ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XI, № 5 РАДИОФИЗИКА 1968

УДК 621.371.15

ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН

Ю. Н. Барабаненков и *В. М. Финкельберг*

Исходя из общих уравнений Дайсона и Бете—Солпитера, которым удовлетворяют средний и средний двойной операторы Грина в непоглощающей среде, доказывается оптическая теорема в теории многократного рассеяния волн. По доказанной теореме антиэрмитова часть массового оператора (ядра уравнения Дайсона) выражается через антиэрмитову часть среднего оператора Грина и оператор интенсивности (ядро уравнения Бете—Солпитера) Рассматриваются разложения оптической теоремы по малому параметру. Показывается, что известные на практике два типа разложений массового оператора и оператора интенсивности: по степеням корреляционной функции эффективного потенциала в случае непрерывной рассеивающей среды и групповое разложение в случае дискретной рассеивающей среды — удовлетворяют оптической теореме в первом и втором порядках по параметру разложения. В заключение, с точки зрения оптической теоремы обсуждается вывод уравнения переноса в модели Фолди.

В задачах распространения скалярных волн в случайной рассеивающей среде обычно интересуются средними значениями поля $\langle\psi(x)\rangle$ и его билинейной комбинации $\langle\psi(x)\,\overline{\psi(y)}\rangle$, где x и y —точки трехмерного пространства и черта наверху указывает на переход к комплексно сопряженному значению. Поле $\psi(x)$ подчиняется уравнению

$$\left(\Delta + k_0^2 - U\right)\psi(x) = j(x)\,, \tag{1}$$

в котором k_0 — постоянное волновое число, U — оператор эффективного потенциала, характеризующий рассеивающие свойства среды, j—плотность распределения источников поля. Уравнение (1) должно быть дополнено еще условием излучения на бесконечности. Это достигается предположением, что волновое число k_0 имеет малую положительную мнимую часть (расходящиеся волны). В акустической задаче k_0 называют волновым числом свободного пространства, а оператор эффективного потенциала U описывает отклонение показателя преломления среды от единицы. В квантово-механической задаче $k_0^2 = 2mE/\hbar^2$, где m и E — масса и энергия частиц, а $U = 2mV/\hbar^2$, где V — оператор силового потенциала.

Случайную рассеивающую среду принято рассматривать как непрерывную [1—3] или как дискретную [4—8]. В первом случае ядро оператора эффективного потенциала U представляет собой случайное поле. Во втором случае $U = \sum\limits_n U_n$, где U_n — оператор эффективного потенциала n-го рассеивателя и суммирование ведется по всем рассеивателям. В квантово-механической и в акустической задаче, если поле ψ и его первые производные всюду непрерывны, оператор эффективного потенциала является локальным, т. е. его ядро $U(x, x') = \delta(x - x')\, U(x)$, где $U(x)$ — эффективный потенциал.

В настоящей работе мы не делаем различия между двумя названными способами рассмотрения случайной рассеивающей среды, ибо в основу излагаемого ниже вывода кладутся уравнения самого общего характера*.

Решение уравнения (1) можно представить в виде $\psi = Gj$, где G — оператор Грина, удовлетворяющий уравнению

$$\left(\Delta + k_0^2 - U\right) G = 1 . \tag{2}$$

В правой части уравнения (2) через 1 обозначен единичный оператор. В отсутствие рассеивающей среды оператор Грина G переходит в оператор Грина свободного пространства G_0, который удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta + k_0^2\right) G_0 = 1 \tag{3}$$

и имеет ядро, равное $G_0(x, x') = -[\exp(ik_0|x - x'|)]/4\pi|x - x'|$.

Обозначим через P и Q средний и средний двойной операторы Грина (термин заимствован из работы [1]). Они равны: $P = \langle G \rangle$, $Q = \langle G \times \overline{G} \rangle$, где $G \times \overline{G}$ — так называемое прямое произведение операторов. В общем случае прямое произведение $A \times \overline{B}$ двух произвольных двухточечных операторов A и B с ядрами $A(x, x')$ и $B(y, y')$ определяется как четырехточечный оператор с ядром, равным произведению ядер $A(x, x')\, \overline{B(y, y')}$. С помощью операторов P и Q средние значения поля и его билинейной комбинации записываются в виде $\langle\psi\rangle = Pj$ и $\langle\psi\overline{\psi}\rangle = Q(j \times \overline{j})$. Средние операторы Грина P и Q удовлетворяют двум фундаментальным уравнениям, которые по аналогии с квантовой теорией поля носят название уравнений Дайсона (Д) и Бете—Солпитера (Б—С) [2, 3, 6, 8]:

$$P = G_0 + G_0 M P; \tag{4}$$

$$Q = P \times \overline{P} + (P \times \overline{P}) K Q. \tag{5}$$

В уравнениях Д и Б—С выступают два новых оператора: M и K. Первый из них называется массовым оператором, а второй—оператором интенсивности. Уравнения Д и Б—С выводятся методами диаграммной техники. При этом массовый оператор и оператор интенсивности оказываются равными суммам всевозможных неприводимых диаграмм. Отсюда становится понятным, что точное вычисление этих операторов практически невозможно. Речь может идти лишь о приближенном их представлении, например, в виде асимптотических рядов по некоторому малому параметру. При построении подобного рода приближенных представлений весьма важно знать вытекающие из общих физических законов соотношения между массовым оператором и оператором интенсивности. Одним из таких соотношений является оптическая теорема, следующая из закона сохранения энергии (в акустической интерпретации; в квантово-механическом случае аналогичную роль играет сохранение потока вероятности).

Закон сохранения энергии находит свое выражение в эрмитовости оператора эффективного потенциала: $U^+ = U$, где знак плюс наверху указывает на переход к эрмитово-сопряженному оператору. В терминах неусредненных операторов Грина G и G_0 эрмитовость оператора эффективного потенциала записывается в виде

$$G - G^+ = G^+\left(G_0^{-1\,+} - G_0^{-1}\right) G. \tag{6}$$

* Излагаемая теорема (11) первоначально была получена одним из авторов (Ю. Н. Б.). Приведенное здесь доказательство принадлежит обоим авторам.

Введем понятие свернутого прямого произведения операторов $\widehat{A\times\overline{B}}$, под которым будем подразумевать двухточечный оператор с ядром, равным интегралу $\int A(x, x')\,\overline{B(x, y')}\,d^3x$. С помощью этого понятия соотношение (6) можно переписать в более удобной для дальнейшего форме:

$$\widehat{G\times\overline{1}} - \widehat{1\times\overline{G}} = \left(\widehat{1\times\overline{G_0^{-1}}} - \widehat{G_0^{-1}\times\overline{1}}\right)(G\times\overline{G}). \tag{7}$$

Усредним соотношение (7). Тогда получим

$$\widehat{P\times\overline{1}} - \widehat{1\times\overline{P}} = \left(\widehat{1\times\overline{G_0^{-1}}} - \widehat{G_0^{-1}\times\overline{1}}\right) Q. \tag{8}$$

Исключим из полученного соотношения оператор Q. Для этого умножим соотношение справа на обратный оператор Q^{-1}, который из уравнения Б—С равен $P^{-1}\times\overline{P^{-1}} - K$. После умножения

$$\begin{gathered}\widehat{1\times\overline{P^{-1}}} - \widehat{P^{-1}\times\overline{1}} - \left(\widehat{P\times\overline{1}} - \widehat{1\times\overline{P}}\right) K = \\ = \widehat{1\times\overline{G_0^{-1}}} - \widehat{G_0^{-1}\times 1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Обратный оператор P^{-1} в левой части (9) можно исключить с помощью уравнения Д, из которого следует $P^{-1} = G_0^{-1} - M$. В итоге получаем

$$\widehat{1\times\overline{M}} - \widehat{M\times\overline{1}} = \left(\widehat{1\times\overline{P}} - \widehat{P\times\overline{1}}\right) K. \tag{10}$$

Это соотношение и есть оптическая теорема в операторной форме.

Переходя в (10) от операторов к их ядрам, получаем оптическую теорему в координатном представлении

$$\begin{gathered}\overline{M(x', y')} - M(y', x') = \\ = \iint d^3x''d^3y''\,[\overline{P(x'', y'')} - P(y'', x'')]\;K(x'', x';\; y'', y').\end{gathered} \tag{11}$$

Аналогично, переходя в (11) от ядер M, P и K к их фурье-образам $\check{M}$, $\check{P}$ и $\check{K}$, получаем оптическую теорему в представлении Фурье

$$\begin{gathered}\overline{\check{M}(p', q')} - \check{M}(q', p') = \\ = \iint d^3p''d^3q''\,[\overline{\check{P}(p'', q'')} - \check{P}(q'', p'')]\,\check{K}(p'', p';\; q'', q').\end{gathered} \tag{12}$$

Из соотношений (11) и (12) непосредственно видно, что по оптической теореме антиэрмитова часть массового оператора выражается через антиэрмитову часть среднего оператора Грина и оператор интенсивности. При этом следует помнить, что оператор Грина в силу уравнения Д сам выражается через массовый оператор.

Как уже отмечалось, оптическая теорема по сути дела является выражением закона сохранения энергии в теории многократного рассеяния волн. Чтобы сформулировать это утверждение аналитически, запишем усредненное уравнение энергии. Оно непосредственно следует из уравнения (1) и имеет вид

$$\operatorname{div}\langle\tilde{f}\rangle = \langle\overline{\psi}\rangle j - \langle\psi\rangle\overline{j}, \tag{13}$$

где вектор $\tilde{f} = \bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}$ пропорционален вектору потока энергии. С другой стороны, выражение $\operatorname{div}\langle\tilde{f}\rangle$ мы можем вычислить независимо из уравнений Д и Б—С. Интегрируя результат вычисления по объему сферы бесконечно большого радиуса, внутри которой сосредоточены все источники поля, получаем

$$\oint \langle\tilde{f}_n\rangle\, d^2S - \int (\langle\bar{\psi}\rangle j - \langle\psi\rangle \bar{j})\, d^3x =$$

$$= -\iint d^3x' d^3y' \left\{ \overline{M(x', y')} - M(y', x') - \right. \tag{14}$$

$$\left. - \iint d^3x'' d^3y'' \left[\overline{P(x'', y'')} - P(y'', x'')\right] K(x'', x'; y'', y') \right\} \langle\psi(x')\overline{\psi(y')}\rangle.$$

Здесь первый интеграл в левой части берется по поверхности сферы, и $\boldsymbol{n}$— единичный вектор ее внешней нормали. Согласно (13), правая часть (14) должна тождественно обращаться в нуль, что действительно имеет место в силу оптической теоремы (11).

Допустим теперь, что нам заданы массовый оператор и оператор интенсивности своими асимптотическими разложениями по степеням некоторого малого параметра ε:

$$M = \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots ; \tag{15}$$

$$K = \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \ldots \tag{16}$$

Средний оператор Грина мы также представим в виде разложения по степеням этого параметра, записав

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots \tag{17}$$

Подставляя (15) и (17) в уравнение Д и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем

$$P_0 = G_0, \qquad P_1 = G_0 M_1 G_0, \ldots \tag{18}$$

Совершенно аналогично подставляем (15), (16) и (17) в соотношение оптической теоремы (10) и тоже приравниваем члены при одинаковых степенях ε. Получаем цепочку соотношений

$$\widehat{1 \times \bar{M}_1} - \widehat{M_1 \times \bar{1}} = (\widehat{1 \times \bar{G}_0} - \widehat{G_0 \times \bar{1}})\, K_1 ; \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \widehat{1 \times \bar{M}_2} - \widehat{M_2 \times \bar{1}} = (\widehat{1 \times \bar{G}_0} - \widehat{G_0 \times \bar{1}}) K_2 + \\ + (\widehat{1 \times \overline{G_0 M_1 G_0}} - \widehat{G_0 M_1 G_0 \times \bar{1}})\, K_1 . \end{gathered} \tag{20}$$

Эти соотношения назовем оптической теоремой в первом, втором и т. д. порядках по ε. Физический смысл такого рода соотношений раскрывается с помощью уравнения энергии (14). Именно, разложим выражение в фигурной скобке уравнения (14) по степеням ε. Тогда становится понятным, что при выполнении оптической теоремы до n-го порядка включительно уравнение энергии удовлетворяется с точностью тоже до членов n-го порядка по степеням ε. Отметим, что особенно простую форму записи допускает оптическая теорема в первом порядке (19), если перейти к представлению Фурье и задать векторы $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{q}'$ на «энергетической» поверхности, т. е. положить $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}' = k_0 \boldsymbol{n}'$, где $\boldsymbol{n}'$ — единичный вектор. В этом случае получаем

$$\operatorname{Im} \check{M}_1(k_0 n', \quad k_0 n') = = -\frac{k_0}{(4\pi)^2} \int\limits_{(4\pi)} d^2 n \vec{\check{K}}_1(k_0 n, \ k_0 n'; \ k_0 n, \ k_0 n'), \tag{21}$$

где $d^2 n$ — элемент телесного угла.

Рассмотрим известные на практике два типа разложений операторов M и K и проверим для них оптическую теорему в первом и втором порядках. Остановимся сначала на случае непрерывной рассеивающей среды. Эффективный потенциал U будем считать гауссовым случайным полем с нулевым средним значением $\langle U \rangle = 0$. Малый параметр ε введем в виде множителя $\sqrt{\varepsilon}$ при U. Этому соответствует разложение M и K по степеням квадрата эффективного потенциала или, точнее, по степеням его корреляционной функции $B(x, \ x') = \langle U(x) \ U(x') \rangle$. Первые члены разложений (15) и (16) равны [1,2]

$$\begin{gathered} M_1(x, \ x') = G_0(x, \ x') \, B(x, \ x'), \\ K_1(x, \ x'; \ y, \ y') = \delta(x - x') \, \delta(y - y') \, B(x, \ y). \end{gathered} \tag{22}$$

Вторые члены разложений M_2 и K_2 можно заимствовать из цитированной работы [2], мы их здесь не выписываем в целях экономии места.

Оптическая теорема в первом порядке (19), переписанная в координатном представлении, проверяется непосредственной подстановкой выражений (22). Сложнее проверяется оптическая теорема (20) во втором порядке. Для этого, во-первых, приходится воспользоваться неусредненной оптической теоремой (7) во втором порядке по ε. Далее, нужно привлечь оптическую теорему в первом порядке. Наконец, для сокращения громоздких выкладок удобно применить диаграммную технику.

В случае дискретной рассеивающей среды мы рассмотрим разложение по числу рассеивателей в неприводимых диаграммах или групповое разложение. Алгоритм такого рода разложения впервые был четко сформулирован в работе [7]. Если рассеиватели не коррелированы между собой, то за малый параметр разложения можно принять их плотность. Первые и вторые члены разложений (15) и (16) равны

$$M_1 = S_1 g_1, \qquad K_1 = (S_1 \times \overline{S_1}) \, g_1 \, ; \tag{23}$$

$$\begin{gathered} 2M_2 = (S_{12} - S^{(2)}) \, g_1 g_2 + (S_{12} - S_1 - S_2) \, g_{12} \, , \\ 2K_2 = (S_{12} \times \overline{S}_{12} - S^{(2)} \times \overline{S^{(2)}}) \, g_1 g_2 + \\ + 2(S_2 G_0 S_1 \times \overline{S_1 G_0 S_2}) \, g_1 g_2 + (S_{12} \times \overline{S}_{12} - S_1 \times \overline{S_1} - \\ - S_2 \times \overline{S_2}) \, g_{12}. \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь S_1, S_2 *и* S_{12} — одночастичные и двухчастичный операторы рассеяния рассеивателей, центры которых расположены в точках x_1 и x_2. Оператор рассеяния S некоторой системы рассеивателей определяется таким образом, что, если на нее падает поле φ, то рассеянное поле равно $G_0 S \varphi$ [8]. Через $g_1 = g(x_1)$, $g_2 = g(x_2)$ и $g_{12} = g(x_1, \ x_2)$ обозначены одночастичные функции распределения центров рассеивателей и их бинарная корреляционная функция. По координатам центров x_1 и x_2 производится интегрирование. Оператор

$$S^{(2)} = S_1 + S_2 + S_1 G_0 S_2 + S_2 G_0 S_1 \tag{25}$$

представляет собой оператор S_{12} в приближении двукратного рассеяния. Определенный выше оператор рассеяния S удовлетворяет оптической теореме

$$\widehat{1 \times \bar{S}} - \widehat{S \times \bar{1}} = (\widehat{1 \times \bar{G}_0} - \widehat{G_0 \times \bar{1}})(S \times \bar{S}). \qquad (26)$$

Оптическая теорема в первом порядке (19) для первых членов разложения (23) непосредственно следует из неусредненной оптической теоремы (26) для одночастичного оператора рассеяния. Проверка оптической теоремы (20) во втором порядке требует привлечения неусредненной оптической теоремы (26) для двухчастичного оператора рассеяния. Таким образом, известные на практике два типа разложений массового оператора и оператора интенсивности по степеням малого параметра удовлетворяют оптической теореме в первом и втором порядках.

Обсудим далее кратко проблему, которая тесно связана с разложением оптической теоремы по малому параметру. Предположим, что в нашем распоряжении имеются операторы M_1 и K_1, удовлетворяющие оптической теореме в первом порядке (19). Подставим эти операторы в уравнения Д и Б—С и решим их. Полученные таким образом средние поля $\langle \psi(x) \rangle$ и $\langle \psi(x) \overline{\psi(y)} \rangle$, как уже было отмечено, будут удовлетворять уравнению энергии (14) лишь с точностью до членов первого порядка. Возникает вопрос, как по заданным операторам M_1 и K_1 построить средние поля, которые удовлетворяли бы уравнению энергии точно. Проиллюстрируем сформулированную проблему на простейшей модели изотропных, точечных и некоррелированных рассеивателей Фолди [4]. В этой модели

$$M_1(x, x') = \delta(x - x') f g(x); \qquad (27)$$

$$K_1(x, x'; y, y') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(x - y) |f|^2 g(x), \qquad (28)$$

где f изотропная одночастичная амплитуда рассеяния, для которой по оптической теореме $\operatorname{Im} f = -(k_0/4\pi)|f|^2$. Решение уравнения Д с массовым оператором (27) в случае однородного распределения рассеивателей с плотностью g дает

$$P(x, x') = -\exp[ik_{эфф}(x - x')]/4\pi(x - x'), \qquad (29)$$

где $k^2_{эфф} = k_0^2 - gf$. Для операторов (27), (28) и (29) выражение в фигурной скобке уравнения энергии (14) оказывается пропорциональным $g|f|^2(k_0 - \operatorname{Re} k_{эфф}) \sim g^2$, т. е. уравнение энергии удовлетворяется с точностью до членов первого порядка по параметру разложения g. Построение средних полей $\langle\psi\rangle$ и $\langle\psi\bar{\psi}\rangle$, удовлетворяющих уравнению энергии точно, в модели Фолди осуществляется переходом к уравнению переноса, вывод которого из уравнений Д и Б—С в рамках рассматриваемой модели дан в работе [9]. В ходе вывода оператор интенсивности там сохраняется в виде (28), а волновое число $k_{эфф}$ заменяется на $\tilde{k}_{эфф} = k_0 - (ig/2k_0)\operatorname{Im} f$, что эквивалентно пренебрежению действительной поправкой к волновому числу свободного пространства k_0 при приближенном извлечении квадратного корня из $k^2_{эфф}$.

Замене волнового числа $k_{эфф}$ на $\tilde{k}_{эфф}$ соответствует замена массового оператора (27) на $\tilde{M}_1(x, x') = \delta(x - x')[ig \operatorname{Im} f + (g \operatorname{Im} f/2k_0)^2]$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оператор $\tilde{M}_1$, оператор $\tilde{P}$, который получается из (29) заменой $k_{эфф}$ на $\tilde{k}_{эфф}$, и оператор интенсивности (28) удовлетворяют точной оптической теореме (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Bourret, Nuovo Cimento, **26**, 1 (1962).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **46**, 1399 (1964).
3. U. Frish, Wave Propagation in Random Media. A Theori of Maltiple Scattering, Institut d'Astrophysique, Paris, 1965.
4. L. L. Foldy, Phys. Rev., **67**, 107 (1945).
5. M. Lax, Rev. Mod. Phys., **23**, 287 (1951).
6. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, ЖЭТФ, **45**, 1136 (1963)
7. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, **46**, 725 (1964).
8. U. Frish, Wave Propagation in Random Media. II. Multiple Scattering by N Bodies (Provisional version), Institut d'Astrophysique, Paris, 1965.
9. Ю. Н. Барабаненков, ДАН СССР, **174**, 53 (1967).

Поступила в редакцию
25 февраля 1967 г.

OPTICAL THEOREM IN THE THEORY OF MULTIPLE WAVE SCATTERING

Yu. N. Barabanenkov and V. M. Finkel'berg

The optical theorem in the theory of multiple wave scattering is proved based on the general Dyson and Bethe—Salpeter equations which the average and average-double Green operators in a nonabsorbing medium satisfy. According to the theorem proved the anti-ermit part of the mass operator (the nucleus of Dyson equation) is expressed through the anti-ermit part of the average Green operator and the operator of intensity (the nucleus of Bethe—Salpeter equation). The expansions of the optical theorem in a small parameter are considered. It is shown that the known, in practice, two types of expansions of the mass operator and intensity operator: the expansion over the correlation function power of the effective potential in the case of continuous scattering medium and the group expansion in the case of discrete scattering one, satisfy the optical theorem in the first and the second orders over the expansion parameter. In conclusion, the derivation of the radiative transfer equation in Foldy's model is discussed from the optical theorem point of view.