

УДК 538.3

К ВОПРОСУ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК ТОЧНОСТИ РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СВЧ

Э. Л. Куликов

Предлагается новый метод получения оценок точности расчетных данных, получаемых при решении краевых задач электродинамики вариационным методом. Общие теоретические положения иллюстрируются примерами.

При нахождении приближенного решения задач математической физики, в частности, задач электродинамики СВЧ, возникает вопрос о том, с какой точностью определен тот или иной искомый параметр задачи. Возможный путь решения этого вопроса заключается в том, что при нахождении какого-либо параметра (собственная частота резонатора, коэффициент отражения от неоднородности в волноводе и т. д.) стремятся построить два стационарных функционала, приближенное значение одного из которых давало бы всегда значение искомой величины с избытком по сравнению с точным решением задачи, а значение второго — с недостатком. Однако методы построения двухсторонних оценок, развитые в настоящее время (см., например, [1-3]), справедливы лишь для весьма частных задач электродинамики. В настоящей работе предлагается более общий метод получения оценок точности расчетных данных, позволяющий значительно расширить круг допустимых для рассмотрения краевых задач математической физики. Изложение метода дается на примере стационарного функционала, записанного для электрических полей в случае гиротропных сред. Эти допущения не носят принципиального характера и вводятся лишь для того, чтобы упростить изложение материала. В случае необходимости нужные обобщения легко могут быть сделаны.

Предположим, что нашей задачей является отыскание стационарного значения функционала

$$J = \int_V \left(\text{rot } \tilde{E} \frac{1}{\mu} \text{rot } E - k^2 \tilde{E}_z E \right) dv, \quad (1)$$

где E — искомая функция, \tilde{E} — функция, точное значение которой удовлетворяет сопряженным уравнениям Максвелла, ϵ и μ — соответственно скалярная диэлектрическая проницаемость и тензор магнитной проницаемости среды, V — рассматриваемый объем, ограниченный поверхностью S .

Стационарный функционал (1) может быть использован для решения любых линейных задач электродинамики при условии, что в рассматриваемой системе исследуется установившийся гармонический процесс.

При проведении конкретных вычислений, как это следует из условия стационарности функционала (1), необходимо, чтобы касатель-

ные компоненты подставляемых в (1) пробных векторных функций были непрерывны на всех поверхностях внутри объема V . На внешней поверхности S , ограничивающей указанный объем, значение этих компонент должно совпадать с точным решением задачи.

Интересно отметить, что функции \tilde{E} и E , как показано, например, в работе [5], могут удовлетворять совершенно отличным друг от друга граничным условиям на поверхности S . Видоизменяя вид этих граничных условий, можно из (1) получить ряд функционалов для различных параметров рассматриваемой задачи. Например, при решении задачи о волноводном трансформаторе из (1) можно получить стационарные функционалы для элементов матрицы сопротивлений волноводного устройства [6], для проводимостей, рассеяния [7] и т. д. В дальнейшем будем считать, что на поверхности S касательные компоненты полей \tilde{E} и E удовлетворяют необходимым граничным условиям, что сразу же приводит к равенству

$$\delta \tilde{E}_s = \delta E_s = 0,$$

где индексом s обозначена касательная составляющая вектора на рассматриваемой поверхности, $\delta \tilde{E} = \tilde{E} - \tilde{E}_0$, $\delta E = E - E_0$, \tilde{E}_0 и E_0 — точные решения задачи, а \tilde{E} и E — пробные функции, которые подставляются в (1) при нахождении приближенного решения.

Сделаем следующие допущения: в объеме V отсутствуют потери; J — чисто действительная (или мнимая) величина; касательные компоненты векторов $\mu^{-1} \operatorname{rot} \tilde{E}$ и $\mu^{-1} \operatorname{rot} E$ непрерывны на всех поверхностях внутри V ; пробные функции не удовлетворяют волновым уравнениям, являющимся уравнениями Эйлера для стационарного функционала (1).

Тогда при подстановке в (1) пробных функций значение J можно всегда представить в виде

$$\begin{aligned} J &= J_0 + \Delta J = J_0 + \int_V \left(\operatorname{rot} \delta \tilde{E} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta E - k^2 \delta \tilde{E} \varepsilon \delta E \right) dv = \\ &= J_0 + \int_V \delta \tilde{E} \left(\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta E - k^2 \varepsilon \delta E \right) dv, \end{aligned}$$

где $J_0 = J(\tilde{E}_0, E_0)$ — точное решение задачи. Знак выражения ΔJ определяет, найдено ли приближенное значение J с избытком или с недостатком по сравнению с точным значением J_0 .

Оценим величину ΔJ . Для этого разобьем исходный объем V на частичные объемы V_i , так что $V = \sum_{i=1}^N V_i$. Разбиение объема V проведем таким образом, чтобы для частичных объемов V_i были известны собственные числа k_n^2 , получаемые при решении волнового уравнения

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} u - k^2 \varepsilon u = 0 \quad (2)$$

при условии, что $(\mu^{-1} \operatorname{rot} u)_s = 0$ на поверхности S_i .

Набор решений уравнения (2) в каждом объеме V_i образует полную систему ортогональных (с весом ε) функций $\{i\mathbf{u}_n\}$. Эта система сходится в среднем к любой векторной функции, касательная компонента которой непрерывна на всех поверхностях внутри V_i . Для простоты предположим, что системы функций $\{i\mathbf{u}_n\}$ ($i=1, 2, \dots, N$) ортонормированные. Кроме того, будем считать, что внутри V_i не меняются скачкообразно величины ε и μ , вследствие чего, например, касательная компонента функции $\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \tilde{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ непрерывна на всех поверхностях внутри V_i .

Согласно неравенству Буняковского, всегда выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |\Delta J| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{V_i} V \varepsilon^{-1} \delta \tilde{E} \left(\frac{1}{V \varepsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta E - k^2 V \varepsilon^{-1} \delta E \right) dv \right| \ll \\ &\ll \sum_{i=1}^N \left[\int_{V_i} \varepsilon |\delta \tilde{E}|^2 dv \int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta E - k^2 \varepsilon \delta E \right|^2 dv \right]^{1/2} = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\int_{V_i} \varepsilon |\delta \tilde{E}|^2 dv \int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E - k^2 \varepsilon E \right|^2 dv \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить величину $\int_{V_i} \varepsilon |\delta \tilde{E}|^2 dv$, поступим следующим образом. Представим функцию δE в области V_i в виде разложения по собственным функциям $i\mathbf{u}_n$. В результате получим

$$\delta \tilde{E} = \sum_{n=0}^{\infty} i A_n i \mathbf{u}_n, \quad (3)$$

$$\int_{V_i} \varepsilon |\delta \tilde{E}|^2 dv = \sum_{n=0}^{\infty} |i A_n|^2.$$

В силу вышесказанного справедливы также соотношения

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta \tilde{E} - k^2 \varepsilon \delta \tilde{E} = \sum_{n=0}^{\infty} i A_n (i k_n^2 - k^2) \varepsilon i \mathbf{u}_n, \quad (4)$$

$$\int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta \tilde{E} - k^2 \varepsilon \delta \tilde{E} \right|^2 dv = \sum_{n=0}^{\infty} |i A_n|^2 (i k_n^2 - k^2)^2.$$

Если ввести обозначения

$$\lambda_i = \min |i k_n^2 - k^2| \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

то, как это следует из сравнения (3) и (4), всегда

$$\int_{V_i} \varepsilon |\delta \tilde{E}|^2 dv \ll \frac{1}{\lambda_i^2} \int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \delta \tilde{E} - k^2 \varepsilon \delta \tilde{E} \right|^2 dv =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E} - k^2 \varepsilon \tilde{E} \right|^2 dv.$$

Следовательно,

$$|\Delta J| \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda} \sqrt{\int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{E} - k^2 \varepsilon \tilde{E} \right|^2 dv} \left(\int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E - k^2 \varepsilon E \right|^2 dv \right)^{-1/2} = J'(\tilde{E}, E).$$

Нетрудно видеть, что функционал J' стационарен относительно вариаций полей \tilde{E} и E вблизи точного значения. Добавляя к (1) или вычитая значения J' для заданных пробных функций, получаем выражения $J^+ = J + J'$ и $J^- = J - J'$, которые определяют искомым параметр J соответственно с избытком или с недостатком по сравнению с точным значением J_0 . Величина J' в данном приближении определяет погрешность находимого приближенного решения поставленной задачи.

В частном случае, когда $J=0$, развитый выше метод может быть использован для получения двухсторонних оценок при нахождении собственных частот электромагнитных резонаторов. При этом, используя совершенно аналогичные преобразования, удобно преобразовать расчетную формулу к следующему виду:

$$(k^2)^\pm = k_p^2 \pm \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \int_{V_i} \frac{1}{\varepsilon} \left| \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E - k_p^2 \varepsilon E \right|^2 dv \right) \left(\int_V \varepsilon |E|^2 dv \right)^{-1}, \quad (5)$$

где

$$k_p^2 = \left[\int_V \left(\operatorname{rot} E^* \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E \right) dv \right] \left(\int_V E^* \varepsilon E dv \right)^{-1}, \quad (6)$$

$\lambda_i = \min |k_n^2 - k_p^2|$, k_n — собственные числа частичных областей. Все условия, накладываемые на выбор пробных функций и частичных областей, те же, что и в предыдущем случае.

Знак в выражении (5) определяет приближенное значение k , которое будет всегда больше или меньше точного значения k_0 ($k^+ > k_0$, $k^- < k_0$), являющегося любым m -м собственным числом исследуемого резонатора. Способ определения порядка этого собственного числа тот же, что и для отдельно взятого выражения (6). Отметим, что при определении m -го собственного числа резонатора не нужно приближенно знать значения $(m-1)$ -го и $(m+1)$ -го собственных чисел, что является необходимым условием применения, например, методов Като [2] и вариационно-итерационного метода [3, 8]. При использовании последних точность в задании значений k_{m-1} и k_{m+1} в значительной мере определяет получаемую точность расчетных данных. Кроме того, как для резонаторов, так и в более общем случае становится несущественным вопрос о возможности наличия потенциальных функций в рассматриваемом объеме, что по сравнению с другими методами значительно расширяет круг задач электродинамики, для которых можно построить двухсторонние оценки.

Перейдем далее к рассмотрению некоторых примеров, основное назначение которых сводится к иллюстрации вышеизложенного метода.

Пример 1. Рассмотрим двумерную систему, изображенную на рис. 1. Между двумя бесконечными идеально проводящими металличе-

скими плоскостями находится диэлектрический слой. Все устройство регулярно вдоль оси x . Вдоль оси z могут распространяться электромагнитные волны. Введем в рассмотрение клеммные плоскости S_1 и S_2 , перпендикулярные плоскости рисунка и удаленные от диэлектрического стержня на расстояние, кратное числу длин волн λ . Электродинамические свойства неоднородности, заключенной между клеммными плоскостями S_1 и S_2 , могут быть описаны с помощью матрицы сопротивлений, проводимостей или рассеяния. Определим, например, элементы y_{nk} ($n=1, 2; k=1, 2$) матрицы проводимостей y . Согласно методике расчета эквивалентных параметров волноводных трансформаторов, предложенной в работе [6], величины y_{nk} могут быть найдены на основе стационарных свойств следующего функционала:

$$J = y_{nk} = \frac{j}{k} \int_V \left(\operatorname{rot} \tilde{E} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E - k^2 \tilde{E} \varepsilon E \right) dv, \quad (7)$$

где V — рассматриваемый объем, заключенный между клеммными плоскостями S_1 и S_2 .

Пробные функции, подставляемые в (7), в данном случае должны удовлетворять следующим граничным условиям. Касательная компонента поля \tilde{E} равна нулю в сечении S_k и совпадает с полем единичной амплитуды в сечении S_n . Касательная компонента поля E равна нулю в сечении S_n и совпадает с полем единичной амплитуды в сечении S_k .

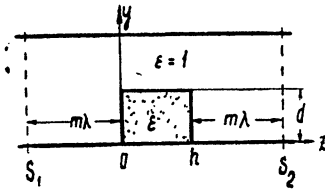


Рис. 1.

В силу симметрии задачи $y_{11} = y_{22}$ и $y_{22} = y_{21}$. Поэтому достаточно для решения задачи определить лишь величины y_{11} и y_{12} . В качестве первого шага найдем величину y_{11} . Для этой цели зададим пробные поля следующим образом:

$$\tilde{E} = E = E_y = -e_y \frac{\sin[k(z-h)]}{\sin(kh)}, \quad (8)$$

где e_y — единичный вектор вдоль оси y .

Подставляя (8) в (7), после несложных преобразований получим

$$y_{11} = j \left\{ \operatorname{ctg}(kh) - \frac{d(\varepsilon - 1)}{2b \sin^2(kh)} \left[kh - \frac{1}{2} \sin(2kh) \right] \right\}.$$

Функционал J' удобно выбрать в виде

$$J' = \frac{j}{k\lambda} \int_0^h \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} E - k^2 \varepsilon E)^2 dz = \frac{k^2 d(\varepsilon - 1)^2}{2\lambda \varepsilon b \sin^2(kh)} \left[kh - \frac{1}{2} \sin(2kh) \right], \quad (9)$$

где $\lambda = \min |(n\pi/h)^2/\varepsilon - k^2|$.

Следовательно,

$$J^\pm = y_{11}^\pm = j \left\{ \operatorname{ctg}(kh) - \frac{d(\varepsilon - 1)}{2b \sin^2(kh)} \left[kh - \frac{1}{2} \sin(2kh) \right] \left(1 \pm \frac{k^2}{\lambda} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \right\}. \quad (10)$$

Получаемая из (10) величина y_{11}^+ больше точного значения y_{11}^0 , а величина y_{11}^- меньше y_{11}^0 .

Для нахождения параметра y_{12} пробные поля, подставляемые в (7), зададим в таком виде:

$$E = E_y = -e_y \frac{\sin[k(z-h)]}{\sin(kh)},$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_y = e_y \frac{\sin(kz)}{\sin(kh)}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (7) и производя необходимые вычисления, находим

$$y_{12} = j \left\{ \frac{1}{\sin(kh)} (\varepsilon - 1) \frac{d}{2b} \left[\frac{\cos(kh)}{\sin^2(kh)} \left(kh - \frac{1}{2} \sin(2kh) \right) - \sin(kh) \right] \right\}. \quad (12)$$

Величина J' , как и выше, определяется выражением (9). Прибавляя или вычитая из (12) величину J' , будем находить величины y_{12}^+ и y_{12}^- соответственно большие или меньшие точного значения y_{12}^0 .

Заметим, что формулы (9), (10) и (12) справедливы и в более общем случае. Действительно, если в указанных выражениях заменить k на $\sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$, то, как известно из [9], мы получим параметры матрицы y для диэлектрической вставки в прямоугольном волноводе ширины a , в котором вдоль оси z может распространяться волна H_{10} .

На рис. 2 приведены в виде графика результаты вычислений, полученные на основе формул (9) и (12) для случая $d=b$ и $\varepsilon=4$. При этом введено обозначение $j y_{nk} = Y_{nk}$. На этом же рисунке пунктирной кривой изображена точная зависимость Y_{nk} от величины kh .

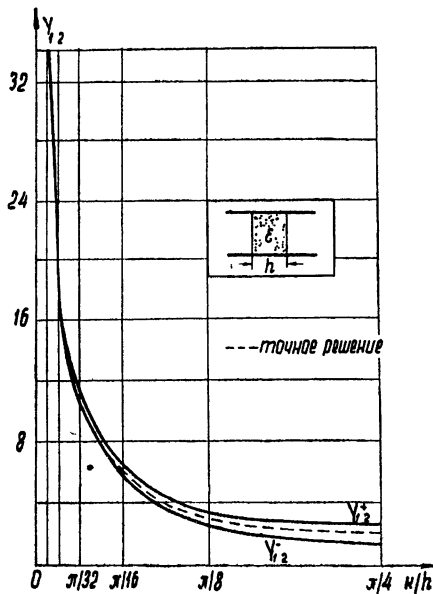


Рис. 2.

Пример 2. Определим низшую собственную частоту прямоугольного резонатора, в котором возбуждаются колебания типа H_{10} (см. рис. 2). В центре резонатора помещен диэлектрический стержень, высота которого совпадает с высотой резонатора. Предположим, что $a/b = b/c = 1$. Тогда, подставляя пробные поля вида

$$E = E_y = e_y \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{b}$$

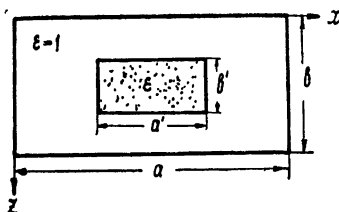


Рис. 3.

В стационарный функционал (5) и разбивая всю область V на две частичные области $V - V_\varepsilon$ и V_ε , где V_ε — объем диэлектрического стержня, после несложных преобразований получим

$$\left(\frac{k^\pm}{k_0}\right)^2 =$$

$$\frac{\int_V (\text{rot } E)^2 dV \pm \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (\text{rot rot } E - k_p^2 \varepsilon E)^2 dV \pm \frac{1}{\lambda} \int_{V - V_\varepsilon} (\text{rot rot } \vec{E} - k_p^2 \vec{E})^2 dV}{k_0^2 \int_V \varepsilon \vec{E}^2 dV} =$$

$$= \left(\frac{k_p}{k_0}\right)^2 \pm \frac{[1 - (k_p/k_0)^2 \varepsilon]^2}{(k_p/k_0)^4 \varepsilon} \left[p + \frac{1}{\pi} \sin(p\pi)\right]^2 \pm \quad (13)$$

$$\pm \frac{[1 - (k_p/k_0)^2]}{(k_p/k_0)^2} \left\{1 - \left[p + \frac{1}{\pi} \sin(p\pi)\right]^2\right\},$$

где

$$\left(\frac{k_p}{k_0}\right)^2 = \left[1 + (\varepsilon - 1) \left(p + \frac{1}{\pi} \sin(p\pi)\right)^2\right]^{-1},$$

$$\lambda_\varepsilon = k_p^2, \quad \lambda = k_0^2 - k_p^2, \quad k_0^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2.$$

Способ выбора величин λ и λ_ε требует некоторого пояснения. Функцию $\delta E = E - E_0$ из области $V - V_\varepsilon$ можно, очевидно, аналитически продолжить в область V_ε при значении $\varepsilon = 1$ таким образом, чтобы на границе областей V_ε и $V - V_\varepsilon$ выполнялось условие непрерывности касательных компонент векторов δE , $\text{rot } \delta E$ и $\frac{1}{\varepsilon} \text{rot rot } \delta E$. В этом случае разложения (3) и (4) можно произвести по собственным функциям уравнения $\text{rot rot } \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0$ с граничным условием $E_s = 0$ на поверхности S . Но тогда $k_n \neq 0$ и $\lambda = \min |k_n^2 - k_p^2| = k_0^2 - k_p^2$. В справедливости соотношения $\lambda_\varepsilon = \min |k_n^2 - k_p^2| = \min \left| \left[\left(\frac{m\pi}{a'}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b'}\right)^2 \right] \frac{1}{\varepsilon} - k_p^2 \right| = k_p^2$ нетрудно убедиться непосредственным путем.

На рис. 4 изображены графически результаты численного расчета, полученные на основе формулы (13), для случая $\varepsilon = 10$, $a/b = 7/5$. На этом же рисунке для сравнения приведены результаты, к которым

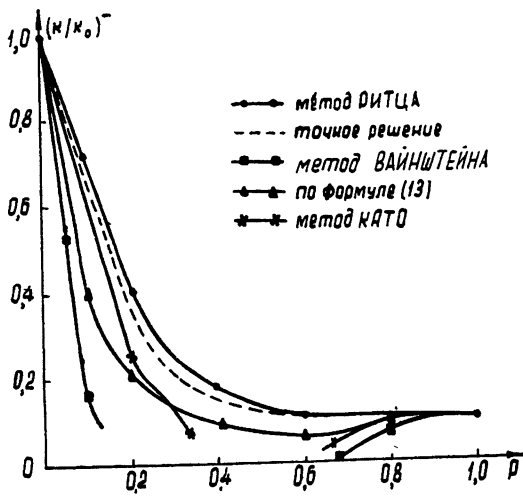


Рис. 4.

в аналогичном приближении приводят методы Като и Вайнштейна. В качестве «точного» решения взяты численные данные расчета этого резонатора на ЭВМ, приведенные в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 7, № 4, 601 (1962).
2. L. Spruch, R. Bartman, J. Appl. Phys., 31, № 5, 905 (1960).
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1960, тт. 1, 2.
4. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, ГИТТЛ, М., 1957.
5. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 8, № 4, 713 (1963).
6. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 10, № 3, 559 (1965).
7. Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 7, № 7, 1091 (1962).
8. G. Temple, Proc. London Math. Soc., 29, 257 (1929).
9. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
3 марта 1967 г.,
после переработки
20 октября 1967 г.

EVALUATIONS OF CALCULATED DATA ACCURACY IN SOLVING THE BOUNDARY PROBLEMS OF UHF ELECTRODYNAMICS

E. L. Koulikov

A new method is proposed to evaluate the accuracy of calculated data derived when the boundary problems of electrodynamics are solved by the variation method. Common theoretical statements are illustrated by the examples.