ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XI, № 6 РАДИОФИЗИКА 1968

УДК 621.317 766.3

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В КВАРЦЕВОМ ГЕНЕРАТОРЕ

А. Н. Малахов

Подробно анализируются естественные флуктуации амплитуды и частоты колебаний кварцевого и анодного контуров кварцевого генератора. Рассматривается форма спектральной линии обоих колебаний.

Теоретическому рассмотрению флуктуаций в двухконтурном кварцевом генераторе посвящены, по-видимому, всего два кратких сообщения [1, 2]. Вместе с тем, интерес к флуктуациям в кварцевых генераторах не ослабевает (см., например, [3–5]). Поэтому представляется целесообразным проведение сравнительно подробного и всестороннего теоретического анализа как естественных, так и технических флуктуаций кварцевого генератора.

Настоящая работа посвящена рассмотрению естественных флуктуаций амплитуды и частоты колебаний кварцевого генератора*.

1. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВУХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Прежде чем приступить непосредственно к исследованию кварцевого генератора, проведем общий анализ произвольного двухконтурного генератора с шумами. Рассмотрим автоколебательную систему с двумя степенями свободы, находящуюся под воздействием малых случайных сил и описываемую следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_1^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $E_1(t)$ и $E_2(t)$ являются достаточно малыми случайными функциями ($\langle E_1(t) \rangle = \langle E_2(t) \rangle = 0$). Правые части F и H также малы, они включают в себя малые расстройки, потери и малые нелинейности системы.

Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} y &= R\cos\psi, \qquad x = P\cos\psi + B\sin\psi, \\ \dot{y} &= -\omega_1 R\sin\psi, \qquad \dot{x} = -\omega_1 P\sin\psi + \omega_1 B\cos\psi, \\ \psi &= \omega_1 t + \vartheta, \end{aligned} \tag{2}$$

где R, P, B, ϑ — новые переменные, медленные по сравнению с $\cos(\omega_1 t)$.

* Заметим, что в [1, 2] исследовались в сущности флуктуации колебаний только кварцевого контура, в то время как практически не меньший интерес представляют и флуктуации колебаний вспомогательного контура.

Пользуясь методом усреднения (см. [6,7]), для новых переменных получим следующие укороченные уравнения:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1}\Phi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2}a_{2s}(t),$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1}\Phi_F(\omega_1, R, P, B) + \frac{B}{2R\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2}\left[a_{1s}(t) - \frac{B}{R}a_{2c}(t)\right], \tag{3}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2\omega_1}\Psi_F(\omega_1, R, P, B) - \frac{P}{2R\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R, P, B) + \frac{\omega_1}{2}\left[a_{1c}(t) - \frac{P}{R}a_{2c}(t)\right],$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{2R\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2R}a_{2c}(t).$$

Здесь обозначено (в пределах интегралов $T_1 = 2\pi/\omega_1$)

$$\Phi_F = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(P\cos\xi + B\sin\xi, \ldots)\sin\xi\,d\xi,$$

$$\Psi_F = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(P\cos\xi + B\sin\xi, \ldots)\cos\xi\,d\xi,$$

$$\Phi_H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(P\cos\xi + B\sin\xi, \ldots)\sin\xi\,d\xi, \tag{4}$$

$$\Psi_H = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(P\cos\xi + B\sin\xi, \ldots)\cos\xi\,d\xi,$$

$$a_{1s} = \frac{1}{T_1}\int_{t-T_1}^{t} 2E_1(\xi)\sin(\omega_1\xi + \vartheta)\,d\xi,$$

$$a_{1c} = \frac{1}{T_1}\int_{t-T_1}^{t} 2E_1(\xi)\cos(\omega_1\xi + \vartheta)\,d\xi,$$

$$a_{2s} = \frac{1}{T_1}\int_{t-T_1}^{t} 2E_2(\xi)\sin(\omega_1\xi + \vartheta)\,d\xi, \quad a_{2c} = \frac{1}{T_1}\int_{t-T_1}^{t} 2E_2(\xi)\cos(\omega_1\xi + \vartheta)\,d\xi.$$

Разбивая амплитуды и фазу колебаний на регулярные и флуктуационные составляющие

$$R = R_{\text{р}} + \rho_1, \quad P = P_{\text{р}} + \rho_2, \quad B = B_{\text{р}} + \rho_3, \quad \vartheta = \vartheta_{\text{р}} + \varphi,$$

для регулярных слагаемых имеем уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{dR_p}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1}\Phi_H(\omega_1, R_p, P_p, B_p),\\
&\frac{dP_p}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1}\Phi_F(\omega_1, R_p, P_p, B_p) + \frac{B_p}{2R_p\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R_p, P_p, B_p),\\
&\frac{dB_p}{dt} = \frac{1}{2\omega_1}\Psi_F(\omega_1, R_p, P_p, B_p) - \frac{P_p}{2R_p\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R_p, P_p, B_p),\\
&\frac{d\vartheta_p}{dt} = -\frac{1}{2R_p\omega_1}\Psi_H(\omega_1, R_p, P_p, B_p) \equiv \Delta\omega,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\Delta\omega$ — поправка на частоту.

Установившиеся значения регулярных амплитуд R_0, P_0, B_0 и поправки на частоту $\Delta\omega_0$ находятся, как легко видеть, из уравнений

$$
\begin{aligned}
&\Phi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0) = 0,\\
&R_0\Phi_F(\omega_1, R_0, P_0, B_0) = B_0\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0),\\
&R_0\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0) = P_0\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0),\\
&\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2\omega_1 R_0}\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Частота автоколебаний равна, следовательно, $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0$. В этом случае $\vartheta = \Delta\omega_0 t + \varphi$, $\psi = \omega_0 t + \varphi$ и случайные функции $a(t)$ можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&a_{1s} = -e_{\perp 1}\cos\varphi + e_{\parallel 1}\sin\varphi, \qquad a_{1c} = e_{\parallel 1}\cos\varphi + e_{\perp 1}\sin\varphi,\\
&a_{2s} = -e_{\perp 2}\cos\varphi + e_{\parallel 2}\sin\varphi, \qquad a_{2c} = e_{\parallel 2}\cos\varphi + e_{\perp 2}\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

где обозначено

$$
e_{\parallel 1,2} = \frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} 2E_{1,2}(\xi)\cos(\omega_0\xi)\,d\xi, \quad e_{\perp 1,2} = -\frac{1}{T_0}\int_{t-T_0}^{t} 2E_{1,2}(\xi)\sin(\omega_0\xi)\,d\xi.
$$

Ограничимся рассмотрением флуктуаций в установившемся режиме и случаем малых амплитудных флуктуаций. Вводя относительные амплитудные флуктуации $\alpha_1 = \rho_1/R_0$, $\alpha_2 = \rho_2/P_0$, $\alpha_3 = \rho_3/B_0$, вместо (3) с учетом (5), (6) получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_1}{dt} = -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\perp 2}\cos\varphi - e_{\parallel 2}\sin\varphi),\\
&\frac{d\alpha_2}{dt} = -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 +\\
&+\frac{\omega_1}{2P_0}\left[\left(e_{\perp 1} + \frac{B_0}{R_0}e_{\parallel 2}\right)\cos\varphi - \left(e_{\parallel 1} - \frac{B_0}{R_0}e_{\perp 2}\right)\sin\varphi\right],\\
&\frac{d\alpha_3}{dt} = -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 +\\
&+\frac{\omega_1}{2B_0}\left[\left(e_{\parallel 1} - \frac{P_0}{R_0}e_{\parallel 2}\right)\cos\varphi - \left(e_{\perp 1} - \frac{P_0}{R_0}e_{\perp 2}\right)\sin\varphi\right],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$\nu(t)=\frac{d\varphi}{dt}=-q_1\alpha_1-q_2\alpha_2-q_3\alpha_3-\frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\parallel 2}\cos\varphi+e_{\perp 2}\sin\varphi).$$

Здесь коэффициенты

$$p_{11}=\frac{1}{2\omega_1}\left(\frac{\partial\Phi_H}{\partial R}\right)_0,\quad p_{22}=\frac{1}{2\omega_1}\left(\frac{\partial\Phi_F}{\partial P}-\frac{B}{R}\,\frac{\partial\Phi_H}{\partial P}\right)_0,$$

$$p_{33}=\frac{1}{2\omega_1}\left(\frac{P}{R}\,\frac{\partial\Phi_H}{\partial B}-\frac{\partial\Phi_F}{\partial B}\right)_0,\quad p_{12}=\frac{P_0}{2\omega_1 R_0}\left(\frac{\partial\Phi_H}{\partial P}\right)_0,$$

$$p_{13}=\frac{B_0}{2\omega_1 R_0}\left(\frac{\partial\Phi_H}{\partial B}\right)_0,\qquad p_{21}=\frac{R_0}{2\omega_1 P_0}\left[\frac{\partial\Phi_F}{\partial R}-\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{B\Psi_H}{R}\right)\right]_0,$$

$$p_{23}=\frac{B_0}{2\omega_1 P_0}\left[\frac{\partial\Phi_F}{\partial B}-\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{B\Psi_H}{P}\right)\right]_0,\quad p_{31}=\frac{R_0}{2\omega_1 B_0}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{P\Psi_H}{R}\right)-\frac{\partial\Psi_F}{\partial R}\right]_0,$$

$$p_{32}=\frac{P_0}{2\omega_1 B_0}\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P\Psi_H}{R}\right)-\frac{\partial\Psi_F}{\partial P}\right]_0$$

показывают взаимосвязь амплитудных флуктуаций, а коэффициенты

$$q_1=\frac{R_0}{2\omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\Psi_H}{R}\right)\right]_0,\quad q_2=\frac{P_0}{2\omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\Psi_H}{R}\right)\right]_0,$$

$$q_3=\frac{B_0}{2\omega_1}\left[\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\Psi_H}{R}\right)\right]_0$$

характеризуют зависимость фазовых флуктуаций автоколебаний от амплитудных. Индекс «нуль» у скобки означает взятие производных в точках установившегося режима.

Легко записать условия устойчивости установившегося режима автоколебаний. Рассматриваемое решение (2) будет устойчиво по амплитудам, если все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}+\lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}+\lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}+\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0 \tag{8}$$

имеют отрицательную вещественную часть. Раскрывая определитель, найдем

$$a_0=p_{11}P_{11}+p_{12}P_{12}+p_{13}P_{13},$$

$$a_1=P_{11}+P_{22}+P_{33},$$

$$a_2=p_{11}+p_{22}+p_{33},$$

где P_{ij} — алгебраическое дополнение элемента p_{ij}.

Согласно критерию Раута—Гурвица все корни характеристического уравнения (8) имеют отрицательную вещественную часть в том и только в том случае, если

$$a_2>0,\quad a_1>0,\quad a_0>0,\qquad a_2a_1-a_0>0. \tag{9}$$

Будем полагать, что эти условия выполнены.

Что касается фазы, то со временем, как это следует из последнего уравнения (7), исчезает производная $\frac{d\varphi}{dt}$, и сама фаза, следовательно, может принимать любое постоянное значение. Таким образом, аналогично случаю автогенератора с одной степенью свободы, имеется фазовая нечувствительность решения, которая в присутствии флуктуационных сил приводит к уширению спектральной линии автоколебания.

Кроме $\alpha_1(t)$- и $\nu(t)$-флуктуаций амплитуды и частоты колебания $y(t)$, представляют интерес флуктуации амплитуды и частоты колебания

$$x(t) = P_0(1+\alpha_2)\cos\psi + B_0(1+\alpha_3)\sin\psi = Q_0(1+\beta)\cos(\psi+\theta).$$

Установившимся значениям P_0 и B_0 соответствуют установившиеся значения Q_0 и θ_0:

$$Q_0^2 = P_0^2 + B_0^2, \qquad \operatorname{tg}\theta_0 = -B_0/P_0.$$

Флуктуациям α_2, α_3 соответствуют флуктуации амплитуды $\beta(t)$ и фазы $\psi_1(t) = \theta - \theta_0$. Нетрудно найти, что

$$\beta(t) = m_2\alpha_2(t) + m_3\alpha_3(t), \qquad \psi_1(t) = m_0[\alpha_2(t) - \alpha_3(t)], \tag{10}$$

где $m_2 = P_0^2/Q_0^2$, $m_3 = B_0^2/Q_0^2$, $m_0 = B_0P_0/Q_0^2$.

Поэтому флуктуации частоты колебания $x(t)$ равны

$$\nu_a(t) = \nu(t) + \frac{d\psi_1}{dt} = \nu(t) + m_0\left(\frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{d\alpha_3}{dt}\right). \tag{11}$$

2. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ КВАРЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА

Одна из типичных схем кварцевого генератора изображена на рис. 1. Источники тепловых шумов представлены случайными ЭДС $\mathcal{E}_T$, $\mathcal{E}_{T\text{к}}$. Случайный ток $i_{\text{др}}$ представляет дробовой шум лампы, анодный ток которой записываем обычным образом: $I_a = Sy(1-\beta_0 y^2)$. Остальные обозначения ясны из рисунка.

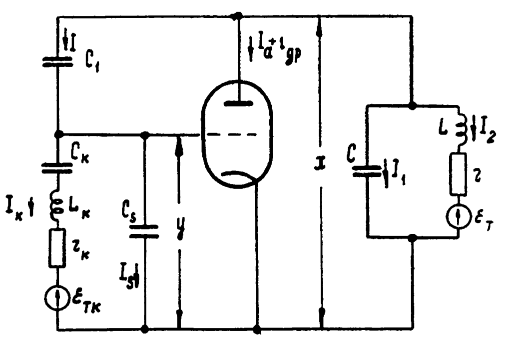

Рис. 1.

Поскольку добротность кварца $Q_{\text{к}}$ много больше добротности анодного контура Q_a, то коэффициенты связи $s_1 = C_1/(C+C_1)$, $s_2 = C_1/(C_s + C_1)$ и расстройки $h_{\text{к}} = (\omega_1^2 - \omega_{\text{к}}^2)/\omega_1^2 = C_{\text{к}}/(C_{\text{к}} + C_1 + C_s)$, $h_a = (\omega_1^2 - \omega_a^2)/\omega_1^2$, где $\omega_1^2 = L_{\text{к}}^{-1}[C_{\text{к}}^{-1} + (C_1 + C_s)^{-1}]$, $\omega_{\text{к}}^2 = 1/L_{\text{к}}C_{\text{к}}$, $\omega_a^2 = 1/L(C+C_1)$, имеют порядок малости μ (за малый параметр принимаем $\mu = Q_a^{-1}$). При этом $Q_{\text{к}}^{-1} \sim \mu^2$.

Для x и y нетрудно получить уравнения (1), где

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = h_a\omega_1^2 x - \Pi_a\dot{x} - s_1\omega_1^2 y - l\omega_1\dot{y}(1 - 3\beta_0 y^2),$$

$$H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = -\omega_1 Q_{\text{к}}^{-1}\dot{y} + s_2 F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) - s_2\omega_1^2 h_{\text{к}} x, \tag{12}$$

$$E_1(t) = -\frac{l}{\omega_1 S}\frac{di_{\text{др}}}{dt} + \mathcal{E}_T,$$

$$E_2(t) = h_\text{к}\mathcal{E}_{T\text{к}} + s_2 E_1(t).$$

Здесь $\Pi_\text{а} = \omega_1 Q_\text{а}^{-1}$ — полоса анодного контура, $l = S/\omega_1 (C + C_1)$. Легко убедиться, что по отношению к $x(t)$, $y(t)$ имеют место соотношения $F \sim \omega_1^2 \mu$, $H \sim \omega_1^2 \mu^2$. С другой стороны, полагая, что случайная сила E_1 как возмущение имеет порядок малости μ^2, получим $E_2 \sim \mu^3$.

Таким образом, правые части уравнений (1) неравноценны, что является характерной чертой кварцевого генератора. Указанное обстоятельство отражает разный порядок добротности контуров генератора.

На основании формул (2), (4) нетрудно найти

$$\Phi_F = \omega_1^2\left[h_\text{а} B + Q_\text{а}^{-1} P + lR\left(1 - \frac{3}{4}\beta_0 R^2\right)\right],$$

$$\Psi_F = \omega_1^2 (h_\text{а} P - Q_\text{а}^{-1} B - s_1 R),$$

$$\Phi_H = s_2 \Phi_F + \omega_1^2 (-s_2 h_\text{к} B + Q_\text{к}^{-1} R),$$

$$\Psi_H = s_2 \Psi_F + \omega_1^2 (-s_2 h_\text{к} P).$$

Вычисляя отсюда p_{ij} и q_i, можно показать, что p_{1j}, q_i имеют порядок малости $\omega_1\mu^2$, в то время как остальные p_{ij} порядка $\omega_1\mu$. Решая уравнения (6), можно найти установившиеся значения

$$B_0 = R_0/g_2, \qquad P_0 = R_0/g_1,$$

$$\frac{3}{4} l\beta_0 R_0^2 = l + \frac{h_\text{а}}{s_2 Q_\text{к} h_\text{к}} + \frac{\lambda_0}{s_2 h_\text{а} h_\text{к} Q_\text{а} Q_\text{к}},$$

$$\Delta\omega_0 = \omega_1 \frac{\lambda_0}{2 Q_\text{к} h_\text{а}},$$

где обозначено

$$g_1 = s_2 h_\text{а} h_\text{к} Q_\text{к} \lambda_0^{-1} \sim \mu^0, \qquad g_2 = s_2 h_\text{к} Q_\text{к} \sim \mu^0,$$

$$\lambda_0 = s_1 s_2 h_\text{к} Q_\text{к} + Q_\text{а}^{-1} \sim \mu.$$

Учитывая порядок малости p_{ij}, находим коэффициенты характеристического уравнения (8). Вводя частоты $\Omega_\text{а} = \omega_1 h_\text{а}/2$ и $\Omega_0^2 = \Omega_\text{а}^2 + \Pi_\text{а}^2/4$, получим

$$a_0 = \Omega_0^2 \Omega_1 \sim \omega_1^3 \mu^4, \qquad a_1 = \Omega_0^2 \sim \omega_1^2 \mu^2, \qquad a_2 = \Pi_\text{а} \sim \omega_1 \mu,$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1^3}{8\Omega_0^2}\left[Q_\text{к}^{-1}(Q_\text{а}^{-2} + h_\text{а}^2) + s_1 s_2 h_\text{к} Q_\text{а}^{-1} + s_2 h_\text{а} h_\text{к} l\left(1 - \frac{9}{4}\beta_0 R_0^2\right)\right] \sim \omega_1 \mu^2.$$

Анализируя условия устойчивости (9), можно убедиться, что первое, второе и четвертое условия выполняются автоматически. Третье условие устойчивости сводится к $h_\text{а} < 0$. С помощью (9) определим интервал отрицательных значений $h_\text{а}$, где $R_0^2 > 0$, т. е. где существуют автоколебания. Указанный интервал определяется неравенствами $h_{\text{а}2} < h_\text{а} < h_{\text{а}1}$. Граничные значения $h_{\text{а}1}$, $h_{\text{а}2}$ являются корнями уравнения

$$l+\frac{h_a}{s_2Q_кh_к}+\frac{\lambda_0}{s_2h_кQ_aQ_кh_a}=0.$$

Для того, чтобы это уравнение имело отрицательные вещественные корни, необходимо выполнение неравенства $l>2\sqrt{\lambda_0}/s_2Q_кh_к\sqrt{Q_a}$, которое является условием самовозбуждения кварцевого автогенератора.

Принимая во внимание последнюю формулу (12), функции $e_{\parallel 2}$, $e_{\perp 2}$ можно записать в виде

$$e_{\parallel 2}=h_кe_{\parallel к}+s_2e_{\parallel 1},\qquad e_{\perp 2}=h_кe_{\perp к}+s_2e_{\perp 1}.$$

Поскольку $\mathcal{E}_T(t)$, $\mathcal{E}_{Tк}(t)$, $i_{др}$ являются дельта-коррелированными взаимонезависимыми случайными процессами, то согласно [8] функции $e_{\parallel 1}$, $e_{\perp 1}$, $e_{\parallel к}$, $e_{\perp к}$ также можно считать дельта-коррелированными и взаимонезависимыми. Это дает основание применить для решения (7) метод уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка. С другой стороны, используя метод статистической эквивалентности [8], можно показать, что уравнения (7) статистически эквивалентны следующим линейным уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt}&=-p_{11}\alpha_1-p_{12}\alpha_2-p_{13}\alpha_3+f_1,\\ \frac{d\alpha_2}{dt}&=-p_{21}\alpha_1-p_{22}\alpha_2-p_{23}\alpha_3+f_2,\\ \frac{d\alpha_3}{dt}&=-p_{31}\alpha_1-p_{32}\alpha_2-p_{33}\alpha_3+f_3,\\ \nu(t)&=-q_1\alpha_1-q_2\alpha_2-q_3\alpha_3+f_4.\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь введены обозначения

$$f_1=\frac{\omega_1}{2R_0}(h_кe_{\perp к}+s_2e_{\perp 1}),\qquad f_2=\frac{\omega_1}{2P_0}e_{\perp 1},$$

$$f_3=\frac{\omega_1}{2B_0}e_{\parallel 1},\qquad f_4=-\frac{\omega_1}{2R_0}(h_кe_{\parallel к}+s_2e_{\parallel 1}).$$

Нетрудно найти значения спектральных плотностей мощности функций f_1, f_2, f_3, f_4:

$$\begin{gathered}S_{f_1}(\Omega)=S_{f_4}(\Omega)=\frac{D_1}{2\pi}\varepsilon^2,\qquad S_{f_2}(\Omega)=\frac{D_1}{2\pi}g_1^2,\qquad S_{f_3}(\Omega)=\frac{D_1}{2\pi}g_2^2,\\ S^0_{f_1f_2}(\Omega)=\frac{D_1}{2\pi}s_2g_1,\qquad S^0_{f_3f_4}(\Omega)=-\frac{D_1}{2\pi}s_2g_2.\end{gathered}\tag{14}$$

Остальные функции $S_{f_if_j}$ равны нулю. Здесь $D_1=\pi\omega_1^2c_1R_0^{-2}$, $\varepsilon^2=s_2^2+h_к^2m$, $m=c_кc_1^{-1}$. Коэффициенты c_1 и $c_к$ являются значениями спектральных плотностей функций $E_1(t)$ и $\mathcal{E}_{Tк}(t)$ на частоте автоколебаний.

3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ КВАРЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА

Правые части первого и четвертого уравнений (13) на порядок меньше правых частей второго и третьего уравнений. Это значит, что $\alpha_1(t)$ и $\varphi(t)$ изменяются значительно медленнее, чем $\alpha_2(t)$ и $\alpha_3(t)$. При этом, как можно показать, полосы α_1 и φ, α_2 и α_3 по порядку величины равны соответственно Ω_1 и Ω_0.

Различный порядок малости характерных частот Ω_1 и Ω_0 позволяет точный громоздкий расчет спектров амплитудных и частотных флуктуаций во всем диапазоне частот заменить существенно более простым расчетом, выполняемым отдельно для частот $|\Omega| \ll \Omega_0$ (медленные компоненты) и для частот $|\Omega| \gg \Omega_1$ (быстрые компоненты). Отметим, что этот прием представляет развитие метода, введенного Хохловым [9, 10] для приближенного анализа системы неравноценных уравнений.

Анализ начнем с медленной компоненты амплитудных флуктуаций кварцевого контура. Для $|\Omega| \ll \Omega_0$ первые три уравнения (13) принимают вид

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + f_1,$$

$$0 = -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + f_2, \tag{15}$$

$$0 = -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + f_3.$$

Из двух последних уравнений находим

$$\alpha_2 = \Omega_0^{-2}(P_{12}\alpha_1 + p_{33}f_2 - p_{23}f_3),$$
$$\alpha_3 = \Omega_0^{-2}(P_{13}\alpha_1 + p_{22}f_3 - p_{32}f_2). \tag{16}$$

Подставляя эти значения в первое уравнение (15), для медленной компоненты $\alpha_1(t)$ получим

$$a_1\frac{d\alpha_1}{dt} + a_0\alpha_1 = P_{11}f_1 + P_{21}f_2 + P_{31}f_3. \tag{17}$$

Отсюда, учитывая (14), находим спектральную плотность

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = \frac{A_0\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_1^2}\,\frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}, \tag{18}$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\Omega_0^2\Omega_1^2}\left[P_{11}^2 h_\kappa^2 m + (P_{11}s_2 + P_{21}g_1)^2 + P_{31}^2 g_2^2\right] \sim \mu^0.$$

Таким образом, медленная компонента амплитудных флуктуаций кварцевого контура действительно обладает полосой, равной Ω_1, и имеет максимум на нулевой частоте. Поскольку быстрая компонента $\alpha_1(t)$ существенно меньше медленной, (18) может служить приближенным выражением $S_{\alpha_1}(\Omega)$ для всех значений частот.

Вместе с тем исследование быстрой компоненты α_1 является необходимым, если рассматривать спектральную плотность амплитудных флуктуаций кварцевого контура в области $\Omega \simeq \Omega_0$. Поскольку быстрая компонента α_1 много меньше быстрых компонент α_2 и α_3, все быстрые компоненты определяются следующими уравнениями, получаемыми из первых трех уравнений (13) путем отбрасывания членов $p_{11}\alpha_1$, $p_{21}\alpha_1$, $p_{31}\alpha_1$:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + f_1,$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + f_2,$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = -p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + f_3.$$

Разделяя эти уравнения по отношению к α_1, найдем

$$\frac{d^3\alpha_1}{dt^3} + \Pi_a \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \Omega_0^2 \frac{d\alpha_1}{dt} = -p_{12}\frac{df_2}{dt} - p_{13}\frac{df_3}{dt} + + P_{31} f_3 + \frac{d^2 f_1}{dt^2} + \Pi_a \frac{df_1}{dt} + \Omega_0^2 f_1.$$

Для быстрых компонент α_2 и α_3 получим соответственно

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\alpha_2}{dt} + \Omega_0^2 \alpha_2 = \frac{df_2}{dt} + p_{33} f_2 - p_{23} f_3,$$
$$\frac{d^2\alpha_3}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\alpha_3}{dt} + \Omega_0^2 \alpha_3 = \frac{df_3}{dt} + p_{22} f_3 - p_{32} f_2. \qquad (20)$$

Нетрудно найти следующее значение спектральной плотности быстрой компоненты $\alpha_1(t)$:

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\left[\varepsilon^2 + \frac{A_2\Omega_1^2\Omega^2 + A_0\Omega_0^2\Omega_1^2 - \Omega_0^4\varepsilon^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}\right]\frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}, \qquad (21)$$

где

$$A_2 = \frac{1}{\Omega_1^2}\left[p_{12}^2 g_1^2 + p_{13}^2 g_2^2 - 2s_2 g_1 (P_{21} + \Pi_a p_{12})\right] \sim \mu^0.$$

Объединяя формулы (18) и (21), для всего диапазона частот имеем

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = A(\Omega)\frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$
$$A(\Omega) = \frac{A_0\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_1^2} + \Omega_0^2\frac{(\varepsilon^2-\xi^2)\Omega^2 + (\varepsilon^2-\xi^2)(\Pi_a^2 - 2\Omega_0^2) + A_2\Omega_1^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}. \qquad (22)$$

Здесь $\xi^2 = A_0\Omega_1^2\Omega_0^{-2} \sim \mu^2$. График безразмерной функции $A(\Omega)$ приведен на рис. 2. Из этого графика хорошо видно, что основная мощность амплитудных флуктуаций действительно содержится в медленной компоненте, а спектральную плотность быстрой компоненты, которая имеет максимум вблизи Ω_0, следует учитывать, начиная с частот $\Omega \gg \Omega_1$.

Для $\beta(t)$-флуктуаций амплитуды колебаний анодного контура аналогично можно найти

$$S_\beta(\Omega) = B(\Omega)\frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}, \qquad (23)$$

$$B(\Omega) = \frac{B_1\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_1^2} + \Omega_0^2\,\frac{2l_0^2\Omega^2 + k_0^2\Omega_0^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_a^2\Omega^2}\,.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_1 = k_1^2 A_0 + 2k_1k_2M_1 + 2k_1k_3M_2 \sim \mu^0,$$

$$k_0^2 = k_2^2g_1^2 + k_3^2g_2^2 \sim \mu^0, \qquad k_1 = (m_2P_{1\,2} + m_3P_{1\,3})\,\Omega_0^{-2} \sim \mu^0,$$

$$M_1 = \Omega_0^{-1}\Omega_1^{-1}(P_{1\,1}\,s_2g_1 + P_{2\,1}\,g_1^2) \sim \mu^0,$$

$$M_2 = \Omega_0^{-1}\Omega_1^{-1}P_{3\,1}\,g_2^2 \sim \mu^0, \qquad k_2 = (m_2p_{3\,3} - m_3p_{3\,2})\,\Omega_0^{-1} \sim \mu^0,$$

$$l_0^2 = R_0^2Q_0^{-2} \sim \mu^0, \qquad k_3 = (m_3p_{2\,2} - m_2p_{2\,3})\,\Omega_0^{-1} \sim \mu^0.$$

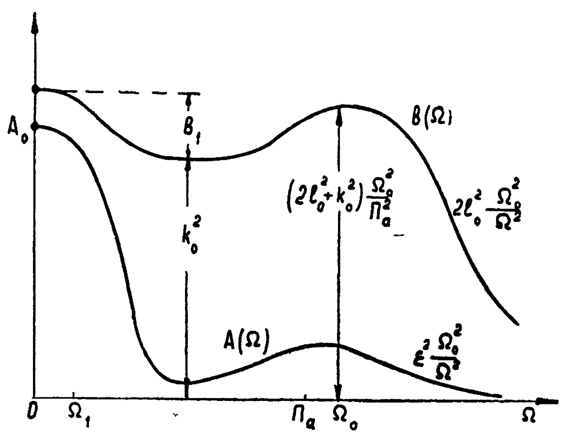

Рис. 2.

График безразмерной функции $B(\Omega)$ представлен на рис. 2. Из сравнения $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ следует, во-первых, что медленные компоненты α_1 и β имеют одинаковый порядок малости и, во-вторых, что полуширина полосы амплитудных флуктуаций анодного контура равна Ω_0. Кроме этого очевидно наличие максимума $S_\beta(\Omega)$ при $\Omega \simeq \Omega_0$, если $\Omega_0 \gg \Pi_a$.

Перейдем теперь к анализу флуктуаций частоты кварцевого контура $\nu(t)$. Из последнего уравнения (13) для медленной компоненты флуктуаций частоты $\nu(t)$ получаем с учетом (16)

$$\nu(t) = -\,q\,\alpha_1 + \varkappa_2 f_2 + \varkappa_3 f_3 + f_4\,, \tag{24}$$

где

$$q = q_1 + q_2\frac{P_{1\,2}}{\Omega_0^2} + q_3\frac{P_{1\,3}}{\Omega_0^2} \sim \omega_1\mu^2,$$

$$\varkappa_2 = -\,q_2\,\frac{p_{3\,3}}{\Omega_0^2} + q_3\,\frac{p_{3\,2}}{\Omega_0^2} \sim \mu\,,$$

$$\varkappa_3 = q_2\,\frac{p_{2\,3}}{\Omega_0^2} - q_3\,\frac{p_{2\,2}}{\Omega_0^2} \sim \mu\,.$$

Отсюда, принимая во внимание (17), можно найти следующее выражение для спектральной плотности медленной компоненты флуктуаций частоты $\nu(t)$:

$$S_\nu(\Omega) = \left(\frac{\Delta_1\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_1^2} + \delta + \varepsilon^2\right)\frac{D_1}{2\pi}\,, \tag{25}$$

где введены обозначения

$$\Delta_1 = q^2\Omega_0^{-2}A_0 - 2q\,\Omega_0^{-1}(M_1\varkappa_2 + M_2\varkappa_3) \sim \mu^2\,,$$

$$\delta = \varkappa_2^2 g_1^2 + \varkappa_3 g_2^2 - 2\varkappa_3 s_2 g_2 \sim \mu^2,$$

$$\varkappa_3' = \varkappa_3 - s_2/g_2.$$

Из последнего уравнения (13) с точностью до члена $q_1 \alpha_1$ следует соотношение для быстрой компоненты $\nu(t)$:

$$\nu(t) = -q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 + f_4, \tag{26}$$

где теперь α_2 и α_3 заданы вторым и третьим уравнениями (19). Объединяя (26) и (19), получаем для $\nu(t)$

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\nu}{dt} + \Omega_0^2 \nu = -q_2 \frac{df_2}{dt} + q_3 \frac{df_3}{dt} +$$

$$+ \varkappa_2 \Omega_0^2 f_2 + \varkappa_3 \Omega_0^2 f_3 + \frac{d^2 f_4}{dt^2} + \Pi_a \frac{df_4}{dt} + \Omega_0^2 f_4.$$

Из последнего уравнения находим спектральную плотность

$$S_\nu(\Omega) = \left[\varepsilon^2 + \Omega_0^2 \frac{\eta^2\Omega^2 + \Omega_0^2 \delta}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \right] \frac{D_1}{2\pi}, \tag{27}$$

где

$$\eta^2 = \Omega_0^{-2} \left(q_1^2 g_1^2 + q_3^2 g_2^2\right) + \left(\varkappa_3 - q_3 \frac{\Pi_a}{\Omega_0^2}\right) 2 s_2 g_2.$$

Объединяя (25) и (27), получаем следующее окончательное выражение для спектральной плотности флуктуаций частоты:

$$S_\nu(\Omega) = N_\text{к}(\Omega) \frac{D_1}{2\pi},$$

$$N_\text{к}(\Omega) = \varepsilon^2 + \frac{\Delta_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{\eta^2 \Omega^2 + \Omega_0^2 \delta}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2}. \tag{28}$$

График безразмерной функции $N_\text{к}(\Omega)$ приведен на рис. 3. Эта функция мало изменяется с изменением Ω, оставаясь во всем диапазоне частот величиной второго порядка малости.

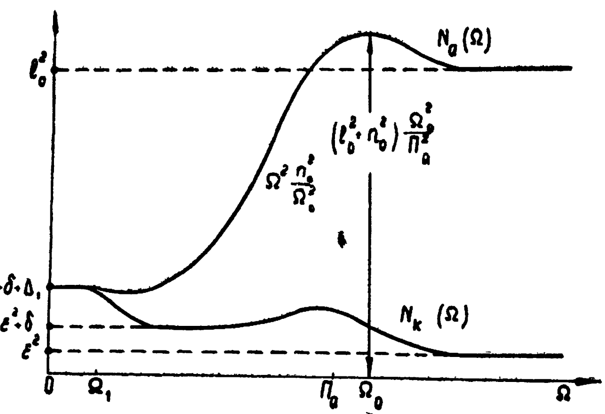

Рис. 3.

Рассмотрим теперь флуктуации частоты колебания анодного контура генератора. Из (11) следует, что в общем случае имеется существенная разница между $\nu(t)$ и $\nu_a(t)$. Поскольку $\nu(t)$ на порядок меньше, чем $\frac{d\alpha_2}{dt}$, $\frac{d\alpha_3}{dt}$ (см. уравнения (13)), то интенсивность флуктуаций частоты колебаний анодного контура существенно больше интенсивности флуктуаций частоты колебаний кварцевого контура. С другой стороны, поскольку спектральные плотности производных $\frac{d\alpha_2}{dt}$ и $\frac{d\alpha_3}{dt}$ равны нулю при $\Omega=0$, $S_\nu(0)=S_{\nu_a}(0)$.

Таким образом, спектральные плотности $S_\nu(\Omega)$ и $S_{\nu_a}(\Omega)$ должны начинаться из одной точки (при $\Omega=0$) и существенно расходиться при возрастании Ω.

Проводя довольно громоздкие, хотя и несложные, вычисления, аналогично предыдущему можно найти значение $S_{\nu_a}(\Omega)$ для всего диапазона частот:

$$S_{\nu_a}(\Omega) = N_a(\Omega)\,\frac{D_1}{2\pi},$$
$$N_a(\Omega) = \frac{\Delta_2\Omega^2+\Delta_1\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_1^2}+\delta+\varepsilon^2+\Omega^2\,\frac{l_0^2\,\Omega^2+n_0^2\,\Omega_0^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_a^2\,\Omega^2}. \tag{29}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta_2 = n_1^2 A_0\frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2}+2M_1\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\left(\frac{n_1n_2}{\Omega_0}\,\Omega_1+\varkappa_2 n_1+q\,\frac{n_2}{\Omega_0}\right)-$$
$$-2M_2\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\left(\frac{n_1n_3}{\Omega_0}\,\Omega_1-\varkappa_3' n_1+q\,\frac{n_3}{\Omega_0}\right)\sim\mu^2,$$
$$n_0^2 = n_2^2g_1^2+n_3^2g_2^2\sim\mu^0,$$
$$n_1 = m_0\,\Omega_0^{-2}\,(P_{1\,2}-P_{1\,3})\sim\mu^0,$$
$$n_2 = m_0\,\Omega_0^{-1}\,(p_{3\,3}+p_{3\,2})\sim\mu^0,$$
$$n_3 = m_0\Omega_0^{-1}\,(p_{2\,3}+p_{2\,2})\sim\mu^0.$$

График безразмерной функции $N_a(\Omega)$ приведен на рис. 3, откуда видно, что на частотах $|\Omega|\gg\Omega_0$ спектральные плотности флуктуаций частоты колебаний $x(t)$ и $y(t)$ отличаются на два порядка по μ. Это связано с тем, что на этих частотах между флуктуациями частоты обоих контуров (вследствие инерционности последних) практически отсутствует всякое взаимодействие, и эти флуктуации определяются независимо для обоих контуров. В этом случае можно считать, что имеются как бы два отдельных автогенератора, в одном из которых колебательный контур находится в аноде, а другой содержит кварцевый контур в сеточной цепи. Поскольку добротности этих контуров резко различны, то резко отличаются друг от друга и спектральные плотности $S_\nu(\infty)$ и $S_{\nu_a}(\infty)$.

Таким образом, можно считать, что значения $N_\text{к}(\infty)=\varepsilon^2$ и $N_a(\infty)=l_0^2$ принадлежат не связанным между собою отдельным автогенераторам. Отметим также, что в нашем случае разница добротностей контуров проявляется в разном порядке связи контуров с лампой.

На частотах порядка Ω_0 начинают сказываться амплитудные флуктуации анодного контура. Особенности $N_к(\Omega)$ и $N_а(\Omega)$ при $\Omega \simeq \Omega_0$ связаны с взаимодействием $\beta(t)$ с $\nu(t)$ и $\nu_а(t)$.

При дальнейшем уменьшении частоты флуктуаций начинает играть существенную роль инерционный кварцевый контур, оказывающий свое стабилизирующее действие. Крутой спад $N_а(\Omega)$ при уменьшении Ω и является следствием этого влияния. Особенности $N_к(\Omega)$ и $N_а(\Omega)$ при $\Omega \lesssim \Omega_1$ связаны с взаимодействием амплитудных флуктуаций кварцевого контура с $\nu(t)$ и $\nu_а(t)$.

Наконец, при сколь угодно малых частотах вся система ведет себя так, как будто генератор содержит только один высокодобротный кварцевый контур.

4. ЕСТЕСТВЕННАЯ ФОРМА И ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КВАРЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА

Для определения формы спектра колебания кварцевого генератора необходимо знать совместные спектральные плотности $S^0_{\alpha_1\nu}(\Omega)$ и $S^0_{\beta\nu_а}(\Omega)$, расчет которых можно провести аналогично предыдущему. Опуская этот расчет, приведем его результаты.

Пренебрегая быстрой компонентой амплитудных флуктуаций, будем иметь

$$S^0_{\alpha_1\nu}(\Omega) = \frac{\gamma_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2}\,\frac{D_1}{2\pi\Omega_0}, \tag{30}$$

где

$$\gamma_1 = -q\,\Omega_0^{-1} A_0 + \varkappa_2 M_1 + \varkappa_3' M_2 \sim \mu .$$

Для любых Ω справедливо соотношение

$$S^0_{\beta\nu_а}(\Omega) = \left[\frac{(\gamma_3-\gamma_2)\,\Omega_1^2}{\Omega^2+\Omega_0^2} + \Omega_0^2\,\frac{m_1\Omega^2+\gamma_2\Omega_0^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_а^2\Omega^2}\right]\frac{D_1}{2\pi\Omega_0}, \tag{31}$$

в котором введены обозначения

$$\gamma_2 = M_1\Omega_1\Omega_0^{-1}(k_2n_1 - k_1n_2) + M_2\Omega_1\Omega_0^{-1}(k_1n_3 + k_3n_1) + k_2\varkappa_2 g_1^2 + k_3\varkappa_3' g_2^2 \sim \mu,$$

$$\gamma_3 = -k_1 q\Omega_0^{-1} A_0 + M_1(k_1\varkappa_2 - k_2 q\,\Omega_0^{-1}) + M_2(k_1\varkappa_3 - k_3 q\,\Omega_0^{-1}) - k_3 s_2 g_2 \sim \mu,$$

$$m_1 = m_0\Omega_0^{-1}(p_{32}g_1^2 - p_{23}g_2^2) \sim \mu^0.$$

Анализируя (30) и (31), можно видеть, что четная корреляция между флуктуациями амплитуды и частоты кварцевого контура существует только на малых частотах, сравнимых с полосой кварца, в то время как четная корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями анодного контура принимает максимальное значение на частоте порядка полосы анодного контура.

Поскольку характеристики флуктуаций амплитуды и частоты колебаний различны для кварцевого и анодного контуров, то можно ожидать, что колебания $y(t)$ и $x(t)$ будут обладать различными формами спектральной линии.

Существование совместных спектральных плотностей $S^0_{\alpha_1\nu}$, $S^0_{\beta\nu_а}$ приводит к несимметричности форм линий. Можно показать, что вследствие малости амплитудных и частотных флуктуаций формы спектральных линий обоих колебаний даются формулами (6), (7) работы [11]; при этом спектральные линии состоят из почти симметричных пиков и несимметричных пьедесталов.

Учитывая (22), (28), (30), на основании вышеуказанных формул получаем следующее выражение для формы спектральной линии колебаний:

$$W_y(\Omega) = \frac{R_0^2}{2}\left[W_\kappa^0(\Omega) + W_\kappa^1(\Omega)\right]\frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}.$$

Безразмерные функции $W_\kappa^0(\Omega)$, $W_\kappa^1(\Omega)$, описывающие четную и нечетную компоненты спектра колебаний кварцевого контура, равны

$$W_\kappa^0(\Omega) = \Omega_0^2\,\frac{(\varepsilon^2+\delta+\xi^2)\,\Omega^2 + (\varepsilon^2+\delta+\Delta_1)\Omega_1^2}{[\Omega^2+(\Delta\Omega/\pi)^2]\,(\Omega^2+\Omega_0^2)} +$$

$$+\,\Omega_0^2\,\frac{(\varepsilon^2-\xi^2-\delta)\,\Omega^2-(\varepsilon^2-\xi^2-\delta)\,(2\Omega_0^2-\Pi_a^2)+A_2\Omega_1^2+\eta^2\Omega_0^2}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_a^2\,\Omega^2}, \qquad (32)$$

$$W_\kappa^1(\Omega) = \frac{2\gamma_1\Omega_0\Omega_1^2\,\Omega}{[\Omega^2+(\Delta\Omega/\pi)^2]\,(\Omega^2+\Omega_1^2)}.$$

Здесь введено обозначение $\Delta\Omega$ для ширины спектральной линии кварцевого генератора, которая на основании [12] равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_\nu(0) = \frac{\pi D_1}{2}\,(\varepsilon^2+\delta+\Delta_1) = \frac{\pi^2\omega_1^2 c_1}{2R_0^2}\,(\varepsilon^2+\delta+\Delta_1) \qquad (33)$$

и, как нетрудно показать, имеет порядок величины $\sim\omega_0\mu^6$.

График четной компоненты $W_\kappa^0(\Omega)$ приведен на рис. 4. Пик спектральной линии практически симметричен. Несимметрия пьедестала имеет место только при $\Omega \simeq \Omega_1$. При дальнейшем увеличении Ω симметрия $W_y(\Omega)$ вновь восстанавливается.

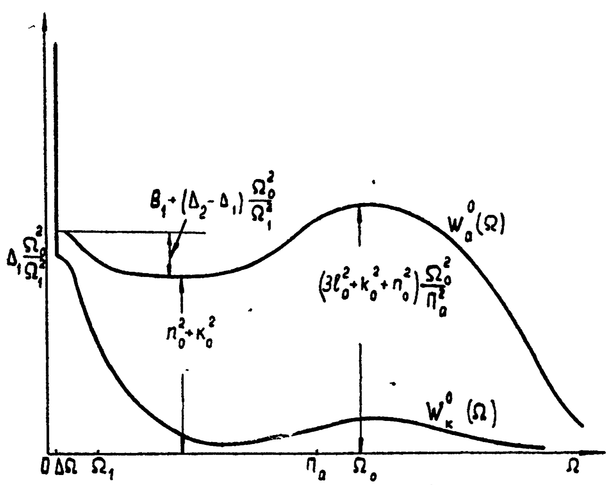

Рис. 4.

Принимая во внимание (23), (29), (31), для колебания анодного контура $x(t)$ получаем

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2}\left[W_a^0(\Omega) + W_a^1(\Omega)\right] \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$

где безразмерные функции $W_a^0(\Omega)$, $W_a^1(\Omega)$ равны

$$W_a^0(\Omega) = \Omega_0^2 \frac{\varepsilon^2+\delta+\Delta_1}{\Omega^2+(\Delta\Omega/\pi)^2} + \frac{B_1\Omega^2+(\Delta_2-\Delta_1)\Omega_0^2}{\Omega^2+\Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{3l_0^2\Omega^2+\Omega_0^2(k_0^2+n_0^2)}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_a^2\Omega^2},$$

$$W_a^1(\Omega) = \frac{2\gamma_3\Omega_0\Omega}{\Omega^2+(\Delta\Omega/\pi)^2} - \frac{2(\gamma_3-\gamma_2)\Omega_0\Omega}{\Omega^2+\Omega_1^2} + 2\frac{-\gamma_2\Omega_0\Omega^3+\Delta_2\Omega_0^3\Omega}{(\Omega^2-\Omega_0^2)^2+\Pi_a^2\Omega^2}. \tag{34}$$

График $W_a^0(\Omega)$ изображен на рис. 4. Пик спектральной линии колебания $x(t)$ такой же, как и для $y(t)$, а пьедестал сильно несимметричен и намного превышает (вплоть до частот $\simeq\Omega_0$) пьедестал спектральной линии колебания $y(t)$.

Таким образом, сравнивая (32) с (34), следует прежде всего подчеркнуть совпадение пиков спектральных линий для $x(t)$ и $y(t)$, а также большую величину и «богатство» формы пьедестала спектральной линии анодного колебания по сравнению с колебанием кварцевого контура.

Нетрудно, наконец, определить конкретное значение естественной ширины спектральной линии. Выражение для $E_1(t)$ дается предпоследней формулой (12). Учитывая малость емкости C_1 по сравнению с C, можно найти следующие значения коэффициентов:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}(eI_0\Gamma^2 Q_a^2 r^2 + 2kTr), \qquad c_к = \frac{1}{2\pi} 2kTr_к = mc_1.$$

Подставляя эти значения в (33), получаем естественную ширину спектральной линии кварцевого генератора, равную

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\omega_0^2}{4R_0^2}\left[(s_2^2+\delta+\Delta_1)(2kTr+eI_0\Gamma^2 r^2 Q_a^2)+h_к^2 2kTr_к\right].$$

Здесь e — заряд электрона, Γ^2 — коэффициент депрессии дробового шума, I_0 — постоянная составляющая анодного тока лампы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Жаботинский, П. Е Зильберман, ДАН СССР, **119**, 918 (1958).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш уч зав—Радиофизика, **9**, № 3, 622 (1966).
3. L. Fey, W. R. Atkinson, J. Newnan, Proc. IEEE, **52**, 104 (1964).
4. J. A. Barnes, Proc. IEEE, **54**, 207 (1966).
5. Ю. Э. Аптэк, Д И. Филатов, Радиотехника и электроника, **11**, 759 (1966).
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М, 1958
7. А Н Малахо,в Изв. высш уч. зав—Радиофизика, **6**, № 3, 495 (1963).
8 А. Н Малахов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 4, 710 (1964).
9 Р. В. Хохлов, ДАН СССР, **97**, 411 (1954).
10. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, **1**, 88 (1956).
11. А. Н Малахов, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 6, 885 (1967).
13. А Н. Малахов, Радиотехника и электроника, **2**, 1295 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
13 марта 1967 г.

NATURAL FLUCTUATIONS IN QUARTZ GENERATOR

A. N. Malakhov

Natural amplitude and frequency fluctuations of oscillations of quartz and anode circuits of a quartz generator is analysed in detail. The shape of the spectral line of both oscillations is considered.