу (1.1), (1.2) и (1.10)

$$x(t, \lambda) = - \int_0^\infty \bar{w}(t-\tau) \bar{y}(\tau, \lambda) d\tau + \bar{f}(t), \tag{П.2a}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(t) &= \int_0^t e^{-\tau/\beta} f(t-\tau) d\tau, \\
 \bar{w}(t) &= \int_0^t e^{-\tau/\beta} w(t-\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{П.2б}$$

Согласно (1.6), (1.7) функции  $\bar{w}(t)$  и  $\bar{f}(t)$  будут удовлетворять условиям

$$\int_0^\infty (|\bar{w}(t)| + |\dot{\bar{w}}(t)| + |\bar{f}(t)| + |\dot{\bar{f}}(t)|) dt < \infty, \tag{П.3а}$$

$$\bar{w}(t) = 0 \quad (\text{при } t \leq \tau^*). \tag{П.3б}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$S(T) = E \int_0^T s(t, \lambda) dt = E \int_0^T (h \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2 + q\bar{x}\dot{\bar{y}} + l\bar{x}^2) dt, \tag{П. 4а}$$

где  $q$  — число, фигурирующее в условиях теоремы,  $E$  — оператор математического ожидания,  $l = \beta^2 \mu_-^2 - q\beta\mu_- \geq 0$ .

Преобразуем выражение  $S(T)$ , пользуясь возможностью менять местами операцию  $E$  и интеграл по  $t$ :

$$\begin{aligned} S(T) &= \int_0^T E [hx(\bar{\varphi} + \bar{\xi}) - (\bar{\varphi} + \bar{\xi})^2 + q\dot{x}(\bar{\varphi} + \bar{\xi}) + l\dot{x}^2] dt = \\ &= E \int_0^T (hx\bar{\varphi} - \bar{\varphi}^2 + q\dot{x}\bar{\varphi} + l\dot{x}^2) dt + \\ &+ \int_0^T E (hx - 2\bar{\varphi} + q\dot{x}) \bar{\xi} dt - \int_0^T E \bar{\xi}^2(t) dt. \end{aligned}$$

В силу (19), (111) и условия теоремы ( $\tau \leq \tau^*$ ) имеет  $E(hx - 2\bar{\varphi} + q\dot{x}) \bar{\xi} = 0$  (см. пример 1 в [1]). Учитывая это и условие (112), получим следующее неравенство.

$$S(T) \geq E \int_0^T \rho(t) dt - T\sigma^2, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\rho(t) = hx\bar{\varphi} - \bar{\varphi}^2 + q\dot{x}\bar{\varphi} + l\dot{x}^2. \quad (\text{П.6})$$

Обозначим далее

$$y_T(t) = \begin{cases} y(t) & (\text{при } 0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{при } t < 0, t > T) \end{cases}, \quad (\text{П.7})$$

$$x_T(t) = - \int_0^\infty \bar{w}(t-\tau) \bar{y}_T(\tau) d\tau + \bar{f}(t).$$

В силу (112) почти все реализации  $\xi(t, \lambda)$  локально-интегрируемы с квадратом и, следовательно, локально-интегрируемы с квадратом функции  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  и  $y(t)$ . Отсюда вытекает существование интеграла Фурье от функций  $x_T(t)$ ,  $\dot{x}_T(t)$ ,  $\bar{y}_T(t)$  почти для всех  $\lambda$ . Обозначим соответствующие им фурье-изображения  $X_T(j\omega, \lambda)$ ,  $\dot{X}_T(j\omega, \lambda)$  и  $\bar{Y}_T(j\omega, \lambda)$ , а фурье-изображение  $\bar{f}(t)$  через  $\bar{F}(j\omega)$ . Имеем согласно (П.7)

$$X_T(j\omega, \lambda) = - \bar{W}(j\omega) \bar{Y}_T(j\omega, \lambda) + \bar{F}(j\omega), \quad (\text{П.8})$$

$$\dot{X}_T(j\omega, \lambda) = - j\omega \bar{W}(j\omega) \bar{Y}_T(j\omega, \lambda) + j\omega \bar{F}(j\omega).$$

Обозначим, кроме того,

$$S_T(t, \lambda) = hx_T \bar{y}_T - \bar{y}_T^2 + q\dot{x}_T \bar{y}_T + l\dot{x}_T^2. \quad (\text{П.4б})$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_0^T s(t, \lambda) dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t, \lambda) dt - l \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{x}_T)^2 dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} s_T(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (\text{П.4в})$$

Применяя ко второму интегралу в (П.4в) равенство Парсеваля, (которое будет справедливо почти для всех  $\lambda \in \Delta$ ) с учетом соотношений (П.8), получим

$$\begin{aligned} E \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [h \operatorname{Re} \bar{W}(j\omega) + 1 + q \operatorname{Re} j\omega \bar{W}(j\omega) - \\ &- l\omega^2 |\bar{W}(j\omega)|^2] E |\bar{Y}_T(j\omega, \lambda)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [h \bar{F}(j\omega) + \end{aligned}$$

$$+ qj\omega \bar{F}(j\omega)] E \bar{Y}_T(-j\omega, \lambda) d\omega - \frac{l}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \{\omega^2 \bar{W}(j\omega) \bar{F}(-j\omega) \times \\ \times E \bar{Y}_T(j\omega, \lambda)\} d\omega + \frac{l}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\bar{F}(j\omega)|^2 d\omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (\text{П.4г})$$

Пользуясь (1.1) — (1.8) и (1.13в), оценим сверху интегралы  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . В силу (1.1)  $\bar{Y}(p) = (\beta p + 1) Y(p) - \beta y(0)$ . Обозначим  $Y_T(p) = [\bar{Y}_T(p) + \beta y(0)] (\beta p + 1)^{-1}$ , пусть  $y_T(t)$  — оригинал  $Y_T(p)$ . Очевидно, что  $y_T(t) = y(t)$  при  $t \in [0, T]$  и что  $\int_0^\infty y_T^2 dt < \infty$ .

Учитывая это и условие (1.13б), можем записать

$$I_1 \leq - \frac{ah}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\bar{Y}_T(j\omega, \lambda)|^2}{|\beta j\omega + 1|^2} d\omega \leq - \frac{ah}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_T(j\omega)|^2 d\omega + \\ + \frac{ah}{2\pi} \beta y(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |\beta j\omega + 1|^{-2} d\omega \leq - ah \int_0^T E y^2 dt + C_1.$$

Для того, чтобы оценить  $I_2$  и  $I_3$  (П.9) будет использовано и в дальнейшем), покажем, что

$$\sup_t E \varphi^2 < \infty, \quad \sup_t E |\bar{y}|^2 < \infty, \quad \sup_t E |x|^2 < \infty. \quad (\text{П.9})$$

Во-первых, в силу (1.10, (1.12) справедлива оценка  $E |h|^2 + E |\dot{h}|^2 \leq L_1(\sigma^2) < \infty$ , а в силу (1.5)

$$E |y - bx|^2 \leq 2C^2 + 2L_1^2 = L_2 < \infty.$$

Из соотношения

$$x(t) = \int_0^\infty \hat{w}_b(t-\tau) [y(\tau) - bx(\tau)] d\tau + \hat{f}_b(t)$$

получаем

$$E |x|^2 \leq 2 \left[ \int_0^\infty |\hat{w}(t-\tau)| E |y(\tau) - bx(\tau)|^2 d\tau \right]^2 + 2\hat{f}^2(t) \leq \\ \leq 2L_2^2 \left( \int_0^\infty |\hat{w}_b| dt \right)^2 + 2\hat{f}^2(t) \leq L_3,$$

$$E |\dot{x}(t)|^2 \leq 2 \left[ \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \hat{w}(t-\tau) \right| E |y(\tau) - bx(\tau)|^2 d\tau \right] + \\ + 2 \left[ \frac{d}{dt} \hat{f}(t) \right]^2 \leq L_4$$

(здесь были использованы условия (1.8));

$$E \varphi^2 \leq \sup \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 E \dot{x}^2 \leq \max \{ \mu_+^2, \mu_-^2 \} L_4 = L_5;$$

$$E \varphi^2 \leq E (\varphi - bx)^2 + b^2 E x^2 \leq C^2 + b^2 L_3 = L_6;$$

$$E\bar{y}^2 \leq 2\beta^2 E\varphi^2 + 2E\varphi^2 \leq 2\beta^2 L_5 + 2L_6 = L_7.$$

Итак, (П 9) доказано. В силу (П 2), (П 2а), (П 3) и (П 9)

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| \int_0^T (h\bar{f} + q\dot{\bar{f}}) E\bar{y} dt \right| \leq \sqrt{L_7} \int_0^\infty (h|\bar{f}| + q|\dot{\bar{f}}|) dt \leq C_2; \\ I_3 &\leq \left| 2l \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^t \dot{\bar{w}}(t-\tau) E\bar{y}_T(\tau) d\tau \right] \bar{f}(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sqrt{L_7} \int_0^\infty |\dot{\bar{w}}| dt \int_0^\infty |\bar{f}| dt \leq C_3; \\ I_4 &= l \int_0^\infty \dot{\bar{f}}^2 dt \leq C_4. \end{aligned}$$

Используя эти оценки в (П 4г) и принимая во внимание неравенства (П 5), (П.4в), получим

$$-ah \int_0^T E\bar{y}^2 dt + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \geq E \int_0^T \rho dt - T\sigma^2. \quad (\text{П.10})$$

Обратимся теперь к функции  $\rho(t)$  и покажем, что  $E \int_0^T \rho dt$  ограничено снизу по  $T$ . Подставим в (П.6) вместо  $\bar{\varphi}$  ее выражение из (П.1)

$$\begin{aligned} E \int_0^T \rho dt &= E \int_0^T (hx\varphi - \varphi^2) dt + E \int_0^T [q\beta x \dot{\varphi} - \beta^2 \dot{\varphi}^2 + \\ &+ (\beta^2 \mu_-^2 - q\beta \mu_-) \dot{x}^2] dt - 2\beta E \int_0^T \dot{\varphi} \varphi dt + \\ &+ qE \int_0^T \dot{x}\varphi dt + h\beta E \int_0^T x\dot{\varphi} dt = I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9. \end{aligned}$$

Согласно (1.3)  $L_5 \geq 0$ . Интеграл же  $I_6$  можно записать в виде  $I_6 = \beta^2 E \int_0^T (\dot{\varphi} - \mu_- \dot{x}) \times \times [(q\beta^{-1} - \mu_-)x - \dot{\varphi}]$ ; поскольку  $\mu_- \leq \dot{\varphi}/\dot{x} \leq \mu_+ \leq q/\beta - \mu_-$  (условия (1.14), (1.13а)), то и  $I_6 \geq 0$ .

Далее имеем

$$\begin{aligned} I_7 &= -2\beta E \int_0^T \dot{\varphi} \varphi dt = -\beta E [\varphi^2(T) - \varphi^2(0)] \geq -\beta L_6 + \beta \varphi^2(0) = -C_5, \\ I_8 + I_9 &= qE \int_0^T \dot{x}\varphi dt + h\beta \int_0^T x\dot{\varphi} dt = E \left\{ (q - h\beta) \int_{x(0)}^{x(T)} \varphi(x) dx + \right. \\ &+ h\beta [x(T)\varphi(T) - x(0)\varphi(0)] \Big\} \geq (q - h\beta) E \int_0^{x(T)} \varphi(x) dx - \\ &- (q - h\beta) E \int_0^{x(0)} \varphi(x) dx - 2h\beta [E x^2(T) + E \varphi^2(T) + \end{aligned}$$

$$+ |x(0)| |\varphi(0)| \geq -2h\beta(L_3 + L_6 + |x(0)| |\varphi(0)|) - \\ - (q - h\beta) |x(0)| \sqrt{L_6} = -C_6$$

( $C_5, C_6$  — положительные константы). При выводе этих двух неравенств были использованы условия (1.3), (1.13а), (П.9). Таким образом, интеграл  $E \int_0^T \rho dt$  ограничен снизу константой  $C_5, C_6$ . Теперь, деля обе части (П.10) на  $T$  и устремляя  $T$  в бесконечность, получим (П.14). Теорема доказана.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

*Доказательство теоремы 2.* Обозначим  $\bar{\beta} = 1 + \beta$ . Тогда (2.9) можно записать в виде

$$\bar{\beta} [h_n(\lambda) - h_{n-1}(h_{n-1}(\lambda)) - h_{n-1}(\lambda)] = \xi_{n-1}(\lambda). \quad (\text{П.11})$$

Введем новые переменные

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n &= \bar{\beta}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varphi_n, \\ \bar{y}_n &= \bar{\varphi}_n + \xi_n = \bar{\beta}(y_{n+1} - y_n) + y_n. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Тогда в силу (2.1), (2.2), (П.11)

$$x_n = - \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}(n-m) \bar{y}_m + \bar{f}_n, \quad (\text{П.13а})$$

где

$$\bar{w}(n) = \frac{1}{\bar{\beta}} \sum_{m=0}^n \left(1 - \frac{1}{\bar{\beta}}\right)^{n-m} w(m-1), \quad (\text{П.13б})$$

$$\bar{f}_n = \frac{1}{\bar{\beta}} \sum_{m=0}^n \left(1 - \frac{1}{\bar{\beta}}\right)^{n-m} f_{m-1}.$$

Очевидно, что

$$\sup_n |\bar{w}(n)| + \sup_n |\bar{f}_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{w}(n)| + |\bar{f}_n| < \infty, \quad (\text{П.13в})$$

$$\bar{w}(n) = 0 \quad (\text{при } n < N^* + 1). \quad (\text{П.13г})$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} S(N) &= E \sum_{n=0}^N s_n(\lambda) = E \sum_{n=0}^N h x_n \bar{y}_n - \bar{y}_n^2 + \bar{q} \bar{y}_n (x_{n+1} - \\ &- x_n) + l (x_{n+1} - x_n)^2, \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

$$l = \bar{\beta}^2 \mu_- - \bar{q} \bar{\beta} \mu_- + \frac{1}{2} (h \bar{\beta} + \bar{q}) \mu_+ \geq 0, \quad \bar{q} = q - h.$$

Подставляя в (П.14) выражение  $\bar{y}$  из (П.12), получим

$$\begin{aligned} S(N) &= E \sum_0^N [h x_n \bar{\varphi}_n - \bar{\varphi}_n^2 + \bar{q} \bar{\varphi}_n (x_{n+1} - x_n) + \\ &+ l (x_{n+1} - x_n)^2] + \sum_0^N E [h x_n - 2\bar{\varphi}_n + \bar{q} (x_{n+1} - x_n)] \xi_n - \sum_0^N E \xi_n^2. \end{aligned}$$

Согласно (2.1), (2.2), (2.7)

$$\tilde{x}_n(\lambda) = \tilde{x}_n(h_0(\lambda), \dots, h_{n-N^*}(\lambda)),$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n(\lambda) &= \tilde{\varphi}_n(h_0(\lambda), \dots, h_{n-N^*}(\lambda)) \\ (n &= 0, 1, \dots)\end{aligned}$$

( $\tilde{x}_n$ ,  $\tilde{\varphi}_n$  — функция  $n$  переменных). Но  $h_k(\lambda) = h_k(\xi_0(\lambda), \dots, \xi_{k-1}(\lambda))$  согласно (2.9). Так что

$$\tilde{x}_n(\lambda) = \tilde{x}_n(\xi_0(\lambda), \dots, \xi_{n-N^*-1}(\lambda)),$$

$$\tilde{\varphi}_n(\lambda) = \tilde{\varphi}_n(\xi_0(\lambda), \dots, \xi_{n-N^*-1}(\lambda)).$$

Отсюда получаем  $hx_n - 2\bar{\varphi}_n + \bar{q}(x_{n+1} - x_n) = \chi_n(\xi_0(\lambda), \dots, \xi_{n-N^*}(\lambda))$  и следовательно, в силу (2.10) и условия  $0 < \bar{N} \leq N^*$

$$\sum_0^N E[hx_n - 2\bar{\varphi}_n + \bar{q}(x_{n+1} - x_n)] \xi_n = 0.$$

Таким образом (учитывая еще (2.11)), имеет место неравенство

$$S(N) \geq E \sum_0^N \rho(n) - (N+1) \sigma^2, \quad (\text{П.15})$$

где

$$\rho(n) = hx_n \bar{\varphi}_n - \bar{\varphi}_n^2 + \bar{q} \bar{\varphi}_n (x_{n+1} - x_n) + l(x_{n+1} - x_n)^2. \quad (\text{П.16})$$

Введем новые функции

$$\bar{y}_{n, N} = \begin{cases} \bar{y}_n & (0 \leq n \leq N) \\ 0 & (n < 0, n > N) \end{cases};$$

$$x_{n, N} = - \sum_{m=0}^n \bar{w}(n-m) \bar{y}_{m, N} + \bar{f}_n, \quad (\text{П.17a})$$

$$\bar{Y}_N(e^p, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{y}_{n, N}(\lambda) e^{-pn},$$

$$X_N(e^p, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{n, N}(\lambda) e^{-pn},$$

$$\bar{F}(e^p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_n e^{-pn},$$

$$\bar{W}(e^p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{w}_n e^{-p} = \frac{W(e^p) e^{-p}}{\beta(1 - e^{-p}) + 1},$$

$$\begin{aligned}s_N(n, \lambda) &= hx_{n, N} \bar{y}_{n, N} - \bar{y}_{n, N}^2 + \bar{q} \bar{y}_{n, N} (x_{n+1, N} - \\ &- x_{n, N}) + l(x_{n+1, N} + x_{n, N})^2.\end{aligned}$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\sum_0^N s_n(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n(n, \lambda) - l \sum_{N+1}^{+\infty} (x_{n+1, N} - x_{n, N})^2 < \sum_{-\infty}^{+\infty} s_N(n, \lambda) < \infty. \quad (\text{П.176})$$

Согласно (П 13)

$$\begin{aligned} x_{n, N} &= x_n \quad (\text{при } 0 < n < N), \\ X_N(e^p) &= -W(e^p) \bar{Y}_N(e^p) \bar{F}(e^p). \end{aligned} \quad (\text{П.17в})$$

Применим теперь к  $E \sum_{-\infty}^{+\infty} s_N(n)$  равенство Парсеваля для  $D$ -преобразования [4] с использованием (П.17в)

$$\begin{aligned} E \sum_{-\infty}^{+\infty} s_N(n, \lambda) &= -\frac{1}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} (h \operatorname{Re} \bar{W}(e^{j\omega}) + 1 + \bar{q} \operatorname{Re}(e^{j\omega} - 1)) \times \\ &\quad \times |\bar{W}(e^{j\omega}) - l| |e^{j\omega} - 1|^2 |\bar{W}(e^{j\omega})|^2 |\bar{Y}_N(e^{j\omega}, \lambda)|^2 d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} [h + \bar{q}(e^{j\omega} - 1)] \bar{F}(e^{j\omega}) \bar{Y}_N(e^{-j\omega}, \lambda) d\omega - \\ &- \frac{l}{\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[|e^{j\omega} - 1|^2 \bar{W}(e^{j\omega}) \bar{Y}_N(e^{j\omega}, \lambda) \bar{F}(e^{-j\omega})] d\omega + \\ &+ \frac{l}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{j\omega} - 1|^2 |\bar{F}(e^{j\omega})|^2 d\omega \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Согласно (2.12б), (П.17а) первый интеграл  $I_1$  равен

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} E \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Pi_1(\omega) |\bar{Y}_N(e^{j\omega}, \lambda)|^2}{|\bar{\beta}(1 - e^{-j\omega}) + e^{-j\omega}|^2} d\omega \leqslant \\ &\leqslant -ah \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E |\bar{Y}_N(e^{j\omega}, \lambda)|^2 d\omega}{|\bar{\beta}(1 - e^{-j\omega}) + e^{-j\omega}|^2}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $Y^*(e^p)$   $D$ -изображение от  $y_{n+1}$  (т. е.  $Y^*(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{n+1} e^{-pn}$ ).

Тогда согласно (П.12)

$$Y^*(e^p) [\bar{\beta}(1 - e^{-p}) + e^{-p}] + (1 - \bar{\beta}) y_0 = \bar{Y}(e^{-p}).$$

Введем еще функцию—изображение

$$Y_N^*(e^p) = \frac{\bar{Y}_N(e^p) + (1 - \bar{\beta}) y_0}{\bar{\beta}(1 - e^{-p}) + e^{-p}}$$

и ее оригинал, который обозначим  $y_N^*(n)$ . Очевидно, что  $y_N^*(n) = y_{n+1}$  при  $0 < n < N$  и что  $\sum_{n=0}^{\infty} (y_N^*(n))^2 < \infty$ . Учитывая это, можем записать

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant -ah \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E |\bar{Y}_N(e^{j\omega})|^2 d\omega}{|\bar{\beta}(1 - e^{-j\omega}) + e^{-j\omega}|^2} \leqslant \\ &\leqslant -ah \int_{-\infty}^{+\infty} E |Y_N^*(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{ah}{2\pi} (1 - \bar{\beta}) y_6 \times \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{|\bar{\beta}(1 - e^{-i\omega}) + e^{-i\omega}|^2} &< -ah \sum_{n=0}^{\infty} (y_N^*(n))^2 + \\ + C_1(y_0) &< -ah \sum_{n=0}^N E y_{n+1}^2 + C_1(y_0). \end{aligned}$$

Тем же путем, как и при доказательстве (П.9) в Приложении 1, можно показать справедливость аналогичного утверждения и для системы (2.1), (2.2), т. е.

$$\sup_n E |\bar{y}_n|^2 < \infty, \quad \sup_n E |x_n|^2 < \infty, \quad \sup_n E \varphi_n^2 < \infty. \quad (\text{П.20})$$

Это, в свою очередь, точно так же позволит показать ограниченность интегралов  $I_2, I_3, I_4$  в (П.18) и, следовательно, (с учетом (П.15), (П.17а), (П.19)) справедливость неравенства

$$-ah \sum_0^N E (y_{n+1})^2 + C \geq E \sum_0^N p_n - (N+1)\sigma^2. \quad (\text{П.21})$$

Покажем, что сумма  $E \sum_0^N p_n$  ограничена снизу. Подставим в  $p_n$  вместо  $\bar{\varphi}_n$  ее выражение из (П.12):

$$\begin{aligned} E \sum_0^N p_n = E \left\{ \sum_0^N (hx_n \varphi_n - \varphi_n^2) + \sum_0^N [\bar{q} \bar{\beta} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) \times \right. \\ \times (x_{n+1} - x_n) - \bar{\beta}^2 (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + (\bar{\beta}^2 \mu_-^2 - \bar{q} \bar{\beta} \mu_-) \times \\ \times (x_{n+1} - x_n)^2] + \sum_0^N -2\bar{\beta} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) \varphi_n + \\ + \sum_0^N h \bar{\beta} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) x_n + \sum_0^N \bar{q} (x_{n+1} - x_n) \varphi_n + \\ \left. + \frac{1}{2} \mu_+ (\bar{\beta} h + \bar{q}) \sum_0^N (x_{n+1} - x_n)^2 \right\} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Из (2.3) непосредственно вытекает, что  $\Sigma_1 \geq 0$ . Сумму  $\Sigma_2$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \bar{\beta}^2 \sum_0^N \left( \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{x_{n+1} - x_n} - \mu_- \right) \left( \frac{\bar{q}}{\bar{\beta}} - \mu_- - \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{x_{n+1} - x_n} \right) \times \\ \times (x_{n+1} - x_n)^2. \end{aligned}$$

Так как  $\varphi(x)$  дифференцируема, то  $\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\xi \in [x_n, x_{n+1}]}$ ; поскольку

$\mu_- < \frac{\partial \varphi}{\partial x} < \mu_+ < \bar{q}/\bar{\beta} - \mu_-$  (условия (2.4), (2.12) и  $\mu_+ \geq h$ ), получаем  $\Sigma_2 \geq 0$ . Далее

$\sum_0^N (-\varphi_{n+1} + \varphi_n) \varphi_n \geq -\frac{1}{2} \varphi_{N+1}^2 + \frac{1}{2} \varphi_0^2$ , так что (поскольку  $\bar{\beta} > 0$  и выполняется (П.20))  $\Sigma_3$  так же ограничена снизу. В силу тождества

$$\sum_0^N x_n (\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \varphi_{N+1} x_{N+1} - \varphi_0 x_0 - \sum_0^N \varphi_{n+1} (x_{n+1} - x_n)$$

имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 &= E [h\bar{\beta} (\varphi_{N+1} x_{N+1} - \varphi_0 x_0) - \\ &- h\bar{\beta} \sum_0^N \varphi_{n+1} (x_{n+1} - x_n) + \bar{q} \sum_0^N (x_{n+1} - x_n) \varphi_n + \\ &+ \frac{1}{2} \mu_+ (h\bar{\beta} + \bar{q}) \sum_0^N (x_{n+1} - x_n)^2],\end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} (x_{n+1} - x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx + \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\xi_1 \in [x_n, x_{n+1}]}, \\ \varphi_n (x_{n+1} - x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\xi_2 \in [x_n, x_{n+1}]}.\end{aligned}$$

Подставив эти тождества в выражение для  $\Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6$ , оценим его снизу (учитывая (2.3), (2.4), (2.12a), (П 20))

$$\begin{aligned}\Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 &= (\bar{q} - h\bar{\beta}) \sum_0^N E \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi(x) dx + \\ &+ h\bar{\beta} E (\varphi_{N+1} x_{N+1} - \varphi_0 x_0) + \frac{1}{2} E \sum_0^N (x_{n+1} - x_n)^2 \times \\ &\times \left\{ -h\bar{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\xi_1} - \bar{q} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\xi_2} + (h\bar{\beta} + \bar{q}) \mu_+ \right\} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2} E \sum_0^N (x_{n+1} - x_n)^2 \{-h\bar{\beta} \mu_+ - \bar{q} \mu_+ + h\bar{\beta} \mu_+ + \bar{q} \mu_+\} + \\ &+ h\bar{\beta} E (\varphi_{N+1} x_{N+1} - \varphi_0 x_0) \geqslant -C_3 > -\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали ограниченность снизу  $E \sum_0^N \rho(n)$  в (П.22). Теперь из (П.21) немедленно вытекает (1.13) Теорема 2 доказана.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

*Доказательство теоремы 3.* Введем новые переменные:

$$\varphi_n = \beta (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \varphi_n, \quad \bar{y}_n = \bar{\varphi}_n + \xi_{n-1}.$$

В силу (2.1), (2.2) и (2.9)

$$x_n = \sum_{m=0}^n \bar{w}(n-m) \bar{y}_m + \bar{f}_n,$$

где

$$\bar{w}(n) = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\beta}{\beta + 1} \right)^{n-m} w(m),$$

$$\bar{f}(n) = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{m=0}^n \left( \frac{\beta}{\beta + 1} \right)^{n-m} f(m).$$

Поскольку  $\beta > -1/2$  и имеет место (2.6),

$$\sup_n |\bar{w}(n)| + \sup_n |\bar{f}_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{w}(n)| + |\bar{f}_n| < \infty. \quad (\text{П.23})$$

Кроме этого, согласно (2.7)

$$\bar{w}(n) = 0 \quad (\text{при } n < N^*). \quad (\text{П.24})$$

Обозначая

$$\begin{aligned} S(N) = E \sum_{n=0}^N s_n(\lambda) &= E \sum_{n=0}^N h x_n \bar{y}_n - \bar{y}_n^2 + \\ &+ q \bar{y}_n (x_n - x_{n-1}) + l (x_n - x_{n-1})^2, \\ l = \beta^2 \mu_-^2 - q \beta \mu_- + \frac{1}{2} |q| \tilde{\mu} + \frac{1}{2} h \beta \mu_-, \end{aligned}$$

мы после выкладок, аналогичных тем, что были в Приложении 2, приходим к неравенству

$$C - ah \sum_0^N E \bar{y}_n^2 \geq S(N) \geq E \sum_{n=0}^N \rho(n) - N \sigma^2, \quad (\text{П.25})$$

где

$$\rho(n) = h x_n \bar{y}_n - \bar{y}_n^2 + q \bar{y}_n (x_n - x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})^2.$$

Сумма  $E \sum_{n=0}^N \rho(n)$  в силу (2.3), (2.4), (2.14а), (П.20) оказывается ограниченной снизу, что доказывается точно так же, как и аналогичный факт в Приложении 2. В силу этого из (П.25) вытекает (2.13) и доказательство теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Брусин, М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 7, (1967).
2. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
3. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963
4. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ГИФМЛ, М., 1963.
5. Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, изд. Наука, М., 1964.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете Поступила в редакцию 30 октября 1967 г.

## ON ABSOLUTE STOCHASTIC STABILITY IN RELATION TO ONE CLASS OF DISTURBANCES

V. A. Broosin

The problem of stochastic stability for one class of stochastic disturbances is considered. Some criterions of absolute stochastic stability depending on parameters characterizing this class of disturbances are obtained.

УДК 62—50

## ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЛЕКТИВОМ НЕЗАВИСИМЫХ АВТОМАТОВ И ИГРЫ АВТОМАТОВ

*B. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, A. H. Rapoport*

Приводятся результаты математического эксперимента по оптимизации функций с минимумом овражного вида, осуществляемой коллективом независимых стохастических автоматов. Рассматривается поведение автоматов в игре Гура

В работе [1] рассматривались вопросы, связанные с оптимизацией коллективом независимых детерминированных и стохастических автоматов. Структурная схема рассматриваемой системы оптимизации изображена на рис. 1а, где  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  — автоматы, перерабатывающие зна-

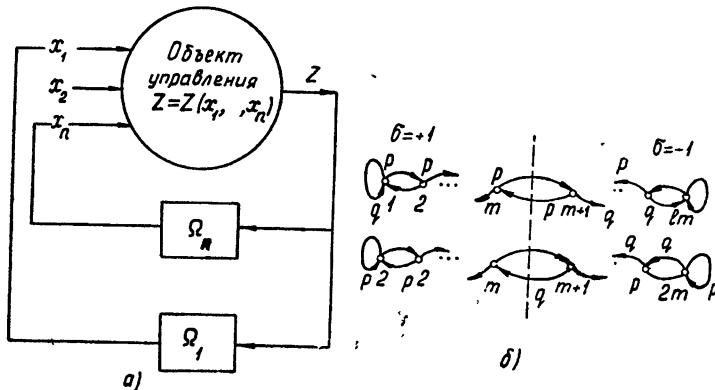


Рис. 1.

чения  $Z$  в значения переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Согласно этой схеме каждая из выходных переменных  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) объекта управляет своим автоматом  $\Omega_j$ . Входной переменной для всех управляющих автоматов является оптимизируемая выходная переменная объекта  $Z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Все автоматы  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  однотипны. В случае детерминированных автоматов смена их внутренних состояний задается некоторой зависимостью, определяющей последующее состояние через предыдущее и приращение величины  $Z$ . В случае стохастических автоматов определены для каждого из автоматов вероятности переходов от одного состояния к другому\*. Эти вероятности перехода зависят только от величины изменения переменной  $Z$ . Внутреннее состояние каждого из автоматов  $\Omega_j$  определяет изменение управляемой им переменной.

\* Если эти вероятности равны либо 0, либо 1, стохастический автомат переходит в детерминированный. В силу этого систему оптимизации с детерминированными автоматами можно рассматривать как предельный случай системы оптимизации со стохастическими автоматами.

Проведенный математический эксперимент показал, что система со структурной схемой, изображенной на рис. 1а, и стохастическими автоматами может отыскивать минимум функции  $Z$  как в отсутствие, так и при наличии помех, что она может осуществлять поиск глобального минимума и слежение за минимумом при медленном изменении функциональной зависимости.

При специальном выборе минимизируемого функционала задача о поведении автоматов в такой среде может быть интерпретирована как игровая. С этих позиций была исследована игра  $n$  автоматов, известная под названием игры Гура или игры в «размещение». Здесь было получено, что, если оптимизируемая функция  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет минимум овражного типа размерности  $(n-1)$ , автоматы находят дно этого оврага и так распределяются по числу автоматов, выдающих то или иное действие, что в среднем большую часть времени все они находятся на этом дне.

Проведенный эксперимент, в котором игра Гура рассматривалась как задача оптимизации многомерного объекта стохастическими автоматами, позволяет сделать некоторые выводы о классе функций, минимизация которых возможна при некоторых ограничениях на значения параметров автоматов. К этому классу принадлежат функции, имеющие экстремумы овражного типа, т. е. функции, у которых имеется многомерное пологое дно с крутыми склонами. Благодаря наличию достаточной глубины памяти; автоматы запоминают направление вдоль дна оврага и осуществляют движение в этом направлении, не тратя времени на рыскание.

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОПТИМИЗАЦИИ НЕЗАВИСИМЫМИ АВТОМАТАМИ С ЛИНЕЙНОЙ ТАКТИКОЙ

Экспериментально обнаружено [1], что в системе со структурной схемой, изображенной на рис. 1а, с детерминированными автоматами, происходит зацикливание, т. е. спустя некоторое число тактов система приходит к периодическому режиму, в котором величина  $Z$  периодически повторяется. Поиск в этом случае, естественно, не имеет места.

В связи с тем, что зацикливание поиска минимума вызывалось одинакостью памяти автоматов (это удалось показать теоретически), следующая серия экспериментов была направлена на выяснение возможности оптимизации достаточно разнообразными автоматами. Разнообразие автоматов понималось как различность их памяти. Эксперимент показал, что достаточно разнообразные автоматы осуществляют оптимизацию.

Следующая серия экспериментов была посвящена изучению возможности оптимизации стохастическими автоматами. Стохастический автомат с линейной тактикой и с  $2m$  внутренними состояниями определяется графом, изображенным на рис. 1б. Здесь сменой состояний уже управляет случайный механизм. Однако при  $p = 1, q = 0$  наш стохастический автомат переходит в рассмотренный выше детерминированный. В силу этого систему оптимизации с детерминированными автоматами можно рассматривать как предельный случай системы оптимизации со стохастическими автоматами.

Процесс поиска минимума функции многих переменных можно характеризовать средним числом шагов поиска  $N_{cp}$ , точностью поиска  $\delta$  и разбросом поиска  $d$ . Экспериментально была выяснена зависимость этих характеристик поиска от размерности минимизируемой функции  $n$  и от параметров самих автоматов:  $m$  — памяти,  $p$  — вероятности смены состояний и  $\alpha$  — величины шага изменения переменных  $x_j$ , который брался одинаковым по всем переменным.

Для функции  $Z = \sum_{i=1}^n x_i^2$  зависимость точности поиска  $\delta$  от памяти

оказалась близкой к линейной,  $\delta$  растет с увеличением  $m$ , точность поиска  $\delta$  пропорциональна квадрату шага  $a$ . Особый интерес представляет зависимость разброса поиска от вероятности  $p$ . Как показал эксперимент, эта зависимость оказалась близкой к экспоненциальной, причем  $d \rightarrow \infty$  при  $p \rightarrow 0,5$ . То есть чем безразличнее автомат к точке экстремума, тем на большее расстояние уводит он соответствующую координату. Последнее обстоятельство наводит на мысль о возможности отыскания глобального минимума в заданной области при наличии в ней нескольких локальных. В этом направлении была проделана серия экспериментов по поиску коллективом стохастических автоматов глобальных минимумов у функций специального вида. Здесь выяснялась зависимость характера поиска глобального минимума от особенностей конфигурации минимизируемой функции, от ее размерности, а также от параметров оптимизирующих автоматов.

Основные результаты, полученные в этом направлении, были продемонстрированы на примере отыскания глобального экстремума у функции двух переменных

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + 40 \sin x_1 \sin x_2$$

при ручном переключении параметра  $p$ . Тактику ручного управления можно охарактеризовать как увеличение  $p$  при наличии априорной удовлетворенности глубиной минимума и уменьшение при появлении неудовлетворительности и желании найти более глубокий минимум.

Определенный интерес представляет собой задача отыскания экстремума функции многих переменных в случае, когда последний с течением времени может медленно изменяться. Был проведен эксперимент для выяснения вопроса, будет ли описанная выше система осуществлять устойчивое слежение за медленно меняющимся минимумом. Эксперимент был проведен для функции

$$Z = \sum_{j=1}^n [x_j - A \sin(\omega t)]^2.$$

Выяснилась зависимость качества слежения от  $\omega$  для различных амплитуд  $A$ . Как и следовало ожидать, качество слежения ухудшается при увеличении скорости дрейфа минимума.

Далее изучалась зависимость точности поиска  $\delta$  от параметров автоматов  $p$ ,  $m$  и  $a$  при работе последних в шумах. В качестве помехи  $\xi$  бралась псевдослучайная величина с равномерным законом распределения. В этом случае было обнаружено существование оптимальных значений параметров  $p$  и  $a$ .

Для повышения надежности поиска была использована система дублирования, т. е. поиск по каждой переменной вел не один автомат, а несколько соединенных параллельно автоматов. Вход у них был общим, а за выходное действие такой системы дублеров было взято среднее арифметических выходных действий каждого. Эксперимент показал, что поиск минимума осуществляется, если ломается несколько дублеров так, что соответствующее  $p$  оказывается меньше 0,5, но при этом остается достаточное число исправно работающих дублирующих автоматов.

Для системы без дублирования при значениях вероятности автоматов  $p \rightarrow 0,5$   $d$  стремится к бесконечности, а для системы с дублированием (1 неисправный и 3 исправных) разброс поиска  $d$  неограниченно возрастает при значениях вероятности неисправного автомата, стре-

мящейся к 0,3 ( $p \rightarrow 0,3$ ). Интересно, что в системе с дублированием исправные дублеры подстраиваются к работе «поломанного» так, чтобы компенсировать неправильную работу последнего.

## 2. ИГРА ГУРА

К схеме, представленной на рис. 1а, приводятся многие известные задачи теории игр.

Рассмотрим игру  $n$  автоматов, имеющих по два действия —1 и +1. Как в [2], эта игра состоит из многократно повторяющихся партий, в которых каждый автомат выбирает то или иное действие. Результатом партии для каждого автомата является его единичный выигрыш или проигрыш. Предполагается, что автоматы, участвующие в игре, не имеют априорной информации о системе платежных функций. В ходе игры каждый автомат получает лишь сведения об общем выигрыше или проигрыше всех автоматов в отдельных партиях и использует их.

Рассмотрим простейшую симметричную игру многих автоматов; математическое ожидание выигрыша любого автомата в каждой партии есть функция  $M(l/n)$ , зависящая только от отношения числа  $l$  автоматов, выбравших действие—1, к числу всех автоматов. Такая игра называется игрой Гура [3]. Предполагается, что функция  $M(\xi)$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) имеет максимум в точке  $\xi_0$ .

Рассматривая данную игру как задачу о минимизации некоторой функции многих переменных коллективом независимых стохастических автоматов [1], примем в качестве выигрыша (проигрыша) для каждого автомата величину  $\text{sgn } \Delta Z$ . Здесь  $Z(x_1, \dots, x_n)$  — оптимизируемая функция — среда специального вида. Определенная таким образом игра является простой симметричной игрой [4]. Если функция  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет экстремальную точку, то в данной игре заведомо существуют такие партии, в которых все автоматы получают максимальный выигрыш, так что ни одному из них не выгодна смена действий. Целью проведенного эксперимента было выяснение возможности отыскания таких партий коллективом одинаковых стохастических автоматов с линейной тактикой, обладающих целесообразным поведением в случайных стационарных средах.

В проведенном эксперименте в качестве среды была взята функция

$$Z = \sum_{j=1}^n (x_j + s)^2.$$

Здесь  $s$  — целое число. Учитывая, что выходные переменные автоматов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — двоичные, т. е. принимают лишь значения  $\pm 1$ , в зависимости от внутреннего состояния, функция  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет минимум, который лежит на  $(n-1)$ -мерной гиперплоскости. Изображающая, точка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будет лежать на этой гиперплоскости только в случае, если  $l = (n+s)/2$  каких-либо автоматов из общего числа имеют выход, равный —1. Из сформулированной постановки игры видно, что автоматы получат максимальный выигрыш лишь в том случае, если они разобьются на две группы, причем каждая группа характеризуется тем, что автоматы внутри группы в каждой партии игры выдают всегда одно действие, либо плюс, либо минус единицу. Если в какой-либо партии один из автоматов сменит свое действие, то он переходит в другую группу. В такой интерпретации игру автоматов можно рассматривать как игру в размещение. Все автоматы получают максимальный выигрыш, если они сумеют распределиться по группам, выдающим действие +1 и —1 в следующем соотношении  $(n-s)/(n+s)$  и в каж-

дой следующей партии игры будут в среднем придерживаться этого отношения.

Проведенный эксперимент показал, что при достаточной глубине памяти автоматов  $m$  отношение числа автоматов, выдающих действие  $+1$ , к числу автоматов, выдающих действие  $-1$ , близко к  $(n-s)/(n+s)$  и автоматы получают выигрыш, близкий к максимальному.

Обозначим через  $\varphi(k)$  финальное распределение партий в игре, т. е. отношение числа партий, в которых  $k$  автоматов выдавало действие  $-1$  к общему числу сыгранных партий. Если

$$\varphi(k) = \begin{cases} 0 & (\text{при } k \neq n^*) \\ 1 & (\text{при } k = n^*) \end{cases}$$

где  $n^* = \frac{n+s}{2}$ , то все автоматы получат максимальный выигрыш.

На рис. 2а изображено финальное распределение  $\varphi(k)$  для различных значений  $m$ . Эксперимент проводился для 20 автоматов

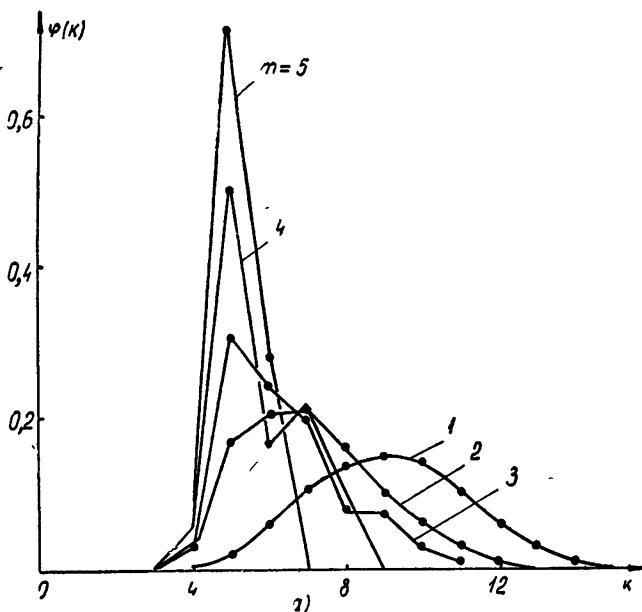


Рис. 2 а.

с  $p=0,9$ . Среда была взята равной  $Z = \left( \sum_{j=1}^{20} x_j - 10 \right)^2$ , т. е.  $s = -10$ . Для такой среды автоматы получат максимальный выигрыш, если разбоятся на две группы в соотношении 1 : 3, т. е. четвертая часть всех автоматов должна выдавать действие  $-1$ ;  $\varphi(k)$  будет иметь в этом случае максимальное значение при  $n^* = 5$ .

Из рис. 2 видно, что при  $m=1$   $\varphi(k)$  имеет максимум в точке  $k=n/2$  ( $n$  — общее число играющих автоматов). То есть коллектив независимых автоматов без памяти не может должным образом разместить своих членов по группам, чтобы все члены получили максимальный выигрыш. Такой коллектив автоматов для любых  $p$  и  $n$  разбивается в среднем на две равные группы, выдающие  $+1$  и  $-1$  соответственно. Данный результат эксперимента для игры автоматов с  $m=1$  подтверждается и теоретически [2].

С увеличением  $m$  экстремальная точка функции  $\varphi(k)$  приближается к  $n^* = (n+s)/2$ , при  $m=m_{\text{opt}}$  распределение  $\varphi(k)$  близко к функции  $\varphi(k) = \begin{cases} 0 & (\text{при } k \neq n^*) \\ 1 & (\text{при } k = n^*) \end{cases}$ . Дальнейшее увеличение памяти нецелесообразно, так как при больших  $m$  на вычисление распределения  $\varphi(k)$

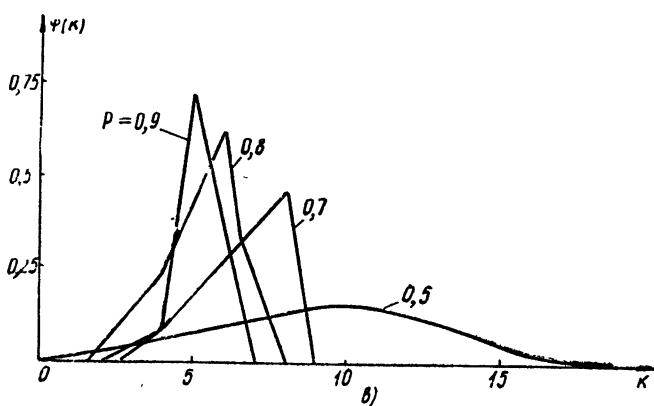
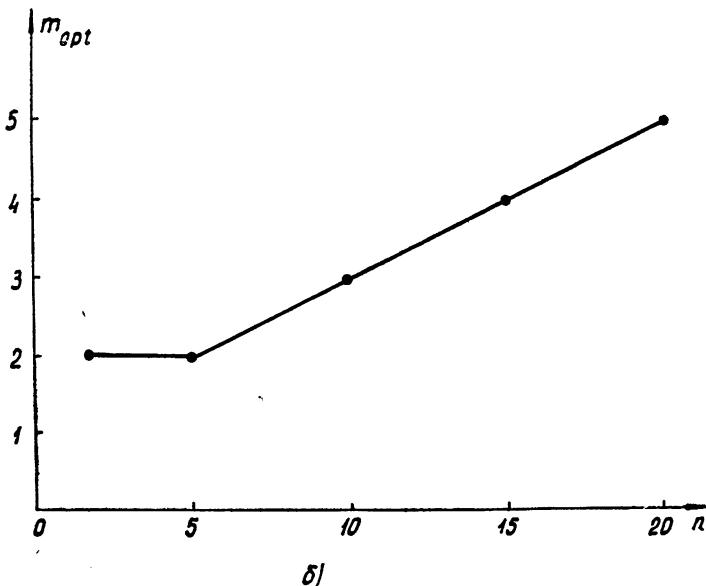


Рис. 2 б, в.

оказывают влияние начальные распределения памяти автоматов. Число партий в игре, необходимое для экспериментального определения финального распределения  $\varphi(k)$  растет вместе с  $m$  как  $q^{-|m-r_i^0|}$  (здесь  $q=1-p$ ,  $r_i^0$  — начальное состояние памяти  $i$ -го автомата).

Относительно  $m_{\text{opt}}$  можно сказать следующее. Во-первых,  $m_{\text{opt}}$  зависит от числа участвующих в игре автоматов и растет вместе с  $n$  (рис. 2б). Во-вторых,  $m_{\text{opt}}$  зависит от параметра автоматов  $p$  и при любом фиксированном  $n$  растет с убыванием  $p$  от единицы до одной второй, т. е. здесь мы имеем ситуацию, в которой чем меньше вероят-

ность  $p$  каждого автомата в коллективе, тем большая необходима память, при которой все автоматы получат выигрыш, близкий к максимальному. Интересно, что при  $p=0,5$  коллектив автоматов с любой памятью  $m$  ведет себя точно так же, как при  $m=1$ . То есть в среднем половина автоматов выдаст действие +1, а другая половина — действие -1 (рис. 2в).

Проведенный эксперимент, в котором игра Гура рассматривалась как задача оптимизации многомерного объекта стохастическими автоматами, позволяет сделать некоторые выводы о классе функций, при минимизации которых существенна глубина памяти. К этому классу принадлежат функции, имеющие экстремумы овражного типа, т. е. у которых имеется многомерное пологое дно с крутыми склонами.

Благодаря наличию достаточной глубины памяти, автоматы запоминают направление вдоль оврага и осуществляют движение в этом направлении, не тратя времени на рыскание.

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ОВРАЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Поведение автоматов в игре Гура показало, что коллектив независимых стохастических автоматов с достаточной глубиной памяти хорошо справляется с поиском минимума овражного типа. Это наглядно подтверждается экспериментом по минимизации функции

$$Q_1(x_1, x_2) = 100 (x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

У этой функции имеется пологое дно банановидной формы с крутыми склонами вдоль параболы  $x_1 = x_2^2$ . Функция имеет минимум в точке  $x_1 = x_2 = 1$ , равный нулю. Общая картина поиска из наиболее интересной начальной точки  $x_1^0 = -1,2$ ,  $x_2^0 = 1$  показана на рис. 3а, из которого видно, что движение изображающей точки для автоматов с памятью,

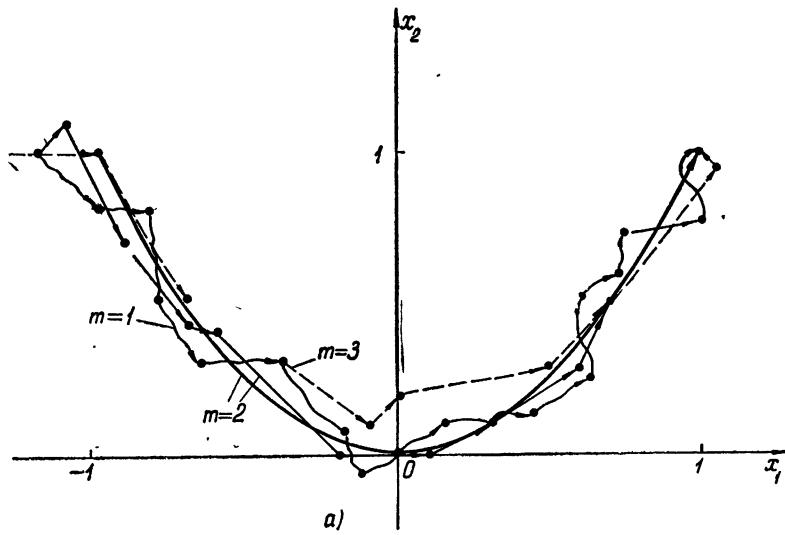


Рис. 3а.

равной 1, имеет рыскающий характер. Это можно объяснить следующим образом. Дно оврага  $x_1 = x_2^2$  не совпадает ни с одним из возможных направлений движения изображающей точки, так как шаги по каждой переменной фиксированы и равны. Поэтому, если в результате шага автоматов  $\Delta Z > 0$ , все автоматы штрафуются и при  $m=1$ , с вероятностью  $p=0,9$  происходит переброска состояний памяти. Авто-

маты, натыкаясь при движении на крутые склоны оврага, двигаются вдоль его дна с большим числом переключений состояний памяти, т. е. с очень частым изменением направления движения. В этом случае естественным было увеличение глубины памяти автоматов. Как показал эксперимент, при поиске минимума у выбранной функции  $Q_1(x_1, x_2)$  автоматами с глубиной памяти  $m$ , большей, чем единица, скорость по-

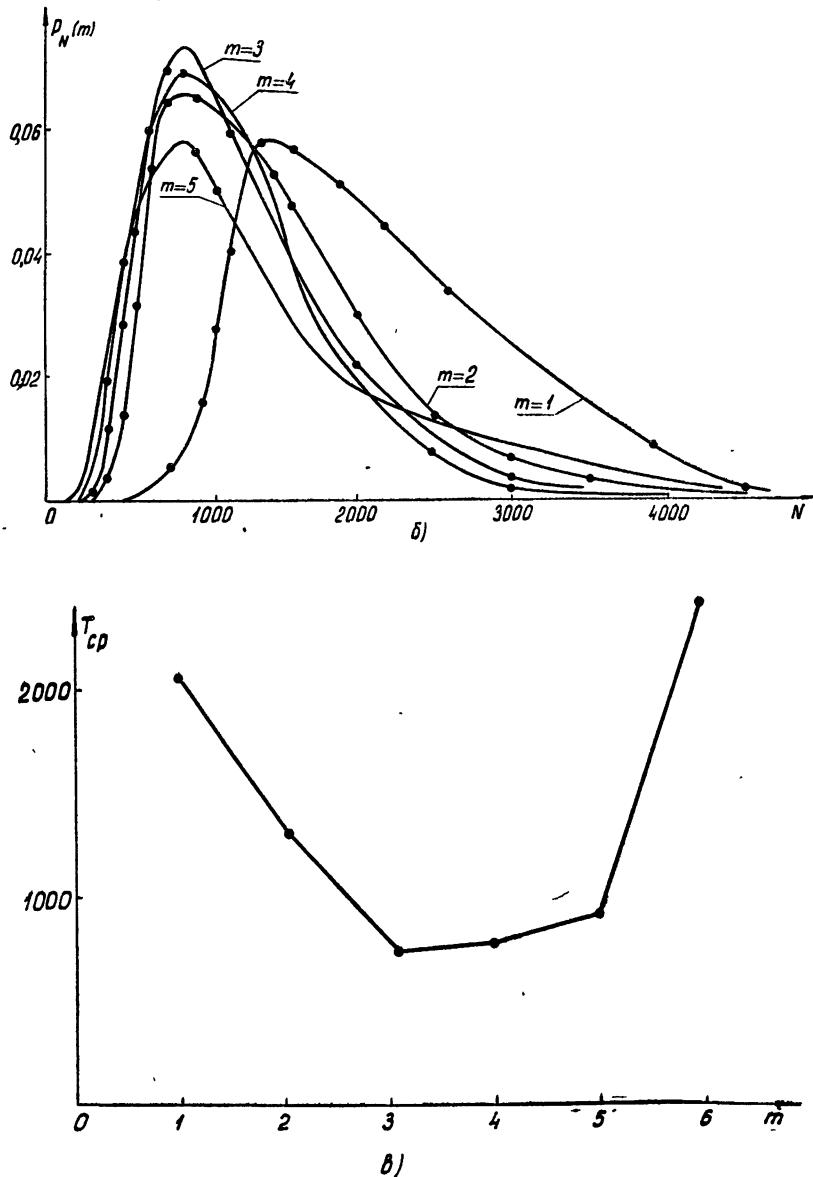


Рис. 3 б, 3 в.

иска возрастает. В данной ситуации определенный интерес представляет зависимость среднего времени поиска экстремума от глубины памяти автоматов. Обозначим через  $P_m(N)$  вероятность того, что автоматы с памятью, равной  $m$ , из данной начальной точки  $(x_1^0, x_2^0)$  придут в  $\epsilon$ -окрестность экстремальной точки за  $N$  рабочих тактов (под одним рабочим тактом понимаем одно измерение минимизируемой функции).

На рис. 3б приведены графики экспериментального распределения времени поиска минимума функции  $Q_1(x_1, x_2)$  из начальной точки  $(-1, 2; 1)$  для различных значений памяти автоматов.

Для данной функции и начальной точки оптимальной является память  $m=3$ . При  $m=1$  затраты на поиск наибольшие. Это распределение хорошо согласуется с рис. 3в, где изображена зависимость среднего времени поиска  $T_{\text{ср}}$  от памяти  $m$ , определенная экспериментально для той же функции и той же начальной точки  $(-1, 2; 1)$ .

Аналогичные эксперименты были проведены для многомерных функций  $n \leq 10$ , имеющих экстремумы овражного типа с одномерным и многомерным дном. Результаты эксперимента для функций

$$Q_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + A \sum_{l=n-l}^n (x_l - x_{l-1})^2$$

$$(l = 1, 2, \dots, n-2)$$

подтвердили ранее полученные выводы о наличии оптимальной глубины памяти при минимизации коллективом автоматов многомерных функций с экстремумами овражного типа.

Коллектив независимых стохастических автоматов хорошо справляется с поиском минимума функций овражного типа; имеет место факт существования оптимальной памяти, так как слишком маленькая память приводит к рысканию, которое резко увеличивает временные затраты на поиск. Слишком большая память также плоха в силу большой инерционности автоматов, из-за которой имеют место большие колебания изображающей точки. При достаточной глубине памяти автоматы запоминают направление вдоль дна оврага и двигаются вдоль этого направления к экстремальной точке, не тратя лишнего времени на рыскание.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт, Уч. зап. НИИ ПМК и факультета ВМК ГГУ, Горький, 1967, стр. 148.
2. В. А. Боровиков, В. И. Брызгалов, Автоматика и телемеханика, 26, № 4, 683 (1965).
3. М. Л. Цетлин, УМН, 18, вып. 4, 3 (1963).
4. Д. Мак-Кинси, Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
21 июля 1967 г.

#### OPTIMIZATION BY THE COLLECTIVE OF INDEPENDENT AUTOMATIONS AND GAMES OF AUTOMATIONS

V. P. Grigoryenko, Yoo. I. Neimark, A N. Rapoport

The results of mathematical experiment in optimization of functions having trench type minimum performed by the collective of independent stochastic automations are given.

The behaviour of automations in the Goora's game is considered.

УДК 531.391.3/4 + 621 396.6.078.6

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛОСЫ ЗАХВАТА ПРИ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКЕ ЧАСТОТЫ\*

*M. B. Капранов*

Для системы фазовой автоподстройки частоты с произвольной характеристикой фазового детектора разработана методика вычисления асимптотических значений полосы захвата, соответствующих весьма большим постоянным времени пропорционально-интегрирующего фильтра

### ВВЕДЕНИЕ

При стабилизации частоты автогенератора с помощью фазовой автоподстройки частоты (ФАП) обычно требуется получить максимальную полосу захвата системы при наибольшей фильтрации помех, содержащихся в эталонном сигнале. Удовлетворение этих противоречивых требований в сильной степени зависит от схемы низкочастотного фильтра, включенного на выходе фазового детектора (ФД). Кроме того, на фильтрующие свойства ФАП и на ее полосу захвата заметное влияние оказывает форма нормированной характеристики  $F(\varphi)$ , т. е. зависимости выходного напряжения ФД от разности фаз  $\varphi$  колебаний на его входе.

Оценить фильтрацию малых помех нетрудно для любой схемы фильтра, поскольку для малых помех система ФАП может быть линеаризована. Задача о полосе захвата ФАП с произвольным фильтром несравненно более сложная, так как характеристика ФД существенно нелинейная. Точные решения этой задачи получены лишь для некоторых характеристик  $F(\varphi)$  и только при таких выражениях коэффициента передачи фильтра, которые приводят к дифференциальному уравнению ФАП не выше второго порядка.

Из класса простейших фильтров этого типа наибольшее распространение получил пропорционально-интегрирующий фильтр с коэффициентом передачи в операторной форме (оператор  $p \equiv \frac{d}{dt}$ )

$$K(p) = \frac{T_1 p + 1}{T p + 1}. \quad (1)$$

Такой фильтр позволяет реализовать заданную фильтрацию помех при сравнительно высокой полосе захвата [1, 2].

Дифференциальное уравнение ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром можно записать в виде [3]

$$\Delta_0 \ddot{\varphi} + [1 + q \Delta_0 F'(\varphi)] \dot{\varphi} + F(\varphi) = \gamma, \quad (2)$$

где  $\gamma = (\omega_0 - \omega_e) \Omega^{-1}$  — нормированная расстройка собственной частоты подстраиваемого генератора  $\omega_0$  относительно эталонной  $\omega_e$ , отнесенная

\* Доклад на научно-технической конференции, МЭИ, 1964.

к полосе синхронизма  $\Omega$ ,  $q = T_1/T$  — отношение постоянных времени фильтра,  $\Delta_0 = \Omega T$  — безразмерная постоянная времени фильтра. Точки над  $\varphi$  в уравнении (2) означают дифференцирование по безразмерному времени  $t_1 = \Omega t$ , а  $F'(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}$ .

Уравнение (2) изучалось многими авторами [3–14]. При кусочно-линейной идеализации характеристики  $F(\varphi)$  полное качественное исследование системы проведено в [8]. Используя формулы, полученные в этой работе, можно составить выражение полосы захвата  $\gamma_3$  через параметры  $\Delta_0$  и  $q$  для треугольной характеристики ФД. Численное решение задачи о полосе захвата для треугольной и косинусоидальной характеристики ФД приведено в [11].

К сожалению, из опубликованных работ не удается выяснить, как в общем случае влияет форма характеристики  $F(\varphi)$  на полосу захвата ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром. Этот вопрос представляет большой интерес, поскольку от крутизны характеристики  $F'(\varphi_0)$  в точке стационарного режима  $\varphi_0$  зависят фильтрующие свойства ФАП для малых помех [1, 2].

Известно, что при фиксированном отношении постоянных времени фильтра  $q = T_1/T$  наибольшая фильтрация малых внешних помех достигается при весьма большой постоянной времени  $\Delta_0 \gg 1$  [1, 2]. Поэтому для возможности выбора оптимальной формы характеристики  $F(\varphi)$  важно, в первую очередь, располагать выражениями полосы захвата для произвольной  $F(\varphi)$  при  $\Delta_0 \gg 1$ . Наша цель состоит в решении этой задачи.

Присутствие в уравнении (2) большого параметра  $\Delta_0 \gg 1$  позволяет развить простой аналитический метод определения полосы захвата.

### 1. УСЛОВИЕ АСИНХРОННОГО РЕЖИМА

Полоса захвата  $\gamma_3$  представляет максимальную расстройку частот генераторов, в пределах которой при любых начальных условиях устанавливается синхронный стационарный режим, а асинхронный стационарный режим, т. е. периодические решения дифференциального уравнения ФАП, невозможен. При уменьшении расстройки  $\gamma$  со стороны асинхронного режима до значения, равного полосе захвата, асинхронный режим («режим биений») переходит в синхронный.

Поэтому для определения полосы захвата поступим следующим образом. Получим вначале соотношение, которому удовлетворяет любое периодическое решение дифференциального уравнения (2), а затем отыщем минимальную расстройку  $\gamma = \gamma_3$ , при которой все возможные периодические решения разрушаются.

Обозначив  $\varphi = u$ , уравнение (2) можно записать в виде

$$\Delta_0 u \frac{dy}{d\varphi} + [1 + q\Delta_0 F'(\varphi)] y + F(\varphi) = \gamma. \quad (3)$$

Фазовым пространством уравнения (2) или (3) является поверхность кругового цилиндра с координатами  $\varphi$ ,  $y$  [5]. В асинхронном режиме, т. е. при  $\gamma > \gamma_3$ , существуют периодические решения уравнения (3), охватывающие цилиндр (предельные циклы второго рода) [5]:

$$\tilde{y}(\varphi) = \tilde{y}(\varphi + 2\pi). \quad (4)$$

Примем предельный цикл (4) в качестве решения исходного дифференциального уравнения (3) и умножим все члены этого уравнения на  $d\varphi$ . После интегрирования на интервале от 0 до  $2\pi$  в силу периодич-

ности решения (4) первый и последний члены в левой части (3) обратятся в нуль:

$$\int_0^{2\pi} \tilde{y}(\varphi) d\varphi + q\Delta_0 \int_0^{2\pi} F'(\varphi) \tilde{y}(\varphi) d\varphi = 2\pi\gamma. \quad (5)$$

Чтобы иметь дело с самой характеристикой  $F(\varphi)$ , а не с ее производной  $F'(\varphi) = \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}$ , второй интеграл в (5) можно взять по частям и привести к виду

$$\int_0^{2\pi} F'(\varphi) \tilde{y}(\varphi) d\varphi = - \int_0^{2\pi} F(\varphi) \tilde{y}'(\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

где  $\tilde{y}'(\varphi) = \frac{d\tilde{y}(\varphi)}{d\varphi}$ .

Подставив в (6) выражение  $\tilde{y}'(\varphi)$  из исходного дифференциального уравнения (3), получим после преобразований взамен (5) следующее соотношение, которому удовлетворяют все периодические решения (3):

$$\int_0^{2\pi} \tilde{y}(\varphi) d\varphi - q \int_0^{2\pi} \frac{1 - F(\varphi)}{\tilde{y}(\varphi)} F(\varphi) d\varphi = 2\pi\gamma. \quad (7)$$

Заметим, что постоянная времени  $\Delta_0$  неявно присутствует в условии (7), поскольку вид периодического решения  $\tilde{y}(\varphi)$  уравнения (3) зависит от величины  $\Delta_0$ .

Если бы мы располагали точными выражениями  $\tilde{y}(\varphi)$  для всех возможных предельных циклов дифференциального уравнения (3), то при подстановке этих выражений в (7) получилась бы связь между расстройкой  $\gamma$  и параметрами  $\Delta_0$  и  $q$ , соответствующими данным предельным циклам. Тогда отыскание полосы захвата при заданных  $\Delta_0$  и  $q$  свелось бы к нахождению минимального значения  $\gamma = \gamma_s$ , при котором перестает выполняться условие (7), т. е. разрушаются все периодические движения  $\tilde{y}(\varphi)$ . Однако точные решения  $\tilde{y}(\varphi)$  уравнения (3) получить в общем случае не удается из-за нелинейности характеристики  $F(\varphi)$ .

Следовательно, дальнейшее направление аналитического решения задачи о полосе захвата связано лишь с поисками выражения предельного цикла  $\tilde{y}(\varphi)$ . Если приблизительный вид функции  $\tilde{y}(\varphi)$  заранее известен из качественного рассмотрения фазового портрета, то один из приближенных способов состоит в подходящей аппроксимации  $\tilde{y}(\varphi)$ . Коэффициенты аппроксимирующего ряда можно определить после подстановки его в исходное дифференциальное уравнение (подобно тому, как это сделано в [10] для ФАП с интегрирующим фильтром).

В данной работе мы не будем заниматься аппроксимацией предельных циклов  $\tilde{y}(\varphi)$ , а используем для их нахождения упрощающее предположение о наличии в дифференциальном уравнении (3) большого параметра  $\Delta_0 \gg 1$ . При этом удается непосредственно из дифференциального уравнения получить для произвольной характеристики  $F(\varphi)$  асимптотическое выражение  $\tilde{y}_{ac}(\varphi)$ , соответствующее  $\Delta_0 \rightarrow \infty$ .

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Разрешим уравнение (3) относительно производной  $y' = \frac{dy}{d\varphi}$ :

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta_0} \left[ \frac{\gamma - F(\varphi)}{y} - 1 \right] - qF'(\varphi). \quad (8)$$

Предположим, что при  $\Delta_0 \rightarrow \infty$ ,  $q \neq 0$  и  $\gamma > 0$  в режиме биений искомое решение  $\tilde{y}_{ac}(\varphi) > 0$  (соответственно при  $\gamma < 0$  будем предполагать  $\tilde{y}_{ac}(\varphi) < 0$ ). Тогда первым слагаемым в (8) можно пренебречь:

$$\frac{d\tilde{y}_{ac}(\varphi)}{d\varphi} \simeq -qF'(\varphi). \quad (9)$$

Очевидно, полученное уравнение намного проще (8) и легко интегрируется, давая асимптотическое выражение периодического решения:

$$\tilde{y}_{ac}(\varphi) \simeq q[A - F(\varphi)]. \quad (10)$$

Здесь постоянная интегрирования  $A > 1$ , поскольку  $|F(\varphi)| \ll 1$ , а по предположению  $\tilde{y}_{ac}(\varphi) > 0$ .

Из (10) следует, что в асимптотическом случае ( $\Delta_0 \rightarrow \infty$ ) предельный цикл  $\tilde{y}_{ac}(\varphi)$  на фазовой плоскости  $\varphi$ ,  $y$  представляет перевернутую характеристику фазового детектора  $F(\varphi)$  с размахом  $q < 1$ , приподнятую над осью абсцисс на уровень  $qA$ .

Подставляя (10) в (7), получим после преобразований связь расстройки  $\gamma$  с константой  $A$ :

$$\gamma = A - (1-q) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A - F(\varphi)} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Удобнее, однако, выразить расстройку через период биений  $T_6$ , соответствующий изменению фазы  $\varphi$  на угол  $2\pi$ . Учитывая, что  $y = \frac{d\varphi}{d(\Omega t)}$ , получим из (10) после интегрирования связь периода биений  $T_6$  с константой  $A$ :

$$q\Omega T_6 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A - F(\varphi)}. \quad (12)$$

Используя (12), можно получить взамен (11) выражение, связывающее расстройку  $\gamma$  с безразмерной частотой биений  $z = 2\pi/\Omega T_6$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{d\varphi}{\gamma + \frac{1-q}{q} z - F(\varphi)}}{z} - \frac{q}{z} = 0. \quad (13)$$

Выполнив здесь интегрирование для конкретного выражения характеристики  $F(\varphi)$ , найдем связь между частотой биений  $z$  и расстройкой генераторов  $\gamma$ .

Покажем, как с помощью соотношения (13) можно найти выражение асимптотической полосы захвата для произвольной характеристики фазового детектора  $F(\varphi)$ .

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛОСЫ ЗАХВАТА

Вычислим асимптотические значения полосы захвата  $\gamma_3$ , соответствующие  $\Delta_0 \rightarrow \infty$ , для нескольких выражений характеристики фазового детектора.

*а) Синусоидальная характеристика.* Подставляя в (13) выражение  $F(\varphi) = \sin \varphi$ , получаем

$$q\gamma = \sqrt{q^2 + z^2} - (1-q)z. \quad (14)$$

По формуле (14) на рис. 1 построены графики функций  $z(\gamma)$  для разных  $q$ . Значение  $q = 1$ , как следует из (1), приводит к вырождению фильтра, т. е. дает  $K(p) \equiv 1$ . При этом стационарный синхронный режим, для которого частота биений  $z = 0$ , сохраняется во всем диапазоне начальных расстроек, расположенных внутри полосы синхронизма ФАП  $\gamma \ll 1$ . Асинхронный режим ( $z \neq 0$ ) при  $q = 1$  возникает лишь за пределами полосы синхронизма  $\gamma > 1$ .

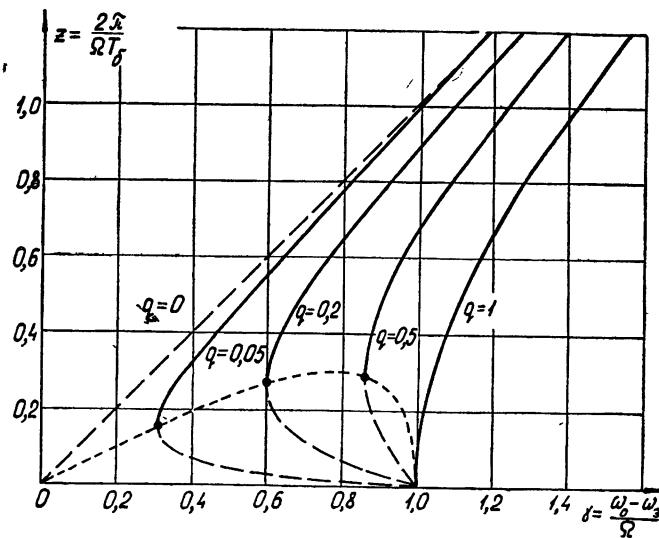


Рис. 1.

Если отношение постоянных времени фильтра  $0 < q < 1$ , то асинхронный режим частично заходит в область начальных расстроек, меньших, чем полоса синхронизма. Минимальное значение начальной расстройки, при которой исчезает асинхронный режим и частота биений обращается в нуль, как раз и представляет полосу захвата  $\gamma = \gamma_3$ .

Для иллюстрации разницы между полосой захвата и полосой синхронизма одна из кривых рис. 1 приведена на рис. 2 для положительных и отрицательных начальных расстроек. Области гистерезиса между полосой захвата и полосой синхронизма  $|\gamma_3| < |\gamma| < 1$  на рис. 2 покрыты штриховкой, а вертикальные стрелки показывают переход из синхронно-

го режима в асинхронный и обратно при изменении начальной расстройки.

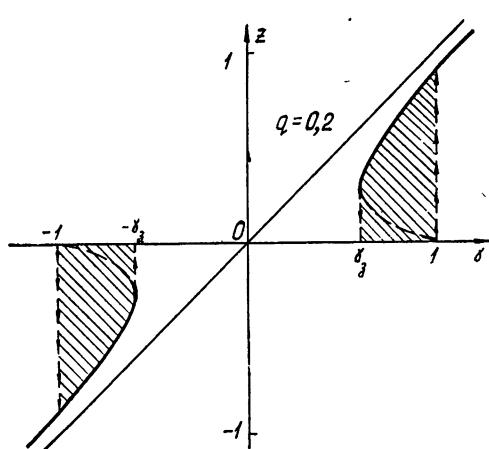


Рис. 2.

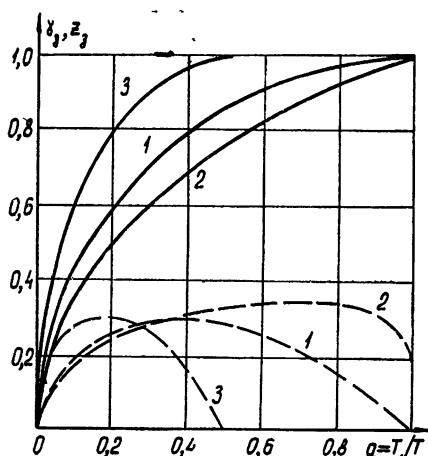


Рис. 3.

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что при расстройке, равной полосе захвата  $\gamma = \gamma_3$ , кривая  $z(\gamma)$  имеет вертикальную касательную  $\frac{dz}{d\gamma} = \infty$  (или  $\frac{d\gamma}{dz} = 0$ ). Поэтому для определения численного значения полосы захвата следует воспользоваться выражением (14), найти производную  $\frac{d\gamma}{dz}$  и приравнять ее нулю:

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{q} \left[ \frac{z}{\sqrt{q^2 + z^2}} - (1 - q) \right] = 0.$$

Отсюда находим частоту биений  $z_3$ , соответствующую полосе захвата:

$$z_3 = (1 - q) \sqrt{q/(2 - q)}. \quad (15)$$

Подставляя это значение в формулу (14), получим искомое выражение для асимптотической полосы захвата:

$$\gamma_3 = \sqrt{1 - (q - 1)^2} = \sqrt{q(2 - q)}. \quad (16)$$

В (16) полоса захвата определяется только отношением постоянных времени пропорционально-интегрирующего фильтра  $q = T_1/T$ , а от самих постоянных времени  $T_1$  и  $T$  не зависит, поскольку они приняты бесконечно большими. Кривая по формуле (16) построена на рис. 3 сплошной линией, а выражение (15) пунктиром (кривые 1). Крайние значения аргумента  $q$  приводят к очевидным результатам — при  $q = 1$  фильтр вырождается и  $\gamma_3 = 1$ , а при  $q = 0$  получается обычный интегрирующий фильтр и полоса захвата ФАП при бесконечно большой постоянной времени интегрирующего фильтра  $\gamma_3 = 0$ .

Выражение (16) первоначально было получено В. С. Дулицким, а затем в работах [4, 11–13].

Легко убедиться, что на плоскости  $q, \gamma_3$  выражение (16) представляет уравнение окружности единичного радиуса с центром в точке  $q = 1$ ,

$\gamma_3 = 0$ . Заметим, что в недавней заметке [14] точное выражение окружности (16) было введено как удачно подобранная аппроксимация фактической зависимости  $\gamma_3(q)$ .

б) *Полигональная характеристика.* Рассмотрим случай, когда характеристику фазового детектора можно представить в виде

$$F(\varphi) = \begin{cases} \varphi/(\pi - \delta) & (0 < |\varphi| < (\pi - \delta)) \\ (\pi - \varphi)/\delta & ((\pi - \delta) < |\varphi| < \pi) \end{cases}. \quad (17)$$

Такая характеристика при  $\delta < \pi/2$  показана на рис. 4 сплошной линией. При  $\delta = \pi/2$  получается характеристика в виде равнобедренного треугольника (пунктирная кривая на рис. 4), а при  $\delta = 0$  и  $\delta = \pi$  она превращается в «пилообразную» с положительным ( $\delta = 0$ ) или отрицательным ( $\delta = \pi$ ) наклоном зубца «пилы».

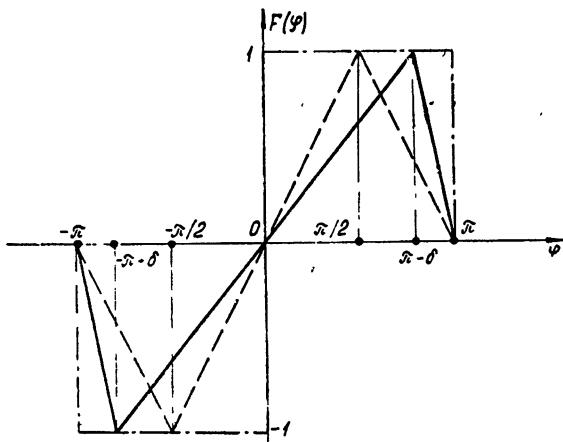


Рис. 4.

Подставив (17) в (13), получим после интегрирования зависимость частоты биений  $z$  от расстройки  $\gamma$ :

$$\gamma = \operatorname{cth} \frac{q}{z} - \frac{1-q}{q} z. \quad (18)$$

Заметим, что в эту формулу не вошла величина  $\delta$ , т. е. протяженность участка характеристики  $F(\varphi)$  с отрицательным наклоном. Поэтому можно утверждать, что для всех полигональных характеристик вида (17) с различными значениями  $0 \leq \delta \leq \pi$  получается одно и то же асимптотическое значение полосы захвата. Причину этого интересного обстоятельства выясним позднее, а теперь перейдем к вычислению полосы захвата.

В соответствии с нашей методикой для вычисления полосы захвата необходимо в (18) подставить значение  $z = z_3$ , удовлетворяющее условию  $\frac{dz}{d\gamma} = 0$  в силу уравнения (18). Для этих значений из (18) после преобразований получается выражение

$$\frac{q}{z_3} = \sqrt{1-q} \operatorname{sh} \frac{q}{z_3}. \quad (19)$$

По этой формуле на рис. 3 построена зависимость частоты биений  $z_s$  на границе полосы захвата от отношения постоянных времени  $q$  (пунктирная кривая 2).

Из-за трансцендентности уравнения (19) не удается записать выражение  $z_s(q)$  в явном виде (подобно выражению (15) для косинусоидальной характеристики). Поэтому не получается явного выражения и для асимптотической полосы захвата, а приходится значения  $z_s$ , найденные из (19) для данного  $q$ , подставлять в (18) и получать численные значения полосы захвата  $\gamma_s$ . Эта кривая построена на рис. 3 сплошной линией (кривая 2).

Сравнивая сплошные кривые 1 и 2 на рис. 3, видим, что при одинаковых значениях отношения  $q = T_1/T$  асимптотическая полоса захвата для косинусоидальной характеристики ФД получается больше, чем для полигональной.

*в) Прямоугольная характеристика.* Прямоугольная характеристика фазового детектора изображена на рис. 4 пунктиром с точкой и имеет вид

$$F(\varphi) = \begin{cases} +1 & (0 < \varphi < \pi) \\ -1 & (-\pi < \varphi < 0) \end{cases}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (13), находим связь частоты биений  $z$  с расстройкой  $\gamma$ :

$$\gamma^2 + \frac{1-2q}{q} \gamma z - \frac{1-q}{q} z^2 - 1 = 0. \quad (21)$$

Возьмем здесь производную  $\frac{d\gamma}{dz}$  и приравняем ее нулю. Комбинируя полученное выражение с (21), получим формулы для частоты биений  $z_s$  и полосы захвата  $\gamma_s$ :

$$z_s = (1-2q) \sqrt{q/(1-q)}, \quad (22)$$

$$\gamma_s = 2 \sqrt{q(1-q)}. \quad (23)$$

Графики по этим формулам построены на рис. 3 (кривые 3). Интересно отметить, что согласно (22) частота биений  $z_s$  обращается в нуль при  $q = 0,5$ , тогда как в двух предыдущих случаях такое положение наступало при  $q = 1$ .

Это значит, что при прямоугольной характеристике ФД можно реализовать значение асимптотической полосы захвата  $\gamma_s = 1$  при невырожденном пропорционально-интегрирующем фильтре, поскольку отношение его постоянных времени  $q = T_1/T$  сохраняется меньшим единицы.

#### 4. О РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Известно [8, 9, 11], что в системе ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром переход от асинхронного режима к синхронному может происходить не так, как в системе с интегрирующим фильтром. В случае интегрирующего фильтра  $q = 0$  и в уравнении (8) периодический член с  $F'(\varphi)$  отсутствует. При этом согласно критерию Бендиексона [5] на фазовом цилиндре  $\varphi$ , у возможен единственный предельный цикл второго рода. При расстройке, равной полосе захвата  $\gamma = \gamma_s$ , он образуется от смыкания сепаратрис седла [1, 5]. Движение изображающей точки по сепаратрисам происходит неограниченно долго, поэтому частота биений на границе полосы захвата для ФАП с интегрирующим фильтром равна нулю.

В случае пропорционально-интегрирующего фильтра ( $q \neq 0$ ) кроме сепаратристического предельного цикла возможны еще несепаратристические цик-

лы, образованные от сгущения фазовых траекторий и при  $\gamma > 0$  целиком лежащие в области  $y > 0$  (или в области  $y < 0$  при  $\gamma < 0$ ) [8, 9, 11]. Порядок смены всех этих циклов и полные картины фазовых траекторий подробно изучены для треугольной характеристики  $F(\varphi)$  в [8]. При определенных параметрах фильтра сепаратрисный цикл может отсутствовать, а переход от асинхронного режима к синхронному происходит в результате слияния устойчивого и неустойчивого несепаратрисных циклов [7]. Образовавшийся полуустойчивый несепаратрисный предельный цикл при уменьшении расстройки  $\gamma < \gamma_3$  исчезает с фазовой плоскости, а частота биений скачком изменяется от конечного ее значения до нуля.

Уместно заметить, что в ранних работах по ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром [1, 3] возможность образования несепаратрисных предельных циклов не была замечена, поэтому заключение о стремлении асимптотической полосы захвата  $\gamma_3 \rightarrow 1$  при  $\Delta_0 \rightarrow \infty$ , полученное в [3] в предположении о существовании одного лишь сепаратрисного цикла, оказалось ошибочным. Именно наличие несепаратрисных циклов, как показано в [8, 11], приводит к тому, что значения асимптотической полосы захвата оказываются меньше единицы.

Развитая в данной работе методика нахождения полосы захвата опирается на предпосылку о наличии в дифференциальном уравнении (8) малого параметра  $1/\Delta_0 \rightarrow 0$ . При  $\Delta_0 \rightarrow \infty$  диссипативный член в (8) исчезает, так что упрощенное уравнение (9) соответствует консервативной системе и, следовательно, имеет лишь периодические решения (10).

Поэтому в рамках такой предпосылки мы, естественно, не в состоянии построить на фазовой плоскости  $\varphi$ , у все интегральные кривые  $y(\varphi)$  исходного дифференциального уравнения (8). Однако оказывается возможным для асимптотического случая  $\Delta_0 \rightarrow \infty$  указать количество и расположение несепаратрисных предельных циклов (10). Эта информация может быть полезна в задачах, связанных с определением на фазовой плоскости области притяжения устойчивой точки равновесия при возмущениях координат  $\varphi$ ,  $y$  или параметров  $q$ ,  $\gamma$ .

Графики рис. 1, 2, построенные по формуле (14), показывают, что в диапазоне расстроек  $\gamma_3 < \gamma < 1$  (заштрихованная область на рис. 2) получается не одно периодическое решение  $y(\varphi)$ , как в случае интегрирующего фильтра, а два. Можно показать, что пунктирный участок кривой  $z(\gamma)$  соответствует неустойчивым несепаратрисным предельным циклам, а сплошной—устойчивым. Неустойчивый цикл расположен на фазовой плоскости  $\varphi$ ,  $y$  ниже устойчивого и разграничивает области притяжения устойчивой точки равновесия и устойчивого предельного цикла. На границе полосы захвата  $\gamma = \gamma_3$  оба цикла сливаются и при дальнейшем уменьшении расстройки исчезают, так что областью притяжения устойчивой точки равновесия становится вся фазовая плоскость.

Расположение неустойчивых и устойчивых несепаратрисных предельных циклов можно определить из выражения (10). Чтобы найти среднее значение  $qA$  кривой (10), необходимо использовать соотношение (12), связывающее для произвольной  $F(\varphi)$  величину  $A$  с периодом биений  $T_b = 2\pi/\Omega z$ .

Такие вычисления были проделаны для трех рассмотренных выше характеристик  $F(\varphi)$  и получены следующие формулы, позволяющие выразить константу  $A$  через расстройку  $\gamma$  и параметр фильтра  $q$ :

а) полигональная характеристика

$$\gamma = A - (1-q)/\operatorname{arcth} A; \quad (24)$$

б) синусоидальная характеристика

$$\gamma = A - (1-q) \sqrt{A^2 - 1}; \quad (25)$$

в) прямоугольная характеристика

$$\gamma = qA + (1-q)A^{-1}. \quad (26)$$

Кривые  $A(\gamma)$  по формулам (24)–(26) построены для различных  $q$  на рисунках 5–7. В диапазоне расстройки  $\gamma_3 < \gamma < 1$  эти зависимости для полигональной и синусоидальной характеристик получаются двузначными при всех значениях  $0 < q < 1$  (в случае прямоугольной характеристики двузначность исчезает при  $q > 0,5$ ). Верхние ветви кривых  $A(\gamma)$  (сплошные линии на рис. 5–7) относятся к устойчивым несепаратрисным циклам, а нижние (пунктир) — к неустойчивым.

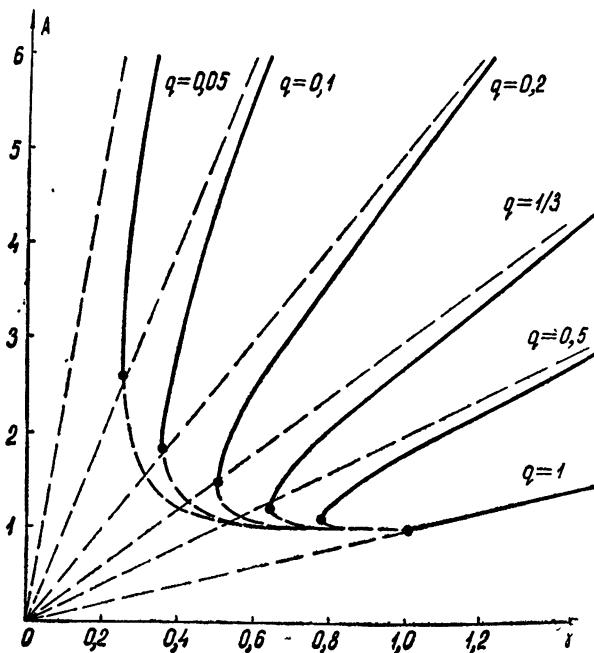


Рис. 5.

Из выражений (24)–(26) получается, что независимо от формы характеристики  $F(\varphi)$  кривые  $A(\gamma)$  имеют одну и ту же асимптоту при  $A \gg 1$ :

$$A \approx \gamma/q.$$

Эти асимптоты для разных  $q$  показаны на рис. 5–7 тонкими пунктирными линиями.

Влияние формы характеристики фазового детектора  $F(\varphi)$  на расположение предельных циклов (10) можно заметить из рис. 8, на котором построены зависимости  $A(\gamma)$  при  $q = 0,1$  для полигональной, синусоидальной и прямоугольной характеристик (кривые 2, 1 и 3 соответственно). Видно, что кривая 1 расположена между кривыми 2 и 3. Такое же положение кривых сохраняется и для всех значений  $0 < q < 1$ .

Из рис. 8 следует, что при заданной расстройке  $\gamma_3 < \gamma < 1$  выбор формы характеристики  $F(\varphi)$  сильно влияет на среднее значение  $qA$  предельного цикла. В частности, оказывается, что неустойчивый предель-

ный цикл для полигональной характеристики (пунктирный участок кривой 2 на рис. 8) расположен существенно ниже на фазовой плоскости  $\varphi$ ,  $y$ , чем для синусоидальной и прямоугольной характеристик

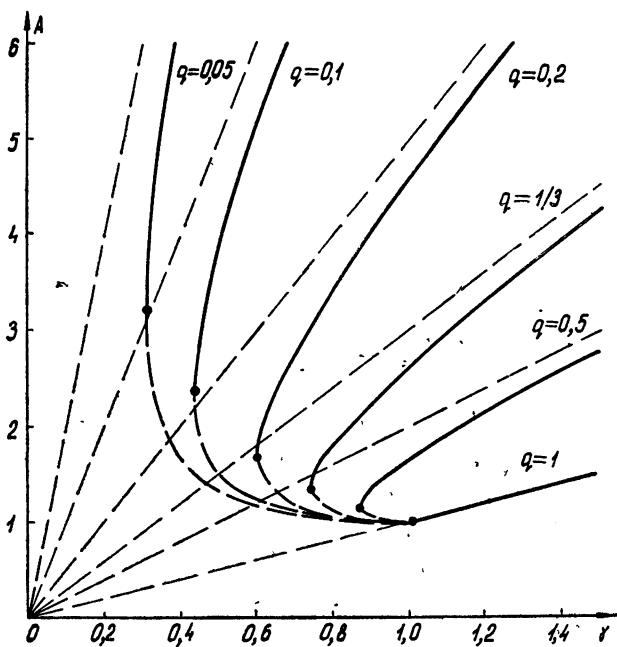


Рис. 6.

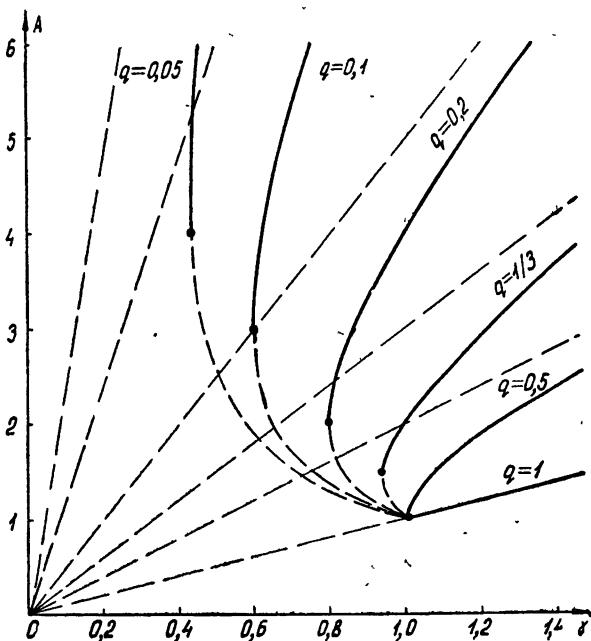


Рис. 7.

Неустойчивый предельный цикл при  $\gamma_3 < \gamma < 1$  является границей допустимых возмущений координат системы, так как он разделяет на

фазовой плоскости области притяжения устойчивой точки равновесия (синхронный режим) и устойчивого предельного цикла (асинхронный режим). Поэтому (в соответствии с рис. 8) прямоугольная характеристика  $F(\varphi)$  обеспечивает при данной расстройке  $\gamma_3 < \gamma < 1$  сохранение синхронного режима для больших возмущений координат системы ФАП.

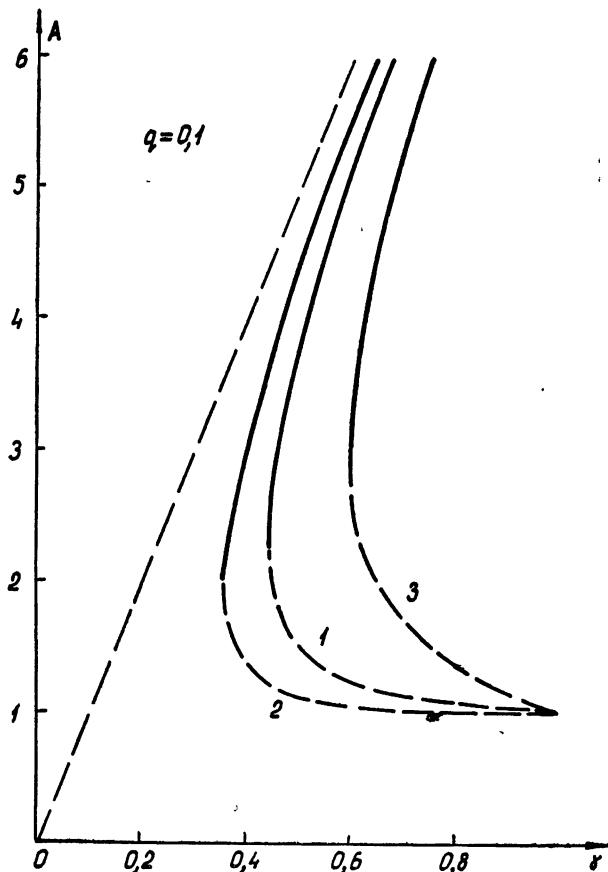


Рис. 8.

Разработанная методика позволяет определить точные значения полосы захвата и расположение предельных циклов в асимптотическом случае бесконечно больших постоянных времени пропорционально-интегрирующего фильтра для произвольной характеристики фазового детектора. Поскольку в асимптотическом случае достигается наименьшая шумовая полоса системы, открывается возможность синтеза оптимальной ФАП с наилучшей характеристикой, обеспечивающей наибольшую полосу захвата при заданной фильтрации помех.

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. J. Gruep, Proc. IRE, 41, № 8, 1043 (1953).
2. М. В. Карапанов, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, № 1, 162 (1958).
3. М. В. Карапанов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
4. D. Richman, Proc. IRE, 42, № 1, 106 (1954).

5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
7. Л. Н. Белюстина, Всесоюзный симпозиум по качеству теории дифф. уравн. (тезисы докладов), Самарканд, 1961, стр. 13.
8. Н. А. Губарь, ПММ, 25, вып 6, 1011 (1961).
9. С. Р. Саун, Trans. IRE, SET—8, № 1, 8 (1962).
10. М. В. Капронов, Электросвязь, № 8, 14 (1963).
11. С. В. Первачев, Радиотехника и электроника, 8, № 2, 334 (1963).
12. М. Вринк, Arch. Elektr. Über., 19, № 12, 649 (1965).
13. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, Связьиздат, М., 1966.
14. Б. И. Шахтарин, Радиотехника и электроника, 11, № 9, 1696 (1966).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
1 июля 1967 г.

BAND OF ENTRAINMENT ASYMPTOTIC VALUE  
IN PHASE-FREQUENCY CONTROL

*M. V. Kapranov*

For the system of phase-frequency control with arbitrary characteristic of phase discriminator the method for calculating band of entrainment asymptotic values corresponding to exceedingly large time constant of proportionally-integrating filter is elaborated.

УДК 531.391

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СХЕМЕ С ДИНИСТОРАМИ

Т. В. Мошкина

Рассматриваются условия возникновения параметрических колебаний в симметричной схеме параметрона с динисторами в качестве нелинейных индуктивностей.

Известно, что на падающем участке вольтамперной характеристики динистор обладает импедансом, действительная часть которого до некоторой частоты отрицательна, а мнимая носит индуктивный характер [1]. Динистор при этом может быть представлен в виде последовательного соединения эквивалентных сопротивления и индуктивности, величины которых зависят от тока через динистор и от частоты. Тот факт, что величина индуктивности зависит от тока, протекающего через динистор, дает возможность использовать динистор в качестве нелинейной индуктивности. В настоящей работе выясняется возможность возникновения параметрических колебаний в схеме параметрона с динисторами в качестве нелинейной индуктивности. Принципиальная схема такого параметрона показана на рис. 1.

### 1. УРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРОНА

При составлении уравнения, описывающего работу схемы рис. 1, сделаны следующие допущения.

Выбор рабочей точки обеспечивается постоянным током  $i_0$ , протекающим через динисторы  $D_1$  и  $D_2$ . Изменение величины эквивалентной индуктивности осуществляется переменным током с амплитудой  $i_m$  и частотой  $\omega$ . Чтобы избежать возникновения собственных колебаний в схеме в отсутствие управляющего сигнала, вносится некоторое затухание  $r$ .

Для простоты зависимость активного сопротивления динистора от тока и частоты не учитываем.

Эквивалентная индуктивность динистора выражается через его параметры следующим образом [1]:

$$L = \frac{-C_0 + (C_0 + G\omega_\alpha^{-1})(1 + \psi^2)^{-1} \bar{\alpha}_2(I)}{G^2 + \omega^2 C_0^2},$$

где  $\psi = \omega/\omega_\alpha$ ,  $C_0$  и  $G$  — дифференциальные емкость и проводимость коллекторного перехода,  $\bar{\alpha}_2(I)$  — сумма дифференциальных коэффициентов передачи тока в  $n$  и  $p$  базах как функция от тока.

Зависимость  $\bar{\alpha}_2(I)$  достаточно хорошо может быть аппроксимирована полиномом третьей степени относительно  $I$ . Поэтому для индуктивности также принимается аппроксимация полиномом третьей степени

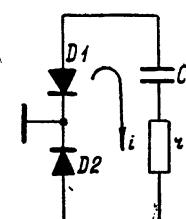


Рис. 1.

$$L = qI^3 - bI^2 + mI + n,$$

где коэффициенты  $q$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$  являются функциями частоты.

Если через  $i$  обозначить ток в контуре параметрона, то для токов через  $D_1$  и  $D_2$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_1 &= i_0 + i_m \cos(\omega t) - i, \\ I_2 &= i_0 + i_m \cos(\omega t) + i. \end{aligned} \quad (1)$$

Для схемы рис. 1 справедливо уравнение

$$(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} - i_m \omega \sin(\omega t) (L_2 - L_1) + ri + C^{-1} \int i dt = 0. \quad (2)$$

Дифференцируем уравнение (2), подставляем выражения для  $L_1$  и  $L_2$  через  $I_1$  и  $I_2$  и вводим

$$\begin{aligned} L_0 &= qI_0^3 - bI_0^2 + mI_0 + n, \\ \frac{dL_0}{di_0} &= 3qi_0^2 - 2bi_0 + m, \\ \frac{d^2L_0}{di_0^2} &= 6qi_0 - 2b. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное таким образом уравнение приводим к безразмерному виду (4) путем деления всех членов уравнения на  $2L_0$  и введения следующих обозначений:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t; \quad i = I_0 y; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2L_0 C}; \\ \alpha &= \frac{i_m}{L_0} \frac{dL_0}{di_0}; \quad \beta = \frac{i_m^2}{2L_0} \left| \frac{d^2L_0}{di_0^2} \right|; \quad \gamma = \frac{qi_m^3}{L_0}; \\ \mu &= \frac{qi_m I_0^2}{L_0}; \quad \sigma = \frac{I_0^2}{2L_0} \left| \frac{d^2L_0}{di_0^2} \right|; \quad 2\delta = \frac{r}{2L_0 \omega_0}; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}. \end{aligned}$$

При этих обозначениях уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} [1 + 3\mu y^2 \cos(\nu\tau) + \alpha \cos(\nu\tau) - \beta \cos^2(\nu\tau) + \gamma \cos^3(\nu\tau) - \\ - \sigma y^2] + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 [6\mu y \cos(\nu\tau) - 2\sigma y] + \frac{dy}{d\tau} [-6\mu\nu y^2 \sin(\nu\tau) - \\ - 2\alpha y \sin(\nu\tau) + 2\beta y \sin(2\nu\tau) - 6\gamma y \sin(\nu\tau) \cos^2(\nu\tau) + 2\delta] + \\ + y[2\beta\nu^2 \cos(2\nu\tau) - \alpha\nu^2 \cos(\nu\tau) - 3\gamma\nu^2 \cos^3(\nu\tau) - \\ - 2\mu\nu^2 y^2 \cos(\nu\tau) + 6\gamma\nu^2 \sin^2(\nu\tau) \cos(\nu\tau) + 1] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать условия возникновения параметрических колебаний на второй субгармонике.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты  $\delta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha\nu^2$ ,  $6\mu\nu$ ,  $2\beta\nu^2$  и  $6\gamma\nu^2$  малы по сравнению с единицей. Тогда систему можно считать близкой к гармонической и искать решение уравнения (4) асимптотическим методом Крылова—Боголюбова [2]. В качестве  $\epsilon$  можно взять любой

положительный параметр одного порядка малости с вышеуказанными коэффициентами

$$y = a \cos \psi + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$

где  $\psi = (\nu/2)\tau + \theta$ ,  $a$  и  $\theta$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \dots,$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \dots,$$

$u_1, u_2, \dots$  — периодические функции с периодом  $2\pi$ . Так как  $u_1, u_2, \dots$  можно брать с некоторым произволом, потребуем, чтобы они не содержали первой гармоники.

Подставив в уравнение (4) выражение для  $y$  и его производных и пренебрегая членами  $\varepsilon^3$  в степени выше первой, получим уравнение относительно  $u_1$ . Требование отсутствия в  $u_1$  первой гармоники удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1 = -a \left[ \delta + \left( \frac{\alpha\nu}{8} + \frac{3\gamma\nu}{32} + \frac{\mu\nu a^2}{16} \right) \sin(2\theta) \right], \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \varepsilon B_1 = \frac{1}{\nu} \left( 1 - \frac{\nu^2}{4} \right) + \frac{\beta\nu}{8} + \frac{\sigma\nu a^2}{16} - \\ &\quad - \left( \frac{\alpha\nu}{8} + \frac{3\gamma\nu}{32} + \frac{\mu\nu a^2}{8} \right) \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим установившийся режим  $\frac{da}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0$  и исследуем полученные стационарные состояния на устойчивость.

Для удобства исследования перейдем в уравнениях (5) от полярных координат  $a, \theta$  к декартовым  $u, v$ , для чего сделаем следующую замену:

$$u = a \cos \theta, \quad v = a \sin \theta.$$

В этом случае будем иметь

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{da}{d\tau} \cos \theta - a \frac{d\theta}{d\tau} \sin \theta,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{da}{d\tau} \sin \theta + a \frac{d\theta}{d\tau} \cos \theta.$$

Подставляя в полученные равенства значения  $\frac{da}{d\tau}$  и  $\frac{d\theta}{d\tau}$  из (5) и пренебрегая в правых частях получаемых уравнений членами  $\mu\nu v^3/8$ ,  $\mu\nu u^3/8$  и  $3\gamma/4$  по сравнению с  $\sigma\nu v^3/16$ ,  $\sigma\nu u^3/16$  и  $\alpha$  соответственно, получим в новых переменных

$$\frac{dv}{du} = \frac{-Av + Du + u(u^2 + v^2)}{-Au - Bv - v(u^2 + v^2)},$$

где

$$A = 16\delta/\sigma v,$$

$$B = \frac{16}{\sigma v} \left[ \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{4} \right) + \frac{(\beta + \alpha)v}{8} \right],$$

$$D = \frac{16}{\sigma v} \left[ \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{4} \right) + \frac{(\beta - \alpha)v}{8} \right].$$

Для определения возможных состояний равновесия (особых точек) необходимо решить совместно уравнения

$$\begin{aligned} Au + Bv + u^2v + v^3 &= 0, \\ -Av + Du + uv^2 + u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (6) легко видеть, что одним из состояний равновесия является состояние, соответствующее  $u=0, v=0$ . Для определения характера особой точки  $O$  составим характеристическое уравнение [3]

$$\lambda^2 + 2A\lambda + (A^2 + BD) = 0,$$

откуда  $\lambda = -A \pm \sqrt{-BD}$ . Построим разбиение плоскости  $B, D$  на области, каждой из которых соответствует определенный тип особой точки (рис. 2).

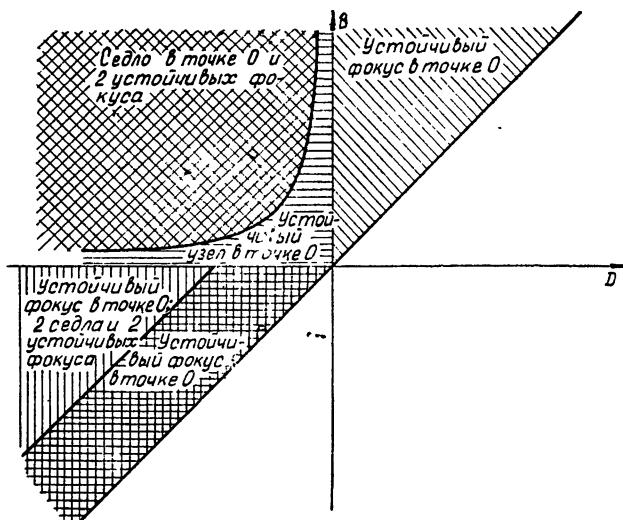


Рис. 2.

При  $BD > 0$  получаем в точке  $O$  устойчивый фокус. Границей раздела между точками типа седла и устойчивого узла является кривая  $BD + A^2 = 0$ . Если обозначить через  $\zeta = v/u$ , то решение системы (6), кроме точки  $O$ , будет иметь следующий вид

$$u^2 = \frac{A(D + B\zeta^2)}{\zeta(1 + \zeta^2)(B - D)}, \quad (7)$$

$$\zeta = \frac{-(B - D) \pm [(B - D)^2 - 4A^2]^{1/2}}{2A}.$$

Из выражения для  $\zeta$  видно, что, если  $\zeta$  действительное, оно всегда отрицательное, так как  $B-D>0$  для всей области определения  $B$  и  $D$ . Отсюда получаем, что при  $B>0$ ,  $D>0$  не существует иного решения системы (6), кроме  $u=v=0$ . Точка  $O$  является единственной особой точкой. При  $B<0$ ,  $D<0$  могут существовать два или четыре решения системы (6) в зависимости от того, сколько существует действительных значений  $\zeta$ . Границей существования действительного  $\zeta$  является прямая  $B-D=2A$ . При  $B-D<2A$   $\zeta$  — комплексное и ни одной особой точки, кроме нулевой, не существует. При  $B-D>2A$  будем иметь две особые точки типа седла и две особые точки типа устойчивого фокуса, кроме устойчивого фокуса в точке  $O$ . В этом случае теоретически возможна три stabильная работа схемы: отсутствие колебаний и колебания с одинаковыми амплитудами и противоположными фазами.

При  $B>0$ ,  $D<0$  имеем особые точки, кроме нулевой, при условии  $D+B\zeta^2<0$  и  $B-D>2A$ , что соответствует ранее полученному условию существования седла в точке ( $O$ ).

В этом случае, кроме особой точки типа седла, имеем еще две особые точки типа устойчивого фокуса. Следовательно, в схеме возможны колебания с одинаковыми амплитудами  $a = \sqrt{u^2 + v^2}$  и фазами  $\theta = \arctg \zeta + n\pi$ , отличающимися на  $\pi$ .

Так как коэффициенты  $B$  и  $D$  зависят от параметров схемы через  $\alpha$  и  $\beta$ , то, меняя  $\alpha$  и  $\beta$ , можно получить разбиение плоскости  $\beta$ ,  $\alpha$  на области, каждой из которых будут соответствовать свои типы особых точек (рис. 3).

Из сказанного можно сделать вывод о возможности возникновения параметрических колебаний в схеме при выполнении следующих условий:  $B > 0$ ,  $D < 0$ ,  $BD + A^2 < 0$ .

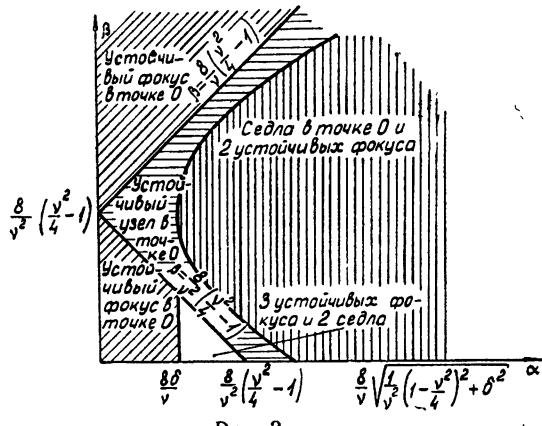


Рис. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Ваганов, В. С. Першеников, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 7, № 4, 438 (1964).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 августа 1967 г.

#### ON THE POSSIBILITY OF PARAMETRIC OSCILLATIONS IN THE SCHEME WITH DINISTORS

T. V. Moshkina

Conditions for origination of parametric oscillations in symmetric parametron scheme with dinistors as nonlinear inductances are considered.

УДК 621.373 072.9

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРА НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

*A. С. Тарантович*

Методом медленно меняющихся амплитуд рассмотрена динамика симметричного генератора на туннельных диодах, называемого в литературе резистивным параметроном. Найдены амплитудно-частотные характеристики для первой и второй субгармоник. Показано, что на обеих субгармониках как в самовозбужденном, так и в несамовозбужденном генераторе в определенной полосе частот возможна параметрическая синхронизация. Найдено разбиение плоскости параметров системы на области различных режимов синхронизации. Качественно построено разбиение фазовой плоскости укороченных уравнений на траектории для наиболее характерных значений частоты внешней ЭДС.

В литературе известна симметричная схема на туннельных диодах, предложенная для использования в вычислительной технике и иногда называемая резистивным параметроном. По существу схема является симметричным генератором, который выбором смещения рабочей точки туннельных диодов может быть поставлен в автоколебательный или неавтоколебательный режим. Обычно рассматривается несамовозбужденный генератор и возможность применения данной схемы в вычислительной технике [1-4]. В настоящей работе схема рассматривается как генератор, который может находиться в любом из режимов, и исследуется возможность его синхронизации путем периодического изменения отрицательной проводимости туннельного диода.

Аналогичные явления были исследованы Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в ламповых генераторах.

### 1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА

Принципиальная схема генератора приведена на рис. 1. Предполагается, что индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$  и коэффициент взаимоиндукции  $M$  равны между собой и постоянны, емкости контура  $C_1$  и  $C_2$ , включающие емкости туннельных диодов, также равны и постоянны, а вольтамперные характеристики туннельных диодов  $J^* = f(u^*)$  одинаковы. Потери в системе не учитываются;  $\varepsilon^*$  — суммарная ЭДС смещения и синхронизации,  $i_1^*$  и  $i_2^*$  — токи в индуктивностях.

При этих предположениях система уравнений, определяющая поведение схемы, имеет следующий вид:

$$\varepsilon^* = L \frac{d(i_1^* - i_2^*)}{dt} + u_1^*,$$

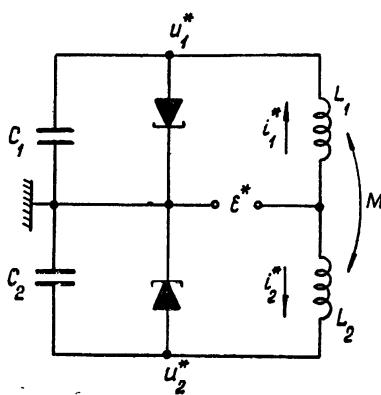


Рис. 1.

$$\begin{aligned} i_1^* &= C \frac{du_1^*}{dt} + J_1^*, \\ \varepsilon^* &= -L \frac{d(i_1^* - i_2^*)}{dt} + u_2^*, \quad i_2^* = C \frac{du_2^*}{dt} + J_2^*, \\ J_1^* &= f(u_1^*), \\ J_2^* &= f(u_2^*). \end{aligned} \quad (1)$$

Аппроксимируем вольт-амперную характеристику туннельного диода полиномом третьей степени так, чтобы относительно точки перегиба вольт-амперные характеристики имели вид

$$\begin{aligned} J_1 &= g(\alpha u_1^3 - u_1), \\ J_2 &= g(\alpha u_2^3 - u_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Перенеся начало отсчета в системе уравнений (1) в точку перегиба вольт-амперных характеристик (2) и переходя к переменным

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad J = \frac{J_1 - J_2}{2}, \quad u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \\ J_0 &= \frac{J_1 + J_2}{2}, \end{aligned}$$

приведем ее к виду

$$\begin{aligned} 2LC\ddot{u} + 2L \frac{dJ}{df} + u &= 0, \\ u_0 &= \varepsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon = E_0 + E \sin(\omega t)$ . В безразмерных переменных  $x = u \sqrt{\alpha}$ ,  $\tau = \bar{\omega} t$ ,  $\varepsilon = \sqrt{\alpha} E$ ,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\alpha} E_0$  исходная система имеет следующий вид:

$$\omega^2 \ddot{x} + \delta \omega \frac{d}{d\tau} f + x = 0, \quad (4)$$

где  $f = x[x^2 + 3(\varepsilon_0 + \varepsilon \sin \tau)^2 - 1]$ ,  $\omega = \bar{\omega} \sqrt{2LC}$ ,  $\delta = g \sqrt{2LC^{-1}}$ , а точками обозначено дифференцирование по  $\tau$ .

## 2. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Будем искать решение системы (4) в виде

$$x = z_1 e^{j \frac{\tau}{n}} + z_2 e^{-j \frac{\tau}{n}}, \quad z_1 e^{j \frac{\tau}{n}} + z_2 e^{-j \frac{\tau}{n}} = 0,$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — медленно меняющиеся комплексно-сопряженные функции времени, а  $n$  — произвольное целое положительное число.

Подставляя предполагаемое решение в уравнение (4) и производя замену  $\tau = n\vartheta$ , получим следующее уравнение:

$$2j\omega_n^2 z_1 = (\omega_n^2 - 1)(z_1 + z_2 e^{-2j\vartheta}) - \delta \omega_n e^{-j\vartheta} \frac{df}{d\vartheta}, \quad (5)$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $\vartheta$ , а  $\omega_n = \omega/n$ . Усредняя правую часть уравнения (5) по явно входящему времени в предполо-

жении, что  $\omega_n$  близка к 1 и  $\delta \ll 1$ , получим укороченное уравнение в виде

$$2j\omega_n^2 z_1 = (\omega_n^2 - 1) z_1 - j\omega_n \delta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} f d\theta. \quad (6)$$

Второе уравнение системы является комплексно-сопряженным с (6), его наличие в дальнейшем подразумевается.

После интегрирования укороченные уравнения можно записать в виде

$$2j\omega_n^2 z_1 = (\omega_n^2 - 1) z_1 - j\omega_n \delta \left[ \left( 3\epsilon_0^2 + \frac{3}{2} \epsilon^2 - 1 \right) z_1 + 3z_1^2 z_2 - \left( 3\epsilon\epsilon_0 j\delta_{n_2} + \frac{3}{4} \epsilon^2 \delta_{n_1} \right) z_2 \right], \quad (7)$$

где

$$\delta_{n_i} = \begin{cases} 1 & (n = i) \\ 0 & (n \neq i) \end{cases}$$

Из уравнения (7) видно, что состоянием равновесия является точка с координатами  $z_1 = z_2 = 0$  и точки, координаты которых определяются уравнением

$$z_1 [(\omega_n^2 - 1) - j\delta\omega_n (\gamma + 3z_1 z_2)] = 3\delta\omega_n \epsilon (\epsilon_0 \delta_{n_2} + j\epsilon \delta_{n_1}) z_2, \quad (8)$$

где

$$\gamma = 3\epsilon_0^2 + \frac{3}{2} \epsilon^2 - 1. \quad (9)$$

Отсюда уравнение амплитудно-частотной характеристики записывается в виде

$$(\omega_n^2 - 1)^2 + \delta^2 \omega_n^2 (\gamma + 3\rho^2)^2 = 9\delta^2 \omega_n^2 \epsilon^2 \left( \epsilon_0^2 \delta_{n_2}^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \delta_{n_1}^2 \right) \quad (10)$$

или

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \left( \frac{\gamma}{3} + \rho^2 \right)^2 b^{-2} = 1, \quad (11)$$

где  $\rho$  — амплитуда колебаний,  $\xi = (\omega_n^2 - 1) \omega_n^{-1}$ ,  $a = 3\delta\epsilon^2/4$ ,  $b = \epsilon^2/4$  при  $n=1$  и  $a = 6\delta\epsilon\epsilon_0$ ,  $b = \epsilon\epsilon_0$  при  $n=2$ .

Таким образом, уравнение амплитудно-частотной характеристики в координатах  $\rho^2$ ,  $\xi$  представляет собой эллипс, смещение которого вдоль оси  $\rho^2$  определяется параметром  $\gamma$ .

Используя уравнение (9), можно построить разбиение плоскости параметров  $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$  на области с различным характерным видом резонансных кривых. На рис. 2а приведено разбиение для случая  $n=1$ , на рис. 2б — для случая  $n=2$ . Римскими цифрами обозначены области параметров, соответствующие различным видам амплитудно-частотных характеристик, изображенных на рис. 3 в координатах  $\rho^2$ ,  $\xi$  для частного случая  $a=b$  и такого закона изменения  $\gamma$ , когда  $a$  и  $b$  остаются постоянными.

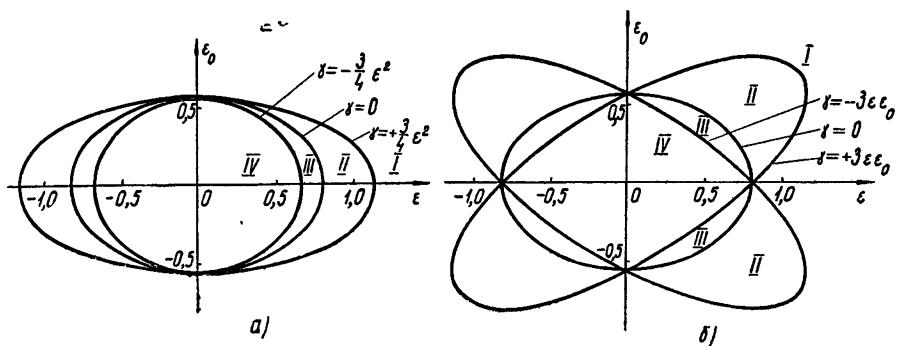


Рис. 2.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ

Линеаризуя укороченную систему (7) и переходя к действительным переменным, получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\vartheta} &= \frac{\delta}{2\omega} \left[ \frac{3\epsilon^2}{4} - (6\rho^2 + \gamma) - \left( \rho^2 \left| \frac{\epsilon^2}{4} \right. \right) (3\rho^2 + \gamma) \right] X + \frac{\xi}{2\omega} \left( 1 + \rho^2 \left| \frac{\epsilon^2}{4} \right. \right) Y, \\ \frac{dY}{d\vartheta} &= -\frac{\xi}{2\omega} \left( 1 - \rho^2 \left| \frac{\epsilon^2}{4} \right. \right) X - \frac{\delta}{2\omega} \left[ \frac{3\epsilon^2}{4} + (6\rho^2 + \gamma) - \left( \rho^2 \left| \frac{\epsilon^2}{4} \right. \right) (3\rho^2 + \gamma) \right] Y \end{aligned} \quad (12)$$

для случая  $n = 1$  и

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\vartheta} &= - \left[ \frac{\delta}{\omega} (6\rho^2 + \gamma) + \frac{\rho^2}{2\omega\epsilon\epsilon_0} \xi \right] X + \left[ \frac{\xi}{2\omega} - \frac{\delta\rho^2(3\rho^2 + \gamma)}{\omega\epsilon\epsilon_0} + \frac{3\delta\epsilon\epsilon_0}{\omega} \right] Y, \\ \frac{dY}{d\vartheta} &= - \left[ \frac{\xi}{2\omega} + \frac{\delta\rho^2}{\omega\epsilon\epsilon_0} (3\rho^2 + \gamma) - \frac{3\epsilon\epsilon_0\delta}{\omega} \right] X + \left[ \frac{\rho^2}{2\omega\epsilon\epsilon_0} \xi - \frac{\delta}{\omega} (6\rho^2 + \gamma) \right] Y \end{aligned} \quad (13)$$

для случая  $n = 2$ , где  $X$  и  $Y$  — отклонения от состояния равновесия, которые связаны с отклонениями на плоскости  $z_1, z_2$  преобразованиями

$$\Delta z_1 = X + jY, \quad \Delta z_2 = X - jY.$$

Анализ характеристических уравнений систем (12) и (13) показывает, что в обоих случаях одним и тем же ветвям амплитудно-частотных характеристик соответствуют одни и те же типы состояний равновесия. На рис. 3 показано распределение типов состояний равновесия по ветвям амплитудно-частотной характеристики, причем кружками отмечены устойчивые фокусы, зачерненными кружками — устойчивые узлы, крестиками — седла, кружками с крестиками — неустойчивые фокусы, зачерненными кружками с крестиками — неустойчивые узлы.

Для значений  $\epsilon$  и  $\epsilon_0$  из области I колебания отсутствуют и не возбуждаются ни при каких значениях расстроек. Для области II при определенных значениях расстроек возможны колебания с конечной амплитудой на частоте вынуждающего сигнала  $\omega$  (для  $n = 1$ ) или на вдвое меньшей частоте (для  $n = 2$ ), причем при изменении расстройки от  $-a$  до  $+a$  амплитуда колебаний плавно нарастает от 0 до конечного значения и так же плавно убывает до 0. В случае III и IV ось  $\xi$  является неустойчивой. В схеме наблюдаются автоколебания, но в полосе расстроек  $[-a, +a]$  имеет место синхронизация колебаний внешней ЭДС, т. е. колебания происходят на частоте  $\omega$  (для  $n = 1$ ) или  $\omega/2$  (для  $n = 2$ ), причем на границах полосы синхронизации сразу устанавливаются синхронизованные колебания с конечной амплитудой.

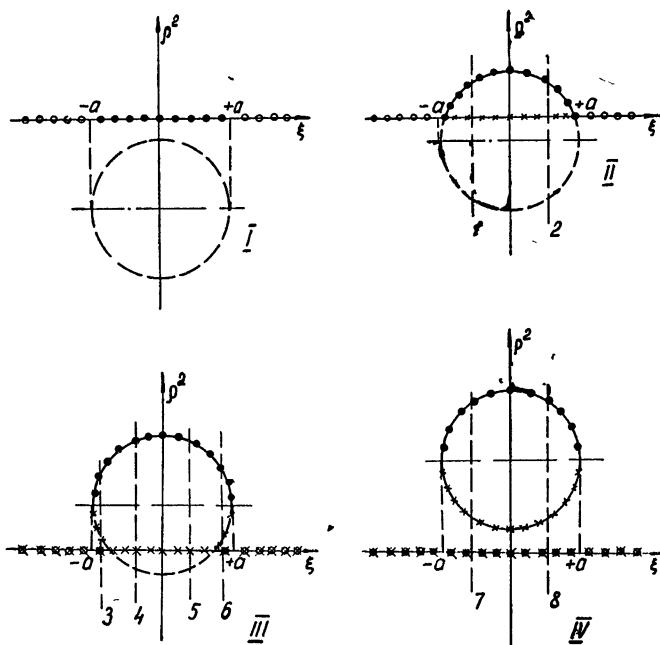


Рис. 3.

При переходе к координатам  $\rho$ ,  $\omega$  симметрия резонансных кривых относительно оси  $\rho$  нарушается в соответствии с преобразованием  $(\omega_n^2 - 1) \omega_n^{-1} = \xi$ , резонансные кривые оказываются растянутыми в сторону положительных значений расстройки.

#### 4. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ НА ТРАЕКТОРИИ

Переходя к полярным координатам в уравнении (7), нетрудно найти выражение для фазово-частотной характеристики синхронизированного генератора в виде

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = -\frac{\xi}{\delta(3\rho^2 + \gamma)} \quad (14)$$

для случая  $n=1$  и в виде

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2\delta(3\rho^2 + \gamma)}{\xi} \quad (15)$$

для случая  $n=2$ .

Из (14) и (15) видно, что фаза синхронизированных колебаний может принимать два значения. В случае  $n=1$  одно из значений фазы  $\varphi$  меняется от  $+\pi/4$  до  $-\pi/4$  при изменении  $\xi$  от  $-a$  до  $+a$ , принимая значение  $\varphi = 0$  при  $\xi = 0$ . В случае  $n=2$  одно из значений фазы колебаний при тех же пределах изменения меняется от  $+\pi/2$  до  $0$ , принимая значение  $\varphi = +\pi/4$  при  $\xi = 0$ . В обоих случаях вторые значения фаз отличаются от первых на  $\pi$ .

Указанные пределы изменения  $\varphi$  относятся к значениям параметра  $\gamma$ , соответствующим III и IV виду резонансных кривых, представленных на рис. 3. Для резонансной кривой вида II крайние значения пределов изменения  $\varphi$  достигаются только при  $\gamma = 0$ .

Разбиение фазовой плоскости на траектории сводится к двум характерным картинам, которые изображены на рис. 4а, б для случая  $n=1$  при  $\xi < 0$ . В случае  $n=2$  и  $\xi < 0$  картина разбиения фазовой плоскости совпадает с изображенной на рис. 4а, б с точностью до поворота на некоторый угол  $\varphi_0$  ( $0 < \varphi_0 < \pi/2$ ) против часовой стрелки.

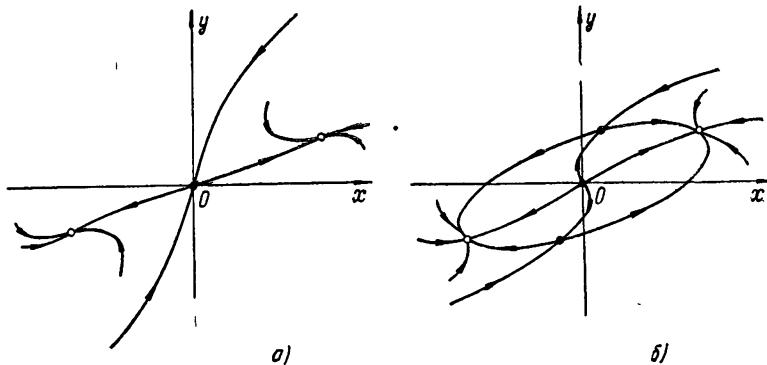


Рис. 4.

Значениям частот 1, 2, 4, 5, выделенным на рис. 3 пунктиром, соответствует разбиение фазовой плоскости на траектории, изображенное на рис. 4а. Значениям частот 3, 6, 7, 8 соответствует разбиение, изображенное на рис. 4б.

Из рис. 3 видно, что при изменении расстройки  $\xi$  качественный характер разбиения для случаев II и IV не меняется. В случае III при изменении расстройки от  $-a$  до  $+a$  разбиение вида 4б переходит в разбиение вида 4а и затем обратно. Моменты переходов определяются значением параметра  $\gamma$ .

Проведенный анализ позволяет сделать следующее заключение.

Использованная аппроксимация вольт-амперной характеристики туннельного диода позволяет рассмотреть поведение изучаемой системы только на двух субгармониках.

В зависимости от постоянного смещения  $\varepsilon_0$  в отсутствие переменной составляющей внешней ЭДС система может находиться как в режиме отсутствия колебаний, так и в автоколебательном режиме. При подаче переменной ЭДС в определенной полосе расстроек устанавливаются вынужденные колебания с частотой внешней ЭДС или кратной ей и фазой, зависящей от расстройки и начальных условий. Происходит синхронизация автоколебательной системы за счет модуляции параметра (отрицательной проводимости) внешней ЭДС. В этом смысле следует понимать примененный термин параметрическая синхронизация.

При  $n=1$  ширина полосы синхронизации пропорциональна квадрату амплитуды внешней ЭДС и не зависит от величины смещения. При  $n=2$  ширина полосы пропорциональна произведению амплитуды внешней ЭДС на величину смещения. Эти выводы следуют из выражения для полуоси  $a$  эллипса (II). Кроме того, в обоих случаях ширина полосы синхронизации пропорциональна  $\delta = g\sqrt{2LC^{-1}}$ , где  $g$  — абсолютная величина крутизны вольт-амперной характеристики в точке перегиба.

Плоскость параметров системы, для обеих субгармоник, разбивается на 4 области различных режимов синхронизации.

Установившиеся вынужденные колебания на первой и второй субгармониках при одних и тех же значениях расстройки отличаются друг от друга, причем эта разница равна  $\pi/4$ .

В каждом из возможных режимов колебаний с отличной от нуля амплитудой (как на первой, так и на второй субгармонике) в зависимости от начальных условий устанавливается одна из двух возможных фаз, отличающихся друг от друга на  $\pi$ . Это дает возможность использовать генератор на туннельных диодах в качестве двоичного цифрового элемента с фазовой индикацией нуля и единицы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. П. Жарков, Магнитные элементы, изд. Наукова думка, Киев, 1964 (Тр 8 Все-союзного совещания по магнитным элементам).
2. В. А. Редько, Автоматика и вычислительная техника, № 7, 1181 (1964).
3. Н. Е. Зазнова, В. А. Редько, Автоматика и вычислительная техника, № 14, 185 (1966).
4. В. А. Редько, Н. Е. Зазнова, Изв АН Латв. ССР, серия физико-техническая, № 4, 93 (1964).
5. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, 2, изд. АН СССР, М., 1947

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
14 июля 1967 г.

## PARAMETRIC SYNCHRONIZATION OF A TUNNEL-DIODE GENERATOR

*A. S. Tarantovich*

Method of slow changing amplitudes is used to study the dynamics of a symmetric generator with tunnel diodes which is called in literature as a resistive parametron. Gain-frequency characteristics for first and second subharmonics are found. It is shown that parametric synchronization is possible in some particular range of frequencies for both subharmonics in self-excited generator and in not self-excited generator as well. Decomposition of system parameters plane into regions of different synchronization regimes is obtained. Using qualitative methods the decomposition of the shortened equations'phase plane into trajectories for most common frequencies of external voltage is carried out.

УДК 517.9

## О ПРИБЛИЖЕННОМ ОТЫСКАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Л. Н. Кармов

Предлагается приближенный способ отыскания периодических движений одноконтурных систем с одним или несколькими нелинейными элементами и линейным звеном с заданной частотной характеристикой, основывающейся на методе продолжения по параметру. Рассматриваются два типа приближенных уравнений периодических движений относительно коэффициентов Фурье и относительно набора значений искомой функции на периоде.

В настоящей работе предлагается приближенный способ отыскания периодических движений одноконтурных систем с юдним нелинейным элементом и линейным звеном с заданной частотной характеристикой, основывающейся на методе продолжения по параметру. При этом рассматриваются два разных типа приближенных уравнений периодических движений [1-3]: относительно коэффициентов Фурье и относительно набора значений искомой функции на периоде. Допустим, что приближенные уравнения периодических движений зависят от некоторого параметра  $\mu$ . Тогда в предположении, что эти уравнения при некотором  $\mu = \mu_0$  могут быть решены одним из численных методов, предложенных в работе Неймарка, ниже описывается способ, позволяющий найти (продолжить) это решение для  $\mu \neq \mu_0$ .

1. Рассмотрим приближенные уравнения периодических движений, составленные относительно коэффициентов Фурье  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$  искомого периодического движения  $x(t)$  периода  $2\pi/\omega$  [1-3]:

$$A_k + iB_k = \frac{2}{m} K(p, \mu) \sum_{s=0}^{m-1} \Omega(x_s, \mu) \exp(i2\pi m^{-1} k s) \quad (1.1)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n),$$

где

$$x_s = \operatorname{Im} \sum_{s=0}^n (A_s + iB_s) \exp \left( i \frac{2\pi}{m} s \sigma \right).$$

Здесь  $p = ik\omega$ ,  $m \geq (2n+1)$ ,  $K(p, \mu)$  — частотная характеристика линейного звена,  $\mu$  — числовой параметр,  $\Omega(x, \mu)$  — нелинейная характеристика. Приближенные уравнения периодических движений относительно неизвестных  $x_j = x(t_j)$ , где  $t_j = t_0 + j2\pi(m\omega)^{-1}$  ( $j=0, 1, \dots, m-1$ ), имеют вид [1-3]

$$x_j = \frac{2}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \Omega(x_s, \mu) \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n K(p, \mu) \exp[ik(j-s) \cdot 2\pi m^{-1}]. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) можно записать в виде

$$x_j = \sum_{\sigma=0}^{m-1} a_{j\sigma}(\omega, \mu) \Omega(x_\sigma, \mu), \quad (1.3)$$

где матрица из коэффициентов  $a_{j\sigma}(\omega, \mu)$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{m-2}, & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-1}, & \alpha_0, & \alpha_1, & \dots, & \alpha_{m-3}, & \alpha_{m-2} \\ \alpha_{m-2}, & \alpha_{m-1}, & \alpha_0, & \dots, & \alpha_{m-4}, & \alpha_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \dots, & \alpha_{m-1}, & \alpha_0 \end{vmatrix} \quad (1.4a)$$

и поэтому определяется первой своей строкой  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ , где

$$\alpha_\sigma = \frac{2}{m} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n K(p, \mu) \exp(-ik\sigma 2\pi m^{-1}). \quad (1.4b)$$

Если система уравнений (1.3) при некотором  $\mu = \mu_0$  становится линейной

$$x_j = \sum_{\sigma=0}^{m-1} a_{j\sigma}(\omega, \mu_0) x_\sigma, \quad (1.5)$$

то определитель системы (1.5) является циркулянтом

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_0 - 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-1} & \alpha_0 - 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} \\ \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_0 - 1 & \dots & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_0 - 1 \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

и поэтому определитель (1.6) легко вычисляется по формуле [8]

$$\Delta(\omega) = f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) \dots f(\varepsilon_{m-1}), \quad (1.7)$$

где

$$f(Y) = (\alpha_0 - 1) + \alpha_1 Y + \alpha_2 Y^2 + \dots + \alpha_{m-1} Y^{m-1}$$

и

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi}{m} k + i \sin \frac{2\pi}{m} k \quad (k=0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Из условия равенства нулю определителя (1.7) следует, что один из сомножителей (1.7) должен равняться нулю. Полагая, например,  $f(\varepsilon_1)$  равным нулю, имеем

$$f(\varepsilon_1) = \sum_{\sigma=0}^{m-1} \alpha_\sigma (\cos \theta_\sigma + i \sin \theta_\sigma) - 1 = 0, \quad (1.8)$$

где  $\theta_\sigma = 2\pi m^{-1} \sigma$ . Подставляя величины  $\alpha_\sigma$  из равенства (1.4б) в (1.8), имеем

$$\frac{2}{m} \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left[ \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} K(p, \mu) e^{-ik\theta_\sigma} \right] (\cos \theta_\sigma + i \sin \theta_\sigma) - 1 = 0, \quad (1.9)$$

Отсюда, воспользовавшись известными формулами

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \cos(x_\sigma s) \cos(x_\sigma k) = \begin{cases} 0 & (k \neq s) \\ m/2 & (k = s) \end{cases},$$

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \sin(x_\sigma s) \sin(x_\sigma k) = \begin{cases} 0 & (s \neq k) \\ m/2 & (s = k) \end{cases},$$

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \cos(x_\sigma s) \sin(x_\sigma k) = 0$$

при любых  $k$  и  $s$  и переставив порядок суммирования, получаем уравнение относительно  $\omega$ :

$$1 - K(i\omega) = 0. \quad (1.10)$$

Если положить  $f(\varepsilon_2) = 0$ , то придем к уравнению  $1 - K(2i\omega) = 0$  и т. д.

2. Считая неизвестные  $x_j$ ,  $\omega$  в случае системы (1.2) функциями  $\mu$ , а в случае системы (1.1) неизвестные  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $\omega$  функциями от  $\mu$  и дифференцируя по нему систему уравнений (1.2) или (1.1), приходим к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{d\mu} = & \frac{2}{m} \left\{ \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left( \Omega'_\mu + \Omega'_x \frac{dx_\sigma}{d\mu} \right) \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} K(p, \mu) \exp \left[ is \frac{2\pi}{m}(j-\sigma) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{\sigma=0}^{m-1} \Omega(x_\sigma, \mu) \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} \left[ is K'_p(p, \mu) \frac{d\omega}{d\mu} + K'_\mu(p, \mu) \right] \exp \left[ is \frac{2\pi}{m}(j-\sigma) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

или соответственно вида

$$\begin{aligned} \frac{dA_k}{d\mu} + i \frac{dB_k}{d\mu} = & \frac{2}{m} \left\{ K(p, \mu) \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left( \Omega'_\mu + \Omega'_x \frac{dx_\sigma}{d\mu} \right) \exp \left( i \frac{2\pi}{m} k\sigma \right) + \right. \\ & \left. + \left[ is K'_p(p, \mu) \frac{d\omega}{d\mu} + K'_\mu(p, \mu) \right] \sum_{\sigma=0}^{m-1} \Omega(x_\sigma, \mu) \exp \left( i \frac{2\pi}{m} k\sigma \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\frac{dx_\sigma}{d\mu} = \operatorname{Im} \sum_{s=0}^n \left( \frac{dA_s}{d\mu} + i \frac{dB_s}{d\mu} \right) \exp \left( i \frac{2\pi}{m} s\sigma \right).$$

Запишем систему (2.1) в виде

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} A_{j\sigma} \frac{dx_\sigma}{d\mu} + \alpha_j \frac{d\omega}{d\mu} = b_j \quad (2.3)$$

$$(j = 0, 1, \dots, m-1),$$

где

$$A_{j\sigma} = \delta_{j\sigma} - \frac{2}{m} \Omega'_x(x_\sigma, \mu) \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} K(p, \mu) \exp \left[ is \frac{2\pi}{m}(j-\sigma) \right],$$

$$\alpha_j = - \frac{2}{m} \sum_{\sigma=0}^{m-1} \Omega(x_\sigma, \mu) \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} (is K'_p(p, \mu)) \exp \left[ is \frac{2\pi}{m}(j-\sigma) \right],$$

$$b_j = \frac{2}{m} \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left\{ \Omega'_{\mu} \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} K(p, \mu) \exp \left[ is \frac{2\pi}{m} (j-\sigma) \right] + \right. \\ \left. + \Omega(x_{\sigma}, \mu) \sum_{s=0}^n \operatorname{Re} K'_{\mu}(p, \mu) \exp \left[ is \frac{2\pi}{m} (j-\sigma) \right] \right\}, \\ \delta_{j\sigma} = \begin{cases} 0 & (j \neq \sigma) \\ 1 & (j = \sigma) \end{cases}.$$

Имеем  $m$  уравнений относительно  $m+1$  неизвестных  $\frac{d\omega}{d\mu}$  и  $\frac{dx_j}{d\mu}$  ( $j=0, 1, \dots, m-1$ ). Обозначим через  $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0$  и  $\omega^0$  решение основной системы (1.3) при  $\mu=\mu_0$ , т. е. решение порождающей системы (1.5).

Будем искать решение основной системы (1.3), обращающее в порождающееся при  $\mu=\mu_0$ . Определитель матрицы из коэффициентов при неизвестных  $\frac{dx_i}{d\mu}$  системы (2.3) всегда обращается в нуль

( $\operatorname{Det} \| A_{j\sigma} \| = 0$ ), поскольку система (2.3) при заданном  $\omega$  и  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$  допускает множество решений. Действительно, если значения  $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$  — решение системы (2.3), соответствующее значению  $\omega(\mu)$  при  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$ , то и  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$ ,  $(x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$  и т. д. являются тоже решениями системы (2.3). Справедливость этого утверждения следует из того обстоятельства, что матрица  $\| A_{j\sigma} \|$  является циклической, а элементы строк  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$  и  $(b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$  циклически переставляются при циклической перестановке элементов строки  $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ . Подставляя, например, значения  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$  в системы (2.3), имеем

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} A_{j\sigma} \frac{dx_{\sigma+1}}{d\mu} + \alpha_j \frac{d\omega}{d\mu} = b_j. \quad (2.4)$$

Отсюда, полагая  $x_m = x_0$  в силу периодичности искомой функции  $x(t)$  и переставляя последнее уравнение на первое место, приходим снова к исходной системе (2.3) относительно величин  $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ , т. е. значения  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$  являются решением системы (2.3). Аналогично доказывается, что значения  $(x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$  являются решением системы (2.3) и т. д.

Пусть определитель матрицы из коэффициентов при неизвестных  $\frac{dx_1}{d\mu}, \frac{dx_2}{d\mu}, \dots, \frac{dx_{m-1}}{d\mu}$  и  $\frac{d\omega}{d\mu}$  системы (2.3) отличен от нуля при  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$ .

Тогда, объявляя производную  $\frac{dx_0}{d\mu}$  свободной неизвестной, перепишем систему (2.3) в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{m-1} A_{j\sigma} \frac{dx_{\sigma}}{d\mu} + \alpha_j \frac{d\omega}{d\mu} = b_j - A_{j0} \frac{dx_0}{d\mu}. \quad (2.5)$$

Полагая  $\frac{dx_0}{d\mu} = 0$ , имеем, что  $x_0(\mu) = C = \text{const}$ . Но, поскольку значение функции  $x_0(\mu) = C = \text{const}$  при  $\mu = 0$  должно совпадать с решением порождающей системы (1.5), то  $x_0(\mu)$  можно будет полагать все врем-

мя равным  $x_0^0$ , т. е.  $x_0(\mu) = x_0^0$  при  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$ . Тогда уравнения (2.5) перепишутся в виде

$$\sum_{\sigma=1}^{m-1} A_{j\sigma} \frac{dx_\sigma}{d\mu} + a_j \frac{d\omega}{d\mu} = b_j \quad (2.6)$$

$$(j = 0, 1, \dots, m-1),$$

где

$$A_{j\sigma} = A_{j\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \omega; \mu),$$

$$a_j = a_j(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \omega; \mu),$$

$$b_j = b_j(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \omega; \mu).$$

Разрешая систему (2.6), например, способом Крамера относительно неизвестных  $\frac{d\omega}{d\mu}$  и  $\frac{dx_\sigma}{d\mu}$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, m-1$ ), имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega}{d\mu} = \frac{\Delta_m}{\Delta}, \quad \frac{dx_\sigma}{d\mu} = \frac{\Delta_\sigma}{\Delta} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m-1), \quad (2.7)$$

где

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \omega; \mu), \quad \Delta_\sigma = \Delta_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \omega; \mu).$$

Интегрируя уравнения (2.7) тем или иным приближенным методом, например, методом Рунге—Кутта при следующих начальных условиях:

$$\omega(\mu)|_{\mu=0} = \omega^0, \quad x_\sigma(\mu)|_{\mu=0} = x_\sigma^0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m-1), \quad (2.8)$$

находим искомое решение  $x_\sigma(\mu)$ ,  $\omega(\mu)$  на интересующем нас интервале продолжения  $\mu_0 \leq \mu \leq \tilde{\mu}$ .

Нелокальная разрешимость задачи Коши для систем уравнений (1.2) методом дифференцирования по параметру в случае, когда число уравнений равняется числу неизвестных, приводится в [?].

В случае вынужденных колебаний период  $2\pi/\omega$  известен, поэтому  $\frac{d\omega}{d\mu} = 0$ . В этом случае уравнения (2.3) представляют собой систему

из  $m$  уравнений относительно  $m$  неизвестных  $\frac{dx_j}{d\mu}$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ).

В случае автономных систем период  $2\pi/\omega$  не известен. Но часто бывает так, что один из неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  можно будет считать известным. Это следует из того обстоятельства, что в автономных системах начало отсчета времени  $t_0$  можно будет задавать совершенно произвольно. Например, если отыскиваемое периодическое движение

на некотором интервале продолжения  $\mu_0 \leq \mu \leq \tilde{\mu}$  все время остается симметричным, то всегда можно предполагать  $t_0$  выбранным так, что  $x_0(\mu) = 0$  при  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$ . Тогда и производная  $\frac{dx_0}{d\mu} = 0$  при  $\mu \in [\mu_0, \tilde{\mu}]$ .

Для основной системы (1.2) не обязательно в качестве порождающей системы брать линейную систему (1.5). Можно взять и нелинейную систему уравнений, которая получается из основной системы (1.2) при

некотором  $\mu = \mu_0$ . Например, если параметр  $\mu$  введен в систему так, что она при  $\mu = \mu_0$  имеет только симметричные периодические движения, то в качестве порождающей для системы (1.2) можно будет взять приближенные уравнения симметричных периодических движений [2], решения которых гораздо легче найти, чем решения уравнений несимметричных периодических движений. Изложенная методика остается в силе и в случае системы уравнений (1.1).

### 3. Рассмотрим случай кусочно-линейных систем. Пусть

$$\Omega(x, \mu) = \alpha_s x + \beta_s \quad (3.1)$$

для точек  $x \in D_s$  ( $s = 1, 2, \dots, v$ ), где  $\alpha_s, \beta_s$  — известные величины,  $D_s$  — области линейности функции  $\Omega(x, \mu)$ . Обозначим через  $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0$ ,  $\omega^0$  решение системы (1.3) при  $\mu = \mu_0$ . Выясняем картину принадлежности значений  $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0$  областям линейности  $D_s$ . Предположим, что при  $\mu_0 < \mu < \mu_1$  принадлежность неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  областям линейности  $D_s$  такое же, как и принадлежность значений  $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0$ . Через  $\mu_1$  обозначим то значение  $\mu$ , начиная с которого нарушается картина принадлежности неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  к областям линейности  $D_s$ . Пусть, например, все неизвестные  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in D_s$  при  $\mu_0 < \mu < \mu_1$ . Тогда уравнения (1.3) перепишутся в виде

$$x_j = \sum_{\sigma=0}^{m-1} \tilde{a}_{j\sigma}(\omega, \mu) x_\sigma + b_j(\omega, \mu), \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{a}_{j\sigma}(\omega, \mu) = \alpha_s a_{j\sigma}(\omega, \mu), \quad b_j(\omega, \mu) = -\beta_s \sum_{\sigma=0}^{m-1} a_{j\sigma}(\omega, \mu).$$

Имеем  $m$  уравнений относительно  $m+1$  неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, \omega$ . Способ решения системы (3.2) методом продолжения ничем не отличается от способа решения системы (1.3). Пусть  $x_j(\mu), \omega(\mu)$  — решение системы (3.2) в промежутке  $\mu_0 < \mu < \mu_1$ . Тогда, исходя из решения  $x_j(\mu)$ , находим то значение  $\mu = \mu_1$ , начиная с которого нарушается картина расположения неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  на областях линейности  $D_s$ . Затем делается новое предположение о расположении значений  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  на областях линейности  $D_s$  при  $\mu_1 < \mu < \mu_2$ . Заметим, что в процессе решения (продолжения по параметру) становится ясным, какое новое предположение следует сделать относительно расположения неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  на областях линейности  $D_s$  на следующем участке продолжения  $\mu_1 < \mu < \mu_2$ . Составляем новую систему уравнений относительно неизвестных  $x_j, \omega$ , отличную от системы (3.2). Решаем вновь составленную систему уравнений методом продолжения и т. д. Решение приближенных уравнений периодических движений систем с двумя и более нелинейностями, зависящими от двух и более аргументов [5], не представляет принципиальных трудностей, но при этом объем вычислительной работы возрастает.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за руководство работой.

### ЛИТЕРАТУРА

- Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 6, 989 (1959).
- Ю. И. Неймарк, Автоматика и телемеханика, 22, № 1, 47 (1961).
- Л. Н. Кармов, Уч. зап. Кабардино-Балкарского университета, вып. 19 (1963).

4. Л. Н. Кармов, Сб научн работ аспирантов Кабардино-Балкарского университета, вып 1, 409 (1965).
5. Л. Н. Кармов, Сб. научн работ аспирантов Кабардино-Балкарского университета, вып. 1, 421 (1965).
6. И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гос-техиздат, М., 1949.
7. М. Н. Яковлев, Труды матем института им. В. А Стеклова, 34, изд Наука, М.—Л., 1962.
8. А. П. Мишина, И. В. Прокуряков, Высшая алгебра, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
9 июня 1967 г.

ON APPROXIMATE DERIVATION OF PERIODIC MOTIONS  
FOR NON-INTERACTING SYSTEMS

*L. N. Karmov*

An approximate method for seeking periodical motions in single-loop systems with one or several nonlinear elements and a linear link with given frequency characteristic is given in this paper. This method is based on the extension by parameter technique.

Two types of approximate equations for periodical modes are considered: the one related to Fourier coefficients and the other one related to the set of values of unknown function in the period.

УДК 62—50

## ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ СПОСОБАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ САМОНАСТРОЙКИ

*B. M. Перельмутер*

Рассматриваются итерационные методы определения динамических характеристик линейных и нелинейных объектов управления в процессе нормальной эксплуатации. Анализируются алгоритмы процессов идентификации, исследуются условия и скорость сходимости, режимы слежения за меняющимися характеристиками объекта

В связи с увеличивающимися требованиями к качеству систем автоматизации проблеме идентификации регулируемых объектов в последнее время уделяется большое внимание. Знание меняющихся характеристик объектов при построении высококачественных самонастраивающихся систем дает возможность решить целый ряд задач и существенно улучшить точность регулирования. Для этих целей вычисление характеристик необходимо производить непрерывно и таким образом, чтобы оценки характеристик стремились при увеличении времени идентификации к реальным характеристикам и в то же время эти оценки можно было бы использовать для улучшения работы системы [1]. В связи с этим начали развиваться итерационные методы определения характеристик [1, 2].

В зависимости от допустимого времени идентификации, применяемой аппаратуры, требуемой точности, от того, как используется полученная информация об объекте регулирования, могут быть применены различные способы описания объекта. Распространенным является представление модели объекта в виде параллельного соединения  $N$  заданных звеньев с регулируемыми коэффициентами передачи  $b_i$ , идентификация сводится к нахождению вектора  $B$ , оптимальным образом осуществляющего приближение характеристик модели к исследуемому объекту. Так как при таком способе получение точной модели объекта во многих случаях невозможно (передаточная функция объекта точно не представима в виде параллельного соединения  $N$  заданных звеньев), разрабатываются методы определения импульсных переходных функций (ИПФ) для линейных и обобщенных ИПФ (ядер разложения) нелинейных систем. Для этих целей находят применение как способы дискретизации ИПФ, так и непосредственное определение ИПФ путем решения соответствующих интегральных уравнений.

Ниже для этих методов рассматриваются алгоритмы для определения характеристик объекта, скорость сходимости итерационных процессов и получаемая точность, процессы слежения за меняющимися характеристиками объекта. Предполагается, что входные сигналы — ограниченные по модулю случайные функции, статистические характеристики которых могут изменяться в определенных пределах, однако при какой-либо конкретной реализации процесса настройки они остаются постоянными. Рассматриваются объекты с одним выходом, так как в случае нескольких выходов каждый из них может рассматриваться независимо. Входные воздействия измеряются точно, а выход измеряет-

ся с аддитивной помехой  $f_p$ , которая не зависит от входных сигналов. Поскольку непосредственное измерение разности между характеристиками объекта и их оценками в большинстве случаев невозможно, критерием приближения служит средний квадрат разности между выходом реального объекта  $y(t) = x(t) + f_p(t)$  и выходом модели объекта  $z(t)$ .

### 1. МЕТОД МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

При идентификации нелинейных систем встречается большое разнообразие характеристик объекта. Часто его можно представить в виде последовательного соединения двух нелинейных динамических звеньев, разделенных нелинейным безынерционным звеном. Каждое из этих трех звеньев можно представить в виде параллельного соединения нескольких типовых звеньев с переменными коэффициентами передачи, однако в этом случае сложно образование оценок для градиента. Большой общностью обладает представление в виде рядов Вольтерра, с помощью которого с достаточной степенью точности можно аппроксимировать практически все нелинейные преобразования с памятью [3, 4]. При использовании этого метода выбираются легко реализуемые ядра таким образом, чтобы модель была бы удобна в настройке. Возможная схема идентификации приведена на рис. 1, где  $A_1(p)$  — нелинейный оператор,  $V_i(p)$  — линейные динамические звенья,  $\varphi_{ij}$  — нелинейные звенья без памяти, например, вида  $x^n$ . В частности,  $\varphi_{ij} = \varphi_{jj}$ .

Коэффициент  $b_{ij}$  оптимален в том случае, если сигнал  $u_{ij}$  ортогонален ошибке  $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ . Таким образом, настройка заканчивается при выполнении условия  $u_{ij}(t) \varepsilon(t) = 0$ , где черта сверху означает усреднение по времени.

Рассмотрим дискретный алгоритм настройки. Величины  $u_{ij}$  умножаются на  $\varepsilon(t)$  и результаты интегрируются в течение интервала времени  $T$ . Затем выработанные интеграторами величины поступают на запоминающие устройства, где суммируются с ранее найденными величинами. Выходы запоминающих устройств определяют коэффициенты  $b_{ij}$ . Таким образом, на  $(k+1)$ -шаге

$$B_{(k+1)} = B_{(k)} + \Gamma \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_{(k+1)}(t) U_{(k+1)}(t) dt, \quad (1.1)$$

где  $U(t) = |u_{11}, \dots, u_{Nn_N}|'$ ,  $\Gamma$  — диагональная матрица с элементами  $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{Nn_N}$ . Для упрощения записи перенумеруем все величины  $u_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  от 1 до  $m = n_1 + \dots + n_N$ .

Обозначим  $\lambda_i(t) = y(t) u_i(t)$ ,  $\eta_{ij}(t) = u_i(t) u_j(t)$ . Тогда из (1.1) получаем

$$B_{(k+1)} = B_{(k)} + \Gamma (L_{(k+1)} - C_{(k+1)} B_{(k)}) , \quad (1.2)$$

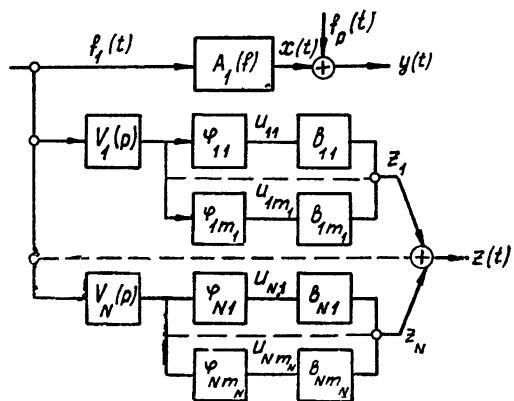


Рис. 1.

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^c + \Delta \mathbf{L} = \frac{1}{T} \int_0^T \Lambda(t) dt, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^c + \Delta \mathbf{C} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{H}(t) dt,$$

$\Lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)]'$ ,  $\mathbf{H}(t) = [\eta_{ij}(t)]^m$  — квадратная матрица порядка  $m$ ,  $\mathbf{L}^c = [l_1^c, \dots, l_m^c]'$ ,  $\mathbf{C}^c = [c_{ij}]^m$  — соответствующие математические ожидания,  $\Delta \mathbf{L}$  и  $\Delta \mathbf{C}$  — центрированные случайные отклонения, существующие из-за конечности времени усреднения  $T$ . Матрица  $\mathbf{C}^c$  положительно определена, так как функции  $u_i$  линейно независимы [5].

Вектор  $\mathbf{B}$  можно представить в виде суммы математического ожидания  $\mathbf{B}^c$  и центрированного случайного отклонения  $\Delta \mathbf{B}$ . Тогда (1.2) распадается на два уравнения

$$\mathbf{B}_{(k+1)}^c = \mathbf{B}_{(k)}^c + \Gamma (\mathbf{L}^c - \mathbf{C}^c \mathbf{B}_{(k)}^c) = \mathbf{N}^c \mathbf{B}_{(k)}^c + \Gamma \mathbf{L}^c, \quad (1.3)$$

$$\Delta \mathbf{B}_{(k+1)} = \mathbf{N}_{(k+1)} \Delta \mathbf{B}_{(k)} + \Gamma \Delta \mathbf{L}_{(k+1)} - \Gamma \Delta \mathbf{C}_{(k+1)} \mathbf{B}_{(k)}^c, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{N} = \mathbf{E} - \Gamma \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица, элементы  $\Delta \mathbf{C}_{(k)}$  и  $\Delta \mathbf{L}_{(k)}$  коррелированы между собой, но не зависят от элементов  $\Delta \mathbf{C}_{(k+q)}$  и  $\Delta \mathbf{L}_{(k+q)}$  при  $q \neq 0$ .

Уравнение (1.3) соответствует методу последовательных приближений решения системы линейных уравнений  $\mathbf{L}^c = \mathbf{C}^c \mathbf{B}^*$ . Процесс сходится, если все собственные значения матрицы  $\mathbf{N}_c$  по модулю меньше единицы. Можно принять [6]  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = \gamma < 2/\mu_{\max}$ , где  $\mu = \max_i \sum_{j=1}^m |c_{ij}^c|$ ,  $\mu_{\max}$  — максимальная величина  $\mu$  при изменениях статистических характеристик  $f_i(t)$  в возможных пределах. (Предполагается, что величина  $\mu_{\max}$  может быть оценена по имеющейся априорной информации.) Оценка скорости сходимости

$$\|\mathbf{B}^* - \mathbf{B}_{(k)}^c\| \leq \| \mathbf{N}^c \|^k \| \mathbf{B}^* - \mathbf{B}_{(0)} \|, \quad (1.5)$$

где  $\|\dots\|$  означает норму матрицы.

Выше предполагалось, что настройка всех коэффициентов  $b_i$  производится одновременно. Однако в ряде случаев, когда параметры объекта меняются медленно, возможно применить последовательную настройку, при которой на каждом шаге изменяется только один коэффициент  $b_i$ , что соответствует релаксационным способам решения системы линейных уравнений [6]. Настройка ведется по формуле

$$b_{i(k+1)} = b_{i(k)} + \frac{q_i}{c_{ii}^c} r_{i(k+1)} = b_{i(k)} + v_i r_{i(k+1)}, \quad (1.6)$$

где  $r_{i(k+1)}$  — невязка в  $i$ -й строке на  $(k+1)$  шаге. Здесь также предполагается, что верхняя граница для  $c_{ii}^c$  может быть оценена априори. При таком способе настройки существенно уменьшается число интеграторов и умножителей за счет введения кольцевого переключателя для последовательного подключения величин  $u_i$  на вход умножителя и выхода делительного блока на входы соответствующих запоминающих устройств. Сходимость процесса имеет место при  $q < 2$ .

При выборе величины интервала усреднения  $T$ , с одной стороны, следует стремиться к уменьшению  $T$ , так как при этом ускоряется процесс настройки по математическому ожиданию, с другой стороны, при этом возрастает дисперсия коэффициентов  $b_i$ . Можно показать, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\sum_{l=1}^m M[\Delta b_l^2] = M[\Delta \mathbf{B}' \Delta \mathbf{B}] = \gamma^2 \sum_{\substack{j=1 \\ q=1}}^m F_{jq}(D_{L_{jq}} + D_{S_{jq}} - 2D_{Lj}S_q) \quad (1.7)$$

где  $F_{jq}$  — элементы матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{E}$ , элементы квадратной матрицы  $\mathbf{G}$  совпадают с элементами матрицы-столбца  $\mathbf{G}_1 = |g_{11}, g_{12}, \dots, g_{22}, g_{23}, \dots, g_{mm}|'$ ,

$$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{S}_1, \quad (1.8)$$

$\mathbf{S}_1 = |s_{11}, s_{12}, \dots, s_{mm}|'$  имеет элементы, совпадающие с элементами матрицы  $\mathbf{S} = M[N^2]$ ,  $\mathbf{Q}$  — квадратная матрица порядка  $0,5m(m+1)$  (см. Приложение 1)

$$\begin{aligned} D_{L_{jq}} &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_{\lambda_j \lambda_q}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2, \\ D_{L_{jq}} &= \sum_{l=1}^m D_{C_{jl} C_{qp}} b_p^{c*} b_l^*, \\ D_{C_{jl} C_{qp}} &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_{\eta_{jl} \eta_{qp}}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2, \\ D_{L_j C_{ql}} &= \sum_{l=1}^m D_{L_j C_{ql}} b_l^{c*} \\ D_{L_j C_{ql}} &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_{\lambda_j \eta_{ql}}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$K_{\lambda_j \lambda_q}$ ,  $K_{\eta_{jl} \eta_{qp}}$ ,  $K_{\lambda_j \eta_{ql}}$  — соответствующие взаимно-корреляционные функции,  $D_{L_{jq}}$ ,  $D_{C_{jl} C_{qp}}$ ,  $D_{L_j C_{ql}}$  стремятся к нулю при возрастании  $T$ . По этим формулам, задавшись допустимой величиной  $\sum M[\Delta b_l^2]$ , можно определить минимальную величину  $T$ . Применив методы стохастической аппроксимации [1], можно добиться того, что  $\sum M[\Delta b_l^2]$  будет стремиться к нулю при конечном  $T$ , однако при этом усложняется вычислительное устройство и замедляется сходимость.

Рассмотрим процесс сложения за непрерывно меняющимися характеристиками объекта. Пусть изменение характеристик таково, что матрица  $\mathbf{L}^c$  изменяется по линейному закону  $\mathbf{L}_{(k)}^c = \mathbf{L}_{(k-1)}^c + \mathbf{M}$ . Обозначим  $\mathbf{B}_{(k)}^0$  ошибку в сложении на  $k$ -м шаге. При  $k \rightarrow \infty$   $\mathbf{B}^0$  стремится к постоянной величине, которая является решением уравнения [7]

$$\mathbf{C}^c \mathbf{B}^0 = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{C}^c)^{-1} \mathbf{M} - \mathbf{M}. \quad (1.10)$$

Таким образом, величины  $\gamma$  и  $T$  должны выбираться из компромиссных соображений, исходя из заданной скорости сходимости, допустимых величин дисперсий коэффициентов и требуемой точности в режиме сложения. В [7] приведены также формулы для расчета  $\mathbf{B}_{(k)}^0$  при последовательной настройке коэффициентов  $b_i$ . Если  $\mathbf{L}_{(k)}^c = \mathbf{L}^c + \Delta \mathbf{L}_{(k)}^c$ , где  $\Delta \mathbf{L}_{(k)}^c$  — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием, причем  $\Delta \mathbf{L}_{(k)}^c$  не зависит от  $\Delta \mathbf{L}_{(k+q)}^c$  при  $q \neq 0$ , но составляющие  $\Delta \mathbf{L}_{(k)}^c$

имеют ковариацию  $D_{L_{jq}}''$  ( $j, q = 1, \dots, m$ ), то математическое ожидание ошибок в сложении равно нулю, а сумма дисперсий ошибок при  $k \rightarrow \infty$  определяется формулами

$$M[B^0' B^0] = \sum_{\substack{j=1 \\ q=1}}^m p_{jq} D_{L_{jq}}'', \quad (1.11)$$

$$P = (C^c)^{-2} - 2\gamma(C^c)^{-1} + \gamma(C^c)^{-1}(2E - \gamma C^c)^{-1}. \quad (1.12)$$

Если объект имеет  $N$  входов, то используется  $N$  моделей, аналогичных приведенной на рис. 1. Выходы всех моделей суммируются и сравниваются с выходом объекта. Далее справедливы все приведенные выше формулы. Отметим, что, если каждый канал объекта не представим в виде суммы  $\sum u_i b_i^*$ , результаты идентификации зависят от степени коррелированности входных сигналов.

## 2. МЕТОД ДИСКРЕТНОЙ ИПФ

Рассмотрению этого метода для линейных систем посвящена работа [8]. Выход модели объекта представляется в виде  $z(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i f(k-i)$ ,  $h_i = \Delta \tau w(\tau_i)$ ,  $w(\tau)$  — ИПФ,  $\Delta \tau = T_s N^{-1}$ ,  $T_s$  — длительность  $w(\tau)$ . Предполагается, что выход объекта  $x(t)$  также представим в виде  $x(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i^* f(k-i)$ . Условие ортогональности имеет вид

$$I_{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta h_j f(k-j) f(k-i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N-1), \text{ где } \Delta h_j = h_j^* - h_j.$$

При реализации этого метода величины  $I_{(i)}$  на  $k$ -м шаге вычисляются путем умножения ошибки  $\epsilon(k)$  на  $f(k-i)$ . Итерационная формула имеет вид

$$\Delta H_{(k+1)} = \Delta H_{(k)} - \gamma_{(k)} I_{(k)} = N_{(k)} \Delta H_{(k)} + \gamma_{(k)} f_{p(k)} f_{(k)}, \quad (2.1)$$

где  $f_p$  — помеха на выходе  $\Delta H = [\Delta h_0, \dots, \Delta h_{N-1}]'$ ,  $f_{(k)} = [f(k), \dots, f(k-N+1)]'$ ,  $N_{(k)} = E - \gamma_{(k)} F_{(k)}$ ,  $F_{(k)} = f_{(k)} f_{(k)}'$ .

Так как  $F_{(k)}$  имеет  $N-1$  собственных значений, равных нулю, и одно  $\lambda_k = \sum_{i=0}^{N-1} f^2(k-i)$ , то сходимость процесса имеет место при

$\gamma_{(k)} < 2/\lambda_k$ . При  $f_p = 0$  наиболее быстрая сходимость имеет место при  $\gamma_{(k)} = 1/\lambda_k$ , что совпадает с алгоритмом [2]. Результаты и скорость идентификации в значительной степени зависят от вида входного сигнала. Если  $f(k)$  — периодический сигнал,  $f(k) = f(k+p)$ ,  $p < N$ , то  $(\Delta h_i + \Delta h_{i+p}) \rightarrow 0$ , т. е. вносится неопределенность. Как показывают расчеты, целесообразно иметь период возмущения  $T_f = (2,5 \div 4) T_s$ . При больших  $T_f$  сходимость замедляется. Если  $f(t)$  — случайный процесс, то быстрая сходимость имеет место в том случае, когда время корреляции не превышает  $T_s$ . Наличие постоянной составляющей во входном сигнале замедляет сходимость. На рис. 2 приведен пример определения трех параметров ИПФ:  $h_0^* = 1$ ,  $h_1^* = 0,5$ ,  $h_2^* = 0,2$ , если  $f(t)$  — белый шум с нулевым математическим ожиданием.

Если  $f_p(k) \neq 0$  является случайной величиной, то оптимальная величина  $\gamma_{(k)}$  также является случайной и должна находиться по статистическим методам. Некоторые соображения приведены в [2, 8]. При некоррелированности  $f$  и  $f_p$   $M[\Delta H^{(k)}] \rightarrow 0$ .

Более содержательные результаты не могут быть получены без введения дополнительного предположения о независимости матриц  $N_{(k)}$  и  $N_{(k+q)}$  при  $q \neq 0$ . Для этого необходимо, чтобы последнее значение  $f(i)$  в  $N_{(k)}$  и первое значение в матрице  $N_{(k+1)}$  разделял промежуток времени, не меньший времени корреляции. Это условие не всегда является ограничительным, так как после получения информации необходимо время для проведения вычислений. Для упрощения вычислительного устройства примем  $\gamma = \text{const}$ . Тогда для математического ожидания имеем оценку скорости сходимости (1.5) при выполнении приведенного выше условия сходимости  $\gamma < 2\mu_{\max}^{-1}$ , где  $N^c$  — математическое ожидание матрицы  $N$ ,  $\mu_{\max}$  — максимально возможная величина нормы матрицы  $F^c$ .

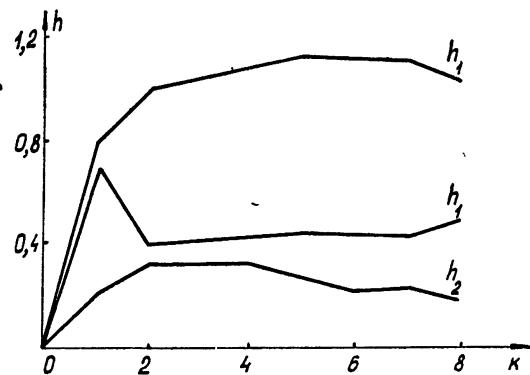


Рис. 2.

Рассмотрим величину  $M \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \Delta h_i^2 \right]$ . Как показано в Приложении, сходимость этой величины имеет место, если все собственные значения матрицы  $Q$  меньше единицы, причем в данном случае  $n_{ij}$  — элементы матрицы  $N = E - \gamma f_{(k)} f_{(k)}^T$ . При  $k \rightarrow \infty$

$$M[\Delta H' \Delta H] = \gamma^2 D_p \sum_{\substack{j=1 \\ q=1}}^N t_{jq} D_{f_{jq}}, \quad (2.2)$$

где  $D_p$  — момент второго порядка помехи  $f(p)$ ,  $D_{f_{jq}}$  — моменты связи величин  $f(j)$  и  $f(q)$ ,  $t_{jq}$  — элементы матрицы  $T = E + G$ ; элементы матрицы  $G$  равны соответствующим элементам матрицы-столбца  $G_1 = (E_1 - Q)^{-1} S_1$ . В частном случае, если  $f(t)$  — белый шум, следуют результаты [2, 8].

Рассмотрим процесс сложения за меняющимися характеристиками объекта. Пусть изменение параметров объекта на  $k$ -м шаге равно  $\Delta H_{(k)}^*$ . Тогда, если  $f_p = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta H_{(k+1)} &= N_{(k)} \Delta H_{(k)} + N_{(k)} \Delta H_{(k)}^* = \\ &= \prod_{i=0}^k N_{(i)} \Delta H_0 + \sum_{i=0}^k \prod_{j=i}^k N_{(j)} \Delta H_j^*. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Сходимость первого слагаемого была исследована выше, поэтому далее рассмотрим только второе. Пусть  $H_{(k)}^*$  изменяется по линейному закону, т. е.  $\Delta H_{(k)}^* = \text{const}$ . Учитывая независимость матриц  $N_{(i)}$  с различными индексами, имеем

$$M[\Delta H_{(k+1)}] = \sum_{k \rightarrow \infty}^k (N^c)^i \Delta H^* = \frac{1}{\gamma} (F^c)^{-1} \Delta H^* - \Delta H^*. \quad (2.4)$$

Пусть теперь  $\Delta H_{(k)}^*$  — независимые одинаково распределенные матрицы с нулевым математическим ожиданием. Тогда  $M[\Delta H_{(\infty)}] = 0$ . Аналогично формуле (2.2) получаем

$$M[\Delta H_{(\infty)} \Delta H_{(\infty)}] = \sum_{\substack{j=1 \\ q=1}}^N g_{jq} D_{h_j q}, \quad (2.5)$$

где  $D_{h_j q}$  — моменты связи величин  $\Delta h_j^*$  и  $\Delta h_q^*$ ,  $g_{jq}$  — элементы матрицы  $G$ .

Таким образом, в реальных условиях величина  $\gamma$  должна выбираться из компромиссных соображений с учетом необходимой точности и скорости настройки и возможного характера изменений параметров объекта.

Если объект имеет  $m$  входов, то, представляя выход модели объекта в виде

$$z(k) = \sum_{j=1}^m z_j(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{N-1} h_i^{(j)} f_{(k-l)}^{(j)} \quad (2.6)$$

и введя векторы  $H = |h_1^{(1)}, h_1^{(1)}, \dots, h_{N-1}^{(1)}, h_0^{(2)}, \dots, h_{N-1}^{(m)}|'$ ,  $f_{(k)} = |f^{(1)}(k), \dots, f^{(1)}(k-N+1), f^{(2)}(k), \dots, f^{(m)}(k-N+1)|'$ , сводим задачу к рассмотренной выше. При этом  $N\Delta\tau$  — длительность наиболее медленно затухающей ИПФ.

Если объект нелинейный, то, аппроксимируя его оператор рядом порядка  $m$

$$z(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i f(k-i) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} h_{ij} f(k-i) f(k-j) + \dots \quad (2.7)$$

и введя векторы  $H = |h_0, \dots, h_{N-1}, h_{0,0}, \underbrace{h_{N-1} \dots N-1}_m|'$ ,  $f_{(k)} = |f(k), \dots, f(k-N+1), f^2(k), f(k)f(k-1), \dots, f^m(k-N+1)|'$ , опять сводим задачу идентификации к рассмотренной выше.

### 3. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим объект, имеющий  $N$  входов  $f_i(t)$  и один выход  $x(t)$ . Введем вектор ИПФ  $W^*(\tau) = |w_1^*(\tau), \dots, w_N^*(\tau)|'$ . Если  $T_s$  — длительность ИПФ,  $T$  — время наблюдения, то наилучшая среднеквадратичная оценка для  $W^*(\tau)$  удовлетворяет векторному интегральному уравнению

$$\int_0^{T_s} R_f(\tau_1 - \tau_2) W(\tau_2) d\tau_2 = R_{yf}(\tau_1), \quad (3.1)$$

где

$$R_f = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau_1) f'(t - \tau_2) dt, \quad (3.2)$$

$$R_{yf} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau_1) [x(t) + f_p(t)] dt = R_{xf} + R_{fpf},$$

причем для исключения влияния начальных условий измерения выходной координаты должны начаться спустя  $T_s$  после начала измерения входной и длиться не менее  $T_s$ . Итерационная формула для решения этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(k+1)} &= \mathbf{W}_{(k)} + \gamma_{(k+1)} (\mathbf{R}_{yf(k+1)} - \mathbf{A}_{f(k+1)} \mathbf{W}_{(k)}) = \\ &= \mathbf{B}_{f(k+1)} \mathbf{W}_{(k)} + \gamma_{(k+1)} \mathbf{R}_{yf(k+1)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На очередном такте происходит зависящее от промежутка времени между тактами частичное или полное обновление величин  $f_i(t)$ , находящихся в памяти вычислительного устройства, и в связи с конечностью времени усреднения оператор  $\mathbf{A}_f$  является случайным, различающимся на каждом такте. Величина  $\mathbf{R}_{yf}$  также является случайной. Оператор  $\mathbf{A}_f$  — самосопряженный и положительный.

Уменьшение среднего квадрата ошибки идентификации на  $(k+1)$  шаге происходит в том случае, если  $\gamma_{(k)} < 2/\|\mathbf{A}_{f(k)}\|$  [9], причем для операторов в пространстве  $L_2$

$$\|\mathbf{A}_f\|^2 \leq \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \|\mathbf{R}_f(\tau_1 - \tau_2)\|^2 d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.4)$$

где норма матрицы — евклидова.

Для того, чтобы избежать вычислений нормы оператора на каждом такте, целесообразно принять  $\gamma = \text{const.}$  Предполагается, что априорные сведения о входных сигналах достаточны для оценки максимально возможной величины  $a^2 = \max M[\|\mathbf{A}_f\|^2]$ . Если выбрать  $\gamma$  несколько меньшим, чем это следует из неравенства  $\gamma < 2/a$ , то убывание среднего квадрата ошибки будет происходить практически на каждом шаге. Входящие в  $a^2$  дисперсии центрированных отклонений корреляционных функций вычисляются, например, по формулам [10].

На основании (3.3) имеем

$$\mathbf{W}_{(k)} = \prod_{l=1}^k \mathbf{B}_{f(l)} \mathbf{W}_{(0)} + \gamma \sum_{i=1}^k \prod_{j=1+i}^k \mathbf{B}_{f(j)} \mathbf{R}_{yf(i)}. \quad (3.5)$$

Второе слагаемое в (3.5) можно в свою очередь представить в виде двух составляющих, одна из которых связана с  $\mathbf{R}_{xf}$ , а вторая — с  $\mathbf{R}_{f_p f}$ . Хотя  $\mathbf{R}_{xf(k)}$  при фиксированном  $\tau$  случайная величина, она коррелирована с  $\mathbf{R}_{f(k)}$  таким образом, что решение (3.1) при  $\mathbf{R}_{f_p f} = 0$  есть ИПФ объекта при любых реализациях  $\mathbf{R}_f$  и  $\mathbf{R}_{xf}$ . Поэтому первая составляющая сходится к ИПФ  $\mathbf{W}^*(\tau)$ . Для дальнейшего предположим, что случайные составляющие оператора  $\mathbf{A}_f$  на соседних тактах независимы. Тогда для математического ожидания  $M[\mathbf{W}_{(k)}]$  имеем итерационный процесс при постоянном операторе  $M[\mathbf{A}_f]$ . Так как оператор  $M[\mathbf{A}_f]$  вполне непрерывный и его ядро не вырожденное, то собственные значения оператора имеют нуль своей предельной точкой. В связи с этим дать оценку скорости сходимости итерационного процесса затруднительно. Возможно предложить следующий способ, требующий знания первых  $l$  собственных чисел  $\lambda_i$  и соответствующих собственных функций, основанный на приведенном в [9] методе доказательства сходимости итерационного процесса. Пусть  $u_n(\tau) = w_n(\tau) - w^*(\tau)$ . Найдем число шагов, при котором  $\|u_n\|^2 < \delta \|u_0\|^2 = \varepsilon$ . Так как

$$\|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n)^2 < \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^n)^2 + \sum_{j=l+1}^{\infty} (a_j^0)^2, \text{ где } a_i^n \text{ — коэффициент разложения}$$

функции  $u_n$  по собственным функциям оператора, достаточно каждое

из этих двух слагаемых иметь меньшим, чем  $0,5 \epsilon$ . Выберем  $l$  таким, что

$$\sum_{i=1+l}^{\infty} (a_i^0)^2 = \| u_0 \|^2 - \sum_{i=1}^l (a_i^0)^2 < \epsilon/2.$$

Тогда  $n$  находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^l (1 - \gamma \lambda_i)^{2n} (a_i^0)^2 < \epsilon/2. \quad (3.6)$$

Рассмотрим составляющую (3.5), связанную с  $R_{f_{pf}}$ . Обозначим ее  $W''$ . Математическое ожидание  $W''$  равно нулю. Для оценки дисперсии целесообразно воспользоваться матричным представлением линейных ограниченных операторов в сепарабельном пространстве [11]. Пусть  $\{\varphi_k(t)\}$  — полная ортонормированная в  $L_2(0, T_s)$  система функций.

Вводя обозначения  $v_{ij} = \int_0^{T_s} w_i'(t) \varphi_j(t) dt$ ,  $c_{ij} = \int_0^{T_s} R_{f_{pf}}(t) \varphi_j(t) dt$ ,  $h_{ij}^{ql} = \int_0^{T_s} R_{f_{lq}}(t_1 - t_2) \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) dt_1 dt_2$ ,  $H_{lq} = |h_{ij}^{lq}|$  — квадратная бесконечная матрица,  $C_l$  и  $V_l$  — бесконечные матрицы-столбцы с коэффициентами  $c_{ij}$  и  $v_{ij}$ , вместо (3.1) получаем систему алгебраических матричных уравнений

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} V_j = C_l \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.7)$$

Так как нас интересует в данном случае только оценка для величин дисперсий  $W''$ , достаточно ограничиться конечным, относительно небольшим числом коэффициентов разложения и представить (3.7) в виде системы уравнений  $HV = C$ . Тогда для дисперсий коэффициентов разложения  $W''$  справедливы соответствующие формулы первого раздела. Связь между статистическими характеристиками  $R_f$ ,  $R_{f_{pf}}$ ,  $W''$  и такими же характеристиками коэффициентов разложения устанавливается обычными способами. Например,

$$\overline{c_{ij} c_{ql}} = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} K_{R_{lq}}(t_1, t_2) \varphi_j(t_1) \varphi_l(t_2) dt_1 dt_2,$$

где

$$K_{R_{lq}} = M[R_{f_{pf}}(t_1) R_{f_{pf}}(t_2)].$$

При  $T \rightarrow \infty$   $K_R$  стремится к нулю. По этим формулам, задавшись допустимой величиной дисперсии  $W''$ , можно найти минимально необходимое время наблюдения  $T$ .

Рассмотрим режим слежения за непрерывно меняющимися характеристиками объекта. Обозначая  $\Delta W_{(k)} = W_{(k)}^* - W_{(k)}$  и  $\Delta W_{(k+1)}^* = W_{(k+1)}^* - W_{(k)}$  и пренебрегая помехами, из (3.3) получаем

$$\Delta W_{(k+1)} = B_{f_{(k+1)}} \Delta W_{(k)} + B_{f_{(k+1)}} \Delta W_{(k+1)}^*. \quad (3.8)$$

Как и выше, ограничимся случаем  $\Delta W^* = \text{const}$ . Тогда при  $k \rightarrow \infty$   $\Delta W$  стремится к решению уравнения

$$A_{f_{(k+1)}} \Delta W = \frac{1}{\gamma} \Delta W^* - A_{f_{(k+1)}} \Delta W^*. \quad (3.9)$$

Таким образом,  $\gamma$  и  $T$  должны выбираться из компромиссных соображений.

Пусть объект нелинейный. Тогда его выход можно представить в виде

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty w_i(\tau) \varphi_i[f(t - \tau)] d\tau,$$

где  $\varphi_i(f)$  — заданные безынерционные нелинейные преобразования. Определение передаточных функций  $w_i(\tau)$  сводится к рассмотренной выше задаче, если в качестве компонент вектора входных сигналов рассматривать  $\varphi_i(f)$ . Возможно также представление  $z(t)$  в виде ряда Вольтерра, однако его нахождение требует более сложных вычислений [12].

Рассмотренные в статье итерационные методы определения динамических характеристик линейных и нелинейных объектов управления могут быть успешно применены для построения оптимальных систем регулирования, самонастраивающихся при изменениях характеристик объекта. Эти методы могут быть распространены на объекты с распределенными параметрами, если представить выход такого объекта в виде

$$Q(x, t) = \int_0^t W(x, t, \tau) f(x', \tau) d\tau.$$

Если  $L$  — протяженность пространственной координаты, то, разделив ее на  $l$  частей ( $L = l\Delta x$ ) для выходной координаты и  $l'$  частей ( $L = l'\Delta x'$ ) для внешнего воздействия, получим для выхода в точке  $i\Delta x$

$$Q(i\Delta x, t) = \sum_{i=1}^{l'} \int_0^t W'(i\Delta x, t, \tau) f(j\Delta x', \tau) d\tau.$$

Таким образом, задача идентификации объекта с распределенными параметрами сводится к идентификации объекта с  $l'$  входами и  $l$  выходами.

Следует отметить, что в большинстве случаев относительно небольшая среднеквадратичная ошибка может иметь место при довольно значительной разнице между характеристикой объекта и ее оценкой, что приводит к замедлению сходимости. В связи с этим разработка способов ускорения идентификации является актуальной.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Выведем формулу (1.7). Из (1.4) следует, что

$$\Delta B_{(k)} = \prod_{i=k}^1 N_{(i)} \Delta B_{(0)} + \sum_{i=1}^k \prod_{j=k}^{1+i} N_{(j)} \Delta N_{(i)} B_{(i-1)}^c + \gamma \sum_{i=1}^k \prod_{j=k}^{1+i} N_{(j)} \Delta L_{(i)}, \quad (\text{П.1})$$

причем при  $i = k$  произведение  $\Pi$  равно единице. Если подставить (П.1) в выражение  $M[\Delta B'_{(k)}, \Delta B_{(k)}]$  и использовать формулу

$$B_{(i)}^c = (N^c)^i (B_{(0)}^c - B^*) + B^*, \quad (\text{П.2})$$

можно показать, что при выполнении полученного ниже условия сходимости слагаемые, зависящие от начальных условий (от  $\Delta B_{(0)}$  и  $B_{(0)}^c - B^*$ ) при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, поэтому их не рассматриваем. Таким образом, используется следующее выражение для  $\Delta B_{(k)}$ :

$$\Delta \mathbf{B}_{(k)} = \gamma \sum_{i=1}^k \prod_{j=k}^{1+i} N_{(j)} (\Delta \mathbf{L}_{(i)} - \Delta \mathbf{C}_{(i)} \mathbf{B}^*). \quad (\text{П.3})$$

Обозначим  $\Delta \mathbf{R}_{(i)} = \Delta \mathbf{L}_{(i)} - \Delta \mathbf{C}_{(i)} \mathbf{B}^*$ . Учитывая независимость матриц  $\Delta \mathbf{L}_{(i)}$  и  $\Delta \mathbf{C}_{(i)}$  с различными индексами, а также независимость  $\Delta \mathbf{L}_{(i)}$  и  $\prod_{j=k}^{1+i} N_{(j)}$ , имеем

$$\begin{aligned} M[\Delta \mathbf{B}'_{(k)} \Delta \mathbf{B}_{(k)}] &= \gamma^2 M \sum_{i=1}^k \Delta \mathbf{R}'_{(i)} M \left[ \prod_{j=1+i}^k N_{(j)} \prod_{j=k}^{1+i} N_{(j)} \right] \Delta \mathbf{R}_{(i)} = \\ &= \gamma^2 \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^m F_{jq(k)} D_{R_{jq}}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

причем

$$D_{R_{jq}} = D_{L_{jq}} + D_{S_{jq}} - 2D_{L_j S_q}, \quad (\text{П.5})$$

где входящие в (П.5) слагаемые определяются формулами (19). Вычислим матрицу  $F_{(k)}$ :

$$F_{(k)} = M[N_{(2)} \dots N_{(k)} N_{(k)} \dots N_{(2)} + \dots + N_{(k)} N_{(k)} + E]. \quad (\text{П.6})$$

Пусть  $S = M[N_{(k)}^2]$ . Так как  $N_{(k)}$  и  $N_{(k+1)}$  независимы друг от друга, то

$$H = M[N_{(k-1)} N_{(k)}^2 N_{(k-1)}] = M[N_{(k-1)} S N_{(k-1)}]. \quad (\text{П.7})$$

Если ввести матрицы-столбцы  $S_1 = [s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{m,m}]'$  и  $H_1 = [h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{m,m}]'$ , имеющие элементы, совпадающие с элементами  $S$  и  $H$  и расположенные в указанном порядке, то получим  $H_1 = Q S_1$ , где квадратная матрица  $Q$  порядка  $0,5m$  ( $m+1$ ) имеет вид (черта сверху означает усреднение)

$$Q = \begin{vmatrix} \overline{n_{1,1}^2} & 2\overline{n_{1,1}n_{1,2}} & 2\overline{n_{1,1}n_{1,3}} & \dots & \overline{n_{1,2}^2} & 2\overline{n_{1,2}n_{1,3}} & \dots & \overline{n_{1,m}^2} \\ \overline{n_{1,1}n_{1,2}} & \overline{n_{1,1}n_{2,2}} + \overline{n_{1,1}n_{2,3}} + \dots + \overline{n_{1,2}n_{2,2}} + \overline{n_{1,2}n_{2,3}} + \dots + \overline{n_{1,m}n_{2,m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{n_{1,m}^2} & 2\overline{n_{1,m}n_{2,m}} & \dots & \overline{n_{2,m}^2} & \dots & \dots & \dots & \overline{n_{m,m}^2} \end{vmatrix}, \quad (\text{П.8})$$

$n_{ij}$  — элементы матрицы  $N$ , например,  $\overline{n_{1,1}^2} = \overline{(1 - \gamma c_{1,1} - \gamma \Delta c_{1,1})^2} = (1 - \gamma c_{1,1})^2 + \gamma^2 D_{c_{1,1} c_{1,1}}$ ,  $\overline{n_{1,1}n_{1,2}} = -\gamma \overline{(1 - \gamma c_{1,1} - \gamma \Delta c_{1,1})(c_{1,2} + \Delta c_{1,2})} = -\gamma (1 - \gamma c_{1,1}) c_{1,2} + \gamma^2 D_{c_{1,1} c_{1,2}}$  и т. д. Аналогично, если  $T = M[N_{(k-2)} N_{(k-1)} \dots N_{(k-2)}]$ , то

$T_1 = Q^2 S_1$  и т. д. Таким образом, если обозначить  $G_{(k)} = F_{(k)} - E$ , то

$$G_{1(k)} = Q^{k-2} S_1 + \dots + Q S_1 + S_1 \quad (\text{П.9})$$

и при  $k \rightarrow \infty$

$$G_1 = (E - Q)^{-1} S_1. \quad (\text{П.10})$$

Процесс сходится, если собственные значения матрицы  $Q$  по модулю меньше единицы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим величину  $M \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \Delta h_i^2 \right]$ :

$$M \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \Delta h_{i(k)}^2 \right] = M [\Delta H_{(k)}^\top \Delta H_{(k)}] =$$

$$\begin{aligned}
 &= M \left[ \Delta H'_{(0)} \left( \prod_{l=k}^1 N_{(l)} \right)' \prod_{l=k}^1 N_{(l)} \Delta H_{(0)} \right] + \\
 &+ 2\gamma M \left[ \Delta H'_{(0)} \left( \prod_{l=k}^1 N_{(l)} \right)' \sum_{l=1}^k \prod_{j=k}^{1+l} N_{(j)} f_{(l)} f_{P(l)} \right] + \\
 &+ \gamma^2 M \left[ \sum_{l=1}^k f_{P(l)}^2 f'_{(l)} \left( \prod_{j=k}^{1+l} N_{(j)} \right)' \prod_{j=k}^{1+l} N_{(j)} f_{(l)} \right]
 \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

(с учетом независимости  $f_{(l)}$  и  $f_{(l+q)}$  при  $q \neq 0$ ).

В Приложении 1 показано, что первое слагаемое можно представить в виде  $\Delta H'_{(0)} J_{(k)} \Delta H_{(0)}$ , где элементы матрицы  $J_{(k)}$  равны соответствующим элементам матрицы-столбца  $J_{1(k)} = Q^{k-1} S_1$ , причем элементы матрицы-столбца  $S_1$  равны соответствующим элементам матрицы  $S = M[N^2]$ , а матрица  $Q$  определяется формулой (П.8), в которой в данном случае  $n_{ij}$  — элементы матрицы  $N = E - \gamma f_{(k)} f'_{(k)}$ . Например,  $n_{11}^2 = (\overline{1 - \gamma f_1^2})^2 = 1 - 2\alpha + 3\alpha^2$ ,  $\overline{n_1 n_{12}} = -\gamma \overline{f_1 f_2 (1 - \gamma f_1^2)} = -\rho_1 (1 - 3\alpha)$  и т. д. для нормально распределенной  $f(t)$ , где  $\rho_1 = \rho(\Delta\tau)$  — нормированная корреляционная функция,  $\alpha = \gamma \sigma_f^2$ . Первое слагаемое стремится к нулю, если все собственные значения  $Q$  по модулю меньше единицы. Тот же вывод можно сделать относительно второго слагаемого в (П.11). Рассмотрим третье слагаемое

$$\begin{aligned}
 M [\Delta H'_{(k)} \Delta H_{(k)}]_3 &= \gamma^2 D_p \sum_{l=1}^k M [f'_{(l)} J_{(k-l)} f_{(l)}] = \\
 &= \gamma^2 D_p \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N t_{jq} {}_{(k)} D_{f_j q} ,
 \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

$t_{jq} {}_{(k)}$  — элементы матрицы  $T_{(k)} = J_{(k-1)} + \dots + J_{(1)} + E$ . При  $k \rightarrow \infty$   $T$  определяется выражением, приведенным во втором разделе статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

- Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 27, № 1, 23 (1966).
- Н. С. Райбман, В. М. Чадев, Адаптивные модели в системах управления, изд. Сов. радио, М., 1966.
- M. Schezen, International Control, 1 Series, 1, № 5, 401 (1965).
- J. F. Vaggett, Electronics and Control, 1 Series, 15, № 6, 567 (1963).
- С. Уилкс, Математическая статистика, изд. Наука, М., 1967.
- Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1960.
- В. М. Перельмутер, Автоматика, № 4 (1968) (в печати).
- Н. Й. Кушнер, Trans. ASME, series D, 85, № 2, 27 (1963).
- В. М. Фридман, УМН, 11, № 1 (67), 233 (1956).
- В. М. Бабурин, В. Л. Ленский, П. С. Матвеев, Ю. Б. Рождественский, сб. Аналитические самонастраивающиеся системы, изд. Машиностроение, М., 1965.
- Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов, изд. Наука, М., 1966.
- Н. С. Hsieh. Information and Control, 7, № 1, 84 (1964).

Поступила в редакцию  
17 апреля 1967 г.

## ON ITERATIVE METHODS OF DYNAMIC OBJECTS IDENTIFICATION FOR SELFCONTROL PURPOSES

V. M. Perelmutter

Iterative methods for derivation of dynamic characteristics of linear and nonlinear controlled plants in the process of normal operation are considered.

Algorithms of identification processes are analysed and investigation of speed and conditions for convergence and of follow-up regimes for changing characteristics of the object are carried out.

УДК 62—505

## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

*Г. М. Островский, В. В. Борисов, Ю. М. Волин, Л. Н. Шумунов*

Метод квазилинеаризации [1] решения двухточечных краевых задач, к которым с помощью принципа максимума [2] сводятся задачи оптимизации сложных систем, обобщается на случай наличия произвольных ограничений на управления.

Для решения краевых задач, к которым с помощью принципа максимума сводится задача расчета оптимальных систем, Беллманом и Калабой в [1] был применен метод квазилинеаризации, который оказался достаточно эффективным и в дальнейшем широко применялся [3]. Однако рассмотрение этого метода велось для случая, когда управление не имели ограничений. Это существенно снижало область применения этого метода, поскольку большинство практических задач имеет ограничения на управления.

Кроме того, в [1] не учитывалось то обстоятельство, что система уравнений принципа максимума неустойчива и в ряде случаев чрезвычайно чувствительна к погрешностям счета, в начальных условиях и др. [4]. Опыт показывает, что в этом случае хорошие результаты дает применение методов, основанных на идее «прогонки» [5]. Целью данной работы будет распространение метода квазилинеаризации на случай произвольных ограничений на управления. Итак, рассмотрим следующую задачу. Пусть на интервале  $0 \leq t \leq T$  требуется найти такие управление  $u_i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) в системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad (2)$$

чтобы величина  $x_1(T)$  приняла минимальное значение. Пусть на управление наложены условия

$$\varphi_j(u_1, \dots, u_r) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, q), \quad (3)$$

ограничивающие в пространстве переменных  $u_1, \dots, u_r$  допустимую область  $D$ . Для простоты будем предполагать, что величины  $x_i(T)$  ( $i = 2, \dots, n$ ) являются свободными.

Относительно функций  $f_i$  будем предполагать, что они обладают непрерывными вторыми производными по всем своим аргументам.

Согласно принципу максимума [2] решение поставленной задачи сводится к совместному решению системы (1) и сопряженной системы

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \lambda_k \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4)$$

причем переменные  $u_i(t)$  ( $i=1, \dots, r$ ) в каждый момент  $t$  выбираются из условия, что функция  $H = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x, u)$  принимала максимальное значение в допустимой области  $D$ . Таким образом, на экстремали выполняется условие

$$H = \max_{u \in D} \sum_{i=1}^n f_i \lambda_i. \quad (5)$$

Краевые условия для переменных  $x_i(t)$  задаются в виде (2), а для переменных  $\lambda_i(t)$  равенствами

$$\lambda_1(T) = -1, \lambda_2(T) = \dots = \lambda_n(T) = 0. \quad (6)$$

Относительно системы уравнений (1), (4), (5) будем предполагать, что она обладает следующим свойством: задание начальных значений  $\lambda_i(0)$  ( $i=1, \dots, n$ ) однозначно определяет интегральную кривую (в системе нет «особых» управлений [6]).

Для простоты записи систему уравнений (1), (4) удобно представить в виде

$$\frac{dz_i}{dt} = F_i(z_1, \dots, z_{2n}; u_1, \dots, u_r) \quad (i = 1, \dots, 2n), \quad (7)$$

где

$$z_i = \begin{cases} x_i & (i = 1, \dots, n) \\ \lambda_{i-n} & (i = n+1, \dots, 2n) \end{cases}, \quad F_i = \begin{cases} f_i & (i = 1, \dots, n) \\ -\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial z_{i-n}} z_{k+n} & (i = n+1, \dots, 2n) \end{cases}. \quad (8)$$

Метод квазилинеаризации является итерационным методом. Пусть нам известны непрерывные функции  $z_i^{(m)}(t)$  ( $i=1, \dots, 2n$ ), являющиеся  $m$ -м приближением данного итерационного процесса. Относительно функций  $z_i^{(m)}(t)$  будем предполагать, что они удовлетворяют начальным (2) и конечным (6) краевым условиям и достаточно близки во всех точках интервала  $(0, T)$  к функциям  $z_i^*(t)$ , являющимся решениями нашей оптимальной задачи.

Управления  $u_i^{(k)}$  ( $i=1, \dots, r$ ;  $k=1, \dots, m, \dots$ ) соответствующие функциям  $z_i^{(k)}$  ( $i=1, \dots, 2n$ ), будем определять из условия

$$H = \max_{u \in D} \sum_{i=1}^n z_{n+1} f_i(z_1, \dots, z_{2n}; u_1, \dots, u_r) \equiv \max_{u \in D} H[z_i^{(m)}, u]. \quad (9)$$

Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_i^{*}(t) &= z_i^{(m)}(t) + \delta z_i & (i = 1, \dots, 2n), \\ u_s^{*}(t) &= u_s^{(m)}(t) + \delta u_s & (s = 1, \dots, r), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $u_k^*(t)$  ( $k=1, \dots, r$ ) — оптимальные управление. Согласно нашим предположениям функции  $\delta z_i(t)$  на всем интервале  $(0, T)$  достаточно малы и в конечных точках удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \delta z_i(0) &= 0 & (i = 1, \dots, n), \\ \delta z_i(T) &= 0 & (i = n+1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (11)$$

Величины  $\delta u_s(t)$  не обязательно малы во всех точках интервала  $(0, T)$ . Наша задача состоит в том, чтобы найти уравнения для определения функций  $\delta z_i(t)$ . После того как функции  $\delta z_i(t)$  будут найдены, следующее  $(m+1)$ -е приближение для функций  $z_i(t)$  будет равно

$$z_i^{(m+1)}(t) = z_i^{(m)}(t) + \delta z_i(t) \quad (i = 1, \dots, 2n), \quad (12)$$

а  $(m+1)$ -е приближение для управлений будет находиться из условия (9) для  $k=m+1$ .

Будем предполагать вначале, что все функции  $u_i^{(m)}(t)$  ( $i=1, \dots, r$ ) непрерывны и кусочно-гладки в интервале  $(0, T)$ .

Согласно (9) управления  $u_i^{(m)}(t)$  в каждый момент  $t$  должны являться координатами точки  $A_t[u_1^{(m)}, \dots, u_r^{(m)}]$  пространства  $u_1, \dots, u_r$ , в которой функция  $H[z^{(m)}(t), u]$  принимает максимальное значение. Точка  $A_t$  может лежать либо внутри допустимой области  $D$ , либо на пересечении некоторых из поверхностей (3), образующих границу области  $D$ . В связи с этим разобьем интервал  $(0, T)$  на ряд участков точками  $\tau_{p-1}^{(m)}, \dots, \tau_{N-1}^{(m)}$  таким образом, чтобы внутри каждого интервала  $(\tau_{p-1}^{(m)}, \tau_p^{(m)})$  ( $p=1, \dots, N$ ) точка  $A_t$  лежала на пересечении одних и тех же поверхностей:

$$\varphi_{p_i}(u_1, \dots, u_r) = 0 \quad (i = 1, \dots, s_p). \quad (13)$$

Точки  $\tau_p^{(m)}$  ( $p=1, \dots, N-1$ ) будем называть точками разбиения функций  $u_i^{(m)}(t)$  ( $i=1, \dots, r$ ). Таким образом, переход точки  $A_t$  с одних поверхностей  $\varphi_p = 0$  на другие возможен только на границах интервалов  $(\tau_{p-1}^{(m)}, \tau_p^{(m)})$  ( $p=1, \dots, N$ ), т. е. в точках  $\tau_p^{(m)}$ .

На рис. 1 для примера приведен график управляющей переменной  $u^{(m)}(t)$  (сплошная линия), подчиненной ограничению  $u \leq a$ . Здесь на первом участке  $s_1=0$ , на втором  $s_2=1$ , на третьем  $s_3=0$ .

Поскольку в каждый момент  $t$  интервала  $\tau_{p-n} \leq t \leq \tau_p$  точка  $A_t$

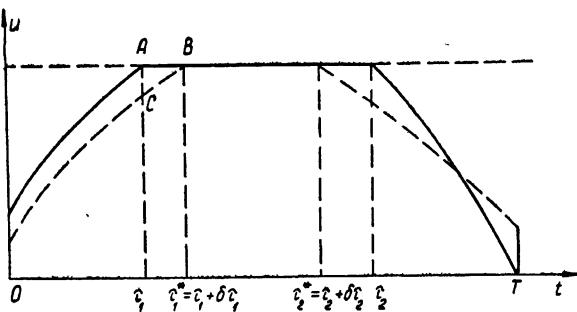


Рис. 1.

лежит на пересечении поверхностей (13), то, применяя метод множителей Лагранжа, получим, что управляющие переменные будут удовлетворять следующей системе  $r+s_p$  уравнений:

$$\sum_{i=1}^n z_{i+n}^{(m)} \frac{\partial F_j}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{s_p} \mu_k^{(m)} \frac{\partial \varphi_{p_k}}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, r), \quad (14)$$

$$\varphi_{p_i}(u_1^{(m)}, \dots, u_r^{(m)}) = 0 \quad (i = 1, \dots, s_p), \quad (15)$$

где  $\mu_j^{(m)}$  — множители Лагранжа ( $m$  — номер итерации,  $j$  — номер множителя). Величина  $s_p$  на интервале  $(0, T)$  меняется следующим образом:

$$s_p = \begin{cases} s_1 & (\tau_0 \leq t \leq \tau_1) \\ s_2 & (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) \\ \vdots & \vdots \\ s_N & (\tau_{N-1} \leq t \leq \tau_N) \end{cases} \quad (16)$$

Для оптимальных управлений  $u_i^*(t)$  ( $i=1, \dots, r$ ) будут существовать свои точки разбиения  $\tau_1^*, \dots, \tau_{N-1}^*$ , связанные с точками разбиения  $\tau_i^{(m)}$  ( $i=1, \dots, N-1$ ) следующими соотношениями:

$$\tau_i^* = \tau_i^{(m)} + \delta\tau_i. \quad (17)$$

На рис. 1 приведен прерывистой линией график оптимального управления. Можно легко показать (не будем на этом останавливаться), что, если функции  $\delta z_i(t)$  достаточно малы и управлений  $u_k^*$  ( $k=1, \dots, r$ ) непрерывны, все  $\delta u_k(t)$  являются малыми величинами. Рассмотрим в пространстве  $u_1, \dots, u_r$  кривую  $L$ , определяемую равенствами

$$u_i = u_i^{(m)}(t). \quad (18)$$

Согласно определению точек  $\tau_p^{(m)}$  ( $p=1, \dots, N-1$ ) в этих точках кривая  $L$  сходит с некоторых из поверхностей  $\varphi_i = 0$  (или входит на некоторые из них). Мы будем предполагать, что в точках  $\tau_p^{(m)}$  ( $p=1, \dots, N-1$ ) кривая  $L$  не касается тех поверхностей  $\varphi_i = 0$ , с которых она сходит в этих точках (или на которые входит). При этом предположении легко показать, что все  $\delta\tau_i$  ( $i=1, \dots, N-1$ ) будут малыми первого порядка.

Подставим  $z_i^*(t)$  и  $u_i^*(t)$  из (10) в (7). Поскольку функции  $\delta z_i(t)$  ( $i=1, \dots, 2n$ ),  $\delta u_k$  ( $k=1, \dots, r$ ) являются малыми первого порядка во всех точках интервала  $(0, T)$ , то, разлагая в ряд Тейлора правые части этих уравнений и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим

$$\frac{d\delta Z}{dt} = F^{(m)} + A(t)\delta Z + B(t)\delta U - \frac{dZ^{(m)}}{dt}, \quad (19)$$

где  $F^{(m)} = \|F_1 z_1^{(m)}, \dots, z_{2n}^{(m)}; u_1^{(m)}, \dots, u_r^{(m)}\|$  — матрица-столбец,  $A(t) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right\|$  — матрица размерности  $(2n \times 2n)$ ,  $\delta Z = \|\delta z_i\|$ ,  $\frac{dZ^{(m)}}{dt} = \left\| \frac{dz_i^{(m)}}{dt} \right\|$  — матрицы-столбцы размерности  $(2n \times 1)$ ;  $\delta U = \|\delta u_i\|$  — матрица-столбец размерности  $(r \times 1)$ ,  $B(t) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right\|$  — матрица размерности  $(2n \times r)$ .

Теперь остается найти связь величин  $\delta u_i$  с  $\delta z_j$ . Рассмотрим для этого произвольный интервал  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$ . В этом интервале кривая  $L$  (см. (18)) лежит на поверхностях (13) при  $p=l$ . Рассмотрим теперь в пространстве  $u_1, \dots, u_r$  кривую оптимального управления

$$u_i = u_i^*(t) \quad (i = 1, \dots, r). \quad (20)$$

В интервале  $(\tau_{i-1}^*, \tau_i^*)$  она также лежит на поверхностях (13) при  $p=l$ . Отсюда управлений  $u_i^*$  в интервале  $(\tau_{i-1}^*, \tau_i^*)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n z_{j+n}^* \frac{\partial F_j}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{s_l} \mu_k^* \frac{\partial \varphi_{p_k}}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$\varphi_{l_i}(u_1^*, \dots, u_r^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, s_l), \quad (21)$$

где  $\mu_j^* = \mu_j^{(m)} + \delta\mu_j$ , ( $j = 1, \dots, s_l$ ) — множители Лагранжа, соответствующие оптимальной кривой.

Будем для определенности предполагать, что  $\delta\tau_{l-1} > 0$ ,  $\delta\tau_l < 0$  (см. (17) и рис. 1). Отсюда в интервале  $(\tau_{l-1} + \delta\tau_{l-1}, \tau_l - |\delta\tau_l|)$  кривая  $L$  и кривая (20) лежат на одних и тех же поверхностях (13) при  $p=l$ .

Подставляя  $u_s$  и  $z_l$  из (10) и  $\mu_j^* = \mu_j^{(m)} + \delta\mu_j$ , ( $j = 1, \dots, s_l$ ) в (21), разлагая в ряд Тейлора полученные выражения и используя (14), (15), получим, что в интервале  $(\tau_{l-1} + \delta\tau_{l-1}, \tau_l - |\delta\tau_l|)$  функции  $\delta u_i$  и числа  $\delta\mu_j$  будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n} \left( \sum_{j=1}^n z_{j+n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial u_i \partial z_k} \right) \delta z_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \delta z_{j+n} + \\ & + \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^r z_{j+n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial u_i \partial u_k} \right) \delta u_k + \sum_{k=1}^{s_p} \delta\mu_k \frac{\partial \varphi_{p_k}}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{s_p} \left( \sum_{j=1}^r \mu_k \frac{\partial^2 \varphi_{p_k}}{\partial u_i \partial u_j} \right) \delta u_j = 0, \\ & \sum_{k=1}^r \frac{\partial \varphi_{p_i}}{\partial u_k} \delta u_k = 0 \quad (i = 1, \dots, s_l). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения (22) дают соотношения, связывающие переменные  $\delta u_k$  и  $\delta z$ , в интервале  $(\tau_{l-1} + \delta\tau_{l-1}, \tau_l - |\delta\tau_l|)$ .

Пользуясь малостью величин  $\delta\tau_{l-1}$ ,  $\delta\tau_l$  и  $\delta u_k$  ( $k = 1, \dots, r$ ), можно показать (мы на этом останавливаться не будем), что соотношениям (22) для определения величин  $\delta u_k$  и  $\delta\eta_j$  можно пользоваться на всем интервале  $(\tau_{l-1}, \tau_l)$ . Аналогичный анализ можно провести для всех интервалов  $(\tau_{p-1}, \tau_p)$  ( $p = 1, \dots, N$ ).

Таким образом, для определения величин  $\delta z_i(t)$  необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений (19), величины  $\delta u_k(t)$  ( $k = 1, \dots, r$ ) в которой определяются внутри каждого интервала  $(\tau_{l-1}, \tau_l)$  ( $l = 1, \dots, N$ ) с помощью соотношений (22), а краевые условия даются соотношениями (11).

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые из управлений  $u_i^{(m)}(t)$  терпят разрыв в конечном числе точек  $t_1, \dots, t_{M-1}$  интервала  $(0, T)$ . Примерный вид разрывного управления приведен на рис. 2 (сплошной линией здесь обозначено управление  $u^{(m)}(t)$ , а прерывистой — оптимальное управление). Так же, как и в предыдущем случае, введем точки разбиения  $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_{N-1}^{(m)}$ , разделяющие интервалы, на которых обрабатываются в равенства различные из неравенств (3). Ясно, что некоторые из точек  $t_i$  совпадают с точками  $\tau_i^{(m)}$ . Точки  $t_1^*, \dots, t_{M-1}^*$ , в которых терпят разрыв некоторые из оптимальных управлений  $u_i^*(t)$ , будут смещены на величины  $\delta t_1, \dots, \delta t_{M-1}$  по сравнению с соответствующими

точками разрыва  $t_1, \dots, t_{M-1}$  для управлений  $u_i^{(m)}(t)$ . Легко показать, что внутри интервалов

$$t_i < t < t_i + \delta t_i \quad (i = 1, \dots, M - 1) \quad (23)$$

величины  $\delta u_i$  будут принимать конечные значения (рис. 2), а вне этих интервалов они будут, так же как и  $\delta z_i(t)$ , малыми первого порядка. В этом принципиальное отличие рассматриваемого случая от предыдущего, когда все функции  $\delta z_i$ ,  $\delta u_i$  были малыми первого порядка во всех точках интервала  $(0, T)$ .

Можно также показать, что  $\delta t_i$  будут малыми величинами первого порядка. Действительно, если предположить, что какое-то  $\delta t_k$  является конечной величиной, то легко показать, что для  $t \geq t_k + \delta t_k$  величины  $\delta z_i(t)$  не будут малыми, что противоречит нашему основному предположению, что функции  $z_i^{(m)}(t)$  достаточно близки к оптимальным функциям  $z_i^*(t)$ .

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, легко показать, что вне интервалов (23) функции  $\delta z_i(t)$ ,  $\delta u_k(t)$  будут удовлетворять системе уравнений (19), (22).

Рассмотрим теперь закон изменения функций  $\delta z_i(t)$  внутри интервалов (23). Будем предполагать, что все  $\delta t_k > 0$  (случай  $\delta t_k < 0$  рассматривается аналогично и приводит к тем же результатам). Тогда легко показать, что с точностью до бесконечно малых второго порядка будет выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \delta z_i(t_k + \delta t_k) = & \delta z_i(t_k) + \{ F_i [z^{(m)}(t_k), u^{(m)}(t_k - 0)] - \\ & - F_i [z^{(m)}(t_k), u^{(m)}(t_k + 0)] \} \delta t_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее будет показано, что величины  $\delta t_k$  являются линейными функциями величин  $\delta z_i(t_k)$ :

$$\delta t_k = C_1(t_k) \delta z_1(t_k) + \dots + C_{2n}(t_k) \delta z_{2n}(t_k). \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), получим в общем виде

$$\delta Z(t_k + \delta t_k) = D(t_k) \delta Z(t_k). \quad (26)$$

Вид матрицы  $D(t_k)$  мы здесь выписывать не будем. С точностью до бесконечно малых второго порядка соотношение (26) может быть переписано в виде

$$\delta Z(t_k + 0) = D(t_k) \delta Z(t_k - 0). \quad (27)$$

Таким образом, в данном случае функции  $\delta z_i(t)$  имеют краевые условия (11), внутри интервалов  $(t_{k-1}, t_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) удовлетворяют системе уравнений (19), (22), а в точках  $t = t_k$  ( $k = 1, \dots, M - 1$ ) преобразуются с помощью формулы (27). При таком построении функции  $\delta z_i(t)$  в точках  $t = t_k$  будут терпеть разрыв (рис. 3). Это не очень удобно для последующих итераций. Однако это препятствие устраним. Действительно, пусть мы определили  $\delta z_i(t)$ . Тогда в каждой точке

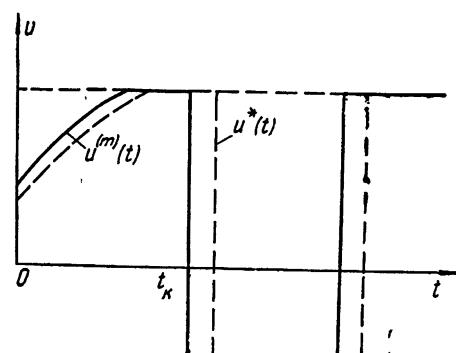


Рис. 2.

$t = t_k$  ( $k = 1, \dots, M - 1$ ) мы можем определить знак и величину  $\delta t_k$  с помощью формулы (25). Поскольку величины  $\delta t_k$  являются малыми первого порядка, то внутри интервалов  $(t_k, t_k + \delta t_k)$  величины  $\delta z_i(t)$  можно считать линейными функциями времени  $t$ . Отсюда, зная значения функций  $\delta z_i(t)$  в обоих концах интервала  $(t_k, t_k + \delta t_k)$  можно с точностью до бесконечно малых второго порядка вычислять значения функций  $\delta z_i(t)$  внутри интервала  $(t_k, t_k + \delta t_k)$  с помощью интерполяционной формулы

$$\delta z_i(t) = \delta z_i(t_k - 0) + \frac{\delta z_i(t_k + \delta t_k) - \delta z_i(t_k - 0)}{\delta t_k} (t - t_k) \quad (\delta t_k > 0).$$

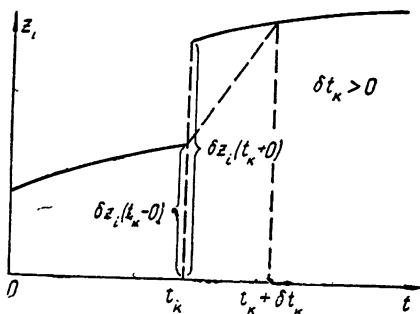


Рис. 3.

в допустимой области  $D$  будет в точках  $U^1(u_1^1, \dots, u_r^1)$  и  $U^2(u_1^2, \dots, u_r^2)$ , в которых значения функции  $H$  будут равны

$$H(z^{(m)}, u^1) = H(z^{(m)}, u^2). \quad (28)$$

Причем при  $t = t_k - \delta t$  глобальный максимум был в окрестности точки  $U^1$ , а в момент  $t = t_k + \delta t$  он будет в окрестности точки  $U^2$ . Точки  $U^1$  и  $U^2$  могут лежать как внутри открытой области  $D$ , так и на ее границе. Мы здесь рассмотрим только один случай, когда как точка  $U^1$ , так и точка  $U^2$  лежит на многообразиях, образуемых пересечением некоторых из поверхностей

$$\varphi_i(u_1, \dots, u_r) = 0 \quad (i = 1, \dots, q).$$

Причем размерности этих многообразий равны нулю, т. е. они являются точками. Рассмотрим теперь оптимальную траекторию. Скачок в управлении на ней произойдет в некоторый момент  $t_k = t_k + \delta t_k$ , когда будет выполняться соотношение

$$H[z^*(t_k + \delta t_k), u^{*1}] = H[z^*(t_k + \delta t_k), u^{*2}]. \quad (29)$$

Точки  $U^{*1}$  и  $U^{*2}$ —это точки, в которых функция  $H[z^*, u]$  достигает максимума. Будем предполагать, что в обеих точках  $U^{*1}$  и  $U^{*2}$  выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta u_i < 0, \quad (30)$$

На рис. 3 в интервале  $(t_k, t_k + \delta t_k)$  пунктиром показана прямая, соответствующая значениям  $\delta z_i(t)$ , подсчитанным с помощью этой формулы.

Рассмотрим теперь способ получения соотношений (25). Будем прежде всего, предполагать, что функция  $H(z^{(m)}, u)$  имеет единственный глобальный максимум для всех точек кривой  $z_i^{(m)}(t)$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ), за исключением точек, в которых функции  $u_i^{(m)}(t)$  терпят разрывы.

Скачок в управлениях будет происходить в случае, если в какой-то момент  $t = t_k$  функция  $H(z^{(m)}, u)$  иметь два глобальных максимума в которых значения функции  $H$

$\delta u_i = u_i - u_i^{*s}$  (где  $u_i$  — координата произвольной точки, лежащей в окрестности точки  $U^{*s}$  ( $s = 1, 2$ ) в области  $D$ ).

Тогда легко показать, что точки  $U^{*1}$  и  $U^{*2}$  будут совпадать соответственно с точками  $U^1$  и  $U^2$ . Отсюда условие (29) перепишется в виде

$$H(z^*, u^1) = H(z^*, u^2). \quad (31)$$

Подставим в (31) значение  $z_i^*(t_k + \delta t_k)$ :

$$z_i^*(t_k + \delta t_k) = z_i^{(m)}(t_k) + \dot{z}_i^{(m)}(t_k) \delta t_k + \delta z_i(t_k). \quad (32)$$

Разлагая в равенстве (31) функции  $H(z^*, u^1)$ ,  $H(z^*, u^2)$  в ряд Тейлора и отбрасывая члены второго и выше порядка малости, легко найти выражение для  $\delta t_k$ :

$$\delta t_k = \frac{\sum_{i=1}^n [\delta z_i(t_k) A_i + \delta z_{i+n}(t_k) B_i]}{\sum_{i=1}^n (z_i^{(m)} A_i + \dot{z}_{i+n} B_i)},$$

где

$$A_i = \frac{\partial H}{\partial z_i} \Big|_{u=u^1} - \frac{\partial H}{\partial z_i} \Big|_{u=u^2}, \quad B_i = \frac{\partial H}{\partial z_{i+n}} \Big|_{u=u^1} - \frac{\partial H}{\partial z_{i+n}} \Big|_{u=u^2}.$$

Метод квазилинеаризации применялся для расчета оптимального температурного профиля реактора, процесс в котором описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad k_i = C_i \exp\left(-\frac{E_i}{R u}\right),$$

$$E_1 = 18, \quad E_2 = 30, \quad R = 2, \quad C_1 = \\ = 0,535 \cdot 10^{11}, \quad C_2 = 0,461 \cdot 10^{18}, \\ 0 \leq t \leq T \quad (T = 10).$$

Начальные условия имеют вид  $x_1(0) = 0,95$ ,  $x_2(0) = 0,05$ . Требуется найти такую функцию  $u(t)$ , чтобы  $x_2(T)$  приняла максимальное значение. Величина  $x_1(T)$  свободна. Численные значения констант и начальные условия здесь взяты такими же, как и в [7], где эта же задача решалась градиентным методом. В качестве начального приближения  $u^0$  для управления в [7] использовалась кривая 1 (рис. 4).

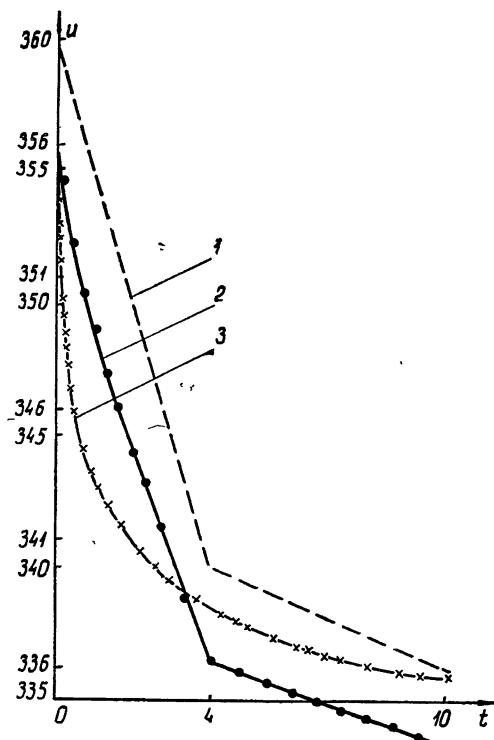


Рис. 4. Кривые: 1—начальное приближение, 2—первая итерация, 3—четвертая итерация.

В данной работе задача вначале решалась при отсутствии ограниченной на управление  $u$ . Начальные приближения  $z_i^{(0)}(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) были выбраны таким образом, чтобы начальное приближение для управления, подсчитанное с помощью условия (9), совпадало бы с кривой 1 (рис. 4). (Это сделали для того, чтобы можно было сравнивать

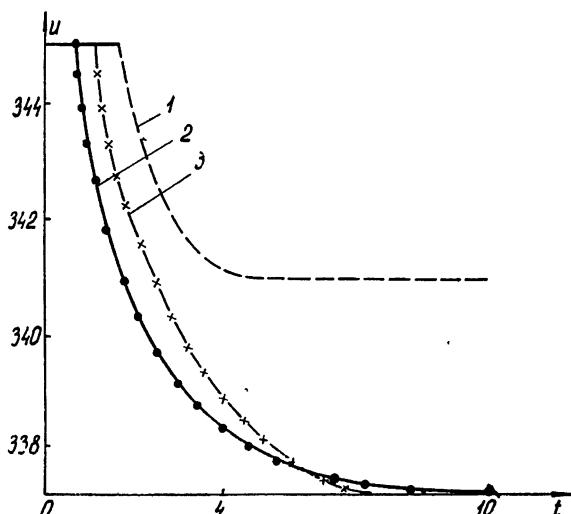


Рис. 5. Кривые: 1—первая итерация, 2—вторая итерация, 3—третья итерация.

результаты данной работы с результатами [7].) В нашем случае итерационный процесс практически сошелся за 4 итерации. В то же время градиентная процедура в [7] потребовала 49 итераций. Задача, кроме того, решалась при наличии ограничения  $337 \leq u \leq 345$ . В данном случае процесс сошелся за 3 итерации (рис. 5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Kalaba, J. Math. Mech., 8, 519 (1959).
2. Л. С. Понtryagin, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мышленко, Математическая теория оптимальных процессов, Гостехиздат, М., 1961.
3. Дж. Лейтман (под редакцией), Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, изд. Наука, М., 1965.
4. Н. И. Моисеев, Ж. вычислительной математики и математической физики, 4, № 3, 485 (1964).
5. В. Е. Шаманский, Методы численного решения краевых задач, ч. 1, изд. АН УССР, Киев, 1963.
6. И. Б. Вапнярский, Ж. вычислительной математики и математической физики, 7, № 2, 259 (1967).
7. E. S. Lee, Ind. and Eng. Chem., 3, № 4, 373 (1964).

Научно-исследовательский физико-химический институт

Поступила в редакцию  
10 июля 1967 г.

#### ON APPLICATION OF QUASILINEARISATION METHOD FOR OPTIMAL SYSTEMS DESIGN

G. M. Ostrovski, V. V. Borisov, Yoo. M. Volin, L. N. Shoomoonov

Quasilinearisation method [1] for solving two point boundary problems to which some problems of complex systems optimization could be converted using maximum principle is generalised for the case when arbitrary limitations are imposed on the controls.

УДК 621.391.193

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОДИРОВАНИЯ БОЛЬШИХ МАССИВОВ ИНФОРМАЦИИ В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКИ\*

*Ю. И. Неймарк, Ю. Г. Васин*

Предлагается алгоритм кодирования электродиаграмм, использующий процедуру отыскания ортонормированных базисов линейных подпространств, все лучше и лучше аппроксимирующих заданное множество исходных данных. Приводятся экспериментальные результаты кодирования электродиаграмм.

В задачах медицинской диагностики очень большую роль играет кодирование признаков образов. Когда число признаков значительно (несколько сот и более), это, пожалуй, наиболее трудная и ответственная часть в решении задачи классификации. Обычно кодирование признаков основывается на опыте и интуиции человека. Однако в случае невыясняемости или сложности связей объекта с регистрируемыми признаками, как это имеет место, например, для электрокардиограмм и энцефалограмм, опыт и интуиция человека оказываются недостаточными. Вместе с тем, если кодирование такого рода информации (непрерывных кривых) основывать на теореме Котельникова-Шеннона, то количество признаков может достигнуть нескольких тысяч, и на их базе построение алгоритма классификации становится затруднительным. В связи с этим возникает необходимость в некоторой предварительной обработке исходной информации об объекте, имеющей целью по возможности большее сокращение ее объема. Применительно к непрерывным кривым такая предварительная обработка неоднократно проводилась и состояла в разложении этих кривых по тем или иным системам базисных функций (гармонические функции, полиномы Лагерра, ортогональные экспоненты и др.). Однако в силу «неприспособленности» используемых ортогональных систем функций эти методы часто приводили к неудовлетворительным результатам. Так, при разложении ЭКГ по гармоническим функциям для получения 4—5% точности требуется использование примерно ста первых гармоник, что соответствует кодированию ЭКГ с помощью двух сотен чисел.

В настоящей работе предлагается алгоритм кодирования непрерывных кривых или других больших массивов информации, в котором разложение происходит по системе функций, приспособленной к данному случаю, и не основывается на использовании опыта и интуиции человека.

### 1. АЛГОРИТМ КОДИРОВАНИЯ

Рассмотрение ряда практических задач распознавания показало, что множества точек в пространстве признаков, соответствующие тому или иному образу, как правило, «лежат» в подпространствах значитель-

\* Доклад на Межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967.

но меньшей размерности. Это обстоятельство наталкивает на мысль о построении линейного подпространства небольшой размерности, среднеквадратичное расстояние которого от всех точек обучающей последовательности минимально, и последующего использования ортонормированных векторов этого подпространства в качестве базисных функций. Решение этой задачи, как известно, приводится к отысканию собственных чисел и векторов так называемой матрицы ковариации обучающей последовательности. При этом наименьшее собственное число определяет точность приближения, а собственные векторы дают базис разложения. Проведение соответствующего эксперимента на ЭВМ в случае 36-мерного исходного пространства признаков привело к хорошим результатам. Однако построение аналогичных программ для больших размерностей пространства признаков (более 100) едва ли возможно в связи с резко возрастающими трудностями решения задачи о собственных значениях и векторах для матриц такого большого порядка. В связи с этим были предприняты попытки упрощения процедур построения аппроксимирующего подпространства.

Ниже описывается предлагаемая упрощенная процедура и приводятся результаты ее использования для кодирования электрокардиограмм. В отвлеченной форме этой процедурой, реализованной соответствующей программой для ЭВМ типа М-20, решается следующая задача.

Задано множество  $X$  точек  $x^1, x^2, \dots, x^N$   $n$ -мерного пространства  $R_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Требуется построить подпространство  $R_m$  меньшей размерности, чем  $R_n$  (т. е. указать его ортонормированный базис), в котором с заданной степенью точности в смысле метрики  $\rho$ , определенной по нашему желанию в пространстве  $R_n$ , лежали бы все точки множества  $X$ .

Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм\*.

1) Находим точку  $x^*$  множества  $X$ :

$$x^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x^j.$$

2) Находим вектор

$$U_1 = (x^{s_1} - x^*) \| x^{s_1} - x^* \|^{-1},$$

где точка  $x^{s_1}$  множества  $X$  выбрана так, что

$$\lambda_1 = \| x^{s_1} - x^* \| = \max_{j=1, 2, \dots, N} \| x^j - x^* \|.$$

3) Находим вектор

$$U_2 = \{x^{s_2} - x^* - (x^{s_1} - x^*, U_1) U_1\} \| x^{s_2} - x^* - (x^{s_1} - x^*, U_1) U_1 \|^{-1},$$

где точка  $x^{s_2}$  множества  $X$  выбрана так, что

$$\lambda_2 = \| x^{s_2} - x^* - (x^{s_1} - x^*, U_1) U_1 \| = \max \| x^j - x^* - (x^{s_1} - x^*, U_1) U_1 \|.$$

\* Предварительные результаты использования описываемого ниже алгоритма кодирования изложены в обзоре [3].

4) После того, как найдены векторы  $U_1, U_2, \dots, U_p$ , находим вектор

$$U_{p+1} = \left\{ x^{s_{p+1}} - x^* - \sum_{i=1}^p (x^{s_{p+1}} - x^*, U_i) U_i \right\} \times \\ \times \left\| x^{s_{p+1}} - x^* - \sum_{i=1}^p (x^{s_{p+1}} - x^*, U_i) U_i \right\|^{-1},$$

где точка  $x^{s_{p+1}}$  выбрана так, что

$$\lambda_{p+1} = \left\| x^{s_{p+1}} - x^* - \sum_{i=1}^p (x^{s_{p+1}} - x^*, U_i) U_i \right\| = \\ = \max_j \left\| x^j - x^* - \sum_{i=1}^p (x^j - x^*, U_i) U_i \right\|.$$

5) Процесс отыскания векторов  $U_1, U_2, \dots$ , заканчивается, как только последняя из находимых величин  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  оказывается меньше заданной точности приближения  $\delta$ .

В программе для ЭВМ типа М-20, реализующей описанный алгоритм на печать, выдаются компоненты векторов  $x^*, U_1, U_2, \dots$  и величины  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

После того, как найдены векторы  $x^*, U_1, U_2, \dots, U_m$ , где  $m$  выбрано так, что  $\lambda_{m-1} > \delta \geq \lambda_m$ , точка  $x$  кодируется  $m$  числами

$$y_1 = (x - x^*, U_1), \quad y_2 = (x - x^*, U_2), \dots, \quad y_m = (x - x^*, U_m).$$

Любая точка  $x \in X$  по ее коду  $y_1, y_2, \dots, y_m$  может быть восстановлена с ошибкой, не большей чем  $\delta$ .

Прежде чем перейти к доказательству этого утверждения, уточним используемые в алгоритме понятия расстояния, скалярного произведения и нормы. Определения расстояния, скалярного произведения и нормы предполагаются связанными между собой следующими соотношениями:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)(x - y)}, \quad \|x\| = \sqrt{xx}.$$

Определения скалярного произведения и тем самым расстояния и нормы зависят от произвольной симметричной положительной матрицы  $A$ , выбор которой может определяться конкретными условиями задачи. Коль скоро такая матрица  $A$  порядка  $n$  с элементами  $a_{ij}$  выбрана, скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1, j=1}^{i=n, j=n} a_{ij} x_i y_j.$$

Из описания алгоритма непосредственно следует, что находимые базисные векторы  $U_1, U_2, \dots, U_m$  образуют ортонормированную систему, поскольку они получены с помощью известного процесса ортогонализации из векторов  $x^{s_1} - x^*, x^{s_2} - x^*, \dots, x^{s_m} - x^*$ . Так как векторы  $U_1, U_2, \dots, U_m$  образуют ортонормированный базис, то в качестве приближения точки  $x$  по коду  $y_1, y_2, \dots, y_m$  естественно взять точку

$$\tilde{x} = x^* + y_1 U_1 + y_2 U_2 + \dots + y_m U_m.$$

подпространства  $R_m \subset R_n$ .

Ошибка приближения при этом равна

$$\|x - \tilde{x}\| = \|x - x^* - y_1 U_1 - \dots - y_m U_m\| = \\ = \|x - x^* - \sum_{i=1}^m (x - x^*, U_i) U_i\|.$$

и согласно правилу остановки не превосходит величину  $\lambda_{m+1} < \delta$ , что и требовалось. Геометрически это означает, что все точки множества  $X$  удалены от подпространства  $R_m$  (гиперплоскости размерности  $m$ , проходящей через точку  $x^*$ ) на расстояние, не превосходящее величину  $\lambda_{m+1} \leq \delta$ .

В простейшем случае, когда в качестве матрицы  $A$  выбирается единичная матрица, ошибка декодирования каждой из компонент вектора  $x$  по коду  $y_1, y_2, \dots, y_m$  не превосходит  $\lambda_{m+1} \leq \delta$ , точнее,

$$\|x - \tilde{x}\|^2 = \sum (x_i - \tilde{x}_i)^2 \leq \lambda_{m+1}^2 \leq \delta^2.$$

## 2. КОДИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММ

Описанный алгоритм был применен к кодированию электрокардиограмм. В качестве метрики в исходном пространстве  $R_{400}$ , представляющем собой 400-мерное пространство, по осям которого отложены ординаты ЭКГ в 400 точках, было принято обычное евклидово расстояние. Множество  $X$  состояло из 600 произвольно выбранных ЭКГ.

После применения вышеизложенного алгоритма было получено подпространство размерности  $m = 25$ , при этом точность в заданной метрике составила 2 %. На рис. 1 приведен качественный вид 12 первых ортов нового подпространства. При меньшей размерности подпространства порядка 15 — 20 точность достигает 3 %.

Затем были взяты новые ЭКГ (не участвующие в обучающей выборке) и разложены по полученному базису. Результаты представлены

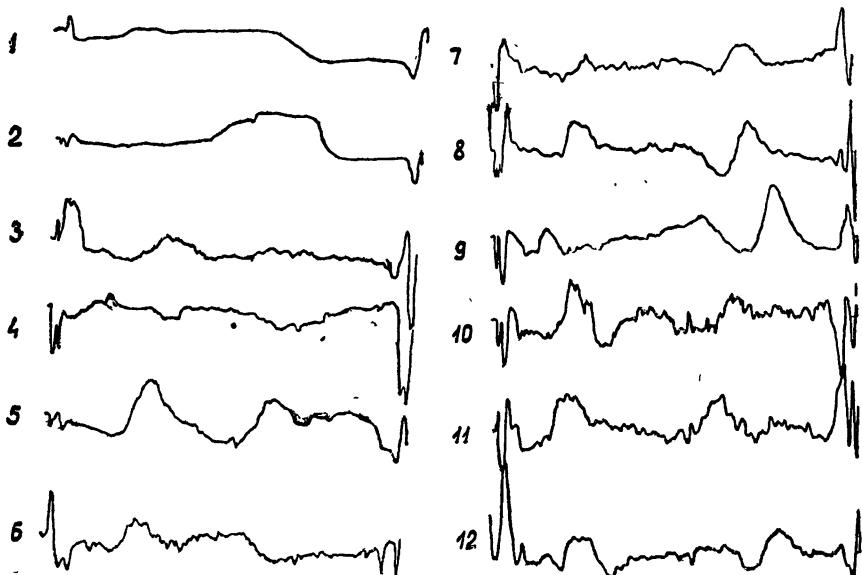


Рис. 1.

на рис. 2. Верхние кривые ( $f_p$ ) представляют собой типичные ЭКГ, которые подвергались разложению. В середине изображена покоординатная ошибка отклонения  $f_{np}$  приближенной ЭКГ от реальной:

$$\varepsilon_{\text{ош}} = f_p - f_{np}$$

Нижние кривые рис. 2 показывают приближенные ЭКГ, полученные на основе 20 базисных кривых. Все графики на рис. 2 выполнены в одном масштабе.

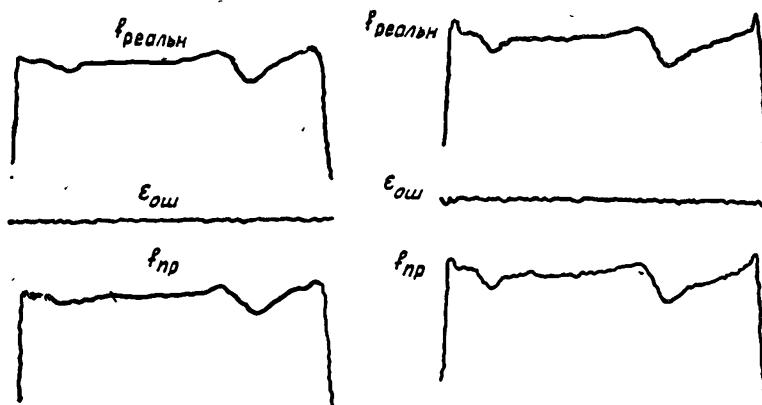


Рис. 2.

Заметим, что задаче кодирования ЭКГ с помощью разложения по тем или иным функциям посвящено много работ. Среди них можно отметить работу Юнга и Хайгина [1] по разложению ЭКГ, в которой использованы ортонормированные экспоненты, и работу Шера, Юнга, Мередита [2], где ЭКГ разлагается на основе  $n$ -функциональных систем.

Укажем, что при представлении ЭКГ по алгоритму Юнга и Хайгина требуется 12 коэффициентов разложения для представления ЭКГ без «р-зубца» с точностью 5% по энергии. Сравнение этого результата с кодировкой по вновь предложенному способу показывает, что новый алгоритм дает лучший результат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T. Y. Young, W. H. Huggins, Proc. Nat. Electr. Conference, 18, № 8, 9, 10 (1962).
2. A. M. Scher, A. C. Young, N. M. Meredith, Circulation Research, 8, 519 (1960).
3. Ю. И. Неймарк, З. С. Баталов, Уч. зап. НИИ ПМК, Горький, 1967.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
28 июня 1967 г.

#### ON ONE METHOD FOR LARGE INFORMATION ARRAYS CODING IN CONNECTION WITH MEDICAL DIAGNOSTICS PROBLEMS

Yoo. I. Neimark, Yoo. G. Vasin

An algorithm for electrocardiograms coding using a procedure for orthonormal basis set derivation in linear subspaces for better and better approximation of the given set with original data is presented in this paper. Some experimental results of electrocardiograms coding are provided.

УДК 621.3.061

## РЕАЛИЗАЦИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ $\pi$ СХЕМАМИ БЕЗ ПОВЫШЕНИЯ СТЕПЕНИ

*K. A. Яблонская*

Рассмотрены различные способы построения полной области реализуемости дробно-рациональных функций второй степени в классе  $\pi RLC$  схем без повышения степени. Устанавливается, что искомая область является выпуклой с кусочно-линейной границей.

Рассмотрим двухполюсные пассивные  $\pi$  схемы, содержащие емкости, индуктивности и сопротивления и не содержащие трансформаторы.

Каждой такой схеме соответствует импедансная характеристика, которая аналитически выражается в виде дробно-рациональной функции  $n$ -й степени,

$$Z(p) = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}. \quad (1)$$

Однако не каждая дробно-рациональная функция является импедансной характеристикой некоторой схемы из рассматриваемого класса. Возникает вопрос о нахождении условий, при которых  $Z(p)$  реализуема пассивной  $\pi$  схемой из  $RLC$  элементов, и о разработке методов синтеза.

В 1931 г. Брюне [1] найдены необходимые и достаточные условия реализуемости  $Z(p)$  пассивной схемой: 1)  $Z(p)$ —рациональная функция, 2)  $Z(p)$ —действительная функция, если переменная действительна, и 3) действительная часть  $Z(p)$  положительна, если действительная часть переменной положительна. Брюне дал правила реализации положительной действительной рациональной функции  $Z$ , но в классе схем, содержащих трансформаторы.

В 1949 г. Ботт и Даффин [2] показали, что любую положительную действительную рациональную функцию можно реализовать без использования трансформаторов.

В последующих работах [3, 4] уточняются свойства положительной действительной рациональной функции, улучшаются структуры схем и методы синтеза. Существенной особенностью этих методов является то, что в них схема, реализующая  $Z(p)$ , содержит подсхемы, импедансная функция которых может иметь степень выше степени  $Z(p)$ . Так, например, метод Ботта и Даффина для реализации импедансной функции второй степени  $Z(p) = (6p^2 + p + 3)/(3p^2 + 9p + 6)$  дает схему (рис. 1), содержащую подсхемы, заключенные между узлами  $(ab)$  и  $(oc)$ , имеющие импедансные функции третьей степени

$$Z_{ab} = \frac{3p^2 + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}, \quad Z_{bc} = \frac{6p^3 + 10p^2 + 6p}{3p^3 + 18p^2 + 33p + 18}.$$

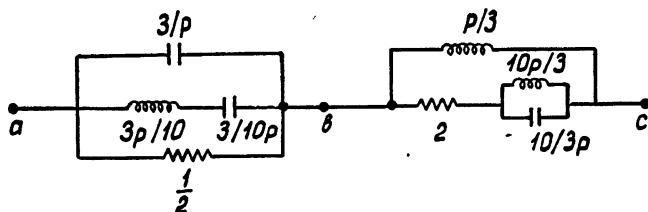


Рис. 1.

В дальнейшей задаче синтеза — определении минимальных схем, приходится перебирать различные варианты схем, реализующих данную импедансную функцию, т. е. просматривать подсхемы, импедансные функции которых имеют степень выше исходной.

Более внимательный анализ показывает, что для построения минимальной схемы с импедансной характеристикой  $n$ -й степени необходимо использовать вырожденные схемы, импедансные характеристики которых имеют степень выше  $n$ . Так как число вырожденных схем сильно увеличивается с ростом  $n$ , проблема минимизации наталкивается на значительные трудности.

1. В виду изложенного естественно попытаться упростить задачу минимизации.

Будем говорить, что схема  $\Sigma$  реализует импедансную функцию  $Z(p)$  без повышения степени, если, каковы бы ни были подсхемы  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , схемы  $\Sigma$  такие, что  $\Sigma_1$  является подсхемой  $\Sigma_2$ , импедансная функция схемы  $\Sigma_1$  имеет степень не выше степени импедансной функции схемы  $\Sigma_2$ .

Возникает необходимость найти условия реализации функции  $Z(p)$  без повышения степеней, разработать методы синтеза.

В данной работе рассматривается задача реализации импедансной функции в классе  $\pi$  схем, состоящих из элементов трех основных типов: сопротивлений, индуктивностей, емкостей. Эта задача решается для относительно простого случая — импедансной функции второй степени — и имеет главным образом методический интерес.

Рассмотрим условия реализуемости импедансной функции (1) пассивным  $\pi$  двухполюсником из  $RLC$  элементов для простейших случаев;  $Z$  — несократимая дробь, т. е. результатант полиномов числителя и знаменателя не равен нулю. Без ограничения общности можно считать, что старший коэффициент числителя неотрицателен.

1)  $n=0$ ,  $Z=\gamma C^{-1}$  реализуема при  $\gamma \geq 0$ ,  $C > 0$  сопротивлением  $P = \gamma C^{-1}$ ;

2)  $n=1$ ,  $Z=(\beta p + \gamma)/(Bp + C)$  реализуема при любых неотрицательных коэффициентах; имеем два случая: а)  $\Delta = \gamma B - \beta C > 0$ , при этом\*  $Z = \frac{1}{Cp} \oplus r_2 + r_1$ , где  $C = B^2 \Delta^{-1}$ ,  $r_1 = \beta B^{-1}$ ,  $r_2 = \Delta (BC)^{-1}$ ;

б)  $\Delta = \gamma B - \beta C < 0$ , при этом  $Z = Lp \oplus r_2 + r_1$  где  $L = -\Delta C^{-2}$ ,  $r_1 = \gamma C^{-1}$ ,  $r_2 = -\Delta (BC)^{-1}$ ;

3)  $n = 2$ ,

$$Z(p) = (\alpha p^2 + \beta p + \gamma)/(A p^2 + B p + C). \quad (2)$$

\* От этой записи легко перейти к самой схеме, если учесть, что знак  $+$  соответствует последовательному, а знак  $\oplus$  — параллельному соединению элементов [6].

Задача синтеза в этом случае может быть решена полным перебором. Далее будет показано, что можно ограничиться перебором сетей, имеющих не более семи элементов.

Упорядочив сети по числу элементов, произведем построение всех схем на базе этих сетей и отберем из них те, которые реализуют данную функцию. Каждой схеме соответствует некоторая область реализуемости в пространстве коэффициентов  $Z(p)$ .

Основной вклад в область реализуемости вносят схемы из пяти элементов, что соответствует числу независимых коэффициентов  $Z(p)$ . Как показано в [5], число всевозможных двухполюсных  $\pi$  сетей из пяти элементов равно 24. Подставляя в пятиреберную сеть два реактивных элемента и три сопротивления, получим 40 типов схем. Следовательно, всего получим 960 различных схем. Далее, используем два правила преобразования схем — объединение элементов одного вида, образующих последовательное или параллельное соединение, а также замену линейной подсхемы на эквивалентную линейную подсхему: схемы\*  $Z = 1/Cp \oplus r_2 + r_1$  на схему  $(1/Cp + r_2) \oplus r_1$ , схемы  $Z = Lp \oplus r_2 + r_1$  на схему  $(Lp + r_2) \oplus r_1$ .

Для части схем удается показать, что они приводятся к эквивалентным схемам с меньшим числом элементов, а также установить эквивалентность некоторых схем. Кроме того, существуют схемы

$$\begin{aligned} Z_a &= \left( \frac{1}{Cp} \oplus Lp + r_1 \right) \oplus r_2 + r_3, \\ Z_b &= (L_1 p + r_1) \oplus (L_2 p + r_2) + r_3, \\ Z_c &= \left( \frac{1}{C_1 p} + r_1 \right) \oplus \left( \frac{1}{C_2 p} + r_2 \right) + r_3, \\ Z_g &= \left( \frac{1}{Cp} + Lp + r_1 \right) \oplus r_2 + r_3, \end{aligned}$$

а также им двойственные, для которых эквивалентность схемам из четырех элементов устанавливается непосредственным расчетом.

В результате такого анализа можно выделить 24 схемы, такие, что любая другая схема оказывается эквивалентной одной из них или является ее частным случаем (таблица 1). Так, схемы с импедансными характеристиками  $Z_a$ ,  $Z_b$ ,  $Z_c$ ,  $Z_g$  являются частными случаями соответственно схем IV, I, II, VI таблицы 1.

Для каждой из двадцати четырех схем найдены условия, налагаемые на коэффициенты функции (2), при которых возможна данная схемная реализация. Эти условия записываются более просто, если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \beta A - \alpha B, & \Delta_2 &= \gamma A - \alpha C, & \Delta_3 &= \gamma B - \beta C, \\ \kappa &= \Delta_2^2 - \Delta_1 \Delta_3, & D &= B^2 - 4AC, & \delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Область реализации находится в пространстве шести измерений в соответствии с коэффициентами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Для наглядности рассмотрим сечение этой области при фиксированных коэффициентах

\* Поскольку существует взаимно-однозначное соответствие между  $\pi$  схемами из  $RLC$  элементов и формулами, выражающими импедансную функцию  $\pi$  схемы через импедансы элементов, используя операции обычного  $+$  и гармонического  $\oplus$  сложения, в дальнейшем будут употребляться формулы вместо графического изображения схем.

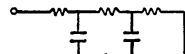
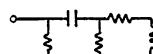
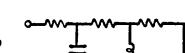
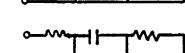
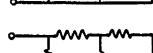
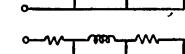
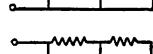
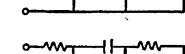
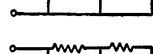
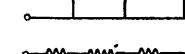
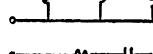
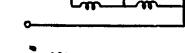
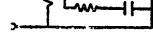
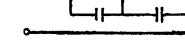
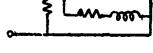
I	$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 > 0, \alpha > 0$	
II	$\Delta_2 > 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$	
III	$\Delta_2 < 0, \alpha > 0, B\Delta_3 < C\Delta_2$		$\Delta_2 > 0, \alpha > 0, B\Delta_3 > C\Delta_2$	
IV	$\Delta_2 > 0, \alpha > 0, B\Delta_1 > A\Delta_2$		$\Delta_2 < 0, \alpha > 0, B\Delta_1 < A\Delta_2$	
V	$\Delta_2 < 0, \alpha > 0, \beta\Delta_1 < \alpha\Delta_2$		$\Delta_2 > 0, \alpha > 0, \beta\Delta_1 > \alpha\Delta_2$	
VI	$\Delta_2 > 0, \alpha > 0, \beta\Delta_3 > C\Delta_2$		$\Delta_2 < 0, \alpha > 0, \beta\Delta_3 < C\Delta_2$	
	$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 > 0, \alpha < 0$	
	$\Delta_2 > 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$	
	$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 > 0, \alpha > 0$	
	$\Delta_2 > 0, \alpha < 0$		$\Delta_2 < 0, \alpha < 0$	
	$0 < \alpha < \alpha \gamma D$		$0 < \alpha < \alpha C \delta$	

Таблица 1.

$A$ ,  $B$  и  $C$ . Так число независимых коэффициентов равно пяти, имеем плоскую область. Вместо переменных  $\alpha/\beta$  и  $\gamma/\beta$  удобно рассмотреть переменные  $\Delta_1/\beta$  и  $\Delta_3/\beta$ , линейно выражающиеся через исходные.

На рис. 2 показана суммарная область реализуемости двадцатью четырьмя схемами из пяти элементов. Среди этих схем можно указать шесть, суммарная область реализуемости которых равна полной области реализуемости  $Z(p)$  пятиэлементными схемами. Это схемы I—VI в таблице 1, условия реализации для них следующие:

I	$\Delta_2 < 0,$	$\alpha < 0;$
II	$\Delta_2 > 0,$	$\alpha < 0;$
III	$\Delta_2 < 0,$	$\alpha > 0, B\Delta_3 < C\Delta_2;$
IV	$\Delta_2 > 0,$	$\alpha > 0 B\Delta_1 > A\Delta_2;$
V	$\Delta_2 < 0,$	$\alpha > 0 \beta\Delta_1 < \alpha\Delta_2;$
VI	$\Delta_2 > 0,$	$\alpha > 0 \beta\Delta_3 > \gamma\Delta_2.$

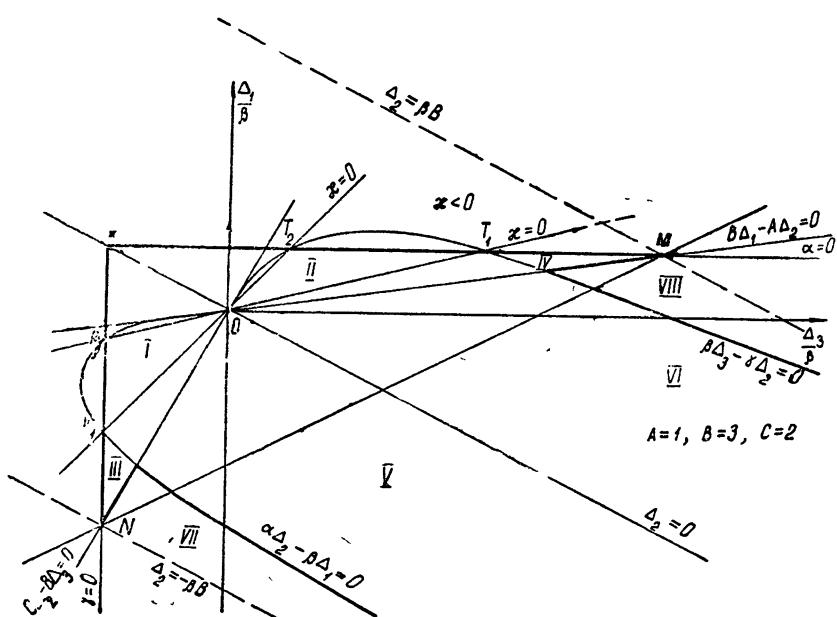


Рис. 2.

На рис. 3 указано число элементов минимальных реализаций для различных изображений  $Z(p)$ .

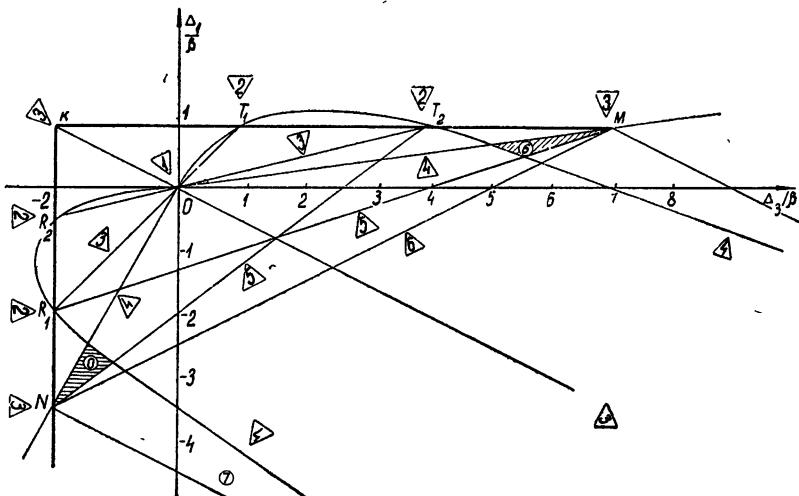


Рис. 3.

**Теорема 1.** Пусть функция (1) реализуема некоторой двухполюсной  $\pi$ -схемой из  $RLC$  элементов без повышения степени. Тогда функция  $kZ(p)$  также реализуема в указанном классе схем, причем с тем же числом элементов.

**Доказательство (по индукции).** Рассмотрим схему, содержащую один элемент. Имеем три случая:  $Z' = R$ ,  $Z' = Lp$ ,  $Z' = 1/Cp$ . Для любого  $k > 0$  функции  $kR$ ,  $kLp$ ,  $k/Cp$  реализуются соответственно сопротивлением  $kR$ , индуктивностью  $kL$ , емкостью  $C/k$  без повышения степени; теорема справедлива.

Возьмем  $\pi$  схему не более, чем из  $s$  элементов, реализующую импедансную функцию  $Z^s(p)$  без повышения степени. Предположим, что и функция  $kZ^s$  ( $k > 0$ ) также реализуема  $\pi$  двухполюсником из  $RLC$  элементов без повышения степени. Рассмотрим  $\pi$  схему из  $s+1$  элементов  $RLC$  с импедансной функцией  $Z^{s+1}$ . Докажем, что функция  $kZ^{s+1}$  ( $k > 0$ ) также реализуема в указанном классе схем с тем же числом элементов.

Имеем два случая:

$$\begin{aligned} kZ^{s+1} &= k(Z^{s_1} + Z^{s_2}) = kZ^{s_1} + kZ^{s_2}, \\ kZ^{s+1} &= k(Z^{s_1} \oplus Z^{s_2}) = kZ^{s_1} \oplus kZ^{s_2}, \end{aligned}$$

где  $s_1 + s_2 = s+1$  ( $s_1 \leq s$ ,  $s_2 \leq s$ ).

По предположению, функции  $kZ^{s_1}$  и  $kZ^{s_2}$  реализуются соответственно схемам из  $s_1$  и  $s_2$  элементов без повышения степени. Следовательно, функция  $kZ^{s+1}$  реализуется без повышения степени  $\pi$  двухполюсником из  $s+1$  элементов  $RLC$ , так как  $s_1 + s_2 = s+1$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Область реализуемости функции (1) двухполюсными  $\pi$  схемами из  $RLC$  элементов без повышения степени является выпуклой в любом сечении с фиксированным  $b_0, b_1, \dots, b_n$ .

**Доказательство.** В пространстве коэффициентов  $\{a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n\}$  рассмотрим подпространство области реализуемости функции  $Z(p)$  при любых фиксированных коэффициентах  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Возьмем две произвольных точки этого подпространства с коэффициентами  $a'_0, a'_1, \dots, a'_n$  и  $a''_0, a''_1, \dots, a''_n$  и соединим их отрезком прямой. Любая точка на этом отрезке с координатами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  удовлетворяет условию

$$\frac{a_0 - a'_0}{a''_0 - a_0} = \frac{a_1 - a'_1}{a''_1 - a_1} = \dots = \frac{a_n - a'_n}{a''_n - a_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq \infty).$$

Следовательно,  $a_j = \frac{\rho}{\rho + 1} a''_j + \frac{1}{\rho + 1} a'_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Точка с координатами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  соответствует импедансной функции, которая может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} Z(p) &= \left[ \left( \frac{\rho}{\rho + 1} a''_0 + \frac{1}{\rho + 1} a'_0 \right) p^n + \dots + \left( \frac{\rho}{\rho + 1} a''_n + \frac{1}{\rho + 1} a'_n \right) \right] \times \\ &\times (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n)^{-1} = \frac{\rho}{\rho + 1} \frac{a''_0 p^n + \dots + a''_n}{b_0 p^n + \dots + b_n} + \\ &+ \frac{1}{\rho + 1} \frac{a'_0 p^n + \dots + a'_n}{b_0 p^n + \dots + b_n} = \frac{\rho}{\rho + 1} Z''(p) + \frac{1}{\rho + 1} Z'(p). \end{aligned}$$

Функции  $\frac{\rho}{\rho + 1} Z''(p)$  и  $\frac{1}{\rho + 1} Z'(p)$  реализуемы по теореме 1, следовательно,  $Z(p)$  также реализуема.

Таким образом, любая точка отрезка, соединяющего две произвольные реализуемые точки в подпространстве коэффициентов с фиксированными коэффициентами  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , также принадлежит области реализуемости.

Рассмотрим суммарную область синтезируемости дробно-рациональной функции второй степени пятиэлементными  $\pi$  схемами из  $RLC$  элементов.

Как видно из рис. 2, эта область невыпуклая и определяется следующим условием:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\geq 0 \wedge B\Delta_1 > A\Delta_2 \vee \beta\Delta_3 > \gamma\Delta_2 \vee \Delta_2 < \\ &< 0 \wedge (B\Delta_3 < C\Delta_2 \vee \beta\Delta_1 < \alpha\Delta_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Построим ее выпуклую оболочку. Из точки  $M$ , в которой  $\alpha = 0$   $B\Delta_1 - A\Delta_2 = 0$ , проведем касательную к гиперболе, удовлетворяющей уравнению  $\beta\Delta_3 - \gamma\Delta_2 = 0$ . Уравнение касательной  $\Delta_2 = \beta B$ , и, как несложно проверить, она является также асимптотой гиперболы. Из точки  $N$ , в которой  $\gamma = 0$  и  $C\Delta_2 - B\Delta_3 = 0$ , проведем касательную к гиперболе, удовлетворяющей уравнению  $\alpha\Delta_2 - \beta\Delta_1 = 0$ . Уравнение касательной  $\Delta_2 = -\beta B$ , это также асимптота гиперболы.

Полученная таким образом область удовлетворяет условию  $|\Delta_2| \leq \beta B$  и по теореме 2 должна быть областью реализуемости без повышения степени функции (2).

Обозначим область, удовлетворяющую условию  $0 < \Delta_2 \leq \beta B \wedge \beta\Delta_3 < \gamma\Delta_2 \wedge B\Delta_1 < A\Delta_2$ , цифрой VIII, а область, удовлетворяющую условию  $-\beta B \leq \Delta_2 < 0 \wedge \beta\Delta_1 > \alpha\Delta_2 \wedge B\Delta_3 > C\Delta_2$ , цифрой VII (рис. 2) и определим, какие схемы реализуют  $Z(p)$  в областях VII и VIII.

Возьмем в области VIII произвольную точку  $Q$  и проведем через нее и точку  $M$  прямую до пересечения с гиперболой  $\beta\Delta_3 - \gamma\Delta_2 = 0$  в некоторой точке  $M'$ . Точка  $M$  соответствует «двойной вырожденной» функция ( $\alpha = 0$  и  $B\Delta_1 - A\Delta_2 = 0$ ), реализуемая схемой

$$Z_M = (Lp + R) \oplus \frac{1}{Cp}. \quad (5)$$

Точке  $M'$  соответствует функция с одним вырождением  $\beta\Delta_3 - \gamma\Delta_2 = 0$ , реализуемая схемой

$$Z_{M'} = \left( Lp \oplus R_1 + \frac{1}{Cp} \right) \oplus R_2. \quad (6)$$

На основании теоремы 2 заключаем, что любая точка области VIII допускает схемную реализацию

$$Z(p) = (L_1 p + R_1) \oplus \frac{1}{C_1 p} + \left( \frac{1}{C_2 p} + L_2 p \oplus R_2 \right) \oplus R_3. \quad (7)$$

Действительно,  $Z(p) = \frac{\rho}{\rho + 1} Z_{M'} + \frac{1}{\rho + 1} Z_M$ , где  $\rho = \frac{\alpha - \alpha_M}{\alpha_M - \alpha} = \frac{\gamma - \gamma_M}{\gamma_M - \gamma} = \frac{\beta - \beta_M}{\beta_M - \beta}$ . Функции (5) и (6) реализуются соответственно схемами из

трех и четырех элементов (см. (5) и (6)), функции  $\frac{1}{\rho + 1} Z_M$  и  $\frac{\rho}{\rho + 1} Z_{M'}$  по теореме 1 реализуются тем же числом элементов. Следовательно, функция  $Z(p)$  в области VIII реализуется схемой из семи элементов.

Аналогичное рассуждение для области VII дает схемную реализацию

$$Z(p) = \left( \frac{1}{C_1 p} + R_1 \right) \oplus L_1 p + \left( L_2 p + \frac{1}{C_2 p} \oplus R_2 \right) \oplus R_3. \quad (8)$$

В случае, когда точка  $Q$  принадлежит границе области VIII, на которой  $\Delta_2 = \beta B$ , или границе области VII, где  $\Delta_2 = -\beta B$ , возможна реализация схемами из шести элементов:

$$Z(p) = (L_1 p + R_1) \oplus \frac{1}{C_1 p} + \left( \frac{1}{C_2 p} + L_2 p \right) \oplus R_2, \quad (9)$$

$$Z(p) = \left( \frac{1}{C_1 p} + R_1 \right) \oplus L_1 p + \left( \frac{1}{C_2 p} + L_2 p \right) \oplus R_2. \quad (10)$$

Реализация с помощью схемы из шести элементов возможна и для точек из областей VII и VIII, лежащих на прямой  $MN$  (рис. 3),

$$Z(p) = (L_1 p + R_1) \oplus \frac{1}{C_1 p} + \left( \frac{1}{C_2 p} + R_2 \right) \oplus L_2 p. \quad (11)$$

В части области VIII, заключенной между прямыми  $M0$  и  $MR_1$  (рис. 3), возможна реализация шестиэлементной схемой. Действительно, через любую точку этой подобласти и точку  $M$  можно провести прямую до пересечения с прямой  $R_{10}$ , (а для части точек и с прямой  $R_{20}$ ). В результате получим схему

$$Z(p) = (L_1 p + R_1) \oplus \frac{1}{C_1 p} + L_2 p \oplus R_2 + R_3. \quad (12)$$

В частности, если точка подобласти VIII лежит на прямой  $MR_1$  или  $MR_2$  возможна пятиэлементная реализация

$$Z(p) = (L_1 p + R_1) \oplus \frac{1}{C_1 p} + L_2 p \oplus R_2. \quad (13)$$

Аналогичное построение можно провести для подобласти области VII, заключенной между прямыми  $N0$  и  $NT_1$ .

Выясним, какова минимальная реализация для области VIII (VII).

*Теорема 3.* Минимальная реализация для точек области VIII, удовлетворяющей условию  $0 < \Delta_2 \leq \beta B \wedge \beta \Delta_3 < \gamma \Delta_2 \wedge B \Delta_1 < A \Delta_2$ , содержит: 1) пять элементов, если точка лежит на прямых  $MR_1$  и  $MR_2$ ; 2) шесть элементов, если точка лежит в подобласти между прямыми  $MR_1$  и  $M0$  вне  $MR_2$ , а также на границе  $\Delta_2 = \beta B$  или на прямой  $MN$ ; 3) семь элементов в остальных случаях.

*Доказательство.* Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть точка  $Q$  принадлежит области VIII и расположена вне прямой  $MN$  и вне замкнутой подобласти, ограниченной прямыми  $MR_1$  и  $M0$ . Было показано (7), что для точки  $Q$  возможна реализация схемой из семи элементов. Для доказательства теоремы остается лишь установить невозможность реализации шестиэлементной схемой. Предположим противное и рассмотрим минимальную схему, соответствующую точке  $Q$ . Эта схема является либо последовательным, либо параллельным соединением двух подсхем. Каждая из них содержит не более пяти элементов. Имеем два случая.

1) Минимальная схема — последовательное соединение двух подсхем. В этом случае функция  $Z(p)$ , соответствующая точке  $Q$ , разбивается на сумму двух дробей. Так как реализация осуществляется без повышения степени, то после приведения полученных дробей к общему знаменателю этот знаменатель должен равняться  $Ap^2 + Bp + C$ . Следовательно, каждое слагаемое может быть изображено точкой в плоскости, которой принадлежит точка  $Q$ . Обозначим эти точки  $Q'$  и  $Q''$ . Очевидно, точка  $Q$  будет расположена на отрезке прямой, соединяющем точки  $Q'$  и  $Q''$ . В силу предположения одна из точек, например  $Q'$ , расположена в области IV, а другая ( $Q''$ ), следовательно, в области VI (рис. 2).

Минимальная реализация осуществляется в том случае, когда точка  $Q'$  совпадает с точкой  $M$ , а  $Q''$  лежит на границе области VI. Но при этом схема содержит семь элементов. Мы пришли к противоречию.

2) Минимальная схема — параллельное соединение двух подсхем. В этом случае точка  $Q$  рассматривается в плоскости с фиксированными  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Можно проверить, что она будет лежать в области, аналогичной области VIII при тех же ограничениях, и дальнейшие рассуждения провести аналогично случаю 1).

Утверждения 1) и 2) теоремы легко доказываются подобным же образом.

Пусть  $Z(p) = R$  и  $Z(p) = \frac{a_1 p + b_1}{a_2 p + b_2}$ , где  $R, a_1, b_1, a_2, b_2 \geq 0$ .

*Лемма 1.* 1) Каковы бы ни были неотрицательные  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , для выражения

$$Z(p) = R \cdot \frac{\alpha_0 p^2 + \beta_0 p + \gamma_0}{a_0 p^2 + \beta_0 p + \gamma_0} \quad (14)$$

выполняется условие  $|\Delta_2| \leq \beta B$ .

2) Каковы бы ни были неотрицательные  $\alpha_0, \beta_0$ , для выражения

$$Z(p) = \frac{a_1 p + b_1}{a_2 p + b_2} \cdot \frac{\alpha_0 p + \beta_0}{\alpha_0 p + \beta_0} \quad (15)$$

выполняется условие (3)

$$|\Delta_2| \leq \beta B. \quad (16)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вторую часть утверждения леммы. После очевидных преобразований получим

$$Z(p) = \frac{a_1 \alpha_0 p + (a_1 \beta_0 + \alpha_0 b_1) p + \beta_0 b_1}{a_2 \alpha_0 p^2 + (a_2 \beta_0 + \alpha_0 b_2) p + \beta_0 b_2}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \alpha_1, & \beta &= a_1 \beta_0 + \alpha_0 b_1, & \gamma &= \beta_0 b_1, \\ A &= \alpha_0 \alpha_2, & B &= a_2 \beta_0 + \alpha_0 b_2, & C &= \beta_0 b_2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что неравенство (16) выполняется.

Первая часть леммы доказывается аналогично.

*Теорема 4.* Область реализуемости дробно-рациональной функции второй степени  $Z(p)$  π схемами без повышения степени удовлетворяет условию (16).

*Доказательство.* Обозначим область, удовлетворяющую условию (16), через  $G$ . Было показано, что область реализуемости  $Z(p)$  π схемами без повышения степени не меньше, чем  $G$ . Следовательно, для доказательства теоремы остается показать, что область реализуемости не больше  $G$ . Доказательство проведем индукцией по числу элементов.

Рассмотрим схемы из одного элемента. Если  $Z=R$ , то все формы задания импедансной функции охватываются выражением (14), а в случае, когда  $Z=1/Cp$  и  $Z=Lp$  — выражением (15). Как следует из леммы, для перечисленных одноэлементных схем теорема справедлива. Предположим, что для всех π схем, содержащих не более  $k$  элементов, область реализуемости не более  $G$ , и рассмотрим π схему  $O_1$ , содержащую  $k+1$  элементов. Схему  $O_1$  можно представить последовательным или параллельным соединением двух π схем  $O_{11}$  и  $O_{12}$ , каждая из которых содержит не более  $k$  элементов.

1) Схема  $O_1$  — последовательное соединение  $O_{11}$  и  $O_{12}$ . Следовательно,  $Z(p)=Z'+Z^2$ , где  $Z, Z'$  — импедансные функции схем  $O_{11}$ ,

$O_1$  и  $O_2$ . По предположению для  $Z'$  и  $Z^2$  условия теоремы справедливы. Так как синтез выполняется без повышения степени, при приведении импедансных функций  $Z'$  и  $Z^2$  к общему знаменателю этот знаменатель должен равняться  $Ap^2 + Bp + C$ . Таким образом (2),

$$Z(p) = \frac{\alpha_1 p^2 + \beta_1 p + \gamma_1}{Ap^2 + Bp + C} + \frac{\alpha_2 p^2 + \beta_2 p + \gamma_2}{Ap^2 + Bp + C},$$

причем

$$\Delta_2^{(1)} = |\gamma_1 A - \alpha_1 C| \leq \beta_1 B,$$

$$\Delta_2^{(2)} = |\gamma_2 A - \alpha_2 C| \leq \beta_2 B,$$

$$\Delta_2 = \gamma A - \alpha C = (\gamma_1 + \gamma_2) A - (\alpha_1 + \alpha_2) C = \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)}.$$

Следовательно,

$$|\Delta_2| = |\Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)}| < |\Delta_2^{(1)}| + |\Delta_2^{(2)}| \leq \beta_1 B + \beta_2 B = \beta B.$$

2) ОI—параллельное соединение ОI<sub>1</sub> и ОI<sub>2</sub>. В этом случае  $Y(p) = Y' + Y^2$ .

При синтезе без повышения степени после приведения имmittансных функций  $Y'$  и  $Y^2$  к общему знаменателю, который должен быть равен  $\alpha p^2 + \beta p + \gamma$ , получим

$$Y(p) = \frac{A_1 p^2 + B_1 p + C}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma} + \frac{A_2 p^2 + B_2 p + C_2}{\alpha p^2 + \beta p + \gamma}.$$

Так как для  $Y'$  и  $Y^2$  выполняются условия теоремы, аналогично (1) доказывается справедливость теоремы и для  $Y = Z^{-1}$ .

Следовательно, область реализуемости  $Z(p)$  π схемами без повышения степени определяется условием  $|\Delta_2| \leq \beta B$ . Теорема доказана.

Таким образом, найдена область реализуемости  $G$  функции  $Z(p)$  π схемами без повышения степени (рис. 2) и для каждой точки области  $G$  построены минимальные схемы (таблица 1, схемы 5—13). Минимальные реализации для граничных точек легко получить соответствующим предельным переходом.

Таким же образом, что и для дробно-рациональной функции второй степени, можно попытаться найти область реализуемости и для функций более высоких степеней. Однако уже для импедансной функции третьей степени соответствующий перебор схем и построение на его основе полной области реализуемости становится чрезвычайно трудоемким. Очевидна необходимость другого подхода к решению задачи.

2. Рассмотрим другой способ определения области реализуемости  $G$  для функции (2).

Область  $G$  ограничена отрезками прямых

$$\Delta_2 = \beta B, \quad \Delta_2 = -\beta B, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

и имеет угловые точки: точку  $M(\alpha = 0, B\Delta_1 = A\Delta_2)$ , точку  $N(\gamma = 0, C\Delta_2 = B\Delta_3)$ , точку  $K(\alpha = \gamma = 0)$ , точку  $L(\beta = 0, \Delta_2 = 0)$ .

Рассмотрим соответствующие этим точкам импедансные функции и схемы.

Точке  $M$  соответствует семейство функций, зависящих от параметра  $\rho$ :

$$Z_M = \frac{\rho p + \rho B A^{-1}}{A p^2 + B p + C}.$$

Действительно, при любом  $\rho > 0$  функция  $Z_M(p)$  удовлетворяет одновременно двум условиям:  $\alpha = 0$  и  $B\Delta_1 = A\Delta_2$ . Её соответствует трехэлементная схема

$$Z_M = \left( \frac{\rho}{C} p + \frac{\rho B}{AC} \right) \oplus \frac{\rho}{Ap}. \quad (17)$$

Точке  $N$  соответствует также семейство функций, зависящих от параметра  $\rho$ :

$$Z_N = \frac{\rho BC^{-1}p^2 + \rho p}{Ap^2 + Bp + C}.$$

При любом  $\rho > 0$  функция  $Z_N(p)$  удовлетворяет условиям  $\gamma = 0$ ,  $B\Delta_3 = C\Delta_2$ . Схема имеет следующий вид:

$$Z_N = \left( \frac{\rho}{Ap} + \frac{\rho B}{AC} \right) \oplus \frac{\rho}{C} p. \quad (18)$$

Точка  $K$  соответствует семейство функций

$$Z_K = \frac{\rho p}{Ap^2 + Bp + C}.$$

При любом  $\rho > 0$  функция  $Z_K(p)$  удовлетворяет условиям  $\alpha = 0$  и  $\gamma = 0$ . Схема, реализующая ее, будет

$$Z_K = \frac{\rho}{C} p \oplus \frac{\rho}{Ap} \oplus \frac{\rho}{B}. \quad (19)$$

Для бесконечно удаленной точки  $L$  семейство функций определяется выражением

$$Z_L = \frac{\rho p^2 + \rho CA^{-1}}{Ap^2 + Bp + C}.$$

При любом  $\rho > 0$  функция  $Z_L(p)$  удовлетворяет условиям  $\beta = 0$  и  $\Delta_2 = 0$  и реализуется схемой

$$Z_L = \left( \frac{\rho C}{ABp} + \frac{\rho}{B} p \right) \oplus \frac{\rho}{A}. \quad (20)$$

Область  $G$  прямой  $\Delta_2 = 0$  делится на треугольники  $MKL$  и  $NKL$ . Каждую точку области  $G$  можно, как следует из теоремы 2, реализовать схемой, являющейся последовательным соединением схем, соответствующих угловым точкам  $MKL$  и  $NKL$ , в зависимости от того, попадает ли точка в треугольник  $MKL$  или  $NKL$ .

Реализация  $MKL$  возможна при  $\Delta_2 > 0$ . В этом случае представим следующим образом:

$$Z = \frac{\frac{\Delta_2}{B} p + \frac{\Delta_2}{A}}{Ap^2 + Bp + C} + \frac{\left( \beta - \frac{\Delta_2}{B} \right) p}{Ap^2 + Bp + C} + \frac{\alpha p^2 + \frac{\alpha C}{A}}{Ap^2 + Bp + C}. \quad (21)$$

Схема, реализующая  $Z$  при  $\Delta_2 > 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} Z = & \left( \frac{\rho}{C} p + \frac{\rho_1 B}{AC} \right) \oplus \frac{\rho_1}{Ap} + \frac{\rho_2}{C} p \oplus \frac{\rho_2}{Ap} \oplus \frac{\rho_2}{B} + \\ & + \left( \frac{\rho_3 C}{ABp} + \frac{\rho_3}{B} p \right) \oplus \frac{\rho_3}{A}. \end{aligned} \quad (22)$$

Как следует из (21), параметры  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  равны

$$\rho_1 = \Delta_2 B^{-1}, \quad \rho_2 = \beta - \Delta_2 B^{-1}, \quad \rho_3 = \alpha.$$

Реализация  $NKL$  возможна при  $\Delta_2 < 0$ . Для  $Z(p)$  справедливо следующее разложение:

$$Z(p) = \frac{-\frac{\Delta_2}{C} p^2 - \frac{\Delta_2}{B} p}{Ap^2 + Bp + C} + \frac{\left(\beta + \frac{\Delta_2}{B}\right)p}{Ap^2 + Bp + C} + \frac{\frac{\gamma A}{C} p^2 + \gamma}{Ap^2 + Bp + C}. \quad (23)$$

Схема при  $\Delta_2 < 0$  имеет вид

$$Z(p) = \frac{\rho_1}{Ap} + \frac{\rho_1 B}{AC} \oplus \frac{\rho_1}{C} p + \frac{\rho_2}{C} p \oplus \frac{\rho_2}{Ap} \oplus \frac{\rho_3}{B} + \frac{\rho_3}{A} \left( \frac{\rho_3 C}{ABp} + \frac{\rho_3}{B} p \right) \oplus \frac{\rho_3}{A}, \quad (24)$$

где из (23) получаем  $\rho_1 = -\Delta_2 B^{-1}$ ,  $\rho_2 = \beta + \Delta_2 B^{-1}$ ,  $\rho_3 = \gamma A C^{-1}$ . Так как импедансные функции, связанные с точками  $M, N, K$  и  $L$ , имеют лишь три независимых коэффициента, назовем их дважды вырожденными функциями, а соответствующие им трехэлементные схемы — дважды вырожденными схемами.

Итак, чтобы реализовать дробно-рациональную функцию второй степени  $\pi$  двухполюсником из  $RLC$  элементов без повышения степени, достаточно двух схем из девяти элементов, причем одна схема реализует  $Z(p)$  при  $\Delta_2 > 0$ , а другая — при  $\Delta_2 < 0$ . (В случае  $\Delta_2 = 0$  эта функция реализуется шестиэлементной схемой, являющейся последовательным соединением схем в точках  $K$  и  $L$ ). Однако, уменьшив число схемных реализаций, мы увеличиваем сложность схем, т. е. не получаем минимальных по числу элементов реализаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. O. Brunne, J. Math. Phys., **10**, 191 (1931).
2. R. Bott, R. J. Duffin, J. Appl. Phys., **20**, 816 (1949).
3. R. H. Pantell, Proc. IRE, **42**, 861 (1954).
4. S Seshu, IRE Trans. on Circuit Theory, **CT-6**, 345 (1959).
5. К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М, 1963, стр. 47.
6. В. И. Шестаков, ЖТФ, **11**, 532 (1941); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 526 (1960).

Научно-исследовательский  
физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
3 июля 1967 г.

#### FRACTIONAL-RATIONAL FUNCTIONS OF SECOND DEGREE IMPLEMENTATION BY SCHEMES WITHOUT INCREASING A DEGREE

*K. A. Jablonskaya*

Different methods to construct the full domain of implementation for fractional-rational functions of second order in RLC class of schemes without increasing a degree are considered. It is found that the unknown domain is convex and with piece-wise boundary.

УДК 531.391

## ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР КРЫЛА С БАЛАНСИРОМ

П. С. Ланда, С. П. Стрелков, М. В. Яковлева

Рассматривается влияние балансирующего груза на величину критической скорости и частоты флаттера однородного крыла. Решение соответствующей краевой задачи проводится на электронной модели. Показано, что при больших балансирующих грузах имеется различие между полученными в работе результатами и расчетом по методу Бубнова-Галеркина.

Величину критической скорости изгибно-крутильного флаттера крыла можно повысить, если уменьшить разбалансировку крыла [1], т. е. приблизить центры масс каждого элемента по размаху к оси жесткости. Для этого можно разместить на крыле впереди оси жесткости дополнительные балансирующие грузы или даже поместить один сосредоточенный груз в некотором сечении крыла (балансир). Наличие балансира, его масса и расположение определенным образом влияют на величину критической скорости флаттера.

При обычном приближенном расчете на изгибно-крутильный флаттер крыла по методу Бубнова—Галеркина [1] задача сводится к рассмотрению «эквивалентной» колебательной системы с двумя степенями свободы. Переменными в этой системе являются две «обобщенные» координаты, соответствующие двум заданным формам: изгиба и кручения крыла. Параметры же «эквивалентной» системы представляют собой эффективные значения следующих величин: массы крыла, его момента инерции, жесткости на изгиб и кручение, и статического момента, определяющего коэффициент инерционной связи между колебаниями изгиба и кручения.

Влияние балансира на величину критической скорости флаттера при расчете по методу Бубнова—Галеркина объясняется следующим образом. Установка балансира изменяет параметры «эквивалентной» системы с двумя степенями свободы: увеличиваются эффективные значения массы и момента инерции, а главное, уменьшает эффективный коэффициент инерционной связи между «обобщенными» координатами изгиба и кручения. И-за уменьшения величины связи уменьшается доля энергии, поступающей из потока обтекающего воздуха, и, следовательно, увеличивается критическая скорость флаттера.

В [2] был предложен другой метод определения критической скорости флаттера крыла на основе прямого решения уравнений изгибно-крутильных колебаний при помощи электронной моделирующей машины. В этом методе не делается никаких предположений относительно форм колебаний. Точность полученных результатов определяется лишь соответствием решаемых уравнений реальному крылу, точностью задания параметров и аэродинамических сил, а также погрешностью решения уравнений машиной. В настоящей работе этот метод применяется для определения критической скорости, частоты и формы колебаний при флаттере крыла с балансиром. Значения найденных величин сравниваются с результатами соответствующих вычислений по методу Бубнова—Галеркина. Показано, что для рассматриваемого примера одно-

родного крыла\* при определенных параметрах балансира эти значения существенно отличаются друг от друга.

1. Уравнения изгибо-крутильных колебаний однородного консольного крыла с большим удлинением имеют вид [1]

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \rho V^2 t \left[ \theta + \right. \\ \left. + \frac{t}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right] = 0, \\ - GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - m\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \rho V^2 t^2 \left[ \theta + \right. \\ \left. + \frac{t}{V} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{t} - \frac{\pi}{16} \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{1}{V} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Если балансирующие массы  $M$  укреплены на конце крыла на расстоянии  $\sigma_1$  от оси жесткости (впереди ее), то граничные условия будут

$$z(0) = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(0) = 0, \theta(0) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(l) = 0,$$

$$EI \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(l) = M \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right) \Big|_{y=l}, \quad (2)$$

$$GI_p \frac{\partial \theta}{\partial y}(l) = -M\sigma_1 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right).$$

Здесь  $y$  — координата вдоль оси жесткости,  $\tau$  — время,  $m$  — погонная масса крыла,  $I_m$  — погонный момент инерции,  $EI$  — жесткость на изгиб,  $GI_p$  — жесткость на кручение,  $\sigma$  — расстояние от центра масс в данном сечении до оси жесткости,  $x_0$  — расстояние от оси жесткости до передней кромки крыла,  $t$  — хорда,  $l$  — длина крыла,  $\frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$  — производная коэффициента аэродинамической силы по углу атаки,  $\frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha}$  — та-

кая же производная коэффициента момента,  $\rho$  — плотность воздуха,  $V$  — скорость полета,  $z$  — отклонение точек оси жесткости при изгибе,  $\theta$  — угол закручивания сечения крыла.

Значения всех входящих в уравнения величин выбраны теми же, что и в работе [2]:  $m = 35 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $I_m = 12,77 \text{ кгм}$ ,  $EI = 7,83 \cdot 10^6 \text{ нм}^2$ ,  $GI_p = 2,78 \cdot 10^6 \text{ нм}^2$ ,  $\sigma = 0,283 \text{ м}$ ,  $x_0 = 0,96 \text{ м}$ ,  $t = 2,82 \text{ м}$ ,  $l = 16,1 \text{ м}$ ,  $\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = 2,33$ ,  $\frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} = 0,2$ ,  $\rho = 1,224 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ .

Решение уравнений (1) с граничными условиями (2) ищем в виде гармонических колебаний, что соответствует границе возникновения флаттера:

$$z(y, \tau) = tv(x)e^{i\omega_0 \tau}, \theta(y, \tau) = \vartheta(x)e^{i\omega_0 \tau}. \quad (3)$$

Здесь  $v(x)$  и  $\vartheta(x)$  — искомые безразмерные формы колебаний изгиба и кручения соответственно,  $x = y/l$  — безразмерное расстояние от корня

\* Этот пример рассматривался также в работе [2].

крыла до данного сечения вдоль оси жесткости,  $\omega_0 = \frac{\pi}{2l} \left( \frac{GI_p}{I_m} \right)^{1/2}$  — частота свободных колебаний кручения в пустоте ( $\omega_0 \neq 45,5 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$ ),  $\xi$  — безразмерная частота при флаттере.

Введем следующие безразмерные величины:  $w = 2V/\omega_0 t$  — скорость,  $\eta = \sigma_1/t$  — плечо балансира,  $\mu = M\sigma_1/I_m$  — статический момент балансира,  $\Lambda = l/t$  — удлинение,  $r = r/t$  — относительный радиус инерции сечения ( $I_m = mr^2$ ),  $\chi/(1,875)^2 = \omega_0/\omega_u$  — отношение частоты кручения к частоте изгиба ( $\omega_u = \frac{(1,875)^2}{l^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$ ),  $\tilde{\sigma} = \sigma/t$ ,  $\tilde{x}_0 = x_0/t$ ,  $\tilde{\rho} = \rho t^2/4m$ .

Подставляя (3) в (1) и (2), запишем основные уравнения в этих обозначениях:

$$\begin{aligned} v^{IV} - \chi^2 \xi^2 v + \tilde{\sigma} \chi^2 \xi^2 \vartheta - \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \tilde{\rho} w^2 \chi^2 \left[ \vartheta + 2 \frac{i\xi}{w} \left( \frac{3}{4} - \tilde{x}_0 \right) \vartheta - \right. \\ \left. - 2 \frac{i\xi}{w} v \right] = 0, \\ \vartheta'' - \frac{\pi^2}{4} \xi^2 \vartheta + \frac{\pi^2 \tilde{\sigma}}{4r^2} \xi^2 v - \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \frac{\pi^2 \tilde{\rho}}{4r^2} \left[ \vartheta + \right. \\ \left. + 2 \frac{i\xi}{w} \left( \frac{3}{4} - \tilde{x}_0 - \frac{\pi}{16} \frac{\partial C_{mE}}{\partial \alpha} \right) \vartheta - 2 \frac{i\xi}{w} v \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad v''(1) = 0,$$

$$v'''(1) = \frac{\mu \chi^2 \xi^2 r^2}{\eta \Lambda} (v + \eta \vartheta), \quad (5)$$

$$\vartheta'(1) = \frac{\pi^2 \mu}{4 \Lambda} \xi^2 (\bar{v} + \eta \vartheta).$$

2. При моделировании уровней (4) с граничными условиями (5) для консольно-закрепленного крыла без балансира в [2] были найдены следующие значения безразмерной критической скорости и частоты флаттера:

$$w^* = 0,99, \quad \xi^* = 0,895^*.$$

Метод решения, описанный в [2], заключается в следующем. Запишем граничные условия для консольно-закрепленного крыла в несколько более общем виде:

$$\begin{aligned} v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \\ L_i \{v(1), v'(1), v''(1), v'''(1), \vartheta(1), \vartheta'(1)\} = 0 \quad (6) \\ (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

\* Соответствующие значения, вычисленные по методу Бубнова—Галеркина  
 $w^* = 0,98, \quad \xi^* = 0,838$ .

где  $L_i$  — заданные функции величин, стоящих в фигурных скобках\*\*.

В частности, для крыла без балансира  $L_1 = v''(1)$ ,  $L_2 = v'''(1)$ ,  $L_3 = \vartheta'(1)$ ; для крыла с балансиром на конце (см. (5)) имеем:

$$L_1 = v''(1), L_2 = v'''(1) + \frac{\mu x^2 r^2}{\eta \Lambda} \xi^2 [v(1) + \eta \vartheta(1)],$$

$$L_3 = \vartheta'(1) - \frac{\pi^2 \mu}{4 \Lambda} \xi^2 [v(1) + \eta \vartheta(1)].$$

Задача с граничными условиями типа (6) не может непосредственно решаться на моделирующей машине, так как машины предназначены лишь для решения задач Коши (задач с известным полным набором начальных условий).

Поэтому приходится сводить задачу к задаче с полными условиями на двух концах к совокупности задач с условиями, заданными на одном конце. Такой способ описан, например, в работе [3].

Пусть имеются какие-либо три линейно-независимых частных решения уравнений (4), удовлетворяющие граничным условиям в точке  $x = 0$ . Каждое из этих решений, вообще говоря, не будет удовлетворять граничным условиям в точке  $x = 1$ . Потребуем, чтобы их линейная комбинация

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + C_3 v_3(x), \\ \vartheta(x) &= C_1 \vartheta_1(x) + C_2 \vartheta_2(x) + C_3 \vartheta_3(x) \end{aligned} \quad (7)$$

удовлетворяла этим условиям, т. е.

$$\begin{aligned} L_i \{C_1 v_1(1) + C_2 v_2(1) + C_3 v_3(1), \dots, C_1 \vartheta_1'(1) + \\ + C_2 \vartheta_2'(1) + C_3 \vartheta_3'(1)\} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$(i = 1, 1, 3).$$

Таким образом, мы получили систему уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . В силу предположения о линейности функций  $L_i$  систему уравнений (8) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^3 C_k L_i \{v_k(1), \dots, \vartheta_k'(1)\} = 0 \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Условие нетривиальности решения этой системы однородных уравнений относительно  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  заключается в равенстве нулю детерминанта:

$$D = \det \| L_i \{v_k(1), \dots, \vartheta_k'(1)\} \| = 0. \quad (10)$$

Это комплексное уравнение определяет те значения параметров  $\omega$  и  $\xi$ , при которых существует решение уравнений (4), удовлетворяющее граничным условиям (6). Наименьшее из этих значений  $\omega$  и соответствующее ему  $\xi$  как раз и представляет собой искомую критическую скорость и частоту флаттера.

\*\* Заметим, что для применимости предложенного метода эти функции должны быть линейными

Как обычно, в качестве системы трех линейно-независимых частных решений уравнений (4) выбираем решения, удовлетворяющие следующим начальным условиям в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, \quad v'_1(0) = 0, \quad \vartheta_1(0) = 0, \quad v''_1(0) = 1, \quad v'''_1(0) = 0, \quad \vartheta'_1(0) = 0; \\ v_2(0) &= 0, \quad v'_2(0) = 0, \quad \vartheta_2(0) = 0, \quad v''_2(0) = 0, \quad v'''_2(0) = 1, \quad \vartheta'_2(0) = 0; \quad (11) \\ v_3(0) &= 0, \quad v'_3(0) = 0, \quad \vartheta_3(0) = 0, \quad v''_3(0) = 0, \quad v'''_3(0) = 0, \quad \vartheta'_3(0) = 1. \end{aligned}$$

При таком выборе частных решений недостающие начальные условия при  $x = 0$  для получения на машине решения, удовлетворяющего условиям (6), т. е. формы колебаний при флаттере, просто выражаются через постоянные  $C_1, C_2, C_3$ :

$$v''(0) = C_1, \quad v'''(0) = C_2, \quad \vartheta'(0) = C_3.$$

Итак, предлагаемый способ отыскания критической скорости и частоты флаттера состоит в следующем.

Для каждой произвольно выбранной пары значений  $\omega$  и  $\xi$  уравнения (4) решаются на моделирующей машине три раза с начальными условиями (11). Из значений этих решений в точке  $x = 1$  составляется детерминант  $D$ . Задача заключается в подборе таких значений  $\omega$  и  $\xi$ , при которых  $D$  обращается в нуль. Именно так в работе [2] и определялись критическая скорость и частота флаттера крыла без балансира.

При решении задачи о флаттере крыла с балансиром оказывается более удобным с точки зрения объема вычислений идти несколько иным путем. Вместо того, чтобы подбирать значения критической скорости и частоты флаттера (из условия равенства нулю соответствующего детерминанта  $D$ ) при заданном балансире, можно выбрать  $\omega$  и  $\xi$  заранее и определять необходимые параметры балансира. При таком подходе уравнение

$$D = 0 \quad (12)$$

представляет собой просто алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами относительно двух неизвестных параметров балансира  $\mu$  и  $\eta$ . Уравнение (12) эквивалентно системе двух уравнений с действительными коэффициентами:

$$\operatorname{Re} D = 0, \quad \operatorname{Im} D = 0, \quad (13)$$

из которых параметры  $\mu$  и  $\eta$  легко определяются.

Таким образом могут быть построены различные семейства кривых, характеризующих зависимость параметров балансира  $\mu$  и  $\eta$  от критической скорости  $\omega$  и частоты флаттера  $\xi$ . Но этим семействам уже легко можно решить и обычную задачу определения критической скорости при заданном балансире.

3. Приведем некоторые результаты решения таким способом задачи о флаттере крыла с балансиром. На рис. 1 показано семейство зависимостей безразмерного статистического момента  $\mu$  и «плеча»  $\eta$  от частоты флаттера  $\xi$  при различных значениях критической скорости  $\omega$ . Интересно, что для каждого фиксированного  $\omega$  статистический момент балансира и его «плечо» имеют минимумы, величина и положение которых зависят от критической скорости. Это означает, что, если зафиксировать один из параметров балансира, например, «плечо»  $\eta$ , и менять другой, то как бы его ни изменять, критическая скорость флаттера не сможет быть сделана выше определенной предельной для данного значения параметра  $\eta$  величины.

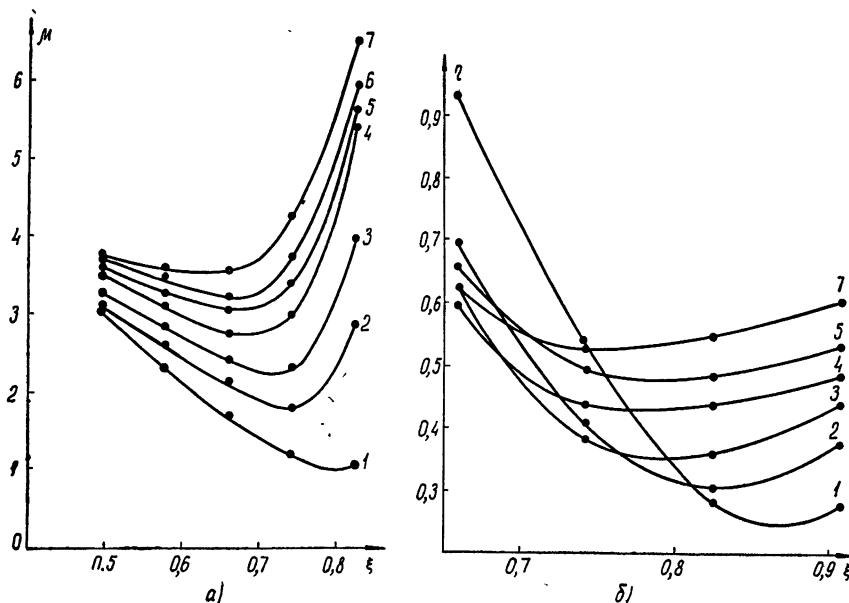


Рис. 1. Зависимость статического момента (а) и «плеча» (б) балансира от частоты флаттера при фиксированных значениях критической скорости  $w$ : 1)  $w = 1,19$ , 2)  $w = 1,33$ , 3)  $w = 1,46$ , 4)  $w = 1,575$ , 5)  $w = 1,681$ , 6)  $w = 1,785$ , 7)  $w = 1,881$ .

Этот вывод становится более наглядным, если построить кривые зависимости критической скорости флаттера  $w$  от статического момента балансира  $\mu$  при выбранных постоянных значениях «плеча»  $\eta$ . Примеры таких кривых для трех величин «плеча»  $\eta$  показаны на рис. 2 сплошными линиями. Из этого рисунка видно, что вначале с ростом статического момента  $\mu$  критическая скорость флаттера растет, а затем, достигая максимума, очень медленно начинает падать. Максимальное значение критической скорости, которое может быть получено при данном «плече»  $\eta$ , тем больше, чем длиннее «плечо». Зависимость максимального значения критической скорости от длины «плеча» изображена на рис. 3. В рассматриваемой области параметров эта зависимость достаточно хорошо аппроксимируется прямой линией.

Пунктирными линиями на рис. 2 нанесены зависимости критической скорости флаттера от статического момента балансира, вычисленные по методу Бубнова—Галеркина при тех же значениях «плеча»  $\eta$ . Сравнивая эти кривые с соответствующими зависимостями, полученными нами, видим, что при малом балансирующем грузе ( $\mu \leq 3 \div 4$ ) метод Бубнова—Галеркина дает заниженные значения критической скорости флаттера (разница порядка 10—20%). При больших значениях  $\mu$  характер полученных обоими методами зависимостей  $w$  от  $\mu$  изменяется. По нашим данным критическая скорость, достигая максимума, начинает падать, а по результатам метода Бубнова—Галеркина она монотонно растет. Таким образом, в рассматриваемой области параметров расчеты по методу Бубнова—Галеркина обеспечивают запас устойчивости лишь при  $\mu \leq 3 \div 4$ .

Формы колебаний при флаттере определяются совершенно тем же путем, что и в работе [2]. На рис. 4 сплошными линиями с индексом I показаны формы изгибных колебаний при флаттере крыла с балансиром

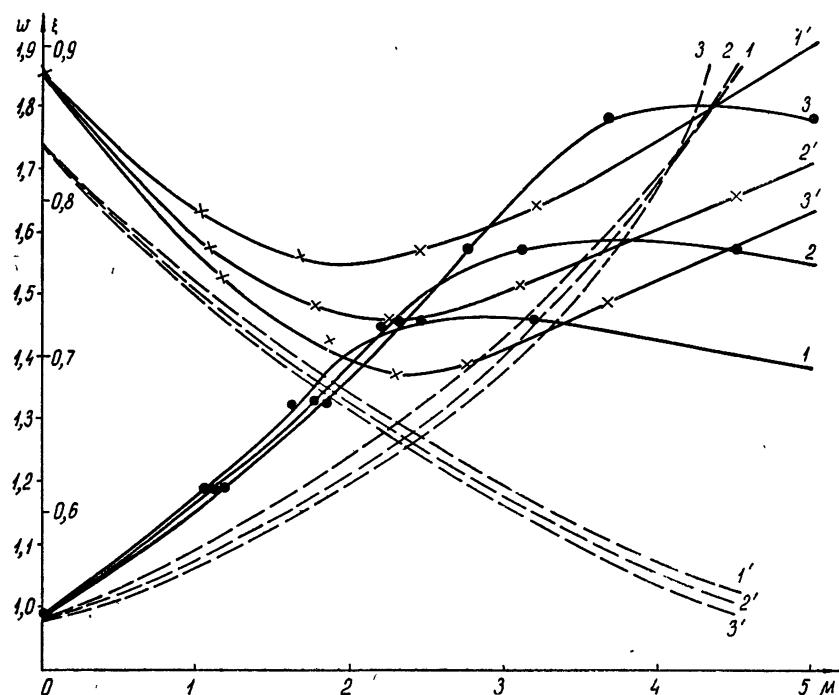


Рис. 2. Зависимость критической скорости (1, 2, 3) и частоты (1', 2', 3') флаттера от статического момента балансира при различных значениях „плеча“:

сплошные линии — машинное решение, пунктир — решение, полученное по методу Бубнова-Галеркина; 1)  $\eta = 0,355$ , 2)  $\eta = 0,426$ , 3)  $\eta = 0,497$ .

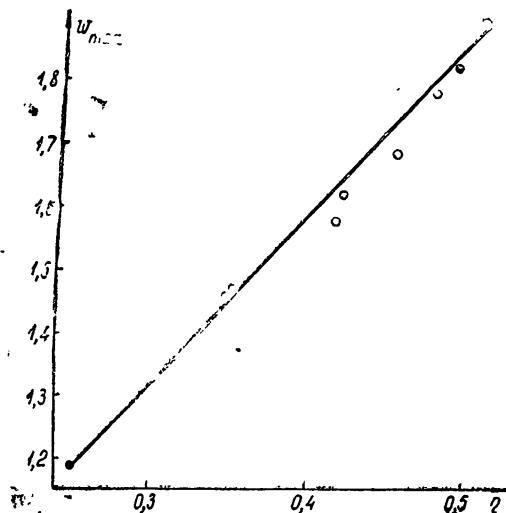


Рис. 3. Зависимость максимального значения критической скорости от „плеча“ балансира.

для случая  $\eta=0,38$ ,  $\mu=2,31$  ( $w \neq 1,46$ ,  $\xi=0,742$ )\*. Они существенно отличаются от соответствующих форм, полученных по методу Бубнова—

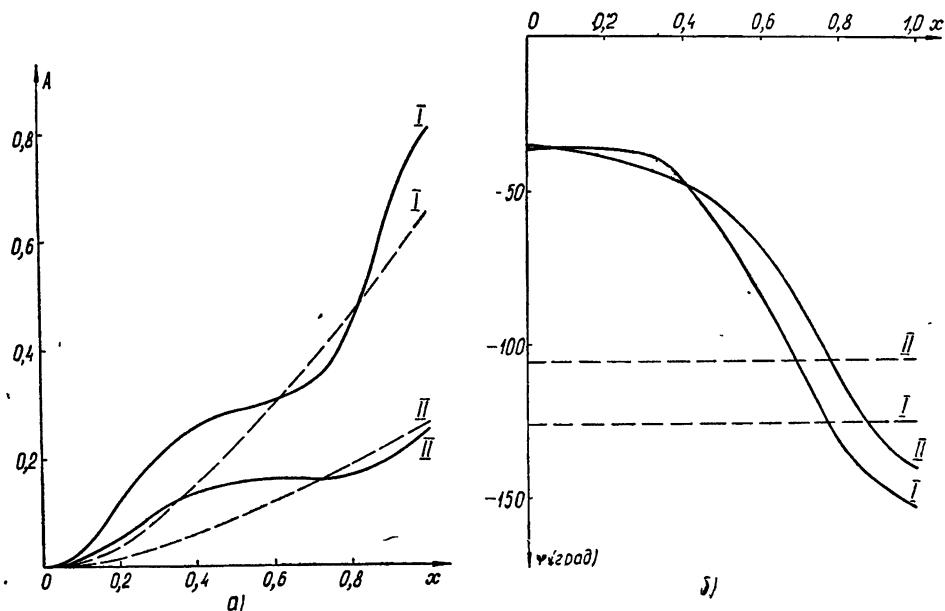


Рис. 4. Формы колебаний изгиба при флаттере: а) амплитуда, б) фаза.

Галеркина (пунктир с индексом I). Кроме того, для сравнения на рис. 4 сплошными линиями и пунктиром с индексом II показаны соответствующие формы для крыла без балансира. Из рисунка видно, что наличие балансира существенно изменяет соотношение между амплитудами колебаний изгиба и кручения в сторону увеличения изгибных колебаний.

Отметим, что предлагаемый метод может аналогичным образом применяться и в тех случаях, когда сосредоточенный балансир находится не на конце крыла, а в каком-либо ином сечении крыла по размаху. Параметры балансира в этом случае определяются из условий сопряжения решений в сечении, проходящем через балансир. Кроме того, полученные результаты могут быть непосредственно распространены на тот случай, когда необходимо учитывать собственный момент инерции балансирующего груза.

Очевидно, что метод решения задачи о флаттере с заданным распределенным балансирующим грузом ничем не будет отличаться от решения основной задачи о флаттере крыла [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Гроссман, Тр. ЦАГИ, вып. 284 (1937).
2. П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, С. П. Стрелков, МТТ, № 3, (1967).
3. И. И. Этерман, М. М. Обувалин, Инженерный сб. Изв. ОТН, 23, (1956).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 сентября 1967 г.

\* За единицу принята амплитуда колебаний кручения в конце крыла. Отсчет фазы ведется по отношению к колебаниям изгиба, для которых фаза примерно постоянна по всему крылу.

**A BENDING-TORSIONAL FLUTTER OF THE WING WITH  
BALANCING***P. S. Landa, S. P. Stryelkov, M. V. Jakovlyeva*

The effect of balancing load on the critical velocity and frequency of flutter in homogenous wing is considered. Solution of corresponding boundary problem is carried out using an electronic model. It is shown that for large balancing loads the results obtained in this study differ from the ones reckoned by Boobnov—Galyerkin's method.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 62—50

**ЛЮФТ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С СУХИМ ТРЕНИЕМ**

*И. М. Крикунова*

В настоящей работе рассматривается система автоматического регулирования с люфтом, сухим и вязким трением в предположении, что 1) в момент окончания выбирания люфта происходит мгновенное столкновение двигателя с органом настройки, при котором сохраняется момент количества движения системы; 2) трение на валу органа настройки достаточно велико, так что он мгновенно останавливается после снятия воздействия исполнительного двигателя (эти вопросы рассмотрены в [1—4]).

Обозначим  $x$  — угол поворота органа настройки,  $y$  — угол поворота двигателя, тогда уравнения движения системы записываются в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2(x \pm x_0) = 0 \quad (y - x = \Delta/2, \dot{x} > 0), \quad (1a)$$

$$\dot{y} = x \quad (y - x = -\Delta/2, \dot{x} < 0);$$

$$\ddot{y} + J J_1^{-1} \omega_0^2(x \pm y_0) = 0 \quad (y - x < \Delta/2, \dot{y} > 0), \quad (1b)$$

$$\dot{x} = 0 \quad (y - x > -\Delta/2, \dot{y} < 0).$$

Переход от уравнений (1a) к уравнениям (1b) совершается в моменты времени, когда

$$\dot{x} = \dot{y} = 0, \quad y - x = \Delta/2, \quad \ddot{y} < 0, \quad (2a)$$

$$\dot{x} = \dot{y} = 0, \quad y - x = -\Delta/2, \quad \ddot{y} > 0.$$

Переход от уравнений (1b) к уравнениям (1a) совершается при

$$y - x = -\Delta/2, \quad \dot{y} < 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0,$$

$$y - x = \Delta/2, \quad \dot{y} > 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0.$$

Координаты  $x$  и  $y$  в момент перехода от уравнений (1b) к (1a) остаются постоянными:

$$x(t=0) = x(t+0),$$

$$y(t=0) = y(t+0),$$

а скорости до и после перехода связаны соотношением

$$J_1 \dot{y}(t=0) = J \dot{x}(t+0), \quad (2b)$$

$$\dot{y}(t+0) = \dot{x}(t+0).$$

Уравнение (2b) есть условие сохранения количества движения в момент перехода.

В уравнения введены следующие обозначения:  $\Delta$  — величина люфта;  $J_1$  — момент инерции двигателя;  $J$  — момент инерции двигателя с органом настройки;  $\omega_0^2 = K/J$ , где  $K$  — коэффициент усиления системы;  $x_0 = M/K$ , где  $M$  — сумма моментов сил сухого трения в органе настройки и в двигателе;  $y_0 = N/K$ , где  $N$  — момент сил сухого трения в двигателе,  $\alpha$  характеризует суммарное вязкое трение в системе.

Фазовое пространство системы четырехмерное и разделено на четыре области: I и III соответствуют уравнениям (1a), а IV и II — уравнениям (1b).

Рассмотрим проекцию фазовых траекторий на плоскость  $x$ ,  $\dot{x}$  (рис. 1). Проекция решения уравнений (1a) есть

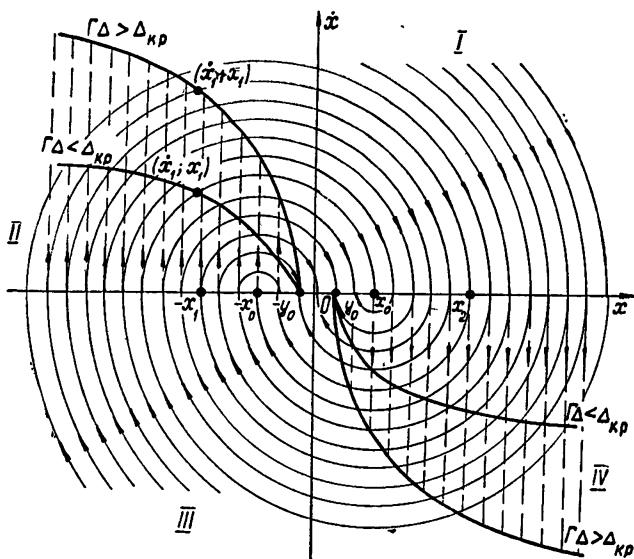


Рис. 1.

$$x = e^{-\alpha t} \left[ x_1 \cos(\omega t) + \frac{\alpha x_1 + \dot{x}_1}{\omega} \sin(\omega t) \right] \mp x_0 \quad (3)$$

(сплошные линии на рис. 1), где  $x_1, \dot{x}_1$  — начальные значения  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Граница (2а) проектируется в ось  $x$ . Решение уравнений (1б) проектируется в точки оси  $x$ . В момент перехода из области II в III или из IV в I фазовые траектории совершают скачок, определяемый условием (2в). Проекция геометрического места конечных точек скачков фазовых траекторий есть

$$\dot{x} = \pm \frac{J_1}{J} [2\Delta \Omega (\mp x - y_0)]^{1/2}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) найдем закон отображения координаты  $x_1$  на границе областей III и IV в координату  $x_2$  на границе областей I и II, т. е. функцию последований для верхней полуплоскости (для нижней она аналогична):

$$x_2 = \left\{ (x_1 - x_0)^2 + \left[ \frac{\dot{x}_1 - (x_1 - x_0)\alpha}{\omega} \right]^2 \right\}^{1/2} \frac{e^{-\alpha t_0}}{\sqrt{1 + (\alpha/\omega)^2}} - x_0, \quad (5)$$

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\omega} - \operatorname{arctg} \left[ \frac{\dot{x}_1}{\omega(x_1 - x_0)} - \frac{\alpha}{\omega} \right] \right\}.$$

Исследование (5) (рис. 2) показало, что имеется  $\Delta_{kp}$ , являющееся возрастающей функцией от параметров  $\alpha, x_0, y_0$ , такое, что при  $\Delta < \Delta_{kp}$  система устойчива и функция последований не имеет неподвижных точек, а при  $\Delta > \Delta_{kp}$  имеются две неподвижные точки, соответствующие неустойчивому и устойчивому циклам (точки А и Б на рис. 2). При  $\Delta = \Delta_{kp}$  обе точки сливаются в одну, соответствующую полуустойчивому предельному циклу.

Из рассмотрения фазовой плоскости видно, что люфт не влияет на точность системы, но если система подходит к отрезку равновесных состояний  $-x_0 < x < x_0$  из областей III и I, она останавливается в более узкой зоне  $-y_0 < x < y_0$ .

Для случая  $\alpha/\omega \ll 1$  функция последований упрощается:

$$x_2 = \left[ (x_1 - x_0)^2 + \left( \frac{\dot{x}_1}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} - x_0. \quad (6)$$

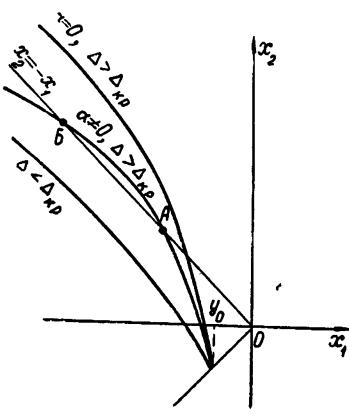


Рис. 2.

Координата неподвижной точки  $x^* = y_0 \left(1 - \frac{2x_0 J}{\Delta J_1}\right)^{-1}$  соответствует полуустойчивому предельному циклу. Система будет абсолютно устойчива при  $x^* = \infty$ , т. е. при  $\Delta \leq 2x_0 J J_1^{-1} = \Delta_{\text{кр}}$ .

При сколь угодно малом  $y_0$  можно параметры системы выбрать таким образом, чтобы  $x^*$  было сколь угодно большим, для этого разность  $1 - \frac{2x_0 J}{\Delta J_1}$  нужно сделать достаточно малой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 349 (1947).
2. Е. И. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
4. В. А. Брусиц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 4. 751 (1962).

Поступила в редакцию  
30 ноября 1966 г.

531.391.5

## ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

*Н. В. Дерендеев*

Рассматривается установление малых во вращающейся системе отсчета нестационарных движений газа в области  $\Omega$ , на поверхности которой поддерживаются постоянные во времени распределения скоростей и температуры. С помощью принципа сжатых отображений показано, что все малые нестационарные движения стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к единственному стационарному движению

Рассмотрим совершенный вязкий газ, заполняющий область  $\Omega$  внутри тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Одним из возможных движений газа во вращающейся системе отсчета является его равновесие в силовом поле при температуре термостата  $T_0$ . Движения газа, близкие к равновесию во вращающейся системе отсчета, описываются линеаризованными уравнениями гидродинамики сжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\rho' \nabla \varphi - \nabla p' - 2\rho_0 [\omega, \mathbf{v}] + \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ C_p \rho_0 \frac{\partial T'}{\partial t} - A \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p_0 \right) - k \Delta T' &= 0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \mathbf{v} &= 0, \quad p' = R(\rho_0 T' + T_0 \rho'), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_0, \rho_0$  — равновесные распределения давления и плотности,  $p', \rho', T'$  — добавки к равновесным значениям давления, плотности, температуры,  $\mathbf{v}$  — поле скоростей относительно вращающейся системы отсчета,  $\varphi$  — потенциал силового поля,  $\mu$  — вязкость,  $C_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $R$  — газовая постоянная,  $A$  — термический эквивалент работы

На поверхности области поддерживаются не зависящие от времени распределения  $\mathbf{v}|_s, T'|_s$ , близкие к распределениям этих величин при равновесии газа во вращающейся системе координат

Мы будем рассматривать поведение во времени решений системы (1), принимающих заданные значения  $\mathbf{v}, T'$  на поверхности.

Прямое произведение множества всевозможных вектор-функций, удовлетворяющих условиям для поля скоростей на поверхности  $\mathbf{v}|_s$ , на множество функций, удовлетворяющих условиям для поля температуры  $T'|_s$ , и на множество функций без дополнительных граничных условий обозначим через  $\Sigma$ . Все функции предполагаются заданными внутри области  $\Omega$ , не зависящими от  $t$  и достаточно гладкими;  $\Sigma$  является пространством состояний системы (1).

Задание полей  $\mathbf{v}$ ,  $T'$ ,  $p'$  в любой момент времени есть задание точки пространства  $\Sigma$ , которую обозначим  $\sigma$ .

Движение газа в области  $\Omega$  можно рассматривать как отображение  $\Sigma$  в себя с помощью оператора сдвига во времени  $T_\tau$ , такого, что  $T_\tau \sigma(t) = \sigma(t + \tau)$ .

В отношении этого оператора будем предполагать, что он замкнут в  $\Sigma$ , т.е., если взять начальные условия из  $\Sigma$ , во все моменты времени поля будут гладкими и поэтому будут принадлежать  $\Sigma$ . Более того, если поля стремятся к каким-то предельным, то и эти предельные также соответствуют некоторой точке пространства  $\Sigma$ . Для медленных движений газа, описываемых линеаризованными уравнениями, сохранение гладкости решений, по-видимому, имеет место.

Введем в пространстве  $\Sigma$  расстояние по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2(\sigma_1, \sigma_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \rho_0 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 + \frac{(p'_1 - p'_2)^2}{\rho_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_p \rho_0}{AT_0} (T'_1 - T'_2)^2 - 2 \frac{(p'_1 - p'_2)(T'_1 - T'_2)}{T_0} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Возьмем пару точек пространства  $\Sigma$   $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и вычислим изменение расстояния между ними в результате применения оператора  $T_\tau$ .

В силу линейности основной системы уравнений (1) поля  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ ,  $p'_1 - p'_2 = \pi$ ,  $T'_1 - T'_2 = 0$ ,  $\rho'_1 - \rho'_2 = \xi$  удовлетворяют ей.

Здесь поля с индексами 1, 2 удовлетворяют системе (1), но разным начальным условиям. Границные условия для полей с индексами 1, 2 одинаковы, поэтому

$$\mathbf{w}|_s = 0, \quad (3)$$

$$\theta|_s = 0. \quad (4)$$

Умножим первое уравнение системы (1) для  $\mathbf{w}$ ,  $\theta$ ,  $\pi$ ,  $\xi$  на  $\mathbf{w}$  и проинтегрируем по  $\Omega$  с учетом (3); получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\mathbf{w}^2}{2} d\Omega = - \int_{\Omega} (\xi \nabla \varphi + \nabla \pi) \mathbf{w} d\Omega - \nu \int_{\Omega} \left[ \frac{4}{3} (\operatorname{div} \mathbf{w})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{w})^2 \right] d\Omega. \quad (5)$$

Преобразуем  $\int_{\Omega} (\xi \nabla \varphi + \nabla \pi) \mathbf{w} d\Omega$ .

Из последнего уравнения системы (1) имеем

$$\xi = (\pi - R \rho_0 \theta) (RT_0)^{-1},$$

а из условия равновесия  $\nabla \varphi = -\nabla p_0 \rho_0^{-1}$ , следовательно, учитывая (3) — (4) и остальные уравнения (1),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\xi \nabla \varphi + \nabla \pi) \mathbf{w} d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \left( \rho_0 \frac{\theta}{T_0} - \frac{\pi}{RT_0} \right) \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \nabla \pi \right] \mathbf{w} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left( \rho_0 \nabla \frac{\pi}{\rho_0} + \frac{\theta}{T_0} \nabla p_0 \right) \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\pi}{\rho_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\theta}{T_0} \nabla p_0 \mathbf{w} \right) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left( \frac{\pi^2}{\rho_0} + \frac{C_p \rho_0}{AT_0} \theta^2 - 2 \frac{\pi \theta}{T_0} \right) d\Omega + \frac{k}{AT_0} \int_{\Omega} (\nabla \theta)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Окончательно запишем (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left( \rho_0 \mathbf{w}^2 + \frac{\pi^2}{\rho_0} + \frac{C_p \rho_0}{AT_0} \theta^2 - \frac{2\pi\theta}{T_0} \right) d\Omega &= \\ &= - \int_{\Omega} \left\{ \frac{k}{AT_0} (\nabla \theta)^2 + \mu \left[ (\operatorname{div} \mathbf{w})^2 \frac{4}{3} + (\operatorname{rot} \mathbf{w})^2 \right] \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда видно, что  $\tilde{R}(\sigma_1, \sigma_2) > \tilde{R}(T_\tau \sigma_1, T_\tau \sigma_2)$ , т. е.  $T_\tau$  является оператором сжатия в  $\Sigma$ .

Покажем, что последовательность состояний  $\{\sigma_n = T_\tau^n \sigma(t_0)\}$  фундаментальна. Действительно,

$$\tilde{R}(T_\tau^n \sigma_0, T_\tau^n \sigma_q) < \tilde{R}(T_\tau^{n-1} \sigma_0, T_\tau^{n-1} \sigma_q) < \dots < \tilde{R}(\sigma_0, \sigma_q),$$

т. е.  $\tilde{R}(T_\tau^n \sigma_0, T_\tau^n \sigma_q)$  монотонно убывает с ростом  $n$ . Но  $\tilde{R} \geq 0$ , поэтому существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}(T_\tau^n \sigma_0, T_\tau^n \sigma_q)$ .

Из существования предела следует, что

$$\tilde{R}(T_\tau^n \sigma_0, T_\tau^{n+q} \sigma_0) - \tilde{R}(T_\tau^{n-1} \sigma_0, T_\tau^{n-1} \sigma_q) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Но тогда из (6) следует, что при  $n \rightarrow \infty$  (т. е.  $t \rightarrow +\infty$ ), так как сдвиг по времени за  $n$  итераций равен  $\tau n$ , получим  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{w} \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{w} \rightarrow 0$ , что с учетом условий (3), (4) дает  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{w} \rightarrow 0$  равномерно в  $\Omega$ . Но  $\mathbf{w}$  — возможное движение газа в области  $\Omega$ , так что из стремления  $\mathbf{w}$ ,  $\theta$  к нулю во всей области следует, что  $\pi \rightarrow 0$ . Следовательно, из (7) вытекает, что  $\tilde{R}(\sigma_n, \sigma_{n+q}) \rightarrow 0$ , а последовательность  $\{\sigma_n\}$  фундаментальна.

Из фундаментальности  $\{\sigma_n\}$  и ранее сделанного предположения о замкнутости  $T_\tau$  в пространстве  $\Sigma$  вытекает, что существует  $\sigma^* \in \Sigma$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma^*$ .

Аналогично тому, как это делается в [1], можно показать, что  $\sigma^*$  — неподвижная точка оператора  $T_\tau$ , т. е.  $T_\tau \sigma^* = \sigma^*$ . Покажем, что  $\sigma^*$  — единственная неподвижная точка в  $\Sigma$ .

Допустим, что есть две неравные неподвижные точки  $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ , но тогда  $\tilde{R}(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) > \tilde{R}(T_\tau \tilde{\sigma}_1, T_\tau \tilde{\sigma}_2) = \tilde{R}(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ , что невозможно. Остается принять, что  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2$ .

Таким образом, мы показали, что все малые во вращающейся системе отсчета нестационарные движения газа, удовлетворяющие граничным условиям  $\mathbf{v}|_s, T'|_s$ , стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к единственному стационарному движению независимо от начальных условий.

Разумеется, этот вывод справедлив, если задача (1) с условиями  $\mathbf{v}|_s, T'|_s$  корректна, ибо только в этом случае стационарное движение мало во вращающейся системе отсчета и пользование линеаризованными уравнениями законно.

## ЛИТЕРАТУРА

1 Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 июня 1967 г.

УДК 681.142.642.7 + 621.374.325 4

## ДЕСЯТИЧНЫЕ РЕГИСТРЫ НА ФАЗОИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

*В. И. Корнейчук, Л. С. Ситников, А. Г. Скорик, Л. Л. Утяков*

Большинство современных приборов дискретной техники (цифровые измерительные приборы, электронные арифметометры и др.) обрабатывают информацию, представленную десятичными кодами, для запоминания которых необходимы элементы с десятью устойчивыми состояниями. В работе описан ряд десятичных фазоимпульсных элементов памяти, отличающихся значительной простотой, и показаны пути построения на их основе последовательных и сдвиговых регистров.

Схема одного из наиболее простых вариантов разряда регистра приведена на рис. 1а и состоит из собственно элемента памяти (I), выполненного на базе синхронизованного емкостного релаксационного автогенератора, выходного (II) и входного (III) ключей для считывания и записи чисел. В этой схеме конденсатор  $C_1$  заряжается от

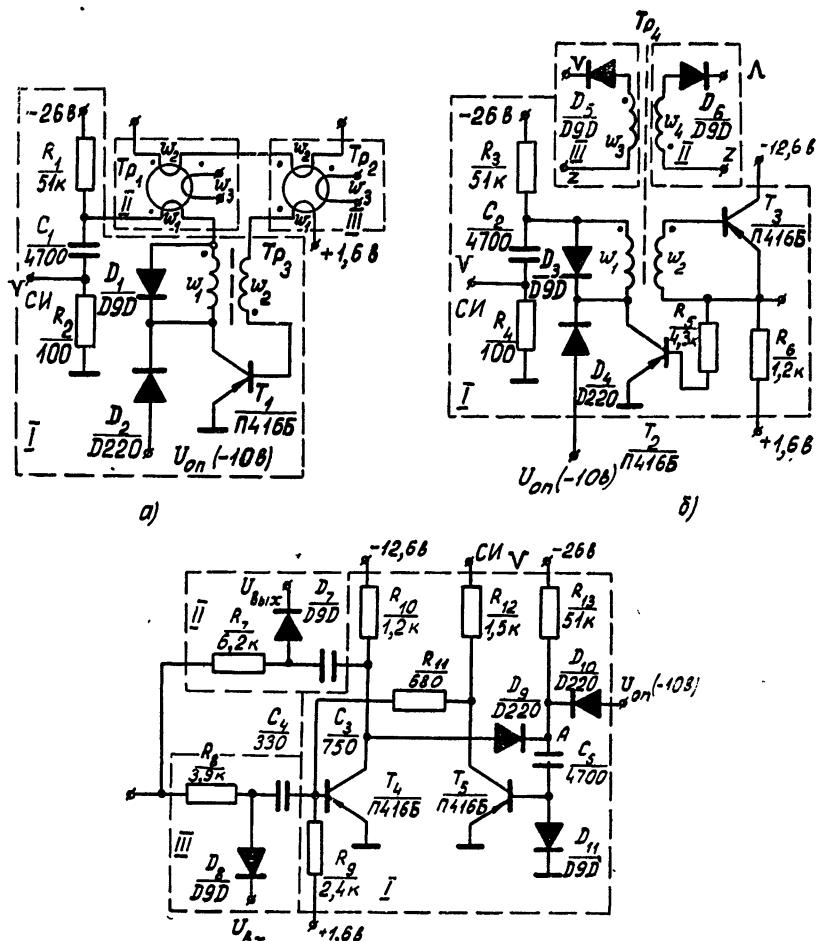


Рис. 1.

(Рис. 1а—Tp 1, Tp 20,16 ВТ  $\Phi$  3,  $w_1=6$ ,  $w_2=w_3=9$ .  
Рис. 1в— $\Phi$  1000 7×4×2,  $w_1=15$ ,  $w_2=75$ ).

источника 26 в с постоянной времени  $(R_1+R_2)C_1$ , которая выбирается так, чтобы очередной запуск блокинг-генератора происходил от каждого десятого синхроимпульса. На вход синхронизации от общего внешнего источника поступает опорная последовательность синхроимпульсов СИ ( $f = 100$  кГц,  $U = 0,7$  в). Когда напряжение на конденсаторе  $C_1$  достигает опорного уровня  $U_{\text{оп}}$ , открывается диод  $D_1$  и очередной синхроимпульс вызывает блокинг процесс, в результате которого конденсатор  $C_1$  разряжается через транзистор  $T_1$  и сопротивление  $R_2$ . Для установки элемента памяти в любое из десяти состояний, которые характеризуются сдвигом фазы выходных импульсов относительно опорных импульсов ( $f = 10$  кГц) достаточно на его вход подать импульс записи  $U_{\text{зап}}$  соответствующей фазы, осуществив тем самым принудительный разряд конденсатора  $C_1$ . В дальнейшем релаксационные колебания автогенератора происходят с этой же фазой, однозначно характеризуя состояние элемента [1].

В случае необходимости в умощненном выходе с ячейки рационально применять фазоимпульсный элемент с блокинг-генератором на двух транзисторах (рис. 1б).

С точки зрения микроминиатюризации представляет интерес бестрансформаторный вариант элемента памяти (рис. 1в). Здесь конденсатор  $C_5$  заряжается от источника напряжения —26 в по цепи эмиттер—база транзистора  $T_5$  с постоянной времени  $C_5R_{13}$ . Когда потенциал в точке А достигает уровня  $-U_{\text{оп}}$ , открывается диод  $D_{10}$ , ток через конденсатор  $C_5$  прекращается, транзистор  $T_5$  закрывается и очередной синхроимпульс СИ ( $U = 12,5$  в,  $\tau_i = 1,2$  мксек), поступающий на вход  $T_4$  через сопротивления  $R_{11}$  и  $R_{12}$ , открывает транзистор  $T_4$ . При этом конденсатор  $C_5$  разряжается через открытый транзистор  $T_4$  и диоды  $D_{11}$ ,  $D_9$ . Описанный процесс периодически повторяется. Постоянная времени  $C_5R_{13}$  выбирается такой, чтобы каждый десятый синхроимпульс

открывал транзистор  $T_4$ . Выходной сигнал ( $U=12 \text{ в}, t_i = 1,5 \text{ мксек}$ ) снимается с коллектора транзистора  $T_4$ .

Задача построения регистров с последовательной записью и считыванием упрощается благодаря тому, что обращение к любому десятичному разряду осуществляется коммутацией только одной шины. Регистр (рис. 2) состоит из десятичных элементов памяти  $\Pi_1 - \Pi_n$  входных и выходных ключей К. Коммутатор разрядов служит для преобразования параллельного кода в последовательный. Если коммутатор выполнен на ферриттранзисторных или на каких-либо других динамических ячейках, в качестве входных и выходных ключей удобно применять ферритовые сердечники с ППГ (рис. 1а). При использовании коммутатора на статических элементах рационально использовать диодно-трансформаторные (рис. 1б) или диодно-конденсаторные (рис. 1в) ключи.

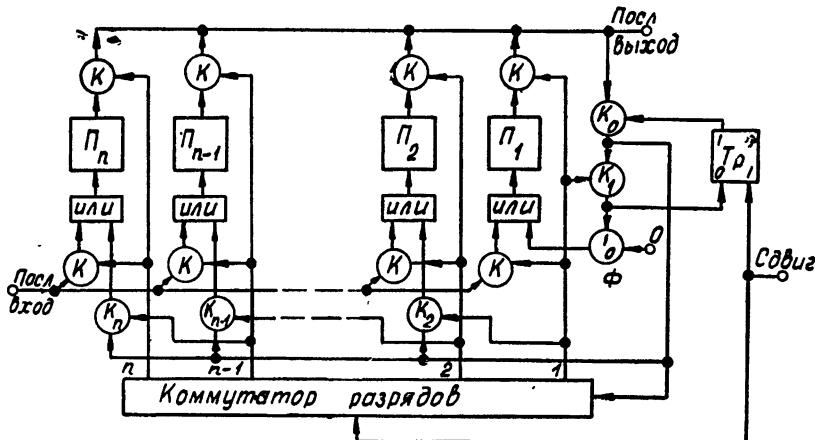


Рис. 2.  
( $T_p 4 \Phi 1000 7 \times 4 \times 2, w_1 = 30, w_2 = 15, w_3 = w_4 = 60$ )

Основной операцией над числами в регистре является сдвиг. Один из простых способов сдвига кода при наличии одного общего коммутатора разрядов показан на рис. 2. Импульс соответствующий команде «сдвиг» устанавливает триггер  $T_p$  в состояние 1, а коммутатор разрядов — в состояние  $n-1$ . На последовательном выходе регистра появляется импульс, характеризующий состояние ячейки  $n-1$ . Этот импульс проходит через открытые ключи  $K_0$  и  $K_n$ , устанавливая элемент  $\Pi_n$  в соответствующее состояние и одновременно переводя коммутатор разрядов в состояние  $n-2$ . Описанный процесс будет повторяться до тех пор, пока коммутатор не установится в состояние 1. При этом сигнал с выхода  $\Pi_1$  переводит  $\Pi_2$  в соответствующее состояние, устанавливает триггер  $T_p$  в положение 0 и перемагничивает ферритовый сердечник  $\Phi$  с ППГ в состояние 1. Ближайший импульс соответствующий константе 0, возвращает сердечник  $\Phi$  в исходное состояние и записывает 0 в элемент  $\Pi_1$ .

Вышеописанные регистры построены на динамических элементах памяти, но считывание информации в них происходит без разрушения, что определяет возможность применения их (в отличие от феррит-диодных и феррит-транзисторных вариантов) вместо регистров на потенциальных триггерных декадах, например, в цифровых измерительных приборах, где необходим постоянный выход на преобразователь коданалог и цифровую индикацию. Сравнение описанных регистров с широко распространенными вариантами на потенциальных триггерах показывает, что обеспечивается выигрыш по количеству деталей в 3,5—4 раза, по стоимости и потреблению энергии в 4—6 раз.

## ЛИТЕРАТУРА

1 В. П. Сигорский, Л. С. Ситников, Л. Л. Утяков, Радиотехника, 19, № 12, 3 (1964).

## О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Б. И. Курилин

В связи с более широким применением различных устройств из отрезков неоднородных линий в технике СВЧ вопрос интерес к уравнениям Риккати, разрешимым в квадратурах [2, 3].

В настоящей заметке находятся условия, отличные от известных [1–3], при выполнении которых частные решения уравнения Риккати выражаются через коэффициенты исходного уравнения. Идея получения указанных условий сформулирована в основной теореме.

Известно [1], что для нахождения общего решения уравнения Риккати

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \quad (1)$$

достаточно знать одно нетривиальное частное решение. Новые условия разрешимости уравнения (1) в квадратурах определяют следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если коэффициенты уравнения Риккати (1) удовлетворяют условию

$$-\frac{h}{f} = C_0 \exp \left( 2 \int g dx \right), \quad (2)$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то его частными решениями являются функции

$$y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{-h/f}, \quad y_3 = C_0 \exp \left[ \int g(x) dx \right], \quad (3)$$

совпадающие с точностью до знака.

Доказательство основано на представлении уравнения (1) в виде

$$F(x, y, y') + \Phi(x, y) = 0, \quad (4)$$

где  $F \equiv F_1(x, y, y') \equiv y' - g(x)y$  и  $\Phi \equiv \Phi_1(x, y) \equiv f(x)y^2 + h(x)$ ,  $F_1(x, y, y') \equiv 0$  при  $y_3 = C_0 \exp \left[ \int g(x) dx \right]$ , а  $\Phi_1(x, y) \equiv 0$  при  $y_{1,2} = \pm \sqrt{-h/f}$ . При выполнении (2) имеем  $|y_{1,2}| \equiv |y_3|$ , следовательно,  $F_1(x, y, y') \equiv \Phi_1(x, y) \equiv 0$  и (1) превращается в тождество.

Примером уравнения, которое удовлетворяет условию (2), является уравнение (1.102) [1]:

$$xy' + xy^2 - y - ax^3 = 0,$$

которое после преобразования к форме (1) имеет вид

$$y' = -y^2 + \frac{1}{x}y + ax^2.$$

Частное решение, полученное из (3), совпадает с решением [1].

**Теорема 2.** Если коэффициенты общего уравнения Риккати (1) удовлетворяют условию

$$-\frac{g}{h} = \int f(x) dx + C_0, \quad (5)$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то его частными решениями являются совпадающие функции

$$y_1 = -\frac{h(x)}{g(x)}, \quad y_2 = \frac{1}{\int f(x) dx + C_0}. \quad (6)$$

Доказательство аналогично. Здесь в (4)  $F_2(x, y, y') \equiv y' - f(x)y^2$ ,  $\Phi_2(x, y) \equiv g(x)y + h(x)$ .

Пример Уравнение (1.16) [1]

$$y' + y^2 + (xy - 1)f(x) = 0.$$

**Теорема 3.** Если коэффициенты уравнения Риккати (1) удовлетворяют условию

$$-\frac{g(x)}{f(x)} = \int h(x) dx + C_0, \quad (7)$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то его частными решениями являются совпадающие функции

$$y_1 = -\frac{g(x)}{f(x)}, \quad y_2 = \int h(x)dx + C_0. \quad (8)$$

Здесь в (4)  $F_3(x, y, y') \equiv y' - h(x)$ ,  $\Phi_3(x, y) \equiv f(x)y^2 + g(x)y$ .  
Пример. Уравнение (121) [1]

$$y' - y^2 + y \sin x - \cos x = 0.$$

Очевидно, представляя уравнение (1) в форме (4) и накладывая на уравнения  $F(x, y, y') = 0$  и  $\Phi(x; y) = 0$  условие разрешимости в квадратурах, а на коэффициенты этих уравнений ограничения из условия  $y_1 = y_2$  или  $|y_1| = |y_2|$ , где  $y_1, y_2$  — решения указанных уравнений, можно получить серию условий, когда частное решение уравнения (1) выражается через его коэффициенты

Например, частное решение уравнения (1) можно выразить через его коэффициенты, если его представить в форме (4), где

$$F_4(x, y, y') \equiv y' - g(x)y + h_1(x),$$

$$\Phi_4(x, y) = f(x)y^2 + h_2(x),$$

$$h_1(x) + h_2(x) \equiv h(x), \quad |y_1| = |y_2|.$$

Возможные условия, накладываемые на коэффициенты уравнения (1) и обеспечивающие его решение в квадратурах, определяет следующая основная теорема.

*Основная теорема.* Если общее уравнение Риккати

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0 \quad (9)$$

может быть представлено в виде

$$F(x, y, y') + \Phi(x, y) = 0,$$

где дифференциальное уравнение  $F(x, y, y') = 0$  имеет решение  $y_1(x)$ , алгебраическое по  $y$  уравнение  $\Phi(x, y) = 0$  имеет решение  $y_2(x)$ , коэффициенты этих уравнений таковы, что  $|y_1| = |y_2|$  или  $y_1 = y_2$ ,  $F(x, y, y') + \Phi(x, y) = \varphi(x, y, y')$  и  $\varphi(x, y, y') = y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$ , то частные решения уравнения Риккати равны  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ .

Полученные условия позволяют определить новые классы уравнений Риккати, разрешимые в квадратурах, и могут быть использованы при анализе устройств из отрезков неоднородных линий.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Э Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.
2. I. Sugai, Electrical Communication, 37, № 56 (1961).
3. L. Gruner, Proc. IRE, 50, № 2, 263 (1962).

Поступила в редакцию  
29 мая 1967 г

УДК 517.9

## К РЕШЕНИЮ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С ПОМОЩЬЮ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Б. И. Курилин

Решение задачи синтеза различных устройств из отрезков неоднородных линий значительно упрощается [1], если известно аналитическое решение дифференциального уравнения Риккати для входного сопротивления или коэффициента отражения

В настоящей заметке получены рекуррентные формулы, позволяющие находить решение в форме цепной дроби общего уравнения Риккати

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x), \quad (1)$$

коэффициенты  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  которого непрерывные, достаточное число раз дифференцируемые функции. В основе решения лежит метод Лагранжа и результаты работы [3].

Идея метода Лагранжа решения дифференциальных уравнений с помощью цепных дробей состоит в следующем [3]. Пусть нулевое приближение решения определяется функцией  $y_0 = \xi_0(x)$ . Положив

$$y = \xi_0(x)(1 + y_1)^{-1} \quad (2)$$

и подставив (2) в исходное уравнение, получаем уравнение для определения первого приближения  $\xi_1(x)$ . Продолжая этот процесс и считая

$$y_{n-1} = \xi_{n-1}(x)[1 + y_n(x)]^{-1}, \quad (3)$$

получим в итоге решение исходного уравнения в виде цепной дроби  $[\xi_n]_0^\infty$ .

При этом  $n$ -е приближенное решение уравнения определяется  $n$ -й подходящей дробью данной бесконечной дроби ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Трудность практического применения метода Лагранжа обусловлена сложностью нахождения аналитического выражения для  $\xi_n(x)$ , поскольку для удобства получения приближенного решения необходимо, чтобы  $\xi_n(x)$  достаточно просто выражались через коэффициенты исходного уравнения.

Устранение этой трудности в данной работе достигается тем, что в качестве  $\xi_n(x)$  принимаются функции, определяемые соотношениями (3), (6) или (8) работы [2]. Благодаря этому устанавливаются достаточно простые рекуррентные соотношения между членами цепной дроби и коэффициентами исходного уравнения (1).

Рассмотрим вначале случай, когда нулевое приближение определяется соотношением (3) работы [2]:

$$\xi_0 = \pm \sqrt{-h/f}. \quad (4)$$

Тогда с помощью подстановки (2) получим следующее уравнение для первого приближения:

$$y'_1 = -\frac{h(x)}{\xi_0} y_1^2 + y_1 \left[ \frac{\xi'_0(x)}{\xi_0(x)} - g(x) - \frac{2h(x)}{\xi_0(x)} \right] + \left[ \frac{\xi'_0(x)}{\xi_0(x)} - g(x) \right]$$

или, вводя обозначения коэффициентов по аналогии с уравнением (1),

$$y'_1 = f_1(x)y_1^2 + g_1(x)y_1 + h_1(x),$$

где

$$f_1(x) = -\frac{h(x)}{\xi_0(x)}, \quad g_1(x) = \frac{\xi'_0(x)}{\xi_0(x)} - g(x) - 2\frac{h(x)}{\xi_0(x)},$$

$$h_1(x) = \frac{\xi'_0(x)}{\xi_0(x)} - g(x).$$

Продолжая этот процесс, можно получить следующее уравнение для  $n$ -го приближения:

$$y'_n = f_n(x)y_n^2 + g_n(x)y_n + h_n(x) \quad (5)$$

и следующее выражение для  $\xi_n(x)$ :

$$\xi_n(x) = \pm \left[ -\frac{h_n(x)}{f_n(x)} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где

$$g_n(x) = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - g_{n-1}(x) - 2\frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)},$$

$$f_n(x) = -\frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}, \quad h_n(x) = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - g_{n-1}(x),$$

$$g_0(x) \equiv g(x), \quad f_0(x) \equiv f(x), \quad h_0(x) \equiv h(x). \quad (7)$$

Соотношения (6) и (9) определяют общий член цепной дроби

$$K_1(x) = \frac{\xi_0}{1} + \frac{\xi_1}{1} + \dots + \frac{\xi_n}{1} + \dots, \quad (8)$$

которая, являясь функцией  $f_n, g_n, h_n$  определяет в общем случае некоторую специальную функцию по  $x$ .

Члены цепной дроби (8) и коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям, полученным на основе (7).

$$\xi_n(x) = \pm \left[ \frac{\xi'_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)\xi_{n-1}(x)}{h_{n-1}(x)} \right]^{1/2}; \quad (9)$$

$$f_n(x) = \xi_{n-1}(x)f_{n-1}(x), \quad h_n(x) = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - h_{n-1}(x) - 2 \frac{h_{n-2}(x)}{\xi_{n-2}(x)}, \quad (10)$$

$$g_n = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - g_{n-1}(x) - \frac{2}{\xi_{n-1}(x)} \frac{\xi'_{n-2}}{\xi_{n-2}} + 2g_{n-2}(x).$$

В практике вычислений удобно пользоваться при  $n = 1$  соотношениями (6), (7), а при  $n > 2$  — соотношениями (9), (10).

Дробь (8) будет конечной, если имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Если для некоторого  $n = v$  коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют условию

$$-\frac{h_v(x)}{f_v(x)} = C_0 \exp \left[ 2 \int g_v(x) dx \right], \quad (11)$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то  $v$ -я подходящая дробь разложения (8) является частным решением уравнения Риккати (1), а  $(v+1)$ -я подходящая дробь — его общим решением.

Доказательство первой части утверждения (о частном решении) аналогично доказательству теоремы I работы [2], а вторая часть следует затем из свойств уравнения Риккати.

Аналогично можно построить цепную дробь, если на каждом этапе приближения определять  $\xi_n(x)$  из соотношения для  $y_n(x)$  [2]:

$$y_n(x) = C \exp \int g(x) dx. \quad (12)$$

В этом случае числитель цепной дроби определяется формулой

$$\xi_n(x) = C_n \exp \int g(x) dx, \quad (13)$$

где коэффициенты уравнения (5) равны

$$f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}, \quad g_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{2h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}, \\ h_n(x) = (-1)^{n-1} \left[ f_{n-1}(x) \xi_{n-1}(x) + \frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} \right]. \quad (14)$$

Цепная дробь, определяемая соотношениями (13), (14), будет конечной при выполнении условий теоремы I.

Если принять, что члены цепной дроби находятся на основе соотношения (6) работы [2], можно получить следующие рекуррентные формулы:

$$\xi_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)\xi_{n-1}(x) - \xi'_{n-1}(x)}{\xi'_{n-1}(x) - h_{n-1}(x)}, \quad (15)$$

где

$$f_n(x) = \frac{1}{\xi_{n-1}(x)} \frac{\xi'_{n-2}(x)}{\xi_{n-2}(x)} + f_{n-2}(x) \frac{\xi_{n-2}(x)}{\xi_{n-1}(x)},$$

$$h_n(x) = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} + \xi_{n-1}(x) \frac{h_{n-2}(x)}{\xi_{n-2}(x)}, \quad (16)$$

$$g_n(x) = \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - g_{n-1}(x), \quad \xi_0 = -\frac{h(x)}{g(x)}.$$

Условия, когда цепная дробь  $K_2(x)$ , определяемая (15), (16), будет конечной, дает следующая теорема

**Теорема 2.** Если для некоторого  $n = v$  коэффициенты уравнения (5), определяемые соотношениями (16), удовлетворяют условию

$$\frac{g_v(x)}{h_v(x)} = - \int f_v(x) dx + C_0,$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то  $v$ -я подходящая дробь, определяемая соотношениями (15), (16), является частным решением уравнения (1), а  $(v+1)$ -я подходящая дробь — общим решением.

Доказательство первой части утверждения аналогично доказательству теоремы 2 работы [2], а вторая часть следует из свойств уравнения Риккати

Аналогично определяются члены цепной дроби, если воспользоваться соотношением (8) работы [2]. В этом случае

$$\xi_n(x) = -\frac{g_n(x)}{f_n(x)} = \frac{g_{n-1}(x)\xi_{n-1}(x) + 2h_{n-1}(x) - \xi'_{n-1}(x)}{\xi'_{n-1}(x) - h_{n-1}(x)}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -\frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}, & h_n(x) &= \frac{\xi'_{n-1}(x) - h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}, \\ g_n(x) &= \frac{\xi'_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)} - g_{n-1}(x) - 2 \frac{h_{n-1}(x)}{\xi_{n-1}(x)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Цепная дробь, определяемая соотношениями (17), (18), будет конечной, если имеется место следующая теорема

**Теорема 3.** Если для некоторого  $n = v$  коэффициенты уравнения (5), определяемые соотношением (18), удовлетворяют условию

$$\frac{g_v(x)}{f_v(x)} = - \int h_v(x) dx + C_0,$$

где  $C_0 = \text{const}$ , то  $v$ -я подходящая дробь, определяемая соотношениями (17), (18), будет частным решением уравнения (1), а  $(v+1)$ -я подходящая дробь — его общим решением

Доказательство первой части утверждения аналогично доказательству теоремы 3 работы [2], последующее утверждение следует затем из свойств уравнения Риккати.

Условия сходимости полученных цепных дробей и вытекающие из этого для некоторых случаев дополнительные ограничения или ослабления условий на коэффициенты уравнения (1) легко получить на основе общей теории цепных дробей [3].

Целесообразность применения той или иной формы цепной дроби зависит от ряда условий и, в первую очередь, от вида функций  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . Задача о выборе вида дроби, обеспечивающей минимальную погрешность приближенного решения уравнения (1) для фиксированного  $n$ , представляет самостоятельный интерес и будет рассмотрена отдельно.

Результаты работы определяют решение уравнения (1) для более общего случая по сравнению с известными [1—4].

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность М. А. Лаврентьеву за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ, изд. Связь, М., 1965
2. Б. И. Курилин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика.
3. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Гостехиздат, М., 1956
4. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, М., 1961.