

УДК 621.371.165

ПОПЕРЕЧНИКИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПО РАДИУСУ И УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Ю. М. Жидко

Рассматривается в приближении геометрической оптики отражение плоской электромагнитной волны от диэлектрического цилиндра и шара для случая, когда показатель преломления n зависит от радиуса и угловой координаты по закону $n^2 = 1 - d^2 \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$. Найдены траектории лучей и зависимость поперечников обратного рассеяния от угла падения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача об отыскании поперечников рассеяния неоднородных диэлектрических объектов в последнее время приобрела особый интерес в связи с исследованиями различных неоднородных плазменных образований в ионосфере. Решение этой задачи при произвольной зависимости диэлектрической проницаемости от координат получить не удастся. В связи с этим представляется интересным отыскание как точных, так и приближенных решений ряда «эталонных» задач — для простейших конфигураций объекта и зависимостей от координат. Наличие таких решений позволяет делать оценки поперечников рассеяния более сложных неоднородных объектов.

Наиболее простыми неоднородными объектами являются диэлектрические тела со сферической и цилиндрической симметрией. Задача о рассеянии электромагнитных волн телами такого сорта достаточно хорошо исследована (по крайней мере в приближении геометрической оптики).

Отражательные характеристики объектов более сложной формы изучены гораздо меньше даже в приближении геометрической оптики. Наиболее просто поддаются изучению те частные случаи, когда зависимость показателя преломления n от координат такова, что переменные в уравнении эйконала разделяются. В частности, в сферической системе координат (r, θ, φ) такое разделение имеет место при следующей зависимости показателя преломления от координат:

$$n = 1 + \frac{f(\theta)}{r^2}, \quad (1a)$$

где $f(\theta)$ — произвольная функция угловой координаты θ .

В работе [1] рассмотрен частный случай такой зависимости:

$$f(\theta) = \begin{cases} -b^2 (\theta_0^2 - \theta^2) & \text{при } \theta \leq \theta_0, \\ 0 & \text{при } \theta \geq \theta_0, \end{cases}$$

когда неоднородное плазменное образование находится внутри кругового конуса с углом при вершине, равным $2\theta_0$.

В настоящей работе рассматривается в приближении геометрической оптики другой частный случай, когда показатель преломления зависит от координат по закону:

$$f(\theta) = \begin{cases} -d^2 \cos^2 \theta & \text{при } \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{при } \theta \geq \pi/2 \end{cases}, \quad (16)$$

где θ и r — сферические либо цилиндрические координаты.

Следует заметить, что неоднородное плазменное образование, показатель преломления которого описывается выражением (1а), имеет особенность при $r = 0$. В этой точке как показатель преломления, так и его производные бесконечны. Следовательно, в окрестности $r = 0$ приближение геометрической оптики не применимо. Однако очевидно, что эта особенность при условии $d \gg \lambda$, где λ — длина волны в свободном пространстве, не играет существенной роли, по крайней мере, для углов падения электромагнитной волны θ_∞ , при которых светящаяся точка находится вдали от начала координат, т. е. при θ_∞ , не слишком близких к π .

Оценку порядка величины поперечника обратного рассеяния можно провести, если заменить реальный неоднородный плазменный объект идеально отражающим телом, поверхность которого совпадает с поверхностью $n = 0$ неоднородного шара. При этом мы пренебрегаем эффектами рефракции электромагнитной волны в переходной области. Как видно из выражения (1а), поверхность $n = 0$ имеет вид сферы, диаметр которой равен d . Следовательно, в рассматриваемом приближении эффективный поперечник обратного рассеяния не зависит от угла падения и равен $\frac{\pi}{4}d^2$. Однако это приближение является весьма грубым.

Рефракция может привести к существенному изменению поперечника. Поэтому представляется интересным нахождение более точного решения задачи.

В приближении геометрической оптики эффективный поперечник обратного рассеяния объекта определяется выражением

$$\sigma = 4\pi \frac{dS}{d\Omega},$$

где dS — площадь поперечного сечения бесконечно малой трубки падающих на объект параллельных лучей, расположенных вблизи «зеркального» луча; $d\Omega$ — телесный угол, в котором рассеиваются лучи этой трубки. Зеркальным будем называть луч, отражающийся в направлении, противоположном направлению падающего луча, т. е. $\varphi_0 = \varphi_\infty$, $\theta_0 = \theta_\infty$, где (φ_0, θ_0) и $(\varphi_\infty, \theta_\infty)$ — угловые координаты отраженного и падающего лучей на бесконечности в сферической системе координат.

Введем прямоугольную систему координат ρ, h в плоскости поперечного сечения трубки параллельных падающих лучей. Будем рассматривать прямоугольную трубку с размерами $d\rho, dh$. Тогда

$$dS = d\rho dh, \quad d\Omega = \sin \theta_0 \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} - \frac{\partial \theta_0}{\partial h} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} \right|_{\rho^{(s)}, h^{(s)}} d\rho dh,$$

где индексы $\rho^{(s)}, h^{(s)}$ указывают, что производные взяты в точке $\rho^{(s)}, h^{(s)}$, соответствующей зеркальному лучу. Подставляя dS и $d\Omega$ в выражение для σ , получим

$$\sigma = 4\pi \sin^{-1} \theta_0 \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} - \frac{\partial \theta_0}{\partial h} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} \right|_{\rho^{(s)}, h^{(s)}}^{-1}. \quad (2)$$

Отражательные характеристики неоднородного цилиндра можно охарактеризовать эффективным радиусом, который, как известно, определяется выражением

$$R_{\text{эфф}} = 2 \left. \frac{\partial \rho}{\partial \theta_0} \right|_{\rho(s)}, \quad (3)$$

где ρ — прицельное расстояние.

Таким образом, интересующая нас задача сводится к отысканию производных от θ_0 и φ_0 по ρ и h . Для того, чтобы их найти, необходимо определить траектории падающих и отраженных лучей.

2. ТРАЕКТОРИИ ЛУЧЕЙ

Траектория луча определяется уравнением

$$[drm] = \left[dr \frac{\nabla L}{n} \right] = 0, \quad (4)$$

где m — единичный вектор, направленный вдоль луча, L — эйконал. Уравнение эйконала L в сферической системе координат для среды с показателем преломления (1а) имеет вид

$$\left(\frac{\partial L}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right)^2 = 1 + \frac{f(\theta)}{r^2}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде суммы трех функций:

$$L^2 = f_1(r) + f_2(\theta) + f_3(\varphi). \quad (6)$$

При подстановке (6) в (5) получим следующие выражения для проекций градиента эйконала на координатные оси:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dr} &= (\nabla L)_r = \pm \sqrt{\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}}, \\ \frac{df_2}{d\theta} &= (\nabla L)_\theta = \pm \sqrt{a_1^2 + f(\theta) - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta}}, \\ \frac{df_3}{d\varphi} &= (\nabla L)_\varphi = a_2, \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 — постоянные разделения, определяемые граничными условиями. Единичный вектор m , направленный вдоль луча, равен $\nabla L/n$, следовательно,

$$m = \frac{1}{nr} \left(\pm l_r \sqrt{r^2 - a_1^2} \pm l_\theta \sqrt{a_1^2 + f(\theta) - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta}} + l_\varphi \frac{a_2}{\sin \theta} \right), \quad (7)$$

где l_r , l_θ и l_φ — единичные орты. Подставляя это выражение для m в (4), получим два скалярных дифференциальных уравнения первого порядка.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - a_1^2}} &= \pm \Phi_1(a_1, a_2, \theta) d\theta, \\ d\varphi &= a_2 \Phi_2(a_1, a_2, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Phi_1 = \left(a_2^2 + f(\theta) - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-1/2}, \quad \Phi_2 = \sin^{-2} \theta \left(a_1^2 + f(\theta) - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta} \right)^{-1/2}.$$

Найдем постоянные разделения a_1 и a_2 , исходя из граничных условий. Введем декартову систему координат x, y, z таким образом, чтобы падающий луч (единичный вектор m_r) в точке входа луча в неоднородную среду r_r был параллелен плоскости XZ , т. е. $\varphi_\infty = 0$ (см. рис. 1). Координаты точки r_r и направление луча в ней будем характеризовать величинами $r_r, \theta_r, \varphi_r, \theta_\infty, \rho$ и h , где h — расстояние от прямой, проведенной через точку r_r в направлении луча, до плоскости XZ , ρ — расстояние от начала координат до проекции этой прямой на плоскость XZ (на рис. 1 плоскость $P \parallel XZ$). Уравнение прямой, проходящей через точку r_r в направлении луча, имеет вид

$$\begin{aligned} r \sin \theta \cos \varphi - r \operatorname{tg} \theta_\infty \cos \theta &= \rho / \cos \theta_\infty, \\ r \sin \theta \sin \varphi &= h. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда могут быть найдены производные $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ в точке входа луча в неоднородную среду r_r , которые можно определить и непосредственно из выражения (7), содержащего неизвестные коэффициенты a_1 и a_2 . Это дает возможность после ряда преобразований выразить коэффициенты a_1 и a_2 через параметры h, ρ и θ_∞ :

$$\begin{aligned} a_1^2 &= -f(\theta_r) + \frac{B_2^2}{B_1^2 + B_2^2} (r_r^2 + f(\theta_r)), \\ a_2^2 &= (B_1^2 + B_2^2)^{-1} (r_r^2 + f(\theta_r)), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \operatorname{ctg} \theta_r \left\{ \frac{\rho}{h} \frac{\cos \varphi_r}{\sin \theta_\infty} + \sin \varphi_r \operatorname{ctg} \theta_\infty \right\} + \frac{r_r}{h} \frac{\cos \varphi_r}{\sin \theta_r}, \\ B_2^2 &= \left(\frac{\rho}{h} \frac{\cos \varphi_r}{\sin \theta_\infty} + \sin \varphi_r \operatorname{ctg} \theta_\infty \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta_r}, \\ \theta_r &= \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \theta_\infty \geq \frac{\pi}{2} \\ \theta_\infty & \text{при } \theta_\infty \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \end{aligned}$$

а координаты r_r и φ_r находятся из уравнения (9) при подстановке в него $r = r_r$.

Найдем теперь зависимость угловых координат отраженного луча θ_0 и φ_0 от угла падения θ_∞ и прицельных расстояний ρ и h . Рассмотрим вначале случай $\theta_\infty \leq \frac{\pi}{2}$, когда зеркальный луч на всей траектории находится в неоднородной среде, т. е. $r_r = \infty, \theta_r = \theta_\infty$. При этих значениях r_r и θ_r выражения для постоянных разделения a_1 и a_2 существенно упрощаются:

$$a_1^2 = \rho^2 - f(\theta_\infty) + h^2, \quad a_2 = h \sin \theta_\infty. \quad (11)$$

Интегрируя уравнения (8) с учетом изменения знаков правых частей при переходе через точки поворота $r = a_1$ (точка наименьшего расстояния от траектории луча до начала координат) и $r = r_n$ (точка минимального угла, рис. 2), получим уравнения

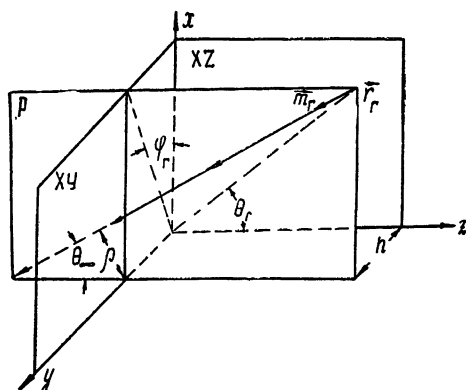


Рис. 1.

$$\int_{\theta_n}^{\theta_0} \Phi_1(a_1, a_2, \theta) d\theta + \int_{\theta_n}^{\theta_\infty} \Phi_1(a_1, a_2, \theta) d\theta = \frac{\pi}{a_1},$$

$$a_2 \int_{\theta_n}^{\theta_0} \Phi_2(a_1, a_2, \theta) d\theta + a_2 \int_{\theta_n}^{\theta_\infty} \Phi_2(a_1, a_2, \theta) d\theta = \varphi_0, \quad (12)$$

определяющие искомую зависимость углов θ_0 и φ_0 от ρ , h и θ_∞ для $\theta_\infty \leq \frac{\pi}{2}$.

Угол θ_n определяется из равенства нулю θ -составляющей единичного вектора m :

$$a_1^2 + f(\theta_n) - \frac{a_2^2}{\sin^2 \theta_n} = 0.$$

При $\theta_\infty > \frac{\pi}{2}$ зависимость углов θ_0 и φ_0 от прицельных параметров находится аналогичным образом. Следует лишь учесть, что в этом случае точка входа луча в неоднородную среду (r_r) и точка выхода из нее (r_b) уже не находятся в бесконечности:

$$r_r^2 = h^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta_\infty}, \quad \theta_r = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_r = \arcsin \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2 \cos^{-2} \theta_\infty}},$$

$$r_b = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}{\cos(\pi - \theta_0)}, \quad \theta_b = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_b = \arctg \frac{\sqrt{r_b^2 - a_1^2} \operatorname{tg} \varphi_0 - a_2}{\sqrt{r_b^2 - a_1^2} + a_2 \operatorname{tg} \varphi_0}. \quad (13)$$

Это несколько меняет связь между параметрами a_1 , a_2 и прицельными расстояниями ρ , h :

$$a_1^2 = \rho^2 + h^2 P_1, \quad a_2 = h P_2, \quad (14)$$

где P_1 и P_2 —функции угла падения θ_∞ и прицельных расстояний ρ и h , обладающие следующим свойством:

$$P_1(h=0) = 1, \quad P_2(h=0) = \sin \theta_\infty. \quad (15)$$

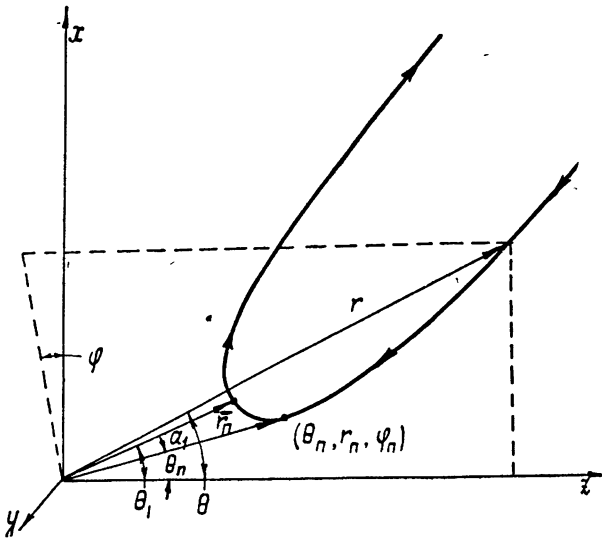


Рис. 2. Точки поворота на траектории луча.

Интегрируя уравнения (8) от точки входа луча в неоднородную среду до точки выхода, получим

$$\arccos \frac{a_1}{r_r} + \arccos \frac{a_1}{r_b} = 2a_1 \int_{\theta_n}^{\pi/2} \Phi(a_1, a_2, \theta) d\theta, \quad (16)$$

$$\varphi_b = \varphi_r + 2a_2 \int_{\theta_n}^{\pi/2} \Phi_2(a_1, a_2, \theta) d\theta.$$

Подставляя в (12) и (16) $\theta_0 = \theta_\infty$, $\varphi_0 = 0$ и учитывая (1) и (5), перейдем к уравнениям, определяющим параметры $a_1^{(s)}$, $a_2^{(s)}$ (а следовательно, $\rho^{(s)}$ и $h^{(s)}$) зеркального луча для среды, показатель преломления которой изменяется согласно (1а) и (1б):

$$a_2^{(s)} = 0, \quad h^{(s)} = 0,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\psi_\infty, k) = \frac{\pi}{2k} \quad \text{при } \theta_\infty \leq \frac{\pi}{2}, \quad (17a)$$

$$kF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \pi - \theta_\infty \quad \text{при } \theta_\infty \geq \frac{\pi}{2},$$

где $F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, $k = \frac{a_1^{(s)}}{d}$, $\psi = \arcsin\left(\frac{1}{k} \cos \theta\right)$. Траектория же зеркального луча

$r = r(\theta)$ в неоднородной части среды ($\theta \leq \pi/2$) определяется уравнением

$$\arccos k \frac{d}{r} = k \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\psi, k) \right\}. \quad (176)$$

Условие $h^{(3)} = 0$ можно получить и из соображений симметрии: зеркальный луч должен лежать в плоскости, проходящей через ось симметрии.

3. РАСХОДИМОСТЬ ЛУЧЕВЫХ ТРУБОК

Следующим этапом решения задачи является отыскание расходимости лучевых трубок, т. е. производных от углов θ_0 , φ_0 по параметрам ρ и h . Для этого продифференцируем обе части уравнений (12) и (16) по ρ и h . После ряда несложных, но довольно громоздких выкладок получим, с учетом конкретного вида функции $f(\theta)$, определяемого (1а), следующие выражения для производных:

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial h} \right|_{\rho^{(3)}, h^{(3)}} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} \Big|_{\rho^{(3)}, h^{(3)}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho} \right|_{\rho^{(3)}, h^{(3)}} = \begin{cases} -2 \{ \cos^2 \psi_\infty [E(\pi/2, k) - E(\psi_\infty, k)] \times \\ \quad \times \sin \theta_0 + k^2 \cos \psi_\infty \sin \psi_\infty + \\ \quad + (1 - k^2) \operatorname{tg} \psi_\infty \} / d(1 - k^2) \sin \theta_0 & \text{при } \theta_\infty \leq \frac{\pi}{2}, \\ -2 \frac{E(\pi/2, k)}{d(1 - k^2)} & \text{при } \theta_\infty \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} \right|_{\rho^{(3)}, h^{(3)}} = \begin{cases} \frac{2 \sin \theta_\infty}{d(1 - k^2)} \{ E(\pi/2, k) - E(\psi_\infty, k) + \\ \quad + k \cos \psi_\infty \operatorname{ctg} \theta_\infty \} & \text{при } \theta_\infty \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{kd} \cos \theta_\infty + \frac{2 \sin \theta_\infty E(\pi/2, k)}{d(1 - k^2)} & \text{при } \theta_\infty \geq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

где $E(\psi, k) = \int_0^\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \, d\alpha$ — неполный эллиптический интеграл второго рода.

Из-за равенства нулю производных $\frac{\partial \theta_0}{\partial h}$ и $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho}$ формула (2) для поперечника обратного рассеяния σ несколько упрощается:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\sin \theta_\infty} \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi_0}{\partial h} \right|_{\rho^{(3)}, h^{(3)}}^{-1}. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) и (3) дают полное решение поставленной задачи. Однако для того, чтобы ими воспользоваться, необходимо предварительно решить уравнение (17) относительно k .

Результаты численных расчетов приведены в виде графиков на рис. 3, 4. На рис. 3 изображена зависимость прицельного расстояния зеркального луча $\rho^{(3)}$ от угла падения θ_∞ и характерные траектории зеркальных лучей. На графиках рис. 4 даны зависимости эффективного радиуса и эффективного поперечника обратного рассеяния для неодно-

родных цилиндра и шара соответственно. Как следует из этих графиков, наличие неоднородной «подушки», окружающей поверхность $n = 0$, приводит при малых углах облучения к существенному уменьшению эф-

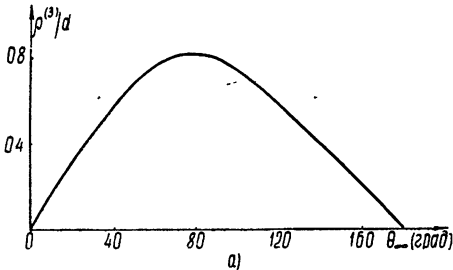


Рис. 3а. Зависимость нормированного прицельного расстояния зеркального луча $\rho^{(s)}/d$ от угла падения θ_{∞} .

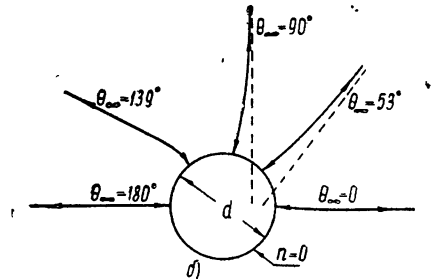


Рис. 3б. Траектории зеркальных лучей.

фективного радиуса и поперечника обратного рассеяния. Так при $\theta_{\infty} = 0$ эффективный поперечник неоднородного шара приблизительно в 9 раз меньше, чем у металлического шара диаметром d в однородном прост-

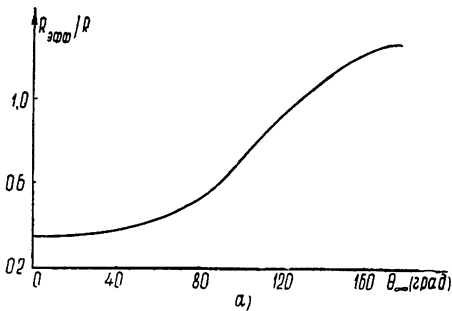


Рис. 4а. Зависимость нормированного эффективного радиуса неоднородного цилиндра от угла падения θ_{∞} .

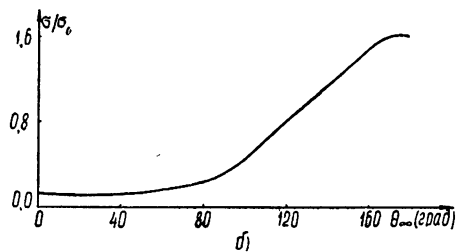


Рис. 4б. Зависимость нормированного поперечника обратного рассеяния от угла падения θ_{∞} .

ранстве ($\sigma_0 = \frac{\pi d^2}{4}$). С увеличением угла падения эффективный радиолокационный поперечник шара монотонно увеличивается, и при $\theta_{\infty} = \pi$ он в 1,6 раза больше, чем σ_0 . Таким образом, при изменении угла падения поперечник обратного рассеяния меняется в весьма широком интервале: максимальное значение поперечника почти в 13 раз больше минимального, т. е. неоднородность по угловой координате оказывается весьма существенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Марьин, Радиотехника и электроника, 10, 1765 (1965).

CROSS-SECTIONS OF BACK SCATTERING OF DIELECTRIC OBJECTS
INHOMOGENEOUS ALONG RADIUS AND ANGULAR COORDINATS

Yu. M. Zhidko

Reflection of a plane electromagnetic wave from a dielectric cylinder and sphere is considered in the geometrical optics approximation for the case when the refractive index n depends on the radius and angular coordinate according to the law $n^2 = 1 - d^2 \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$. The ray trajectories have been found, as well as the dependence of the cross-sections of back scattering on the incidence angle.
