

УДК 621.372.22

УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЛИНИЯХ

Л. А. Островский

Исследованы особенности ударных волн в линиях, содержащих одновременно активные (способные выделять энергию) и реактивные нелинейные элементы. Найдены некоторые специфические типы ударных волн, в их числе структуры, характерные для волн детонации в газодинамике.

Электромагнитные волновые процессы в нелинейных активных средах исследуются в настоящее время весьма интенсивно; это относится как к линиям передачи радиодиапазона [1-7], так и к оптическим системам [8-10]. В данной работе рассматриваются ударные волны в линиях с активными элементами. Интерес к подобным задачам оправдан не только из-за возможных применений в специальных устройствах, но и ввиду наличия существенных аналогий с другими процессами (волны детонации, оптические импульсы в активной среде), обсуждаемых ниже и позволяющих моделировать эти процессы в линиях передачи.

Рассмотрим линию, содержащую элементы, вольтамперная характеристика которых имеет падающий участок (рис. 1а). Поскольку речь идет об ударных волнах, то нелинейным должен быть, кроме активного, какой-либо реактивный параметр системы. Далее будем считать таким параметром емкость с нелинейной зависимостью между зарядом Q и напряжением U ; принятый здесь качественный вид этой зависимости показан на рис. 1б.

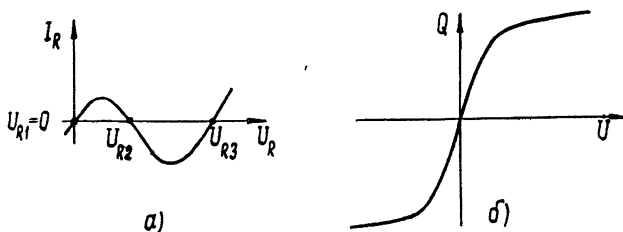


Рис. 1.

Для существования ударной волны важен не только вид нелинейных характеристик, но и способ включения соответствующих элементов в линию, определяющий ее дисперсионные свойства. В частности, активный элемент должен быть «высокочастотным», т. е. оказывать наибольшее влияние в области быстрого изменения тока и напряжения в волне.

Ниже приводятся простейшие эквивалентные схемы распределенных систем, удовлетворяющие этому условию. Ввиду сложности общей задачи сначала рассматриваются, как обычно, стационарные волны, в которых все величины зависят от одной переменной $\xi = t - z/v_p$ ($v_p = \text{const}$).

1. ПРОСТЕЙШАЯ СХЕМА

Наиболее простая схема линии, содержащей указанные элементы и допускающей ударные волны, изображена на рис. 2. Для стационарной волны в такой линии легко получить уравнение первого порядка

$$\frac{dQ}{d\xi} = I_R(U_R), \quad (1)$$

дополненное алгебраическим соотношением

$$U_R = (Lv_p^2 Q - U) - (Lv_p^2 Q - U_{-\infty} - U_{-\infty} L). \quad (2)$$

Через $Q_{-\infty}$, $U_{-\infty}$ обозначены величины при $\xi \rightarrow -\infty$ (перед фронтом волны). Далее для простоты будем рассматривать случай, когда все эти значения равны нулю. Ток в линии при этом пропорционален Q : $I = v_p Q$.

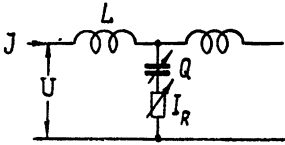


Рис. 2.

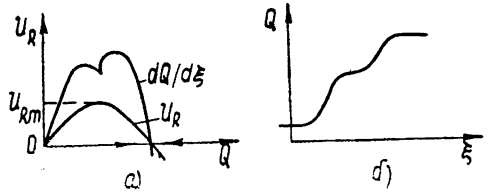


Рис. 3.

Вид решения зависит от функции (2), которая, в свою очередь, определяется нелинейной характеристикой емкости $Q(U)$. Из рис. 1б ясно, что функция (2) ($U_R = U_R(Q)$) имеет максимум $U_R = U_{Rm}$ (рис. 3а). На рис. 3' показаны особенности решения при $U_{Rm} < U_{R2}$. В этом случае $U_R(-\infty) = U_R(+\infty) = 0$, и всюду $U_R < U_{R2}$, т. е. система не попадает на активный участок. В этом смысле активный элемент не дает ничего нового, однако в структуре волны могут быть особенности (например, две точки перегиба, как показано на рис. 3б). Соотношение (2) при $U_R = 0$ дает обычное граничное условие [1], связывающее скорость волны с ее амплитудой $U_{\infty} = U(\xi \rightarrow +\infty)$: $Lv_p^2 = U_{\infty}/Q_{\infty}$.

В другом случае, $U_{Rm} > U_{R2}$, решение приходит в точку равновесия с $U_R = U_{R2}$. Хотя в стационарном решении эта точка устойчива, ясно, что, так как в ней $(dI_R/dU_R) < 0$, возмущения произвольного вида, отличные от стационарных, нарастают, и такая волна в действительности неосуществима. Поэтому, если при некоторой амплитуде $U_{\infty} \geq U_{кр}$ неравенство $U_{Rm} \geq U_{R2}$ выполняется, то возможны стационарные волны лишь с амплитудой, меньшей $U_{кр}$.

2. ЛИНИЯ С ЗАМЕДЛЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ АКТИВНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

1. В рассмотренной линии величина U_R в стационарной волне, начинающейся при $U_R = 0$, изменяется в пределах $0 \leq U_R \leq U_{R2}$; при этом энергия волны может только диссипироваться. Особенности активного элемента проявляются лишь в системе, описываемой уравнением второго (или более высокого) порядка, тогда на фазовой плоскости возможны траектории, идущие из точки с $U_R = 0$ в точку с $U_R = U_{R2}$, минуя точку с $U_R = U_{R2}$. В качестве примера рассмотрим схему с двумя параллельными ветвями, одна из которых содержит нелинейную емкость $C' = dQ'/dU'$ и постоянное сопротивление r , а другая — линейную емкость C'' и активный элемент (рис. 4).

Уравнения стационарных волн в такой линии могут быть приведены к виду

$$rC'(U') \frac{dU'}{d\xi} = L\sigma_p^2 U'' + L\sigma_p^2 Q' - U' - A; \quad (3a)$$

$$\frac{dU''}{d\xi} = \frac{I_R(U_R)}{C''}; \quad (3б)$$

$$U_R = L\sigma_p^2 Q' + U''(L\sigma_p^2 C'' - 1) - A. \quad (3в)$$

Здесь σ' , σ'' — напряжения на соответствующих емкостях; $A = [L\sigma_p^2(Q' + C''U'') - U'']_{\xi \rightarrow -\infty}$; в дальнейшем снова полагаем $A = 0$.

Приравнявая нулю правые части (3а) и (3б), найдем положения равновесия системы и граничное условие, связывающее амплитуду волны $U_\infty = U'_\infty$ при $\xi \rightarrow \infty$ и ее скорость:

$$L\sigma_p^2 = \frac{U_\infty}{Q'_\infty + C''(U_\infty - U_{R1})}. \quad (4)$$

Условие (4) отличается от обычного [11] лишь тем, что в него входят значения U_{Ri} ($i = 1, 2, 3$), соответствующие $I_R = 0$. Далее будет показано, что волны с $U_R(\infty) = U_{R2}$ неосуществимы, возможны два типа волн: с $U_R \rightarrow 0$ и $U_R \rightarrow U_{R3}$.

2. Структура ударной волны может быть исследована на фазовой плоскости. Наиболее нагляден и интересен физически случай, когда влияние активного элемента можно отделить от влияния постоянного сопротивления. Поэтому предположим сначала, что r мало и в волне выполняется условие

$$\tau' = r C'_{\max} \ll \tau'' = \left| \frac{C''}{I_R} \right|_{\min}, \quad (5)$$

т. е. характерные времена заряда конденсаторов C' и C'' существенно различны. При этом (3а) содержит малый параметр при производной, и данная линия является системой с замедленным возбуждением одной из степеней свободы [12]. Процессы в ней можно разбить на быстрые, протекающие за время порядка τ' , и медленные — за время порядка τ'' .

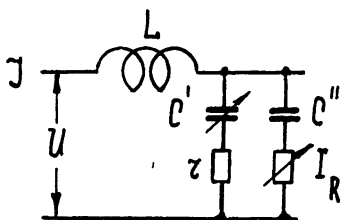


Рис. 4.

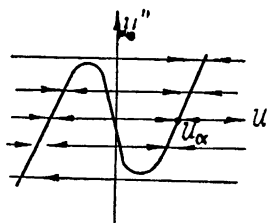


Рис. 5.

Из (3) ясно, что U'' не может меняться быстро, поэтому на плоскости переменных U' , U'' траектории быстрых движений параллельны оси U' ; направление движения легко определить. Медленные движения происходят (рис. 5) в окрестности кривой:

$$L\sigma_p^2 C'' U'' = U' - L\sigma_p^2 Q''. \quad (6)$$

Качественный ход «быстрых» и «медленных» траекторий для принятой зависимости $Q'(U')$ (рис. 1б) показан на рис. 6а. Движение всегда начинается со скачка из начала координат в точку U_a пересечения оси $U'' = 0$ с кривой (6), затем движение идет по этой кривой до одной из точек равновесия, в которой, согласно (3б), $I_R = 0$. Из (3в) и (6) следует при этом

$$U_\infty = U'_\infty = U''_\infty + U_{Ri} \quad (7)$$

Точки равновесия даются теперь пересечением кривой (6) и прямых (7).

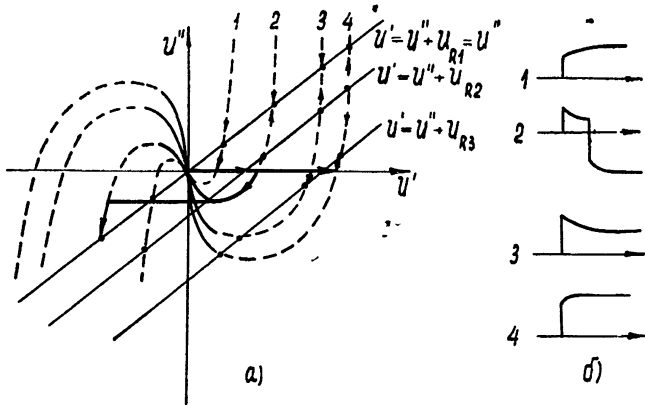


Рис. 6.

При заданных нелинейных характеристиках линии ход процесса зависит от v_p , т. е. от амплитуды ударной волны. Для интересующих нас волн с $U_a > 0$ (при $U_a < 0$ активный элемент не вносит особенностей) случаи, возможные при характеристиках рис. 2а, б, показаны на рис. 6а, а вид соответствующих структур волны $U(\xi)$ — на рис. 6б. Эти случаи следующие.

1) При малой амплитуде начального скачка $|U_a < U_{R2}|$ система приходит в точку равновесия с $U_R = 0$, $U_\infty > U_a$ (единственную в области $U > 0$); в активную область движение не попадает.

2) При $U_{R2} < U_a < U_{R3}$ изображающая точка после скачка доходит до «точки срыва» — минимума кривой (6). Затем происходит второй скачок — в область $U < 0$, где и лежит конечная точка равновесия. Ударная волна имеет своеобразную структуру с двумя разрывами и изменением знака U . Стационарных волн с $U_\infty > 0$ вообще не существует.

3) Если U_a еще больше, но остается в области $U_{R2} < U_a < U_{R3}$, то после скачка $U = U'$ уменьшается, а U_R растет до значения U_{R3} . Эта структура также специфична для активных линий — в пассивных после скачка U всегда растет.

4) Если $U_a > U_{R3}$, то система также приходит в точку с U_{R3} , но активные свойства линии не проявляются, и структура волны обычная.

Заметим, что случаи 2), 3) осуществимы только при достаточно сильно выраженной нелинейности функций $Q'(U')$ и не слишком больших U_{R2} , U_{R3} . Существенно, что, во-первых, структура волны с $U_a > 0$ всегда однозначна и, во-вторых, точки с $U_R = U_{R2}$ всегда неустойчивы уже в пределах стационарного решения. Аналогично могут быть рассмотрены волны, начинающиеся в точке U_{R3} и кончающиеся при $U_R = 0$ или при $U_R = U_{R3}$. Процессы, начинающиеся в точке U_{R2} , носят автоколебательный характер и здесь не рассматриваются.

Режим 3), когда в области за скачком генерируется энергия,

имеет довольно близкую аналогию с волной детонации в газодинамике, где за обычной ударной волной существует область горения [13]. В частности, профиль температуры в волне детонации качественно совпадает с показанным на рис. 6 б (кривая 3). Как уже указывалось, это обстоятельство позволяет, подбирая соответствующие характеристики, моделировать волны детонации. При этом следует учитывать ту особенность, что, если детонация—всегда однократный процесс в данной среде (вся энергия горючей смеси расходуется на одном фронте), то в рассматриваемом случае процесс может быть многократно повторен в одной и той же линии.

Волна 3) имеет и другую, несколько более далекую аналогию: подобную форму приобретает волна огибающей бегущего светового импульса в нелинейной активной среде [9, 10]. Вообще эффект нарастания переднего участка типичен для волн в активных системах.

3. Если величиной τ' пренебречь нельзя, структура фазовой плоскости более сложна. Характер особых точек нетрудно определить обычным образом, полагая малые отклонения пропорциональными e^{it} . В результате получим

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \\ a &= \frac{1}{rC'} \left[(1 - v_p^2 LC') + rg \frac{C'}{C''} (1 - LC''v_p^2) \right], \\ b &= \frac{g}{rC'C''} [1 - Lv_p^2(C' + C'')]. \end{aligned} \quad (8)$$

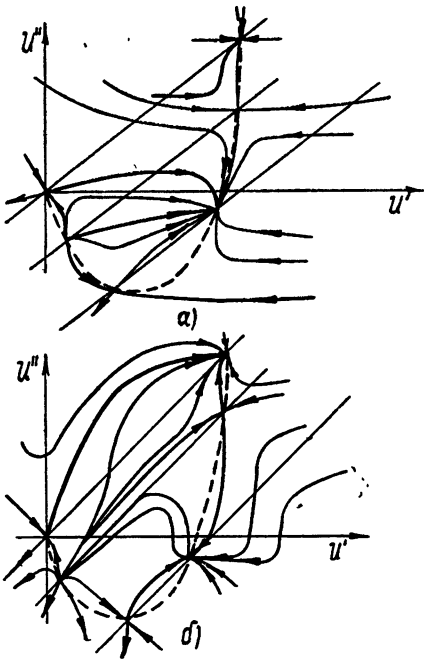


Рис. 7.

Здесь величины $C'(U) = dQ'/dU'$, $g(U_R) = dI_R/dU_R$ берутся в соответствующей точке равновесия. При $b < 0$ данная точка — седло, при $b > 0$ — устойчивый или неустойчивый узел. Искомая ударная волна дается сепаратрисой, идущей из начала координат (седло) в одну из других точек равновесия (устойчивый узел). При $\tau' < \tau''$ картина траекторий топологически близка к рассмотренным (рис. 7а), но при $\tau' > \tau''$ сепаратриса всегда приходит в точку с $U_R = 0$ (рис. 7б).

4. Как известно [11], на фронте обычной ударной волны всегда диссипируется энергия. В нашем случае энергетические соотношения изменяются из-за наличия активного элемента (речь идет о волне с $U_R > U_{R3}$). Записав уравнение Пойнтинга для области, содержащей в данный момент ударный фронт, нетрудно найти диссипируемую мощность

$$P = v_p \left\{ \frac{U_\infty Q'_\infty}{2} - \int_0^{Q'_\infty} U' dQ' + \frac{C'' U_{R3}}{2} (U_\infty - U_{R3}) \right\}. \quad (9)$$

Первые два слагаемых в (9) дают обычное выражение для диссипации; последний член при $U_\infty < U_{R3}$ (в случаях 2), и 3)) отрицателен. При определенных условиях этот член может преобладать, тогда $P < 0$, и на ударной волне энергия возрастает за счет активного элемента.

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Рассмотрим распространение импульса конечной длительности, фронтом которого является «активная» ударная волна (разрыв), рис. 8. Если амплитуда импульса достаточно мала, то волну вне разрыва можно считать простой: каждая точка ее профиля движется с постоянной скоростью $v(U) = [L(C' + C'')]^{-1/2}$. Решение такой задачи вполне аналогично известному для обычных ударных волн: на устойчивом разрыве $v_\infty \geq v_p$, поэтому импульс растягивается и затухает. Данная задача имеет, однако, существенную особенность, связанную с тем, что величина скачка может достигнуть значения U_d , при котором $v_\infty = v_p$. После этого затухание скачка прекращается; значение U_d соответствует точке Жуге в детонационной волне [13]. В другом случае волна с $U_R \rightarrow U_{R3}$ делается невозможной еще при $v_\infty > v_p$; далее такой разрыв переходит в разрыв с $U_R \rightarrow 0$ и затухает обычным образом.

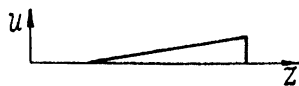


Рис. 8.

Нетрудно найти изменение энергии E рассматриваемого импульса, учитывая, что он состоит из разрыва и простой волны. Элементарный расчет дает

$$\frac{dE}{dt} = \frac{C'' U_{R3}}{2 \sqrt{(C'_m + C'')L}} U_m - v_p \left[\frac{U_m Q'_m}{2} - \int_0^{Q'_m} U dQ \right], \quad (10)$$

где U_m — амплитуда импульса. Заметим, что изменение E является результатом трех процессов: диссипации или генерации энергии (9) на разрыве, работы активного элемента на спаде импульса, пропорциональной $C'' U_{R3} \frac{\partial U}{\partial t}$, и, наконец, увеличения запаса энергии, остающейся

в линии после прохождения импульса (так как в конце импульса $U \rightarrow 0$, $U_R \rightarrow U_{R3}$, то емкость C'' заряжена до напряжения $-U_{R3}$). Если в волне с $U_R \rightarrow 0$ этим эффектом для плавного спада можно пренебречь, то здесь этого сделать нельзя, так как U_{R3} конечно. Здесь проявляется различие с детонационной волной в газе, когда после прохождения ударной волны остается выгоревший газ, в котором отсутствуют активные процессы. Очевидно, что, если разрыв достигает величины U_d , то далее энергия импульса всегда растет.

2. Задача о формировании ударных волн рассмотренных типов чрезвычайно сложна. Несколько проще проследить за установлением «медленной» части такой волны, считая переднюю «быструю» область скачком. Тогда все существенные особенности процесса можно рассмотреть, полагая участки характеристик (рис. 1) за скачком линейными. Задача сводится при этом к интегрированию линейного уравнения теплопроводности с начальным условием в виде ступенчатой функции. Все же ввиду того, что граничное условие задается на движущемся скачке, соответствующая процедура довольно громоздка.

Заметим, что, если начальное распределение напряжения за скачком имеет максимум, то в процессе установления стационарной волны этот максимум исчезнет; для «активной» волны (рис. 6б, случай 3)) максимальное значение U устанавливается на фронте. Этот эффект

«ускорения» максимума (увеличение фазовой скорости сигнала) аналогичен наблюдавшемуся для световых импульсов в активной среде [10].

Укажем, в заключение, что формирование почти всех типов рассмотренных здесь волн наблюдалось экспериментально [15].

Автор весьма признателен А. В. Гапонову, который впервые высказал идею о возможности существования волны «детонационного» типа в электродинамике и неоднократно обсуждал с автором результаты данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 8, 2006 (1963).
2. Т. М. Ильинова, Радиотехника и электроника, 9, 2078 (1964).
3. Ю. И. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 1709 (1964); 9, 590 (1964); 9, 2184 (1964).
4. В. Р. Телеснин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 3, 624 (1963); 8, № 5, 977 (1965).
5. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 794 (1965); 9, № 1, 173 (1966); Радиотехника и электроника, 11, 1467 (1966).
6. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 987 (1966).
7. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 491 (1964).
8. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 963 (1964), Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 91 (1965).
9. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 899 (1965).
10. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, Оптика и спектроскопия, 18, 1042 (1965); ДАН СССР, 167, 73 (1966).
11. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 79 (1960).
12. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ, 35, 690 (1965).
13. Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946.
14. Р. Курант, Г. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, 1950.
15. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, В. В. Папко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 907 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 апреля 1967 г

SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR ACTIVE LINES

L. A. Ostrovskii

The features of shock waves in lines containing active as well as reactive nonlinear elements are studied. Shock waves of certain specific types are found among which are the structures similar to detonation waves in gas dynamics