

УДК 539 124 · 537 533

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Л. А. Егоров, М. А. Миллер

На основе электродинамического принципа взаимности проведено рассмотрение задач о нахождении поля излучения движущихся заряженных частиц. Получено выражение для поля излучения точечного заряда, движущегося произвольным образом в изотропной среде с заданными неоднородностями. На его основе проведена классификация излучений движущихся зарядов, несколько отличная от общепринятой, а именно различаются синхронное (черенковское) излучение, излучение из-за неравномерности движения (тормозное) и излучение вследствие неоднородности вспомогательного поля (переходное). В качестве примера, иллюстрирующего возможности метода теоремы взаимности, рассмотрено излучение при квазиравномерном движении заряженной частицы в слабонеоднородной среде (приближении геометрической оптики). Результат имеет универсальный вид, пригодный и для переходного и для тормозного излучений. В случае сильных неоднородностей расчет поля излучения в известных функциях возможен лишь для некоторых «удачных» движений и распределений вспомогательного поля. В работе найдено поле излучения заряда, движущегося прямолинейно в однородной среде со скоростью $v(z) = v_0/(1 + \gamma^2 z^2)$. На примере этого движения удастся проследить все особенности формирования различных видов излучения.

1. Как известно, соотношения взаимности позволяют упростить расчет поля излучения заданных источников и придают процедуре вычислений некоторую универсальность. Эта методика, хорошо развитая в теории радиоизлучателей, по неясным причинам почти не используется в задачах об излучении движущихся зарядов [1-7] (несмотря на призывы, содержащиеся в [8]), что приводит иногда к дублированию трудоемких расчетов и затрудняет интерпретацию результатов, часто весьма прозрачную.

Кроме того, соотношения взаимности «наводят» на несколько отличную от традиционной классификацию излучений, что само по себе может представлять известный интерес.

2. Рассмотрим одиночный точечный заряд e , движение которого задано уравнением

$$r = r_e(t). \quad (1)$$

Вектор тока, создаваемого таким движущимся зарядом, записывается в виде

$$I(r, t) = ev(t) \delta(r - r_e(t)), \quad (2)$$

где $v(t) = \frac{dr_e}{dt}$, $\delta(r)$ — функция Дирака. Фурье-компонента тока (2)

определяется по формуле

$$I_\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{e}{2\pi} \int_{\Gamma} \delta(r - r_e) \exp[-i\omega t(r_e)] dr_e, \quad (3)$$

где Γ — траектория движения заряда.

В частном случае равномерного движения по прямому треку

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{1}_z z = \mathbf{1}_z v_e (t_e - t_0), \quad (4)$$

$$I_\omega(z) = \frac{e}{2\pi} \mathbf{1}_z \exp(-i\omega t_0 - ih_e z),$$

где $h_e = \omega/v_e$.

Чтобы избежать некоторых формальных (да, пожалуй, и физических) трудностей, связанных с неограниченными размерами области источников излучения, предположим, что скорость \mathbf{v} отлична от нуля только в конечной области пространства V_1 , где сосредоточены также и все неоднородности среды.

3. В обычной формулировке теорема взаимности для двух токов с плотностями $\mathbf{j}_1 e^{i\omega t}$ и $\mathbf{j}_2 e^{i\omega t}$ выглядит так:

$$\int_{V_1} \mathbf{j}_1(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\omega, \mathbf{r}) dV = \int_{V_2} \mathbf{j}_2(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{r}) dV. \quad (5)$$

Напомним, что она справедлива для любых линейных сред; при несимметричных тензорах проницаемостей $\epsilon_{ik} \neq \epsilon_{ki}$; $\mu_{ik} \neq \mu_{ki}$) второе поле должно быть задано в транспонированной среде ($\epsilon_{ik} \rightarrow \epsilon_{ki}$; $\mu_{ik} \rightarrow \mu_{ki}$), в движущихся средах это соответствует изменению знака скорости ($\vec{v} \rightarrow -\mathbf{v}$), в замагниченных средах — изменению знака перед внешним магнитным полем ($\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$); наконец, на границе области V_1 достаточно потребовать выполнения «импедансных» условий вида $\mathbf{E} = z[\mathbf{H} \mathbf{n}]$, $\text{Re } z \geq 0$, \mathbf{n} — нормаль наружу. Условия излучения являются их частным случаем.

Выбор гармонической зависимости для временных процессов в (5) в общем не является принципиальным, хотя сильно упрощает формулировку теоремы взаимности, оставляя в стороне нестационарные эффекты, точнее — откладывая их восстановление до последнего этапа вычислений, когда осуществляется свертка по частотам. Можно было бы, однако, провести эту свертку сразу в (5) и работать с теоремой взаимности для источников, произвольно меняющихся во времени, минуя представление (3):

$$\int_{-\infty}^t d\tau \int_{V_1} \mathbf{j}_1(t - \tau) \mathbf{E}_2(\tau) dV = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{V_2} \mathbf{j}_2(\tau) \mathbf{E}_1(t - \tau) dV. \quad (6)$$

Применение теоремы взаимности в форме (6) для движущихся зарядов в свободном (однородном) пространстве, естественно, приводит к формулам Льенара—Вихерта; эта процедура представляет, по-видимому, лишь методический интерес, и мы ее опускаем. В неоднородных средах вопрос о том, какой вид теоремы взаимности: (5) или (6), является предпочтительным, зависит от вида, в котором получено решение соответствующей «эталонной» задачи теории дифракции. Поскольку нестационарные дифракционные задачи обычно сами решаются спектральным методом с последующей сверткой по частотам, то, за немногими исключениями, почти всегда целесообразно иметь дело непосредственно с (5), что и будет принято далее.

4. Перейдем теперь к расчету поля излучения, создаваемого движущимся источником (зарядом) в дальней ($R \gg L_1$) и одновременно в волновой ($R \gg \lambda$) зонах. Мы пользуемся терминологией, принятой в радиодиапазоне, при этом L_1 — характерный размер источника излучения (длина трека заряженной частицы), R — расстояние до точки наблюдения (рис. 1), $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}$, где n — показатель преломления среды.

Возьмем в (5) в качестве первого источника ток (3), а в качестве второго — некоторый пробный ток $\mathbf{j}_2(\omega, \mathbf{r})$, для которого решение задачи о поле известно. Обычно — особенно в изотропных средах — вспомога-

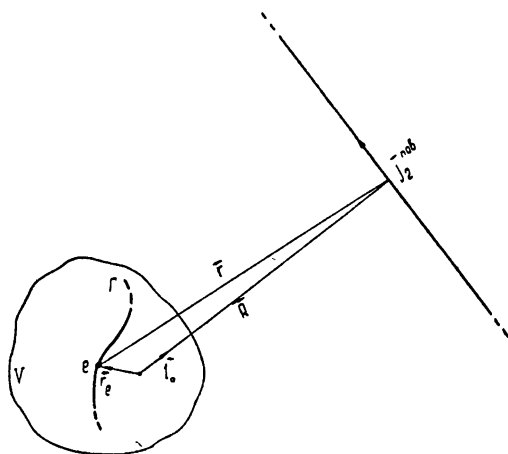


Рис. 1.

тельным источником служит элементарный диполь, помещенный на таком удалении от области V_1 (внутри нее, напомним, сосредоточены все неоднородности), на котором создаваемое им невозмущенное поле вблизи V_1 не отличается от поля однородной плоской волны.

Существует, однако, возможность привлечения и более простых вспомогательных источников, в частности, равномерно «размазанного» на неограниченной плоскости поверхностного тока $\mathbf{j}_2^{\text{пов}}$, который сразу формирует плоскую од-

нородную волну. Это дает заметные преимущества в средах со сложными материальными уравнениями (анизотропия, пространственная дисперсия и т. п.), где отыскание поля элементарного диполя само по себе представляет нетривиальную задачу [9]. При этом формально нарушаются условия применимости теоремы (5), так как область интегрирования V_2 становится неограниченной. Однако фактически источники \mathbf{j}_2 могут быть обрезаны внутри конечной области V_2 и все же формировать около V_1 падающую плоскую волну с любой степенью точности; достаточно потребовать лишь, чтобы

$$L_2 \gg \sqrt{\lambda R} \gg L_1. \quad (7)$$

Для простоты будем считать, что вне V_1 среда однородна и изотропна; тогда асимптотика трехмерного поля вдали известна:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \sum_{n=1,2} \mathbf{1}_E^{(n)} \mathcal{E}^{(n)}(1_r) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{1}_r$ — единичный вектор в направлении на точку наблюдения, а $\mathbf{1}_E^{(n)}$ — единичные поляризационные векторы; все три локально взаимно ортогональны: $\mathbf{1}_E^{(1)} \perp \mathbf{1}_E^{(2)} \perp \mathbf{1}_r$. Если вспомогательный ток \mathbf{j}_2 равномерно «размазан» на плоскости, перпендикулярной к направлению $\mathbf{1}_r$ (касательной к сферическому фронту волны в точке наблюдения), то создаваемое им поле в непосредственной близости от источника записывается в виде

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{j}_2. \quad (9)$$

В (9), разумеется, игнорируется влияние возмущений, создаваемых неоднородностями среды внутри V_1 , т. е. считается, что всегда в пределах неравенства (7) можно оттянуть источник \mathbf{j}_2 подальше от области V_1 .

Интеграл в правой части (5) при сделанных выше оговорках и с-учетом (8) и (9) берется методом стационарной фазы; вся процедура вычислений аналогична примененной в работах [9-11] при нахождении поля в анизотропных средах с помощью леммы Лоренца. Результат таков:

$$E_1(r) = \sum_n 1_E^{(n)} \frac{i\omega\mu e}{2\pi c^2} \frac{e^{-ikR}}{R} L^{(n)}, \quad (10)$$

где $L^{(n)}$ — величина, называемая в высокочастотной электродинамике фактором возбуждения (с точностью до постоянного множителя $e/2\pi$), а в теории излучения заряженных частиц — длиной формирования излучения:

$$L^{(n)}(1_r, 1_E^{(n)}) = \int_{\Gamma} \exp[-i\omega t(r_e)] f_E^{(n)}(r_e, 1_r, 1_E^{(n)}) dr_e. \quad (11)$$

Функция $f_E^{(n)}(r_e, 1_r, 1_E^{(n)})$ представляет собой распределение дифракционного поля вдоль трека частицы, т. е.

$$E_2^{(n)}(r) = E_0(1_r) f_E^{(n)}(r, 1_r, 1_E^{(n)}). \quad (12)$$

Формулы (10) и (11) фактически исчерпывают принципиальную сторону дела. Как всегда, обращение к теореме взаимности отнюдь не избавляет от решения каких-либо задач вообще, но оно позволяет опираться на уже имеющиеся, «готовые» решения; в частности, согласно формулам (10) и (11), отыскание поля излучения произвольно движущейся заряженной частицы сводится к интегралу (11), содержащему результат решения задачи о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей из бесконечности на область V_1 .

5. Выражение (11) позволяет сделать некоторые общие суждения по поводу различных возможных способов «формирования» поля излучения движущимися зарядами. Пусть частица летит по незамкнутому криволинейному треку $r = r_e(t)$. Тогда, вводя в (11) в качестве переменной интегрирования длину дуги s трека, будем иметь*

$$L^{(n)} = \int_{\Gamma} \exp[-i\omega t(s)] f^{(n)}(s) \exp[i\varphi^{(n)}(s)] \cos \theta_n(s) ds. \quad (13)$$

Здесь $f^{(n)}(s)$ и $\varphi^{(n)}(s)$ — соответственно функции распределения амплитуды и фазы дифракционного поля вдоль Γ , $\theta_n(s)$ — угол между векторами $f_E^{(n)}(s)$ и $\tau = \frac{dr_e}{ds}$.

Особенно интересны два частных случая формулы (13): один относится к простейшему движению, а другой — к простейшему дифракционному полю.

Пусть частица движется вдоль прямого трека с постоянной скоростью v . Тогда, согласно (4) и (13), получим**

* Формула (13) написана для непериодических движений по незамкнутому трекам. В случае периодических движений по замкнутому треку Γ с периодом $T = 2\pi/\Omega$ вместо (10) и (11) следует написать

$$E(r) = \sum_m E_m(r) \delta\left(m - \frac{\omega}{\Omega}\right), \quad E_m(r) = \sum_n 1_E^{(n)} \frac{i\Omega\mu e}{2\pi c^2} \frac{e^{-ikR}}{R} mL_m^{(n)},$$

$$L_m^{(n)} = \oint_{\Gamma} \exp[-im\Omega t(r_e)] \vec{f}_E^{(n)}(r_e, 1_r, 1_E^{(n)}) dr_e.$$

** Формула (14) совместима с предположением о финитном движении заряда только при сходимости этого интеграла. Иначе следует либо несколько видоизменить запись спектральной компоненты плотности тока, либо говорить о погонной мощности, снимаемой с единицы длины трека.

$$L^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ih_e z) f^{(n)}(z) \exp[i\varphi^{(n)}(z)] \cos \theta_n(z) dz. \quad (14)$$

Отсюда ясно, что величина $L^{(n)}(1_r, 1_E^{(n)})$ пропорциональна фурье-составляющей функции $f_E^{(n)}(z)\tau$, представляющей проекцию пробного дифракционного поля на направление трека частицы.

С другой стороны, для произвольного движения в свободном однородном пространстве дифракционная функция — просто плоская однородная волна, распространяющаяся в $-\vec{1}_r$ -направлении:

$$f_E^{(n)} = 1_E^{(n)} \exp[ik_1 r(s)].$$

Следовательно,

$$L^{(n)}(1_r, 1_E^{(n)}) = \int_{\Gamma} \exp[-i\omega t(s)] \exp[ik_1 r(s)] (1_E^{(n)} \tau) ds. \quad (15)$$

В частности, для прямого трека

$$\frac{kL(k_s)}{\sqrt{k^2 - k_s^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega t(s)] \exp[ik_s s] ds, \quad (16)$$

где $k_s = k \cos \theta = k(1_r, \tau)$.

В этом случае, в отличие от (14), фурье-составляющая источника определяет функцию $kL(k_s)/\sqrt{k^2 - k_s^2}$, а не непосредственно путь формирования L . Формулы (14) и (16) позволяют принципиально просто подойти к решению так называемых обратных задач, состоящих в отыскании распределения источников по известному угловому распределению поля излучения. В случае (14) это диагностика среды, в случае однородной среды (16) это диагностика движения заряда. В теории радиоизлучателей (антенн) задачи такого рода представляют первостепенное значение, и поэтому методика их решения в какой-то мере развита [12]. В теории излучения движущихся зарядов такая «тонкая» диагностика, насколько нам известно, не практикуется, и обратные задачи пока еще не привлекали внимание теоретиков.

Формулы (13), (14) и (15) позволяют классифицировать довольно естественным образом различные типы излучения заряженных частиц. Можно различать три «причины» появления поля излучения ($L \neq 0$):

- 1) неравномерное (неоднородное) движение заряда $\left(\frac{\partial^2 t}{\partial s^2} \neq 0\right)$,
- 2) неоднородное дифракционное поле вдоль трека $\left(\frac{\partial}{\partial s}(1_E \tau) \neq 0, \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s) \neq \text{const}, \frac{\partial}{\partial s} f(s) \neq 0\right)$,
- 3) синхронизация волн тока и вспомогательного дифракционного поля $\left(\omega t_e = \frac{\omega}{v} z = \varphi(z)\right)$.

К первой группе относятся различные виды тормозного излучения; ко второй — различные виды переходных [5–7], «подходных» [4], дифракционных [3] излучений, а также магнитотормозное излучение частиц, равномерно вращающихся по криволинейному треку (меняются фаза поля и поляризационный угол); наконец, к третьей группе принадлежит черенковское излучение [1, 2]. При таком подходе исторически сложившаяся терминология выглядит, в известном смысле, как неудачная, опирающаяся на разные, иногда даже второстепенные

признаки. Так, например, часто к переходному относят излучение частицы только при пролете через одиночную границу раздела двух сред [5], а излучение в системе, содержащей две или несколько границ (как это встречается практически в большинстве экспериментальных установок и, уж во всяком случае, во всех без исключения низкочастотных электронных приборах), вообще предпочитают классифицировать не как излучение, а как взаимодействие с фиксированным внешним полем.

Формулы (13), (14) показывают, что во всех этих случаях «механизм» формирования поля излучения принципиально неразличим. Впрочем, следует иметь в виду, что любая классификация отражает некоторые идеализированные ситуации; обычно приходится иметь дело с комбинированным излучением, где невозможно провести резкую грань между различными видами излучения. Действительно, неоднородность среды приводит к появлению в спектре вспомогательного поля медленных гармоник, синхронных с волнами возбуждающего тока. Из-за неравномерности движения в спектре возбуждающего тока, в свою очередь, возникают быстрые компоненты, синхронные с волной вспомогательного поля. Получается, что синхронное излучение является, в известном смысле, универсальной причиной появления поля излучения любого вида.

6. К сожалению, интегралы вида (13) берутся аналитически только для очень ограниченного класса движений и распределений дифракционного поля. Это обстоятельство, естественно, затрудняет исследование комбинированных излучений и придает особую важность рассмотрению интегрируемых частных случаев.

В качестве одного из таких интегрируемых примеров рассмотрим квазиравномерное движение частицы по прямому треку в слабонеоднородной среде (приближение геометрической оптики). Критерии медленности выражаются неравенствами

$$\left| \frac{1}{f} \frac{df}{ds} \right| \ll \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, \quad \left| \frac{1}{f} \frac{df}{ds} \right| \ll \left| \omega \frac{dt}{ds} \right|,$$

или, если обозначить через l_E характерный размер распределения амплитуды дифракционного поля, через l_φ — фазы, а $l_\nu = \frac{1}{h_e}$ — фурье-компоненты тока, можно записать

$$l_E \gg l_\varphi \text{ и } l_E \gg l_\nu.$$

Тогда интеграл (13) может быть вычислен методом стационарной фазы, если, конечно, точка стационарной фазы действительно существует при данном движении. Опуская стандартные выкладки, приводим окончательный ответ:

$$L \simeq \left\{ \frac{2\pi}{|\varphi''(s_{ст}) - \omega t''(s_{ст})|} \right\}^{1/2} \exp \left[-i\omega t(s_{ст}) + i\varphi(s_{ст}) \pm i \frac{\pi}{4} \right] \times \\ \times f(s_{ст}) \cos [\theta(s_{ст})], \quad (17)$$

где точка стационарной фазы первого порядка $s_{ст}$ [13, 14] определяется из условия «мгновенной» синхронизации, соответствующей всплеску черенковского излучения:

$$\omega \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (18)$$

В общем случае таких областей синхронизации может быть несколько: например, при плавном разгоне частицы с последующим торможением она может дважды проходить через участки синхронизма. Тогда формула (17) применяется к каждой стационарной точке при условии их достаточного разнесения (в масштабах $l_\nu \sim l_\phi$). В принципе, можно рассматривать задачу слияния обеих стационарных точек в одну стационарную точку s_0 второго порядка [15] (как всегда, промежуточные состояния наиболее трудно анализируемы). Физически такое слияние соответствует в указанном ниже примере монотонного разгона и торможения выходу на черенковскую синхронизацию в точке максимума скорости. Тогда соответствующая формула для L будет иметь вид

$$L \simeq 2\Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \left\{ \frac{6}{|\varphi'''(s_0) - \omega t'''(s_0)|} \right\}^{1/3} \exp \left[-i\omega t(s_0) + i\varphi(s_0) + i \frac{\pi}{6} \right] \times \\ \times f(s_0) \cos [\theta(s_0)]. \quad (19)$$

Наконец, еще одно замечание. Если даже при максимально достижимой скорости условия синхронизации не выполнены, но соответствующая перевальная точка все же не слишком удалена от действительной оси комплексной плоскости s , то интеграл (13) может быть снова взят в аналитическом виде методом перевала. Формально ответ получается такой же, как в (17) или (19), но для чисто мнимых точек «стационарной» фазы. Физическая интерпретация этого случая очевидна: торможение или переходное излучение частицы в дочеренковской области скоростей при слабонервномерном движении.

Таким образом, рассмотренный пример позволяет достаточно наглядно проследить за постепенным переходом (в зависимости от значения параметра v_{\max}) излучения заряженной частицы из одного типа в другой — от черенковского до тормозного и переходного. Причем два последних вида излучения не различаются между собой (в $e^{i\omega t}$ -описании), если движение происходит достаточно равномерно, а дифракционное поле не претерпевает отражений.

7. Другой пример относится к конкретному движению, допускающему рассмотрение в аналитическом виде. Пусть в свободном однородном пространстве задано движение заряда вдоль прямого трека в виде $v = v(z)$. Тогда для $t = t(z)$ будем иметь

$$t - t_0 = \int_{z_0}^z \frac{dz}{v(z)}. \quad (20)$$

Упрощение достигается путем подбора функции $v(z)$, допускающей взятие интеграла в (20). Вот одна из возможностей:

$$v(z) = \frac{v_0}{1 + \gamma^2 z^2}. \quad (21)$$

Длина формирования излучения в этом случае, согласно (15), выглядит следующим образом:

$$L = \frac{2\pi}{\gamma} \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^{1/3} \sin \theta \text{Ai} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_e} \right)^{2/3} (1 - \beta \cos \theta) \right], \quad (22)$$

где $\text{Ai}(\zeta)$ — функция Эйри первого рода, θ — угол между направлением излучения и треком, $\omega_e = \gamma v_0$ и $\beta = \frac{nv_0}{c}$.

Асимптотическое поведение функции $\text{Ai}(\zeta)$ хорошо изучено [13]:

$$\text{Ai}(\zeta) \simeq \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) \quad (\zeta \rightarrow +\infty); \quad (23)$$

$$\text{Ai}(\zeta) \simeq \pi^{-1/2} (-\zeta)^{-1/4} \sin\left\{\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right\} \quad (\zeta \rightarrow -\infty); \quad (24)$$

$$\text{Ai}(\zeta) \simeq 0,36[1 - 0,73\zeta - 0,17\zeta^2 + 0,06\zeta^3 + \dots] \quad (\zeta \rightarrow 0). \quad (25)$$

Воспользуемся формулами (23)–(25) для рассмотрения излучения в области частот

$$\omega \gg \omega_e = \gamma v_0 \quad (26)$$

(при квазиравномерном движении это приближение справедливо практически для всего видимого спектра излучения).

На частотах, удовлетворяющих в данном приближении неравенству

$$\beta(\omega) < 1 \quad (27)$$

(дочеренковское движение во всем диапазоне частот), излучение заряда является чисто тормозным и длина формирования его равна

$$L \simeq v_0 \pi^{1/2} (\omega \omega_e)^{-1/2} \sin^2 \theta (1 - \beta \cos \theta)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_e} (1 - \beta \cos \theta)^{3/2}\right\}. \quad (28)$$

Очевидно, что заряд, движущийся равномерно ($\omega_e = 0$), на частотах, удовлетворяющих неравенству (27), не излучает.

Приведем также общее выражение для спектральной плотности энергии, излучаемой зарядом в единичный телесный угол. При выполнении условия (27) будем иметь

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{32\pi^2 c} \beta^2 \frac{\omega}{\omega_e} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1 - \beta \cos \theta}} \exp\left[-\frac{4}{3} \frac{\omega}{\omega_e} (1 - \beta \cos \theta)^{3/2}\right]. \quad (29)$$

Если же на некоторых частотах возможна черенковская синхронизация, т. е. $\beta(\omega) > 1$, то для углов $\arccos \frac{1}{\beta} > \theta > 0$ длина формирования излучения, согласно (24), принимает следующий вид:

$$L \simeq 2 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^{1/2} \frac{\sin \theta}{(\beta \cos \theta - 1)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_e} (\beta \cos \theta - 1)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (30)$$

После подстановки (30) в (10) находим угловое распределение излучения в области $\arccos \frac{1}{\beta} > \theta > 0$:

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{32\pi^2 c} \beta^2 \frac{\omega}{\omega_e} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\beta \cos \theta - 1}} \sin\left\{\frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_e} (\beta \cos \theta - 1)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right\}. \quad (31)$$

Излучение заряда осциллирует по углу (рис. 2) с амплитудой, возрастающей с ростом угла, причем частота этих осцилляций увеличивается с приближением к равномерному движению*.

* Число нулей M интенсивности излучения (29) определяется формулой

$$M = E \left\{ \frac{2\omega}{3\pi\omega_e} (\beta - 1)^{3/2} + \frac{1}{4} \right\},$$

где функция $E\{x\}$ есть целая часть от x .

Для углов $\theta > \arccos \frac{1}{\beta(\omega)}$ длина формирования и угловое распределение излучения представлены соответственно формулами (28) и (29).

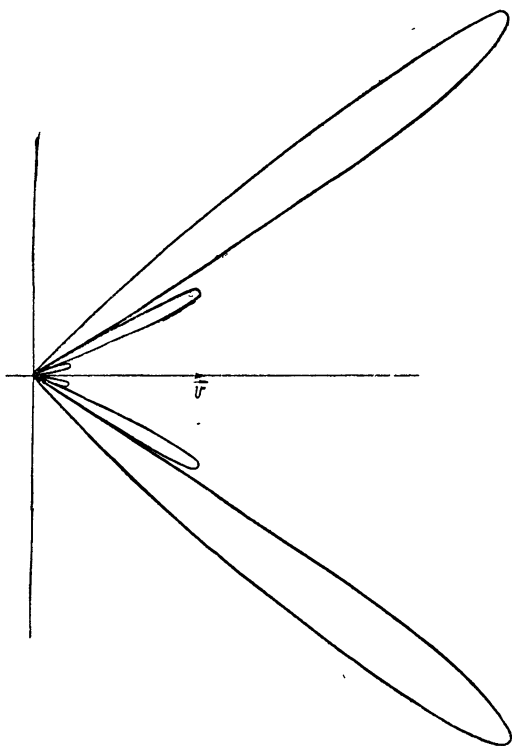


Рис. 2.

Однако формулы (28) — (31) перестают работать для направления $\theta_0 = \arccos \frac{1}{\beta(\omega)}$ и вблизи него. Для отыскания излучения в этой области углов воспользуемся формулой (25), справедливой для малых значений аргумента функции $\text{Ai}(\zeta)$; в результате получаем следующее приближенное выражение:

$$L \simeq \frac{2,26}{\gamma \beta} \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^{1/3} \left\{ \sqrt{\beta^2 - 1} - \left[0,73 \left(\frac{\omega}{\omega_e} \right)^{2/3} (\beta^2 - 1) - 1 \right] \Delta \theta \right\}, \quad (32)$$

где $\Delta \theta = |\theta - \theta_0|$ — малые отклонения от угла θ_0 .

Таким образом, для движения (21) удается проследить практически за всеми интересными случаями излучения. Более того, этот пример можно было бы использовать в качестве эталонного для оценки пределов применимости метода перевала для не слишком плавных движений, а также для не слишком разнесенных стационарных точек, о чем уже говорилось выше. Разумеется, при $\omega \gg \omega_e = \gamma v_0$, точнее, при $\frac{\omega}{\omega_e} (\beta \cos \theta - 1)^{3/2} \gg 1$ все результаты (28) — (31) совмещаются с (17) — (19), полученными непосредственно методом стационарной фазы.

8. Конечно, приведенные примеры далеко не исчерпывают всех возможностей применения теоремы взаимности при расчетах полей излучения движущихся зарядов. За недостатком места мы не приводим здесь схем и результатов решения других задач, где достигаемые упрощения заметны. Перечислим лишь некоторые из них.

а) Излучение заряда с $\vec{v} = \text{const}$, пересекающего под произвольным углом плоскую границу раздела двух сред. Решается при любой комбинации сред, для которой известны формулы Френеля.

б) То же для плоско-слоистой среды, включая возбуждение локализованных мод.

в) То же для циклического движения заряда, пересекающего границу раздела.

г) Излучение заряда при пролете вблизи квазистатических объектов, для которых известно распределение квазистационарного поля под действием падающей плоской волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР, **14**, 107 (1937).
2. Б. М. Болотовский, УФН, **75**, 295 (1961).
3. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, **88**, 209 (1966).
4. Г. М. Аскарьян, ЖЭТФ, **29**, 388 (1955).
5. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, **16**, 15 (1946).
6. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, **86**, 189 (1965).
7. А. Ф. Казюлин, Радиотехника и электроника, **10**, вып. 1, 3 (1965).
8. В. Л. Гинзбург, УФН, **69**, 537 (1959).
9. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, **32**, 338 (1957).
10. И. Г. Кондратьев, В. И. Таланов, ЖТФ, **35**, 571 (1965).
11. А. Ф. Казюлин, Радиотехника и электроника, **9**, 1889 (1964).
12. Я. Н. Фельд, Л. Д. Бахрах, Радиотехника и электроника, **8**, вып. 2 (1963).
13. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
14. Э. Г. Копсон, Асимптотические разложения, изд. Мир, М., 1966.
15. Д. Е. Вакман, Асимптотические методы в линейной радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 февраля 1967 г.

THE USE OF RECIPROCITY RELATION IN THE PROBLEMS OF MOVING CHARGE RADIATION

L. A. Egorov, M. A. Miller

The problems on finding the radiation field of moving charged particles have been considered on the basis of the electrodynamic principle of reciprocity. The expression is derived for the radiation field of a point charge moving in an arbitrary manner in an isotropic medium with the irregularities given. On this basis, somewhat new classification of radiation of moving charges is presented; namely, synchronous (Cerenkov) radiation, radiation arising from irregular movement (bremsstrahlung) and radiation due to axillary field irregularity (transient). As an example illustrating the possibilities of the method of the reciprocity theorem, there is considered the radiation for a quasi-regular movement of a charged particle in a weakly-homogeneous medium (the geometrical optics approximation). The result is of an universal form suitable both for the transient and the bremsstrahlung radiations. In the case of strong irregularities the field radiation may be calculated by means of the known function only for some "successful" movements and distributions of an axillary field. In the paper there has been found the radiation field of a charge moving straightforward in the inhomogeneous medium with the velocity $v(z) = v_0 / (1 + \gamma^2 z^2)$. All the peculiarities of formation of the different types of radiation may be followed by this example.