ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XI, № 6 РАДИОФИЗИКА 1968

УДК 535 36

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Л. С. Долин

Получены приближенные дифференциальные уравнения для функций поперечной корреляции B_{VV^*} и B_V лучевой амплитуды волнового пучка, распространяющегося в слабонеоднородной среде с крупномасштабными флуктуациями диэлектрической проницаемости На их основе проведен расчет эффективного поперечного сечения пучка и корреляционных функций амплитуды и фазы плоской волны (в линейном по $\overline{(\delta\varepsilon)^2}$ приближений), который дал те же результаты, что и метод плавных возмущений Показано, что фурье-трансформанта функции B_{VV^*} по переменной $\rho_\perp = r_1 - r_4$ удовлетворяет уравнению переноса лучистой энергии, что позволяет перейти к лучевой формулировке ряда дифракционных задач

Известно, что ряд задач теории случайных волновых полей удается математически сформулировать и решить непосредственно в терминах усредненных величин, не решая соответствующей динамической задачи. К их числу относятся задачи о распространении частично когерентных электромагнитных полей в свободном пространстве, которые решаются с помощью системы уравнений для пространственно-временных функций корреляции [1]. Аналогичный подход развит в работах [2—4] применительно к задаче о среднем поле электромагнитной волны в хаотически неоднородной среде; в этом случае переход к усредненному описанию достигается путем введения тензора эффективной диэлектрической проницаемости среды с сохранением исходных уравнений поля. В настоящей работе получены приближенные уравнения, которым подчиняются корреляционные функции волнового пучка в хаотически неоднородной среде с крупномасштабными неоднородностями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представим диэлектрическую проницаемость среды в виде

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}(1 + \delta\varepsilon), \quad \delta\varepsilon = \alpha f(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

$$\alpha = [\overline{(\delta\varepsilon)^2}]^{1/2}$$

и будем предполагать, что ее относительные флуктуации малы ($\alpha \ll 1$), характерный масштаб неоднородностей (a) велик по сравнению с длиной волны ($a \gg \lambda$), среднее значение диэлектрической проницаемости $\bar{\varepsilon} = \text{const}$, случайное поле флуктуаций однородно, изотропно и характеризуется корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(\rho) = \alpha^2 B_f(\rho) = \alpha^2 \overline{f\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) f\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)}. \tag{2}$$

Предположим далее, что пучок распространяется в направлении оси z декартовой системы координат, и запишем его поле в виде

$$E = V(r)\exp(ikz - i\omega t), \qquad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}. \tag{3}$$

Здесь через E обозначена одна из поперечных компонент электрического вектора; V есть функция, медленно изменяющаяся в масштабе длины волны,—лучевая амплитуда пучка. В качестве усредненных характеристик волнового поля будем рассматривать функции поперечной корреляции лучевой амплитуды:

$$B_{VV^*}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \overline{V\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right) V^*\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right)}; \tag{4}$$

$$B_V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \overline{V\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right) V\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\perp}{2}\right)}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\perp$ — вектор, лежащий в плоскости $z = \mathrm{const}$. Отыскание уравнений для функций (4), (5) и составляет основную цель настоящей работы.

В ходе вывода уравнений будут использованы спектральные разложения

$$V(\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} V_s(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp(ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}_\perp)\, d^2\varkappa; \tag{6}$$

$$f(\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f_s(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp(ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r}_\perp)\, d^2\varkappa; \tag{7}$$

$$B_{VV^*}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} I_s(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{\varkappa})\exp(ik\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_\perp + ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}_\perp)\, d^2p\, d^2\varkappa; \tag{8}$$

$$B_V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} J_s(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{\varkappa})\exp(ik\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}_\perp + ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}_\perp)\, d^2p\, d^2\varkappa; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} B_f(\rho) &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(\varkappa, \rho_\parallel)\exp(ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}_\perp)\, d^2\varkappa = \\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(q_\perp, q_\parallel)\exp(ik\boldsymbol{q}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp + ikq_\parallel\rho_\parallel)\, d^2q_\perp\, dq_\parallel \end{aligned} \tag{10}$$

и соотношения

$$I_s(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{\varkappa}) = \overline{V_s\left(\boldsymbol{\varkappa} + \frac{\boldsymbol{p}}{2}, z\right) V_s^*\left(\boldsymbol{\varkappa} - \frac{\boldsymbol{p}}{2}, z\right)}; \tag{11}$$

$$J_s(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{\varkappa}) = \overline{V_s\left(\frac{\boldsymbol{p}}{2} + \boldsymbol{\varkappa}, z\right) V_s\left(\frac{\boldsymbol{p}}{2} - \boldsymbol{\varkappa}, z\right)}; \tag{12}$$

$$\overline{f_s(\boldsymbol{\varkappa}', z') f_s^*(\boldsymbol{\varkappa}'', z'')} = F_f(\varkappa', z' - z'')\,\delta(\boldsymbol{\varkappa}' - \boldsymbol{\varkappa}''); \tag{13}$$

$$\Phi_f(q_\perp, q_\parallel) = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(q_\perp, \rho_\parallel)\exp(-ikq_\parallel\rho_\parallel)\, d\rho_\parallel, \tag{14}$$

являющиеся следствием формул (2), (4)—(10); через $\boldsymbol{r}_\perp$ обозначена проекция $\boldsymbol{r}$ на плоскость $z = 0$.

В соответствии с предположением о слабой неоднородности поля E будем считать, что масштабы неоднородности функции B_{VV*} по переменным $\boldsymbol{r}_\perp$, $\boldsymbol{\rho}_\perp$ удовлетворяют условиям $r_0 \gg \lambda$, $\rho_0 \gg \lambda$, а спектр I_s отличен от нуля лишь в узких интервалах пространственных частот $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$: $0 \leqslant |\boldsymbol{p}| < p_m \sim \lambda/r_0$, $0 \leqslant |\boldsymbol{\varkappa}| < \varkappa_m \sim \lambda/\rho_0$. Аналогичные соотношения должны выполняться для функций B_V, J_s.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ I_s, J_s

Сначала мы найдем уравнения, которым подчиняются спектральные функции I_s и J_s. Уравнения для функций B_{VV*}, B_V будут получены из них с помощью преобразования Фурье.

Предположим, что рассеивающую среду можно разбить на плоские слои, каждый из которых содержит большое число неоднородностей ($\Delta z \gg a$) и имеет малую оптическую толщину (под оптической толщиной мы понимаем произведение коэффициента рассеяния на линейную толщину слоя). Как нетрудно показать, такое разбиение возможно при условии $\overline{(\delta\varepsilon)^2} \ll (ka)^{-2}$.

Найдем закон преобразования спектра I_s при прохождении волны через один элементарный слой (z_0, z). В основу расчетов положим приближенное параболическое уравнение для лучевой амплитуды пучка [5, 6]:

$$\left(\Delta_{r_\perp} + 2ik\frac{\partial}{\partial z} + k^2 \alpha f\right) V = 0. \tag{15}$$

Применим к этому уравнению преобразование Фурье по переменной $\boldsymbol{r}_\perp$ и проинтегрируем его по z, формально рассматривая последний член уравнения как некоторую известную функцию. В результате для спектра лучевой амплитуды получим интегральное уравнение

$$V_s(\boldsymbol{\varkappa}, \sigma) = \exp\left(-\frac{i\varkappa^2\sigma}{2}\right)\left[V_s(\boldsymbol{\varkappa}, 0) + \frac{i\alpha}{8}\int\limits_0^\sigma \exp\left(\frac{i\varkappa^2\xi}{2}\right)d\xi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} V_s\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{l}}{2}, \xi\right)\times\right.$$
$$\left.\times f_s\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{l}}{2}, \xi\right)d^2 l\right], \tag{16}$$

в котором для удобства записи введена безразмерная переменная $\sigma = k(z - z_0)$. Решая это уравнение методом последовательных приближений, найдем

$$V_s(\boldsymbol{\varkappa}, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n V_{sn}(\boldsymbol{\varkappa}, \sigma); \tag{17}$$

$$V_{s0}(\boldsymbol{\varkappa}, \sigma) = V_s(\boldsymbol{\varkappa}, 0)\exp\left(-\frac{i\varkappa^2\sigma}{2}\right); \tag{18}$$

$$V_{s(n+1)}(\boldsymbol{\varkappa}, \sigma) = \frac{i}{8}\int\limits_0^\sigma \exp\left[-\frac{i\varkappa^2}{2}(\sigma - \xi)\right]d\xi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} V_{sn}\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{l}}{2}, \xi\right)\times$$
$$\times f_s\left(\frac{\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{l}}{2}, \xi\right)d^2 l. \tag{19}$$

Полученный ряд дает разложение спектра лучевой амплитуды пучка в сечении $z = \mathrm{const}$ по степеням кратности рассеяния в слое среды

(z_0, z). Подставляя нулевой член ряда в (19), мы можем выразить его последующие члены через $V_s(\varkappa, 0)$ и тем самым найти связь между значениями лучевой амплитуды на верхней и нижней границах слоя в принципе с любой требуемой точностью. В дальнейшем, пользуясь малостью оптической толщины слоя, мы будем учитывать лишь его первые члены со степенями n не выше 2.

Найдем теперь аналогичные соотношения для функции I_s. Из (11) и (17) имеем

$$I_s = \sum_{n,\, m} \alpha^{n+m} I_{snm}; \tag{20}$$

$$I_{snm}(p, \sigma, \varkappa) = \overline{V_{sn}\left(\varkappa + \frac{p}{2}, \sigma\right) V^*_{sm}\left(\varkappa - \frac{p}{2}, \sigma\right)}. \tag{21}$$

Подставим (18), (19) в (21), предварительно выразив $V_{sn}(\varkappa, \sigma)$ через $V_s(\varkappa, 0)$, и выполним операцию усреднения, считая, что функции $V_s(\varkappa, 0)$ и $f_s(l, \xi)$ $(\xi > 0)$ статистически независимы*; при усреднении квадратичных по f величин воспользуемся соотношениями (13), (14). В результате получим искомый закон преобразования спектра I_s, который с точностью до членов $\sim \alpha^2$ имеет вид

$$I_s = I_{s00} + \alpha^2 (I_{s11} + I_{s02} + I_{s20}); \tag{22}$$

$$I_{s00}(p, \sigma, \varkappa) = I_s(p, 0, \varkappa) \exp(-ip\varkappa\sigma); \tag{23}$$

$$\begin{aligned} I_{s11}(p, \sigma, \varkappa) = \frac{\pi}{2} \int_0^\sigma \exp[-ip\varkappa(\sigma - \xi)]\, d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} I_{s00}(p, \xi, q) \times \\ \times \Phi_f\left(|\varkappa - q|, \frac{|q^2 - \varkappa^2|}{2}\right) d^2 q; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} I_{s02}(p, \sigma, \varkappa) = -\frac{1}{4} I_{s00}(p, \sigma, \varkappa) \int_0^\sigma d\xi \int_0^\xi d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} F_f(q, \eta) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{i\eta}{2}\left[q^2 - 2q\left(\varkappa - \frac{p}{2}\right)\right]\right\} d^2 q; \end{aligned} \tag{25}$$

$$I_{s20}(p, \sigma, \varkappa) = I^*_{s02}(-p, \sigma, \varkappa); \tag{26}$$

при выводе формулы (24) было использовано условие $(z - z_0) \gg a$.

Не выходя за пределы точности исходного параболического уравнения (15), в подынтегральном выражении формулы (24) можно сделать замену

$$\Phi_f\left(|\varkappa - q|, \frac{|q^2 - \varkappa^2|}{2}\right) \to \Phi_f(|\varkappa - q|, 0),$$

а экспоненциальный множитель в формуле (25) положить равным 1. Относительная ошибка в величине интегралов не будет при этом превы-

---

* Поскольку крупномасштабные неоднородности рассеивают под малыми углами к оси пучка, то флуктуации поля на нижней границе слоя (z_0, z) обусловлены неоднородностями, расположенными перед слоем; поэтому они некоррелированы с флуктуациями ε внутри слоя.

шать $\max\left\{\frac{\lambda^2}{a^2}, \frac{\lambda^2}{\rho_0^2}, \frac{\lambda^2}{r_0^2}\right\}$. После этих упрощений можно непосредственно перейти к построению приближенного интегро-дифференциального уравнения для функции I_s.

Подействуем на (22) оператором

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial z} + ikp\varkappa, \tag{27}$$

для которого

$$L_1 I_{s00} = 0. \tag{28}$$

Тогда из (22)—(26) с учетом сделанных выше упрощений получим

$$L_1 I_s = \alpha^2 L_1 (I_{s11} + I_{s02} + I_{s20}); \tag{29}$$

$$L_1 I_{s11}(p, \sigma, \varkappa) = \frac{\pi k}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I_{s00}(p, \sigma, q)\, \Phi_f(|\varkappa - q|, 0)\, d^2q; \tag{30}$$

$$L_1 [I_{s02}(p, \sigma, \varkappa) + I_{s20}(p, \sigma, \varkappa)] = -\frac{k}{4} I_{s00}(p, \sigma, \varkappa) \int\limits_0^{\sigma} d\xi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(q, \xi) d^2q. \tag{31}$$

Используя условие $(z - z_0) \gg a$, заменим в формуле (31) верхний предел интегрирования по ξ на ∞ и воспользуемся соотношением (14). Подставим затем (30), (31) в (29) и в правой части полученного соотношения произведем замену $I_{s00} \to I_s$, имея в виду, что при этом мы теряем в (29) члены $\sim \alpha^4$, которые не учитывали при написании формулы (22). Формально такая замена эквивалентна переходу к слою бесконечно малой оптической толщины. В результате получим для функции I_s следующее уравнение:

$$L_1 I_s(p, z, \varkappa) = -\frac{\pi k \alpha^2}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\varkappa, 0)\, d^2\varkappa\, I_s(p, z, \varkappa) + \\ + \frac{\pi k \alpha^2}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I_s(p, z, q)\, \Phi_f(|\varkappa - q|, 0)\, d^2q. \tag{32}$$

Уравнение для функции J_s может быть найдено аналогичным образом. Соотношения, связывающие значения этой функции на границах элементарного слоя, имеют вид

$$J_s = J_{s00} + \alpha^2 (J_{s11} + J_{s02} + J_{s20}) + O(\alpha^3); \tag{33}$$

$$J_{s00}(p, \sigma, \varkappa) = J_s(p, 0, \varkappa) \exp\left[-i\left(\varkappa^2 + \frac{p^2}{4}\right)\sigma\right]; \tag{34}$$

$$J_{s11}(p, \sigma, \varkappa) = -\frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\sigma} \exp\left[-i\left(\varkappa^2 + \frac{p^2}{4}\right)(\sigma - \xi)\right] d\xi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} J_{s00}(p, \xi, q) \times \\ \times \Phi_f\left(|\varkappa - q|, \frac{p(q - \varkappa)}{2}\right) d^2q; \tag{35}$$

$$J_{s02}(p, \sigma, \varkappa) = -\frac{1}{4} J_{s00}(p, \sigma, \varkappa) \int\limits_0^\sigma d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F_f(q, \eta) \times \exp\left\{\frac{i\eta}{2}\left[2q\left(\frac{p}{2} - \varkappa\right) - q^2\right]\right\} d^2q; \tag{36}$$

$$J_{s20}(p, \sigma, \varkappa) = J_{s02}(p, \sigma, -\varkappa). \tag{37}$$

Переход к интегро-дифференциальному уравнению выполняется таким же образом, как и для функции I_s, с той лишь разницей, что вместо L_1 используется дифференциальный оператор

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial z} + ik\varkappa^2 + \frac{ikp^2}{4}. \tag{38}$$

Искомое уравнение имеет вид

$$L_2 J_s(p, z, \varkappa) = -\frac{\pi k \alpha^2}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\varkappa, 0)\, d^2\varkappa\, J_s(p, z, \varkappa) - \frac{\pi k \alpha^2}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} J_s(p, z, q)\, \Phi_f(|\varkappa - q|, 0)\, d^2q. \tag{39}$$

Аналогично уравнению (32) здесь не учтены члены, имеющие относительную величину $\sim \overline{(\delta\varepsilon)^2}$, λ^2/a^2, λ^2/ρ_0^2, λ^2/r_0^2.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ B_{VV^*}, B_V

Преобразовав (32), (39) по Фурье в соответствии с (8), (9), получим искомые уравнения для корреляционных функций (4), (5):

$$\left[\nabla_{r_\perp} \nabla_{\rho_\perp} + ik\frac{\partial}{\partial z} + ik^2 b(0) - ik^2 b(\rho_\perp)\right] B_{VV^*}(r, \rho_\perp) = 0; \tag{40}$$

$$\left[\frac{1}{4}\Delta_{r_\perp} + ik\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_{\rho_\perp} + ik^2 b(0) + ik^2 b(\rho_\perp)\right] B_V(r, \rho_\perp) = 0; \tag{41}$$

$$b(\rho_\perp) = \frac{k}{2}\int\limits_0^\infty B_\varepsilon\left(\sqrt{\rho_\perp^2 + x^2}\right) dx = \frac{\pi\alpha^2}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\varkappa, 0) \times \exp(ik\varkappa\rho_\perp)\, d^2\varkappa. \tag{42}$$

Эти уравнения позволяют исследовать целый ряд усредненных характеристик волнового пучка. Для расчета энергетических величин (пространственного распределения плотности энергии или средней мощности, поступающей на вход некоторого приемного устройства) достаточно первого из них. Решив оба уравнения, можно, кроме того, найти функции корреляции амплитуды и фазы волны (при условии, что известно распределение вероятностей для этих величин)*.

Вопрос о точности и границах применимости уравнений требует специального исследования. Пока мы ограничимся тем, что проконтро-

* Метод расчета флуктуаций амплитуды и фазы, основанный на использовании корреляционных функций типа (4), (5), был предложен в работах [7, 8].

лируем их на некоторых конкретных задачах, которые уже решались ранее другими методами. Рассмотрим две задачи такого сорта.

а) О флуктуациях амплитуды и фазы плоской волны. Для определения корреляционных функций амплитуды и фазы плоской волны необходимо решить уравнения (40), (41) при условиях $\nabla_{r_\perp} = 0$, $[B_{VV^*}]_{z=0} = [B_V]_{z=0} = 1$. Из первого уравнения имеем

$$B_{VV^*}(z, \rho_\perp) = \exp\{-kz[b(0) - b(\rho_\perp)]\}. \tag{43}$$

Второе уравнение отличается существенно большей сложностью*, и мы ограничимся его приближенным решением. Полагая

$$B_V(z, \rho_\perp) = \exp[-kzb(0) + \varphi(z, \rho_\perp)], \tag{44}$$

получим для φ нелинейное уравнение

$$\Delta_{\rho_\perp}\varphi + (\nabla_{\rho_\perp}\varphi)^2 + ik\frac{\partial\varphi}{\partial z} + ik^2 b(\rho_\perp) = 0 \tag{45}$$

и граничное условие $\varphi(0, \rho_\perp) = 0$. Будем искать φ в виде ряда

$$\varphi = \alpha^2\varphi_2 + \alpha^4\varphi_4 + \dots, \tag{46}$$

в котором учтем лишь первый член:

$$\varphi_2(z, \rho_\perp) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2s}(z, \varkappa)\exp(ik\varkappa\rho_\perp)\, d^2\varkappa; \tag{47}$$

$$\varphi_{2s}(z, \varkappa) = \frac{\pi i\,\Phi_f(\varkappa, 0)}{2\varkappa^2}\,[1 - \exp(-ik\varkappa^2 z)]. \tag{48}$$

Представляя медленно меняющуюся часть комплексной амплитуды поля в виде

$$V = Ae^{iS} = \exp(\overline{\ln A} + \chi + i\overline{S} + is) \tag{49}$$

и полагая, что флуктуации фазы и логарифма амплитуды распределены по нормальному закону, получим

$$\begin{gathered} \overline{\ln A} = -B_\chi(z, 0), \quad \overline{S} = -B_{\chi s}(z, 0), \\ B_{\left\{\chi \atop s\right\}}(z, \rho_\perp) = \frac{1}{2}[kzb(\rho_\perp) \pm \operatorname{Re}\varphi(z, \rho_\perp)]; \end{gathered} \tag{50}$$

$$B_{\chi s}(z, \rho_\perp) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\varphi(z, \rho_\perp). \tag{51}$$

Из (50), (51) и (47), (48) следует, что спектры функций $B_{\left\{\chi \atop s\right\}}$ и $B_{\chi s}$ в линейном по α^2 приближении определяются формулами

$$F_{\left\{\chi \atop s\right\}}(z, \varkappa) = \frac{1}{4}\pi kz\alpha^2\Phi_f(\varkappa, 0)\left[1 \mp \frac{\sin(k\varkappa^2 z)}{k\varkappa^2 z}\right]; \tag{52}$$

$$F_{\chi s}(z, \varkappa) = \frac{\pi\alpha^2\Phi_f(\varkappa, 0)}{2\varkappa^2}\sin^2\frac{k\varkappa^2 z}{2}, \tag{53}$$

---

* Заменой $\rho_\perp \to r_\perp$, $\omega \to 2\omega$ оно сводится к уравнению для лучевой амплитуды волны, распространяющейся в регулярной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\varepsilon' = \overline{\varepsilon}$, $\varepsilon'' = 4\overline{\varepsilon}[b(0) + b(r_\perp)]$.

которые совпадают (с точностью до обозначений) с соответствующими формулами работ [9, 10], полученными на основе метода плавных возмущений.

б) Об эффективном поперечном сечении волнового пучка. Эффективным поперечным сечением пучка в плоскости $z = \mathrm{const}$ назовем величину

$$\sum(z) = \pi \overline{r_\perp^2} = \pi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} r_\perp^2 B_{VV*}(\boldsymbol{r}, 0) d^2 r_\perp \Big/ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} B_{VV*}(\boldsymbol{r}, 0)\, d^2 r_\perp. \qquad (54)$$

Определим $\Sigma(z)$ по заданным значениям функции B_{VV*} в сечении пучка $z = 0$.

Решая краевую задачу для уравнения (40), найдем поле корреляции в области $z > 0$:

$$B_{VV*}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\boldsymbol{q}, z, \boldsymbol{\rho}_\perp) \exp(ik\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_\perp)\, d^2 q; \qquad (55)$$

$$Q(\boldsymbol{q}, z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = Q(\boldsymbol{q}, 0, \boldsymbol{\rho}_\perp - \boldsymbol{q}z) \exp\left[-kzb(0) + \int\limits_0^z b(|\boldsymbol{\rho}_\perp - \boldsymbol{q}\xi|) d\xi\right]. \qquad (56)$$

Из формул (54)—(56) после довольно очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sum(z) &= -\frac{\pi}{k^2}[\Delta_q Q(\boldsymbol{q}, z, 0)]_{q=0}/Q(0, z, 0) = \\ &= -\frac{\pi}{k^2}\frac{[\Delta_q Q(\boldsymbol{q}, 0, -\boldsymbol{q}z)]_{q=0}}{Q(0, 0, 0)} - \frac{\pi z^3}{3k}[\Delta_{\rho_\perp} b(\rho_\perp)]_{\rho_\perp = 0}. \end{aligned} \qquad (57)$$

Предположим теперь, что пучок аксиально симметричен, и выразим функцию Q в первом слагаемом формулы (57) через B_{VV*}, а функцию $b(\rho_\perp)$ во втором слагаемом — через Φ_f. В результате выражение для эффективного сечения примет вид

$$\Sigma(z) = \Sigma(0) + \Omega z^2 + \frac{\pi}{3}\overline{\varkappa^2} kb(0) z^3, \qquad (58)$$

где

$$\Omega = -\frac{\pi}{k^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}[\Delta_{\rho_\perp} B_{VV*}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp)]_{\substack{z=0\\ \rho_\perp=0}} d^2 r_\perp \Big/ \iint\limits_{-\infty}^{\infty}[B_{VV*}(\boldsymbol{r}, 0)]_{z=0} d^2 r_\perp; \qquad (59)$$

$$\overline{\varkappa^2} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa^2 \Phi_f(\varkappa, 0) d^2\varkappa \Big/ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\varkappa, 0) d^2\varkappa. \qquad (60)$$

Как видно из (58), сечение пучка представляется в виде суммы трех членов: начального сечения $\Sigma(0)$, члена, ответственного за дифракционную расходимость ($\sim z^2$), и члена, который учитывает расширение пучка за счет рассеяния на неоднородностях среды. Параметр Ω характеризует ширину диаграммы направленности пучка в отсутствие рассеивающей среды; его можно представить в виде

$$\Omega = \int\limits_0^\infty \theta^2 P(\theta)\,\theta\, d\theta \Big/ \int\limits_0^\infty P(\theta)\,\theta\, d\theta,$$

где $P(\theta)$ — диаграмма направленности пучка (по мощности), θ — полярный угол. Если, например, положить $[V(r)]_{z=0} = \exp[-\pi r_\perp^2/2\Sigma(0)]$ (гауссов пучок), то из (4), (59) получим

$$\Omega = \frac{1}{\Sigma(0)}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Параметр $\overline{\varkappa^2}$ есть дисперсия угла отклонения луча при однократном рассеянии, а величина $kb(0)$ — коэффициент рассеяния среды. Выражение для $\Sigma(z)$, подобное (58), было получено в работе [11] методом плавных возмущений.

4. О ЛУЧЕВОМ МЕТОДЕ

Из уравнения (40) или (32) нетрудно видеть, что функция

$$I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{\lambda^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} B_{VV^*}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_\perp)\exp(-ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}_\perp)\, d^2\rho_\perp \quad (61)$$

удовлетворяет уравнению*

$$\left(\boldsymbol{\varkappa}\nabla_{r_\perp} + \frac{\partial}{\partial z}\right) I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varkappa}) = -\sigma I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varkappa}) + \sigma\iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}, \mathbf{q})\, G(|\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{q}|)\, d^2q, \quad (62)$$

где

$$\sigma = kb(0), \quad G(\varkappa) = \Phi_f(\varkappa, 0) \Big/ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(\varkappa, 0)\, d^2\varkappa.$$

Последнее совпадает (в приближении малых углов) с уравнением переноса лучистой энергии [13, 14], на котором базируется оптика мутных сред. Функция G и величина σ играют роль индикатрисы и показателя рассеяния мутной среды, а вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ соответствует поперечной компоненте единичного вектора, направленного вдоль луча.

В случае, когда радиус корреляции поля мал по сравнению с масштабом его регулярной неоднородности ($\rho_0 \ll r_0$), функция I имеет тот же энергетический смысл, что и интенсивность поля лучистой энергии (поток излучения через единичную площадку в единичном телесном угле). Учитывая это обстоятельство и используя уравнение (62), можно дать волновое обоснование теории переноса, правда, для весьма ограниченного класса полей и сред (остронаправленные пучки излучения, слаборассеивающие среды с узкими индикатрисами)**. При $\rho_0 \sim r_0$ величина I является существенно нелокальной характеристикой поля и не может быть отождествлена с интенсивностью в том смысле, как она понимается в лучевой оптике. Тем не менее, формально лучевой метод по-прежнему работает и дает те же результаты, что и волновая теория, основанная на уравнении (40). В связи с этим следует заметить, что результаты по структуре пучков света в мутных средах, полученные

---

* Несколько другим способом это уравнение было получено в работе автора [12].

** Вообще говоря, обоснование теории переноса нужно проводить с учетом статистического характера источников излучения. Это можно сделать, если положить в основу теории функцию взаимной когерентности [15] Вольфа $\overline{\Gamma_{12}(\tau)}$, усредненную по ансамблю реализаций ($\delta\varepsilon$), а величину I определить (посредством соотношения (61)) через взаимную спектральную плотность $\overline{G_{12}(\nu)}$. Легко, однако, видеть, что уравнение для I при этом не изменится.

в [16] из уравнения переноса лучистой энергии, могут быть перенесены на волновые пучки*.

В случае $\sigma = 0$ ($\delta\varepsilon = 0$) уравнение (62) является строгим следствием диффузионного уравнения (15) и позволяет перейти к лучевой формулировке ряда дифракционных задач, в которых находит применение метод параболического уравнения. В частности, лучевым методом можно исследовать дифракцию волн на плоских регулярных объектах, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, рассеяние на шероховатых поверхностях или дифракцию за слоем среды с крупномасштабными неоднородностями, распространение волн в квазиоптических линиях передачи и т. д.

В заключение хочу выразить признательность М. А. Миллеру за ценные советы и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Вольф, Л. Мандель, УФН, 87, 491 (1965); 88, 347 (1966); 88, 619 (1966).
2. Ф. Г. Басс, С Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН, 73, 89 (1961).
3. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
4. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 39, (1966).
5. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 16 (1944); М. А. Леонтович, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
6. Г. Д. Малюжинец, УФН, 69, 321 (1959).
7. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
8. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 9, № 1, 33 (1964).
9. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
10. Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 7, № 10, 1824 (1962).
11. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
12. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).
13. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1958.
14. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
15. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1959.
16. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 380 (1964); 9, № 1, 61 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 25 марта 1967 г.

EQUATIONS FOR CORRELATION FUNCTIONS OF A WAVE BEAM IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM

L. S. Dolin

The approximate differential equations are derived for the functions (B_{VV^*}, B_V) of a transverse correlation of the ray amplitude of a wave beam propagating in a weakly-inhomogeneous medium with large-scale irregularities of the dielectric permittivity. On their basis the effective cross section of the beam and correlation functions of the amplitude and phase of a plane wave are calculated in a linear approximation over $\overline{(\delta\varepsilon)^2}$. The results are similar to those obtained by the smooth perturbation method. It is shown that the Fourier component of the function B_{VV^*} over the variable $\rho_\perp = r_1 - r_2$ satisfies the transfer equation of the ray energy that permits one to formulate a number of the diffraction problems in terms of the ray optics.

* Дифракционное расширение волнового пучка учитывается начальной угловой расходимостью пучка лучей, который ставится ему в соответствие соотношением (61).