

УДК 621.371.123

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

В. И. Шишов

Рассматривается распространение волн в средах со случайными флуктуациями показателя преломления, рассеивающих волны на малые углы. Строится и исследуется ряд по степеням флуктуаций показателя преломления для четвертого момента напряженности поля волны. Показано, что можно учитывать сильносвязанные диаграммы только низшего порядка, если средний квадрат флуктуаций набега фазы на характерном размере одной неоднородности много меньше единицы. При этом ограничении получено дифференциальное уравнение в частных производных для четвертого момента. Показано, что для четвертого момента разложение по сильносвязанным диаграммам имеет большую область применимости, чем метод плавных возмущений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ряде случаев, в частности, при интерпретации наблюдений мерцания радиосточников малых угловых размеров при затмении их межпланетной плазмой [1, 2] необходимо знать решение задачи о распространении волн в случайных средах при наличии сильных флуктуаций амплитуды. Последняя решена для случая фазового экрана [3, 4] и для случая протяженной среды (когда флуктуации амплитуды развиваются достаточно сильно уже в самом слое случайной среды) с турбулентным спектром неоднородностей [5]. Однако межпланетная среда, по-видимому, ближе всего соответствует случаю протяженной среды, которую можно описать корреляционной функцией с одним характерным размером неоднородностей, причем этот размер много больше длины волны. Ниже рассматривается задача распространения волн применительно к этой модели.

Возьмем плоский слой случайной среды. На границу слоя падает плоская волна единичной амплитуды

$$E|_{z=0} = 1. \quad (1)$$

Примем, что длина волны много меньше характерного размера неоднородностей. Кроме того, ограничимся такими размерами слоя, чтобы интегральное рассеяние происходило на малые углы. Обозначим через  $1 + \varepsilon$  квадрат показателя преломления. Флуктуационная часть  $\varepsilon$  является статистически однородной и изотропной функцией координат и распределена по нормальному закону. Абсолютная величина  $\varepsilon$  много меньше единицы. Все нечетные моменты  $\varepsilon$  равны нулю, все четные моменты выражаются через сумму произведений всех возможных парных моментов. Для второго момента примем обозначение

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \varepsilon(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma^2 R(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \quad (2)$$

где  $R$  — нормированная корреляционная функция:  $R(0) = 1$ .

Так как интегральное рассеяние в слое происходит на малые углы, то воспользуемся волновым уравнением в диффузионном приближении.

Запишем это уравнение в интегральном виде для комплексной амплитуды поля  $E(\mathbf{r})$  ( $Ee^{iz}$  — напряженность поля):

$$E(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{2} M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varepsilon(\mathbf{r}_2) E(\mathbf{r}_2); \tag{3}$$

$$M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) = \int_0^{z_1} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} G(z_1, \rho_1; z_2, \rho_2) f(z_2, \rho_2) d\rho_2, \tag{4}$$

$$G(z_1, \rho_1; z_2, \rho_2) = \frac{1}{\pi i (z_1 - z_2)} \exp[-(\rho_1 - \rho_2)^2 / 2i (z_1 - z_2)],$$

где  $\mathbf{r} = x, y, z$ ;  $\rho = x, y$ ;  $d\rho = dx dy$ . Все координаты выражены в волновых числах.

Представим уравнение (3) графически. Для этого введем ряд обозначений (они, в основном, соответствуют обозначениям, принятым в [6]):

- 1) комплексная амплитуда поля обозначается отрезком пустотелой линии;
- 2) ядро оператора  $M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  обозначается отрезком сплошной тонкой линии, вершинам которой соответствуют координаты  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ;
- 3) функция  $\varepsilon$  обозначается отрезком пунктирной линии;
- 4) свободный член (в данном случае единица) обозначается отрезком волнистой линии;
- 5) по координатам внутренних вершин производится интегрирование.

Графически уравнение (3) представлено на рис. 1. На рис. 2 представлено решение уравнения (3) в виде итерационного ряда.

Целью данной работы является получение выражения для четвертого момента поля из ряда, представленного на рис. 2.

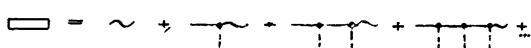


Рис. 1. Графическое представление интегрального уравнения для  $E$

Рис. 2. Графическое представление итерационного ряда для  $E$ .

## 2. ЧЕТВЕРТЫЙ МОМЕНТ КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ

Составим из ряда, представленного на рис. 2, комбинацию для четвертого момента комплексной амплитуды:

$$\Phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, z) = \langle E(\rho_1, z) E(\rho_2, z) E^*(\rho_3, z) E^*(\rho_4, z) \rangle. \tag{5}$$

В (5) угловые скобки означают усреднение по функции распределения  $\varepsilon$ . Процедура усреднения применительно к первому и второму моментам описана в [6].

Полученный для  $\Phi$  ряд графически представлен на рис. 3. Отрезки сплошных тонких линий на двух верхних уровнях изображают функции  $G$ , а на двух нижних уровнях функции  $G^*$ . Введение четырех уровней отражает тот факт, что пределы интегрирования по  $z$  на данном уровне не зависят от координат, соответствующих другим уровням. Отрезок пунктирной линии, соединяющий вершины  $i$  и  $k$ , обозначает корреляционную функцию  $\sigma^2 R(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|)$ .

Диаграммы, входящие в ряд для  $\Phi$ , содержат четыре типа сильно-связанных диаграмм (т. е. диаграмм, которые нельзя разделить на части, не разрезав при этом пунктирной линии). Диаграммы первого и

второго типов (рис. 4а, б) входят в ряды для первого и второго моментов (см. [6]). Диаграммы третьего типа связывают вершины, находящиеся на трех разных уровнях (рис. 4в). Диаграммы четвертого типа связывают вершины, находящиеся на четырех уровнях (рис. 4г).

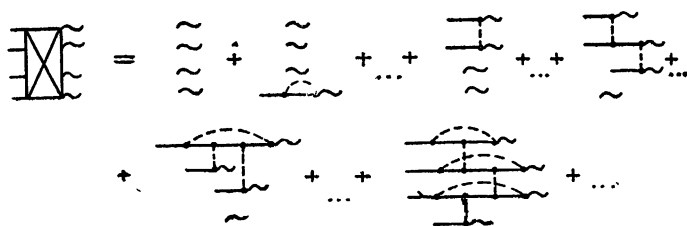


Рис. 3. Графическое представление ряда для  $\Phi$ .

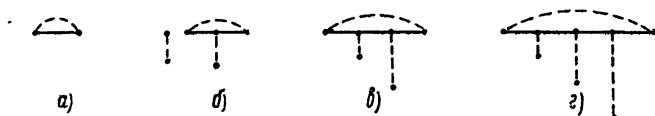


Рис. 4. Примеры диаграмм первого (а), второго (б), третьего (в) и четвертого (г) типов.

Простые, хотя и громоздкие вычисления, проведенные при специальном виде корреляционной функции

$$R(|r_i - r_k|) \exp[-(r_i - r_k)^2/a^2], \quad (6)$$

показывают, что сильносвязанная диаграмма порядка  $2k$  (содержащая  $2k$  вершин) дает при интегрировании множитель порядка или меньше  $(\sigma a)^{2k-2} \sigma^2 a z$ . Если диаграмма того же порядка имеет  $n-1$  слабых связей (диаграмму, объединенную слабой связью можно разделить на части, не разрезав пунктирной линии), то при интегрировании она дает множитель порядка или меньше  $(\sigma a)^{2k-2n} (\sigma^2 a z)^n$ . Этот результат просто понять. Если переменные интегрирования связаны сильной связью, то интегрирование по переменной  $z$  происходит по многомерному параллелепипеду, одно ребро которого не превосходит  $z$ , а все остальные примерно равны характерному размеру неоднородностей  $a$ . Замена сильной связи на слабую приводит к увеличению объема интегрирования. Очевидно, этот результат справедлив и при других видах корреляционной функции. Таким образом, разложение по сильносвязанным диаграммам является разложением по параметру  $\sigma a$ .

В дальнейшем будем считать  $\sigma a \ll 1$  и отбросим все сильносвязанные диаграммы третьего и четвертого типов, а также сильносвязанные диаграммы первого и второго типов порядка выше, чем два. Физически это означает, что при рассмотрении элементарного акта рассеяния волны на одной неоднородности учитывается только однократное рассеяние (что не исключает учета повторного рассеяния на других неоднородностях). Оставшиеся диаграммы можно частично просуммировать и в результате получить ряд, представленный на рис. 5. На этом рисунке отрезком жирной линии обозначено среднее значение комплексной амплитуды  $\langle E(z_k - z_{k+1}) \rangle$ , а сегментом с жирной линией в основании обозначено  $\langle E(z_k - z_{k+1}) \rangle G(r_k, r_{k+1})$  или комплексно сопряженное выражение.

При  $\sigma a \ll 1$  в существенной области [7]

$$\langle E(z) \rangle = \exp(-\lambda \sigma^2 a z), \quad \lambda = \frac{1}{a} \int_0^\infty R(z) dz.$$

Удобно ввести новую функцию

$$\Phi = \varphi \langle E \rangle \langle E \rangle \langle E^* \rangle \langle E^* \rangle. \quad (7)$$

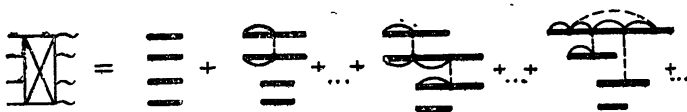


Рис. 5. Графическое представление  $\Phi$  в виде частично просуммированного ряда.

Диаграмму, соответствующую  $\varphi$ , будем обозначать так же, как и диаграмму, соответствующую  $\Phi$ , но без внутреннего перекрестья. Ряд для  $\varphi$  представлен на рис. 6. Этот ряд состоит из трех групп диаграмм. Диаграммы первой группы начинаются с диаграмм, показанных на рис. 7а. Обозначим эту группу через  $\varphi_1$ , соответствующее графическое обозначение такое же, как у  $\varphi$ , но с цифрой 1 внутри прямоугольника. Диаграммы второй группы начинаются с диаграмм, показанных на рис. 7б.

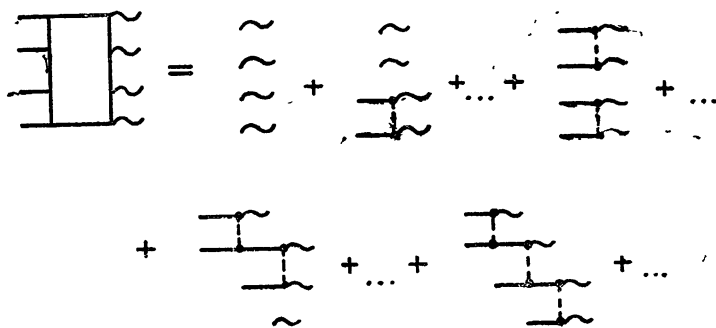


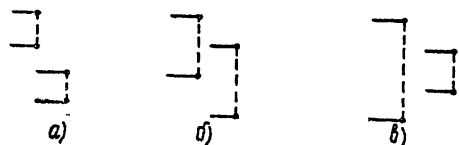
Рис. 6. Графическое представление  $\varphi$  в виде ряда.

Обозначим эту группу через  $\varphi_2$ . Соответствующая диаграмма помечается цифрой 2. Аналогичные обозначения вводятся для третьей группы диаграмм, начинающихся с диаграмм, показанных на рис. 7в. Исходя из вновь введенных обозначений, можно записать равенство

$$\varphi = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \quad (8)$$

Легко видеть, что  $\varphi_1$  удовлетворяет системе уравнений, приведенных на рис. 8. Аналогичные системы можно получить для  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ .

Рис 7. Диаграммы, с которых начинаются диаграммы, входящие в ряд для  $\varphi$ .



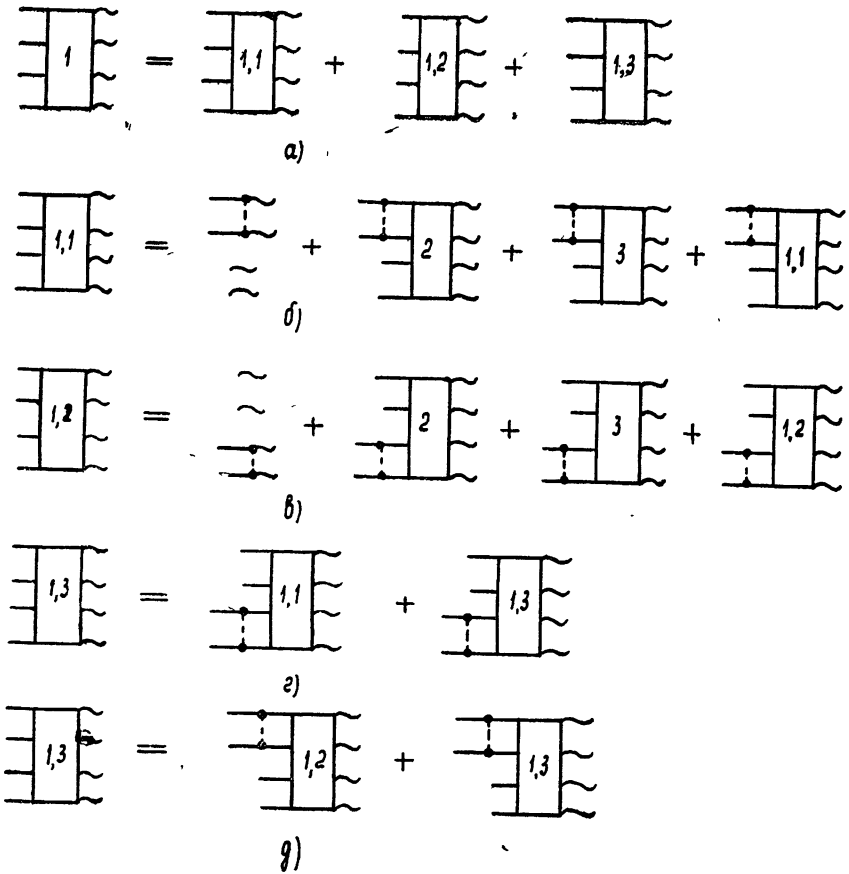


Рис. 8. Графическое представление системы уравнений, определяющих  $\varphi_{1,1}$ ,  $\varphi_{1,2}$ ,  $\varphi_{1,3}$ .

Перепишем уравнение, приведенное на рис. 8б, в аналитическом виде:

$$\varphi_{1,1} = M(r_1, r'_1)M(r_2, r'_2)\sigma^2 R(r'_1, r'_2)[1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{1,1}],$$

Положим в  $\varphi_{1,1}$  все  $z_i$  равными  $z$ . Поскольку характерный масштаб изменения  $R$  равен  $a$ , а характерный масштаб изменения в зависимости от  $z$  других подынтегральных функций много больше  $a$ , то можно проинтегрировать по разности  $z'_1 - z'_2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}(z) = & 2\lambda a K_{1,2}(\rho_1, \rho_2, z; \rho'_1, \rho'_2, z')\sigma^2 R_{1,2} \times \\ & \times [1 + \varphi_2(z', z', z, z) + \varphi_3(z', z', z, z) + \varphi_{1,1}(z', z', z, z)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $R_{ik} = R(|\rho_i - \rho_k|)$  и

$$\begin{aligned} K_{1,2}f = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^z \frac{dz'}{(z-z')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[-(\rho_1 - \rho'_1)^2 - (\rho_2 - \rho'_2)^2]/2(z-z')\} \times \\ & \times f(\rho'_1, \rho'_2, z') d\rho'_1 d\rho'_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Можно показать, что  $\varphi_2(z', z', z, z) = \varphi_2(z', z', z', z') = \varphi_2(z')$ . Это следует из того, что  $z' \leq z$  и  $\varphi_2$  всегда можно представить в виде

$$\varphi_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \int_0^{z_1} \int_0^{z_3} R(|z'_1 - z'_3|) f(z'_1, z_2, z'_3, z_4) dz'_1 dz'_3$$

или в виде

$$\varphi_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \int_0^{z_2} \int_0^{z_4} R(|z'_2 - z'_4|) f(z_1, z'_2, z_3, z'_4) dz'_2 dz'_4,$$

причем надо учесть, что  $R(z)$  является фактически «дельтаподобной» функцией. Аналогичное соотношение можно получить относительно  $\varphi_3$ .

С учетом этих замечаний получаем

$$\varphi_{1,1}(z) = 2\lambda a K_{1,2} \sigma^2 R_{1,2} [1 + \varphi_2(z') + \varphi_3(z') + \varphi_{1,1}(z')]. \quad (11)$$

Пользуясь равенством

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(x-x')^2/2(z-z') - i(x'-x'')^2/2(z'-z'')] f(x'') dx' dx'' = \\ & = \sqrt{\pi(z-z')(z'-z'')/(z-z'')} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(x-x'')^2/2(z-z'')] dx'', \end{aligned}$$

вместо (11) можно получить следующее уравнение:

$$\varphi_{1,1} = 2\lambda a K_{1,2,3,4} \sigma^2 R_{1,2} [1 + \varphi_2(z') + \varphi_3(z') + \varphi_{1,1}(z')], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} K_{1,2,3,4} f &= \int_0^z \frac{dz'}{(z-z')^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2(z-z')} [(\rho_1 - \rho'_1)^2 + (\rho_2 - \rho'_2)^2 - \right. \\ & \left. - (\rho_3 - \rho'_3)^2 - (\rho_4 - \rho'_4)^2]\right\} f(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4, z') d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем оператор

$$\begin{aligned} L_{1,2,3,4} f &= K_{1,2,3,4}^{-1} f = -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_4^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя оператор  $L_{1,2,3,4}$  к обеим частям равенства (12), получаем

$$L_{1,2,3,4} \varphi_{1,1} = 2\lambda a \sigma^2 R_{1,2} (1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{1,1}). \quad (15)$$

Аналогичным путем можно получить уравнение для  $\varphi_{1,2}$ :

$$L_{1,2,3,4} \varphi_{1,2} = 2\lambda a \sigma^2 R_{3,4} (1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_{1,2}). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь уравнение для  $\varphi_{1,3}$ , графически представленное на рис. 8д. Перепишем его в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,3}(z_1, z_1, z_2, z_2) &= 2\lambda a \sigma^2 K_{1,2}(z_1, z'_1) R_{1,2} [\varphi_{1,2}(z'_1, z'_1, z_2, z_2) + \\ & + \varphi_{1,3}(z'_1, z'_1, z_2, z_2)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Применяя к (17) оператор  $L_{1,2} = K_{1,2}^{-1}$ , получаем

$$L_{1,2}(z_1) \varphi_{1,3}(z_1, z_1, z_2, z_2) = 2\lambda a \sigma^2 R_{1,2}(\varphi_{1,2} + \varphi_{1,3}). \quad (18)$$

Аналогично из уравнения, представленного на рис. 8г, можно получить

$$L_{3,4}(z_2) \varphi_{1,3}(z_1, z_1, z_2, z_2) = 2\lambda a \sigma^2 R_{3,4}(\varphi_{1,1} + \varphi_{1,3}), \quad (19)$$

где

$$L_{3,4}(z_2) f = \frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_4^2} \right). \quad (20)$$

Суммируя (18) и (19) и полагая  $z_1 = z_2 = z$ , получаем для  $\varphi_{1,3}(z)$

$$L_{1,2,3,4}(z) \varphi_{1,3}(z) = 2\lambda a \sigma^2 [R_{1,2} \varphi_{1,2} + R_{3,4} \varphi_{1,1} + (R_{1,2} + R_{3,4}) \varphi_{1,3}]. \quad (21)$$

Суммируя (15), (16) и (21), получаем уравнение для  $\varphi_1$ :

$$L_{1,2,3,4} \varphi_1 = 2\lambda a \sigma^2 (R_{1,2} + R_{3,4}) \varphi. \quad (22)$$

Аналогичные уравнения можно получить для  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ :

$$L_{1,2,3,4} \varphi_2 = -2\lambda a \sigma^2 (R_{1,3} + R_{2,4}) \varphi; \quad (23)$$

$$L_{1,2,3,4} \varphi_3 = -2\lambda a \sigma^2 (R_{1,4} + R_{2,3}) \varphi. \quad (24)$$

Суммируя (22), (23) и (24), получаем уравнение для  $\varphi$ :

$$L_{1,2,3,4} \varphi = -2\lambda a \sigma^2 (R_{1,2} - R_{1,3} - R_{1,4} - R_{2,3} - R_{2,4} + R_{3,4}) \varphi. \quad (25)$$

Вводя новые переменные

$$x_1 - x_3 = u_1, \quad x_2 - x_3 = u_2, \quad x_3 = u_3, \quad x_4 - x_2 = u_4, \quad (26)$$

$$y_1 - y_3 = v_1, \quad y_2 - y_3 = v_2, \quad y_3 = v_3, \quad y_4 - y_2 = v_4$$

и полагая

$$u_4 = u_1, \quad v_4 = v_1, \quad (27)$$

получаем более простое уравнение для  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2\lambda a \sigma^2 (R_{1,2} - R_{1,3} - R_{1,4} - R_{2,3} - R_{2,4} + R_{3,4}) \varphi - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v_1 \partial v_2}. \quad (28)$$

Ввиду того, что  $E$  является однородной случайной функцией по переменным  $x, y$ ,  $\varphi$  не зависит от  $u_3, v_3$ . Уравнение (28) было выведено автором ранее другим способом [8]. Однако тогда не были получены условия его применимости.

Дальнейшие вычисления проведем, приняв за  $R$  выражение (6). Введем новые переменные:

$$\xi_i = u_i/a, \quad \eta_i = v_i/a, \quad \zeta = z/a^2. \quad (29)$$

В новых переменных получаем уравнение, зависящее только от одного параметра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \beta \psi \varphi - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi &= 2 \exp(-\xi_1^2 - \eta_1^2) + 2 \exp(-\xi_2^2 - \eta_2^2) - \exp[-(\xi_1 + \xi_2)^2 - \\ &\quad - (\eta_1 + \eta_2)^2] - \exp[-(\xi_1 - \xi_2)^2 - (\eta_1 - \eta_2)^2], \\ \beta &= \sqrt{\pi} a^3 \sigma^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Представляя  $\varphi$  в виде ряда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \varphi_k, \quad (32)$$

получаем для  $\varphi_k$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \quad \varphi_k|_{\zeta=0} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \zeta} &= \psi \varphi_{k-1} - i \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - i \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (33) можно проинтегрировать и получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sum_{l_1=1}^4 \dots \sum_{l_{k-1}=1}^4 \int_0^{\zeta} d\zeta_1 \dots \int_0^{\zeta_{k-2}} d\zeta_{k-1} \varphi_k^{l_1 \dots l_k}, \\ \varphi_k^{l_1 \dots l_k} &= 2 \sum_{j=1}^k (\delta_{l_j, 2} + \delta_{l_j, 4}) (-1)^{\sum_{j=1}^k l_j} \prod_{m=1}^k \frac{1}{P_m^{l_1 \dots l_m}} \times \\ &\times \exp \left[ -a_k^{l_1 \dots l_k} (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2b_k^{l_1 \dots l_k} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) - c_k^{l_1 \dots l_k} (\xi_2^2 + \eta_2^2) \right]; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} a_j^{l_1 \dots l_j} &= (a_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^a) / P_j^{l_1 \dots l_j}, \\ c_j^{l_1 \dots l_j} &= (c_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^c) / P_j^{l_1 \dots l_j}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} b_j^{l_1 \dots l_j} &= [b_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^b + iq_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} (\zeta_{k-j} - \zeta_{k+1-j})] / P_j^{l_1 \dots l_j}, \\ P_j^{l_1 \dots l_j} &= 1 + q_j^{l_1 \dots l_j} (\zeta_{k-j} - \zeta_{k+1-j})^2 - 4i (b_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^b) (\zeta_{k-j} - \zeta_{k+1-j}), \\ q_j^{l_1 \dots l_j} &= 4 [(a_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^a) (c_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} - t_j^c) - (b_{j-1}^{l_1 \dots l_{j-1}} + t_j^b)^2]; \\ t_1^a &= 1, \quad t_1^c = 1, \quad t_1^b = 1, \\ t_2^a &= 1, \quad t_2^c = 0, \quad t_2^b = 0, \\ t_3^a &= 1, \quad t_3^c = 1, \quad t_3^b = -1, \\ t_4^a &= 0, \quad t_4^c = 1, \quad t_4^b = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Ряд (32) сходится, так как он мажорируется рядом функции  $\exp(6\beta\zeta)$ . Исследование показывает, однако, что этот ряд ближе всего соответствует функции  $\exp(2\beta\zeta)$ . По-видимому,  $\varphi$  отличается от этой функции на некоторый неэкспоненциальный множитель.

Две группы членов при  $l_k = 2$  и при  $l_k = 4$  выглядят наиболее просто. При суммировании они дают асимптотическое выражение для  $\varphi$  при больших  $\zeta$ :



$$\varphi_{ac} = \exp [2\beta\zeta \exp (-\xi_1^2 - \eta_1^2)] + \exp [2\beta\zeta \exp (-\xi_2^2 - \eta_2^2)] - 1. \quad (37)$$

Следующая по простоте группа членов выглядит так:

$$\varphi_k^{2, \dots, 2, 4} |_{\xi_i = \eta_i = 0} = \varphi_k^{4, \dots, 4, 2} |_{\xi_i = \eta_i = 0} = \frac{2}{(k-1)!} \int_0^\zeta \frac{(2\zeta_1)^{k-1} d\zeta_1}{1 + 4(k-1)(\zeta - \zeta_1)^2}. \quad (38)$$

В остальных членах  $\varphi_k^{l_1, \dots, l_k}$  выражения  $\prod_{m=1}^k P_m^{l_1, \dots, l_m}$  представляют собой полиномы, зависящие от  $(\zeta_{j-1} - \zeta_j)$ . При больших  $\zeta$  наибольшие поправки к  $\varphi_{ac}$  могут давать члены (39). Из условия их малости, по сравнению с  $\varphi_{ac}$ , получаем  $\zeta^2 \gg k$ . В  $\varphi$  основной вклад дают члены при

$$2\beta\zeta - \sqrt{2\beta\zeta} \leq k \leq 2\beta\zeta + \sqrt{2\beta\zeta}.$$

Заменяя  $k$  на  $2\beta\zeta$ , получаем

$$\zeta \gg \beta. \quad (39)$$

При выполнении этого неравенства за  $\varphi$  можно принимать  $\varphi_{ac}$ . При этом связь между вторым моментом и  $\Phi$  такая же, как и в нормальном законе. Это соответствует результату Мерсье для фазового экрана [4].

При  $\beta \ll 1$  существенные флуктуации интенсивности хорошо описываются выражением (37).

Разберем случай  $\beta \gg 1$ . При  $\zeta \ll 1$  можно разложить дроби  $\prod_{m=1}^k 1/P_m^{l_1, \dots, l_m}$  по степеням  $\zeta_j$  и ограничиться членами второго порядка по  $\zeta_j$ . Суммирование полученных выражений дает для  $\varphi(0) = \varphi |_{\xi_i = \eta_i = 0}$  соотношение

$$\varphi(0) = \left( 1 + \frac{32}{3} \beta \zeta^3 \right) \exp(2\beta\zeta), \quad (40)$$

что совпадает с выражением для  $\varphi$ , получаемым с помощью метода плавных возмущений. Этот результат соответствует выводу, сделанному Андреевым [7]. Он показал, что метод плавных возмущений соответствует приближенному вычислению диаграмм, входящих в ряд для  $E$ .

Для допустимости разложения дробей  $\prod_{m=1}^k 1/P_m^{l_1, \dots, l_m}$  в ряды необходимо потребовать малость членов, содержащих  $\zeta_j$ , по сравнению с 1. Наибольшие из этих членов имеют порядок  $16k^2\zeta^2$  и  $4k\zeta$ . Поскольку основной вклад в  $\varphi$  дают члены при  $k \sim 2\beta\zeta$ , получаем

$$4\beta\zeta^2 = 4\sqrt{\pi} \sigma^2 z^2 / a \ll 1. \quad (41)$$

Это ограничение является достаточным. Полученное Писаревой [9] ограничение на первое приближение метода плавных возмущений

$$\frac{32}{3} \sqrt{\pi} \sigma^2 z^3 / a^3 \ll 1 \quad (42)$$

является необходимым.

Уравнение (30) учитывает меньшее число диаграмм по сравнению с методом плавных возмущений, но зато учитывает их точно. Оценка диаграмм, пропорциональных  $\sigma a$ , показывает, что их суммарный вклад

в  $\varphi$  по порядку величины не превосходит  $\sigma^2 a^2 \varphi$ . Таким образом, разложение по малому параметру  $\sigma a$  является равномерным относительно переменной  $\zeta$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Hewish, *Nature*, **203**, № 4951, 1214 (1964).
- 2 В. В. Виткевич, Т. Д. Антонова, В. И. Власов, *ДАН СССР*, **168**, № 1, 55 (1966).
- 3 В. В. Писарева, *Астрон. ж.*, **36**, № 1, 112 (1958).
4. R. P. Mercier, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58**, 382 (1962).
- 5 В. И. Татарский, *ЖЭТФ*, **49**, 1581 (1965).
- 6 В. И. Татарский, *ЖЭТФ*, **46**, 1399 (1964).
7. И. В. Андреев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **8**, № 6, 1069 (1965).
8. В. И. Шишов, *Труды ФИАН*, **38**, 171 (1967)
9. В. В. Писарева, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **4**, № 2, 376 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
8 апреля 1967 г.

## THE THEORY OF WAVE PROPAGATION IN RANDOM MEDIA

V. I. Shishov

Wave propagation in media with random fluctuations of the refractive index which scatters the waves with a small deviation of the wave vector is considered. The power series of the refractive index fluctuations is investigated for the fourth moment of the wave field intensity. It is shown that strongly coupled diagrams of the lowest order alone may be taken into account if the mean square of fluctuations of the phase shift over the characteristic size of an irregularity is much less than the unity. In this limitation the differential equation in partial derivatives for the fourth moment has been obtained. It is shown that for the fourth moment the expansion over strongly coupled diagrams is more universally used than the smooth perturbation method.

---