УДК 621.371 : 621.372.853.32

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СПЕКТРА ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Н. С. Степанов

Рассматривается распространение электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе, заполненном изотропной плазмой с медленно изменяющейся в пространстве и во времени концентрацией электронов; как частный случай, разультаты применимы и для плоских волн в неограниченной плазме. В приближении геометрической оптики исследуются закономерности изменения амплитуд напряженностей полей, энергии, частоты и спектра волн в такой среде. Показано, в частности, что для волнового пакета отношение энергии к частоте является адиабатическим инвариантом. Отмечается, что в отличие от недиспергирующих сред в диспергирующих возможно повышение частоты при одновременном сужении спектральной полосы сигнала.

1. Известно, что при распространении волн в средах с переменными параметрами происходит, вообще говоря, изменение их формы и спектрального состава. Теоретически эти вопросы сравнительно подробно изучены для слабо диспергирующих систем [1]. В частности, при медленном изменении параметров в них возможно адиабатическое смещение (в том числе и повышение) несущей частоты сигнала в значительных пределах, причем в результате такого преобразования энергия сигнала (импульса) в отсутствие диссипативных потерь меняется пропорционально частоте. Однако повышение несущей частоты сопровождается уменьшением длительности сигнала, поэтому его спектр тоже расширяется пропорционально частоте. Следовательно, адиабатический эффект в слабодиспергирующих системах не приводит к увеличению спектральной плотности сигнала.

Естественно ожидать, что при наличии дисперсии результат может быть иным. Некоторые задачи, связанные с распространением волн в диспергирующих системах с плавно изменяющимися параметрами, рассмотрены в работах [2–5], однако интересующие нас вопросы о закономерностях изменения спектра сигналов в них подробно не обсуждались. В связи с этим ниже рассматривается конкретная физическая система — электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе, заполненном изотропной плазмой с переменной концентрацией электронов*. Здесь существенны оба механизма дисперсии, связанные и с влиянием стенок волновода и со свойствами заполняющей среды. Изменение же электронной концентрации во времени может быть вызвано движением (дрейфом) неоднородной плазмы или волновыми процессами в ней (например, плазменными волнами).

2. Поскольку закон изменения концентрации N заранее не конкретизируется и допускаются специальные поля «накачки», изменяющие

* Преобразование спектра плоских электромагнитных волн в слабонестационарной магнитоактивной плазме рассмотрено в статье [6].

се, которые могут быть не малыми, необходимо сначала записать линеаризованные уравнения для слабого сигнала. При учете свойств плазмы ограничимся моноскоростным приближением, пренебрегая тепловым движением электронов, а также столкновениями и движением ионов. Из уравнения Максвелла и уравнения движения электронов тогда имеем

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}(N_m v_s + N_s v_m); \tag{2}$$

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi}{c} e N_s; \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v_m \nabla)\right](m_m v_s + m_s \vec{v}_m) = eE + \frac{e}{c}\{[v_s H_m] + [v_m H_s]\} - (v_s \nabla) m v_m, \tag{4}$$

где c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона (в случае релятивистского потока $m_m = m_0(1 - v_m^2/c^2)^{-1/2}$, где m_0 — масса покоя), величины с индексом s означают малые поправки, соответствующие электромагнитным волнам, а индекс m относится к полю накачки (т. е. к волне концентрации). Для некоторой общности предполагается, что плазма находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε, не зависящей от частоты сигнала, что с некоторым приближением позволяет, например, учитывать влияние возможных замедляющих устройств. В частности, можно положить $\varepsilon = 1$.

Для упрощения выкладок прежде всего предположим $H_m = 0$, что соответствует изотропной плазме, и будем считать, что электронная концентрация N_m и скорость v_m являются заданной функцией времени и только одной (продольной) координаты z, в направлении которой плазма движется. Кроме того, ограничимся случаем поперечно-электрических (ТЕ или в частном случае ТЕМ) волн в волноводе. При этом $\operatorname{div} E_s = 0$, $N_s = 0$, $(v_s \nabla) v_m = 0$, $m_s = 0$ и в уравнениях (1)—(4) как напряженности полей E и H, так и скорость вынужденных колебаний электронов v_s можно выразить через поперечный векторный потенциал $A_\perp$:

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_\perp}{\partial t}, \quad H = \operatorname{rot} A_\perp, \quad v_s = -\frac{e}{mc} A_\perp, \tag{5}$$

так что скорость дрейфа $v_m(z, t)$ из уравнений вообще исключается. Далее, независимость N от поперечных координат позволяет разделить переменные

$$A_\perp = A_0(x, y)\,\varphi(z, t). \tag{6}$$

Для величин A_0 и φ из (1)—(6) тогда легко получить уравнения

$$\Delta_\perp A_0 + \varkappa^2 A_0 = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - n^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\omega_p^2 n^2 + \varkappa^2)\varphi, \tag{8}$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $n^2 = \varepsilon/c^2$, $\omega_p^2(z, t) = 4\pi e^2 N/m$ — переменная плазменная частота, $\varkappa^2$ — обычная постоянная разделения, определяемая из граничных условий на стенках волновода.

Частный случай $\varkappa=0$ соответствует плоским волнам в неограниченной плазме, либо же, если он допускается граничными условиями, главным (ТЕМ) волнам в волноводе. Существенно отметить, что учет дополнительной дисперсии, вносимой стенками волновода, приводит здесь лишь к изменению эффективного значения плазменной частоты $\omega_e^2 = \omega_p^2 + \varkappa^2 n^{-2}$, поэтому для волновода с плазмой можно использовать результаты, полученные ранее для неограниченной среды [4, 5]. И наоборот, заполнение волновода изотропной плазмой меняет в уравнении (8) лишь эффективное значение поперечного волнового числа $\varkappa_e^2 = \varkappa^2 + \omega_p^2 n^2$, которое теперь становится переменным; на структуру поля в поперечном сечении волновода, определяемую уравнением (7), изменение концентрации $N(z, t)$ не влияет.

Таким образом, задача в дальнейшем сводится к исследованию уравнения (8). Прежде, однако, приведем одно энергетическое соотношение для рассматриваемого случая изотропной плазмы. Учитывая, что $N_s = 0$ и, согласно (5), $\boldsymbol{E}_s=(m/e)\,\partial \boldsymbol{v}_s/\partial t$, из уравнений (1) и (2) получаем равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \frac{mv_s^2}{2}\,\frac{\partial N_m}{\partial t}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{S} = (c/4\pi)\,[\boldsymbol{EH}]$ — вектор Пойнтинга, а величина $w = (1/8\pi)\times\times(\varepsilon E^2 + H^2) + N_m(mv_s^2/2)$ есть плотность энергии сигнала. Отсюда следует, что энергия сигнала в нестационарной плазме может изменяться за счет работы сил, изменяющих электронную концентрацию, увеличиваясь при $\partial N_m/\partial t > 0$.

3. Будем теперь считать, что изменения концентрации $N(z, t)$ и, соответственно, коэффициента $\varkappa_e^2(z, t)$ в уравнении (8) достаточно медленны:

$$\left|\frac{\partial N}{\partial t}\right| \ll \omega N, \qquad \left|\frac{\partial N}{\partial z}\right| \ll kN, \tag{10}$$

где ω и k — частота и волновое число распространяющихся в волноводе квазимонохроматических волн, вообще говоря, также являющиеся медленными функциями z и t ($|\partial\omega/\partial t| \ll \omega^2$, $|\partial k/\partial t| \ll k^2$). При этих условиях можно ограничиться решением в приближении геометрической оптики. Соответствующий метод отыскания решения достаточно хорошо известен и для аналогичных задач уже применялся, например, в работе [4], поэтому мы здесь не будем излагать его подробно. Решение ищется в виде

$$\varphi(z, t) = f(z, t)\exp[j\psi(z, t)], \tag{11}$$

где $f(z, t)$ — медленный по сравнению $e^{j\psi}$ множитель. Для эйконала ψ тогда нетрудно получить уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - n^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + \varkappa_e^2 = 0, \tag{12}$$

откуда следует, в частности, дисперсионное соотношение $k^2 - \omega^2 n^2 + \varkappa_e^2 = 0$ (для бегущей вправо волны $\omega = \partial\psi/\partial t$, $k = -\partial\psi/\partial z$). Определяемые отсюда величины $\omega(z, t)$ и $k(z, t)$ входят в уравнение для огибающей $f(z, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha f = 0, \tag{13}$$

где $u(z, t) = (k/n^2\omega) = n^{-1}[1 - \varkappa_e/\omega n)^2]^{1/2}$ — групповая скорость волн, $\alpha(z, t) = -(\partial/\partial t)\ln\sqrt{u} + (\partial/\partial t + u\partial/\partial z)\ln\sqrt{k}$.

На функции f и ψ, естественно, должны быть наложены определенные граничные и начальные условия. Ввиду нелинейности уравнения (12) найти такое решение для общего случая в явном виде не удается. Однако многие вопросы можно выяснить и без этого. Продифференцировав выражение (12) по t, например, легко получить

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial z}\right)\omega^2 = \frac{1}{n^2}\,\frac{\partial \varkappa_e^2}{\partial t}, \tag{14}$$

откуда ясно, что изменение частоты ω для фиксированного группового фронта связано с явной зависимостью $\varkappa_e^2$ от времени (при этом $(d/dt) = u(d/dz)$). Интегрирование (14) дает

$$\omega^2(z, t) = \omega_0^2(\xi) + \frac{1}{n^2}\int \frac{\partial \varkappa_e^2}{\partial t}\,dt,$$

где $\xi(z, t)$ — «групповая» характеристика (первый интеграл уравнения $(\partial\xi/\partial t) + u(\partial\xi/\partial z) = 0$), ω_0^2 — произвольная функция переменной ξ; здесь и везде ниже интегралы берутся вдоль этих характеристик. Если, в частности, в области движения рассматриваемого группового фронта (или короткого цуга) $\partial\varkappa_e^2/\partial t > 0$ (т. е. $\partial N/\partial t > 0$), то несущая частота ω будет монотонно увеличиваться. Совершенно аналогично из (12) следует, что $dk^2/dz = -\partial\varkappa_e^2/\partial z$, т. е. изменение волнового числа k вдоль характеристики происходит при наличии пространственной неоднородности плазмы, что и естественно. В общем случае изменяется как временная, так и пространственная структура волнового пакета.

Деформация же огибающей $f(z, t)$, как ясно из уравнения (13), в основном определяется законом изменения групповой скорости волн $u(z, t)$:

$$f(z, t) = F(\xi)\,k^{-1/2}\exp\left(-\int \frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{u}\,dt\right), \tag{16}$$

где $F(\xi)$ — снова произвольная функция. То обстоятельство, что величины ω, k и f определяются с точностью до произвольной функции аргумента ξ, означает, что различные групповые фронты в приближении геометрической оптики распространяются независимо со скоростью $u(z, t)$. При этом само приближение применимо лишь в отсутствие обгона фронтов, что мы и будем здесь предполагать.

В случае граничной задачи для полубесконечного волновода $(z \geqslant 0)$, в частности, в качестве переменной ξ удобно взять «время влета» группового фронта на вход системы $t_в(z, t) = t - \int\limits_{0,\,t_в}^{z,\,t} u^{-1}\,dz$.

Тогда вид функции $F(t_в)$ определяется огибающей сигнала на входе волновода $(z=0)$. Если, например,

$$A_\perp|_{z=0} = A_0(x, y)\,g(t)\exp(j\omega_0 t), \tag{17}$$

то из формул (6), (11), (16) легко найти $F(t_в) = g(t_в)\sqrt{k_0(t_в)}$, где $k_0(t) = k(0, t) = \left[\omega_0^2 n^2 - \varkappa_e^2(0, t)\right]^{1/2}$.

Для напряженностей полей из (5) при этом имеем

$$E = -jA_0\frac{\omega}{c}\sqrt{k_0 k^{-1}\Phi}\,g(t_в)\exp(j\psi), \qquad H_\perp = \frac{ck}{\omega}[z_0 E], \tag{18}$$

где z_0 — единичный вектор в направлении z и по аналогии с [1] обозначено

$$\Phi(z, t)=\exp\left[-\int_0^z \frac{\partial}{\partial t}(u^{-1})\,dz\right]=\exp\int_{t_в}^{t}\frac{\partial \ln u}{\partial t}\,dt. \qquad (19)$$

Отсюда следует, что среднее по периоду $2\pi/\omega$ значение вектора Пойнтинга S для фиксированного группового фронта будет пропорционально величине $\omega\Phi$, так что

$$\frac{S}{\omega\Phi}=\frac{A_0^2}{8\pi}\,g^2(t_в)\,k_0(t_в)=\mathrm{const} \qquad (20)$$

и, в отличие от слабо диспергирующей системы, не удовлетворяет соотношению $S\omega^{-2}=\mathrm{const}$. Легко, однако, показать, что отношение полной энергии короткого импульса W к несущей частоте ω остается постоянным при произвольном законе изменения $N(z, t)$:

$$\frac{W}{\omega}=\mathrm{cosnt}. \qquad (21)$$

Для этого заметим, что длительность такого импульса $\tau\sim\Phi^{-1}$. В самом деле, очевидно, $\tau(z)=(\partial t_в/\partial t)^{-1}\Delta t_в$, где $\Delta t_в=\tau_0$ — длительность входного сигнала, причем $t_в$ удовлетворяет характеристическому уравнению $(\partial t_в/\partial z)+u^{-1}(dt_в/\partial t)=0$. Дифференцируя это уравнение по t и интегрируя вдоль характеристики, учитывая граничное условие $(\partial t_в/\partial t)_{z=0}=1$, получаем (как и в случае [1])

$$\frac{\partial t_в}{\partial t}=\frac{\tau_0}{\tau(z)}=\Phi. \qquad (22)$$

Для прямоугольного импульса $W=S\tau$, и тогда из (20) и (22) соотношение (21) очевидно. Пусть теперь имеем импульс с произвольной огибающей $g(t)$, но достаточно короткий, чтобы можно было считать $\omega=\mathrm{const}$ в его пределах. В этом случае из тех же равенств (20) и (22) имеем $W=\int_{t_1}^{t_2}S\,dt=\omega I$, где $I=(A_0^2/8\pi)\int_{t_{в1}}^{t_{в2}}g^2(t_в)\,k_0(t_в)\,dt_в$, t_1 и t_2 — моменты прихода переднего и заднего фронтов импульса в данную точку z (интеграл по t здесь берется при $z=\mathrm{const}$), $t_{в1}$, $t_{в2}$ — соответствующие времена влета. Величина I определяется граничными условиями и для заданного входного импульса постоянна, т. е. и здесь $(W/\omega)=I=\mathrm{const}$*.

Таким образом, адиабатический инвариант (21), обозначающий сохранение числа квантов в волновом пакете, справедлив и в системе с дисперсией. То же самое можно показать и для некоторых других случаев, например, для волн в волноводе, заполненном недиспергирующей средой с переменными ε и μ.

Имеется, однако, и существенная особенность по сравнению с не-

* Заметим, что определенная как $W=\int S\,dt$ энергия сигнала соответствует выражению для плотности энергии w, входящему в формулу (9), которое, в свою очередь, согласуется с известной формулой для плотности энергии в диспергирующей среде:

$$w=(1/16\pi)\left[H_0H_0^*+\frac{\partial}{\partial\omega}(\varepsilon\omega)\,E_0E_0^*\right].$$

диспергирующими системами, поскольку расширение полосы частот сигнала $\Delta\omega$ происходит уже не пропорционально несущей частоте: $(\Delta\omega/\omega) \neq \text{const}$. Изменение несущей, как уже указывалось, определяется выражением (15), тогда как для полосы $\Delta\omega$ имеем $\Delta\omega \sim \tau^{-1} \sim \Phi$, а ω и Φ в общем случае не пропорциональны. Нетрудно, например, получить следующую формулу для относительной полосы:

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_z = \left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_{z=0} \exp\left[-\int_0^z \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varkappa_e^2}{k}\right)dz\right], \tag{23}$$

а для величины $(W/\Delta\omega)$, характеризующей спектральную плотность, тогда имеет место обратное соотношение. Таким образом, здесь возможно повышение несущей частоты и энергии сигнала с одновременным сжатием его полосы и, тем самым, увеличением спектральной плотности.

4. В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда концентрацию N можно считать зависящей только от времени (для этого достаточно, чтобы скорость волны концентрации была много больше групповой скорости сигнала) и $k = \text{const}$ (это условие будет выполнено, если изменение N начинается уже после поступления сигнала в волновод). При указанных условиях решение находится в явном виде. В самом деле, из (15) имеем

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \frac{\varkappa_e^2(t) - \varkappa_0^2}{n^2} = \frac{k_0^2 + \varkappa_e^2(t)}{n^2}, \tag{24}$$

где ω_0, $\varkappa_0$ и k_0 — начальные значения величин ω, $\varkappa_e$, k $(k = k_0)$. Все остальные характеризующие волну величины здесь могут быть выражены через $\omega(t)$. Так, из (19) и (22) следует

$$\Phi = \frac{\omega_0}{\omega(t)}, \qquad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\omega(t)}{\omega_0}, \tag{25}$$

т. е. длительность импульса с ростом $\varkappa_e^2$ возрастает пропорционально мгновенной частоте. Амплитуды же напряженностей E и $H_\perp$ тогда, согласно (18) и (25), изменяются соответственно пропорционально $\omega^{1/2}$ и $\omega^{-1/2}$, в результате чего поток энергии не меняется: $S \sim EH_\perp = \text{const}$, но полная энергия сигнала увеличивается из-за возрастания длительности импульса: $W = S\tau \sim \omega(t)$. Полоса сигнала при этом убывает: $\Delta\omega \sim \tau^{-1} \sim \omega^{-1}(t)$, а его спектральная плотность $(W/\Delta\omega)$ возрастает $\sim \omega^2$.

Этот частный результат физически вполне понятен, так как при $k = \text{const}$ (т. е. неизменной пространственной конфигурации сигнала) с ростом N фазовая скорость волн $v_\text{ф}$ (а следовательно, и частота ω) возрастает, а групповая скорость $u = (c^2/\varepsilon v_\text{ф})$ обратно пропорционально убывает, что приводит к растяжению огибающей импульса во времени и уменьшению соответствующей полосы. В общем же случае $k \neq \text{const}$ и однозначная связь между ω, τ и u не имеет места.

Как и в системах без дисперсии, параметрические эффекты могут накапливаться и при относительно малом изменении концентрации, если последняя изменяется по закону бегущей волны, причем из (15) и (16) следует, что для этого необходима синхронизация скорости волны концентрации с групповой скоростью сигнала. Последняя вблизи критической частоты ω_e может быть весьма малой, поэтому указанные эффекты возможны и в нерелятивистских потоках неоднородной плазмы. Соответствующие формулы также нетрудно найти аналогично (24) и (25), однако они здесь не приводятся из-за громоздкости; некоторые соотношения для случая $\varkappa=0$ получены в [4, 5].

Представляется, что рассмотренный здесь механизм адиабатического преобразования спектра электромагнитных волн в плазме с переменной концентрацией электронов может оказаться существенным в космических условиях, например, в атмосфере Солнца, а также может иметь определенный практический интерес для модуляции волн, для приема широкополосных сигналов и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1 Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 4, 672 (1960).
2. С. И. Аверков, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 5, 818 (1960).
3. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, № 7, 226 (1961).
4. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 2, 293 (1961).
5. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 908 (1962).
6. Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, № 12, 2186 (1967).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 февраля 1967 г.

TRANSFORMATION OF WAVE SPECTRUM IN DISPERSIVE MEDIUM WITH SLOWLY VARYING PARAMETERS

N. S. Stepanov

Propagation of electromagnetic waves in a cylindrical waveguide filled with an isotropic plasma with slowly varying space-time electron density is considered. For a particular case the results are applicable to the plane waves in unbounded plasma. In the geometrical optics approximation the regularities of the amplitude variation of field intensities, energy, frequency and wave spectrum in such a medium are investigated. It is shown, in particular, that for a wave packet the ratio of energy to frequency is an adiabatic invariant. It is noted that in dispersive media unlike the nondispersive ones the frequency may increase at simultaneous narrowing of the spectral band of a signal.