

СОДЕРЖАНИЕ

Митяков Н. А. Об измерениях локальной электронной концентрации путем наземного приема сигналов ИСЗ	485
Яшин Ю. Я. О разделении переменных в уравнении эйконала в задаче о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме	491
Гуревич Г. Л. О нестационарных процессах в ОКГ бегущей волны	503
Степанов Д. П. Стабилизация частоты и частотные флуктуации гелий-неонового лазера	514
Зейгер С. Г., Фрадкин Э. Е. Оптический квантовый генератор бегущей волны (ГБВ) с дополнительной обратной связью	519
Пермяков В. А. Дифракция электромагнитных волн на радиально неоднородных плазменных шаре и цилиндре	531
Столяров С. Н. Взаимодействие электромагнитных волн с движущейся в среде диэлектрической пластинкой	543
Дмитренко А. Г., Миронов В. Л. Дифракция поверхностной электромагнитной волны на стыке импедансной и поглощающей полуплоскостей	552
Лысенко О. Е., Хижняк Н. А. Рассеяние электромагнитных волн на малом диэлектрическом эллипсоиде произвольной анизотропии с точностью до величин $(a/\lambda)^2$ включительно	559
Кинбер Б. Е. Учет направленных свойств источников при дифракции на гладком теле в области тени	566
Ривлин Л. А., Шильдяев В. С. Полигармонические волноводы для когерентного света	572
Барabanенков Ю. Н. Средняя функция Грина для плоского рассеивающего слоя	579
Сологуб В. Г., Третьяков О. А., Шестопапов В. П. Возбуждение электромагнитного поля электронным потоком, движущимся вблизи дифракционной решетки	588
Выставкин А. Н., Губанков В. Н., Листвин В. Н., Мигулин В. В. О предельной чувствительности детекторов, основанных на разогреве электронного газа в n -InSb	602
Генкин В. Н., Меднис П. М. К вопросу об умножении частоты на полупроводниках в СВЧ диапазоне	611
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Юдин О. И. О возможности обнаружения периодической модуляции радиоизлучения Солнца, вызванной вертикальными движениями в хромосфере	617
Богомолов Ю. В. О проникновении электромагнитного поля в замагниченную плазму	618
Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. О решении кинетического уравнения в теории горячих электронов в полупроводниках и плазме	620
Бутягин О. Ф., Дмитриев В. Г., Шариф Г. А. О преобразовании частоты ОКГ с помощью явления вынужденного комбинационного рассеяния в сжатых газах	622
Ермаков Б. В., Ильинский Ю. А. О характеристиках направленного приемника света в рассеивающей среде	624
Белянцев А. М., Пискарев В. И. Излучение гелий-неонового лазера при импульсной модуляции добротности оптического резонатора	626
Васнева Г. А. Фазовый метод исследования поляризации молекулярного пучка	629
Штагер Е. А. О рассеянии коротких электромагнитных волн на колеблющемся теле сложной формы	632
Злунницына В. Н. О возможности применения структуры, состоящей из ленточной металлической решетки, лежащей на слое диэлектрика с экраном, в качестве линии передачи	635
Лесик Н. И., Седых В. М., Кондратьев Б. В. Экранированная связанная полосковая линия с широкими проводящими пластинами произвольной толщины	639

УДК 629.195 : 621.371.32

ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПУТЕМ НАЗЕМНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ ИСЗ

Н. А. Митяков

Показано, что при исследованиях ионосферы путем наземного приема сигналов ИСЗ существующие методы обработки позволяют получить лишь интегральные характеристики среды на пути распространения радиоволн.

В последние годы широкое распространение получили методы измерения электронной концентрации в ионосфере путем регистрации разности фаз сигналов когерентных частот ИСЗ. Известно, что таким способом можно определить интегральную электронную концентрацию

до высоты спутника $\int_0^{z_c} N dz$. Результаты измерений $\int_0^{z_c} N dz$ в совокуп-

ности с данными станций вертикального зондирования ионосферы дают возможность получить некоторые сведения о характере распределения электронной концентрации выше максимума слоя F (см., например, [1-3]). С другой стороны, в ряде работ [4-7] предложена методика и приведены результаты вычислений локальной электронной концентрации в области спутника непосредственно из записей разности фаз сигналов когерентных частот ИСЗ. В работах [8] и частично [3] уже указывалось на ошибочность методики обработки экспериментальных данных и, как следствие этого, на неправильность полученных в [4-7] результатов. Ниже проведен анализ предложенных в [4-7] методов обработки экспериментальных данных. Показано, что при последовательном применении этих методов можно получить лишь интегральные характеристики среды, т. е. возможности предложенных в [4-7] методов не отличаются от возможностей общепринятой методики обработки эксперимента [1, 2].

В процессе эксперимента измеряется величина $\dot{\Phi}$ — производная по времени разности фаз сигналов когерентных частот ИСЗ. Если ω_1 и $\omega_2 = m\omega_1$ — частоты передатчика, то разность фаз

$$\Phi_1 = \frac{m\omega_1}{c} \int_0^{r_c} n(\omega_1) dr - \frac{\omega_2}{c} \int_0^{r_c} n(\omega_2) dr,$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления. При условии $1 - n \ll 1$ разность фаз $\Phi = A \int_0^{r_c} N dr$, где A — численный коэффициент, зависящий от выбора частот, N — электронная концентрация, r_c — расстояние до спутника. В дальнейшем для облегчения записи положим $A=1$, т. е.

$$\Phi = \int_0^{r_c} N dr. \quad (1)$$

Поскольку в двух группах работ [4, 5] и [6, 7] используются несколько различные математические представления величины Φ , мы остановимся отдельно на работах [4, 5] и [6, 7].

В статьях [4, 5] величина представляется в следующем виде*:

$$\dot{\Phi} = v_r N_c + v_\tau I, \quad (2)$$

где v_r и v_τ — проекции скорости спутника v на r_c и перпендикуляр к r_c , N_c — электронная концентрация в области спутника, I — некоторая интегральная характеристика среды. В уравнении (2) известны экспериментальная величина $\dot{\Phi}(t)$ и кинематические члены $v_r(t)$ и $v_\tau(t)$. Величины $N_c(t)$ и $I(t)$ являются неизвестными. Для нахождения N_c в работах [4, 5] используется метод решения цепочки уравнений (2) в различные, но близкие моменты времени:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t_1) &= N_c(t_1) v_r(t_1) + v_\tau(t_1) I(t_1), \\ \dot{\Phi}(t_2) &= N_c(t_2) v_r(t_2) + v_\tau(t_2) I(t_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Если в уравнении (2) имеются две неизвестные величины $N_c(t)$ и $I(t)$, то в системе уравнений (3) добавляются неизвестные N_c и I в другой момент времени. Поэтому, строго говоря, система уравнений (3) также неразрешима относительно N_c , как и уравнение (2).

Однако, если выполняются условия

$$\frac{\Delta v_r}{v_r + \Delta v_r} \gg \frac{\Delta N_c}{N_c}, \quad \frac{\Delta v_\tau}{v_\tau + \Delta v_\tau} \gg \frac{\Delta I}{I}, \quad (4)$$

где знак Δ означает приращение величин за время $\Delta t = t_2 - t_1$, то, согласно [3, 4], систему (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t_1) &= \tilde{N}_c v_r(t_1) + v_\tau(t_1) \tilde{I}, \\ \dot{\Phi}(t_2) &= \tilde{N}_c v_r(t_2) + v_\tau(t_2) \tilde{I}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \tilde{N}_c и \tilde{I} — некоторые средние значения N_c и I в интервале Δt .

В этом случае система (5) разрешается относительно \tilde{N}_c и \tilde{I} . Рассмотрим более внимательно, к чему приводит этот метод нахождения величины N_c . Прежде всего заметим, что при $\Delta t \rightarrow 0$ систему уравнений (3) удобнее записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= v_r N_c + v_\tau I, \\ \frac{d^2 \Phi}{dt^2} &= \dot{\Phi} = \dot{v}_r N_c + \dot{v}_\tau I + v_r \dot{N}_c + v_\tau \dot{I}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы уравнений (5) для \tilde{N}_c и \tilde{I} при $\Delta t \rightarrow 0$ совпадает с решением системы (6), если пренебречь во втором уравнении членами, содержащими \dot{N}_c и \dot{I} . Точное решение системы (6) можно поэтому записать в виде

* Здесь и далее мы будем пренебрегать нестационарностью ионосферы во времени, что оправдано, если спутник пролетает на не слишком большой высоте ($z_c \leq 1000$ км).

$$N_c = \tilde{N}_c + \frac{v_r v_\tau \dot{N}_c + v_\tau^2 \dot{I}}{v_r \dot{v}_\tau - v_\tau \dot{v}_r} = \tilde{N}_c + \delta, \quad (7)$$

где \tilde{N}_c — решение системы уравнений (5).

Очевидно, что определяемая в работах [4, 5] величина \tilde{N}_c совпадает с локальной электронной концентрацией N_c , если выполняется условие $|\delta| \ll N_c^*$. Таким образом, задача сводится к вычислению величины δ .

Для простоты в дальнейшем ограничимся приближением плоской Земли и случаем, когда спутник пролетает через зенит с постоянной скоростью v (рис. 1). На рис. 1 введены следующие обозначения: r_0 — ближайшее расстояние до спутника, α — угол наклона траектории спутника к плоскости Земли, φ — зенитный угол, $\gamma = \alpha + \varphi$ — угол между r_0 и радиусом-вектором спутника r_c , z_c — высота спутника. Из геометрии рис. 1 следует, что кинематические члены в (7) имеют вид $v_r = v \sin \gamma$, $v_\tau = v \cos \gamma$. Детерминант системы (6) можно записать в следующей форме: $v_r v_\tau - v_\tau v_r = -v^2 \dot{\gamma} = -v^2 \dot{\varphi}$. Если проследить вывод формулы (2),

то величина I определяется как $I = \frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} \frac{\partial N}{\partial \varphi} dr$. После вычисления

$\frac{\partial N}{\partial \varphi}$ и интегрирования имеем

$$I = \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} N dr - N_c \right) + \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz, \quad (8)$$

где $\frac{\partial N}{\partial x}$ — горизонтальный градиент электронной концентрации.

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{I} = \dot{\varphi} \left[\left(1 - \frac{\sin \varphi}{\cos \gamma} \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} N dr - N_c \right) \cos^{-2} \varphi + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \varphi \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz + \frac{z_c}{\cos^2 \varphi} \int_0^{z_c} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \frac{z^2}{z_c^2} dz \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь не учтены члены типа $\frac{\partial N}{\partial x} \dot{x}_c$ и $\frac{\partial N_c}{\partial z} \dot{z}_c$. В этом же приближении

$$\begin{aligned} \delta = - \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \varphi} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\cos \gamma} \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} N dr - N_c \right) - \\ - \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \gamma \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz - z_c \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \varphi} \int_0^{z_c} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \frac{z^2}{z_c^2} dz. \end{aligned} \quad (10)$$

* Неравенство $|\delta| \ll N_c$, вообще говоря, не эквивалентно неравенствам (4), которыми пользовались авторы работ [4, 5]. На это обстоятельство уже указывалось в работе [8].

Таким образом, ошибка $\delta = N_c - \tilde{N}_c$ зависит как от регулярных параметров ионосферы N_c и $\int_0^{r_c} N dr$, так и от горизонтальных градиентов $\frac{\partial N}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$. Условие $|\delta| \ll N_c$ может быть выполнено, в частности, при

$\gamma \rightarrow \pi/2$, $\varphi \rightarrow 0$, т. е. в случае вертикального взлета (ракетный эксперимент).

Практически, однако, в работах [4,5] величина \tilde{N}_c вычислялась по данным наблюдений спутников «Космос-11» и «Электрон-1». Для всех сеансов наблюдений за ИСЗ «Космос-11» выполняется условие $|\alpha| \ll 1$. То же самое условие ($\alpha \leq 0,25$) выполнялось для сеансов «Электрон-1», когда высота спутника была меньше 2000 км. При $\alpha \ll 1$ и $\text{tg } \alpha \text{ tg } \varphi \ll 1$ (второе условие совпадает с первым при $\varphi \leq 45^\circ$) для величины \tilde{N}_c получаем следующее выражение:

$$\tilde{N}_c \approx \frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} N dr + \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz + z_c \int_0^{z_c} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \frac{z^2}{z_c^2} dz. \quad (11)$$

Таким образом, в указанных приближениях величина N_c есть сумма интегральной электронной концентрации и членов, учитывающих горизонтальные градиенты электронной концентрации.

При выводе выражения (11) мы пользовались приближением плоской Земли. Совершенно очевидно, что учет сферичности Земли не приведет к качественно новым результатам, кроме количественных поправок порядка z_c/R_0 , где R_0 — радиус Земли.

Авторы второй группы работ [6,7] представляют величину Φ в виде

$$\Phi = \frac{v_z}{\cos \varphi} N_c + \left(v_r - \frac{v_z}{\cos \varphi} \right) \frac{1}{z_c} \int_0^{z_c} N dz + \frac{v_x}{\cos \varphi} \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz, \quad (12)$$

где $v_z = v \sin \alpha$, $v_x = v \cos \alpha$ — вертикальная и горизонтальная составляющие скорости спутника. Это выражение записано в приближении плоской Земли и пролета спутника через зенит. В отличие от (2)

уравнение (12) содержит три неизвестные величины: N_c , $\int_0^{z_c} N dz$ и

$\int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz$, т. е. вопрос об определении N_c является не менее слож-

ным. В работах [6,7] считается, что горизонтальные градиенты электронной концентрации не существенны и последним членом в (12) можно пренебречь.

В частности, основные результаты в работах [6,7] по распределе-

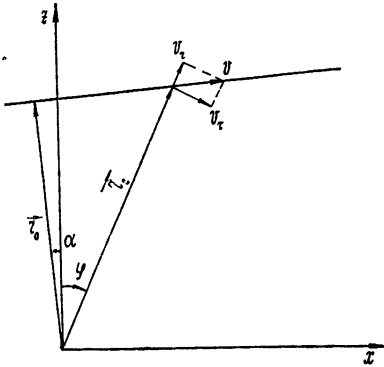


Рис. 1.

нию электронной концентрации с высотой получены по одной точке каждого сеанса наблюдений, где $v_r - \frac{v_z}{\cos \varphi} = 0$ (это соответствует в нашем случае моменту времени, когда спутник проходит через зенит и $\varphi = 0$). При этом, как видно из (12), определяемая таким методом величина \tilde{N}_c равна

$$\tilde{N}_c = N_c - \operatorname{ctg} \alpha \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz. \quad (13)$$

Это означает, что при горизонтальных градиентах $\int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz \simeq$

$$\simeq 10^5 \text{ эл. см}^{-3} [2, 3] \text{ и } \alpha \leq 0,2 \text{ величина } \operatorname{ctg} \alpha \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz \geq 5 \cdot 10^5 \text{ эл. см}^{-3},$$

что сравнимо с измеряемой величиной $N_c \simeq 10^5 + 10^6 \text{ эл. см}^{-3}$. Следует отметить, что при вертикальном взлете (ракетный эксперимент) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ и $\tilde{N}_c = N_c$. Другой метод нахождения N_c из уравнения (12) аналогичен описанному выше, т. е. в работе [6] предлагается решать цепочку уравнений (12) в различные моменты времени.

Если пренебречь (как это делается в [6]) горизонтальными градиентами электронной концентрации, то в результате несложных вычислений получим

$$\tilde{N}_c = N_c \left[1 - \sin^2 \varphi \left(1 - 2 \frac{\sin \varphi \sin \gamma \cos \varphi}{\cos \gamma} \right)^{-1} \right], \quad (14)$$

где \tilde{N}_c — результат решения двух уравнений (12) в моменты времени t и $t + \Delta t$.

Из (14) следует, что величина \tilde{N}_c пропорциональна локальной электронной концентрации N_c . В некотором конечном интервале углов $\varphi = \pm \Delta \varphi$ значения \tilde{N}_c мало отличаются от величины N_c . Все это справедливо, однако, лишь при отсутствии горизонтальных градиентов электронной концентрации. Фактически, как следует из (13), величина \tilde{N}_c является линейной комбинацией локальной электронной концентрации N_c и горизонтального градиента $\int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{z}{z_c} dz$. Разделить вклад этих членов в измеряемую величину \tilde{N}_c , на наш взгляд, не представляется возможным.

Что же касается метода вычисления локальной электронной концентрации, которым пользуются авторы работ [4, 5], то даже в отсутствие горизонтальных градиентов электронной концентрации вычисляемые значения \tilde{N}_c не соответствуют величине локальной электронной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. de Mendonca, J. Geophys. Res., 65, 1139 (1960).
2. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, Геомагнетизм и аэрономия, 3, № 5, 858 (1963)
3. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Череповицкий, Космические исследования, 4, № 2, 249 (1966).
4. В. А. Мисюра, Г. К. Солодовников, В. М. Мигунов, Космические исследования, 3, № 4, 595 (1965).
5. В. А. Мисюра, Г. К. Солодовников, Е. В. Крохмальников, В. М. Мигунов, сб Исследование космического пространства, изд. Наука, М, 1965.
6. Я. Л. Альперт, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 3, 479 (1964).
7. Я. Л. Альперт, В. М. Синельников, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 2, 209 (1965).
8. К. И. Грингауз, Ю. А. Кравцов, В. А. Рудаков, С. М. Рытов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, № 3, 533 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 января 1967 г

MEASUREMENTS OF LOCAL ELECTRON DENSITY BY THE GROUND-BASED
SATELLITE SIGNAL RECEPTION

N. A. Mityakov

It is shown that in investigating the ionosphere by means of the ground-based reception of satellite signals, the present processing methods give allowance for obtaining only the integral characteristics of a medium on the path of radio wave propagation.

Примечание при корректуре. В статье В. А. Мисюры, Г. К. Солодовникова и В. М. Мигунова (Космические исследования, т. 5, вып. 1, стр. 82, 1967) приводятся результаты решения «цепочки» уравнений (3) на электронно-вычислительной машине при заданных параметрах ионосферы. Совпадение величин \tilde{N}_c и N_c с точностью до 20% по мнению авторов доказывает правильность изложенной в [4, 5] методики вычисления локальной концентрации электронов. Необходимо подчеркнуть, однако, что полученные нами аналитические выражения имеют более общий характер, чем численные расчеты для некоторых выбранных параметров ионосферы и орбиты ИСЗ. Например, для использованной модели ионосферы в интервале высот 400 — 1500 км выполняется

неравенство $0,5 \cdot N_c \leq \frac{1}{r_c} \int_0^{r_c} N dr \leq 2N_c$. Поэтому при соответствующем выборе величин

$\frac{\partial N}{\partial x}$ в (11) всегда можно получить удовлетворительное совпадение \tilde{N}_c и N_c .

Другие аргументы, приведенные в статье В. А. Мисюры и др., также не могут служить обоснованием метода «цепочки» уравнений

УДК 533 951

**О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ЭЙКОНАЛА
В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ**

Ю. Я. Яшин

Получены соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения эйконала для того, чтобы полный интеграл последнего мог быть получен методом разделения переменных, при распространении электромагнитных волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме в приближении геометрической оптики, когда внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль одной из координатных осей. В качестве примера рассмотрена задача о распространении волн в плоскости, перпендикулярной H_0 , когда свойства среды изменяются в этой же плоскости.

При рассмотрении задачи о распространении электромагнитных волн в многомерно-неоднородной (двумерно- или трехмерно-неоднородной) среде в приближении геометрической оптики возникает проблема интегрирования уравнения эйконала, принадлежащего к классу уравнений Гамильтона—Якоби. Когда распространение волн происходит в изотропной среде, уравнение эйконала квадратично по компонентам градиента фазы, и для отыскания его полного интеграла методом разделения переменных можно пользоваться результатами, полученными в аналитической динамике [1—5]. При распространении же волн в магнитоактивной плазме это уравнение представляет собой форму четвертой степени относительно $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ (S — фаза, x_i — координаты). Отыскание решений здесь связано с большими трудностями, и в настоящее время они получены лишь для простейших случаев (плоскостная среда и др.).

В этой ситуации представляется полезным выделение тех случаев, когда решение уравнения Гамильтона—Якоби указанного выше типа может быть получено в разделяющихся переменных. Настоящая работа посвящена использованию метода разделения переменных для отыскания полного интеграла уравнения эйконала в случае, когда одна из координатных осей совпадает по направлению с осью анизотропии (внешним магнитным полем H_0). Рассматриваемое уравнение при этом биквадратно по $\frac{\partial S}{\partial x_i}$.

1. Рассмотрение будет проводиться для двух переменных x_1 и x_2 , что соответствует распространению в двумерно-неоднородных средах. Здесь и ниже используется ортогональная криволинейная система координат, одна из осей которой совпадает с H_0 . Уравнение эйконала для интересующего нас случая в наиболее общем виде может быть записано следующим образом:

$$An_1^4 + Bn_1^2n_2^2 + Cn_2^4 + Dn_1^2 + En_2^2 + F = f, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E, F — некоторые функции независимых переменных x_1 и x_2 , f — константа; $n_1 \equiv \frac{c}{\omega} \frac{\partial S}{\partial x_1}$, $n_2 \equiv \frac{c}{\omega} \frac{\partial S}{\partial x_2}$ (коэффициенты Ламе в (1) включены в A, B, C, \dots). Полный интеграл уравнения (1), полученный методом разделения переменных, который удовлетворяет соотношению

$$S(x_1, x_2, x_3) = S_1(x_1) + S_2(x_2) + S_3(x_3),$$

в нашем случае может быть представлен в виде

$$S = \frac{\omega}{c} \int n_1(x_1) dx_1 + \frac{\omega}{c} \int n_2(x_2) dx_2 + S_0, \quad (2)$$

где S_0 — аддитивная константа интегрирования. Решение (1) в виде (2) возможно, в частности, если принять, что справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} n_1^2(x_1) &= \dot{U}_1(x_1) + c_1 a_{11}(x_1) + c_2 a_{12}(x_1), \\ n_2^2(x_2) &= U_2(x_2) + c_1 a_{21}(x_2) + c_2 a_{22}(x_2). \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) через U_i и a_{ij} обозначены некоторые функции x_1 и x_2 ; c_1 и c_2 представляют собой постоянные разделения, из которых, как будет ясно ниже (см. соотношение (5)), только одна является независимой. Эта постоянная вместе с S_0 суть пара независимых констант интегрирования в полном интеграле уравнения (1).

Рассматривая (3) как систему уравнений относительно c_1 и c_2 и разрешая ее, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= T_{11}(n_1^2 - U_1) + T_{21}(n_2^2 - U_2), \\ c_2 &= T_{12}(n_1^2 - U_1) + T_{22}(n_2^2 - U_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $T_{ij} = G_{ij}/\Delta$, G_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы a_{ij} ($G_{11} = a_{22}$, $G_{12} = -a_{21}$, $G_{21} = -a_{12}$, $G_{22} = a_{11}$), а $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Очевидно, что любая комбинация из c_1 и c_2 приведет к некоторому уравнению в частных производных первого порядка, решение которого имеет вид (2) с учетом (3). Поскольку $c_1 \sim n_1^2$, $c_2 \sim n_2^2$, то для того, чтобы получить уравнение типа (1), необходимо взять квадратичную комбинацию из этих констант, которая в наиболее общем виде может быть записана следующим образом:

$$\alpha c_1^2 + \beta c_1 c_2 + \gamma c_2^2 + \delta c_1 + \varepsilon c_2 + \eta = 0, \quad (5)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ — некоторые постоянные. Подставляя (4) в (5) и сравнивая коэффициенты в полученном выражении при различных степенях n_i с соответствующими коэффициентами в уравнении (1), получим

$$\begin{aligned} A &= \alpha T_{11}^2 + \beta T_{11} T_{12} + \gamma T_{12}^2, \\ B &= 2\alpha T_{11} T_{21} + \beta (T_{11} T_{22} + T_{12} T_{21}) + 2\gamma T_{12} T_{22}, \\ C &= \alpha T_{21}^2 + \beta T_{21} T_{22} + \gamma T_{22}^2, \\ -D &= 2\alpha T_{11}(T_{11} U_1 + T_{21} U_2) + \beta [T_{11}(T_{12} U_1 + T_{22} U_2) + T_{12}(T_{11} U_1 + \\ &+ T_{21} U_2)] + 2\gamma T_{12}(T_{12} U_1 + T_{22} U_2) - \delta T_{11} - \varepsilon T_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

* В настоящей работе не рассматривается вопрос о возможных видах $n_1(x_1, c_1, c_2)$, $n_2(x_2, c_1, c_2)$.

$$-E = 2\alpha T_{21}(T_{11}U_1 + T_{21}U_2) + \beta[T_{21}(T_{12}U_1 + T_{22}U_2) + T_{22}(T_{11}U_1 + T_{21}U_2)] + \\ + 2\gamma T_{22}(T_{12}U_1 + T_{22}U_2) - \delta T_{21} - \varepsilon T_{22},$$

$$F = \alpha(T_{11}U_1 + T_{21}U_2)^2 + \beta(T_{11}U_1 + T_{21}U_2)(T_{12}U_1 + T_{22}U_2) + \\ + \gamma(T_{12}U_1 + T_{22}U_2)^2 - \delta(T_{11}U_1 + T_{21}U_2) - \varepsilon(T_{12}U_1 + T_{22}U_2) + \eta - f.$$

Таким образом, мы имеем шесть соотношений $A(\alpha_{ij}, U_i)$, $B(\alpha_{ij}, U_i), \dots, F(\alpha_{ij}, U_i)$, зависящих от шести функций α_{ij}, U_i . Решая систему (6) относительно α_{ij} и U_i , получим

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(A, B, \dots, F), \quad U_i = U_i(A, B, \dots, F). \quad (7)$$

Если теперь окажется, что при некоторых конкретных значениях констант $\alpha, \beta, \dots, \eta$ величины α_{ij} и U_i будут зависеть только от x_1 , а α_{2j} и U_2 — только от x_2 , то это означает, что мы нашли функции, зависящие от координат через входящие в них коэффициенты уравнения (1), которые, будучи подставлены в (3), дают возможность получить полный интеграл уравнения (1) в форме (2).

Как уже указывалось выше, из двух констант c_1, c_2 , в силу существования между ними связи (5), только одна является независимой, например, c_1 . В конечном счете, в решение (2), как это и должно быть, входят только две независимые константы интегрирования.

Необходимо отметить, что в рассматриваемом случае мы получим, вообще говоря, не четыре независимых решения, как это имеет место, например, для плоскостной среды, а восемь. В этом нетрудно убедиться на простейшем примере, когда имеют место равенства

$$\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = \delta = \varepsilon = 0, \quad \eta < 0. \quad (8)$$

Для этого примера мы получаем четыре пары выражений для n_1^2 и n_2^2 , которым соответствуют следующие четыре набора пар констант $c_1, c_2, c_1, -c_2; -c_1, c_2; -c_1, -c_2$. Всего же независимых решений будет восемь, поскольку каждой паре констант соответствует два решения, отвечающих знакам «+» и «-» перед n_1 и n_2 . Физически это связано с тем, что существуют четыре «области», в которых решения будут независимы (вверх — вправо, вверх — влево и т. д.). Действительно, в приближении геометрической оптики точки поворота $n_{x_1} = 0, n_{x_2} = 0$ являются точками, в которых происходит «взаимодействие» двух нормальных решений (прямого и обратного). С другой стороны, из теории распространения электромагнитных волн в плоскостной среде, когда дисперсионное уравнение биквадратно по n^2 (H_0 параллельно одной из координатных осей), известно, что в магнитоактивной плазме существует два типа волн (обыкновенная и необыкновенная). Таким образом, в рассматриваемом случае действительно должно быть восемь собственных решений.

2. Вышеприведенная схема решения уравнения (1) дает возможность получить полный интеграл этого уравнения не для любых зависимостей коэффициентов A, B, \dots, F от координат, а только для тех, которые могут быть представлены в виде (6).

Однако необходимо иметь в виду, что не все правые части (6) являются независимыми. Это приводит к тому, что и между левыми частями (6), т. е. коэффициентами уравнения (1), будет существовать ряд связей. Нетрудно убедиться с помощью непосредственной подстановки в том, что имеют место следующие соотношения, связывающие между собой коэффициенты уравнения (1):

$$\begin{aligned} -D &= 2AU_1 + BU_2 - \delta T_{11} - \varepsilon T_{12}, \\ -E &= BU_1 + 2CU_2 - \delta T_{21} - \varepsilon T_{22}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$F = AU_1^2 + BU_1U_2 + CU_2^2 - (\delta T_{11} + \varepsilon T_{12})U_1 - (\delta T_{21} + \varepsilon T_{22})U_2 + \eta - f.$$

Если $\delta = \varepsilon = 0$, то два первых соотношения (9) можно разрешить относительно U_1 и U_2 и полученные результаты подставить в третье, что эквивалентно исключению U_1, U_2 в (9). В итоге мы получим соотношение, связывающее между собой коэффициенты уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A(BE - 2CD)^2 + B(BE - 2CD)(BD - 2AE) + C(BD - 2AE)^2 = \\ = (f - \eta)(4AC - B^2) \end{aligned} \quad (10)$$

при $4AC - B^2 \neq 0$.

В равенствах (9) можно исключить не U_1, U_2 , а T_{ij} . Тогда необходимое условие может быть приведено к виду

$$AU_1^2 + BU_1U_2 + CU_2^2 + DU_1 + EU_2 + F + \eta = f. \quad (11)$$

Заметим, что выражения (9), (10) или (11) являются необходимыми, но не достаточными условиями существования полного интеграла уравнения (1) в виде (2), поскольку при получении их использовался факт, что коэффициенты уравнения (1) должны записываться в форме (6).

Таким образом, при определении коэффициентов уравнения (1) необходимо иметь в виду, что не все соотношения (6) являются независимыми и между коэффициентами уравнения эйконала должна существовать определенная связь, чтобы оно могло быть проинтегрировано в разделяющихся переменных.

3. Все предыдущее рассмотрение проводилось в общем виде для уравнения типа (1), и его коэффициенты A, B, \dots, F нигде не конкретизировались. Когда мы имеем дело с магнитоактивной плазмой, то сами эти коэффициенты являются функциями параметров среды $v \equiv \omega_0^2/\omega^2$, $u \equiv \omega_H^2/\omega^2$, $s = v_{эфф}/\omega$ и др., где ω_0 и ω_H — соответственно ленгмюровская и гирочастота плазменных электронов, а $v_{эфф}$ — эффективное число соударений. Тогда соотношения (6) можно рассматривать как систему уравнений, из которых могут быть определены u, v и т. д. как функции координат, причем число этих параметров должно быть равно числу независимых уравнений системы (6). С другой стороны, коэффициенты уравнения (1) как функции u, v, \dots , также могут быть связаны между собой рядом соотношений. Поэтому установить точно полное число независимых связей в общем случае не удастся, и в каждом конкретном случае это нужно делать самостоятельно.

В качестве примера мы рассмотрим сравнительно простую задачу о распространении электромагнитных волн в двумерно-неоднородной бесстолкновительной ($v_{эфф} = 0$) плазме для случая, когда внешнее магнитное поле H_0 перпендикулярно плоскости, в которой изменяются свойства среды. Выберем систему координат так, чтобы H_0 было параллельно оси z . Тогда параметры уравнения будут зависеть от x и y . Положим далее $x \equiv x_1, y \equiv x_2$.

В этом случае уравнение эйконала при $\varepsilon_1 \neq 0$ запишется следующим образом (см., например [6]):

$$n_x^4 + 2n_x^2 n_y^2 + n_y^4 + n_x^2 \left[n_z^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - g^2) \right] +$$

$$+ n_y^2 \left[n_z^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - g^2) \right] + \left[n_z^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 2\varepsilon_2 n_z^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 - g^2) \right] = 0, \quad (12)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{v}{1-u}, \quad \varepsilon_2 = 1 - v, \quad g = \frac{v\sqrt{u}}{1-u}.$$

Обращая внимание на симметрию коэффициентов при одинаковых степенях n_x , n_y в (12), положим в (3)*

$$a_{21} = a_{12} = 0.$$

Соотношение (5) с учетом (3) при этом запишется в виде

$$\frac{\alpha}{\alpha_x^2} n_x^4 + \frac{\beta}{\alpha_x \alpha_y} n_x^2 n_y^2 + \frac{\gamma}{\alpha_y^2} n_y^4 + n_x^2 \left(-\frac{2\alpha}{\alpha_x^2} U_x - \frac{\beta}{\alpha_x \alpha_y} U_y + \frac{\delta}{\alpha_x} \right) +$$

$$+ n_y^2 \left(-\frac{\beta}{\alpha_x \alpha_y} U_x - \frac{2\gamma}{\alpha_y^2} U_y + \frac{\varepsilon}{\alpha_y} \right) + \frac{\alpha}{\alpha_x^2} U_x^2 + \frac{\beta}{\alpha_x \alpha_y} U_x U_y + \quad (13)$$

$$+ \frac{\gamma}{\alpha_y^2} U_y^2 - \frac{\delta}{\alpha_x} U_x - \frac{\varepsilon}{\alpha_y} U_y + \eta - f = 0,$$

где использованы обозначения $\alpha_{11}(x) \equiv \alpha_x(x)$, $\alpha_{22}(y) \equiv \alpha_y(y)$, $U_1(x) \equiv U_x$, $U_2(y) \equiv U_y$. Сравнивая первые три члена в (12) и (13), получим

$$\frac{\alpha}{\alpha_x^2} = 1, \quad \frac{\beta}{\alpha_x \alpha_y} = 2, \quad \frac{\gamma}{\alpha_y^2} = 1. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $\alpha_x(x) = \text{const}$, $\alpha_y(y) = \text{const}$. Кроме того, поскольку в (12) $D=E$, то имеем с учетом (14)

$$-2(U_x + U_y) + \frac{\delta}{\alpha_x} = -2(U_x + U_y) + \frac{\varepsilon}{\alpha_y},$$

откуда сразу вытекает равенство

$$\frac{\delta}{\alpha_x} = \frac{\varepsilon}{\alpha_y}. \quad (15)$$

Тогда из (12) и (13) имеем два уравнения для определения $v(x, y)$, $u(x, y)$:

$$-2(U_x + U_y) + \frac{\delta}{\alpha_x} = n_z^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - g^2), \quad (16)$$

$$(U_x + U_y)^2 - \frac{\delta}{\alpha_x} (U_x + U_y) + \eta - f = n_z^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 2\varepsilon_2 n_z^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 - g^2).$$

Решим уравнения (16) для частного случая распространения волн в плоскости xy ($n_z^2 = 0$). После ряда несложных преобразований получим

* Полученные ниже соотношения для $v(x, y)$ и $u(x, y)$, естественно, не носят общего характера.

$$\varepsilon_2 \equiv 1 - v = (U_x + U_y) - \frac{\delta}{2\alpha_x} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4\alpha_x^2} - (\eta - f)}; \quad (17)$$

$$u = \frac{\mp 2\varepsilon_2 \sqrt{(\delta^2/4\alpha_x^2) - (\eta - f)}}{\varepsilon_2 - 1 \mp 2 \sqrt{(\delta^2/4\alpha_x^2) - (\eta - f)}}. \quad (18)$$

Таким образом, мы видим, что в нашем случае, если $v(x, y)$ определяется из (17), а $u(x, y)$ из (18), то полный интеграл уравнения один (1) может быть представлен в виде (2). Константы $\alpha_x, \delta, \eta - f$ в (17) и (18) определяются из соображения удобства в зависимости от того, каков будет конкретный вид функций $U_x(x)$ и $U_y(y)$:

Окончательные выражения для n_x^2, n_y^2 с учетом (5), (14), (15) имеют вид

$$\begin{aligned} n_x^2 &= U_x(x) - \alpha_x c_1, \\ n_y^2 &= U_y(y) - \alpha_y c_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где α_x, α_y — постоянные, а c_1 определяется формулой

$$c_1 = \frac{-(\beta c_2 + \delta) \pm \sqrt{c_2^2(\beta^2 - 4\gamma) + 2c_2(\beta\delta - 2\varepsilon) + \delta^2 - 4\eta}}{2\alpha}.$$

Отметим также, что рассмотрение, проведенное в настоящем разделе, годится не только для плоских задач. Однако при этом необходимо иметь в виду, что коэффициенты Ламе при $\nabla_x S$ и $\nabla_y S$ должны быть одинаковы. Это нужно для того, чтобы можно было пользоваться соотношениями (16) для определения $v(x, y)$ и $u(x, y)$. В частности, этим способом может быть рассмотрена задача о распространении волн в плазме, свойства которой зависят от r и z , но не зависят от θ (r, θ, z — цилиндрические координаты $r^2 = x^2 + y^2, \operatorname{tg} \theta = x/y, z$), когда внешнее магнитное поле H_0 имеет только азимутальную компоненту $H_0 = H_0 \varphi$. Для этого в (12) и (13) необходимо переобозначить

$$n_x^2 \rightarrow n_r^2, \quad n_y^2 \rightarrow n_z^2, \quad n_z^2 \rightarrow (\nabla_\theta S)^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{P^2}{r^2},$$

где $P^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = \text{const}$ в силу цикличности переменной θ .

4. Приведем выражения для u и v в случае, когда уравнение эйконала записано в ортогональной криволинейной системе координат ξ, ϑ, ζ , а свойства среды изменяются в направлениях, перпендикулярных внешнему магнитному полю H_0 . Выберем систему координат так, чтобы H_0 имело только ζ -компоненту ($H_0 = H_0 \zeta$). Соответствующие уравнения получаются из (12) и (13), если произвести следующие замены:

$$n_x^2 \rightarrow (\nabla_\xi S)^2 \equiv n_\xi^2 = L_\xi^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2, \quad n_y^2 \rightarrow (\nabla_\vartheta S)^2 \equiv n_\vartheta^2 = L_\vartheta^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2, \quad (20)$$

$$n_z^2 \rightarrow (\nabla_\zeta S)^2 \equiv n_\zeta^2 = L_\zeta^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta} \right)^2,$$

где L_i — коэффициенты Ламе. Ниже будем считать, что справедливо равенство

$$L_\xi^2 = L_\vartheta^2 \equiv L^2. \quad (21)$$

Сравнивая, как и в предыдущем разделе, коэффициенты при соответствующих степенях градиентов фазы в (12) и (13) с учетом (20) и (21), получим для определения u и v вместо (16) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L^2 Q &= n_\zeta^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - g^2), \\ L^4 R &= n_\zeta^4 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 2\varepsilon_2 n_\zeta^2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 - g^2), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= -2(U_\xi + U_\vartheta) + \frac{\delta}{\alpha_\xi}, \\ R &= (U_\xi + U_\vartheta)^2 - \frac{\delta}{\alpha_\xi} (U_\xi + U_\vartheta) + \eta - f. \end{aligned}$$

Через $U_\xi(\xi)$ и $U_\vartheta(\vartheta)$ обозначены произвольные функции соответствующих переменных. Учитывая приведенную выше зависимость ε_1 , ε_2 , g от u и v и используя (22), придем к следующим соотношениям, определяющим u и v как функции координат и дающим возможность проинтегрировать уравнения эйконала в разделяющихся переменных:

$$\varepsilon_2 \equiv 1 - v = \frac{QL^2/2 \pm \sqrt{(QL^2/2)^2 + (n_\zeta^2 - 1)[RL^2(n_\zeta^2 + 1) - n^4(QL^2 + 1 - n_\zeta^2)]}}{n_\zeta^2 - 1} \quad (23)$$

$$u = \frac{2\varepsilon_2(QL^2/2 + \varepsilon_2 - n_\zeta^2)}{QL^2 + (\varepsilon_2 - 1)(1 - n_\zeta^2)} \quad (24)$$

Для того, чтобы перейти к поперечному (по отношению к H_0) распространению, необходимо в (23) и (24) положить $n_\zeta^2 = 0$.

Формулами (23), (24) будут описываться следующие частные случаи (см., например, [7]):

а) декартовы координаты

$$\xi \equiv x, \quad \vartheta \equiv y, \quad \zeta \equiv z, \quad L^2 = 1 \quad (H_0 \parallel \text{оси } z);$$

б) параболические цилиндрические координаты

$$\xi = \sqrt{r+x}, \quad \vartheta = \sqrt{r-x}, \quad z,$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad L^2 = \frac{1}{\xi^2 + \vartheta^2} \quad (H_0 \parallel \text{оси } z);$$

в) эллиптические цилиндрические координаты

$$x = d \sin \xi \operatorname{ch} \vartheta, \quad y = \pm d \cos \xi \operatorname{sh} \vartheta, \quad z$$

($2d$ — расстояние между фокусами эллипса), $L^2 = \frac{1}{d^2(\operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \xi)} \quad (H_0 \parallel O z);$

г) тороидальные координаты (см. [7], стр. 279)

$$x = \frac{d \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \vartheta} \cos \varphi, \quad y = \frac{d \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \vartheta} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{d \sin \vartheta}{\operatorname{ch} \xi + \cos \vartheta} \quad (\zeta \equiv \varphi = \operatorname{arctg} y/x), \quad L^2 = \frac{(\operatorname{ch} \xi + \cos \vartheta)^2}{d^2},$$

$$n_\zeta^2 \equiv n_\varphi^2 = L^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2,$$

где $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{d \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \vartheta}$, $\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = \text{const}$ в силу цикличности переменной φ .

5. В качестве другого примера рассмотрим распространение электромагнитных волн в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле H_0 , силовые линии которого имеют радиальное направление*.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z (при этом $H_0 \equiv H_{0r}$). Отыскивая решение уравнений Максвелла в приближении геометрической оптики, получим, как обычно, из условия существования нетривиального решения системы уравнений нулевого приближения уравнение эйконала для фазы S :

$$n_0^4 \epsilon_1 + n_0^2 n_r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) + n_r^4 \epsilon_2 - n_0^2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 - g^2) - n_r^2 2\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 (\epsilon_1^2 - g^2) = 0, \quad (25)$$

где $n \equiv \frac{c}{\omega} k = \frac{c}{\omega} \nabla S$. Вектор k имеет компоненты $k_r = \frac{\partial S}{\partial r}$, $k_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta}$

$k_z = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$. Заметим, что уравнение (25) может быть получено из уравнения эйконала, приведенного в [6], простой заменой коэффициентов при различных степенях n , на коэффициенты при соответствующих степенях n_θ .

Влияние магнитного поля существенно при $u \gtrsim 1$. Мы рассмотрим здесь случай $u \gg 1$. Будем считать, что концентрация частиц достаточно велика, так что выполнено неравенство

$$v \gg u \gg 1. \quad (26)$$

В этом случае уравнение (25) существенно упрощается и может быть представлено следующим образом:

$$S_0^4 - S_0^2 r^2 (u n_r^2 - 2v) - u r^4 n_r^4 + 2v r^4 n_r^2 + r^4 v^2 = 0, \quad (27)$$

где $S_0 = \frac{c}{\omega} \frac{\partial S}{\partial \theta}$.

а) Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что, если справедливы соотношения

$$u = u(\theta), \quad v = A(\theta)/r^2, \quad (28)$$

то уравнение (27) без труда может быть проинтегрировано. При этом компоненты вектора n запишутся следующим образом:

$$n_r = \frac{c_1}{r}, \quad r^2 n_\theta^2 \equiv S_0^2 = \frac{c_1^2 u - A}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1^2 u - A)^2}{4} + (u c_1^4 - 2A c_1^2 - A^2)}, \quad (29)$$

где c_1 — константа интегрирования. Остановимся кратко на некоторых свойствах полученного решения. Непосредственно из (29) видно, что

* Этот случай может соответствовать распространению волн в плазме, находящейся в поле магнитного диполя вблизи полюсов, а также в конфигурациях типа магнитной бутылки вблизи от пробки.

n_r ни при каких конечных значениях r в нуль не обращается, в то время как точки обращения в нуль n_θ могут быть найдены из условия

$$uc_1^4 - 2Ac_1^2 - A^2 = 0. \quad (30)$$

Так, например, если $A(\theta) = \text{const}$ ($v = A/r^2$), а

$$u(\theta) = B + \alpha(\theta - \theta_0)^2,$$

где B и α — константы, то из (30) получится

$$\theta_{1,2} = \theta_0 \pm \frac{1}{\alpha} \sqrt{A^2 + 2Ac_1^2 - c_1^4 B}.$$

Если ввести угол Ψ между магнитным полем H_0 и вектором n , то для него справедливо соотношение

$$\text{tg}^2 \Psi = \frac{n_\theta^2}{n_r^2} = \frac{S_\theta^2(\theta)}{c_1^2}. \quad (31)$$

Отсюда видно, что Ψ не зависит от r и определяется в данной точке лишь зависимостью свойств среды от θ и начальными условиями, т. е. c_1 . Это приводит к тому, что угол между n и H_0 на разных уровнях r при одном и том же θ будет одинаков.

б) Рассмотрим другой случай. Для этого запишем приближенно уравнение (27) в следующей форме:

$$\left(\frac{S_\theta^2}{r^2} + v - \frac{un_r^2}{2} \right)^2 = \frac{u^2 n_r^4}{4} - uvn_r^2. \quad (32)$$

Уравнение (27) можно представить в таком виде, если выполнены неравенства

$$|un_r^4 - 2vn_r^2| \ll \left(n_\theta^2 + v - \frac{un_r^2}{2} \right)^2; \quad (33)$$

$$|un_r^4 - 2vn_r^2| \ll \left| \frac{u^2 n_r^4}{4} - uvn_r^2 \right|. \quad (34)$$

Заметим, что неравенство (34) в силу (26) выполнено всегда. Справедливость неравенства (33) будет показана ниже. Если считать далее, что зависимость параметров среды от координат описывается соотношениями

$$v = \tilde{F}(\theta)/r^2, \quad u = \tilde{F}(\theta) \Phi(r), \quad (35)$$

где $\tilde{F}(\theta)$ и $\Phi(r)$ — произвольные функции соответствующих переменных, то из (32) и (35) получим

$$n_r^2 = \frac{(c_1 + 1)^2}{c_1 r^2 \Phi(r)}, \quad n_\theta^2 = c_1 \frac{\tilde{F}(\theta)}{r^2} \equiv c_1 v(r, \theta), \quad (36)$$

где $c_1 = S_\theta^2(\theta)/\tilde{F}(\theta)$ — константа интегрирования. Таким образом, видно, что в этом случае n_θ^2 повторяет зависимость электронной концентрации от координат. Заметим также, что соотношения (36) являются точным решением уравнения (27) при $(c_1 + 1)^2 = 2c_1$. Угол Ψ между n и H_0 подчиняется соотношению

$$\operatorname{tg}^2 \Psi = \frac{n_v^2}{n_r^2} = \frac{c_1^2}{(c_1 + 1)^2} F(\theta) \Phi(r) = \left(\frac{c_1}{c_1 + 1} \right)^2 u(r, \theta). \quad (37)$$

Если в некоторой точке $r=r_0$, $\theta = \theta_0$ вектор \mathbf{n} имеет наклон Ψ_0 к магнитному полю, то из (37) имеем

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \Psi}{u(r, \theta)} = \frac{\operatorname{tg}^2 \Psi_0}{u(r_0, \theta_0)} = \text{const.} \quad (38)$$

Соотношения (37) и (38) позволяют найти угол наклона траектории к \mathbf{H}_0 в любой точке, если он известен в некоторой начальной точке.

Используя (35) и (36), нетрудно показать, что неравенство (33) имеет вид

$$(c_1^2 + 1) \left(\frac{2}{c_1 - 1} \right)^2 \ll \tilde{F}(\theta) \Phi(r) = u(r, \theta).$$

Последнее с учетом (26) справедливо всюду, за исключением значения $c_1 \simeq 1$.

Поведение траекторий (линий, касательных к \mathbf{n}) с изменением r будет существенно зависеть от вида функции $\Phi(r)$. Здесь можно рассмотреть три качественно различных случая.

1) $\Phi(r) = \text{const}$. При этом угол наклона \mathbf{n} к \mathbf{H}_0 не зависит от r , а только от θ , т. е. этот случай совпадает с рассмотренным выше случаем, описываемым соотношением (31).

2) Если $\Phi(r)$ неограниченно растет с ростом r , то при больших r справедливо $n_r^2 \ll n_\theta^2$ и угол наклона траектории \mathbf{n} по мере роста r будет увеличиваться, а при обратном распространении уменьшаться. Таким образом, в этом случае траектории, имеющие в области больших r самые разнообразные углы Ψ , приходя в область малых r будут по направлению совпадать с \mathbf{H}_0 (см. рис. 1).

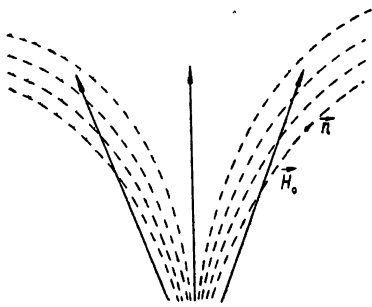


Рис. 1.

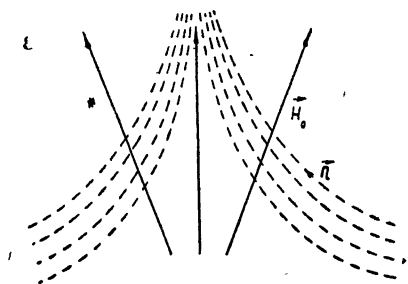


Рис. 2.

3) Когда $\Phi(r)$ убывает с ростом r , то при больших r справедливо $n_r^2 \gg n_\theta^2$. Это соответствует тому, что пучок траекторий, выходящих из области малых r под различными углами, в области больших r будет параллелен \mathbf{H}_0 , а при обратном распространении, т. е. при уменьшении r , угол Ψ будет увеличиваться (см. рис. 2). К этому случаю относится, в частности, зависимость $u \sim r^{-6}$, которая отвечает геомагнитному полю.

Очевидно, что если $\Phi(r)$ при разных r изменяется по разным законам (случаи 1, 2, 3), то и качественное поведение траекторий в этих областях будет различно. Ход траекторий в зависимости от θ может быть рассмотрен лишь, если задаваться конкретным видом $\tilde{F}(\theta)$. Однако из (36) и (37) следует, что с ростом $\tilde{F}(\theta)$ должен увеличиваться также и угол Ψ , а с уменьшением $\tilde{F}(\theta)$ угол Ψ будет убывать.

В заключение автор благодарит Б. Н. Гершмана за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнение Гамильтона—Якоби, являющееся формой n -ой степени по $S_i \equiv \partial S / \partial x_i$:

$$\sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m A_{m-j, j}(x_1, x_2) S_1^{m-j} S_2^j = 0, \quad (\text{П.1})$$

коэффициенты которого $A_{m-j, j}(x_1, x_2)$ — некоторые функции двух независимых переменных x_1 и x_2 . Установим, какой вид должны иметь $A_{m-j, j}$ как функции x_1 и x_2 , чтобы полный интеграл уравнения (П.1) мог быть получен методом разделения переменных, т. е. имел вид (2).

Пусть n имеет следующие k множителей:

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \quad (\nu_1 = 1, \nu_k = n). \quad (\text{П.2})$$

Представим тогда $S_1(x_1)$ и $S_2(x_2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1^{\nu_i}(x_1) &= U_1(x_1) + c_1 a_{11}(x_1) + c_2 a_{12}(x_1), \\ S_2^{\delta_i}(x_2) &= U_2(x_2) + c_1 a_{21}(x_2) + c_2 a_{22}(x_2), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где δ_i принимает одно из значений между единицей и ν_i ($\delta_i = 1, 2, \dots, \nu_i$), c_1 и c_2 — константы разделения. Рассматривая (П.3) как систему уравнений относительно c_1 и c_2 и разрешая ее, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= T_{11} (S_1^{\nu_i} - U_1) + T_{21} (S_2^{\delta_i} - U_2), \\ c_2 &= T_{12} (S_1^{\nu_i} - U_1) + T_{22} (S_2^{\delta_i} - U_2), \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где $T_{lr} = G_{lr} / \Delta$ (G_{lr} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы a_{lr} , $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$). Нетрудно видеть, что, поскольку $c_1 \sim S_1^{\nu_i}$, $c_2 \sim S_2^{\delta_i}$ ($\rho = 1, 2$), то для того, чтобы получить уравнение вида (П.1), необходимо взять следующую комбинацию из констант c_1 и c_2 :

$$\sum_{\delta=0}^{\nu_i} \sum_{\mu=0}^{\delta} \beta_{\delta-\mu, \mu} c_1^{\delta-\mu} c_2^{\mu} = 0, \quad (\text{П.5})$$

где $\gamma_i = n / \nu_i$, а $\beta_{\delta-\mu, \mu}$ — некоторые постоянные. Подставляя (П.4) в (П.5) и сравнивая с (П.1), получим соотношения, определяющие коэффициенты этого уравнения через a_{lr} и U_i :

$$A_{m-j, j}(x_1, x_2) = A_{m-j, j}(a_{lr}, U_i). \quad (\text{П.6})$$

Очевидно, что, если коэффициенты уравнения (П.1) удовлетворяют (П.6), то полный интеграл (П.1) может быть представлен в виде (2).

Остановимся более подробно на случае $n = 4$. Тогда имеем

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 4 \quad (\gamma_1 = 4, \quad \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = 1). \quad (\text{П. 7})$$

Если взять $\nu_2 = 2$, то уравнение (П.1) имеет вид

$$A_{40} S_1^4 + A_{22} S_1^2 S_2^2 + A_{04} S_2^4 + A_{20} S_1^2 + A_{02} S_2^2 + A_{00} = 0, \quad (\text{П. 8})$$

где δ_2 принимает значения $\delta_2 = 1, 2$. Соотношение (П.5) в этом случае запишется

$$\beta_{20} c_1^2 + \beta_{22} c_1 c_2 + \beta_{02} c_2^2 + \beta_{10} c_1 + \beta_{01} c_2 + \beta_{00} = 0. \quad (\text{П. 9})$$

Нетрудно видеть, что рассмотрение, проведенное в настоящей работе, является частным случаем рассмотрения, приведенного в Приложении, для которого $\nu_2 = 2$ при $\delta_2 = 2$.

Наиболее общему случаю разделения переменных в уравнении эйконала, являющемся формой четвертой степени по dS/dx_i ($n = 4$), отвечает значение $\nu_1 = 1$. Этому случаю соответствует задача о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, когда внешнее магнитное поле H_0 не совпадает по направлению ни с одной из координатных осей.

Отметим в заключение, что проведенное выше рассмотрение не исчерпывает, по-видимому, все возможные случаи разделения переменных в уравнении вида (П.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Burgatti, Atti della Reale Academia Dei Lincei, serie quinta, 20, Fasciolo 2, Roma (1911).
2. M. Hadamard, Bulletin des Sciences Mathematiques, Deuxieme serie, 35, 106, Paris (1911).
3. Dall'Acqua, Math. Annalen, 66, 398 (1908).
4. Т. Леви-Чивита, У. Амальди, Курс теоретической механики, ИЛ, М., 1951.
5. Ф. Р. Мультион, Введение в небесную механику, ОНТИ, М.—Л., 1935.
6. Ю. Я. Яшин, ЖТФ, 36, 13 (1966).
7. Э. Маделунг, Математический аппарат физики, Физматгиз, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 февраля 1967 г.

ON SEPARATION OF VARIABLES IN EICONAL EQUATION IN THE PROBLEM ON ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN A MAGNETO- ACTIVE PLASMA

Yu. Ya. Yashin

There have been derived the relations valid for the coefficients of Eiconal equation the full integral of which is obtainable by the method of separation of variables. Electromagnetic waves are assumed to propagate in a two-dimensional magnetoactive plasma in the geometrical optics approximation when the external magnetic field H_0 is oriented along one of the coordinate axes. As an example there has been considered the problem on propagation of waves in a plane perpendicular to H_0 when the medium properties vary in the same plane.

УДК 621.378.325

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ В ОКГ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Г. Л. Гуревич

Исследуются нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны без использования разложения поля по модам резонатора и предположения о малости объема, занимаемого активным веществом. Рассматриваются задачи о резонансном лазере и о стоковом преобразовании в резонаторе. Полученные результаты позволяют по заданным начальным условиям определить основные характеристики излучения.

Теоретическое изучение проблем, относящихся к работе ОКГ, даже в одномерных моделях связано с интегрированием нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку эта задача достаточно сложна, обычно ограничиваются либо рассмотрением стационарных во времени процессов (см., например, [1-5]), либо пользуются упрощенными физическими моделями. Наиболее часто предполагают, что объем, занимаемый рабочим веществом, много меньше длины волны, а поле в объеме резонатора может быть представлено суммой нескольких (обычно не более 2-3) мод (см. например, [9, 10])* . В первом случае остается открытым вопрос об установлении стационарного процесса. В частности, может оказаться, что некоторые из найденных стационарных решений неустойчивы и, следовательно, вообще не могут существовать. Что касается второго случая, то полученные таким способом результаты также часто трудно использовать для объяснения физических эффектов. (Заметим, что при работе ОКГ в режиме модулированной добротности происходит возбуждение до сотни продольных мод.)

В настоящей работе рассматриваются нестационарные процессы в ОКГ бегущей волны без разложения поля на моды и без предположения о малости объема, занимаемого рабочим веществом. Такой метод эквивалентен суммированию большого числа взаимодействующих мод, возбуждающихся в системе. В частности, автоматически учитывается самосинхронизация мод. Рассматриваются задачи о резонансном лазере в режиме модулированной добротности и о стоковом преобразовании в резонаторе.

1. РЕЗОНАНСНЫЙ ЛАЗЕР

Исходные уравнения для числа фотонов в единице объема m , фазы поля φ и разности населенностей рабочих уровней n имеют вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} + c \frac{\partial m}{\partial z} = Bmn; \quad (1a)$$

* В ряде работ (например, [6, 7]) исходные уравнения записываются для произвольно большого числа мод. Однако дальнейший анализ проводится в предположении, что возбуждаются лишь 2-3 моды. Исключение составляет [8], где проводится анализ работы лазера при большом числе возбуждающихся мод. Однако там рассматриваются характеристики излучения, усредненные за время L/c (L — длина резонатора, c — скорость света). Кроме того, не учитываются эффекты так называемой самосинхронизации мод.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} = BT_{21} \Delta \omega n; \quad (16)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n - n_0}{T} = -Bmn. \quad (17)$$

Здесь c — скорость света в среде; $B = 4T_{21} |p_{12} \cos \theta|^2 \pi \omega h^{-1} [1 + T_{21}^2 (\Delta \omega)^2]^{-1/2}$; p_{12} — матричный элемент рабочего перехода; θ — угол между векторами p_{12} и действующим полем E ; β — коэффициент, учитывающий различие в величине между действующим и макроскопическим полями; h — постоянная планка; T — время жизни с учетом некогерентной накачки; n_0 — равновесная разность населенностей; $\Delta \omega = \omega - \omega_{21}$; ω — средняя частота поля; ω_{21} — частота рабочего перехода. Уравнения (1) получены в предположении, что $T_{21} \frac{\partial}{\partial t} (mn) \ll mn^*$.

Система (1) должна решаться при следующих начальных условиях:

$$m(t = 0) = M(z); \quad (2a)$$

$$\varphi(t = 0) = \varphi_0(z); \quad (2b)$$

$$n(t = 0) = n^0(z). \quad (2v)$$

Кроме того, должны выполняться следующие граничные условия (условия цикличности) (см. рис. 1):

$$m(t, z) = m(t, z + L); \quad (3a)$$

$$\varphi(t, z) = \varphi(t, z + L). \quad (3b)$$

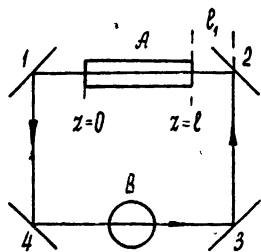


Рис. 1.

Будем рассматривать работу лазера в режиме импульсной добротности. Тогда длительность процесса много меньше, чем T ; кроме того, за это время некогерентная накачка не успевает существенно изменить населенность. В этом случае уравнение (1v) записывается в виде

$$n = -Bmn. \quad (4)$$

Система уравнений (1a) и (4) решалась в [11, 15], где рассматривалось распространение импульса излучения в активной среде. Пусть в сечении $z = +0$ задана функция $m = m_0(t)$ ($t > -L/c^{-1}$). Тогда, воспользовавшись результатами указанных выше работ, можно найти поле в сечении $z = l$ (см. рис. 1):

$$m(z, t) = \frac{m_0(t - z/c)}{1 - [1 - K^{-1}(z)] \exp\left(-B \int_{-L/c}^{t-z/c} m_0(t') dt'\right)}, \quad K(z) = \exp\left(\frac{B}{c} \int_0^z q dz\right), \quad (5)$$

$q(z)$ — разность населенностей при $t = -L/c$. Она может быть выражена через $M(z)$ и $n^0(z)$ (см. формулу (17b))**.

* В этом случае можно пренебречь производной недиагонального матричного элемента матрицы плотности и перейти к уравнениям баланса.

** В работах [11, 15] был рассмотрен лишь случай $q(z) = \text{const}$. Когда q зависит от z , в выражении для $K(z)$ нужно заменить qz на $\int_0^z q dz$, что и сделано выше.

Теперь можно найти поле в сечении $z=0$, условие (3а) принимает вид

$$m_0(t) = \frac{\alpha m_0(t - Lc^{-1})}{1 - [1 - K^{-1}(L)] \exp \left[-B \int_{-Lc^{-1}}^{t-Lc^{-1}} m_0(t') dt' \right]}, \quad (6)$$

α — произведение коэффициентов отражения от зеркал.

Определив из (5) $m_0(t)$, обеспечивающую выполнение условий (2), мы решили бы полностью задачу, так как поле в произвольной точке в произвольный момент времени определяется через $m_0(t)$ (формула (5)).

Рассмотрим вначале случай, когда поля достаточно малы ($B \int_{-L/c}^{t-z/c} m_0(t') dt' \ll 1$), так что не существенны эффекты насыщения.

Тогда из (6) видно, что

$$m_0(t) = \alpha K m_0(t - L/c). \quad (7)$$

Отсюда [13]

$$m_0(t) = K^{h+1} m_n \left[t - \frac{L}{c} (h+1) \right] \prod_{r=0}^h \alpha \left(t - \frac{L}{c} r \right). \quad (8a)$$

Здесь и в дальнейшем $K \equiv K(t)$, $h = E(tc/L)$ — целая часть tc/L ; $m_n(t)$ — значение $m_0(t)$ на интервале $-L/c < t < 0$; $m_n(t)$ может быть выражена через $M(z)$ (см. ниже формулу (17а)). Если α — периодическая функция с периодом L/c (в частности, $\alpha = \text{const}$), то

$$m_0(t) = (K\alpha)^{h+1} m_n [t - (h+1)Lc^{-1}]. \quad (8б)$$

Уравнения (8а) и (8б) описывают начало процесса при включении дробности.

Перейдем к решению уравнения (6) для случая, когда существенно насыщение разности населенностей рабочих уровней.

Введем

$$x(t) = \exp \left(B \int_{-L/c}^t m_0(t') dt' \right), \quad (9a)$$

т. е.

$$m_0(t) = \frac{1}{B} \frac{d}{dt} \ln x(t). \quad (9б)$$

Подставляя (9а) в (6), получим

$$\frac{d}{dt} \ln x(t) = \alpha \frac{d}{dt} \ln [x(t - L/c) - u], \quad (10)$$

здесь $u = 1 - 1/K$. Интегрируя (10) по t , имеем

$$Ax^{1/\alpha}(t) = x(t - L/c) - u, \quad (11)$$

A — произвольная константа.

Разностное уравнение (11) связывает значение x в настоящий момент времени со значением x период назад. Для однозначного определения решений уравнения (11) необходимо задать x на любом интервале, равном периоду L/c . Пусть при $-L/c < t < 0$ $m_0 = m_n(t)$, следовательно,

$$x = x_n(t) = \exp\left(B \int_{-L/c}^t m_n(t') dt'\right). \quad (12)$$

Из (12) видно, что $x_n(t)$ — непрерывная функция.

Любое решение уравнения (10) удовлетворяет (11). Обратное, вообще говоря, не справедливо. Только непрерывные во времени решения уравнения (11) удовлетворяют (10), а, следовательно, позволяют с помощью (96) определить $m_0(t)$. Так как $x_n(t)$ — непрерывная функция, то непрерывность решения $x(t)$ может нарушаться лишь при переходе через точки $t = Lk/c$, где k — целое число. Выберем A таким образом, чтобы x было непрерывно в точке $t=0$. Это имеет место, если

$$A = K^{-1} x_n^{-1/\alpha}(0). \quad (13)$$

Можно показать, что тогда $x(t)$ непрерывна при всех t .

Обратимая теперь к решению уравнения (11). Пусть вначале $\alpha = 1$ (идеальный резонатор). Тогда (11) — линейное разностное уравнение. Запишем его решение [13], удовлетворяющее условию (12):

$$x(t) = \frac{u}{1-A} + \left[X(t) - \frac{u}{1-A} \right] A^{-h-1}, \quad (14)$$

$h = E(tc/L)$ — целая часть tc/L , $X(t)$ — периодически продолженная функция $x_n(t)$: $X(t) = x_n(t - Lh/c)$. Теперь с помощью (96) можно найти

$$m_0(t) = \frac{m_n(t - Lh/c)}{1 + [X(0)/X(t)] \{ (K-1)/(KX(0)-1) \} \{ [KX(0)]^{-h-1} - 1 \}}. \quad (15a)$$

При условии $\gamma \equiv B \int_{-L/c}^{t-hL/c} m_n dt' \ll 1$ это выражение упрощается:

$$m_0(t) = \frac{(K-1)m_n(t - Lh/c)}{\gamma(t)(K-1) + \gamma(0) + (K-1)K^{-h-1}}. \quad (15b)$$

Таким образом, если известно $m_n(t)$ — значение m_0 на интервале $-L/c < t < 0$, то с помощью (15a) находится $m_0(t)$ в произвольный момент времени.

Подставив (15a) в (5), найдем поле в произвольной точке. Потребуем от него выполнения условия (2a):

$$M(z) = \frac{m_0(-z/c)}{1 - [1 - K^{-1}(z)] \exp\left(-B \int_{-L/c}^{-z/c} m_0 dt'\right)}. \quad (16a)$$

С помощью (15a) можно определить и $n(z)$. Потребуем от $n(z)$ выполнения условия (2в). Можно показать, что это условие имеет вид

$$n^0(z) = \frac{q}{1 + K(z) \left[\exp\left(B \int_{-L/c}^{-z/c} m_0 dt'\right) - 1 \right]}. \quad (16b)$$

Решая систему уравнений (16a) и (16b), найдем

$$m_n(t) = \frac{M(-tc) \exp \left[-\frac{B}{c} \int_0^{-tc} (M + n^0) dz \right]}{1 - \frac{B}{c} \int_0^{-tc} dz' M(z') \exp \left[-\frac{B}{c} \int_0^{z'} (M + n^0) dz'' \right]}; \quad (17a)$$

$$K(z) = \left[1 - \frac{B}{c} \int_0^z n^0(z') \exp \left(-\frac{B}{c} \int_0^{z'} (M + n^0) dz'' \right) dz' \right]^{-1}. \quad (17b)$$

Если M достаточно мало, то выражения (17a) и (17b) имеют вид

$$m_n(t) = M(-ct)K^{-1}(-ct),$$

$$K(z) = \exp \frac{B}{c} \int_0^z n^0(z') dz'.$$

Легко видеть, что при $0 < t < L/c$ (15a) переходит в формулу (11) работы [1], описывающей распространение импульсов в незамкнутой системе.

При достаточно больших t решение стремится к периодическому

$$m_0(t) \rightarrow \frac{m_n(t - hL/c)}{1 - [X(0)/X(t)][(K - 1)/(KX(0) - 1)]}. \quad (18)$$

Время перехода к периодическому решению оценим для случая, когда $\gamma \ll 1$:

$$t_{\text{уст}} \simeq \frac{L}{c} \frac{1 + \lg(K - 1) - \lg B \int_{-L/c}^0 m_n dt'}{\lg K}. \quad (19)$$

Так как исследование уравнения (11) при произвольных α достаточно сложно, мы рассмотрим случай, когда α мало отличается от 1 ($\alpha^{-1} - 1 \ll 1$).

Введем новую переменную $\Phi(t)$:

$$x(t) = \frac{u}{1 - A} + e^{\Phi(t)}. \quad (20)$$

Подставим (20) в (11) и после элементарных преобразований получим

$$\Phi \left(t - \frac{L}{c} \right) = \ln A + \ln \left[\left(\frac{u}{1 - A} + e^{\Phi(t)} \right)^{1/\alpha} - \frac{u}{1 - A} \right]. \quad (21)$$

Разложим второе слагаемое в правой части в ряд по $(\alpha^{-1} - 1)$ и ограничимся двумя членами. Оценка показывает, что при $(\alpha^{-1} - 1) \ll 1$ вклад остальных членов ряда пренебрежим.

В результате (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(t - Lc^{-1}) - \Phi(t) &= \ln A + \\ &+ \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{[u/(1 - A) + \exp \Phi(t)] \ln [u/(1 - A) + \exp \Phi(t)]}{\exp \Phi(t)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $\ln A > 1$. Тогда второе слагаемое в правой части существенно

лишь при $e^\Phi \gg u/(1-A) - 1$, т. е. при $\Phi \gg 2$. Но в этом случае (22) упрощается:

$$\Phi(t - Lc^{-1}) - \alpha^{-1}\Phi(t) = \ln A. \quad (23a)$$

В области $\Phi \leq 2$ (22) может быть записано в виде

$$\Phi(t - Lc^{-1}) - \Phi(t) = \ln A. \quad (23b)$$

Решение уравнения (23b), удовлетворяющее начальным условиям, запишется так:

$$\Phi(t) = \ln[X(t) - v] - h \ln A, \quad (24)$$

где

$$h = E(tLc^{-1}), \quad v = \frac{K - 1}{KX^{1/\alpha}(0) - 1} X^{1/\alpha}(0).$$

Запишем решение уравнения (23a):

$$\Phi(t) = \alpha^h \varphi(t) - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln A, \quad (25)$$

$\varphi(t)$ — произвольная периодическая функция с периодом Lc^{-1} . Мы определим ее из условия, что при $\Phi \approx 2$ (24) и (25) должны совпадать. Тогда вместо (25) получим

$$\Phi(t) = \left(2 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln A\right) \alpha^h \left[\frac{X - R}{e^2}\right]^{(1-\alpha)/\alpha \ln A} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln A. \quad (26)$$

Здесь e — основание натуральных логарифмов. Теперь можно определить $m_0(t)$:

$$m_0(t) = \frac{m_n(t - Lc^{-1}h) \alpha^h [(X - v)/e^2]^{-[(1-\alpha)/\ln(K^\alpha X(0))]} }{1 + (v/X) \left\{ [(X - v)/e^2] \left[KX^{1/\alpha}(0) e^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \right]^\eta - 1 \right\}}, \quad (27)$$

где

$$\eta \equiv \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left[\alpha^h \left(\frac{X - v}{e^2} \right)^{-[(1+\alpha)/\ln(K^\alpha X(0))]} - 1 \right].$$

Это решение справедливо, если $h \geq (\ln(X - v) - 2)/\ln A$ (при этом $\Phi \geq 2$). Если же это неравенство не выполняется, то решение описывается формулой (15a).

Когда $1 - \alpha$ достаточно мало, так что величина $(X - v)^{(1-\alpha)/\ln(K^\alpha X(0))} - 1 \ll 1$, выражение (27) существенно упрощается: $m_0(t)$ описывается формулой (15a), правая часть которой умножена на α^h .

Поле, описываемое (27), вообще говоря, носит импульсный характер. Форма импульсов определяется начальным распределением. Амплитуда этих импульсов вначале нарастает, достигает максимума, а затем стремится к 0. При этом одновременно происходит деформация формы импульсов. Разные части импульсов достигают максимума в разные моменты времени. Из (27) можно определить, что максимального значения m_0 , равного

$$m_{\max} = \frac{m_n(t - hLc^{-1})}{1 - [(X^{1/\alpha}(0)/X)][(K - 1)/(KX^{1/\alpha}(0) - 1)]} \times \\ \times \left[1 + \frac{1 - \alpha}{\ln(K^\alpha X(0))} \ln \frac{1 - \alpha}{\ln(K^\alpha X(0))} \right], \quad (28a)$$

поле достигает в момент времени

$$t_{\max} = -\frac{L}{c} \frac{1}{\ln(K^\alpha X(0))} \left[\ln \frac{(1-\alpha)(X-\nu)}{e^2 \ln(K^\alpha X(0))} \right]. \quad (29a)$$

Если $X \ll 1$, то (28a) и (29a) можно упростить:

$$m_{\max} = \frac{(K-1)m_n(t-hLc^{-1})}{\gamma(t)(K-1) + \gamma(0)} \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha \ln K} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha \ln K} \right]; \quad (28б)$$

$$t_{\max} = -\frac{L}{c} \frac{1}{\alpha \ln K} \left\{ \ln \frac{(1-\alpha)[\gamma(t)(K-1) + \gamma(0)]}{\alpha(K-1) \ln K} \right\}. \quad (29б)$$

На рис. 2 приведена качественная картина нестационарного процесса, отвечающего начальному распределению

$$M(z) = \mu \exp(Bn_0 z c^{-1}) \quad (0 < z < l),$$

$$M(z) = \mu \exp(Bn_0 l c^{-1}) \quad (l < z < l_1),$$

$$M(z) = 0 \quad (l_1 < z < L).$$

Приведем численные оценки. Пусть $\mu \simeq 1$, $B = 10^{-10} \text{ сек}^{-1}$, $K \simeq 10$, $L = 30 \text{ см}$. Оценим максимальное значение амплитуды импульса и момент времени, когда этот максимум достигается. Из (28a) и (29a) получим $m_{\max} = 10^{20}$, что соответствует напряженности поля порядка 10^4 CGSE . При этом $t_{\max} \simeq 2 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$.

Обратимся теперь к уравнению для фаз. Переходя в (1б) к переменным $\rho = z$ и $\xi = t - z/c$, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = B T_{21} \Delta \omega n.$$

Из (1a)

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \ln m. \quad (30)$$

Теперь можно записать, аналогично [3],

$$\varphi = T_{21} \Delta \omega \ln m + F(t - z c^{-1}), \quad (31)$$

F — произвольная начальная функция.

При $z = L$

$$\varphi = T_{21} \Delta \omega \ln m(t, L) + F(t - L c^{-1}) + \beta,$$

где β — сумма фаз коэффициентов отражения от зеркал. Из условия (3б) получаем

$$F(t - L c^{-1}) - F(t) = -\beta + T_{21} \Delta \omega \ln \alpha. \quad (32)$$

Это разностное уравнение имеет решение

$$F(t) = f(t) + \frac{c t}{L} (T_{21} \Delta \omega \ln \alpha - \beta), \quad (33)$$

$f(t)$ — произвольная периодическая функция. Подставляя (33) в (31) и удовлетворяя начальным условиям (2), находим

$$\varphi(t, z) = \varphi_0(\rho_1) + T_{21} \Delta \omega \ln \frac{m(t, z)}{M(\rho_1)} - (T_{21} \Delta \omega \ln \alpha - \beta)(h_1 + 1), \quad (34)$$

где

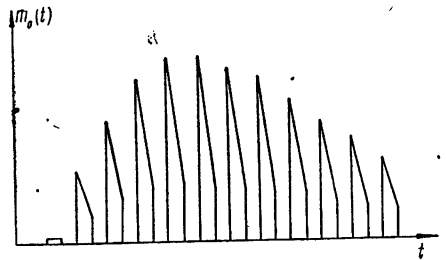


Рис. 2.

$$\rho_1 = z - ct - L(h + 1), \quad h_1 = E \left(\frac{ct - z}{L} \right).$$

В заключении этого раздела оценим, как изменяется ширина спектра излучения в процессе генерации. Воспользовавшись (15б) и полагая там $m_n = \text{const}$, можно найти, что при достаточно больших временах ширина спектра излучения может увеличиться в $(K-1)$ раз. Это расширение спектра обусловлено тем, что передний фронт импульса усиливается больше, чем задний. На языке разложения по модам это явление должно быть истолковано как эффект самосинхронизации мод. Заметим, что при других m_n и степень расширения спектра другая; в частности, при $m_n \sim K^t$ расширения спектра вообще не происходит.

2. ПРОЦЕССЫ СТОКСОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ

Исходная система уравнений, описывающая распространение сигналов произвольной формы, имеет вид

$$\frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial m_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial m_{1,2}}{\partial z} = \pm b_{1,2} m_1 m_2; \quad (35a)$$

$$\frac{1}{c_{1,2}} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial z} = \mp T_{2,1} \Delta \omega b_{1,2} m_{2,1}. \quad (35б)$$

Здесь $m_{1,2}$ — квадраты модулей амплитуд полей на частотах $\omega_{1,2}$ ($\omega_2 - \omega_1 = \omega_{2,1} + \Delta\omega$, $\omega_{2,1}$ — разность рабочих уровней); $T_{2,1}$ — время поперечной релаксации рабочих уровней;

$$b_{1,2} = \kappa \left| \sum_k p_{1k} p_{k2} [(\omega_{k2} - \omega_2)^{-1} (\cos \alpha_{1k}^{(1)}) (\cos \alpha_{2k}^{(2)}) + (\omega_{k2} - \omega_1)^{-1} (\cos \alpha_{2k}^{(1)}) (\cos \alpha_{1k}^{(2)})] \right|^2;$$

p_{rl} — матричный элемент перехода между r -ым и l -ым уровнями; N — концентрация рабочих частиц; $\alpha_{2k}^{(l)}$ — угол между p_{2k} и E_l ; $\kappa = 4\pi\omega_{1,2} N (\epsilon \hbar^3)^{-1} T_{2,1} [1 + T_{2,1}^2 (\Delta\omega)^2]^{-1}$.

Уравнения (35) будем решать при следующих начальных и граничных условиях:

при $t=0$

$$m_2 = 0, \quad (36a)$$

$$m_1 = M_1(z), \quad (36б)$$

при $z=0$

$$m_2 = m_{20}(t) \quad (t \geq 0), \quad \varphi_2 = \varphi_{20}(t), \quad (36в)$$

$\varphi_{20}(t)$, $M_1(z)$, $m_{20}(t)$ — заданные функции.

Кроме того, должны выполняться условия периодичности

$$m_2(t, z) = m_2(t, z + L),$$

$$\varphi_2(t, z) = \varphi_2(t, z + L).$$

Предполагается, что зеркала (см. рис. 1) прозрачны на частоте ω_2 .

Пусть α — произведение коэффициентов отражения зеркал на частоте ω_1 ; β — сумма фаз коэффициентов отражения зеркал на этой частоте.

Решения системы уравнений (35a) для безграничной среды найдены в [12]. Мы рассмотрим здесь лишь случай, когда $c_1 = c_2 = c$. Тогда решение системы (35a) имеет вид

$$m_1 = m_{10}(\zeta) \frac{m_{10}(\zeta) + b_1 b_2^{-1} m_{20}(\zeta)}{b_1 b_2^{-1} m_{20}(\zeta) \exp\{-[m_{10}(\zeta) b_2 + m_{20}(\zeta) b_1] z c^{-1}\} + m_{10}(\zeta)}; \quad (37)$$

$$m_2 = m_{20}(\zeta) \frac{m_{10}(\zeta) + b_1 b_2^{-1} m_{20}(\zeta)}{b_1 b_2^{-1} m_{20}(\zeta) + m_{10}(\zeta) \exp\{+[m_{10}(\zeta) b_2 + m_{20}(\zeta) b_1] z c^{-1}\}}. \quad (38)$$

Здесь $m_{1,20} \equiv m_{1,2}(t, 0)$ — значения $m_{1,2}$ при $z=0$, $\zeta = t - zc^{-1}$.

Аналогично тому, как это было сделано выше для резонансного лазера, получим уравнение, определяющее m_{10} :

$$m_{10}(t + Lc^{-1}) = a m_{10}(t) \times \quad (39)$$

$$\times \frac{m_{10}(t) + b_1 b_2^{-1} m_{20}(t)}{b_1 b_2^{-1} m_{20}(t) \exp\{-[b_2 m_{10}(t) + b_1 m_{20}(t)] l c^{-1}\} + m_{10}(t)},$$

m_{20} — заданная функция. Определив из этого уравнения m_{10} , мы смогли бы затем с помощью (37) найти поле в любой точке резонатора.

Рассмотрим сначала случай, когда*

$$m_{10} \ll b_1 b_2^{-1} m_{20}. \quad (40)$$

Тогда (39) принимает вид

$$m_{10}(t + Lc^{-1}) = a m_{10}(t) \frac{b_1 b_2^{-1} m_{20}(t)}{b_1 b_2^{-1} m_{20}(t) \exp\{-[b_2 m_{20}(t) l c^{-1}\} + m_{10}(t)}. \quad (41)$$

После введения новой переменной $\eta = m_{10}^{-1}$ (41) принимает вид

$$\eta = R^{-1} \eta(t - Lc^{-1}) + D^{-1}, \quad (42)$$

здесь $R = a \exp[b_2 l c^{-1} m_{20}(t - l/c)]$ имеет смысл коэффициента усиления системы в линейном режиме, а $D = a b_1 b_2^{-1} m_{20}(t - Lc^{-1})$. Решение линейного разностного уравнения (42) может быть легко найдено, а затем вычислено и $m_{10}(t)$:

$$m_{10}(t) = \frac{m_n[t - (h+1)Lc^{-1}] \prod_{r=0}^h R[t - Lc^{-1}(h-r)]}{1 + m_n[t - (h+1)Lc^{-1}] \sum_{r=0}^h D^{-1}[t - Lc^{-1}(h-r)] \prod_{s=0}^r R[t - Lc^{-1}(h-s)]}. \quad (43a)$$

Если m_n — периодическая функция с периодом Lc^{-1} , (43a) упрощается и принимает вид

$$m_{10}(t) = \frac{\hat{R}^{h+1} D(R-1) m_n[t - (h+1)Lc^{-1}]}{m_n[t - (h+1)Lc^{-1}] R^{h+2} + \{D(R-1) - R m_n[t - (h+1)Lc^{-1}]\}}. \quad (43b)$$

Здесь m_n — значение m_{10} на интервале времени $-Lc^{-1} < t < 0$. Легко показать, что $m_n(t) = M(t - zc^{-1})$.

Если $R > 1$, то с течением времени m_{10} стремится к величине (см. (43a))

$$m_{20} b_1 b_2^{-1} \exp\{-b_1 m_{20} l c^{-1}\} \gg m_{10}.$$

* Выполнение этого условия еще не означает, что система находится в линейном режиме. Как видно из (39), система находится в линейном режиме при выполнении более жесткого условия

$$\left\{ \prod_{r=0}^h R[t - Lc^{-1}(h-r)] \right\} \left\{ \sum_{r=0}^h D^{-1}[t - Lc^{-1}(h-r)] \prod_{s=0}^r R[t - Lc^{-1}(h-s)] \right\} \quad (44a)$$

или (см. (436))

$$D \left(1 - \frac{1}{R} \right) = \alpha b_1 b_2^{-1} [1 - \alpha^{-1} \exp(-b_2 Lc^{-1} m_{20})] m_{20}. \quad (446)$$

Когда решения (43a) или (436) приблизятся к своим предельным значениям (44a) и (446), становится существенным учет членов, отброшенных при переходе от (39) к (41). Дело в том, что, хотя (при условии (40)) эти члены и дают малую поправку к правой части (41), при приближении m_{10} к (44a), (446) именно эти поправки ответственны за дальнейший рост m_{10} .

Уравнение (39) может быть легко решено и в другом предельном случае:

$$m_{10} \gg b_1 b_2^{-1} m_{20} \exp\{-(b_2 m_{20} + b_1 m_{10}) Lc^{-1}\}. \quad (45)$$

При таких значениях m_{10} на длине l происходит полная перекачка энергии из поля m_2 в поле m_1 .

Теперь (45) принимает вид

$$m_{10}(t + Lc^{-1}) = \alpha [m_{10}(t) + b_1 b_2^{-1} m_{20}(t)]. \quad (46)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$m_{10}(t) = \alpha^{1+k} \left\{ m_n [t - (k+1)Lc^{-1}] + \alpha b_1 b_2^{-1} \sum_{r=0}^k \alpha^r m_{20} [t - Lc^{-1}(r+1)] \right\}, \quad (47a)$$

m_n — значения m_{10} на интервале $t_0 - Lc^{-1} < t < t_0$, $k = E \left[\frac{t - t_0}{Lc^{-1}} \right]$, а t_0 — произвольный момент времени, к которому выполняется условие (45).

Если $m_{20}(t) = m_{20} \left[t - \frac{L}{c} E(tcL^{-1}) \right]$, то вместо (47a) имеем

$$m_{10} = \alpha^{k+1} \left\{ m_n [t - Lc^{-1}(k+1)] - \frac{b_1 b_2^{-1} m_{20}}{1 - \alpha} \right\} + b_1 b_2^{-1} \frac{m_{20}}{1 - \alpha}. \quad (476)$$

Условия (45) и (40) могут быть непротиворечивыми. Легко видеть, что, если $R \gg 1$, то всегда есть область значений m_{10} , в которой выполняются (45) и (40) одновременно. В этом случае можно считать решения (43a) (или (436)) и (47a) (или (476)). Например, когда $m_{20}(t)$ — периодическая, с периодом L/c , функция, можно получить

$$m_{10}(t) = \frac{b_1}{b_2} m_{20}(t) \left\{ \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{[1/(1 - \alpha) - \alpha]^{\alpha^{k+1}}}{[-\ln 0,1(R - 10) D m_n] \frac{\ln \alpha}{\ln R}} \right\}.$$

Интегрирование уравнения для φ_1 , приводит к формуле (34), в которой необходимо t заменить на m_1 .

Уравнение для фазы φ_2 легко интегрируется:

$$\varphi_2 = \varphi_{20}(\zeta) + c \int_0^t m_1(\rho, \zeta) d\rho, \quad (48)$$

$\rho = t$, $\zeta = t - zc^{-1}$, а $m_1(t, z)$ определяется (37) и (43а) или (47а).

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Выше предполагалось, что ширина спектра излучения мала по сравнению с шириной линии вещества. Если начальные поля определяются шумами, то в самом начале процесса это предположение не оправдывается. Но так как усиление в центре линии больше, чем на ее краях, то к моменту, когда начнут сказываться нелинейные эффекты, основная энергия будет сосредоточена вблизи центра линии вещества, и указанное предположение станет справедливым. Это распределение поля и можно брать в качестве начального. Как уже указывалось, спектр излучения может расширяться и в конце процесса генерации, если коэффициент усиления системы достаточно велик.

2. Хотя выше предполагалось, что в системе имеется невзаимный элемент, в ряде случаев полученные результаты могут быть использованы и для описания систем со встречными волнами. Это, например, имеет место, если длительность импульсов излучения меньше, чем $l_{1,2}/c$ (см. рис. 3).

При стоксовом процессе, кроме того, эффективность преобразования в волну, распространяющуюся навстречу полю накачки, может быть мала [14]. В этом случае решения (43а), (47а) и (48) описывают, по-видимому, процессы при стоксовом преобразовании и в резонаторе со встречными волнами.

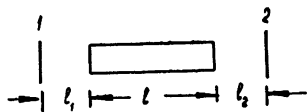


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
2. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 6, 1095 (1964).
3. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 963 (1964).
4. Ю. В. Григорьев, Г. Л. Гуревич, Труды Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966.
5. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, ЖЭТФ, 51, 1499 (1966).
6. W. Lamb, Phys. Rev., 134 1429 (1964).
7. Л. М. Магдич, ЖЭТФ, 51, 18 (1966).
8. В. И. Беспалов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 513 (1966).
9. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).
10. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965).
11. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 3, 491 (1964).
12. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Радиотехника и электроника, 11, 2227, (1966).
13. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1959.
14. N. Bloembergen, J. R. Shen, Phys. Rev. Lett., 12, 18 (1964).
15. L. Frantz, Y. Nodvik, J. Appl. Phys., 34, 2346 (1963).

Поступила в редакцию
25 января 1967 г.

NONSTATIONARY PROCESSES IN TRAVELLING-WAVE LASER

G. L. Gurevich

The nonstationary processes in a travelling-wave laser are investigated without the procedure of the field expansion over the resonator modes and without the assumption of the small sizes of the volume, occupied by an active material. There are considered the problems on resonant laser and Stokes conversion in the resonator. The results obtained permit one to determine the basic characteristics of radiation according to the given initial conditions.

УДК 621.378.325 : 621.316.726.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ И ЧАСТОТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА

Д. П. Степанов

Описывается система стабилизации частоты лазера с длиной волны излучения $0,63 \text{ мк}$, построенная по принципу частотной автоподстройки (ЧАП). Приводятся результаты измерения спектральной плотности флуктуаций частоты при наличии стабилизации и без нее.

Стабилизация частоты оптических квантовых генераторов представляет в настоящее время интерес как с точки зрения технических применений, так и чисто физических исследований. Этой проблеме посвящено большое число работ, достаточно полный обзор которых содержится в [1, 2]. Однако описанные методы, как правило, очень сложны и обладают различными существенными недостатками, как например, необходимость работы в режиме одночастотной генерации (что приводит к малой мощности лазера), невозможность перестройки частоты, наличие в спектре выходного излучения вспомогательной частоты. Отметим, что в указанных работах рассматривался лишь вопрос о стабильности среднего значения частоты (за тот или иной промежуток времени), а уровень частотных флуктуаций излучения не исследовался.

Нашей целью было создание системы автоматической стабилизации частоты лазера, достаточно простой и, вместе с тем, свободной от указанных недостатков. В качестве объекта стабилизации был взят гелий-неоновый лазер с длиной волны $0,63 \text{ мк}$ и длиной резонатора 50 см . Построенная система представляет собой оптический вариант широко применяемой в диапазоне радиочастот системы автоматической подстройки частоты (ЧАП), которая основана на сравнении частоты исходного генератора с частотой настройки пассивного резонатора, обладающего высокой добротностью и достаточно стабильного. Такой метод сравнительно несложен, универсален и позволяет легко осуществлять перестройку рабочей частоты генератора (путем изменения настройки опорного резонатора).

В качестве опорного эталона частоты, являющегося наиболее ответственным элементом системы, использовался двухзеркальный резонатор типа интерферометра Фабри—Перо. При конструировании его возникает ряд трудностей, связанных с тем, что для возбуждения в резонаторе колебаний простейшего типа необходимо, чтобы луч генератора проходил по его оптической оси (в случае внеосевого возбуждения возникают поперечные моды высших порядков и работа системы ухудшается). Следовательно, нужно предусмотреть возможность независимой юстировки зеркал резонатора; с другой стороны, необходимо обеспечить высокую механическую жесткость конструкции, чтобы свести к минимуму влияние неизбежных механических и акустических помех.

Была выбрана система, состоящая из плоского и сферического зеркал (радиус кривизны 400 мм , расстояние между зеркалами фикси-

ровано инваровой трубой), которая позволяет удовлетворить указанным выше требованиям и, вместе с тем, отказаться от независимой юстировки зеркал (не представляя слишком высоких требований к их конструктивной установке). Это позволило построить жесткий и герметичный резонатор, обладающий малыми размерами (длина 10 см, диаметр 3 см). Размеры резонатора позволяют легко разместить его в термостате, однако с целью упрощения системы нами было применено пассивное термостатирование—резонатор помещен в оболочку из пористого пластика (что обеспечивает и акустическую изоляцию)*. Полоса пропускания резонатора около 10 Мгц ($Q \approx 5 \cdot 10^7$).

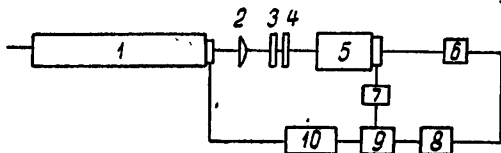
Для получения дискриминаторной характеристики в системе ЧАП необходима модуляция частоты излучения лазера или частоты настройки опорного резонатора с некоторой вспомогательной частотой (в описываемой системе она составляет 70 кГц). Нами использован последний способ, так как он исключает появление вспомогательной частоты в спектре излучения лазера. Оптимальное значение девиации частоты настройки резонатора равно, примерно, половине его полосы пропускания (чему соответствует изменение длины резонатора на 9 \AA). С целью получения такой модуляции (а также для управления частотой настройки) одно из зеркал резонатора укреплено на цилиндре из пьезокерамики. Аналогичный цилиндр (менее жесткий, но позволяющий изменять длину в более широких пределах) применен в качестве управляющего элемента в лазере.

Для лучшей работы системы желательно иметь возможно больший сигнал на входе фотоприемника (в качестве которого использовался фотодиод). Поэтому подбор зеркал для опорного резонатора должен быть произведен весьма тщательно с точки зрения оптимального коэффициента отражения и минимальных потерь для получения высокой добротности резонатора и максимальной прозрачности его на резонансной частоте. Для оптического согласования лазера с опорным резонатором применялась одиночная линза; ее расчет приведен в [5]. Обратная реакция резонатора на стабилизуемый лазер приводит к ряду нежелательных эффектов, в частности, к появлению модуляции излучения лазера с вспомогательной частотой. Во избежание этого была применена развязка, состоящая из четвертьволновой кварцевой пластинки в сочетании с поляридом. Такая система, при точной настройке, обеспечивает развязку более 30 дБ, что для описываемой системы является достаточным.

На рис. 1 приведена общая блок-схема установки, содержащая описанные выше оптические элементы, а также электрическую часть

Рис. 1. Блок-схема установки:

1—ОКГ, 2—согласующая линза, 3—поляриод, 4—пластинка $\lambda/4$, 5—опорный резонатор, 6—фотодиод, 7—генератор вспомогательной частоты, 8—усилитель, 9—фазовый детектор, 10—усилитель постоянного тока и катодный повторитель.



установки. Излучение лазера, пройдя резонатор, поступает на фотодиод, а выход последнего подается на усилитель. Для уменьшения набега фазы в усилителе он выполнен широкополосным (полоса примерно 20 кГц) с общим усилением порядка 20000. Далее следует фазовый детектор; его выход поступает на RC-цепочку, а затем на УПТ и КП

* В недавно вышедшей работе [3] детально описывается конструкция резонатора с пассивным термостатированием.

(катодный повторитель), выходное напряжение которого управляет частотой стабилизируемого лазера.

Диапазон рабочих частот тракта управления задается, в основном, постоянной времени RC -цепи, которую желательно иметь поэтому возможно меньшей. Однако при слишком малых значениях постоянной времени система становится неустойчивой и возбуждается на так называемой критической частоте $F_{кр}^*$. В нашем случае $F_{кр} \approx 6$ кГц. Исследование вопроса показало, что причиной сравнительно низкого значения критической частоты системы является наличие многочисленных механических резонансов в конструктивных элементах лазера. Электрическая компенсация этих резонансов потребовала бы весьма сложных и не поддающихся расчету корректирующих цепей.

Для определения эффективности работы системы применялась частотная модуляция лазера с частотами F , существенно меньшими $F_{кр}$. Для этой цели на пьезоцилиндр подавалось (через большое сопротивление) напряжение от звукового генератора. Напряжение на выходе фазового детектора, пропорциональное девиации частоты лазера, измерялось при двух значениях постоянной времени RC -цепи—рабочей ($\tau = 30$ мсек) и максимальной ($\tau_{max} = 4$ сек). При τ_{max} для всех частот модуляции имеет место $F \gg 1/\tau_{max}$, и система автоматики практически не работает; она действует лишь для медленных уходов частоты, удерживая значение последней в пределах полосы пропускания опорного резонатора.

Из этих измерений можно найти $G(F) = u_2(F)/u_1(F)$, где $u_2(F)$ и $u_1(F)$ —напряжения на выходе фазового детектора при постоянных времени τ_{max} и τ соответственно. Из анализа, проведенного в [4], следует, что приближенно

$$G(F) = \frac{G(0)}{\sqrt{1 + 4\pi^2\tau^2F^2}},$$

где $G(0)$ есть коэффициент стабилизации частоты (точнее говоря, ее среднего значения). Отсюда находим значение $G(0)$; оно оказалось равным 700—1000.

С точки зрения стабильности средней частоты выгодно иметь возможно большее значение $G(0)$, однако это привело к необходимости (для обеспечения устойчивой работы системы) выбрать рабочее значение τ сравнительно большим, в результате чего с ростом F величина $G(F)$ сильно падает.

Полоса захвата системы автоматики приблизительно равна полосе пропускания опорного резонатора и составляет примерно 10 МГц. Полоса удержания—450 МГц (эта величина лимитируется чувствительностью управляющего элемента и динамическим диапазоном УПТ и катодного повторителя).

Стабильность средней частоты оценивалась методом сравнения частот двух стабилизированных указанным способом генераторов. Вся оптическая часть установок размещалась на массивной стальной плите, амортизированной резиновыми прокладками. Излучения генераторов смешивались на фотодиоде, и разностная частота, наблюдаемая на экране анализатора спектра, фотографировалась с экспозицией в 1 сек и интервалами между последующими съемками 3 мин. Анализ полученных снимков показывает, что уход разностной частоты за время порядка 3 мин обычно не превышает 500 кГц (относительная нестабильность частоты $\Delta f/f = 10^{-9}$) и за время 10—20 мин—2—2,5 МГц ($\Delta f/f = 5 \cdot 10^{-9}$). Указанное справедливо при условии предварительного

* См. работу [4].

двухчасового прогрева установки. Полагая, что отмеченные уходы частоты лазеров определяются разностью температур опорных резонаторов (в основном, это так), получим, что разность их температур за время порядка 3 мин изменяется не более чем на $0,001^\circ$.

Отметим, что лучшие результаты (если иметь в виду долговременную стабильность) могут быть получены при выполнении опорного резонатора из плавленного кварца с применением активного термостабирования. В этом случае можно ожидать стабильности частоты порядка 10^{-10} .

Флуктуации частоты в системах автоматической стабилизации рассматривены в работе [4]. Нами были проведены измерения спектральной плотности флуктуаций частоты лазера как при работе системы ЧАП, так и без нее; в последнем случае система работала с большой постоянной времени τ_{\max} и, не оказывая практически влияния на флуктуации в исследуемом диапазоне частот, позволяла удерживать частоту генерации лазера в полосе прозрачности опорного резонатора.

Уровень спектральной плотности флуктуаций частоты $W(F)$ определялся по показаниям спектр-анализатора, включенного на выходе фазового детектора. Для калибровки использовался метод, аналогичный описанному выше: на пьезоцилиндр подавалось определенное напряжение от звукового генератора. Измерив напряжение этой частоты на выходе фазового детектора и зная крутизну управления частотой пьезоцилиндром, можно найти искомое значение $W(F)$.

Измерения $W(F)$ проводились в вечернее время при минимуме механических и акустических помех. Типичные результаты подобных измерений приведены на рис. 2, где крестиками отмечены данные при отсутствии работы автоматики, а точками — при ее работе (рабочее значение τ). В первом случае измерения проводились до $F = 4$ кгц, а во втором — до $F = 300$ гц; при больших значениях F уровень собственных шумов усилительной схемы не позволил надежно определить значения $W(F)$.

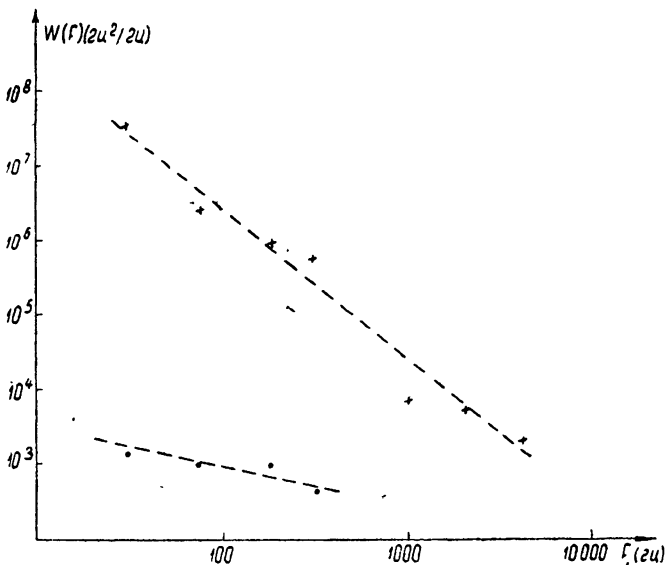


Рис. 2.

Экспериментальные значения $W(F)$ без стабилизации можно весьма приблизительно аппроксимировать соотношением $W(F) = (2,5 \cdot 10^{10})/F^2$. Если принять такую зависимость справедливой в пределах от 1 гц

и до 10 кГц, то для среднеквадратичной величины флуктуаций частоты за время порядка 1 сек получим значение $\left[\int_1^{10000} W(F) dF \right]^{1/2} = 1,6 \cdot 10^5$ гц*.

Этому соответствует изменение длины резонатора лазера на величину 1,5 Å.

При работе автоматики (рабочее значение τ) экспериментальные значения $W(F)$ можно весьма приближенно аппроксимировать соотношением $W(F) = 10^4/F^{0,5}$. Принимая такую зависимость для диапазона частот от 1 гц до 10 кГц, получим для величины $\left[\int_1^{10000} W(F) dF \right]^{1/2} = 1,5 \cdot 10^3$ гц, чему соответствует изменение длины резонатора на $\sim 0,015$ Å.

К достоинствам построенной системы следует отнести ее простоту, возможность работы в многочастотном режиме генерации и возможность перестройки частоты. Однако отсутствие воспроизводимости значений частоты делает невозможным применение подобной системы без дополнительных усложнений для создания эталона частоты.

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность И. Л. Берштейн за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Laurex, L'Onde Electrique, 46, 469 (1966).
2. A. D. White, IEEE J. Quant. Electr., 1, № 8, 349 (1965).
3. A. D. White, Rev. Scient. Instr., 37, № 7, 968 (1966).
4. И. Л. Берштейн, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 328 (1964).
5. Н. Kogelnik, BSTJ, 43, № 1, 334 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 апреля 1967 г.

FREQUENCY STABILIZATION AND FREQUENCY FLUCTUATIONS OF He-Ne LASER

D. P. Stepanov

A system of frequency stabilization of 0.63 μ laser radiation designed according to the principle of frequency auto-control is described. The measurement data of the spectral density of frequency fluctuations in the presence and in the absence of stabilization are given.

* При такой оценке не учитываются так называемые естественные флуктуации частоты, спектр которых простирается весьма далеко. Примененная аппаратура не позволяет их обнаружить. Вышеприведенная оценка относится практически лишь к так называемым техническим флуктуациям частоты, спектр которых тянется примерно до 10—20 кГц.

УДК 621.378.325

ОПТИЧЕСКИЙ КВАНТОВЫЙ ГЕНЕРАТОР БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ (ГБВ) С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин

Теоретически исследовано влияние дополнительной обратной связи на генерацию в генераторе бегущей волны как в твердотельной, так и в газовой активной среде. Находятся стационарные монохроматические режимы и исследуется их устойчивость. Рассматривается влияние дополнительной обратной связи на число генерирующих частот.

В последнее время появились экспериментальные работы [1, 2], в которых исследуется режим генерации в генераторе бегущей волны (ГБВ) с дополнительной обратной связью. Волны I и II, бегущие в противоположных направлениях, связаны благодаря отражению волны II на зеркале 4 (см. рис. 1) [1]. Разность фаз волн φ на зеркале 3 не зависит от мощности генерации и определяется частотой генерации. Энергия перекачивается из направления II в направление I. Благодаря этому интенсивности волн $I_1 = E_1^2$ и $I_2 = E_2^2$ различны. Особенно велико это различие при малых накачках. Ниже изложены основные результаты работы.

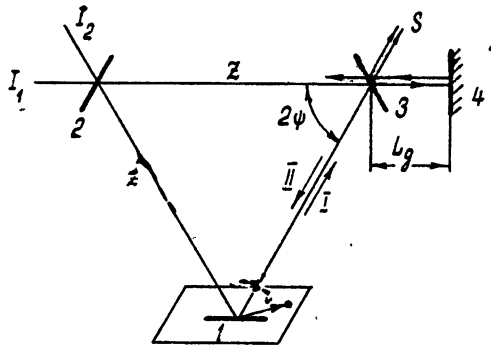


Рис. 1. Генератор бегущей волны с дополнительной обратной связью: r — радиус-вектор точки на зеркале, I_1, I_2 — интенсивности волн в направлениях I, II, S — мощность, выходящая из резонатора через зеркало 3.

В твердотельном лазере с дополнительной связью осуществляется режим однонаправленной генерации в направлении I. При малой дополнительной связи и достаточно большой накачке

$$\frac{1}{R_x(N_0/N_{\text{пор}} - 1)} \rightarrow 0 \quad \left(R_x = \frac{\sum_{i=1}^3 (1 - r_i)}{\sqrt{r_4} (1 - r_3)} \right)$$

(r_i — коэффициент отражения i -го зеркала, $N_0/N_{\text{пор}} - 1$ — превышение накачки над пороговой) существует также устойчивое двухволновое решение, описывающее генерацию в направлении II с примесью волны в направлении I.

В газовом лазере с дополнительной связью устанавливается двухволновой режим с большей интенсивностью в направлении I ($I_1 > I_2$), если частота генерации не очень близка к центру линии ω_0 (см. (26)):

$$|\omega - \omega_0| \geq \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{2, 3 \gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}}, \quad ku \text{ — ширина доплеровского контура,}$$

γ_a^{-1} , γ_b^{-1} — времена жизни на генерирующих уровнях, $\gamma_{ab} \geq \frac{1}{2} (\gamma_a + \gamma_b)$

— полуширина линии спонтанного излучения атома.

Отношение интенсивностей I_2/I_1 при малых накачках ($N_0/N_{\text{пор}} - 1$) $R \ll 1$ растет пропорционально I_1^2 (см. (23а), рис. 2):

$$\frac{I_2}{I_1} \approx R^2 \frac{I_1^2}{I_0^2},$$

где

$$I_0 = \frac{\delta\omega_p}{\beta} = \frac{\hbar^3 \gamma_{ab} \mu \varepsilon \sum_{i=1}^3 (1 - r_i)}{L (\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}) 2\pi^{3/2} N_0 d^4}, \quad R = R_x \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_{ab}^2 (\omega - \omega_0)^{-2}}},$$

d — дипольный момент перехода, L — длина резонатора ГБВ.

Коэффициент пропорциональности R является функцией положения частоты генерации ω в контуре усиления $\omega - \omega_0$ и зависит от релаксационной константы перехода γ_{ab} . Определение R для разных частот генерации даст возможность определить эту константу.

Сравним мощность S , выходящую с зеркала 3 при $r_4 = 1$,

$$S = \frac{c}{L} (1 - r_3) [I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi]$$

с мощностью $S_{\text{к.л.}}$, выходящей с зеркала 3 того же кольцевого лазера без дополнительного зеркала 4. При малых накачках $I_2 \ll I_1$

$$\frac{S}{S_{\text{к.л.}}} = 2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_{ab}} \right)^2 > 1.$$

При достаточно больших накачках, когда $R(N_0/N_{\text{пор}} - 1) \gg 1$ (это условие совместно с условием слабого поля, если дополнительная обратная связь мала, т. е., если $1 - r_3 \ll 1 - \frac{r_1 + r_2}{2}$), амплитуды волн I и II выравниваются: $I_1 \approx I_2$ (см. рис. 3),

$$\frac{S}{S_{\text{к.л.}}} \approx 2 \left(1 - \frac{|\omega - \omega_0|}{\sqrt{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \right) \left[1 + \frac{|\omega - \omega_0|}{R_x (N_0/N_{\text{пор}} - 1) \sqrt{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \right].$$

Вдали от центра линии $S < S_{\text{к.л.}}$, вблизи центра $S > S_{\text{к.л.}}$. При частотах ω_1, ω_2 , удовлетворяющих соотношению

$$|\omega_{1,2} - \omega| = \frac{\gamma_{ab}}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{3R_x (N_0/N_{\text{пор}} - 1)} \right),$$

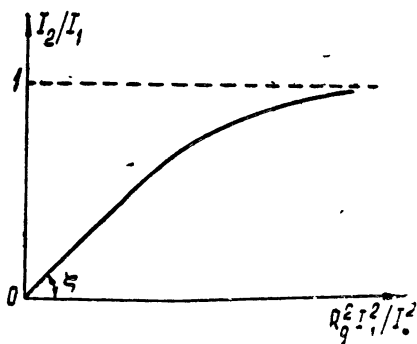


Рис. 2. Связь отношения интенсивностей волн I_2/I_1 с интенсивностью волны в направлении I при изменении накачки при постоянной обратной связи;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_{ab}^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

имеет место равенство $S = S_{к.л.}$. Отсюда можно, измеряя разность частот $\omega_1 - \omega_2$, оценить значение γ_{ab} : $\gamma_{ab} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\omega_1 - \omega_2|$.

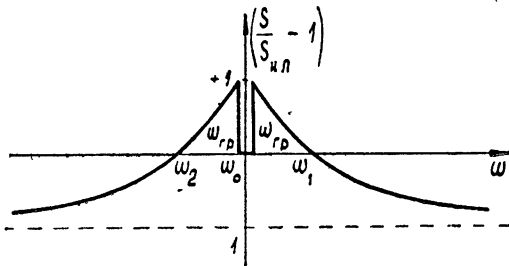


Рис. 3. Относительное изменение мощности, выходящей с третьего зеркала при введении малой дополнительной обратной связи;

$$|\omega_{гр} - \omega_0| = \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{2,3 \gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}} - \text{граница области устойчивости двухволнового режима.}$$

В газовом лазере дополнительная обратная связь изменяет конкуренцию волн, генерируемых на разных частотах, и может привести к уменьшению числа генерируемых частот (см. разд. 3).

Увеличение суммарной мощности генерации и увеличение доли мощности генерации в направлении I, а также уменьшение числа мод при введении дополнительной обратной связи в кольцевом лазере на He-Ne ($\lambda = 0,63 \mu$) было замечено в [1].

1. УРАВНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Для получения распределения поля в ОКГ необходимо решить уравнения Максвелла для области внутри резонатора с граничными условиями, определяющими неполное отражение на зеркалах, и условиями излучения на бесконечности. При такой постановке задача оказывается очень сложной даже в одномерном приближении и решена лишь в случае монохроматического поля для твердотельной активной среды в генераторе стоячей волны (ГСВ) [3, 4] и в ГБВ [5]. Однако даже в этих случаях не найдены условия устойчивости стационарной генерации.

Для упрощения задачи Лэмб [6] заменил исходную задачу задачей с граничными условиями полного отражения на зеркалах, а потери на отражение включил в добротность. Обоснование возможности такой замены дает теория Слэтера [7], согласно которой этот переход не вносит больших погрешностей, если коэффициент отражения зеркал r достаточно велик:

$$1 - r \ll 1. \quad (1)$$

При наличии дополнительной обратной связи в ГБВ уравнения нужно модифицировать так, чтобы они учитывали приход в резонатор волн, отраженных от дополнительного зеркала 4 (см. рис. 1).

Для этого разложим поля E , H внутри кольцевого резонатора, образованного зеркалами 1—3, в ряд по ортонормированным собственным функциям $E_{a,c}$, $H_{a,c}$ пустого резонатора с идеально отражающими зеркалами:

$$E = \sum_a E_{ac} U_a(t) + \text{к. с.} \quad (2)$$

Собственные функции E_{ac} , H_{ac} удовлетворяют уравнениям

$$-i|\mathbf{k}_a|E_{ac} = \text{rot } H_{ac}, \quad i|\mathbf{k}_a|H_{ac} = \text{rot } E_{ac} \quad (3)$$

и в кольцевом резонаторе представляют собой бегущие волны, распространяющиеся вдоль оси резонатора z^* :

$$E_{ac} = e_a \exp(ik_a z), \quad H_{ac} = \frac{[\mathbf{k}_a E_{ac}]}{|\mathbf{k}_a|}.$$

Здесь вектор e_a характеризует поляризацию волны. Волновые векторы \mathbf{k} волн одной поляризации удовлетворяют условию $(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)L = 2\pi(q_a - q_b)$, где q — целые числа. На зеркалах собственные функции удовлетворяют условию идеального отражения:

$$[nE_{ac}] = 0, \quad H_{ac} = \frac{2[\mathbf{k}_a e_a] \exp(i(\mathbf{k}_a \mathbf{r}))}{|\mathbf{k}_a|}, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — нормаль к зеркалу, \mathbf{r} — координата точки на зеркале (см. рис. 1).

На зеркале 3 поле E является суммой падающих и отраженных волн**:

$$E = \sum_a (e_a(0) U_a(0, t) + e_a(L) U_a(L, t)) \exp(i(\mathbf{k}_a \mathbf{r})) \quad (5)$$

$$([e_a(0) + e_a(L), \mathbf{n}] = 0).$$

Волны, распространяющиеся в направлении I ($a = 2s - 1$), после прохождения зеркала 3 выходят из системы (см. рис. 1). Волны, распространяющиеся в направлении II ($a = 2s$, $k_{2s} = -k_{2s-1}$), после отражения на зеркале 4 частично возвращаются в ГБВ. Вследствие этого амплитуды U_a на зеркале 3 удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$U_{2s}(L, t) = U_{2s}(0, t) \sqrt{r_3} \exp(i\varphi_{3r}), \quad (6)$$

$$U_{2s-1}(0, t) = U_{2s-1}(L, t) \sqrt{r_3} \exp(i\varphi_{3r}) + (1 - r_3) \sqrt{r_4} U_{2s}(0, t) \exp(i\varphi_{4L}).$$

Здесь r_k , φ_{kr} характеризуют коэффициент отражения и сдвиг фазы волны, отраженной k -ом зеркалом ($k=3, 4$) (по сравнению с фазой при полном отражении); $\varphi_{4L} = 2\varphi_{3r} + \varphi_{4r} + 2L_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}_{2s}|$ определяется фазой пропускания зеркала 3 φ_{3r} , фазой отражения зеркала 4 и набегом фазы на пути $L_{\mathbf{k}}$ от зеркала 3 до зеркала 4.

Из уравнений Максвелла, используя (3), (4), можно по методу Слэтера [7] получить уравнения для $U_a(t)$:

$$\left(\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} + k_a^2 \right) U_a + \frac{4\pi}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} P_a + \Pi_a = 0, \quad (7)$$

$$\Pi_a = -i|\mathbf{k}_a| \int_{S_3} ([nE] H_{ac}^*) \frac{d\sigma}{V},$$

* Полагаем, что размер зеркала a удовлетворяет условиям $\lambda \ll a \ll L \sin \psi$, так что можно пренебречь как перекрытием волн, распространяющихся в разных плечах, так и непостоянством поперечного распределения в каждом плече ГБВ.

** Для того, чтобы получить значение поля E на зеркале 3, разложением в ряд Фурье (3) пользоваться нельзя, так как этот ряд на зеркале к функции E не сходится (ряд Фурье (2) сходится к E только во внутренних точках промежутка $(0, L)$).

где $P_a \equiv \frac{1}{V} \int_0^L (E_{ac}^*, P) dV$, P — поляризация инверсно населенного перехода*, $V = \Delta S_3 \cos \psi$, L — длина резонатора, 2ψ — угол между соседними плечами резонатора (см. рис. 1).

Вычислим интеграл Π_a по поверхности зеркала 3, учет потерь через зеркала 1, 2 может быть произведен аналогично.

Подставив выражения для H_{ac} , E (4), (5), легко убедиться, что в приближении (1) в Π_a можно оставить только один a -ый член ряда:

$$\Pi_a = \frac{-2i(U_a(0) - U_a(L)) (k_a(0), n)}{L \cos \psi} \quad (8)$$

Подставляя (6), (8) в (7) и полагая, что частота генерации ω_a близка к резонаторной частоте $\Omega_a = k_a \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, представим уравнение (7) в виде

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_a^2 + \frac{\omega}{Q_a} \frac{d}{dt} \right) U_a - 2g_a \exp(i\varphi_a) \frac{d}{dt} U_{a+1} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d^2}{dt^2} P_a = 0, \quad (9)$$

где $\delta\omega_p = \frac{\omega}{Q_a} = \sum_{i=1}^3 (1 - r_i) \frac{c}{\sqrt{\epsilon} L} + \frac{\omega}{Q'}$ — ширина линии резонатора**,

определяемая потерями на зеркалах 1—3 резонатора и всеми прочими потерями,

$$g_a = \begin{cases} (1 - r_3) \sqrt{r_4} \frac{c}{\sqrt{\epsilon} L} \equiv g & (a = 2j - 1) \\ 0 & (a = 2j) \end{cases}.$$

В уравнениях (9) положили $U_a(t) = U_a(0, t) \simeq U_a(L, t)$, что справедливо в приближении

$$1 - r_3 \ll 1. \quad (10)$$

Уравнения (9) дают учет дополнительной обратной связи в приближении достаточно большого коэффициента отражения зеркала 3 (см. (10)). Если дополнительная обратная связь отсутствует: $g = 0$, то (9) переходят в уравнения Лэмба [9].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

1. Рассмотрим генерацию двух волн $n = 1, 2$ в противоположных направлениях. Частоты резонатора для волн, бегущих в противоположных направлениях в одном типе колебаний $k_1 = k_2$, будем полагать

* Расчет поляризации среды в поле бегущих волн проводился для случая твердотельной среды в [8, 9] и для случая газовой среды [8, 10]. При расчете были использованы следующие приближения: 1) слабого поля — расчет производился с точностью до третьего порядка по полю $N_0/N_{\text{пор}} - 1 \ll 1$ ($N_0/N_{\text{пор}}$ — разность заселенностей уровней по отношению к пороговой); 2) время релаксации поля в ГВВ $T_{\text{рел}} \simeq 2[\delta\omega_p(N_0/N_{\text{пор}} - 1)]^{-1}$ полагалось большим по сравнению с временем жизни атома: $T_{\text{рел}} \gg \tau^{-1}$.

** В (9) и далее для простоты вычислений положили $\varphi_{kr} = 0$, т. е. Q — вещественно.

равными: $\Omega_1 = \Omega_2^*$. В этом случае, подставив в уравнения поля (9) выражение для поляризации среды P_a [8], получим в приближении медленного поля [6] систему уравнений для амплитуд E_a и фаз φ_a ($U_a(t) = E_a(t) \exp[-i(\omega_a t + \varphi_a(t))]$):

$$\frac{dE_1}{dt} = E_1(\alpha - \beta E_1^2 - \theta E_2^2) + gE_2 \cos \varphi, \quad (11)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = E_2(\alpha - \theta E_1^2 - \beta E_2^2);$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\rho - \tau)(E_2^2 - E_1^2) - \frac{gE_2}{E_1} \sin \varphi, \quad (12)$$

где $\alpha = \frac{\delta\omega_p}{2} \left(\frac{N_0}{N_{\text{пор}}(f)} - 1 \right)$, $\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$.

Коэффициенты θ , β , $\rho - \tau$ зависят от типа активной среды:

а) в твердотельной среде [8, 9]

$$k \equiv \frac{\theta}{\beta} = 2, \quad s \equiv \frac{\tau - \rho}{\beta} = f; \quad (13)$$

б) в газовой среде [8] в случае широкого доплеровского контура $\eta \equiv \gamma_{ab}/ku \ll 1$ с точностью до членов порядка η^2

$$k = \frac{\theta}{\beta} = \left[1 - \frac{f^2}{1 + f^2} + \eta^2 x \right], \quad s \equiv \frac{\tau - \rho}{\beta} = \frac{f}{1 + f^2}, \quad (14)$$

$$\beta = \frac{4\pi^{3/2} N_0 \omega d^4}{\hbar^3 \gamma_{ab}^2 k u \epsilon x}, \quad \eta = \frac{\gamma_{ab}}{ku},$$

где $x = \frac{2}{\gamma_{ab}(\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1})}$, γ_a^{-1} , γ_b^{-1} — времена жизни генерирующих уровней, γ_{ab} — полуширина линии излучения отдельного атома, d — недиагональный матричный элемент дипольного момента атома, $f = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_{ab}}$, ω_0 — центральная частота атомного перехода, ω — частота генерации.

2. Найдем стационарные решения уравнений для амплитуд (11). Эти уравнения имеют два типа решений. Решения первого типа соответствуют генерации одной волны в направлении I (направление преимущественной генерации):

$$E_2 = 0, \quad E_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (15)$$

Решения второго типа соответствуют генерации в обоих направлениях $E_2 \neq 0$, $E_1 \neq 0$ и определяются стационарными амплитудными и фазовыми уравнениями (11), (12), комбинируя которые, получим

$$\varphi = \arctg \frac{\rho - \tau}{\theta - \beta} + n\pi \quad (n = 0, 1); \quad (16)$$

* В случае различия резонаторных частот $\Omega_1 \neq \Omega_2$ обратная связь приводит к взаимной синхронизации $\omega_1 = \omega_2$ [11, 12], если разность резонаторных частот мала. При большой разности резонаторных частот $|\Omega_1 - \Omega_2| > g$ захват отсутствует, вследствие осцилляций влияние отраженного сигнала усредняется и его можно не учитывать в уравнениях.

$$\frac{\beta}{\alpha} E_2^2 = 1 - kx, \quad x = E_1^2 \frac{\beta}{\alpha}; \quad (17)$$

$$l = \frac{x[x(1+k) - 1]^2}{1 - kx}, \quad (18)$$

где

$$l = \left(\frac{2}{R(N_0/N_{\text{пор}} - 1)} \right)^2, \quad R = R_x \sqrt{(1-k)^2 + s^2},$$

$$R_x = \frac{\sum_i (1 - r_i)}{(1 - r_3) \sqrt{r_4}} = \frac{\delta \omega_p}{g}.$$

Число решений кубического уравнения (18) для интенсивности определяется знаком дискриминанта D :

$$D = \frac{l}{27(1+k)^6} \left[k^3 l^2 + l \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{2} k + \frac{27}{4} \right) - 1 \right]. \quad (19)$$

При малых l ($l < l_0$) D отрицательно, при больших l ($l > l_0$) D положительно*. Здесь

$$l_0 = \frac{1}{8k^3} \left[k^2 - 18k - 27 + (9+k) \sqrt{(9+k)(1+k)} \right]. \quad (20)$$

Приведем значения $l_0(k)$ при некоторых k :

$$l_0(0) \simeq 0,02, \quad l_0(1) \simeq 0,09, \quad l_0(2) \simeq 0,06.$$

Уравнение (18) имеет одно решение при $D > 0$ и три решения при $D < 0$:

$$1) \left(E_1^2 \frac{\beta}{\alpha} \right)_1 = \frac{2}{3(1+k)} + \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \quad (D > 0), \quad (21)$$

$$2), 3), 4) \left(E_1^2 \frac{\beta}{\alpha} \right)_i = \frac{2}{3(1+k)} + 2 \sqrt{|p|} \cos \left(-\frac{\mu}{3} + m_i \frac{2\pi}{3} \right) \quad (D < 0),$$

где

$$m_2 = 0, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = -1, \quad p = \frac{3kl - 1}{9(1+k)^2},$$

$$q = \frac{1}{(1+k)^3} \left(\frac{1}{27} - \frac{(3+k)l}{6} \right), \quad \text{tg } \mu = \frac{\sqrt{-D}}{-q} \quad (0 \leq \mu \leq \pi).$$

Отметим, что в решениях 1), 2) интенсивность волн в преимущественном направлении I больше интенсивности в направлении II: $E_1^2 > E_2^2$, в то время как в решениях 3), 4), напротив, $E_1^2 < E_2^2$. Решение 1) является продолжением решения 2) в области большой обратной связи $l > l_0$. Каждому решению (21) соответствует определенное значение фазы, т. е. определенное n (16): $(-1)^n = \text{sgn } \cos \varphi$.

* Условие существования трех решений 2), 3), 4) $l < l_0$ в случае слабого поля $N_0 = N_{\text{пор}} \ll N_{\text{пор}}$ при большом отражении зеркал 1, 2, 4 ($r_{1,2,4} \simeq 1$) не выполняется.

Из уравнения (11)

$$\cos \varphi = \frac{E_1 \beta}{g E_2} (k - 1) (E_2^2 - E_1^2). \quad (22)$$

Так как в решениях 1), 2) $E_1 > E_2$, а в 3), 4) $E_1 < E_2$, то фазы в этих решениях (см. (21)) при фиксированных k, s не зависят от g и удовлетворяют соотношению $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi + \varphi_3 = \pi + \varphi_4$. Легко показать, что с ростом обратной связи l в решениях 1), 2), 4) мощность первой волны E_1^2 монотонно возрастает (мощность второй волны E_2^2 монотонно убывает, см. (22)), а в решении 3) E_1^2 монотонно убывает (E_2^2 монотонно растет, см. рис. 4). При уменьшении обратной связи ($l \rightarrow 0$) решения 1), 2), а также решение 3) (см. (21) переходят в двухволновое решение с одинаковой интенсивностью генерации в каждом

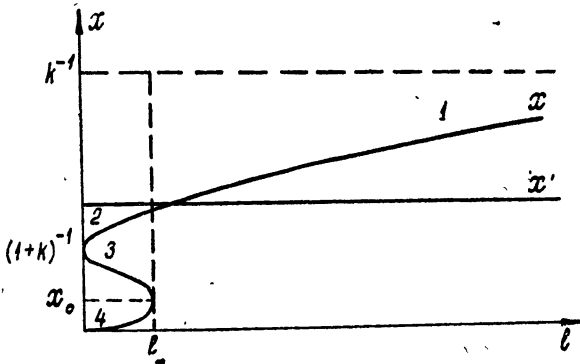


Рис. 4. Зависимость интенсивности генерации в направлении I (в безразмерных единицах $x = I_1 \beta / \alpha$) от величины обратной связи l при постоянной накачке, k — коэффициент нелинейной связи, $x_0 = \frac{1}{4k} \left(3 - \sqrt{9+k} \right)$, x' — мощность в одноволновом режиме ($I_2 = 0$).

направлении: $I_1 = I_2 = \alpha / \beta (1 + k)$. Решение 4) переходит в одноволновое решение в направлении II: $I_1 = 0, I_2 = \alpha / \beta$.

Приведем асимптотику решений 1), 2) (см. рис. 2):

1) при малой накачке $R(N_0/N_{\text{пор}} - 1) \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_0} &\simeq \frac{1}{2k} \left(\frac{N_0}{N_{\text{пор}}} - 1 \right) \left[1 - \frac{R^2}{4k^3} \left(\frac{N_0}{N_{\text{пор}}} - 1 \right)^2 \right], \\ \frac{I_2}{I_1} &\simeq R^2 \frac{I_1^2}{I_0^2} \quad (I_1 \equiv E_1^2, \quad I_2 \equiv E_2^2); \end{aligned} \quad (23a)$$

2) при малой обратной связи $\frac{1}{R(N_0/N_{\text{пор}} - 1)} \ll 1$

$$\frac{I_2}{I_1} \simeq 1 - \frac{2(1+k)}{R(N_0/N_{\text{пор}} - 1)} = 1 - \frac{I_0}{R I_1}, \quad (23b)$$

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{N_0}{N_{\text{пор}}} - 1 \right) \frac{1}{2(1+k)} \left(1 + \frac{2}{R(N_0/N_{\text{пор}} - 1)} \right), \quad I_0 = \frac{\delta \omega_p}{\beta}.$$

3. Исследуем устойчивость полученных решений (15), (21). Рассматривая малые флуктуации около стационарного одноволнового режима генерации (15), получим из (11), что при любой обратной связи одноволновое решение (15) устойчиво при сильной нелинейной связи $k > 1$ и неустойчиво при слабой связи $k < 1$ [8, 9].

При рассмотрении устойчивости двухволновых решений (21) следует учитывать связь флуктуаций амплитуд и фаз, т. е. решать совместно линеаризованную систему (11), (12). При этом получим уравнения для инкремента нарастания флуктуаций* $\lambda = \ln \frac{\delta E(t)}{\delta E_0} = \ln \frac{\delta \varphi(t)}{\delta \varphi_0}$:

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3 + a_1 \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 + a_2 \frac{\lambda}{\alpha} + a_3 = 0. \quad (24)$$

Режим генерации является устойчивым (т. е. все $\lambda \leq 0$), если выполняются условия Гурвица

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 \equiv a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (25)$$

Здесь

$$a_1 = 2 \left[(2 - k) E_1^2 \frac{\beta}{\alpha} + k E_2^2 \frac{\beta}{\alpha} \right],$$

$$a_3 = 2(E_1^2 - E_2^2) \frac{\beta}{\alpha} [(1 - k)^2 + s^2] [-2k(1 + k)x^2 + 3(1 + k)x - 1],$$

$$a_2 = (1 - k) \{x^2(1 + k)(k^2 + 3) + 4x(1 + k) - (3 + k)\} + s^2[1 - x(1 + k)][1 - x(3 + k)].$$

Из условий устойчивости (25), получим: а) решение 3) является неустойчивым во всей области своего существования, б) решения 1), 2) являются устойчивыми при слабой связи $k < 1$ при любой величине нелинейного расталкивания частот s и любой обратной связи, в) решение 4) при сильной связи $k > 1$ также является устойчивым во всей области существования $0 \leq l \leq l_0$ при любом s .

В решениях 1), 2) при $k < 1$ (б) и 4) при $k > 1$ (в) разность фаз φ волны I и волны II, возвращаемой в систему, такова, что $\cos \varphi > 0$. Если рассмотреть фазовые флуктуации при стационарных амплитудах:

$\frac{dE}{dt} = 0$, $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi(t)$, то можно получить, что устойчиво лишь одно

значение фазы, такое, что $\cos \varphi > 0$. Однако 2) из (25) следует, что при достаточно сильном нелинейном расталкивании частот s имеются также устойчивые решения, в которых $\cos \varphi < 0$: 1), 2) при $1 < k < 1,5$ и 4) при $k > 1$. Эти решения устойчивы не во всей области своего существования, а лишь при достаточно большой обратной связи l . Появление дополнительных устойчивых решений, в которых $\cos \varphi < 0$, связано с отставанием амплитудных флуктуаций от фазовых.

* При рассмотрении устойчивости на пространственную структуру возмущения не накладывалось ограничений. Любое возмущение можно разложить в ряд по собственным функциям резонатора. Рассматривалась устойчивость как по отношению к флуктуациям на генерируемом типе колебаний (24), так и по отношению к возникновению новых генерируемых мод (разд. 3).

При выводе выражения для поляризации среды полагалось, что поле не меняется за время жизни атома: $\lambda \ll \gamma$. Из (24) можно оценить значение наибольшего корня λ уравнения $\lambda \approx \alpha$ при $g \ll \alpha$. В случае сильной обратной связи $g \gg \alpha$ (см. (23а)) $\lambda \approx \alpha/k$ при $k \neq 0$; при $k \rightarrow 0$ $\lambda \rightarrow \alpha^{1/3} g^{2/3}$. Так как (см. (10)) $g \leq \delta\omega_p/2$, то в приближении слабого поля $\alpha \ll \delta\omega_p/2$ условие $\lambda \ll \gamma$ выполняется при $\delta\omega_p < \gamma$.

4. Рассмотрим твердотельный лазер. В нем нелинейная связь сильная: $k = 2$ (см. (13)). Поэтому при любой обратной связи l существует устойчивый режим (15) однонаправленной генерации в направлении I. Кроме того, при достаточно слабой обратной связи $l < l_0$ (см. (20)) существует устойчивое двухволновое решение 4), описывающее генерацию волны в направлении II с примесью волны в направлении I. Осуществление одного из двух возможных режимов зависит от предистории.

5. Рассмотрим газовый лазер. В нем величина коэффициента нелинейной связи волн k зависит от положения частоты генерации в контуре усиления. Если частота ω расположена достаточно далеко от центра линии ω_0 :

$$|\omega - \omega_0| > \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{2\gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}}, \quad (26)$$

то связь слабая ($k < 1$).

В случае слабой связи устойчивы решения 1), 2). Если частота генерации близка к центру линии: $|\omega - \omega_0| < \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{2\gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}}$, то связь сильная ($k \geq 1$) и устойчивым является одноволновое решение в направлении I (15). При малой обратной связи $l < l_0$ существует также устойчивое решение 4).

В ограниченной области частот, максимальное значение которой

$$\frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{1, 3 \gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}} < |\omega - \omega_0| < \frac{\gamma_{ab}}{ku} \sqrt{\frac{2, 3 \gamma_{ab}}{\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1}}}, \quad (27)$$

при достаточно большой обратной связи l существует несколько устойчивых режимов 1), 2), 4).

Существование нескольких устойчивых режимов генерации вблизи промежуточной связи $k \simeq 1$ (27) связано с тем, что суммарная энергия генерации при $k \simeq 1$ одинакова во всех режимах: $E_1^2 + E_2^2 = \alpha/\beta$, т. е. ни один режим не обладает энергетическим преимуществом по сравнению с другим.

3. ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ЧИСЛО ГЕНЕРИРУЕМЫХ ЧАСТОТ*

1. Изменение мощности генерации при наличии обратной связи приводит к изменению конкуренции между волнами, вследствие чего может измениться число генерируемых волн.

Рассмотрим, при какой накачке α_n может возникнуть генерация n -ой волны при наличии генерации волн I, II на частоте ω , т. е. найдем, когда выполняется условие

$$\frac{dE_n}{dt} = E_n(\alpha_n - a_{n1}E_1^2 - a_{n2}E_2^2) > 0 \quad (a_{nm} > 0). \quad (28)$$

* В то время как данная работа находилась в печати, появилась работа [13], в которой рассматривался кольцевой резонатор с дополнительной обратной связью. Авторы [13] приходят к выводу, что в таком резонаторе без паразитных отражений будет существовать лишь волна в преимущественном направлении I. Так как в цитируемой работе [13] не учитывалось нелинейное взаимодействие поля со средой, то теоретические результаты работы могут прилагаться только к порогу генерации. Вопрос о существовании одноволнового или двухволнового устойчивого режима генерации зависит, как показано в нашей работе, от типа активной среды и параметров лазера.

2. В твердотельном лазере взаимодействие волн n , m зависит только от частот ω_n , ω_m , но не зависит от направлений распространения. Вследствие этого $a_{n1} = a_{n2}$, так как волны I, II генерируют на одной частоте. Отсюда (см. (28)) следует, что конкуренция с n -ой волной определяется суммарной мощностью генерации на частоте ω :

$$E_1^2 + E_2^2 = \frac{\alpha}{\beta} (1 - (k - 1)x).$$

Эта величина в твердотельном ОКГ либо не зависит от величины обратной связи l — в режиме однонаправленной генерации (15), либо убывает с ростом обратной связи — в двухволновом режиме 4) (см. разд. 1). Поэтому при однонаправленной генерации (15) условие (28) не зависит от обратной связи. При осуществлении режима 4) условие (28) выполняется при меньшем усилении α_n , и число генерируемых мод может только увеличиться*.

3. В газовом лазере взаимодействие волн, бегущих в одном направлении ($a_{nm} \equiv \chi_{nm}$), отличается от взаимодействия волн, бегущих в противоположных направлениях ($a_{nm} \equiv \theta_{nm}$). В предельном случае $\eta = \gamma_{ab}/ku \ll 1$ коэффициенты χ , θ имеют вид [10]

$$\frac{\theta_{nm}}{\beta} = \frac{1}{1 + [(\omega_n + \omega_m - 2\omega_0)/2\gamma_{ab}]^2},$$

$$\frac{\chi_{nm}}{\beta} = \frac{x}{1 + [(\omega_n - \omega_m)/2\gamma_{ab}]^2} \left[\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a} + \frac{\gamma_a \gamma_{ab} - \frac{1}{2}(\omega_n - \omega_m)^2}{\gamma_a^2 + (\omega_n - \omega_m)^2} \text{ замена} \right] + a \leftrightarrow b. \quad (29)$$

Рассмотрим возникновение генерации на частоте ω_n в направлении преимущественного распространения I:

$$\frac{dE_n}{dt} = E_n(\alpha_n - \chi_{n1}E_1^2 - \theta_{n2}E_2^2) = E_n \left(\alpha_n - \alpha_1 \frac{\theta_{n2}}{\beta} - E_1^2(\chi_{n1} - k\theta_{n2}) \right).$$

Нелинейная связь k в газовой среде слабая: $k < 1$, если частота ω не совпадает с центром линии (см. (34), (35)). Так как при этом существует лишь одно устойчивое решение 1), 2), то с ростом обратной связи l мощность волны E_1^2 растет. Поэтому, если $A \equiv \chi_{n1} - k\theta_{n2} > 0$, то с ростом обратной связи условия генерации n -ой волны ухудшаются. Подставив χ_{n1} , k , θ_{n2} в (14), (29), получим, что условие $A > 0$ выполняется при

$$b_2 < b < b_1, \quad \text{если } f^2 < 1,$$

$$b > b_1, \quad b < b_2, \quad \text{если } f^2 > 1,$$

где

$$b \equiv \frac{\omega - \omega_n}{\gamma}, \quad f \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\gamma} \quad (\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \gamma_{ab}),$$

$$b_{1,2} = \frac{f(1+f^2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+5f^2+2f^4)}}{\frac{1}{2}(f^2-1)} \quad (b_2 < b_1). \quad (30)$$

* Эффект сокращения числа мод в твердотельном ГБВ с дополнительной связью, наблюдавшейся в [2, 14], объясняется тем, что в ГБВ с дополнительной связью осуществляется режим бегущих волн, в то время как в ГБВ без дополнительной связи отражения от границ кристалла приводят к осуществлению режима стоячих волн.

Условия возникновения генерации n -ой волны в направлении II ухудшаются с ростом E_1^2 , если $C \equiv \theta_{n1} - k\chi_{n2} > 0$. Это условие выполняется при $b > b'_1$ и при $b < b'_2$, где

$$b'_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 + (f^2 + 1)(f^2 + 1/2)}}{f^2 + 1/2} \quad (b'_2 < b'_1). \quad (31)$$

Из (30), (31) следует, что при $\omega \neq \omega_0$ существуют области ω_n , в которых происходит одновременно ухудшение условий генерации волн в обоих направлениях на частоте ω_n при увеличении обратной связи ($A > 0$, $C > 0$) вследствие роста мощности волны E_1 .

Авторы благодарны В. И. Перелю за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Багаев, В. С. Кузнецов, Ю. В. Троицкий, Б. И. Трошин, Письма в ЖЭТФ, 1, 21 (1965).
2. M. Hercher, M. Young, S. B. Smoer, J. Appl. Phys., 36, 3351 (1965).
3. Л. А. Островский, Е. Н. Якубович, ЖЭТФ, 46, 961 (1964).
4. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 682 (1964).
5. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 6, 1095 (1964).
6. W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, A 1429 (1964).
7. Дж. Слэтер, Электроника сверхвысоких частот, М., 1948.
8. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия, 21, 386 (1966).
9. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, ФТТ, 8, 2655 (1966).
10. С. Г. Зейгер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1671 (1967).
11. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 163, 60 (1965).
12. Ю. Л. Климонтович, В. Н. Курятов, Л. С. Ланда, ЖЭТФ, 51, 3 (1966).
13. В. Ю. Петрунькин, Н. А. Есепкина, С. В. Кружалов, Л. Н. Пахомов, В. А. Чернов, Радиотехника и электроника, 12, 146 (1967).
14. А. М. Бонч-Бруевич, В. Ю. Петрунькин, Н. А. Есепкина, С. В. Кружалов, А. М. Пахомов, В. А. Чернов, Ж. прикл. спектр., 6, 540 (1967).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
25 апреля 1966 г.

TRAVELING-WAVE LASER WITH ADDITIONAL FEEDBACK

S. G. Zeyger, E. E. Fradkin

The effect of an additional feedback on generation in a traveling-wave laser both in a solid and gas active medium is theoretically investigated. Stationary monochromatic regimes are found and their stability is investigated. The effect of an additional feedback on a number of generated frequencies is considered.

УДК 533.925

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ШАРЕ И ЦИЛИНДРЕ

В. А. Пермяков

Предложен алгоритм численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению которых сводятся задачи дифракции электромагнитных волн на радиально неоднородных плазменных шаре и цилиндре (в случае цилиндра рассматривается только двумерная задача). Решения дифференциальных уравнений получены в виде степенных рядов при кусочно-линейной аппроксимации закона изменения диэлектрической проницаемости. Проведено сравнение результатов численных расчетов сечения обратного рассеяния неоднородного шара с расчетами в приближении сильнонеоднородной лазмы и квазистатическом приближении. Оценены условия применимости замены неоднородного плазменного шара идеально проводящим шаром.

Задачи дифракции электромагнитных волн на радиально неоднородных плазменных телах (шар, цилиндр) неоднократно рассматривались в связи с различными приложениями: радиолокация метеорных следов, диагностика плазмы и т. д. Как известно, метод собственных функций позволяет свести решение этих задач к численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций. Для успешной интерпретации численных результатов обычно проводят сравнение их с асимптотическими решениями, имеющими ясный физический смысл; это сравнение дает одновременно и оценку применимости асимптотических решений. Число работ, объединяемых таким подходом, невелико: в [1] решена задача дифракции плоской электромагнитной волны на радиально неоднородном шаре с квадратичным гиперболическим законом изменения $\epsilon(r)$, а также проведено сравнение численных решений с приближением «геометрической оптики»* скалярным и борновским приближениями, аналогичная задача решена численно и в приближении Борна для экспоненциального закона $\epsilon(r)$ [2].

Целью настоящей работы является, во-первых, построение алгоритма численного интегрирования дифференциальных уравнений для радиально неоднородных шара и цилиндра (в случае цилиндра рассматривается только двумерная задача) и, во-вторых, анализ результатов численного решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на шаре. Решения уравнений для радиальных функций получены методом степенных рядов при линейно-ломаной аппроксимации закона изменения диэлектрической проницаемости и использованы далее при вычислении сечения обратного рассеяния неоднородного шара. Для линейного закона изменения $\epsilon(r)$ проведено сравнение численных результатов с решениями, полученными в приближении сильнонеодно-

* Под приближением «геометрической оптики» в [1] понимается приближение геометрической оптики для идеально проводящего шара, радиус которого совпадает с радиусом ρ_0 поверхности $\epsilon(\rho_0)=0$ неоднородного шара.

родной плазмы [3] и в квазистатическом приближении. Установлены границы применимости квазистатического решения, полученного с помощью степенных рядов аналогично решению Герлофсона [4, 5].

Исследование приближения сильнонеоднородной плазмы представляет особый интерес, поскольку оно в сочетании с численным решением позволяет оценить справедливость замены неоднородного плазменного шара идеально проводящим, либо импедансным шаром, а также выявляет область градиентов диэлектрической проницаемости и радиусов шара, в которой возникают аномально большие отклонения сечения обратного рассеяния неоднородного шара от сечения обратного рассеяния идеально проводящего шара. Эти отклонения имеют ту же природу, что и колебания сечения обратного рассеяния однородного шара при увеличении плотности плазмы [6], однако между ними существуют и некоторые принципиальные различия.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

При решении задач дифракции электромагнитных волн на радиально неоднородных шаре и цилиндре методом собственных функций основную трудность представляет интегрирование дифференциальных уравнений для радиальных функций. Этот вопрос мы и рассмотрим ниже*. Приведем исходные дифференциальные уравнения:

$$\Phi_v'' + \frac{2\nu + 1}{r} \Phi_v' + \varepsilon(r) \Phi_v = 0; \quad (1)$$

$$\Psi_v'' + \left(\frac{2\nu + 1}{r} - \frac{\varepsilon'(r)}{\varepsilon(r)} \right) \Psi_v' + \left(\varepsilon(r) - \frac{\nu + \delta}{r} \frac{\varepsilon'(r)}{\varepsilon(r)} \right) \Psi_v = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) параметр δ равен $1/2$ для шара и 0 для цилиндра. Нам требуется найти решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (1) и (2) на отрезке $[0, \alpha]$ при условии аналитичности решений в точке $r=0$. Для численного интегрирования уравнений (1) и (2) используем метод степенных рядов, поскольку он пригоден в окрестностях как обыкновенных, так и регулярных особых точек уравнений [7]. Решения в виде степенных рядов будем искать для закона изменения $\varepsilon(r)$, заданного непрерывной кусочно-линейной функцией:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon'(r_j)(r - r_j) + \varepsilon(r_j), \quad (3)$$

$$r, r_j \in [r_{i-1}, r_i] \subset [0, \alpha], \quad \varepsilon(r_i - 0) = \varepsilon(r_i + 0), \quad 1 \leq i, j \leq S, \quad r_{i-1=0} = 0, \\ r_{i=S} = \alpha.$$

Здесь r_j — точка, в которой строятся степенные ряды для интегрирования уравнений на отрезке $[r_{i-1}, r_i]$. На отрезках, содержащих особую точку, точка r_j совмещается с особой.

Отметим, что при линейном законе изменения ε удается получить наиболее простые рекуррентные формулы для коэффициентов степенных рядов, сохраняя в то же время характерную для неоднородной плазмы логарифмическую особенность решения уравнения (2) в точке ρ_0 , где $\varepsilon(\rho_0) = 0$.

* Будем полагать, что все линейные размеры умножены на волновое число свободного пространства, $\varepsilon(r)$ — относительная диэлектрическая проницаемость плазмы ($\varepsilon(r) = 1 - \omega_0^2(r)/\omega(\omega + i\nu(r))$, $r < \alpha$), импеданс свободного пространства равен единице. Зависимость поля от времени гармоническая, временной множитель $\exp(i\omega t)$.

Перейдем теперь непосредственно к решению уравнений. Метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов хорошо известен [7], поэтому приведем окончательные формулы для решений.

а) Уравнение (1).

Решение, аналитическое в $r=0$, имеет вид

$$\Phi_{v1}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, \quad (4)$$

где $a_0 = \text{const}$, $a_1 = 0$, $a_2 (k \geq 2)$ определяется рекуррентной формулой

$$k(k+2\nu) a_k + \sum_{m=0}^1 \varepsilon^{(m)}(0) a_{k-m-2} = 0.$$

Общее решение в обыкновенной точке $r=r_j$:

$$\Phi_{v2}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (r-r_j)^k,$$

$$b_0 = \text{const}, \quad b_1 = \text{const}, \quad \text{при } k \geq 2 \quad (5)$$

$$k(k-1) r_j b_k + (k-1)(k+2\nu-1) b_{k-1} + \sum_{m=0}^1 \varepsilon^{(m)}(r_j) (b_{k-m-3} + r_j b_{k-m-2}).$$

б) Уравнение (2).

Решение, аналитическое в $r=0$:

$$\Psi_{v1}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k, \quad (6)$$

$c_0 = \text{const}$, $c_k (k \geq 1)$ определяется по формуле

$$k(k+2\nu) \rho_1 c_k - [(k-1)(k+2\nu-2) - \nu - \delta] c_{k-1} + \varepsilon'(0) [\rho_1^2 c_{k-2} - 2\rho_1 c_{k-3} + c_{k-4}] = 0.$$

Общее решение в произвольной обыкновенной точке $r=r_j$:

$$\Psi_{v2}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (r-r_j)^k, \quad (7)$$

$d_0 = \text{const}$, $d_1 = \text{const}$, $d_k (k \geq 2)$ находится по формуле

$$\begin{aligned} r_j(r_j - \rho_j) k(k-1) d_k + (k-1) [(r_j - \rho_j) (k+2\nu-1) + r_j(k-3)] d_{k-1} + \\ + [(k-2)(k+2\nu-3) - \nu - \delta + r_j \varepsilon'(r_j) (r_j - \rho_j)^2] d_{k-2} + \\ + \varepsilon'(r_j) [(r_j - \rho_j) (3r_j - \rho_j) d_{k-3} + (3r_j - 2\rho_j) d_{k-4} + d_{k-5}] = 0. \end{aligned}$$

В решениях (6) и (7) введено обозначение $\rho_j = r_j - \varepsilon(r_j)/\varepsilon'(r_j)$. Общее решение в регулярной особой точке $r=\rho_0$ имеет логарифмическую особенность и ищется в виде

$$\Psi_{v4}(r) = \Psi_{v3}(r) \ln(\rho_0 - r) + \Psi_{v5}(r). \quad (8)$$

В (8) $\Psi_{v3}(r)$ — решение, аналитическое в точке $r=\rho_0$, которое определяется соотношениями

$$\Psi_{v3}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k (r - \rho_0)^{k+2},$$

$$e_0 = \text{const}, \quad (9)$$

при $k \geq 1$

$$k(k+2)\rho_0 e_k + [(k+1)(k+2\nu) - \nu - \delta] e_{k-1} + \varepsilon'(\rho_0)(\rho_0 e_{k-3} + e_{k-4}) = 0,$$

а функция $\Psi_{v5}(r)$ имеет вид

$$\Psi_{v5}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (r - \rho_0)^k,$$

$$f_0 = \frac{2\rho_0^2 e_0}{\nu^2 - \delta^2}, \quad f_1 = \frac{2\rho_0 e_0}{\nu - \delta}, \quad f_2 = \text{const},$$

при $k \geq 3$

$$k(k+2)\rho_0 f_{k+2} + [(k+1)(k+2\nu) - \nu - \delta] f_{k+1} + \varepsilon'(\rho_0)(\rho_0 f_{k-1} + f_{k-2}) +$$

$$+ 2(k+\nu+1/2) e_{k-1} + 2\rho_0 e_k = 0.$$

Опираясь на полученные решения, можно предложить следующую схему интегрирования уравнений. Отрезок интегрирования $[0, \alpha]$ разбивается на конечное число парциальных отрезков $[r_{i-1}, r_i]$, на каждом из которых закон изменения $\varepsilon(r)$ аппроксимируется прямой. Выбор числа и длины отрезков $[r_{i-1}, r_i]$, а также положения опорных точек r_j , помимо требований аппроксимации, определяется радиусом сходимости каждого из полученных решений, равным, как известно, расстоянию до ближайшей особой точки.

Для уравнения (1) на отрезке $[0, r_1]$ задача Коши решается путем вычисления ряда (4) и его производной в точке $r=r_1$. На произвольном отрезке $[r_{i-1}, r_i]$ решение задачи Коши ищется с помощью ряда (5). При этом вначале из условия непрерывности решений и их производных в точке $r=r_{i-1}$ определяется отношение произвольных постоянных b_0 и b_1 , затем полученное частное решение вычисляется в точке $r=r_i$.

Интегрирование уравнения (2) ведется аналогичным образом всюду, кроме окрестности особой точки $r=\rho_0$, где $\varepsilon(\rho_0)=0$. Аналитическое продолжение искомого интеграла уравнения (2) за точку ветвления $r=\rho_0$ осуществляется с помощью решений (8) и (9) при условии $\text{Im } \rho_0 > 0$ ($\text{Im } \varepsilon(r) < 0$), откуда путем предельного перехода можно получить, в частности, представление решения на полуоси $r > \rho_0$ при отсутствии потерь.

Найденные решения были запрограммированы для вычислений на ЭВМ и использованы далее в задачах внешнего возбуждения радиально неоднородного шара и цилиндра. Отметим, что полученные решения применимы и к задачам внутреннего возбуждения радиально неоднородной среды для класса сторонних токов, определяемого двумя условиями: задача внутреннего возбуждения должна сводиться к построению фундаментальных решений (функций Грина) уравнений (1), (2), источники не должны находиться в центре шара (на оси цилиндра). Последнее ограничение не принципиально, поскольку с помощью метода степенных рядов можно найти общее решение каждого из радикальных уравнений в точке $r=0$, позволяющее построить функцию Грина внутренней задачи для точечного источника, расположенного в центре шара (или нити тока, совпадающей с осью цилиндра).

2. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ

Предложенный выше алгоритм численного интегрирования радиальных уравнений был использован при решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на радиально неоднородном шаре. Предполагалось, что диэлектрическая проницаемость шара линейно зависит от радиуса:

$$\epsilon(r) = a(r - \rho_0) = a(r - \alpha) + 1 \quad (r \leq \alpha),$$

а потери на соударения пренебрежимо малы ($\text{Im } \epsilon(r) = 0$). Наиболее детально была исследована зависимость сечения обратного рассеяния от радиуса и градиента диэлектрической проницаемости неоднородного шара в случае достаточно плотной плазмы ($\epsilon(0) < 0$).

Метод собственных функций дает следующее выражение для сечения обратного рассеяния шара:

$$\sigma = \pi \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(-1)^n (p_n - q_n) \right|^2. \quad (10)$$

Здесь p_n и q_n — коэффициенты отражения неоднородного шара для H - и E -волн соответственно, определяемые формулами

$$p_n = - \frac{\psi'_n(\alpha) - i Y_{nH}(\alpha) \psi_n(\alpha)}{\zeta'_n(\alpha) - i Y_{nH}(\alpha) \zeta_n(\alpha)} \quad (11)$$

и

$$q_n = - \frac{\psi'_n(\alpha) - i Z_{nE}(\alpha) \psi_n(\alpha)}{\zeta'_n(\alpha) - i Z_{nE}(\alpha) \zeta_n(\alpha)}, \quad (12)$$

где

$$\psi_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} J_{n+1/2}(\alpha) \quad \text{и} \quad \zeta_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(\alpha)$$

— сферические функции Бесселя и Ханкеля 2-го рода, $Y_{nH} = (Z_{nH})^{-1}$ — парциальный поверхностный адмитанс и Z_{nE} — парциальный поверхностный импеданс неоднородного шара связаны с решениями радиальных уравнений (1), (2) соотношениями

$$Y_{nH} = (Z_{nH})^{-1} = -i \left(\frac{n+1}{\alpha} + \frac{\Phi'_{n+1/2}(\alpha)}{\Phi_{n+1/2}(\alpha)} \right); \quad (13)$$

$$Z_{nE} = -i \left(\frac{n+1}{\alpha} + \frac{\Psi'_{n+1/2}(\alpha)}{\Psi_{n+1/2}(\alpha)} \right). \quad (14)$$

Обсудим теперь некоторые приближенные методы расчета сечения обратного рассеяния, применимые в случае достаточно плотной плазмы.

а) *Квазистатическое приближение I.* Для волн магнитного типа приближенное представление парциального адмитанса при условии $\alpha \ll 1$ найдем с помощью решения (4) радиального уравнения (1), ограничившись членами ряда порядка r^2 включительно:

$$Y_{nH}(\alpha) = -i \left(\frac{n+1}{\alpha} - \frac{1 - \alpha a}{2n+3} \alpha - \frac{a}{2n+5} \alpha^2 + O(\alpha^3) \right). \quad (15)$$

При $\alpha a \gg 1$ оценка в (15) уточняется до $O(a^2 \alpha^5)$.

Для волн электрического типа общее решение в окрестности точки $r = \rho_0$ ищется в виде

$$\Psi_{n+1/2, 4}(r) = \Psi_{n+1/2, 3}(r) \left(\ln \frac{r - \rho_0}{\rho_0} + \gamma_n \right) + \Psi_{n+1/2, 5}(r)$$

при условии $\left| \frac{r - \rho_0}{\rho_0} \right| < 1$. Константа γ_n определяется путем «сшивания» логарифмических производных решений $\Psi_{n+1/2, 4}(r)$ и $\Psi_{n+1/2, 1}(r)$ в точке $r_1 \in [0, \rho_0]$. Порядок отброшенных членов рядов при условии $a \rho_0^3 \ll 1$ равен $O\left(\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^3\right)$ для ряда $\Psi_{n+1/2, 1}(r)$, $O\left(\left(\frac{r - \rho_0}{\rho_0}\right)^4\right)$ для $\Psi_{n+1/2, 3}(r)$, $O\left(\left(\frac{r - \rho_0}{\rho_0}\right)^3\right)$ для $\Psi_{n+1/2, 5}(r)$.

С ростом градиента ϵ сходимость рядов ухудшается и соответствующие оценки отброшенных членов при $a \rho_0^3 \gg 1$ становятся равными $O(ar^3)$, $O(a(r - \rho_0)^4)$, $O(a(r - \rho_0)^3)$. Полученное таким образом приближенное представление парциального импеданса E -волн применимо, как следует из окончательных оценок, в области $\alpha^{-3} \gg a \gg \alpha^{-1} \gg 1$ и имеет вид

$$Z_{nE} = i \frac{n+1}{\alpha a^2} \left[1 + n \left(\ln a a - \gamma_n + 1 + \frac{n}{2} - i\pi \right) \right]. \quad (16)$$

Константа γ_n в (16) равна

$$\gamma_n|_{r_1=0,8\rho_0} = - \frac{1}{0,22 + 0,12n} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{0,8}{(n+1)(2n+3)} - 0,2 \right] - \ln 0,2.$$

Используя квазистатические приближения адмитанса H -волн и импеданса E -волн, а также представления функций Бесселя и Ханкеля при $\alpha \ll 1$, можно показать, что $|p_n| \sim O(\alpha a^{2n+4})$, $|q_n| \sim O(\alpha^{2n+1})$, т. е. при условии $\alpha^{-3} \gg a \gg \alpha^{-1} \gg 1$ достаточно учитывать только рассеяние электрической волны основного типа ($n=1$), при этом сечение обратного, рассеяния равно

$$\sigma \simeq 4\pi\alpha^6 \frac{1 + \alpha \operatorname{Im} Z_{1E} + 0,25 \alpha^2 |Z_{1E}|^2}{1 - 2\alpha \operatorname{Im} Z_{1E} + \alpha^2 (|Z_{1E}|^2 - 1)}. \quad (17)$$

б) *Приближение сильнонеоднородной плазмы.* При больших градиентах диэлектрической проницаемости будем использовать приближенные выражения импедансов, полученные в [3]:

$$Z_{nE} = Z_0 + \Delta Z_{nE} = i c a^{-1/3} + i \left[\left(\psi(1) - 0,5 \ln c + \frac{2}{3} \ln a - i\pi \right) \frac{n(n+1)}{\alpha^2} + 1 \right] a^{-1}; \quad (18)$$

$$Z_{nH} = Z_0 + \Delta Z_{nH} = i c a^{-1/3} + i \left(1 - \frac{n(n+1)}{\alpha^2} \right) a^{-1}. \quad (19)$$

В (18) и (19) главный член $Z_0 = i c a^{-1/3}$ не зависит от индекса радиальной функции и соответствует введению импедансных граничных условий на поверхности сильнонеоднородной плазмы [8]

$$c = \frac{\Gamma(1/3)}{3^{1/3} \Gamma(2/3)}, \quad \psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Аналогичным образом в виде ряда по степеням $a^{-1/3}$ можно представить и сечение обратного рассеяния радиально неоднородного шара. Такое представление имеет четкий физический смысл: главный член ряда — это сечение обратного рассеяния идеально проводящего шара, члены порядка $a^{-1/3}$ и $a^{-2/3}$ дают поправку на введение импедансных граничных условий на поверхности шара, следующие (порядка a^{-1} и выше) — определяются зависимостью поверхностного импеданса неоднородного шара от структуры внешнего поля. Однако это представление при произвольных радиусах шара громоздко и неудобно для исследования*. Существенное упрощение достигается лишь в квазистатическом приближении, когда парциальные коэффициенты отражения имеют порядок $|p_n| \sim |q_n| \sim O(\alpha^{2n+1})$, и, следовательно, можно ограничиться учетом электрической и магнитной волн основного типа ($n=1$), для которых коэффициенты отражения равны

$$p_1 = i \frac{\alpha^3}{3} - i \frac{c\alpha^3}{\beta} + O(\alpha^5),$$

$$q_1 = -i \frac{2}{3} \alpha^3 + O(\alpha^5),$$

где $\beta = a^{1/3} \alpha \gg 1$. Отсюда следует, что в области $a \gg \alpha^{-1/3} \gg 1$ сечение обратного рассеяния имеет вид (квазистатическое приближение II)

$$\sigma \simeq 9\pi\alpha^6 \left(1 - \frac{2c}{\beta} \right). \quad (20)$$

в) Замена неоднородной плазмы идеальным проводником. Для оценки сечения обратного рассеяния радиально неоднородного плазменного шара (цилиндра) часто заменяют его идеально проводящим телом, радиус которого совпадает с радиусом ρ_0 поверхности $\epsilon(\rho_0) = 0$ радиально неоднородной плазмы. Из сказанного выше следует, что справедливость такого допущения очевидна в случае сильнонеоднородной плазмы, когда с ростом градиента ϵ сечение обратного рассеяния неоднородного шара асимптотически стремится к точному сечению рассеяния идеально проводящего шара. В дальнейшем, говоря о замене неоднородного шара идеальным проводником, мы будем иметь в виду именно этот случай. Кроме того, такое допущение часто и, вообще говоря, необоснованно применяют и в случае слабонеоднородной плазмы, вычисляя сечение обратного рассеяния «эквивалентного» идеально проводящего шара в приближении геометрической оптики:

$$\sigma = \pi\rho_0^2$$

(для линейного закона ϵ : $\rho_0 = a - 1/a$). Это приближение мы будем называть ниже приближением «геометрической оптики».

Перейдем теперь к обсуждению результатов расчетов**. Целью

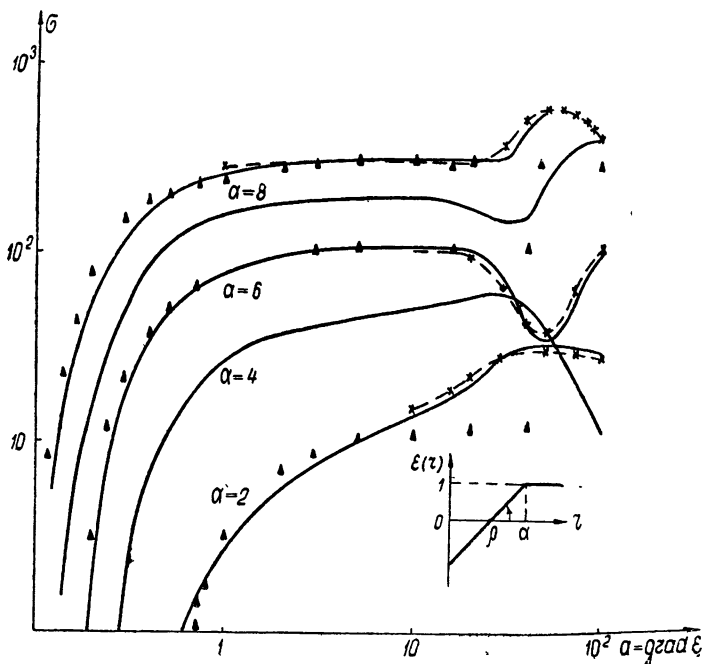
* Для шара произвольного радиуса таким путем удается показать, что сечение обратного рассеяния является монотонной функцией градиента ϵ в области применимости импедансных граничных условий. В частности, при относительной погрешности импедансных граничных условий для импеданса E -поляризации $\Delta Z_{nE}/Z_0 < 0,2$ ($n \leq 2\alpha$) область применимости импедансных условий и монотонности функции $\sigma(a)$ начинается с $a \geq 10^3$ для шара радиуса $a \geq 1$.

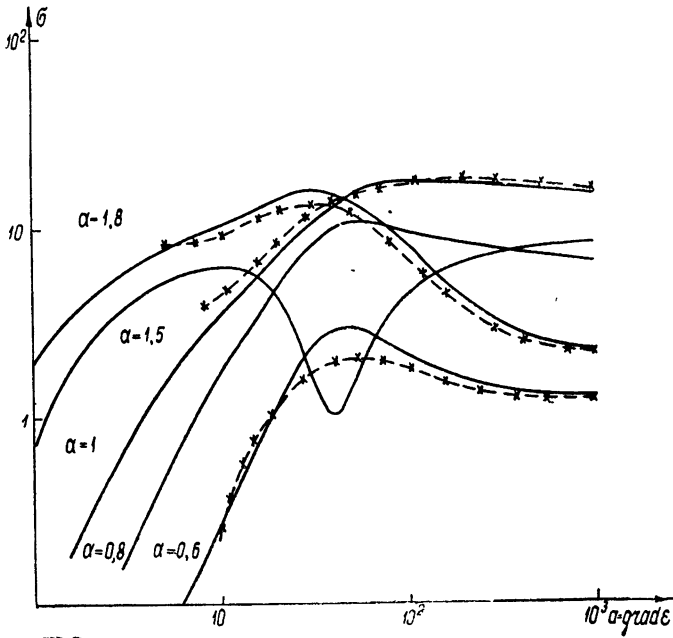
** Расчет сечения обратного рассеяния в приближении сильнонеоднородной плазмы проводился по формулам для коэффициентов отражения (11), (12) с использованием приближенных выражений парциальных импедансов (18), (19). Число коэффициентов отражения при расчетах методом степенных рядов и в приближении сильнонеоднородной плазмы бралось $\sim 2\alpha$ при $\alpha \geq 2$ и 4 при $\alpha < 2$.

расчетов, как говорилось выше, было исследование зависимости сечения обратного рассеяния неоднородного шара от радиуса и градиента диэлектрической проницаемости в случае достаточно плотной плазмы ($\epsilon(0) < 0$).

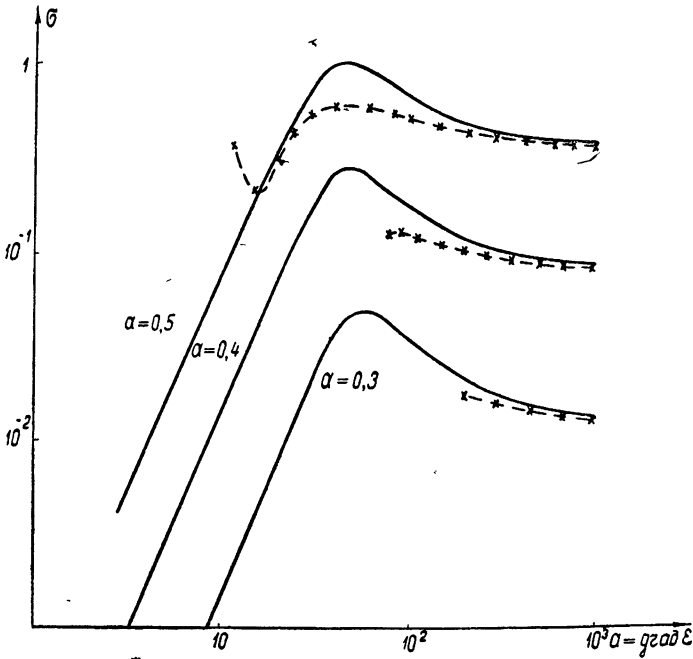
Рассмотрим поведение сечения обратного рассеяния $\sigma(a)$ для шара большого радиуса при увеличении градиента ϵ . (Например, для шара радиуса $\alpha=6$, рис. 1а, 2а.) всю область изменения градиента ϵ можно разбить на четыре участка, характеризующиеся качественно различной зависимостью $\sigma(a)$. В области малых градиентов ϵ сечение обратного рассеяния монотонно увеличивается с ростом a , причем сечение в приближении «геометрической оптики» качественно меняется таким же образом, однако дает недопустимо большую ошибку ($\Delta\sigma/\sigma > 0,2$ при $a < 0,3$, см. рис. 3) и пригодно только для оценок по порядку величины. При дальнейшем увеличении градиента ϵ сечение обратного рассеяния растет весьма медленно, совпадая с неожиданно высокой точностью ($\Delta\sigma/\sigma \leq 0,02$ при $0,5 \leq a \leq 20$) с приближением «геометрической оптики». Затем сечение обратного рассеяния испытывает аномально большие колебания при $20 \leq a \leq 10^3$ и в дальнейшем (в области применимости импедансных условий) монотонно приближается с ростом градиента ϵ к сечению обратного рассеяния идеально проводящего шара. Приближение сильнонеоднородной плазмы дает приемлемую точность ($\Delta\sigma/\sigma \leq 0,15$ для $\alpha=6$), начиная с $a \geq 10$, и позволяет исследовать область весьма больших градиентов ϵ , где строгое решение не пригодно из-за плохой сходимости рядов.

Следует отметить тот факт, что изменение сечения обратного рассеяния в некоторой области больших градиентов ϵ носит немонотонный характер. Аналогичные, причем гораздо более резкие колебания сечения обратного рассеяния однородного плазменного шара при увеличении плотности плазмы были обнаружены в [6]. Возникновение этих колебаний объяснялось в [6] возможностью распространения вдоль плоскости раз-





б)

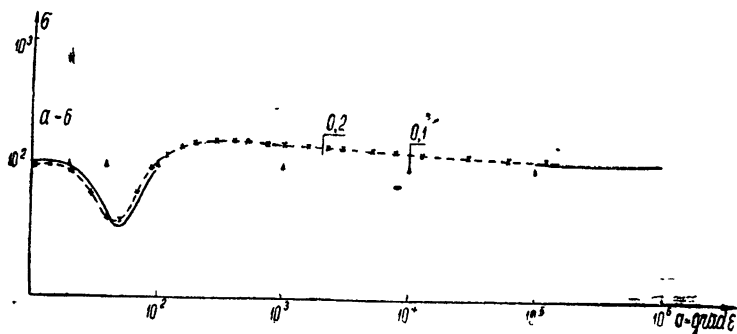


в)

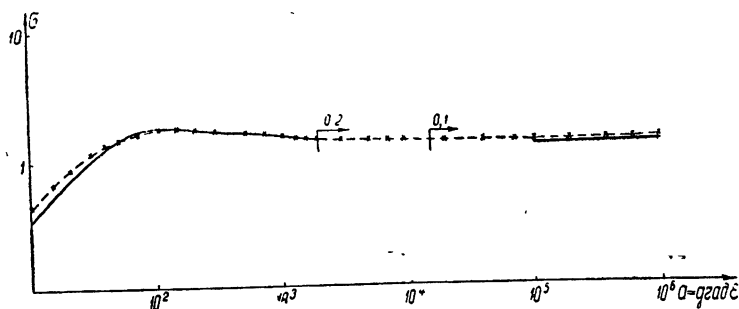
Рис. 1. Зависимость сечения обратного рассеяния от градиента диэлектрической проницаемости:

— метод степенных рядов, —x—x— приближение сильнонеоднородной плазмы, ▲▲▲ — приближение „геометрической оптики“;
 а) радиус шара $\alpha=2; 4; 6; 8; 10$; б) радиус шара $\alpha=0,6; 0,8; 1; 1,5; 1,8$;
 в) радиус шара $\alpha=0,3; 0,4; 0,5$.

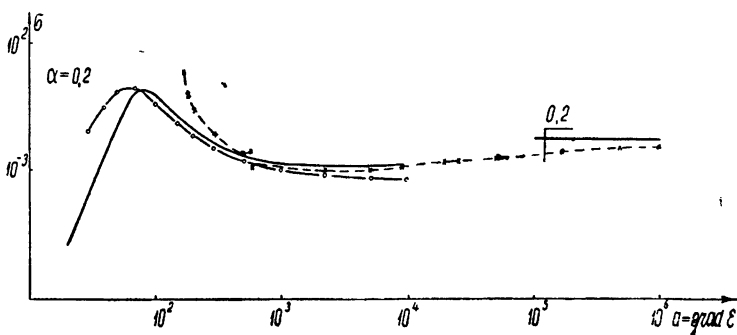
дела плазма — вакуум незатухающей поверхностной E -волны в случае, когда диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна и по модулю больше единицы.



а)



б)



в)

Рис. 2. Поведение сечения обратного рассеяния неоднородного шара в предельном случае весьма больших градиентов ϵ :

— метод степенных рядов, —×—×— приближение сильнонеоднородной плазмы, 0—0— квазистатическое приближение I, — сечение обратного рассеяния идеально проводящего шара, ▲▲▲ приближение "геометрической оптики"; а) радиус шара $\alpha=6$; б) радиус шара $\alpha=1$, в) радиус шара $\alpha=0,2$.

Не проводя здесь детального исследования этого явления, укажем, что при учете конечной кривизны поверхности плазмы поверхностные волны принципиально являются затухающими. Рассеянное шаром поле может быть представлено в виде суммы поля, отраженного освещенной областью шара, и дискретного спектра волн, с комплексными постоянными распространения, бегущих по угловым координатам. В об-

ласти аномальных колебаний σ постоянная затухания E -волны низшего типа, обтекающей шар, становится весьма малой; возникает интерференция этой волны с полем, отраженным назад освещенной областью шара. Учет неоднородности плазмы при прочих равных условиях приводит к уменьшению амплитуды колебаний и области их существования по сравнению с однородной плазмой [9].

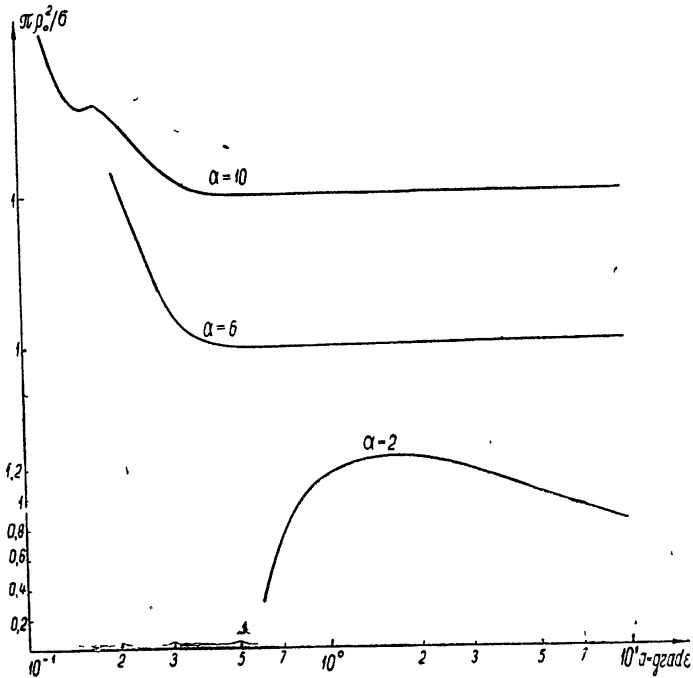


Рис. 3. К определению относительной погрешности приближения „геометрической оптики“.

При уменьшении радиуса шара указанные закономерности сохраняются примерно до радиуса $\alpha \sim 1,5 \div 2$.

Дальнейшее уменьшение радиуса шара ($2 \gtrsim \alpha \gtrsim 0,8$) характеризуется переходом к квазистатическому типу рассеяния (рис. 16, в, 26, в). В квазистатическом приближении I, как было показано выше, при $\alpha^{-3} \gg \alpha \gg \alpha^{-1} \gg 1$ рассеяние определяется только основным типом E -волны ($n=1$), погрешность квазистатического приближения I для $\alpha = 0,2$ почти всюду ниже 0,15. В этой области градиентов ϵ сечение обратного рассеяния имеет максимум, связанный с квазистатическим резонансом основного типа E -волны*. Интересно отметить, что квазистатический резонанс наблюдается примерно при тех же градиентах ϵ , что и аномальные колебания сечения обратного рассеяния при больших радиусах шара. При увеличении градиента ϵ до $\alpha \sim \alpha^{-1/3}$ вклад E -волны в сечение обратного рассеяния приближается к значению $4\pi a^2$, оставаясь в дальнейшем неизменным. Возрастание сечения обратного рассеяния с увеличением градиента ϵ в этой области связано с вкладом основного типа H -волны. При $\alpha^{-1/3} \gg \alpha \gg 1$, как следует из квазистатического приближения II, вклады E - и H -волн соизмеримы и сечение

* Изучению квазистатических резонансов неоднородных плазменных шара и цилиндра посвящены, в частности, работы [4, 5].

обратного рассеяния приближается к величине сечения обратного рассеяния идеально проводящего шара $\sigma_m = 9\pi a^6$.

Полученные результаты позволяют оценить также справедливость замены достаточно плотной плазмы идеальным проводником. Поведение сечения обратного рассеяния при весьма больших градиентах ϵ и, в частности, стремление к сечению рассеяния идеально проводящего шара (рис. 2а, б, в) уже обсуждалось выше, остается только добавить, что для грубых оценок замена плазменного шара идеальным проводником допустима в области применимости импедансных граничных условий. Точные оценки даны на графиках рис. 2, где горизонтальными стрелками указаны области, справа от которых относительная погрешность $\frac{\sigma - \sigma_m}{\sigma_m}$ менее 0,2 (0,1).

Физически очевидно, что качественные закономерности рассеяния плоской электромагнитной волны радиально неоднородным плазменным шаром, выявленные для линейного закона изменения ϵ , носят достаточно общий характер и сохранятся при вариациях закона изменения ϵ в определенных пределах.

Можно полагать, что применение изложенного выше метода интегрирования уравнений радиально неоднородной плазмы в сочетании с асимптотическими методами позволит для многих конкретных задач выяснить физические закономерности дифракции и возбуждения электромагнитных волн в радиально неоднородной плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Arnush, IEEE Trans., AP-12, № 1, 86 (1964); R. S. Margulies and F. L. Scarf, *ibid.*, 91.
2. P. E. Bishping, IEEE Trans., AP-14, № 2, 219 (1966).
3. В. А. Пермяков, В. В. Солодухов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 853 (1965).
4. N. Herlofson, Arkiv. Fysik, Bd3, H. 3, 247 (1951).
5. T. R. Kaiser, R. L. Closs, Phil. Mag., ser. 7, 48, 336, 1 (1952).
6. P. J. Wyatt, J. Appl. Phys., 36, № 12, 3875 (1965); Appl. Phys. Lett., 6, № 10 209 (1965).
7. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, Физматгиз, М., 1963
8. Е. Н. Васильев, Ю. И. Орлов, В. А. Пермяков, ЖТФ, 34, 8, 1341 (1964).
9. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, (в печати).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
13 февраля 1967 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON RADIALLY INHOMOGENEOUS PLASMA SPHERE AND CYLINDER

V. A. Permyakov

The algorithm of numerical integration of the general differential equations is proposed. The problems of diffraction of electromagnetic waves on radially inhomogeneous plasma sphere and cylinder (for the case of cylinder only two-dimensional problem is considered) is reduced to the solution of the above-mentioned equations. The latter are obtained as power series at a piece-linear approximation of the character of dielectric permittivity variation. The results of numerical calculations of the back scattering cross section of the inhomogeneous sphere are compared with those made in the approximation of a strongly-inhomogeneous plasma and in a quasi-static approximation. The conditions of applying a perfectly conducting sphere instead of the inhomogeneous plasma one are estimated.

УДК 621.371.162

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ДВИЖУЩЕЙСЯ В СРЕДЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКОЙ

С. Н. Столяров

В работе получены формулы для амплитуд и частот отраженной и прошедшей волн при наклонном падении электромагнитной волны на диэлектрическую пластинку в случае, когда границы раздела и среды по обе стороны пластинки движутся с разными скоростями. Показано, что, когда скорости границы раздела и среды внутри пластинки больше фазовой скорости распространения волны в среде перед пластинкой, отраженная волна отсутствует, а за пластинкой существуют две прошедшие волны. При нормальном падении на пластинку, движущуюся в покоящейся среде, вычислены коэффициенты отражения и пропускания, которые могут быть использованы при расчете движущегося плазменного слоя. С помощью полученных формул оценивается коэффициент отражения электромагнитной волны от мощных импульсов излучения в усилителях света, в которых изменение электромагнитных свойств среды происходит за счет нелинейных эффектов и пропорционально мощности импульса.

1. Отражение и прохождение электромагнитных волн через движущуюся в вакууме диэлектрическую пластинку рассматривалось в работе [1], где все формулы получены путем преобразований Лоренца известных формул для покоящейся пластинки. Аналогичным способом получены формулы и для случая, когда пластинка и среды по обе стороны от нее движутся с одинаковой скоростью [2]. Однако в некоторых случаях диэлектрическая пластинка, граница раздела и среды по обе стороны от пластинки могут двигаться с разными скоростями. Такой общий случай может быть реализован при прохождении ударной волны в движущейся (например, в диффундирующей) плазме, когда за фронтом ударной волны с такой же скоростью движется фронт рекомбинации. Более реальным примером может служить движение плазменных сгустков в пространстве замедленных волн или движение фронта ионизации в газе, а аналогом распространения электромагнитной ударной волны может служить, например, движение по активной среде мощного импульса излучения, меняющего за счет нелинейных процессов электромагнитные свойства самой среды, или движение электрического домена в полупроводниковом генераторе СВЧ.

2. Рассмотрим задачу о взаимодействии электромагнитных волн с движущейся в среде диэлектрической пластинкой в достаточно общей постановке. Пусть в движущейся вдоль оси z со скоростью $u_{1z} = c\beta_{1z}$ однородной и изотропной среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 и магнитной проницаемостью μ_1 распространяется плоская монохроматическая электромагнитная волна вида $E_0(r, t) = E_0 \exp[i(k_0 r - \omega_0 t)]$. Эта волна падает наклонно на границу раздела данной среды с диэлектрической пластинкой толщины L с постоянными ϵ_2 и μ_2 . При этом обе границы раздела пластинки перемещаются в направлении оси z , совпадающем с нормалью к границе, со скоростью $u_z = c\beta_z$, а среда внутри пластинки — со скоростью $u_{2z} = c\beta_{2z}$. Среда за пластинкой движется со

скоростью $u_{3z} = c\beta_{3z}$ и имеет диэлектрическую постоянную ϵ_3 и магнитную проницаемость μ_3 . Такой случай граничных задач можно охарактеризовать как случай «нормального» разрыва скоростей движущихся сред. Здесь и далее диэлектрическая постоянная ϵ и магнитная проницаемость μ для каждой среды рассматриваются в системе ее покоя.

Нам необходимо вычислить амплитуды и частоты всех волн и соответствующие коэффициенты отражения R и пропускания T на такой движущейся пластинке. Постановка задачи носит достаточно общий характер, так что в рассматриваемом случае уже нельзя получать необходимые формулы с помощью преобразований Лоренца из известных формул для покоящихся сред, как это было сделано в работах [1, 2]. Поэтому решение поставленной задачи проводится ниже на единой основе аппарата электродинамики движущихся сред [3], т. е. 1) с помощью уравнений Максвелла для плоских монохроматических волн:

$$\begin{aligned} D &= -[ck/\omega, H], \quad (ck/\omega, D) = 0, \\ B &= [ck/\omega, E], \quad (ck/\omega, B) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

2) уравнений связи Минковского в каждой из движущихся сред:

$$\begin{aligned} D + [\beta, H] &= \epsilon(E + [\beta, B]), \\ B - [\beta, E] &= \mu(H - [\beta, D]) \end{aligned} \quad (2)$$

и 3) граничных условий на движущихся со скоростью $u = c\beta$ границах раздела с пластинкой:

$$\begin{aligned} [n, E_2 - E_1] &= (\beta, n) (B_2 - B_1), \\ [n, H_2 - H_1] &= -(\beta, n) (D_2 - D_1), \end{aligned} \quad (3)$$

где n — единичный вектор нормали к границе раздела, а индексы «1» и «2» относятся соответственно к полям в 1-ой и 2-ой средах, находящихся по обе стороны от рассматриваемой границы раздела.

3. Выберем за плоскость падения плоскость (x, z) , в которой лежат волновые векторы k_j всех волн и нормаль n к границам раздела. Будем считать, что ось z направлена по нормали к границе раздела из 1-ой среды, откуда падает волна, во вторую среду, т. е. внутри пластинки. Рассмотрим случай, когда электрический вектор падающей волны перпендикулярен плоскости падения (x, z) , т. е. $E_0(r, t) = E_{0y}e_y \exp[i(k_0 r - \omega_0 t)]$. В этом случае в 1-ой среде, откуда падает волна, появится отраженная волна вида $E_1(r, t) = E_{1y}e_y \exp[i(k_1 r - \omega_1 t)]$, а за пластинкой возникает прошедшая волна с $E_3^{(+)}(r, t) = E_{3y}^{(+)}e_y \exp[i(k_3^{(+)} r - \omega_3^{(+)} t)]$. Поле внутри пластинки в силу частичного отражения волны от второй ее границы будет представлять суперпозицию двух волн $E_2^{(\pm)}(r, t) = E_{2y}^{(\pm)}e_y \exp[i(k_2^{(\pm)} r - \omega_2^{(\pm)} t)]$, бегущих в противоположных направлениях. Здесь индексом «+» обозначается волна, бегущая в положительном направлении оси z , в котором распространяются падающая и прошедшая волны, а индексом «-» — волна, бегущая в отрицательном направлении оси z , в котором распространяется отраженная волна.

Для определения четырех неизвестных величин E_{1y} , $E_{2y}^{(\pm)}$ и $E_{3y}^{(+)}$ через известную компоненту E_{0y} необходимо в граничных условиях (3) выразить компоненты векторов D , B и H с помощью уравнений связи (2) и уравнений Максвелла (1). Для этого выпишем из (2) явную зависимость D и H от векторов E и B . Она имеет вид

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon E + (x\gamma^2/\mu) \{ \beta^2 E - \beta(\beta, E) + [\beta, B] \}, \\ H &= \mu^{-1} B + (x\gamma^2/\mu) \{ \beta(\beta, B) - \beta^2 B + [\beta, E] \}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$x = \varepsilon\mu - 1, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad B = [ck/\omega, E].$$

В нашем случае, когда электрические векторы всех волн имеют только одну y -ю компоненту, а волновые векторы $k_j = k_{jx}e_x + k_{jz}e_z$, нетрудно получить выражения для всех необходимых величин в каждой из движущихся сред:

$$\begin{aligned} H_{jx} &= (\gamma_j^2/\mu_j) \{ \varepsilon_j \mu_j (\beta_{jz} ck_{jz}/\omega_j - 1) + (\beta_{jz} - ck_{jz}/\omega_j) \} E_{jy}, \\ D_{jy} &= (\gamma_j^2/\mu_j) \{ \varepsilon_j \mu_j (1 - \beta_{jz} ck_{jz}/\omega_j) + \beta_{jz} (ck_{jz}/\omega_j - \beta_{jz}) \} E_{jy}, \\ B_{jx} &= (ck_{jz}/\omega_j) E_{jy}, \quad B_{jz} = (ck_{jx}/\omega_j) E_{jy}, \quad H_{jz} = (ck_{jz}/\mu_j \omega_j) E_{jy}, \\ D_{jx} &= D_{jz} = H_{jy} = B_{jy} = 0, \quad [n, E_j] = -E_{jy} e_x, \quad [n, H_j] = H_{jx} e_y, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс $j = 1, 2, 3$ относится соответственно к волнам в 1-ой, 2-ой и 3-ей средах, а k_{jx} , k_{jz} , ω_j — компоненты волновых векторов и частота рассматриваемых волн.

Граничные условия (3) имеют место на двух движущихся со скоростью u_z границах раздела, т. е. при $z = u_z t$ и $z = u_z t + L$. Так как компоненты всех волн пропорциональны $\exp [i(k_j r - \omega_j t)] = \exp [i(k_{jx} x + k_{jz} z - \omega_j t)]$, то для того, чтобы в граничных условиях отсутствовала явная зависимость от времени « t » и координат « x » и « z », необходимо, чтобы при переходе из одной среды в другую оставались без изменения величины I_ω и I_x :

$$\begin{aligned} I_\omega &= ck_0 \beta - \omega_0 = ck_{0z} \beta_z - \omega_0 = ck_1 \beta - \omega_1 = ck_2^{(\pm)} \beta - \omega_2^{(\pm)} = ck_3^{(\pm)} \beta - \omega_3^{(\pm)}, \\ I_x &= k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}^{(\pm)} = k_{3x}^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Инвариантность величин I_ω и I_x соответствует известным условиям равенства частот и тангенциальных компонент волновых векторов всех волн в системе, где граница раздела покоится. Тогда с помощью (5) и инвариантов (6) можно показать, что граничные условия (3) при $z = u_z t$ и $z = u_z t + L$ приводят к системе

$$\begin{aligned} A_1^{(+)} + A_1^{(-)} &= A_2^{(+)} + A_2^{(-)}, \quad a_1^{(+)} A_1^{(+)} + a_1^{(-)} A_1^{(-)} = a_2^{(+)} A_2^{(+)} + a_2^{(-)} A_2^{(-)}, \\ \varphi_2^{(+)} A_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)} A_2^{(-)} &= \varphi_3^{(+)} A_3^{(+)}, \quad \varphi_2^{(+)} a_2^{(+)} A_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)} a_2^{(-)} A_2^{(-)} = \varphi_3^{(+)} a_3^{(+)} A_3^{(+)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_j^{(\pm)} &= E_{jy}^{(\pm)}/\omega_j^{(\pm)}, \quad \varphi_j^{(\pm)} = \exp(i k_{jz}^{(\pm)} L), \quad x_j = \varepsilon_j \mu_j - 1, \\ a_j^{(\pm)} &= \mu_j^{-1} (ck_{jz}^{(\pm)} - \beta_z \omega_j^{(\pm)}) - x_j \gamma_j^2 \mu_j^{-1} (\beta_z - \beta_{jz}) (\omega_j^{(\pm)} - \beta_{jz} ck_{jz}^{(\pm)}), \quad \gamma_j^{-2} = 1 - \beta_{jz}^2. \end{aligned} \quad (7a)$$

Здесь $j = 1, 2, 3$ соответствует волнам в первой, второй и третьей средах и в целях компактной записи граничных условий принято, что для падающей волны $E_{0y} = E_{1y}^{(+)}$, $\omega_0 = \omega_1^{(+)}$, $k_{0z} = k_{1z}^{(-)}$, $a_0 = a_1^{(+)}$; для отраженной волны $E_{1y} = E_{1y}^{(-)}$, $\omega_1 = \omega_1^{(-)}$, $k_{1z} = k_{1z}^{(-)}$, $a_1 = a_1^{(-)}$; для прошедшей волны $E_{3y} = E_{3y}^{(+)}$, $\omega_3 = \omega_3^{(+)}$, $k_{3z} = k_{3z}^{(+)}$, $a_3 = a_3^{(+)}$.

Решение системы (7) имеет вид

$$E_{1y} = (-E_{0y}) \frac{\omega_1 \Delta_1}{\omega_0 \Delta_0}, \quad E_{3y} = E_{0y} \frac{\omega_3 \Delta_3}{\omega_0 \Delta_0}, \quad E_{2y}^{(\pm)} = (\pm E_{0y}) \frac{\omega_2 \Delta_2}{\omega_0 \Delta_0}, \quad (8)$$

где

$$\Delta_0 = \Delta_1^{(+)} = x_2 (a_3^{(+)} - a_2^{(+)})(a_1^{(-)} - a_2^{(-)}) + (a_2^{(+)} - a_2^{(-)})(a_3^{(+)} - a_1^{(-)}),$$

$$\Delta_1 = \Delta_1^{(-)} = x_2 (a_3^{(+)} - a_2^{(+)})(a_1^{(+)} - a_2^{(-)}) + (a_2^{(+)} - a_2^{(-)})(a_3^{(+)} - a_1^{(+)}),$$

$$\Delta_2^{(\pm)} = (a_1^{(+)} - a_1^{(-)})(a_3^{(+)} - a_2^{(\mp)}) \varphi_2^{(+)/\varphi_2^{(\pm)}}, \quad x_2 = \varphi_2^{(+)/\varphi_2^{(-)}} - 1, \quad (9)$$

$$\Delta_3 = \Delta_3^{(+)} = (a_1^{(+)} - a_1^{(-)})(a_2^{(+)} - a_2^{(-)}) \varphi_2^{(+)/\varphi_3^{(+)}}.$$

При $\Delta \rightarrow 0$ и $\beta_{1z} = 0$ формулы (7), (8) и (9) переходят в аналогичные формулы работы [6].

К этим формулам необходимо добавить выражения для частот $\omega_1 = \omega_1^{(-)}$, $\omega_2^{(\pm)}$, $\omega_3^{(+)} = \omega_3$ и компонент волновых векторов $k_{1z} = k_{1z}^{(-)}$, $k_{2z}^{(\pm)}$, $k_{3z} = k_{3z}^{(+)}$ через частоту ω_0 и компоненты k_{0x} , k_{0z} волнового вектора падающей волны. Их можно определить, решая в каждой из движущихся сред систему, состоящую из инвариантов (6) и дисперсионного уравнения для движущейся среды [4]:

$$c^2 k_j^2 / \omega_j^2 = 1 + x_j \gamma_j^2 (1 - \beta_j c k_j / \omega_j)^2, \quad (10)$$

$$c k_{jz} \beta_z - \omega_j = I_\omega = c k_{0z} \beta_z - \omega_0, \quad k_{jx} = I_x = k_{0x}.$$

Данная система имеет в каждой среде ($j = 1, 2, 3$) два решения:

$$\omega_j^{(\pm)} = (-I_\omega) \gamma^2 \{ [1 + x_j \gamma_j^2 \beta_{jz} (\beta_z - \beta_{jz})] \pm \beta_z f_j^{1/2} \} / d_j, \quad (11)$$

$$c k_{jz}^{(\pm)} = (-I_\omega) \gamma^2 \{ [\beta_z + x_j \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_{jz})] \pm f_j^{1/2} \} / d_j,$$

где

$$f_j = (1 + x_j) - d_j (c I_x / \gamma I_\omega)^2, \quad x_j = \epsilon_j \mu_j - 1,$$

$$d_j = 1 - x_j \gamma^2 \gamma_j^2 (\beta_z - \beta_{jz})^2, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta_z^2, \quad \gamma_j^{-2} = 1 - \beta_{jz}^2.$$

Эти два решения соответствуют двум волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях оси z .

Если теперь подставить выражения для $\omega_j^{(\pm)}$ и $k_{jz}^{(\pm)}$ в формулы (7а) для $a_j^{(\pm)}$, то после несложных преобразований, учитывая при этом инвариантность величины I_ω , можно получить более простые выражения для $a_j^{(\pm)}$:

$$a_j^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} \{ 1 - (c I_x / \gamma I_\omega)^2 d_j / (1 + x_j) \}^{1/2}. \quad (12)$$

Мы рассмотрели случай, когда электрический вектор E_0 падающей волны перпендикулярен плоскости падения (x, z). Нетрудно видеть из соотношений (1) и (4), что при этом магнитный вектор H_0 падающей волны будет лежать в плоскости падения. Для того, чтобы получить необходимые формулы в случае падающей волны произвольной поляризации, достаточно получить формулы, аналогичные (8), (9) и (12), для случая, когда магнитный вектор H_0 падающей волны перпендикулярен плоскости падения. Для этого необходимо выразить из соотношений связи (2) и уравнений Максвелла (1) величины D , E и B через магнитное поле H_0 и подставить их в граничные условия (3). После громоздких преобразований можно показать, что в этом случае граничные условия опять сводятся к системе (7), в которой под величинами $A_j^{(\pm)}$ следует подразумевать отношения $H_j^{(\pm)} / \omega_j^{(\pm)}$ и во всех выражениях нуж-

но заменить ϵ_j на μ_j и наоборот. Тогда формулы для H_{1y} , H_{3y} и $H_{2y}^{(\pm)}$ будут иметь вид (8) и (9), где под $a_j^{(\pm)}$ следует понимать

$$a_j^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_j}} \{ 1 - (cI_x/\gamma I_\omega)^2 d_j / (1 + \kappa_j) \}^{1/2}. \quad (12a)$$

Выражения (11) для частот $\omega_j^{(\pm)}$ и компонент $k_{jz}^{(\pm)}$ волновых векторов в этом случае остаются без изменения, так как исходные уравнения системы (10) одинаковы для волн любой поляризации.

4. Формулы (8), (9), (11) и (12) однозначно определяют все нужные нам решения поставленной задачи. Однако при их выводе, особенно при получении системы (7), предполагалось, что при взаимодействии электромагнитных волн с движущейся диэлектрической пластинкой всегда есть отраженная волна. Однако это не всегда так. Например, когда скорость движения границы раздела больше фазовой скорости распространения электромагнитной волны в среде перед ней или когда при наклонном падении проекция фазовой скорости отраженной волны на направление движения границы раздела меньше скорости этой границы, отраженная волна отсутствует, поскольку она не в состоянии обогнать границу раздела. Такой случай в дальнейшем мы будем называть случаем «сверхсветового» движения границы раздела. Роль отраженной волны, которая имеет место при «досветовом» движении пластинки, в данном случае будет играть вторая прошедшая волна $E_3^{(-)}(\mathbf{r}, t) = E_3^{(-)} \exp [i(\mathbf{k}_3^{(-)}\mathbf{r} - \omega_3^{(-)}t)]$, распространяющаяся в среде за пластинкой в направлении, противоположном первой прошедшей волне $E_3^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_3^{(+)} \exp [i(\mathbf{k}_3^{(+)}\mathbf{r} - \omega_3^{(+)}t)]$. Необходимость введения этой дополнительной прошедшей волны при «сверхсветовом» движении пластинки очевидна, например, из формальных соображений существования решений системы (7) четырех уравнений в случае, когда $A_1^{(-)} \sim E_1^{(-)} = 0$.

При этом качественное отличие «сверхсветового» движения от «досветового» заключается в том, что при «досветовом» движении вторая волна $E_2^{(-)}$ внутри пластинки появляется за счет частичного отражения первой волны $E_2^{(+)}$ на задней грани пластинки, а при «сверхсветовом» движении появление второй волны $E_2^{(-)}$ внутри пластинки обусловлено законами преломления на «сверхсветовой» границе (см., например, [5]). Следовательно, преломление этих двух волн $E_2^{(\pm)}$ на второй границе пластинки и приводит к появлению второй прошедшей волны. Таким образом, для того, чтобы получить необходимые формулы при «сверхсветовом» движении пластинки, нужно в системе (7) положить $A_1^{(-)} = 0$ (отраженной волны нет), а в третьем и четвертом уравнениях добавить вторую прошедшую волну $A_3^{(-)}$. В этом состоит единственное отличие от всех формул для «досветового» случая. Тогда получим

$$\begin{aligned} A_1^{(+)} &= A_2^{(+)} + A_2^{(-)}, & a_1^{(+)}A_1^{(+)} &= a_2^{(+)}A_2^{(+)} + a_2^{(-)}A_2^{(-)}, \\ \varphi_2^{(+)}A_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)}A_2^{(-)} &= \varphi_3^{(+)}A_3^{(+)} + \varphi_3^{(-)}A_3^{(-)}, & (13) \\ \varphi_2^{(+)}a_2^{(+)}A_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)}a_2^{(-)}A_2^{(-)} &= \varphi_3^{(+)}a_3^{(+)}A_3^{(+)} + \varphi_3^{(-)}a_3^{(-)}A_3^{(-)}. \end{aligned}$$

Решения этой системы имеют вид

$$E_{2y}^{(\pm)} = (\pm E_{0y}) \frac{\omega_2^{(\pm)}\Delta_2^{(\pm)}}{\omega_0\Delta_0}, \quad E_{3y}^{(\pm)} = (\pm E_{0y}) \frac{\omega_3^{(\pm)}\Delta_3^{(\pm)}}{\omega_0\Delta_0}, \quad (14)$$

где

$$\Delta_0 = a_2^{(+)} - a_2^{(-)}, \quad \Delta_2^{(\pm)} = a_1^{(+)} - a_2^{(\mp)}, \quad x_2 = (\varphi_2^{(+)} / \varphi_2^{(-)}) - 1, \quad (15)$$

$$\Delta_3^{(\pm)} = \{ x_2 (a_2^{(+)} - a_3^{(\mp)}) (a_1^{(+)} - a_2^{(-)}) + (a_1^{(+)} - a_3^{(\mp)}) (a_2^{(+)} - a_2^{(-)}) \} \varphi_2^{(-)} / \varphi_3^{(\pm)}.$$

Здесь величины $\omega_j^{(\pm)}$, $k_{jz}^{(\pm)}$, $\varphi_j^{(\pm)}$ и $a_j^{(\pm)}$ имеют такой же вид, как и при «досветовом» движении, т. е. определяются формулами (7а), (11) и (12).

Если магнитный вектор H_0 перпендикулярен плоскости падения, то формулы для H_{2y}^{\pm} и H_{3y}^{\pm} принимают вид (14), (15), где $a_j^{(\pm)}$, как и при «досветовом» движении, даются выражениями (12а).

Следует подчеркнуть, что взаимодействие электромагнитной волны со «сверхсветовой» диэлектрической пластинкой имеет место только тогда, когда пластинка движется навстречу падающей волне. В противном случае волна не догоняет пластинку и взаимодействия нет.

Выше мы формально вывели формулы для любых скоростей движения сред и границы раздела. Однако физически реализуемым может быть лишь такой «нормальный» разрыв скоростей, когда скорость границы раздела будет больше скорости движения среды внутри пластинки. В противном случае разрыв будет неустойчив. Наиболее реальными являются случаи ударной волны, когда все среды покоятся ($\beta_{jz} \equiv 0$) а перемещается только граница раздела ($\beta_z \neq 0$), и случай, когда скорость движения среды внутри пластинки β_{2z} совпадает со скоростью границы раздела β_z .

Кроме этого следует указать, что при «сверхсветовом» движении границы раздела (когда на границе раздела образуются сразу две преломленные волны) формально полученное нами решение (14) имеет смысл только для таких движений среды внутри пластинки, когда фазовая скорость второй преломленной волны ($v_{2\phi}^{(-)} = \omega_2^{(-)} / k_{2z}^{(-)}$ или $v_{3\phi}^{(-)} = \omega_3^{(-)} / k_{3z}^{(-)}$) меньше скорости границы раздела u_z . При нормальном падении на пластинку, у которой перемещается только граница раздела ($\beta_{1z} = \beta_{2z} = \beta_{3z} = 0$, $\beta_z \neq 0$), это, в силу формул (11), приводит к условию, чтобы скорость границы u была больше фазовой скорости света во всех средах, т. е. $\beta \sqrt{\epsilon_j \mu_j} > 1$, где $j = 1, 2$ и 3 . Если же, например, пластинка как целое (т. е. $\beta_{2z} = \beta_z$) движется со сверхсветовой скоростью, то вторая из преломленных волн всегда обгоняет границу раздела и полученные нами формулы несправедливы. В этом случае при движении такой «сверхсветовой» пластинки могут иметь место эффекты типа черенковского излучения.

5. В качестве примера применения полученных общих формул вычислим коэффициенты отражения R и пропускания T при нормальном падении волны на пластинку. При этом будем предполагать, что среды по обе стороны от пластинки покоятся. Заметим, что при нормальном падении нет необходимости проводить вычисления для случаев различной поляризации падающей волны ($E_0 \perp$ плоскости падения, $H_0 \perp$ плоскости падения), так как в обоих случаях формулы идентичны.

Тогда без учета поглощения внутри и вне пластинки получим для $R = |E_{1y} / E_{0y}|^2$, $T_{1,2} = n_0 |E_{3y}^{(\pm)} / E_{0y}|^2$ следующие выражения:

а) при «досветовом» движении ($\beta_z \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} < 1$)

$$R = \left(\frac{\omega_{\text{отр}}}{\omega_{\text{пад}}} \right)^2 \frac{(n^2 - 1)^2 (1 - \cos \Phi_0) + (n_0 - 1) \xi}{8n^2 + (n^2 - 1)^2 (1 - \cos \Phi_0) + (n_0 - 1) (\xi + 8n^2)}, \quad (16)$$

$$T = \left(\frac{\omega_{\text{прош}}}{\omega_{\text{пад}}} \right)^2 \frac{8n_0 n^2}{8n^2 + (n^2 - 1)^2 (1 - \cos \Phi_0) + (n_0 - 1) (\xi + 8n^2)},$$

где

$$\omega_{отр} = \omega_{пад}(1 - \beta_z n_1)/(1 + \beta_z n_1), \quad \omega_{прош} = \omega_{пад}(1 - \beta_z n_1)/(1 - \beta_z n_3),$$

$$\xi = 2n^2(n_0 - 1) - (n_0 + 1)(n^2 - 1)(1 - \cos \Phi_0), \quad (17)$$

$$n = n_2/n_1, \quad n_0 = n_3/n_1, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta_z^2, \quad \gamma_2^{-2} = 1 - \beta_{2z}^2, \quad \mu_j = 1,$$

$$n_j = \sqrt{\epsilon_j} \quad (j = 1, 2, 3);$$

величина

$$\Phi_0 = \frac{2\omega_{пад}n_2L}{c} \gamma^2(1 - \beta_z n_1)/[1 - (n_2^2 - 1)\gamma^2\gamma_2^2(\beta_z - \beta_{2z})^2] \quad (18)$$

соответствует набегу фазы волны внутри такой движущейся пластинки, если ее скорость $u_{zz} = c\beta_{2z}$ отлична от скорости $u_z = c\beta_z$ движения границы раздела;

б) при «сверхсветовом» движении ($\beta\sqrt{\epsilon_1\mu_1} > 1$)

$$R_{эфф} = T_2 = \left(\frac{\omega_{2прош}}{\omega_{пад}}\right)^2 \{ (n^2 - 1)^2(1 - \cos \Phi_0) + (n_0 - 1)\xi \} / 8n^2n_0, \quad (19)$$

$$T = T_1 = \left(\frac{\omega_{1прош}}{\omega_{пад}}\right)^2 \{ 8n^2 + (n^2 - 1)^2(1 - \cos \Phi_0) + (n_0 - 1)(\xi + 8n^2) \} / 8n^2n_0,$$

где

$$\Phi_0 = \frac{2\omega_{пад}Ln_2}{c} \gamma^2(1 + \beta n_1)/[1 - (n_2^2 - 1)\gamma^2\gamma_2^2(\beta - \beta_2)^2],$$

$$\omega_{1прош} = \omega_3^{(+)} = \omega_{пад}(1 + \beta n_1)/(1 + \beta n_3), \quad \omega_{пад} = \omega_0, \quad \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad (20)$$

$$\gamma_2^{-2} = 1 - \beta_2^2, \quad \omega_{2прош} = \omega_3^{(-)} = \omega_{пад}(1 + \beta n_1)/(1 - \beta n_3), \quad \beta = -\beta_z, \quad \beta_2 = -\beta_{2z},$$

а все остальные величины даны в (17) и (18).

При приближении скорости движения пластинки $u = -u_z$ к фазовой скорости c/n_1 распространения волны в среде перед ней коэффициент отражения R (и $R_{эфф}$) и частота отраженной волны $\omega_{отр}$ резко возрастают. Естественно, что это возрастание будет происходить до тех пор, пока можно вводить понятие диэлектрической постоянной $\epsilon_1 = n_1^2$ в среде перед пластинкой и не учитывать ее дисперсионные свойства.

Если $L = 0$, то $\Phi_0 = 0$ и приведенные выше формулы дают коэффициенты отражения и пропускания на фронте ударной волны, когда среды по обе стороны от нее покоятся.

Полученные выше формулы дают возможность рассчитывать коэффициенты отражения и пропускания в том случае, когда движущаяся пластинка и среды по обе стороны от нее представляют собой движущуюся однородную и изотропную плазму. В этом случае для достаточно холодной плазмы или достаточно длинных волн (пространственной дисперсией в системе покоя пренебрегается) нужно везде вместо величин $\epsilon_j = n_j^2$ подставить $\epsilon_j = 1 - \omega_{jp}'^2/\omega_j'^2$, где ω_j' и ω_{jp}' — соответственно частота волны и плазменная частота для j -й среды в системе ее покоя. При этом плазменная частота инвариантна относительно преобразований Лоренца.

6. В заключение мы рассмотрим один пример применения полученных нами формул. Пусть показатель преломления диэлектрической пластинки n_2 , движущейся навстречу волне ($\beta_z = -\beta$), мало отличается от

$n_1 = n_3$, т. е. $n_2 = n_1 + \Delta n$, $n_0 = 1$, $n = 1 + \Delta n/n_1$, $\Delta n \ll n_1$. Тогда при «досветовом» ($\beta n_1 < 1$) и «сверхсветовом» ($\beta n_1 > 1$) движениях имеем

$$1) R = R_{\min} = 0, \quad T = T_{\max} = 1 \quad (\Phi_0 = 2\pi m), \quad (21)$$

$$2) R = R_{\max} = \left(\frac{\omega_{\text{отр}}}{\omega_{\text{пад}}} \right)^2 \left(\frac{\Delta n}{n_1} \right)^2, \quad T = T_{\min} = 1 - \left(\frac{\Delta n}{n_1} \right)^2 \quad (\Phi_0 = \pi(2m + 1)),$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$; $\omega_{\text{отр}} = \omega_{\text{пад}}(1 + \beta n_1)/(1 - \beta n_1)$, и под отраженной волной в «сверхсветовом» случае понимается вторая прошедшая волна.

Такая движущаяся диэлектрическая пластинка может являться аналогом мощного импульса излучения в усилителях света, который при своем прохождении по активной среде за счет нелинейных эффектов [7] изменяет ее диэлектрическую постоянную. При этом фактически перемещается со скоростью u граница пластинки, а среды внутри и вне ее покоятся. Нетрудно видеть, что при $u \sim c/n_1$ будет происходить сильное отражение электромагнитной волны от такого импульса с заметным сдвигом частот:

$$\Delta\omega = \omega_{\text{отр}} - \omega_{\text{пад}} = \omega_{\text{пад}} 2\beta n_1 / (1 - \beta n_1).$$

В работе [8] сообщалось об экспериментальном наблюдении нелинейных эффектов в рубине, приводящих к изменению его показателя преломления, пропорциональному мощности излучения, так что при мощности в $5 \cdot 10^6 \text{ вт}$ изменение Δn составляло $2 \cdot 10^{-6}$. Тогда при достижимых в настоящее время в усилителях света мощностях порядка 10^9 вт изменение показателя преломления может достигать величин $\Delta n \sim 10^{-3}$ и более. В этом случае коэффициент отражения R от такого импульса будет порядка единицы при $\Delta u = |u - c/n_1| \sim 1\%$ и при этом $\omega_{\text{отр}} \sim 10^3 \omega_{\text{пад}}$. Заметим, что при нелинейном усилении импульса света скорость перемещения максимума импульса u может отличаться от скорости света в среде [9]. На возможность появления при этом некоторых новых эффектов, аналогичных рассмотренному, указывалось в работе [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Уеб, К. Ф. Сэй, Phys. Rev., 144 № 2, 665 (1966).
2. С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 284 (1967).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
4. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
5. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, № 4, 491 (1959).
6. С. Н. Столяров, ЖТФ, 33, № 5, 565 (1963).
7. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Письма ЖЭТФ, 3, 137 (1966); С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, № 6, 1537 (1966); Г. А. Аскаръян, Письма ЖЭТФ, 4, № 10, 400 (1966).
8. D. J. Bradley, G. Magyar, M. C. Richardson, Nature, 212, № 5057, 63 (1966).
9. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ЖЭТФ, 50, № 1, 23 (1966).
Н. Г. Басов, В. С. Летохов, ДАН СССР, 167, № 1, 75 (1966).
10. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ДАН СССР, 165, № 1, 58 (1965).

INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH A DIELECTRIC
PLATE MOVING IN A MEDIUM*S. N. Stolyarov*

The paper presents the formulae for amplitudes and frequencies of a reflected and transmitted wave at an oblique incidence of an electromagnetic wave on a dielectric plate in the case when the interfaces and media on both sides of the plate move with different velocities. It is shown that when the velocities of the interface and the media inside the plate are greater than the phase one of the wave propagating before the plate, the reflected wave is absent and behind the plate there exist two transmitted waves. At a normal incidence on the plate moving in a stationary medium, the reflection and transmission coefficients for calculating the moving plasma layer are determined. By means of the formulae obtained, the reflection coefficient of the electromagnetic wave from the large radiation impulses in light amplifiers (in these amplifiers the change of electromagnetic properties of the medium is due to the non-linear effects and is proportional to the impulse power) is estimated.

УДК 621.371.167 : 621.371.222.5

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СТЫКЕ ИМПЕДАНСНОЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

А. Г. Дмитрёнко, В. Л. Мирнов

Получено и исследовано строгое решение задачи о дифракции поверхностной ТМ-волны на границе раздела между импедансной полуплоскостью и поглощающей полубесконечной пластиной.

Используемые в антенной технике открытые линии передачи поверхностных волн могут содержать неоднородности типа сочленения канализирующей поверхностную волну замедляющей системы с поглощающей насадкой.

В настоящей работе исследуются дифракционные явления, возникающие при набегании поверхностной электромагнитной ТМ-волны на ребро импедансной полуплоскости в присутствии полубесконечной поглощающей пластины.

Импедансная полуплоскость с индуктивными импедансами граней ($z_+ = z_- = -iQ$) и поглощающая пластина расположены соответственно при $x_1 = 0, x_3 \leq 0$ и $x_1 = 0, x_3 \geq 0$ (x_1, x_2, x_3 — прямоугольные координаты). Поверхностная ТМ-волна распространяется вдоль верхней ($x_1 = +0$) грани полуплоскости. Единственная отличная от нуля компонента магнитного поля этой волны имеет вид

$$H_2^0 = \exp(-kQx_1 + ihx_3), \quad (1)$$

где $h = k\beta$, $\beta = \sqrt{1+Q^2}$ — коэффициент замедления, временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, и выбрана система единиц Гаусса.

Используемую бесконечно тонкую модель поглощающей пластины будем описывать приближенными граничными условиями, предложенными впервые Леви—Чивити ([1], стр. 30).

$$E_{3n}^{(+)} = E_{3n}^{(-)} = \tilde{\rho} (H_{2n}^{(+)} - H_{2n}^{(-)}), \quad x_1 = 0, \quad x_3 \geq 0, \quad (2)$$

которые получаются в предположении, что материал пластины является хорошо проводящим, а ее толщина много меньше толщины скин-слоя (см. также [2]).

В выражении (2) и в дальнейшем значки (+) и (—) относятся соответственно к полю в верхнем ($x_1 \geq 0$) и нижнем ($x_1 \leq 0$) полупространствах, $\tilde{\rho}$ — удельное поверхностное сопротивление, определяемое через удельную проводимость материала пластины σ и ее толщину l ,

$$\tilde{\rho} = (\sigma l)^{-1}. \quad (3)$$

В предельных случаях $\sigma \rightarrow \infty, l \neq 0$ и $l = 0, \sigma < \infty$, как следует из (3), (2), имеют место соответственно: при $\tilde{\rho} = 0$ равенство нулю танген-

циальной компоненты электрического поля (идеально проводящая пластина) и при $\rho' = \infty$ непрерывность компонент электромагнитного поля (пластина отсутствует).

Вторичное поле будем искать в виде интегральной суперпозиции плоских волн

$$H_2^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} u^{(\pm)}(w) \exp \left[i \left(\pm \sqrt{k^2 - w^2} x_1 - w x_3 \right) \right] dw, \quad \text{Im} \sqrt{k^2 - w^2} \geq 0. \quad (4)$$

Подстановка суммарного поля в граничные условия на поверхности импедансной полуплоскости и поглощающей пластины приводит к системе парных интегральных уравнений, которая эквивалентна следующей системе функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} (\sqrt{k^2 - w^2} - ikQ) u^{(+)}(w) &= S_1^+(w), & (\sqrt{k^2 - w^2} - ikQ) u^{(-)}(w) &= S_2^+(w), \\ \sqrt{k^2 - w^2} u^{(+)}(w) + k \tilde{\rho} [u^{(+)}(w) - u^{(-)}(w)] - \frac{k}{2\pi i} \frac{\tilde{\rho} + iQ}{w + h} &= S_1^-(w), & (5) \\ \sqrt{k^2 - w^2} u^{(-)}(w) - k \tilde{\rho} [u^{(+)}(w) - u^{(-)}(w)] + \frac{k}{2\pi i} \frac{\tilde{\rho}}{w + h} &= S_2^-(w). \end{aligned}$$

В уравнениях (5) функции $S_n^+(w)$ и $S_n^-(w)$ ($n=1,2$) удовлетворяют условиям леммы Жордана и являются регулярными соответственно в верхней ($\text{Im } w > -\kappa$) и нижней ($\text{Im } w < \kappa$) полуплоскостях комплексной переменной w , перекрывающихся в окрестности вещественной оси ($0 < \kappa < \text{Im } k$).

Исключая из (5) функции $u^{(\pm)}(w)$, можно получить два независимых функциональных уравнения типа Винера—Хопфа, решения которых находятся стандартным способом [3]. Обратный переход к функциям $u^{(\pm)}(w)$ и подстановка их в выражение (4) позволяют записать после ряда преобразований вторичное дифракционное поле в виде

$$\begin{aligned} H_2^{(\pm)} &= \frac{k}{4\pi i} \psi_1^+(k \cos \sigma_1) \int_{\epsilon}^{\mp} \left[\frac{iQ}{k \sqrt{1 + \cos \sigma_1} \sqrt{1 - \cos \tau}} \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{\rho + iQ}{\psi_2^+(k \cos \sigma_1) \psi_2^-(k \cos \tau)} \right] \frac{\sin \tau \exp(ikr \cos(\tau \mp \varphi))}{(\cos \tau - \cos \sigma_1) \psi_1^+(k \cos \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

В выражении (6) осуществлен переход от плоскости w к плоскости τ с помощью преобразования $w = k \cos \tau$ и к цилиндрической системе координат r, φ ($x_1 = r \sin \varphi, x_3 = r \cos \varphi$). Угол наблюдения φ будем считать в верхнем ($x_1 \geq 0$) полупространстве положительным, в нижнем ($x_1 \leq 0$) — отрицательным. Функции $\psi_1^{\pm}(k \cos \tau)$ и $\psi_2^{\pm}(k \cos \tau)$ совпадают с функциями $\varphi^{\pm}(k \cos \tau)$, приведенными в работе [4], если в последних соответственно заменить обозначения $Z \rightarrow Q, \sigma \rightarrow \sigma_1$ и $Z \rightarrow i\rho = 2i\tilde{\rho}, \sigma \rightarrow \sigma_2$.

В предельных случаях $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ выражение (6) дает соответственно решения задач о дифракции поверхностной ТМ-волны на сочленении импедансной и идеально проводящей полуплоскостей [5] и на ребре импедансной полуплоскости [4].

Вычисление интеграла в (6) проведем в дальней зоне ($kr \gg 1$) методом перевала.

Вычеты в полюсе $\tau = \pi - \sigma_1$ дают в квадрантах $x_1 > 0, x_3 < 0$ и $x_1 < 0, x_3 < 0$ соответственно поля отраженной и прошедшей на нижнюю сторону импедансной полуплоскости поверхностных волн:

$$H_2^{(\pm)n_1} = \frac{\operatorname{tg} \sigma_1}{2} \left[\frac{\sin \sigma_1}{1 + \cos \sigma_1} \mp \frac{\sin \sigma_2 - \sin \sigma_1}{\cos \sigma_2 + \cos \sigma_1} \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1 - \sigma_2}^{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{udu}{\sin u} \right) \right] \times \quad (7)$$

$$\times \exp \left[i(\pm kx_1 \sin \sigma_1 - kx_3 \cos \sigma_1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma_1} \frac{udu}{\sin u} \right].$$

На основании (7) были рассчитаны коэффициенты отражения R и прохождения T поверхностных волн, выражения для которых зависят от интервала определения параметра ρ :

$$1) \quad 0 < \rho < 1,$$

$$R, T = \frac{Q}{2\beta} \left[\frac{Q}{1+\beta} \pm \frac{Q-i\rho}{\beta+g} \exp \left(-\frac{2}{\pi} U(a, b) \right) \right] \exp \left(-i \frac{V(0, 2b)}{\pi} \right), \quad (8)$$

где

$$g = \sqrt{|1-\rho^2|}, \quad a = \arcsin \rho, \quad b = \ln(\beta + Q);$$

$$2) \quad 1 < \rho < \infty,$$

$$R, T = \frac{Q}{2\beta} \left[\frac{Q}{1+\beta} \pm \frac{Q-i\rho}{\beta+ig} \exp(\Lambda + iL) \right] \exp \left(-i \frac{V(0, 2b)}{\pi} \right), \quad (9)$$

где

$$\Lambda = -\frac{1}{\pi} \left[U \left(\frac{\pi}{2}, c \right) + U \left(\frac{\pi}{2}, d \right) \right],$$

$$L = \frac{1}{\pi} \left[V \left(\frac{\pi}{2}, c \right) - V \left(\frac{\pi}{2}, d \right) \right], \quad c = \ln(Q + \beta)(\rho + g), \quad (10)$$

$$d = \ln[(Q + \beta)/(\rho + g)].$$

Введенные в (8)–(10) функции $U(x, y)$, $V(x, y)$ определяются следующим образом:

$$U(x, y) = 2 \int_0^x \frac{u \sin u \operatorname{ch} y + y \operatorname{sh} y \cos u}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2u} du,$$

$$V(x, y) = \int_0^y \frac{udu}{\operatorname{sh} u} + 2 \int_0^x \frac{y \operatorname{ch} y \sin u - u \cos u \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2u} du.$$

Верхние знаки в (8), (9) соответствуют R , нижние — T . Выражения (8)–(10) дают одинаковые значения при $\rho = 1$, а в предельных случаях $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ из них могут быть получены соответствующие формулы, приведенные в работах [4, 5].

Пространственное поле излучения получается в результате вычисления интеграла в (6) вдоль пути наибоыстрейшего спуска при $kr \gg 1$ и имеет вид цилиндрической волны, расходящейся от границы раздела полуплоскостей:

$$\begin{aligned}
 H_{2u}^{(\pm)} = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\cos \sigma_1}{\cos \sigma_1 + \cos \varphi}} \frac{\sin |\varphi|}{\cos \varphi - \cos \sigma_1} \left\{ \frac{\sin \sigma_1}{\sqrt{1 + \cos \sigma_1} \sqrt{1 - \cos \varphi}} \pm \right. \\
 & \pm \sqrt{\frac{\sin |\varphi| + \sin \sigma_2}{\sin |\varphi| - \sin \sigma_2}} \frac{\sin \sigma_1 - \sin \sigma_2}{(\cos \sigma_2 + \cos \sigma_1)(\cos \sigma_2 - \cos \varphi)} \times \\
 & \times \exp \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\sigma_1 - \sigma_2}^{\sigma_1 + \sigma_2} - \int_{|\varphi| - \sigma_2}^{|\varphi| + \sigma_2} \right) \frac{udu}{\sin u} \right] \times \\
 & \times \frac{1}{\sqrt{kr}} \exp \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\varphi| - \sigma_1}^{|\varphi| + \sigma_1} - \int_0^{2\sigma_1} \right) \frac{udu}{\sin u} + i(kr + \pi/4) \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Как следует из (11), поле излучения на самой поглощающей пластине ($\varphi = 0$) непрерывно и равно по величине полю в случае, когда пластина отсутствует [4]. Полученный результат можно объяснить следующим образом. Возбуждаемый первичным полем в поглощающей пластине электрический ток затухает по мере удаления от края пластины, поэтому магнитное поле на пластине в дальней зоне оказывается непрерывным. Кроме того, ток в пластине направлен вдоль оси Ox_3 , поэтому в направлении $\varphi = 0$ вклада в поле излучения не дает.

Отметим здесь также следующее обстоятельство. Вследствие того, что вторичные токи в пластине затухают, начиная с некоторого расстояния от края ($x_3 = 0$), ее можно оборвать, при этом влияние поглощающей вставки конечной длины должно быть эквивалентно влиянию полубесконечной пластины.

Воспользовавшись (11), можно вычислить плотность потока энергии, переносимой излученной волной:

$$S^{(\pm)} = \frac{c \beta}{32\pi^2 kr} F^{(\pm)}(\varphi). \tag{12}$$

В зависимости от величины удельного поверхностного сопротивления выражения для диаграммы направленности $F^{(\pm)}(\varphi)$ имеют различную аналитическую форму:

1) $0 \leq \rho \leq 1$,

$$\begin{aligned}
 F^{(\pm)}(\varphi) = & \frac{1}{\beta + \cos \varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{(\beta - \cos \varphi)^2} \left\{ \frac{Q^2}{(1 + \beta)(1 - \cos \varphi)} + \frac{\rho^2 + Q^2}{(g + \beta)(\sin |\varphi| + \rho)} \times \right. \\
 & \times \left| \frac{\sin |\varphi| - \rho}{\cos |\varphi| - g} \right| e^{2\alpha} \pm \frac{2Q^2 e^{\alpha}}{\sqrt{(1 + \beta)(1 - \cos \varphi)(g + \beta)(\sin |\varphi| + \rho)}} \sqrt{\left| \frac{\sin |\varphi| - \rho}{\cos \varphi - g} \right|} \Bigg\},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{\pi} U(a, b) + \frac{1}{2\pi} [U(a - |\varphi|, 0) + U(a + |\varphi|, 0)];$$

2) $1 \leq \rho \leq \infty$,

$$F^{(\pm)}(\varphi) = \frac{1}{\beta + \cos \varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{(\beta - \cos \varphi)^2} \left\{ \frac{Q^2}{(1 + \beta)(1 - \cos \varphi)} + \frac{Q^2 + \rho^2}{(\beta^2 + g^2)(g^2 + \cos^2 \varphi)} \times \right.$$

$$\times \frac{\rho - \sin |\varphi|}{\rho + \sin |\varphi|} e^{\Lambda + 2\Phi} \pm \frac{2Q}{(1+\beta)(1-\cos \varphi)} \frac{Q \cos W + \rho \sin W}{\sqrt{(\beta^2 + g^2)(g^2 + \cos^2 \varphi)}} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{\rho - \sin |\varphi|}{\rho + \sin |\varphi|}} \exp\left(\frac{\Lambda}{2} + \Phi\right) \right\}, \quad (14)$$

где

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \left[U\left(|\varphi| - \frac{\pi}{2}, \frac{c-d}{2}\right) - U\left(|\varphi| + \frac{\pi}{2}, \frac{c-d}{2}\right) \right],$$

$$W = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(g \frac{\beta - \cos \varphi}{g^2 + \beta \cos \varphi}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \left[V\left(|\varphi| - \frac{\pi}{2}, \frac{c-d}{2}\right) + V\left(|\varphi| + \frac{\pi}{2}, \frac{c-d}{2}\right) \right].$$

По известным выражениям (12)–(14) для плотности потока мощности легко рассчитать коэффициент излучения P :

$$P = \frac{Q}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [F^{(+)}(\varphi) + F^{(-)}(\varphi)] d\varphi,$$

и, воспользовавшись уравнением баланса энергии, коэффициент поглощения D :

$$D = 1 - P - |T|^2 - |R|^2.$$

Численный расчет коэффициентов прохождения T , отражения R поверхностных волн, диаграммы направленности поля излучения $F^{(\pm)}(\varphi)$, а также коэффициентов излучения и поглощения проводился с использованием ЭЦВМ М20.

Как видно из графиков на рис. 1, наличие поглощающей пластины не приводит к существенному уменьшению отражений от края полуплоскости. Мощность, переносимая прошедшей поверхностной волной, монотонно возрастает от нуля по мере увеличения удельного поверхностного сопротивления. Действительно, при $\rho = 0$ пластина становится идеально проводящей и полностью экранирует нижнее ($x_1 < 0$) полупространство. Увеличение удельного поверхностного сопротивления, согласно (3),

Рис. 1. Зависимость коэффициентов прохождения $|T|^2$ и отражения $|R|^2$ по мощности от удельного поверхностного сопротивления:

1 — $\beta = 1,01$; 2 — $\beta = 1,03$; 3 — $\beta = 1,05$; 4 — $\beta = 1,1$;
5 — $\beta = 1,2$; 6 — $\beta = \sqrt{2}$; 7 — $\beta = 2$; 8 — $\beta = 4$.

равносильно уменьшению удельной проводимости материала и толщины поглощающей пластины, что в конечном итоге повышает ее «прозрачность».

Фаза коэффициента отражения α_R (см. рис. 2) является отрицательной величиной и существенным образом зависит от свойств поглощающей пластины и замедления падающей поверхностной волны.

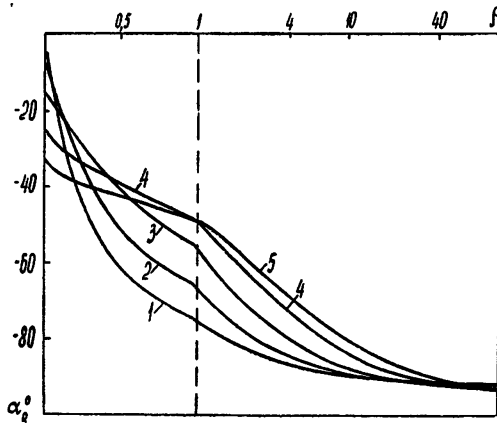


Рис. 2. Зависимость фазы коэффициента отражения α_R от удельного поверхностного сопротивления:

1— $\beta=1,01$; 2— $\beta=1,03$; 3— $\beta=1,1$; 4— $\beta=\sqrt{2}$; 5— $\beta=2$.

Из графиков на рис. 3а, б следует, что симметрия диаграммы направленности относительно направления $\varphi=0$, имевшая место в случае отсутствия поглощающей пластины, нарушается, при этом также уменьшается ширина диаграммы направленности, и направление максимального излучения оказывается приподнятым над поглощающей пластиной ($\varphi_{\text{max}} > 0$).

Численные расчеты (см. рис. 4) показывают, что поглощение электромагнитной энергии происходит за счет снижения мощности излучения и оказывается максимальным при некотором значении поверхностного сопротивления пластины. Значение поверхностного сопротивления, соответствующего максимуму поглощения, определяется замедлением поверхностной волны, а величина коэффициента поглощения в точке максимума, наоборот, не критична по отношению к замедлению.

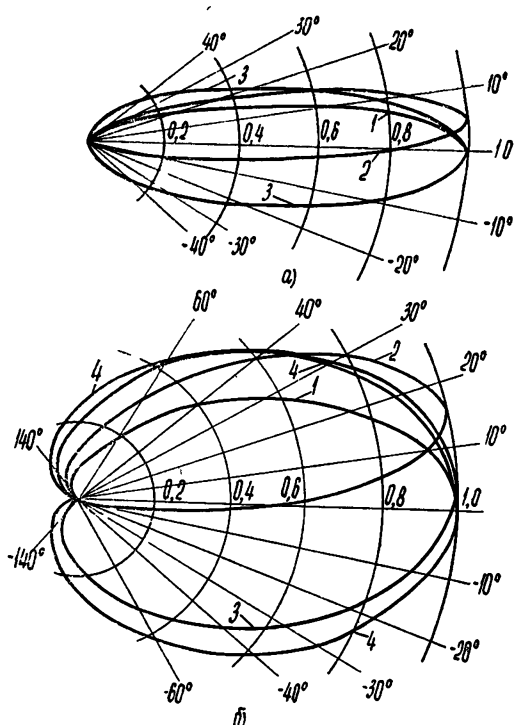


Рис. 3. Диаграмма направленности поля излучения:

а) $\beta=1,05$ (1— $\rho=0$; 2— $\rho=0,15$; 3— $\rho=\infty$), б) $\beta=\sqrt{2}$ (1— $\rho=0$; 2— $\rho=0,2$; 3— $\rho=6,0$; 4— $\rho=\infty$).

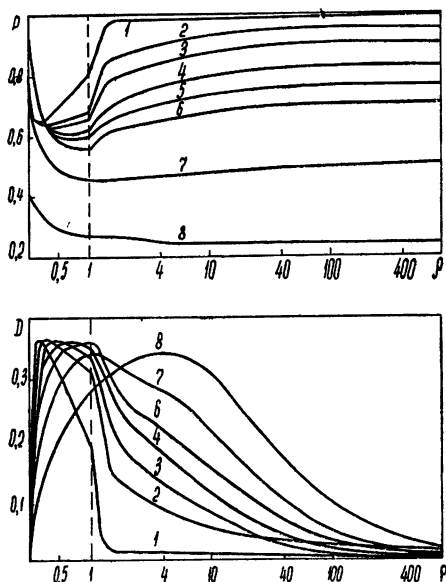


Рис. 4. Зависимость коэффициентов излучения P и поглощения D от удельного поверхностного сопротивления:

1 — $\beta = 1,01$; 2 — $\beta = 1,03$; 3 — $\beta = 1,05$;
 4 — $\beta = 1,1$; 5 — $\beta = 1,2$; 6 — $\beta = \sqrt{2}$; 7 — $\beta = 2$;
 8 — $\beta = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бейтмен, Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, М., 1958.
2. В. В. Колпаков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 3 (1958).
3. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.
4. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, № 2, 163 (1958).
5. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, № 1, 27 (1958).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
18 января 1967 г.

DIFFRACTION OF SURFACE ELECTROMAGNETIC WAVE AT THE JUNCTION OF IMPEDANCE AND ABSORBING HALF-PLANES

A. G. Dmitrenko, V. L. Mironov

Strict solution of the problem on the surface TM-wave diffraction at the interface between the impedance half-plane and the absorbing half-infinite plate is obtained and investigated.

УДК 621.371.165

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЭЛЛИПСОИДЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ВЕЛИЧИН $(a/\lambda)^2$ ВКЛЮЧИТЕЛЬНО

О. Е. Лысенко, Н. А. Хижняк

Разработан метод построения внутренних полей в эллипсоиде, а также полей рассеяния в волновой зоне в виде разложения по малому параметру (a/λ) . Эффективность метода иллюстрируется на примере гиротропного эллипсоида вращения с электрической и магнитной анизотропией. В этом случае найдены внутреннее поле и поле в волновой зоне с точностью до величин $(a/\lambda)^2$ включительно.

При рассмотрении рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом эллипсоиде с произвольными значениями тензоров ϵ_{ik} и μ_{ik} в приближении

$$a/\lambda < 1 \tag{1}$$

удобно пользоваться аппаратом интегральных уравнений [1]. В этой работе показано, что в приближении длинных волн (1) поле внутри и вне эллипсоида можно разложить по параметру a/λ . Полагая поля падающей волны $E_0(r)e^{i\omega t}$, $H_0(r)e^{i\omega t}$ и внутри эллипсоида $E(r)e^{i\omega t}$, $H(r)e^{i\omega t}$ разложенными по малому параметру a/λ , т. е.

$$\begin{aligned} E_0(r) &= E_0^{(0)} + (ik)E_0^{(1)} + (ik)^2E_0^{(2)} + \dots, \\ H_0(r) &= H_0^{(0)} + (ik)H_0^{(1)} + (ik)^2H_0^{(2)} + \dots, \\ E(r) &= E^{(0)} + (ik)E^{(1)} + (ik)^2E^{(2)} + \dots, \\ H(r) &= H^{(0)} + (ik)H^{(1)} + (ik)^2H^{(2)} + \dots, \end{aligned} \tag{2}$$

для определения величин $E^{(n)}$, $H^{(n)}$ будем иметь следующие интегральные уравнения:

$$E^{(n)}(r) = E_n^{(n)}(r) + \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int_V \left(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) E^{(n)}(r') \frac{dr'}{|r - r'|}, \tag{3}$$

$$H^{(n)}(r) = H_n^{(n)}(r) + \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) H^{(n)}(r') \frac{dr'}{|r - r'|}, \tag{4}$$

где V — объем эллипсоида, $r \in V$, ϵ_1, μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающего пространства, $E_n^{(n)}$ и $H_n^{(n)}$ определяются через $E_0^{(n)}$, $H_0^{(n)}$ и поля предыдущих приближений $E^{(0)}$, $E^{(1)}, \dots, E^{(n-1)}$ $H^{(0)}, H^{(1)}, \dots, H^{(n-1)}$.

В частности,

$$E_1^{(1)}(r) = E_0^{(1)}(r) - \frac{\mu_1}{4\pi} \int_V \left[\text{grad} \frac{1}{|r-r'|}, \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H^{(0)}(r') \right] dr'; \quad (5)$$

$$E_2^{(2)}(r) = E_0^{(2)}(r) + \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{8\pi} \int_V \left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) E^{(0)}(r') \text{grad} \right) \text{grad} |r-r'| dr' - \\ - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) E^{(0)}(r') \frac{dr'}{|r-r'|} - \frac{\mu_1}{4\pi} \int_V \left[\text{grad} \frac{1}{|r-r'|}, \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times H^{(1)}(r') \right] dr' \quad (6)$$

и аналогичные выражения для $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(2)}$.

Таким образом, задача сводится к нахождению эффективного метода построения решений уравнений (3), (4), определяющих поле внутри эллипсоида через заданное невозмущенное поле падающей волны.

При известном поле внутри эллипсоида нахождение рассеянного поля не вызывает затруднений. Действительно, поле рассеяния находится через электрический Π^e и магнитный Π^m потенциалы Герца следующим образом:

$$E_{\text{рас}} = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \Pi^e - ik \mu_1 \text{rot} \Pi^m, \\ H_{\text{рас}} = (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \Pi^m + ik \varepsilon_1 \text{rot} \Pi^e. \quad (7)$$

Выражения для потенциалов Герца через известное внутреннее поле имеют вид

$$\Pi^e = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) E(r') \frac{\exp(-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |r-r'|)}{|r-r'|} dr', \\ \Pi^m = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H(r') \frac{\exp(-ik \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} |r-r'|)}{|r-r'|} dr'. \quad (8)$$

При решении исходных интегральных уравнений (3), (4) будем основываться на следующей теореме [1]:

для внутренних точек эллипсоида $r \in V$, плотность заряда в котором распределена по некоторому степенному закону (определяемому полиномом n -степени)

$$\rho(r) = P_n(x, y, z),$$

объемный потенциал

$$W(r) = \int_V P_n(x', y', z') \frac{dr'}{|r-r'|} = Q_{n+2}(x, y, z) \quad (9)$$

тоже является полиномом, степень которого равна $n+2$.

Частным случаем этой теоремы является известное соотношение Дирихле для потенциала однородного эллипсоида:

$$\int_V \frac{dr'}{|r-r'|} = J_0^0 + (J_0^{200} x^2 + J_0^{020} y^2 + J_0^{002} z^2), \quad (10)$$

где постоянные J_0^{00} , J_0^{02} , J_0^{002} выражаются через эллиптические интегралы:

$$J_0^{200} = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}, \quad J_0^{020} = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)},$$

$$J_0^{002} = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}, \quad R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}. \quad (11)$$

Уравнение поверхности эллипсоида имеет каноническую форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (12)$$

Следствием этой теоремы является следующее утверждение: если при разложении поля рассеиваемой волны по параметру (a/λ) коэффициенты разложения имеют вид полиномов некоторой степени переменных x, y, z , коэффициенты разложения внутреннего поля в эллипсоиде также имеют вид полиномов той же степени. Частным случаем этого утверждения являются известные свойства однородного изотропного диэлектрического эллипсоида, помещенного во внешнее однородное электрическое поле [2].

Действительно, если свободные члены интегральных уравнений (3), (4) имеют вид полиномов степени n , то и решения этих уравнений можно искать в виде полиномов той же степени. Тогда интеграл справа, в соответствии с основной теоремой, повышает степень полинома на две единицы, а дифференциальный оператор второго порядка перед интегралом снова понижает эту степень на две единицы.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях справа и слева, получаем систему линейных алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты искомых полиномов.

Таким образом, если известны полиномы $Q_{n+2}(x, y, z)$ в соотношении (9), определение внутренних полей в эллипсоиде в зависимости от его ориентации и анизотропии сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Полученных соотношений достаточно для построения внутренних полей в эллипсоиде при самых общих предположениях относительно компонент тензоров ϵ_{ik} и μ_{ik} .

Следует подчеркнуть также известную универсальность полученных формул, так как они позволяют находить внутреннее поле эллипсоида независимо от его анизотропии как для случаев, когда этот эллипсоид находится в неограниченном пространстве, так и для случаев, когда эллипсоид помещен в электромагнитный волновод или резонатор.

Заметим, что интегральные уравнения (3), (4) позволяют находить внутреннее поле непосредственно через амплитуду падающей волны и не требуют знания полного поля (с учетом поля рассеяния) во внешней области. Поле рассеяния, как показано выше, выражается через внутреннее поле в эллипсоиде.

В дальнейшем будем полагать, что тензоры ϵ_{ik} и μ_{ik} имеют вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Для определения внутренних полей эллипсоида в нулевом приближении из уравнений (3), (4) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} E_x^{(0)} &= E_{0x}^{(0)} + (\tilde{\varepsilon}_0 E_x^{(0)} + i \varepsilon_2 E_y^{(0)}) J_0^{200}, \\ E_y^{(0)} &= E_{0y}^{(0)} + (-i \varepsilon_2 E_x^{(0)} + \tilde{\varepsilon}_0 E_y^{(0)}) J_0^{200}, \\ E_z^{(0)} &= E_{0z}^{(0)} + \tilde{\varepsilon}_3 E_z^{(0)} J_0^{200}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E_x^{(0)} &= A E_{0x}^{(0)} + i B E_{0y}^{(0)}, \\ E_y^{(0)} &= A E_{0y}^{(0)} - i B \frac{J_0^{200}}{J_0^{200}} E_{0x}^{(0)}, \\ E_z^{(0)} &= \frac{E_{0z}^{(0)}}{1 - \tilde{\varepsilon}_3 J_0^{200}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \tilde{\varepsilon}_0 J_0^{200})}{(1 - \tilde{\varepsilon}_0 J_0^{200})(1 - \tilde{\varepsilon}_0 J_0^{200}) - \varepsilon_2^2 J_0^{200} J_0^{200}}, \\ B &= \frac{\varepsilon_2 J_0^{200}}{(1 - \tilde{\varepsilon}_0 J_0^{200})(1 - \tilde{\varepsilon}_0 J_0^{200}) - \varepsilon_2^2 J_0^{200} J_0^{200}}, \\ \tilde{\varepsilon}_0 &= \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right), \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Аналогичные выражения для $H_x^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $H_z^{(0)}$ через $H_{0x}^{(0)}$, $H_{0y}^{(0)}$, $H_{0z}^{(0)}$ находятся заменой величин ε_{ik} на μ_{ik} .

Для построения внутренних полей в первом по (a/λ) приближении вычислим из (5) свободные члены интегральных уравнений (3), (4):

$$\begin{aligned} E_{1x}^{(1)} &= a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z = a_{01}^0x + (a_{02}^0 + \mu_1 \mu_3 H_z^{(0)} J_0^{200})y + \\ &+ (a_{03}^0 - \mu_1(-i \mu_2 H_x^{(0)} + \tilde{\mu}_0 H_y^{(0)}) J_0^{200})z. \end{aligned}$$

Легко получить подобные выражения для $E_{1y}^{(1)}$ и $E_{1z}^{(1)}$.

Здесь принято во внимание, что компоненты падающей волны в первом по (a/λ) приближении также являются линейными функциями координат:

$$\begin{aligned} E_{0x}^{(1)} &= a_{01}^0x + a_{02}^0y + a_{03}^0z, \\ &\dots \dots \dots \\ E_{0z}^{(1)} &= c_{01}^0x + c_{02}^0y + c_{03}^0z. \end{aligned}$$

Компоненты внутреннего поля ищем в виде

$$E_x^{(1)} = a_1x + a_2y + a_3z$$

и т. д. Тогда для отыскания коэффициентов a_i, b_i, c_i будем иметь систему 9 линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых полностью определены.

Во втором приближении по (a/λ) свободные члены уравнений (3), (4) определяются соотношением (6).

Компоненты поля внутри эллипсоида, квадратичные по параметру (a/λ) , ищем в виде

$$E_x^{(2)} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_0,$$

$$\dots$$

$$E_z^{(2)} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{12}xy + c_{13}xz + c_{23}yz + c_0.$$

Тогда для определения коэффициентов a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} имеем систему 21 линейного алгебраического уравнения с полностью определенными коэффициентами.

Не представляет труда составить уравнения и для более высоких по (a/λ) приближений, однако число самих уравнений с ростом номера приближения быстро возрастает (в третьем приближении по (a/λ) для нахождения коэффициентов при переменных x, y, z будем иметь систему 39-ти уравнений, в четвертом приближении—66 и т. д.). Поэтому рассмотренная схема применительно к более высоким номерам приближений пригодна для счета лишь на электронных вычислительных машинах, что представляет самостоятельный интерес.

По известному полю внутри эллипсоида можно найти поле в волновой зоне. Полагая в соотношениях (7), (8) $|r| \gg |r'|$, разложим векторы Герца по мультипольным моментам. Для этого используется разложение

$$\frac{\exp(-ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} |r - r'|)}{|r - r'|} = ik \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(\cos \theta) \times$$

$$\times j_n(k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} r') h_n^{(2)}(k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} r),$$

где $P_n(\cos \theta)$ —полином Лежандра n -го порядка, θ —угол между векторами r и r' , $j_n(z)$ —сферическая функция Бесселя и $h_n^{(2)}(z)$ —сферическая функция Ханкеля второго рода n -го порядка.

Если обозначить через θ_0 полярный угол вектора r , то тогда

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

где θ' —полярный угол вектора r' , φ и φ' —азимутальные угловые переменные векторов r и r' .

Так как внутри эллипсоида $r' \in V k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} r' < 1$, то для сферических функций Бесселя можно воспользоваться их приближенным значением в окрестности нуля. Поэтому потенциалы Герца в волновой зоне можно представить в виде разложения по мультиполям, где в свою очередь каждый мультипольный момент представлен в виде разложения по параметру (a/λ) :

$$\Pi^0(r) = \Pi_0^0(r) + (ik) \Pi_1^0(r) + (ik)^2 \Pi_2^0(r) + \dots$$

Здесь

$$\Pi_0^3(r) = -\frac{ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{4\pi} h_0^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(0)} \int_V P_0(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^2 dr' d\Theta' d\varphi',$$

$$\Pi_1^3(r) = -\frac{ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{4\pi} \left\{ (ik) h_0^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(1)} P_0(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^2 \times \right. \\ \left. \times dr' d\Theta' d\varphi' + k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} h_1^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(0)} \int_V P_1(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^3 dr' d\Theta' d\varphi' \right\},$$

$$\Pi_2^3(r) = -\frac{ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{4\pi} \left\{ \left(-\frac{k^2\varepsilon_1\mu_1}{4}\right) h_0^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(0)} \int_V P_0(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^4 \times \right. \\ \left. \times dr' d\Theta' d\varphi' + (ik)^2 h_0^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(2)} P_0(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^2 dr' d\Theta' d\varphi' + \right. \\ \left. + ik^2\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} h_1^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(1)} R_1(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^3 dr' d\Theta' d\varphi' + \right. \\ \left. + \frac{k^2\varepsilon_1\mu_1}{3} h_2^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}r) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(0)} \int_V P_2(\cos\Theta) \sin\Theta' r'^4 dr' d\Theta' d\varphi' \right\}.$$

В волновой зоне $kr\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \gg 1$ и вместо сферических функций Ханкеля целесообразно пользоваться их асимптотическими выражениями

$$h_0^{(2)} = -\frac{e^{-iz}}{iz},$$

$$h_1^{(2)} = -\frac{e^{-iz}}{z} \left(1 + \frac{1}{iz}\right),$$

$$h_2^{(2)} = \frac{e^{-iz}}{iz} \left(1 + \frac{3}{iz} - \frac{3}{z^2}\right).$$

Используя для внутренних полей выражения, найденные изложенным выше методом, и интегрируя по объему эллипсоида, в конечном итоге будем иметь

$$\Pi^3 = \frac{V \exp(-ikr\sqrt{\varepsilon_1\mu_1})}{4\pi r} \left\{ \left[1 - \frac{2a^2 - b^2}{20} k^2\varepsilon_1\mu_1 + \frac{a^2 - b^2}{30r^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (k^2r^2\varepsilon_1\mu_1 - 3ikr\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} - 3)(3\cos^2\Theta_0 - 1) \right] \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E^{(0)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{5r^2} (k^2r^2\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} - ikr) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) G - k^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) S \right\}.$$

Здесь

$$G_x = a^2(a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) \sin \Theta_0 + a_3 b^2 \cos \Theta_0,$$

$$G_y = a^2(b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) \sin \Theta_0 + b_3 b^2 \cos \Theta_0,$$

$$G_z = a^2(c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) \sin \Theta_0 + c_3 b^2 \cos \Theta_0,$$

и

$$S_x = (a_{11} + a_{22}) \frac{a^2}{5} + a_{33} \frac{b^2}{5} + a_0,$$

$$S_y = (b_{11} + b_{22}) \frac{a^2}{5} + b_{33} \frac{b^2}{5} + b_0,$$

$$S_z = (c_{11} + c_{22}) \frac{a^2}{5} + c_{33} \frac{b^2}{5} + c_0,$$

где коэффициенты a_i , b_i , c_i определяются системой девяти уравнений, а a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} — соответствующей системой из 21 линейного алгебраического уравнения.

Таким образом, при более высоких степенях разложения полей по (a/λ) учитываются дополнительные слагаемые, определяемые вектором G (члены по (a/λ)), и вектором S (члены по $(a/\lambda)^2$). Следует подчеркнуть, что пространственная анизотропия рассеяния содержится лишь в слагаемых с вектором G . Квадратичные по (a/λ) члены не содержат зависимости от угловых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 18, 1592 (1958).
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
3. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.

Поступила в редакцию
1 февраля 1967 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON A SMALL DIELECTRIC ELLIPSOID OF ARBITRARY ANISOTROPY WITH AN ACCURACY OF VALUES $(a/\lambda)^2$ INCLUSIVE

O. E. Lysenko, N. A. Khizhnyak

A method of graphical representation of internal fields in an ellipsoid as well as the scattered fields in a wave zone is developed as the small parameter expansion (a/λ) . The method effectiveness is illustrated by the example of a gyrotropic ellipsoid of rotation with electric and magnetic anisotropy. For this case there have been found the internal field and that in a wave zone with accuracy of the values $(a/\lambda)^2$ inclusive.

УДК 535.4

УЧЕТ НАПРАВЛЕННЫХ СВОЙСТВ ИСТОЧНИКОВ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ГЛАДКОМ ТЕЛЕ В ОБЛАСТИ ТЕНИ

Б. Е. Кинбер

Первичное поле направленной антенны, расположенной вблизи земли, разлагается в квазительоровский ряд по мультиполям с диаграммами вида $(1 - \cos \psi)^m$ и $\sin \psi (1 - \cos \psi)^m$. Дифракционное поле каждого мультиполя получается действием простых дифференциальных операторов на функцию Грина. Исследовано влияние направленности антенн на поле в области тени. Показано, что в случае высоко расположенных антенн, максимум диаграммы которых смещен относительно направления на горизонт, влияние направленности не сводится к умножению функции Грина ненаправленного источника на КНД антенны.

1. При анализе поля дифракции в зоне тени гладкого тела с большим радиусом кривизны обычно ограничиваются определением функции Грина [1, 2, 4]. Иными словами, закономерности поля исследуются для случая ненаправленного первичного источника. Между тем, не очевидно, что эти закономерности можно перенести на случай, когда источник—антенна—является остронаправленным. В самом деле, хорошо известна высотная зависимость функции Грина, из которой вытекает, что верхний, более высоко расположенный, конец антенны будет более эффективен, чем нижний. Таким образом, необходимо рассмотреть два вопроса.

1) В каких случаях можно использовать обычный прием—умножение функции Грина на направленность источника.

2) Каковы поправки, связанные с направленностью антенны.

Впервые, по-видимому, эти вопросы рассматривались в работе Арманда и Введенского [3] с помощью интеграла от функции Грина по системе токов, распределенных по антенне. К сожалению, из-за сложности интегрирования фактически рассмотрен один пример (равномерное распределение тока), соответствующий ориентации максимума диаграммы в направлении на горизонт. В настоящей заметке те же вопросы решаются другим методом, который позволяет получить ответ для антенны с любой диаграммой направленности, ориентированной произвольным образом относительно направления на горизонт.

Для простоты изложения рассматривается плоская задача о дифракции направленной волны на круговом цилиндре радиуса a .

2. В соответствии с [2] функция Грина в лучевых координатах ξ, η может быть записана в виде

$$\Gamma = \frac{2\pi i}{M} e^{ik\sigma} \sum_s \frac{\exp(it_s \zeta)}{t_s - q^2} \frac{\omega_1(t_s - Y)}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y^{3/2} + t_s \sqrt{Y} \right] \right\} \times \\ \times \frac{\omega_1(t_s - Y)}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y'^{3/2} + t_s \sqrt{Y'} \right] \right\}, \quad (1)$$

где ξ, η — координаты точки наблюдения, ξ', η' — координаты источника,

$$\zeta = M(\eta + \eta')/a > 0, \quad M = (ka/2)^{1/3}, \quad \sigma = \xi + \xi', \quad (2)$$

$$Y = M^2[(\xi - \eta)/a]^2, \quad Y' = M[(\xi' - \eta')/a]^2,$$

t_s — s -й корень уравнения

$$\dot{w}_1(t) + q^2 w'(t) = 0, \quad (3)$$

где $q = iMg$, $1/g$ — импеданс цилиндра. Система обозначений пояснена на рис. 1. Как известно, функция Грина для направленного источника может быть получена из функции Грина ненаправленного источника дифференцированием по положению источника.

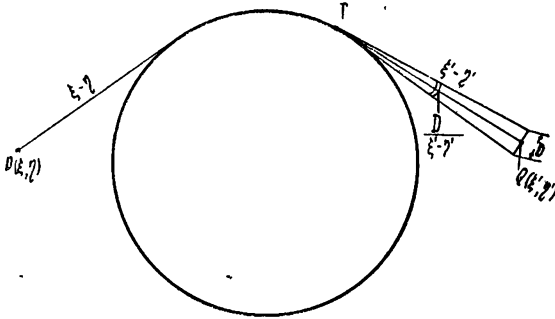


Рис. 1.

Как было показано ранее [5], для источника с диаграммой, имеющей нуль порядка $2m$ в направлении на горизонт ($\psi = 0$):

$$f_{2m}(\psi) = (1 - \cos \psi)^m \quad (4)$$

(угол ψ отсчитывается от направления на горизонт, линия QT на рис. 1, при $m = 0$, $f_0 = 1$), поле может быть получено действием на функцию Γ оператора

$$(L_1)^m = \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^m, \quad (5)$$

который, в отличие от [5], записан в лучевой системе координат.

Для источника с диаграммой

$$f_{2m+1}(\psi) = \sin \psi (1 - \cos \psi)^m, \quad (6a)$$

имеющей по линии горизонта нуль порядка $2m+1$, поле может быть получено действием на Γ оператора

$$L_1^m L_2 = \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^m \frac{ia}{k(\xi' - \eta')} \frac{\partial}{\partial \eta'}. \quad (6b)$$

Таким образом, если разложить диаграмму источника относительно линии горизонта $\psi = 0$ в ряд вида

$$F(\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m f_{2m} + b_m f_{2m+1}), \quad (7)$$

то поле в области тени может быть записано как

$$U = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m L_1^m + b_m L_1^m L_2 \right\} \Gamma. \quad (8a)$$

Для описания поля в окрестности максимума главного лепестка антенны достаточно использовать 3 первых члена ряда (8 а), т. е.

$$U = (a_0 + b_0 L_2 + a_1 L_1) \Gamma. \quad (8б)$$

Дифференцируя последовательно (7), легко видеть, что

$$a_0 = F(0), \quad b_0 = F'(0), \quad a_1 = F''(0). \quad (9)$$

Мы будем полагать, что аргументом диаграммы является $u = kD \sin \psi$, т. е. она является остронаправленной антенной длины D с обычной частотной зависимостью. Учитывая это, запишем

$$a_0 = F, \quad b_0 = kD \frac{dF}{du} \equiv kDF', \quad a_1 = (kD)^2 F'', \quad (10)$$

причем производные F по u уже не зависят от размера антенны kD и определяются лишь распределением возбуждения.

Действуя оператором L_1 на (1), получим

$$\begin{aligned} L_1 \Gamma &= \frac{2\pi i}{M} e^{ik\zeta} \sum_s \frac{\exp(it_s \zeta)}{t_s - q^2} \frac{\omega_1(t_s - Y)}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y^{3/2} + t_s \sqrt{Y} \right] \right\} \times \\ &\times \frac{\omega_1(t_s - Y')}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y'^{3/2} + t_s \sqrt{Y'} \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{i}{M^2} \left[-\frac{\omega_1'(t_s - Y')}{\omega_1(t_s - Y')} \sqrt{Y'} - iY' + i \frac{t_s}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11a)$$

Аналогично для оператора L_2

$$\begin{aligned} L_2 \Gamma &= \frac{2\pi i}{M} e^{ik\zeta} \sum_s \frac{\exp(it_s \zeta)}{t_s - q^2} \frac{\omega_1(t_s - Y)}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y^{3/2} + t_s \sqrt{Y} \right] \right\} \times \\ &\times \frac{\omega_1(t_s - Y')}{\omega_1(t_s)} \exp \left\{ i \left[-\frac{2}{3} Y'^{3/2} + t_s \sqrt{Y'} \right] \right\} \left\{ \frac{2iM}{k(\xi' - \eta')} \left[\frac{\omega_1'(t_s - Y')}{\omega_1(t_s - Y')} \sqrt{Y'} + 2iY' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12a)$$

Дальнейший анализ будем производить, полагая, что $t_s \zeta \gg 1$, т. е. что точка наблюдения расположена в области глубокой тени. В этом случае в рядах (11а), (12а) достаточно сохранить лишь первые члены:

$$L_1 \Gamma = \frac{i}{M^2} \left[-\frac{\omega_1'(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \sqrt{Y'} - iY' + i \frac{t_1}{2} \right] \Gamma; \quad (11б)$$

$$L_2 \Gamma = \frac{2iM}{k(\xi' - \eta')} \left[\frac{\omega_1'(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \sqrt{Y'} + iY' \right] \Gamma. \quad (12б)$$

Подставляя (10), (11б), (12б) в (8б), получим искомое выражение

$$\begin{aligned} U &= \left\{ F + \frac{iF' MD}{\xi' - \eta'} \left[\frac{\omega_1'(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \sqrt{Y'} + iY' \right] + \frac{F'' (kD)^2}{M^2} \times \right. \\ &\times \left. \left[-\frac{\omega_1'(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \sqrt{Y'} - iY' + i \frac{t_1}{2} \right] \right\} \Gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим два предельных случая $Y' \gg t_1 \simeq 1$ и $Y' \ll t_1 \simeq 1$. Начнем со случая $Y' \gg t_1$ (высоко поднятая антенна). Так как при $x \gg 1$ [4]

$$\omega_1(-x) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt[4]{x}} \exp\left(i \frac{2}{3} x^{3/2}\right), \quad (14)$$

то

$$\frac{\omega_1'(-x)}{\omega_1(-x)} = - \left[i \sqrt{x} - \frac{1}{4x} \right]$$

и

$$\begin{aligned} - \frac{\omega_1'(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \sqrt{Y'} - iY' + i \frac{t_1}{2} &= iY' \left(1 - \frac{t_1}{Y'}\right)^{1/2} - \\ &- iY' + \frac{it_1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{Y'}} \simeq - \frac{1}{4\sqrt{Y'}}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, получим при $Y' \gg 1$

$$U = \left\{ F(0) + \frac{MDt_1 F'(0)}{\xi' - \eta'} + \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{kD^2}{\xi' - \eta'} F''(0) + 0 \left[\frac{1}{(\xi' - \eta')^2} \right] \right\} \Gamma. \quad (15)$$

Формула (15) интерпретируется следующим образом. Сумма первого и третьего членов

$$F(0) + \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{kD^2}{\xi' - \eta'} F''(0)$$

пропорциональна полю первичной волны на границе горизонта. Поправочный член $\exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \frac{kD^2}{\xi' - \eta'} F''(0)$ (обычно весьма малый) учитывает, что горизонт расположен в зоне Френеля, а не в зоне Фраунгофера. Таким образом, поправка, связанная с этим членом, тривиальна, и, следовательно, если $F' = 0$, то учет направленности сводится к умножению функции Грина на КНД антенны. Указанный вывод согласуется с результатом работы [3], поскольку там рассмотрен случай антенны, ориентированной максимумом на горизонт. Справедливость этой интерпретации подтверждается также тем, что в этот член не входят параметры, характеризующие землю, т. е. M и g .

Существенно отличается от него случай, когда $F' \neq 0$, т. е. когда луч антенны или поднят, или опущен относительно направления на горизонт. Величина поправки, как следует из второго слагаемого (15), пропорциональна произведению двух сомножителей, из которых один (Mt_1) непосредственно выражается через параметры земли и поляризацию поля, а второй $[D/(\xi' - \eta')]$ равен углу видимости антенны с точки зрения горизонта (или углу между направлениями на горизонт для верхнего и нижнего концов антенны).

Последняя трактовка согласуется с анализом той же задачи с позиций геометрической теории дифракции. Как известно, боковое излучение антенны (случай, соответствующий $F' \neq 0$) можно рассматривать в виде суммы полей краевых волн, исходящих от концов антенны. Вследствие их различной высоты относительно земли затухание этих волн будет различно.

Рассмотрим теперь случай низкого расположения антенн относительно земли, $Y' \ll 1$, хотя $kh' \gg kD/2 \gg 1$ (h' — высота антенны над землей). Так как $Y' \ll t_1$, то в силу граничных условий (3)

$$\frac{\omega'_1(t_1 - Y')}{\omega_1(t_1 - Y')} \simeq \frac{\omega'_1(t_1)}{\omega_1(t_1)} = -iMg$$

и

$$U = \left\{ F + 2iF'kD \left[-g + \frac{\xi' - \eta'}{a} \right] + iF''(kD)^2 \left[-g \frac{\xi' - \eta'}{a} - \frac{t_1}{M} \right] \right\} \Gamma. \quad (16a)$$

Учитывая, что при $Y' \ll 1$ (4) $Y' \simeq kh/M$, т. е. $(\xi' - \eta')/a = \sqrt{2h'/a}$, последнюю формулу можно записать также в виде

$$U = \left\{ F + 2iF'kD \left[-g + \frac{2\sqrt{2h'}}{V\sqrt{a}} \right] + iF''(kD)^2 \left[-g \sqrt{\frac{2h'}{a}} - \frac{t_1}{M} \right] \right\} \Gamma. \quad (16б)$$

Из (16а), (16б) следует, что при малых высотах поправочные члены менее велики, чем при больших высотах. В самом деле, так как $kD \simeq kh/2$, то

$$kD \sqrt{\frac{h}{a}} \simeq \sqrt{\frac{k^2 h}{a}} \sim \sqrt{Y'} \ll 1$$

и член с F' в (16а), (16б) много меньше единицы. Как следует из [3], в этом случае мал и член с F'' , т. е. в случае небольших высот влияние направленности учитывается умножением функции Грина на направленность антенны.

Анализ влияния направленности антенны на поле в области тени показал, что, если антенна ориентирована максимумом диаграммы в направлении на горизонт, справедливо правило, сформулированное в [3]. В этом случае влияние направленности практически сводится к умножению функции Грина элементарного источника на направленность антенны. Поправка к этому правилу учитывает, что расстояние до горизонта конечно, т. е. он находится не в зоне Фраунгофера для антенны, а на стыке зоны Фраунгофера и зоны Френеля.

В случае, когда максимум диаграммы ориентирован не на горизонт, поправка существенно возрастает, т. е. учет направленности не сводится к указанному выше правилу.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
2. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 6, № 8, 1247 (1961).
3. Н. А. Арманд, Б. А. Введенский, Радиотехника и электроника, 6, № 8, 1219 (1961).
4. П. А. Азриэлянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 9, № 9, 1391 (1954).

CONSIDERATION OF DIRECTIONAL SOURCE PROPERTIES WHILE
DIFFRACTING ON A SMOOTH BODY IN SHADOW REGION*B. Ye. Kinber*

The primary field of a directive aerial located near the Earth is expanded in a quasi-Taylor series over multipoles with the diagrams $(1-\cos\psi)^m$ and $\sin\psi(1-\cos\psi)^m$. The diffracted field of each multipole is obtained by the action of the simple differential operators upon the Green's function. The influence of the antenna directivity on the field in the shadow region is investigated. It is shown that for the high-situated antennae, the diagram maximum of which is shifted relative to the horizontal direction, the influence of directivity cannot be reduced to the product of the Green's function of the nondirectional source and the antenna directive gain.

УДК 621.372.8:535

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА

Л. А. Ривлин, В. С. Шильдяев

В параксимальном приближении рассмотрена передача сигнала по волноводам с большим числом разрешенных мод, при которой осуществляется разложение монохроматических полей возбуждающих излучателей по собственным функциям волновода и синтез изображения этих излучателей в удаленном от входа сечении. Приведены иллюстративные эксперименты.

1. Получение когерентных световых колебаний методами квантовой электроники стимулировало попытки создания оптических волноводов как аналогов известных радиоволноводов (например, [1²]) с минимальным числом разрешенных мод (в пределе — с единственной модой). Между тем, стремление к проведению такой аналогии не всегда может быть оправдано.

Излучение радиогенераторов, как правило, без труда может быть сведено к волне, описываемой единственным направлением волнового вектора, т. е. сведено в одну угловую и соответственно единственную волноводную моду. Излучение же оптических генераторов, за исключением специальных случаев, заполняет множество угловых мод (например, излучение полупроводникового инжекционного лазера). Поэтому для наиболее полной передачи энергии излучения (и информации, если таковая в нем содержится) оптический волновод, в отличие от радиоволновода, должен обладать способностью к возбуждению всеми или большинством угловых мод источника колебаний.

Хотя в обоих сопоставляемых случаях источники достаточно монохроматичны, но радиочастоты заполняют спектр практически непрерывно, в то время как частоты оптических излучателей в огромном большинстве случаев привязаны к дискретным значениям энергий квантовых переходов. Следовательно, частотная универсальность, желательная обычно для радиоволновода, не обязательна в оптическом диапазоне.

И, наконец, существует очевидное различие в технологических требованиях, предъявляемых к размерам оптических и радиоволноводов.

Таким образом, применительно к оптическому диапазону полезно исследовать особенности волноводов с размерами поперечного сечения a , существенно превышающими длину волны колебаний λ ($a \gg \lambda$ в заполняющем диэлектрике), и большим числом разрешенных мод для фиксированной частоты колебаний.

2. Как известно [3, 4], в таких волноводах возможно распространение двух наборов волн ТМ- и ТЕ-типа (соответствующих двум основным направлениям поляризации), причем волны, возбуждаемые в подобном волноводе некоторой системой излучателей, являются по существу компонентами разложения поля этой системы по собственным мо-

дам волновода. Так как волны различных мод распространяются в волноводе с различными фазовыми скоростями $v_n = c[1 - (\lambda/\lambda_n)^2]^{-1/2}$ (где c — скорость света в заполняющем диэлектрике, λ_n — критическая длина волны моды с индексом n), то в произвольном сечении волновода $z > 0$ их суперпозиция не повторяет распределения полей излучателей в сечении $z = 0$. Однако в параксиальном случае, когда $(\lambda/\lambda_n)^2 \ll 1$, существуют такие сечения $z_s > 0$, где соотношение фаз между отдельными модами с достаточной степенью точности совпадает с исходным в $z = 0$ или отличается от него на величину, кратную 2π .

Следовательно, в этих сечениях $z = z_s$, определяемых как синфазные, происходит суммирование компонент разложения так, что суперпозиция мод создает изображение системы излучателей, возбуждающих волновод в сечении $z = 0$.

Такой волновод в соответствии с его способностью разлагать монохроматические поля по собственным функциям, передавать члены разложения в удаленную точку и там синтезировать из них исходное распределение поля уместно назвать полигармоническим волноводом.

Свойства полигармонических волноводов будут рассмотрены на примерах планарного, прямоугольного и круглого волноводов.

3. Планарный волновод (диэлектрический слой с толщиной a , ограниченной двумя параллельными металлическими плоскостями) обладает собственными ТМ- и ТЕ-модами с критической длиной волны

$$\lambda_n = \frac{2a}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

Разность фаз между волнами любых двух мод с индексами n и m , приобретаемая на длине волновода z ,

$$\varphi_{n,m}(z) = 2\pi \frac{z}{\lambda} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2} \right] \quad (2)$$

в параксиальном случае $(\lambda/\lambda_{n,m})^2 \ll 1$, когда можно ограничиться вторыми членами разложения корней, равна

$$\varphi_{n,m}(z) \simeq 2\pi \frac{z}{\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2 \right] = 2\pi \frac{z\lambda}{8a^2} (m^2 - n^2). \quad (3)$$

Поскольку $(m^2 - n^2)$ — всегда целое число, условие

$$z = z_s = \frac{8a^2}{\lambda} s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

определяет последовательность синфазных сечений z_s в которых суперпозиция мод создает изображение системы излучателей, возбуждавших волновод в сечении $z = 0$.

Для специальных видов возбуждения волновода, помимо главного синфазного сечения z_s , могут существовать и дополнительные. Так, если в спектре возбуждения присутствуют только четные моды (все индексы m, n четные), то разность $(m^2 - n^2)$ всегда кратна четырем, и дополнительные синфазные сечения расположены вчетверо чаще, чем в общем случае (4), а при нечетном возбуждении (все индексы мод m, n нечетные) $(m^2 - n^2)$ кратна восьми, и дополнительные сечения следуют в восемь раз чаще.

Пример: $a = 100\lambda$, $s = 1$, $z_s = 8 \cdot 10^4 \lambda$, четное возбуждение $s = 1$, $z_s = 2 \cdot 10^4 \lambda$, нечетное возбуждение $s = 1$, $z_s = 10^4 \lambda$.

Иллюстрацией нечетного способа возбуждения может служить синфазно колеблющаяся щель, лежащая в средней плоскости волновода (см. также п. 9). Этот же пример позволяет истолковать явления в полигармоническом волноводе на основе элементарных представлений о многолучевой интерференции. При этом распределение поля в некотором сечении $z > 0$ представляется комплексной суммой амплитуд лучей, исходящих из щели и претерпевших различное число отражений от стенок волновода, с фазами, определяемыми оптической длиной каждого луча. Синфазные сечения находятся из требования, чтобы разности фаз для различных лучей в месте ожидаемого расположения изображения щели были кратны целому числу 2π , а полученный таким образом главный максимум интерференционного взаимодействия был единственным.

4. Прямоугольный волновод со сторонами a и b ($a \geq b$) характеризуется как для ТМ-, так и для ТЕ-мод критической длиной волны

$$\lambda_{nl} = \left[\left(\frac{n}{2a} \right)^2 + \left(\frac{l}{2b} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

зависящей от двух индексов n и l . Соответственно разность фаз равна

$$\varphi_{nl, mk}(z) \simeq 2\pi \frac{z\lambda}{8a^2} \left[m^2 - n^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 (k^2 - l^2) \right]. \quad (6)$$

Если наложить на размеры волновода дополнительное условие, именно, целочисленность отношения $(a/b)^2$, то сумма в квадратных скобках (6) также целое число, а главные и дополнительные синфазные сечения определяются так же, как и в предыдущем случае.

Примеры: $\lambda = 1$ мк, $a = 100$ мк, $z_1 = 80$ мм;

$\lambda = 0,1$ мм, $a = 10$ мм, $z_1 = 8$ мм;

$\lambda = 1$ мм, $a = 100$ мм, $z_1 = 80$ м.

5. Круглый волновод с диаметром a обладает наборами ТМ- и ТЕ-мод, описываемых функциями Бесселя, причем критические длины волн $\lambda_{pl} = \pi a / x_{pl}$ определяются соответственно через l -е корни функций x_{pl} и их производных x'_{pl} .

Разность фаз для параксиального случая равна

$$\varphi_{nl, qk}(z) \simeq 2\pi \frac{z\lambda}{2\pi^2 a^2} [x_{qk}^2 - x_{pl}^2]. \quad (7)$$

В общем случае разность квадратов корней не образует целого числа (или постоянной доли целого числа), что исключает возможность возникновения синфазного сечения. Если же ограничиться случаем, когда можно представить корни в виде рядов [5]

$$x_{pl} \simeq \pi \left[l + \frac{p}{2} - \frac{1}{4} \right] \left[1 - \frac{4p^2 - 1}{8\pi^2(l + (p/2) - (1/4))^2} - \dots \right], \quad (8)$$

$$x'_{pl} \simeq \pi \left[l + \frac{p}{2} + \frac{1}{4} \right] \left[1 - \frac{4p^2 + 3}{8\pi^2(l + (p/2) + (1/4))^2} - \dots \right]$$

и удержать в них только первые члены, то для разности фаз получается

$$\varphi_{pl, qk}(z) \simeq 2\pi \frac{z\lambda}{8a^2} [2(2k+2l\pm 1)(k-l) + (q+p\pm 1)(q-p) + 4(kq-lp)], \quad (9)$$

где знак плюс относится только к ТЕ-, а минус только к ТМ-модам, и

$$\varphi_{pl, qk}(z) \simeq 2\pi \frac{z\lambda}{8a^2} [2(2k-2l-1)(k+l) + (q-p-1)(q+p) + 4(kq-lp)], \quad (10)$$

когда вычисляется разность фаз между ТЕ- и ТМ-модами.

Легко видеть, что величина в квадратных скобках в (9) и (10) всегда четная при любых значениях индексов p, l, q, k . Таким образом, главные синфазные сечения лежат на расстояниях

$$z = z_s = \frac{4a^2}{\lambda} s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

6. Исходное распределение поля возбуждающих излучателей не может быть совершенно точно воспроизведено в синфазном сечении по следующим причинам.

а) В общем случае сколь угодно сложной структуры поля излучателей последнее не может быть представлено в виде суммы конечного числа членов, ограниченного условием запердельности волновода $\lambda/\lambda_n < 1$.

б) Из ограниченного таким образом ряда мод в создании изображения в синфазном сечении участвует еще меньшее их число, определяемое условием параксиальности $(\lambda/\lambda_p)^2 \ll 1$, что при передаче изображения поля ограничивает разрешающую способность волновода величиной порядка a/p . Кроме того, неточность выполнения условия синфазности в сечении z_s определяется величиной отбрасываемых членов высших порядков в разложении $\varphi_{n,m}(z)$ по степеням $(\lambda/\lambda_{n,m})^2$. Так, для планарного волновода отброшенные третьи члены вносят в сечения $z = z_s$ разброс фаз

$$\Delta\varphi_{n,m}(z_s) = 2\pi \frac{z_s}{\lambda} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^4 \right] = 2\pi \frac{s}{4} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 (m^4 - n^4), \quad (12)$$

возрастающий линейно с порядком синфазного сечения s .

Пример: $a = 100 \lambda$, $s = 1$, $n = 1$, $m = 10$, $\Delta\varphi/2\pi = 0,06$ и разрешение порядка $a/m \sim 10\lambda$.

в) Как следует непосредственно из (4) и (12), хроматическая aberrация при ширине линии $\Delta\lambda$ приводит к размытию положения синфазного сечения, характеризующему глубиной

$$\Delta z_s = z_s \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (13)$$

г) Затухание в волноводе зависит от индекса моды, вследствие чего отношение амплитуд разложения по собственным функциям волновода в синфазной плоскости $\epsilon_n(z = z_s)$ не совпадает с исходными $\epsilon_n(z = 0)$. Например, для планарного волновода декременты затухания, связанного с потерями в металле, равны

$$\begin{aligned} (\alpha_n)^{-1} &= \frac{a}{D} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \frac{a}{D} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda} \right)^2 \quad \text{для ТЕ-мод,} \\ (\alpha_n)^{-1} &= \frac{a}{D} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \frac{a}{D} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2 \right] \quad \text{для ТМ-мод,} \end{aligned} \quad (14)$$

где D — константа, характеризующая свойства металлической поверхности и соответственно отношение компонент m и n в синфазном сечении z_s :

$$\frac{\varepsilon_m(z = z_s)}{\varepsilon_n(z = z_s)} \simeq \frac{\varepsilon_m(z = 0)}{\varepsilon_n(z = 0)} \exp \left[-\alpha_n z_s \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - 1 \right) \right], \quad (15)$$

$$\frac{\varepsilon_m(z = z_s)}{\varepsilon_n(z = z_s)} \simeq \frac{\varepsilon_m(z = 0)}{\varepsilon_n(z = 0)} \exp \left[-\frac{\alpha_n z_s}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - 1 \right) \right].$$

Эти выражения, если их пронормировать, приняв $n=1$, дают характеристику искажения набора амплитуд разложения в волноводе с потерями. Следует заметить, что обычно при $\lambda \ll a$ величина $\alpha_1 z_s \ll 1$. Нетрудно заметить также, что вследствие различного затухания изменяется соотношение амплитуд ТМ- и ТЕ-мод в пользу последних, т. е. волновод действует как поляризатор.

д) Волны различных мод обладают в волноводе разными групповыми скоростями

$$u_n = c \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

и, следовательно, приходят в синфазное сечение z_s не одновременно, что обуславливает искажение при передаче нестационарных полей. Запоздывание Δt волны с индексом n относительно наиболее быстрой моды ($n=1$) в параксиальном приближении равно

$$\Delta t = \frac{z_s}{u_n} - \frac{z_s}{u_1} \simeq \frac{z_s \lambda^2}{2c} [\lambda_n^{-2} - \lambda_1^{-2}]. \quad (17)$$

Иными словами, достаточно крутой фронт импульса, поступившего на вход волновода ($z=0$), растянется в синфазном сечении ($z=z_s$) на величину Δt . Пример: планарный волновод с $a=100\lambda$, $n=5$, $\Delta t = 25\lambda/c$.

7. В сечениях $z \neq z_s$ суперпозиция мод, хотя и не воспроизводит изображение возбуждающей системы излучателей, но также носит вполне регулярный характер, так как сдвиг фаз между различными модами для фиксированного z остается постоянным. Это может быть использовано для различных преобразований сигнала. Например, при нечетном возбуждении планарного волновода светящейся щелью, лежащей в его медианной плоскости, первое изображение щели возникает, как указано выше, в сечении $z=z_1=a^2/\lambda$. В сечение же $z=z_1/3$ все моды приходят синфазно с первой модой, кроме мод с индексом, кратным 3, которые имеют сдвиг по отношению к первой моде, равный $2\pi/3$, а суперпозиция полей дает симметричную картину в виде трех параллельных изображений возбуждающей щели. Таким образом, отрезок планарного волновода длиной $z_1/3$ может как расщеплять сигналы, так и суммировать их (при обратном направлении распространения). Другие примеры свидетельствуют, что соответствующий выбор входного и выходного сечений полигармонического волновода позволяет выполнять и другие операции, присущие современной радиоволновой технике.

8. На основе полигармонических волноводов, снабженных отражателями на концах, могут быть построены и полигармонические резонаторы, спектр собственных колебаний которых состоит из групп линий, лежащих вблизи частот, удовлетворяющих для данной длины резонатора условию синфазности (4) или (11). Из выражений типа (13) следует, что резонансные частоты для различных мод будут несколько отличаться друг от друга. Таким образом, линии внутри группы обра-

зуются в результате связывания колебаний, принадлежащих разным модам, через общие для всех мод концевые отражатели.

9. На микрофотографиях представлены экспериментальные иллюстрации действия полигармонических волноводов: изображение щели шириной 5 мк , освещаемой посредством монохроматора УМ-2 светом с длиной волны $\lambda = 0,7 \text{ мк}$, наблюдаемое в синфазном сечении $z_1 = 4,8 \text{ мм}$ планарного волновода со стенками из полированного стекла и с зазором $a = 58 \text{ мк}$ (рис. 1а); то же при различных расстройках — длина волны изменена на 5% (рис. 1б), длина волны уменьшена на 25% (рис. 1в). На рис. 1г показана щель, возбуждающая волновод ($z=0$).

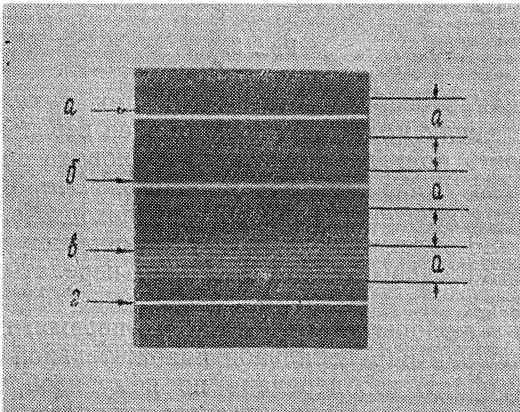


Рис. 1.

На рис. 2 показано изображение круглого отверстия диаметром 13 мк , освещаемого светом с $\lambda = 0,45 \text{ мк}$, наблюдаемое на одной трети расстояния до синфазного сечения $z_1 = 34,5 \text{ мм}$ круглого волновода с диаметром $a \approx 60 \text{ мк}$ (размытость изображения связана также с неудовлетворительным качеством волновода, для которого без какой-либо дополнительной обработки был использован стеклянный капилляр

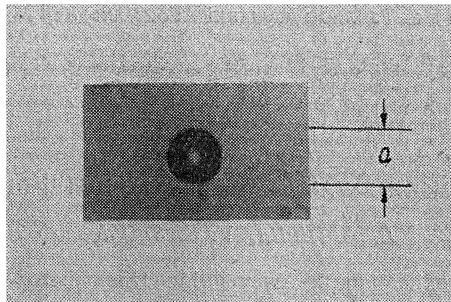


Рис. 2.

с отклонением от цилиндричности до 25 мк). На рис. 3 дано изображение светящейся области инжекционного полупроводникового квантово-

го генератора на GaAs с $\lambda = 0,84$ мк, наблюдаемое в синфазном сечении $z_1 = 4,6$ мм планарного волновода с полированными хромированными стенками и с зазором $a = 62$ мк.

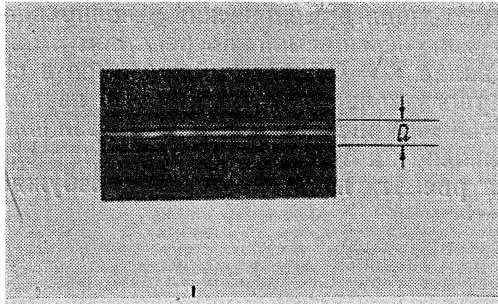


Рис. 3.

10. Пропускная способность волновода как канала информации, пропорциональна числу мод, участвующих в ее переносе. Поэтому пропускная способность полигармонического волновода может быть существенно выше, чем у обычного одномодового. Это, кстати, ясно и из того, что в полигармоническом волноводе происходит одновременная передача целого многоэлементного изображения излучающей системы, в то время как одномодовый волновод может передать сведения только об одном элементе.

В заключение любопытно отметить, во-первых, подобие полигармонического волновода параксиальной положительной линзовой оптике и, во-вторых, тот факт, что передача по нему изображения является динамическим аналогом голографического процесса, поскольку она так же, как и в голографии, сопровождается гармоническим анализом и синтезом, но без фиксации членов разложения на статической голограмме.

Авторы выражают искреннюю признательность В. П. Быкову за полезную дискуссию и В. А. Красавину за помощь в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Snitzer, H. Osterberg, J. Opt. Soc. Am., 51, № 2, 499 (1961).
2. R. A. Kaplan, Proc. IEEE, 51, № 8, 1144 (1963).
3. Л. де Бройль, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, ИЛ, М., 1948.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций, Гостехиздат, М., 1948, стр. 234.

Поступила в редакцию
19 января 1967 г.

POLYHARMONIC WAVEGUIDES FOR COHERENT LIGHT

L. A. Rivlin, V. S. Shil'dyaev

In a paraxial approximation the waveguide transmission of a signal with a great number of resolved modes is considered. The monochromatic fields of the exciting radiators are expanded over the natural functions of the waveguide and the synthesis of an image of these radiators in the cross-section, removed from the input, is made. The illustrative experiments are presented.

УДК 621.371.15

СРЕДНЯЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПЛОСКОГО РАССЕИВАЮЩЕГО СЛОЯ

Ю. Н. Барабаненков

Методом уравнения Дайсона вычисляется средняя по ансамблю рассеивателей функция Грина скалярного поля для плоского статистически однородного рассеивающего слоя. Относительно аналитических свойств фурье-образа массового оператора (ядра уравнения Дайсона) сделан ряд предположений. Устанавливается связь между сделанными предположениями и характером корреляционных функций рассеивателей среды. Названные предположения позволяют свести решение уравнения Дайсона к решению аналогичной краевой задачи для волнового уравнения с эффективным волновым числом.

За последнее время появился ряд работ, в которых для решения конкретных задач о распространении волн рассеивающих средах применяется наиболее общее уравнение для средней по ансамблю рассеивателей функции Грина, носящее название уравнения Дайсона (Д) [1-3]. Уравнение Д выводится методом диаграммной техники. При этом единым способом (разбиением диаграмм на приводимые и неприводимые) учитываются корреляции рассеивателей всех порядков, равно как и взаимное облучение рассеивателей любой кратности. Заметим, что в рамках весьма распространенного метода действующего [4, 5] или самосогласованного [6] поля столь общее уравнение до сих пор еще не получено.

К числу работ, в которых применяется уравнение Д, относятся [1, 7, 8]. Их авторы исследуют среднюю функцию Грина электромагнитного поля в неограниченной среде с флуктуациями диэлектрической проницаемости.

В настоящей работе уравнение Д применяется для решения задачи о вычислении средней функции Грина рассеивающей среды, ограниченной в одном измерении и имеющей вид статистически однородного плоского слоя. Насколько нам известно, систематическое исследование поставленной задачи в литературе отсутствует, хотя проблема среднего поля, возникающего вследствие взаимодействия плоской падающей волны с рассеивающей средой, занимающей полупространство [4-6], плоский слой [9], сферическую область [10], решалась различными методами.

Будем интересоваться средней функцией Грина $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ для плоского рассеивающего слоя $|z| < L$, грани которого параллельны плоскости xu прямоугольной системы координат x, y, z . Ради простоты ограничимся случаем скалярного волнового поля. В координатном представлении уравнение Д имеет вид [2, 3]

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) + \int \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') M(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') F(\mathbf{r}', \mathbf{r}^0) dr'' dr', \quad (1)$$

где $G_0(\mathbf{r}) = \exp(ik_0|\mathbf{r}|)/|\mathbf{r}|$ — запаздывающая функция Грина свободного пространства, $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — массовый оператор. В дальнейшем нам удобнее обращаться с фурье-образом массового оператора

$$\check{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int \int \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}'\mathbf{r}')] M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

Чтобы решить уравнение (1), сделаем относительно свойств фурье-образа массового оператора (2) ряд предположений. Сформулируем их.

1. Фурье-образ $\check{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ допускает представление в виде

$$\check{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (2\pi)^3 \check{F}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (3)$$

Здесь $\check{F}(\mathbf{k}) = \delta_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp}) \check{F}_1(k_z)$ — фурье-образ характеристической функции слоя*, $\delta_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp})$ — двумерная δ -функция от составляющей волнового вектора \mathbf{k}_{\perp} , перпендикулярной оси z , и

$$\check{F}_1(k_z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\exp(ik_z L) - \exp(-ik_z L)}{k_z - i\varepsilon}. \quad (4)$$

В знаменатель формулы (4) для характеристической функции слоя введена бесконечно малая положительная величина ε . Это диктуется необходимостью определения смысла сингулярных интегралов (8) и равносильно предположению, что плотность рассеивателей внутри слоя меняется как $e^{-\varepsilon z}$.

Назовем $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ фурье-образом удельного массового оператора. Следующее предположение характеризует свойства $\check{M}_0(\mathbf{p}_{\perp}, k_z; \mathbf{p}'_{\perp}, k'_z)$ как функции комплексных переменных k_z и k'_z ; через \mathbf{p}_{\perp} обозначен действительный вектор.

2. Оператор $\check{M}_0(\mathbf{p}_{\perp}, k_z; \mathbf{p}'_{\perp}, k'_z)$ является аналитической функцией комплексных переменных k_z и k'_z . Эта функция может иметь полюса $k_z = q$, $k'_z = q'$ и точки ветвления, например, логарифмического типа. Точки ветвления мы введем, предполагая, что рассматриваемая функция может содержать логарифмические слагаемые вида $(1/|\mathbf{k}|) \ln[(m - |\mathbf{k}|)/(m + |\mathbf{k}|)]$, где m — комплексное число с положительной мнимой частью $\text{Im } m > 0$, $|\mathbf{k}| = \sqrt{p_{\perp}^2 + k_z^2}$, и аналогичные слагаемые со штрихованными переменными m' , k' , k'_z . На бесконечности $|\mathbf{k}_z| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{k}'_z| \rightarrow \infty$ функция $\check{M}_0(\mathbf{p}_{\perp}, k_z; \mathbf{p}'_{\perp}, k'_z)$ растет не быстрее, чем целая функция экспоненциального типа, удовлетворяя неравенству

$$|\check{M}_0(\mathbf{p}_{\perp}, k_z; \mathbf{p}'_{\perp}, k'_z)| \leq A \exp(|\text{Im } k_z| + |\text{Im } k'_z|) h \quad (5)$$

с коэффициентами A и h , не зависящими от k_z и k'_z при всех значениях $\text{arg } k_z$ и $\text{arg } k'_z$.

Обратные значения мнимых частей полюсов q , q' и чисел m , m' , а также значение коэффициента h — порядка радиуса корреляции b рассеивателей.

3. Приведенный массовый оператор предполагается малым в том смысле, что значение его фурье-образа на «энергетической» поверхности $\check{M}_0(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)$ удовлетворяет неравенству $|\check{M}_0(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)|/k_0^2 \ll 1$.

* Как обычно, характеристическая функция некоторой области пространства равна единице в точках этой области и нулю вне ее.

Обсудим физический смысл сделанных предположений 1, 2, 3.

Предположение 1 означает, что рассматривается статистически однородная рассеивающая среда, находящаяся в области пространства с характеристической функцией $F(\mathbf{r})$. Корреляционные функции такой среды зависят только от разностей координат рассеивателей. Разумеется, данное свойство однородности корреляционных функций может нарушаться в окрестности границ области, в полосе шириной порядка радиуса корреляции b рассеивателей. Отсюда следует ограничение на линейный размер области L , который должен быть велик по сравнению с радиусом корреляции: $L \gg b$.

Предположение 2 связано с характером асимптотического поведения корреляционных функций при больших расстояниях между рассеивателями.

Массовый оператор непрерывной рассеивающей среды с флуктуирующим по нормальному закону показателем преломления приближенно равен [11-13] $M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ (приближение Бурре), где $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция корреляции флуктуаций показателя преломления. В случае статистически однородных флуктуаций для фурье-образа $\check{M}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ получается представление (3), в котором вместо $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ выступает $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k})$. На практике [14] используются корреляционные функции двух типов: экспоненциальная $B(|\mathbf{r}|) = \exp(-|\mathbf{r}|/b)$ и гауссова $B(|\mathbf{r}|) = \exp(-r^2/b^2)$. Экспоненциальная корреляционная функция приводит к выражению $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 4\pi/k^2 - (k_0 + i/b)^2$, удовлетворяющему предположению 2. Для гауссовой корреляционной функции оператор $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ является целой аналитической функцией. При этом $\check{M}_0(p_\perp, k_z; p_\perp, k_z)$ в некоторых интервалах значений $\arg k_z$ растет на бесконечности $|k_z| \rightarrow \infty$ быстрее функции экспоненциального типа, так что неравенство (5) не удовлетворяется.

Массовый оператор дискретной рассеивающей среды можно построить, используя результаты работы [5]. Корреляции в положении рассеивателей естественно описывать корреляционной функцией молекул жидкости. Теория и эксперимент [16] показывают, что эта корреляционная функция на больших расстояниях $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ стремится к нулю по закону $v(|\mathbf{r}|) = (1/|\mathbf{r}|) \exp(-|\mathbf{r}|/b) \cos(\beta|\mathbf{r}| + \delta)$. Для ограниченных рассеивателей, размер которых мал по сравнению с длиной волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, можно показать, что приведенный массовый оператор $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ удовлетворяет предположению 2. При этом наличие у рассеивателей границы вызывает появление в $\check{M}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ слагаемых, являющихся целыми функциями экспоненциального типа и подчиняющихся неравенству (5). Фактор $1/|\mathbf{r}|$ в асимптотическом выражении корреляционной функции обуславливает логарифмические слагаемые с параметрами $m = m' = k_0 \pm \beta + i/b$.

Нам осталось обсудить предположение 3. Согласно [3], оно обеспечивает возможность введения для неограниченной рассеивающей среды эффективного волнового числа $k_{\text{эфф}} \simeq k_0 + (2\pi/k_0) \check{M}_0(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)$. При этом как действительная, так и мнимая поправки к волновому числу свободного пространства k_0 оказываются малы.

Переходим к решению уравнения Дайсона (1) при сделанных предположениях 1, 2, 3. Решение ищем в смешанном координатном фурье-представлении, полагая

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) = \int \check{\psi}(z, \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}_\perp) d\mathbf{p}. \quad (6)$$

Из (1)–(3) и (6) для неизвестной функции $\check{\psi}$ получаем уравнение

$$\check{\psi}(z, \mathbf{p}) = \check{\Phi}(\mathbf{p}) \exp(ip_z z) + (2\pi)^3 \iiint \check{G}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z) \check{F}_1(k_z - k'_z) \times$$

$$\times \check{M}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z; \mathbf{p}_\perp, k'_z) \exp[i(k_z z - k'_z z')] \check{\psi}(z', \mathbf{p}) dk_z dk'_z dz', \quad (7)$$

в котором $\check{\Phi}(\mathbf{p}) = \check{G}_0(\mathbf{p}) \exp(-ipr^0)$ и $\check{G}_0(\mathbf{p}) = (1/2\pi^2)(p^2 - k_0^2 - i\epsilon)^{-1}$.

Проведем в (7) интегрирование по k'_z . Это сводится к вычислению интегралов

$$I(z' \pm L, \mathbf{p}_\perp, k_z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp[-ik'_z(z' \pm L)]}{k_z - k'_z - i\epsilon} \check{M}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z; \mathbf{p}_\perp, k'_z) dk'_z. \quad (8)$$

Для их вычисления переходим в плоскость комплексного переменного k'_z , замыкая контур интегрирования в верхней или нижней полуплоскости. Вклад полюса $k'_z = k_z - i\epsilon$ в значение интегралов равен

$$I(z' \pm L, \mathbf{p}_\perp, k_z) = \begin{cases} \exp[-ik_z(z' \pm L)] \check{M}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z; \mathbf{p}_\perp, k_z) & \text{при } z' \pm L > 0 \\ 0 & \text{при } z' \pm L < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Вклад полюсов $k'_z = q'$ вдали от границ слоя, когда $|z' \pm L| \gg b$, экспоненциально мал в силу предположения 2. То же самое относится к результату интегрирования вдоль берегов разрезов, исходящих из логарифмических точек ветвления $k'_z = \pm \sqrt{m'^2 - p_\perp^2}$, $\text{Im} \sqrt{m'^2 - p_\perp^2} > 0$. Наконец, интегралы по окружностям бесконечно большого радиуса, замыкающим контур интегрирования, обращаются в нуль при $|z' \pm L| > h$ в силу неравенства (5).

В итоге, интегралы (8) оказываются приближенно равны (9) вблизи границы слоя шириной порядка радиуса корреляции. Внутри окрестности границ, где $|z' \pm L| \leq b$, интегралы (8) требуют специального рассмотрения. В этом сказывается граничный эффект корреляций. Пренебрегая им и подставляя (9) в (7), получаем уравнение

$$\check{\psi}(z, \mathbf{p}) = \check{\Phi}(\mathbf{p}) \exp(ip_z z) + (2\pi)^2 \int dk_z \int_{-L}^L dz' \check{G}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z) \times$$

$$\times \check{M}_0(\mathbf{p}_\perp, k_z; \mathbf{p}_\perp, k_z) \exp[ik_z(z - z')] \check{\psi}(z', \mathbf{p}). \quad (10)$$

При $L \rightarrow \infty$ решение уравнения (10) имеет вид $\check{\psi}(z, \mathbf{p}) = \check{\psi}(\mathbf{p}) \exp(ip_z z)$ и после подстановки в (6), как и должно быть, приводит к средней функции Грина неограниченной среды. Чтобы выделить явно данное свойство предельного перехода к неограниченной среде, преобразуем в уравнении (10) интеграл по z' . Именно, представим его в виде разности между интегралом в бесконечных пределах и интегралом по области $|z'| > L$. Полагая при этом

$$\check{\psi}(z, \mathbf{p}) = (1/2\pi^2) [p^2 - k_0^2 - 4\pi \check{M}_0(\mathbf{p}, \mathbf{p})]^{-1} \exp(-ipr^0) \check{Q}(z, \mathbf{p}), \quad (11)$$

для новой неизвестной функции \check{Q} приходим к уравнению

$$\check{Q}(z, \mathbf{p}) = \exp(ip_z z) - \int_{|z'| > L} N(z - z', \mathbf{p}) \check{Q}(z', \mathbf{p}) dz' \quad (12)$$

с ядром

$$N(z - z', p) = 2 \int \frac{\check{M}_0(p_{\perp}, k_z; p_{\perp}, k_z)}{k_z^2 + p_{\perp}^2 - k_0^2 - 4\pi \check{M}_0(p_{\perp}, k_z; p_{\perp}, k_z)} \exp [ik_z(z - z')] dk_z. \quad (13)$$

Если в уравнении (10) поле в любой точке z выражается через поле внутри слоя $|z| < L$, то в уравнении (12) оно выражается через поле вне слоя $|z| > L$.

Вычисляем ядро (13). Поступаем так же, как и при вычислении интегралов (8), переходя в плоскость комплексного переменного k_z . Полюса $k_z = q$ удельного массового оператора теперь уже не являются особенностями подынтегрального выражения. Результат интегрирования вдоль берегов разрезов, исходящих из логарифмических точек ветвления $k_z = \pm \sqrt{m^2 - p_{\perp}^2}$, $\text{Im} \sqrt{m^2 - p_{\perp}^2} > 0$, экспоненциально мал при $|z - z'| \gg b$. Интегралы по замыкающим окружностям бесконечно большого радиуса обращаются в нуль при $|z - z'| > 2h$. Нам остается еще вычислить вклад полюсов, совпадающих с корнями дисперсионного уравнения

$$k_z^2 + p_{\perp}^2 - k_0^2 - 4\pi \check{M}_0(p_{\perp}^2 + k_z^2) = 0, \quad (14)$$

где $\check{M}_0(p_{\perp}^2 + k_z^2) \equiv \check{M}_0(p_{\perp}, k_z; p_{\perp}, k_z)$ (статистическая изотропия). Используя малый параметр предположения 3, решим уравнение (14) методом последовательных приближений. В первом приближении по малому параметру корни уравнения равны

$$k_{z1,2} \simeq \pm \sqrt{k_{\text{эфф}}^2 - p_{\perp}^2}, \quad \text{Im} \sqrt{k_{\text{эфф}}^2 - p_{\perp}^2} > 0, \quad (15)$$

где $k_{\text{эфф}}$ — эффективное волновое число для неограниченной среды. В итоге при условии $|z - z'| \gg b$ для ядра (13) получаем приближенное выражение

$$N(z - z', p) \simeq i (k_{\text{эфф}}^2 - k_0^2) (2k_{z1})^{-1} \exp(ik_{z1}|z - z'|). \quad (16)$$

На малых расстояниях, когда $|z - z'| \leq b$, ядро $N(z - z', p)$ требует специального рассмотрения. В этом сказывается объемный эффект корреляций. Пренебрегая им и подставляя (16) в (12), приходим к окончательному уравнению вида

$$\check{Q}(z, p) = \exp(ip_z z) - i \frac{k_{\text{эфф}}^2 - k_0^2}{2k_{z1}} \int_{|z'| > L} \exp [ik_{z1}|z - z'|] \check{Q}(z', p) dz'. \quad (17)$$

Чтобы понять смысл этого уравнения, рассмотрим акустическую задачу о функции Грина для плоского слоя с волновым числом $k_{\text{эфф}}$, на границе которого искомое поле и его нормальная производная непрерывны. Тогда, как нетрудно убедиться, мы приходим к тому же уравнению (17). Отсюда следует, что при сделанных предположениях, которые были сформулированы выше, задача о вычислении средней функции Грина для плоского рассеивающего слоя эквивалентна аналогичной акустической задаче для слоя с эффективным волновым числом $k_{\text{эфф}}$.

Решим уравнение (17). Для точек вне слоя, $|z| > L$, оно распадается на систему двух интегральных уравнений, от которых легко перейти к двум эквивалентным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Постоянные интегрирования дифференциальных уравнений определяются путем подстановки решения в уравнение (17). Выкладки не представляют принципиальных затруднений,

хотя несколько утомительны. В результате для средней функции Грина получаем следующие интегральные представления:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) = \frac{i}{2\pi} \iint \exp[ip_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp}^0)] [\exp(-ik_{z1}z^0) + V \times \\ \times \exp[ik_{z1}(2L + z^0)]] [\exp(ik_{z1}z) + V \exp[ik_{z1}(2L - z)]] \times \quad (18) \\ \times (1 - V^2 \exp(4ik_{z1}L))^{-1} \frac{dp_{\perp}}{k_{z1}} \quad (z > z^0);$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) = \frac{i}{2\pi} \iint \exp[ip_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp}^0)] [\exp[ik_{z1}(L + z^0)] + \\ + V \exp[ik_{z1}(3L - z^0)]] (1 - V^2 \exp(4ik_{z1}L))^{-1} W \times \quad (19) \\ \times \exp[-i\sqrt{k_0^2 - p_{\perp}^2}(z + L)] \frac{dp_{\perp}}{k_{z1}}.$$

Здесь ради определенности точка \mathbf{r}^0 лежит внутри слоя ($|z^0| < L$). За функцией Грина внутри слоя ($|z| < L$) мы сохранили обозначение $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$. Функцию Грина под слоем ($z < -L$) снабдили индексом минус, $P_{-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$. В формуле (18) $z > z^0$. Переход к противоположному случаю $z < z^0$ осуществляется формальной перестановкой z и z^0 . Аналогично функция Грина над слоем ($z > L$) получается из (19) заменой z^0 на $(-z^0)$ и z на $(-z)$. Через

$$V = \frac{k_{z1} - \sqrt{k_0^2 - p_{\perp}^2}}{k_{z1} + \sqrt{k_0^2 - p_{\perp}^2}} \quad (20)$$

и $W = 1 + V$ мы обозначили коэффициенты отражения и преломления плоской волны на плоской границе раздела из среды в свободное пространство.

Переходя в (18) и (19) от переменных интегрирования p_x, p_y к угловым переменным θ, φ с помощью соотношений $p_x = k_{\text{эфф}} \sin \theta \cos \varphi$, $p_y = k_{\text{эфф}} \sin \theta \sin \varphi$, получаем представление функций Грина P и P_{-} в виде контурных интегралов типа Вейля, которые, как и следовало ожидать, совпадают с интегральными представлениями функций Грина для акустического плоского слоя, найденными в монографии [17] другим методом.

Интегральные представления (18) и (19) имеют наглядный физический смысл. Он вскрывается при разложении фактора $(1 - V^2 \exp(4ik_{z1}L))^{-1}$ в ряд по формуле геометрической прогрессии. Возникающие после раскрытия скобок отдельные члены подынтегральных выражений представляют собой парциальные плоские волны, испытывающие определенное число отражений от границ слоя. Если толщина слоя L , расстояние $R_{\perp} = |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp}^0|$ между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}^0 , а также их расстояние до границ слоя велики по сравнению с длиной волны λ_0 , то интегралы, соответствующие парциальным волнам, могут быть вычислены методом перевала в плоскости комплексного переменного θ (переход к геометрической оптике). Каждый такой интеграл имеет вид сферической волны, исходящей из некоторого мнимого источника и приходящей в точку наблюдения \mathbf{r} . Чем большее число отражений от границ слоя испытывает парциальная волна, тем длиннее путь она проходит в слое и тем сильнее ослабевает вследствие рассеяния. По-

этому при не слишком малой по сравнению с длиной экстинкции $d = 1/2 \operatorname{Im} k_{\text{эфф}}$ толщине слоя в формулах (18) и (19) можно ограничиться лишь несколькими первыми членами описанного разложения по числу отражений от границ слоя. С учетом членов только нулевого и первого порядка функция Грина внутри слоя оказывается равной [17]

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) \simeq \exp(ik_{\text{эфф}}R)/R + V(\theta_1) \exp(ik_{\text{эфф}}R_1)/R_1 + \\ + V(\theta_2) \exp(ik_{\text{эфф}}R_2)/R_2, \quad (21)$$

где

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^0|, \quad R_1^2 = R_{\perp}^2 + (2L - z - z^0)^2, \quad R_2^2 = R_{\perp}^2 + (2L + z + z^0)^2,$$

$$\sin \theta_1 = \frac{R_{\perp}}{R_1}, \quad \sin \theta_2 = \frac{R_{\perp}}{R_2}.$$

Первое слагаемое в (21) совпадает с функцией Грина неограниченной среды. Второе и третье слагаемые представляют сферические волны, исходящие из точки \mathbf{r}^0 и приходящие в точку \mathbf{r} после одного отражения от верхней границы под углом θ_1 и от нижней под углом θ_2 соответственно. Отношение интенсивности волны, отраженной от верхней границы (второе слагаемое), к интенсивности волны, пришедшей в точку \mathbf{r} без отражений (первое слагаемое), порядка $\exp[-(R_1 - R)/d]$. Если точки \mathbf{r} и \mathbf{r}^0 расположены в окрестности центральной плоскости слоя, где $|z|$ и $|z^0| \ll L$, то $(R_1 - R)/d \sim 2L/d$ при $R \ll L$ и $(R_1 - R)/d \sim 2L^2/Rd$ при $R \gg L$.

Аналогичные оценки имеют место и для волны, отраженной от нижней границы. Отсюда следует вывод, что функция Грина $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ приближенно равна ее значению для неограниченной среды, если точки \mathbf{r} и \mathbf{r}^0 расположены в окрестности центральной плоскости слоя, расстояние между ними мало по сравнению с толщиной слоя и толщина слоя велика по сравнению с длиной экстинкции. Физически данный вывод представляется очевидным. Вклад в функцию Грина $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ волн, отраженных от границ слоя, становится существенным, когда расстояние между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}^0 велико в масштабе толщины слоя L или когда одна из этих точек приближается к одной из границ слоя на расстояние, малое в масштабе длины экстинкции d .

С помощью результатов [17] не представляет затруднений записать разложение, аналогичное (21), и для функции Грина $P_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ под слоем. При этом первым слагаемым будет сферическая волна, исходящая из точки \mathbf{r}^0 , испытывающая преломление по законам геометрической оптики на нижней границе слоя и приходящая в точку \mathbf{r} . Второе слагаемое — волна, которая сначала отражается от верхней границы слоя, а потом уже испытывает преломление на нижней границе, и т. д. Отношение интенсивности волны, испытавшей одно отражение (второе слагаемое), к интенсивности волны, приходящей в точку \mathbf{r} без отражений (первое слагаемое), имеет порядок величины $\exp[-2(L - z^0)/d]$. Отсюда получаем тот же самый критерий, что и для функции Грина внутри слоя, при котором функция Грина под слоем приближенно равна первому слагаемому описанного разложения.

Мы рассмотрели случай, когда толщина слоя L велика по сравнению с длиной экстинкции d . При этом интенсивность парциальных волн, испытывающих отражение от границ слоя, экспоненциально мала. В нашем распоряжении имеется еще один малый параметр, приводящий к тому, что интенсивность названных парциальных волн оказывается малой степенным образом без ограничения на отношение L/d .

Таким параметром является коэффициент отражения $V(\theta)$. В силу предположения 3 он мал при не слишком больших углах падения θ .

Вернемся к уравнению (17). Как нам уже известно, оно сводит вычисление средней функции Грина для плоского рассеивающего слоя к аналогичной акустической задаче с эффективным волновым числом $k_{эфф}$. Одним из условий применимости уравнения (17) является ограничение снизу на толщину слоя L : толщина слоя должна быть велика по сравнению с радиусом корреляции b , $L \gg b$. Однако существует ограничение и на толщину слоя сверху. Оно получается следующим образом.

Отыскивая корни $k_{z1,2}$ дисперсионного уравнения (14), мы решали его методом последовательных приближений, ограничившись первым приближением (15). В следующем, втором приближении корень k_{z1} получает поправку Δk_{z1} , которая при $p^\perp = 0$ равна*

$$\Delta k_{z1} = 8\pi^2 (d\check{M}_0/dk^2)_{k_0} (\check{M}_0/k_0),$$

где $\check{M}_0 \equiv \check{M}_0(k_0^2)$. Эта поправка войдет в показатель экспоненты ядра уравнения (17). Чтобы ее влияние было пренебрежимо мало, необходимо потребовать выполнение условия $|\Delta k_{z1}(z - z')| \ll 1$. Отсюда получаем упомянутое ограничение на толщину слоя сверху: $|\Delta k_{z1}|L \ll 1$. В приближении Бурре оно принимает вид $(b/d)(L/d) \ll 1$ при $k_0 b \gg 1$ и $1/k_0 d (L/d) \ll 1$ при $k_0 b \ll 1$. Так как длина экстинкции d велика по сравнению с длиной волны λ_0 и радиусом корреляции b , то в обоих случаях толщина слоя все же может быть велика по сравнению с длиной экстинкции.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить В. М. Финкельберга за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, № 4, 1399 (1964).
2. U. Frisch, Wave Propagation in Random Media, A Theory of Multiple Scattering, Institute d'Astrophysique, Paris, 1965.
3. U. Frisch, Wave Propagation in Random Media, II—Multiple Scattering by N Bodies (Provisional version), Institute d'Astrophysique, Paris, 1965.
4. P. Waterman, R. Truett, J. Math. Phys., 2, № 4, 512 (1961).
5. J. G. Fikioris, P. C. Waterman, J. Math. Phys., 5, № 10, 1413 (1964).
6. И. А. Чабан, Акуст. ж., 10, № 3, 351 (1964).
7. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, № 2, 656 (1965).
8. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 39 (1966).
9. V. Twersky, J. Math. Phys., 3, № 4, 700 (1962).
10. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, ЖЭТФ, 45, № 4, 1136 (1963).
11. R. C. Bourget, Nuovo Cimento, 26, № 1, 1 (1962).
12. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 44, № 2, 676 (1963).
13. И. В. Андреев, ЖЭТФ, 48, № 5, 1437 (1965).
14. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
15. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, № 1, 401 (1967).
16. И. З. Фишер, Статистическая теория жидкостей, Физматгиз, М., 1961.
17. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.

Научно-исследовательский институт интроскопии

Поступила в редакцию
15 февраля 1967 г.

* Заметим, что производная $(d\check{M}_0/dk^2)_{k_0}$ должна быть мала по абсолютной величине по сравнению с единицей. В этом заключается условие, при котором можно пренебречь пространственной дисперсией волн, обусловленной нелокальностью массового оператора. В приближении Бурре данное условие сводится к требованию малости радиуса корреляции b по сравнению с длиной экстинкции d , $b \ll d$.

THE AVERAGE GREEN FUNCTION FOR A PLANE SCATTERING LAYER

Yu. N. Barabanenkov

The average Green function of the scalar field over the ensemble of scatters is calculated for a plane statistically-inhomogeneous scattering layer by means of Dyson equation. Some assumptions on the analytical properties of Fourier transformation of the mass operator (the nucleus of Dyson equation) are made. A relation between the assumptions made and the character of correlation functions of the medium scatters has been estimated. The above assumptions permit to reduce the solution of Dyson equation to the analogous boundary problem for the wave equation with the effective wave number.

УДК 621.371.167

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВБЛИЗИ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ

В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов

Решена задача дифракции собственного поля заряда, равномерно движущегося вблизи решетки из брусьев прямоугольного поперечного сечения и двух типов отражательных дифракционных решеток. Строгое решение граничной задачи приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд пространственных гармоник, входящих в представление поля. В случае решеток с узкими щелями получены явные выражения для дифракционного поля. Исследуются физические свойства дифракционного излучения.

Исследование рассеяния собственного электромагнитного поля заряда или потоков заряженных частиц, равномерно движущихся вблизи различных неоднородностей, представляет одну из важных задач современной радиоэлектроники. Из множества видов неоднородностей, для которых отыскание дифрагированного поля доступно известными математическими методами, наибольший практический и физический интерес представляют периодические структуры.

В настоящей работе решена задача рассеяния собственного поля заряда дифракционными решетками: периодической структурой, образованной из брусьев прямоугольного сечения, и отражательными дифракционными решетками в виде гребенок с основанием из идеального проводника или идеального магнетика. Первые результаты при решении таких задач, полученные с помощью вычислений на ЭВМ, опубликованы в работах [1, 2]. В этих работах показано, что дифракционное излучение максимально, когда ширина щелей мала по сравнению с периодом структуры. Здесь мы используем предложенный в [3, 4] приближенный способ отыскания решения задачи дифракции для решеток с узкими щелями. Этот способ позволяет получить явные формулы для дифракционного излучения и поверхностного дифракционного поля. Анализ формул дает возможность установить ряд новых физических свойств дифракционного поля, возбужденного движущимся зарядом; некоторые из них обсуждаются в работе.

1. СОБСТВЕННОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДА И ОБЩИЙ ВИД ДИФРАКЦИОННОГО ПОЛЯ

В качестве источника электромагнитного поля выберем плоский пучок, плотность заряда которого меняется по закону

$$\rho = e\delta(z - z_1) \exp[iK(y - vt)], \quad (1)$$

движущийся с постоянной скоростью $v = y_0\beta c$ (c — скорость света) вдоль решетки перпендикулярно ее образующим. Система декартовых координат (x, y, z) выбрана так, что ось Ox направлена вдоль образующих решетки, ось Oy — вдоль решетки, а ее начало в случае решетки из брусьев лежит в середине одной из щелей.

Собственное электромагнитное поле пучка $H^c(y, z)$, E^c и поле, рассеянное решеткой, $H^{pac}(y, z)$, $E^{pac}(y, z)$ можно представить в виде

$$H^c(y, z) = x_0 \frac{|z - z_1|}{z - z_1} 2\pi e\beta \exp [ik(\alpha y + \gamma |z - z_1|) - i\omega t], \quad (2)$$

$$E^c(y, z) = \left(-y_0\gamma + z_0\alpha \frac{|z - z_1|}{z - z_1} \right) 2\pi e\beta \exp [ik(\alpha y + \gamma |z - z_1|) - i\omega t];$$

$$H^{pac}(y, z) = \begin{cases} x_0 2\pi e\beta \exp \{i(k\gamma a - \omega t)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp \left\{ i \left[p_n(z - h) + \left(k\alpha + \pi \frac{n}{l} \right) y \right] \right\} & (z > h) \\ -H^c(y, z) + x_0 \pi e\beta \exp \{i(k\gamma a - \omega t)\} l_N \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos(q_m z) + id_m \sin(q_m z)) \cos \frac{\pi m}{2d} (y + d - 2Nl) & ; \\ (|z| < h, \quad |y - 2Nl| < d) \\ -H^c(y, z) + x_0 2\pi e\beta \exp \{i(k\gamma a - \omega t)\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp \left\{ i \left[-p_n \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (z + h) + \left(k\alpha + \pi \frac{n}{l} \right) y \right] \right\} & (z < -h) \end{cases} \quad (3)$$

$$E^{pac}(y, z) = -\frac{1}{ik} \left(-y_0 \frac{\partial H_x^{pac}}{\partial z} - z_0 \frac{\partial H_x^{pac}}{\partial y} \right), \quad (4)$$

где e — заряд на единицу длины вдоль оси Ox ; $\beta = \frac{v}{c}$; $k = K\beta$; $\omega =$

$= K\beta c = kc$; $\alpha = \beta^{-1}$; $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2} = i\sqrt{\alpha^2 - 1}$; x_0, y_0, z_0 — орты декартовой системы координат; a — расстояние между траекторией движения пучка и решеткой; $2h$ — высота брусьев; $2d$ — ширина щелей; $2l$ — период;

$p_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}$; $k_n = k\alpha + \pi \frac{n}{l}$; $q_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{2d}\right)^2}$, причем знак кор-ней выбран так, чтобы $\text{Im } p_n \geq 0$, $\text{Im } q_m \geq 0$; множитель $l_N = \exp(i2Nlka)$ определяет фазовый сдвиг поля в щели с номером N ($N=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Коэффициенты a_n, b_n, c_m, d_m в (2), (3) должны быть такими, чтобы результирующее поле $H = H^c + H^{pac}$ и $E = E^c + E^{pac}$ было непрерывно в щелях и всюду на брусьях тангенциальная составляющая E равнялась нулю.

Из (3) следует, что рассеянное поле будет содержать незатухающие волны, если существуют целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{1 - \beta}{-n} < \frac{\beta\lambda}{2l} < \frac{1 + \beta}{-n} \quad (-n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Эти неравенства обычно называют условиями излучения. Целые числа $n = -1, -2, \dots$, удовлетворяющие (5), определяют в представлении (3).

номера незатухающих пространственных гармоник. Длина волны излучения λ связана с периодом решетки $2l$, относительной скоростью пучка β и углом излучения φ_n n -й пространственной гармоники соотношением

$$\lambda = \frac{2l}{-n} \left(\frac{1}{\beta} - \cos \varphi_n \right), \quad \varphi_n = \arccos \frac{k\alpha - \pi(n/l)}{k}. \quad (6)$$

Выражение для поля рассеяния в случае гребенок с высотой h и основанием из идеального проводника или идеального магнетика, находящимся при $z=0$, может быть получено, если воспользоваться соотношениями

$$H^{(np)}(y, z) = \begin{cases} H^+(y, z) + H^-(y, z) & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}; \quad (7)$$

$$H^{(m)}(y, z) = \begin{cases} H^+(y, z) - H^-(y, z) & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}, \quad (8)$$

где $H^{(np)}(y, z)$ и $H^{(m)}(y, z)$ — векторы магнитного поля для соответствующих гребенок, а $H^+(y, z)$ и $H^-(y, z)$ — векторы магнитного поля при $z > 0$ и $z < 0$ в случае решетки из брусьев с высотой $2h$. Соотношения (7), (8) являются следствием симметрии решетки из брусьев относительно плоскости $z=0$.

Заметим, что решение рассматриваемой задачи без труда может быть обобщено на случай, когда источником поля является равномерно движущийся точечный заряд или бесконечная заряженная нить, параллельная образующим решетки.

2. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Удовлетворяя условию непрерывности поля $H^c + H^{pac}$; $E^c + E^{pac}$ в щелях при $z = \pm h$ и условию обращения в нуль на брусьях тангенциальной к ним составляющей электрического поля, приходим к системе функциональных уравнений относительно коэффициентов a_n , b_n , c_n и d_m . Так же, как и в [3, 4], после замены $X_n = a_n + b_n$ и $Y_n = a_n - b_n$ ее можно свести к двум независимым бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$X_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns} X_s = \Phi_n, \quad Y_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns} Y_s = \Psi_n \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (9a)$$

где

$$P_{ns} = P_{ns}^{(0)} + P_{ns}^{(1)}, \quad Q_{ns} = Q_{ns}^{(0)} + Q_{ns}^{(1)}, \quad \Phi_n = \Phi_n^{(0)} + \Phi_n^{(1)}, \\ \Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \Psi_n^{(1)},$$

$$P_{ns}^{(0)} = \frac{\theta}{\sqrt{x^2 - (\alpha + n)^2}} S_{0n} S_{0s}, \quad Q_{ns}^{(0)} = -\theta \frac{ix \operatorname{ctg}(\pi x \delta)}{\sqrt{x^2 - (\alpha + n)^2}} S_{0n} S_{0s},$$

$$P_{ns}^{(1)} = i\theta^2 \frac{4(n + \alpha)(s + \alpha)}{\sqrt{x^2 - (\alpha + n)^2}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m^2 - (2x\theta)^2} th [(\pi\delta/2\theta) \sqrt{m^2 - (2x\theta)^2}]}{[m + 2\theta(\alpha + n)] [m + 2\theta(\alpha + s)]} S_{mn} S_{ms},$$

$$Q_{ns}^{(1)} = i\theta^2 \frac{4(n + \kappa\alpha)(s + \kappa\alpha)}{\sqrt{x^2 - (\kappa\alpha + n)^2}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m^2 - (2\kappa\theta)^2} \operatorname{cth} [(\pi\delta/2\theta) \sqrt{m^2 - (2\kappa\theta)^2}]}{[m + 2\theta(\kappa\alpha + n)] [m + 2\theta(\kappa\alpha + s)]} S_{mn} S_{ms},$$

$$\Phi_n^{(0)} = -\delta_0^n - P_{n0}^{(0)}, \quad \Phi_n^{(1)} = -P_{n0}^{(1)}, \quad \Psi_n^{(0)} = -\delta_0^n - Q_{n0}^{(0)},$$

$$\Psi_n^{(1)} = -Q_{n0}^{(1)},$$

$$S_{mn} = \frac{\sin [m - 2\theta(\kappa\alpha + n)] (\pi/2)}{[m - 2\theta(\kappa\alpha + n)] (\pi/2)}, \quad x = \frac{\kappa l}{\pi} = \frac{2l}{\lambda},$$

$$\theta = \frac{d}{l}, \quad \delta = \frac{h}{l}, \quad \delta_0^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Эти системы пригодны для нахождения X_n, Y_n с помощью ЭВМ при любых параметрах κ, β, θ и δ . С этой точки зрения они эквивалентны системам, которые в [1, 2] использовались для получения численного решения. Однако системы (9а) обладают той особенностью, что позволяют с точностью до поправок порядка θ^2 получить приближенные выражения для величин X_n, Y_n . Заметим, что X_n и Y_n совпадают с амплитудами пространственных гармоник соответственно в случае гребенок с основанием из идеального проводника и идеального магнетика. Амплитуды a_n и b_n в случае решетки из брусьев находятся из соотношений

$$a_n = \frac{1}{2} (X_n + Y_n), \quad b_n = \frac{1}{2} (X_n - Y_n). \quad (9б)$$

Приближенное решение систем (9а) можно получить следующим образом [3, 4]. Представим X_n и Y_n в виде

$$X_n^1 = X_n^{(0)} + X_n^{(1)}, \quad Y_n^1 = Y_n^{(0)} + Y_n^{(1)},$$

где $X_n^{(0)}$ и $Y_n^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям

$$X_n^{(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns}^{(0)} X_s^{(0)} = \Phi_n^{(0)}, \quad Y_n^{(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns}^{(0)} Y_s^{(0)} = \Psi_n^{(0)} \quad (n=0, \pm 1, \dots). \quad (10)$$

Поправки к точному решению $X_n^{(1)}$ и $Y_n^{(1)}$ удовлетворяют тем же системам линейных алгебраических уравнений (9а), что и X_n и Y_n ; однако теперь, как легко проверить, правые части в них будут иметь порядок θ^2 . Таким образом, при $\theta^2 \ll 1$ можно считать, что $X_n \simeq X_n^{(0)}$, $Y_n \simeq Y_n^{(0)*}$.

Системы (10) являются системами с вырожденным ядром. Поэтому их решение можно получить в явном виде:

$$X_n^{(0)} = -\delta_0^n - \frac{i2\kappa\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)}{1 - iS\theta \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (\kappa\alpha + n)^2}} \times$$

$$\times \frac{\sin[\pi\theta(\kappa\alpha + n)] \sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta(\kappa\alpha + n) \pi\theta\kappa\alpha},$$

* Используемый способ дает возможность получить также следующие члены разложения решения систем (9а) по параметру θ .

$$Y_n^{(0)} = -\delta_0^n - \frac{i2x\theta \operatorname{ctg}(\pi x\delta)}{1 + iS\theta \operatorname{ctg}(\pi x\delta)} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (x\alpha + n)^2}} \times \\ \times \frac{\sin[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi\theta(x\alpha + n)} \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha}, \quad (11)$$

где

$$S = S_1 - iS_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi^2\theta^2(x\alpha + n)^2 \sqrt{1 - (x\alpha + n)^2 x^{-2}}}. \quad (12)$$

Заметим, что эти приближенные выражения для X_n и Y_n справедливы, когда в щелях между брусьями распространяется только основная волна, т. е. если $x\theta < 1/2$. В более общем случае в коэффициенты $P_{ns}^{(0)}$ и $Q_{ns}^{(0)}$ должны входить все слагаемые, соответствующие распространяющимся волноводным волнам.

Обозначим $x\alpha = \mu + \nu$, где μ — ближайшее к $x\alpha$ целое число, так что $|\nu| < 1/2$. Если $x < 1/2$, то ряд для $S = S(\nu, x, \theta)$ можно приближенно просуммировать:

$$S(\nu, x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2 x^{-2}}} + i2x \ln \sin \pi \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

В этом случае выражения для амплитуд пространственных гармоник в (3) будет иметь вид

1) для гребенки с основанием из идеального проводника

$$a_n^{(1)} = X_n = -\delta_0^n + 2A \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha} \frac{\sin[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi\theta(x\alpha + n)} \frac{\zeta}{\zeta_n}, \\ c_0^{(1)} = -\frac{2\zeta}{\zeta \cos(\pi x\delta) - i\theta(1 + i\zeta x Q) \sin(\pi x\delta)} \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha}, \quad (14) \\ b_n^{(1)} \equiv 0, \quad d_0^{(1)} \equiv 0;$$

2) для гребенки с основанием из идеального магнетика

$$a_n^{(2)} = Y_n = -\delta_0^n + 2B \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha} \frac{\sin[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi\theta(x\alpha + n)} \frac{\zeta}{\zeta_n}, \\ d_0^{(2)} = -\frac{2\zeta}{\zeta \sin(\pi x\delta) + i\theta(1 - i\zeta x Q) \cos(\pi x\delta)} \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha}, \quad (15) \\ b_n^{(2)} \equiv 0, \quad c_0^{(2)} \equiv 2;$$

3) для решетки из брусьев

$$a_n^{(3)} = -\delta_0^n - (A + B) \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha} \frac{\sin[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi\theta(x\alpha + n)} \frac{\zeta}{\zeta_n}, \\ b_n^{(3)} = (A - B) \frac{\sin(\pi\theta x\alpha)}{\pi\theta x\alpha} \frac{\sin[\pi\theta(x\alpha + n)]}{\pi\theta(x\alpha + n)} \frac{\zeta}{\zeta_n}, \quad (16) \\ c_0^{(3)} = c_0^{(1)}, \quad d_0^{(3)} = d_0^{(1)},$$

где

$$A = \left[1 - i\zeta \left(xQ - \frac{1}{q} \right) \right]^{-1}, \quad B = \left[1 - i\zeta \left(xQ + \frac{1}{p} \right) \right]^{-1},$$

$$p = \theta \operatorname{ctg}(\pi x \delta), \quad q = \theta \operatorname{tg}(\pi x \delta), \quad Q = -2 \ln \sin \pi \frac{\theta}{2},$$

$$\zeta_n = \sqrt{1 - \eta_n^2}, \quad \eta_n = \frac{x\alpha + n}{x}, \quad \zeta = \zeta_{-p} = \sqrt{1 - \nu^2 x^{-2}}.$$

Перейдем к рассмотрению следствий, которые вытекают из полученных формул.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. *Закон сохранения энергии.* Теорема Пойнтинга, записанная для поля (3), имеет вид

$$\sum_{(n)} (W_n^+ + W_n^-) \sin \varphi_n = W. \quad (17)$$

Здесь W_n^+ , W_n^- — интенсивности дифракционных лучей, проходящих через площадку 1 см^2 на плоскости $z = h + \hat{h}$ и $z = -(h + \hat{h})$ соответственно ($\hat{h} > 0$ — произвольно), а φ_n — угол между направлением распространения n -го дифракционного луча и его проекций на плоскость $z = \text{const}$; в нашем случае $\sin \varphi_n = \sqrt{1 - (x\alpha + n)^2 x^{-2}}$. Величина W имеет смысл среднего во времени значения энергии, которая отбирается от пучка и расходуется на излучение через единичную площадку. Суммирование в (17) производится по тем значениям n , которые удовлетворяют условию излучения: $\frac{x}{\beta} (1 - \beta) \leq -n \leq \frac{x}{\beta} (1 + \beta)$.

Величины W_n^\pm , W пропорциональны размерному множителю $= 2\pi e^2 \beta^2 c$, который удобно представить через плотность поверхностного тока I ($\text{а} \cdot \text{см}^{-1}$) следующим образом: $= R_0 I^2$ ($\text{вт} \cdot \text{см}^{-2}$), где $R_0 \simeq \simeq 189 \text{ ом}$. Тогда

$$W_n^\pm = \frac{|a_n^{(i)}|^2}{|b_n^{(i)}|^2} \frac{1}{2} R_0 I^2 \exp \left(-\frac{4\pi a}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2} \right) (\text{вт} \cdot \text{см}^{-2}) \quad (i=1, 2, 3); \quad (18)$$

$$W = w R_0 I^2 \exp \left(-\frac{4\pi a}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2} \right) (\text{вт} \cdot \text{см}^{-2}), \quad (19)$$

где $w = -\sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{Im} a_0^{(i)}$, $\operatorname{Im} a_0^{(i)}$ — мнимая часть комплексной амплитуды нулевой пространственной гармоники в представлении поля (3). В (18) индексу (+) соответствует множитель $|a_n^{(i)}|^2$, а индексу (—) — множитель $|b_n^{(i)}|^2$. Таким образом, из (19) следует, что полная энергия дифракционного излучения W полностью определяется, если известна комплексная амплитуда нулевой пространственной гармоники.

Определим максимальное значение суммарной энергии дифракционного излучения W . Для этого оценим максимальное значение функции $w = w(\beta, x, \theta, \delta)$. Для гребенок и решетки из брусьев эта величина имеет соответственно следующий вид:

$$\omega^{(1)} = \left(\frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \right)^2 \frac{2S_1}{S_1^2 + (S_2 - 1/q)^2},$$

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \right)^2 \frac{2S_1}{S_1^2 + (S_2 + 1/p)^2}, \quad (20)$$

$$\omega^{(3)} = \left(\frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \right)^2 \left[\frac{S_1}{S_1^2 + (S_2 - 1/q)^2} + \frac{S_1}{S_1^2 + (S_2 + 1/p)^2} \right],$$

где $S = S_1 - iS_2$ определяется в (12), а величины p, q определены в (16). Легко видеть, что при $\kappa < 1/2$ для гребенок максимальные значения ω равны $\omega_{\max}^{(1)} = \omega_{\max}^{(2)} = 2 \sin \varphi_{-p} \left(\frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \right)^2 < 2$ и достигаются они соответственно при условиях

$$\operatorname{ctg}(\pi\kappa\delta) = \theta S_2, \quad \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta) = -\theta S_2. \quad (21)$$

Для решетки из брусьев $\omega_{\max}^{(3)} = \sin \varphi_{-p} \left(\frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \right)^2 < 1$ достигается при условии

$$\operatorname{tg}(2\pi\kappa\delta) = -\frac{2\theta S_2}{1 - \theta^2(S_1^2 + S_2^2)}. \quad (22)$$

Итак, максимум энергии, которую пучок расходует на дифракционное излучение, равен

$$W^{(1,2)} \leq W_{\max} = 2R_0 I^2 \exp\left(-\frac{4\pi\alpha}{\beta\lambda} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \quad (\text{вт} \cdot \text{см}^{-2})$$

в случае отражательных решеток, а для решетки из брусьев —

$$W^{(3)} \leq W_{\max}^{(3)} = R_0 I^2 \exp\left(-\frac{4\pi\alpha}{\beta\lambda} \sqrt{1 - \beta^2}\right) \quad (\text{вт} \cdot \text{см}^{-2}).$$

Можно показать, что эти оценки остаются справедливыми при любых значениях κ . Поскольку $W \leq W_{\max}$ всегда, то, согласно (17), энергия W_n^+, W_n^- n -го дифракционного луча будет уменьшаться с увеличением κ (т. е. уменьшением λ), поскольку при этом число дифракционных лучей возрастает.

2. Зависимость от λ энергии дифракционного излучения в длинноволновом и коротковолновом диапазонах. Будем подразумевать под длинноволновым и коротковолновым диапазонами соответственно интервалы длин волн $\lambda > 4l$ и $\lambda \ll 2l$ ($2l$ — период решетки). Для энергии излучения в коротковолновом диапазоне получена известная оценка $W_n \sim 1/\lambda^2$, которую обычно экстраполируют на весь диапазон длин волн. Она приводит к выводу, что энергия дифракционного излучения может быть значительной лишь в оптическом диапазоне, где λ весьма малы, и должна быть малой уже в инфракрасном диапазоне волн. В действительности эта экстраполяция не законна, и правильная оценка зависимости энергии дифракционного излучения в длинноволновом и коротковолновом диапазонах носит принципиальный характер.

Полученное выше решение для модулированной заряженной плоскости обобщим на случай равномерно заряженной нити, плотность заряда которой можно записать $\rho = e\delta(z - z_1)\delta(y - vt)$. Приведем об-

щее выражение для энергии, которую отдает n -му дифракционному лучу участок нити длиной в 1 см при перемещении его вдоль решетки на единицу пути. Эта энергия излучения $dW_{n\lambda}$ для интервала длин волн $d\lambda$ в окрестности λ равна

$$dW_{n\lambda} = \frac{\pi e^2}{2\lambda^2} |a_n^{(i)}|^2 \sin \varphi_n \exp\left(-\frac{4\pi a}{\beta\lambda} \sqrt{1-\beta^2}\right) d\lambda \quad (i = 1, 2, 3). \quad (23)$$

Множитель $|a_n^{(i)}|^2$ является функцией λ , β и геометрических параметров решетки, которая находится из решения граничной задачи. Выражения, определяющие квадраты амплитуд излучающихся гармоник для отражательных решеток и решетки из брусьев в длинноволновом диапазоне, имеют вид

$$\begin{aligned} |a_n^{(1)}|^2 &= \frac{\sin^2(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi^2\theta^2\kappa^2\alpha^2} 4|A|^2, \\ |a_n^{(2)}|^2 &= \frac{\sin^2(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi^2\theta^2\kappa^2\alpha^2} 4|B|^2, \\ |a_n^{(3)}|^2 &= \frac{\sin^2(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi^2\theta^2\kappa^2\alpha^2} |A \pm B|^2, \\ |b_n|^2 & \end{aligned} \quad (24)$$

где $n = -\mu$, μ — ближайшее к $\kappa\alpha$ целое число, A , B определены в (16), а в коротковолновом (оптическом) диапазоне

$$\begin{aligned} |a_n^{(1)}|^2 &= \frac{\sin^2(\pi\theta n)}{\pi^2 n^2} 4\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) \sin^2(\pi\kappa\delta), \\ |a_n^{(2)}|^2 &= \frac{\sin^2(\pi\theta n)}{\pi^2 n^2} 4\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) \cos^2(\pi\kappa\delta), \\ |a_n^{(3)}|^2 &= |b_n|^2 = \frac{\sin^2(\pi\theta n)}{\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что в формулах (24), (25) n должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{\kappa}{\beta} (1 - \beta) \leq |n| \leq \frac{\kappa}{\beta} (1 + \beta), \quad (26)$$

и поскольку в (25) κ велико, то и $|n|$ здесь также велико. Выражения (25) получены из систем функциональных уравнений для коэффициентов a_n , b_n , c_m и d_m без ограничений на параметры β , δ и θ .

Сравним зависимость $dW_{n\lambda}$ от λ в этих диапазонах на примере идеально проводящей отражательной решетки. Энергия излучения в длинноволновом и оптическом диапазонах, как видно из (23) — (25), равна соответственно

$$\begin{aligned} dW_{-\mu\lambda} &= \frac{\pi e^2}{2\lambda^2} \frac{\sin^2(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi^2\theta^2\kappa^2\alpha^2} \frac{4 \sin \varphi_{-\mu}}{1 + (\kappa Q - 1/q)^2 \sin^2 \varphi_{-\mu}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{4\pi a}{\beta\lambda} \sqrt{1-\beta^2}\right) d\lambda, \end{aligned}$$

$$dW_{n\lambda} = \frac{\pi e^2}{2\lambda^2 \beta^2} (1 - \beta^2) \frac{\sin^2(\pi\theta n)}{\pi^2 n^2} 4 \sin \varphi_n \sin^2(\pi x \delta) \times \\ \times \exp\left(-\frac{4\pi a}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2}\right) d\lambda.$$

Если расстояние a считать неограниченно стремящимся к нулю, то зависимость $dW(\lambda)$ будет определяться лишь предэкспоненциальным множителем. Отсюда следует, что в оптическом диапазоне множитель, стоящий перед экспонентой, ограничен величиной

$$\frac{\pi e^2}{2} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \frac{1}{\pi^2 l^2}, \quad (27)$$

поскольку значения n должны удовлетворять условию излучения (26). В длинноволновом диапазоне этот множитель имеет порядок

$$\frac{\pi e^2}{2} \frac{1}{4l^2} \frac{\sin^2(\pi\theta\mu)}{\pi^2 \theta^2 \mu^2} \quad (\mu = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Таким образом, интенсивности дифракционных лучей в коротковолновом и длинноволновом диапазонах оказываются сопоставимыми.

Поскольку на практике приходится иметь дело с пучками конечной толщины, рассмотрим зависимость интенсивности дифракционных лучей и полной энергии излучения от объемной плотности тока в пучке.

В этом случае в выражениях (18), (19) величину $J^2 \exp\left(-\frac{4\pi a}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2}\right)$ для модулированного монохроматического пучка толщины Δ нужно заменить на

$$J_{\Delta}^2 = \left[\int_a^{a+\Delta} J(z+h) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\beta \lambda} \sqrt{1 - \beta^2}\right) dz \right]^2.$$

Из оценок (27) и (28) при этом следует, что с укорочением длины волны плотность тока в пучке нужно увеличивать пропорционально λ^{-1} , чтобы энергия дифракционного излучения оставалась постоянной.

3. *Оптимальные профили дифракционных решеток.* Оптимальным профилем дифракционной решетки будем называть такой, который обеспечивает максимум дифракционного излучения с данной длиной волны λ в заданном направлении. При $\lambda < 1/2 \theta$, $\theta^2 \ll 1$ оптимальный профиль определяется условиями (21), (22) и требованием $\frac{d}{d\theta} \frac{\sin(\pi\theta x a)}{\pi\theta x a} = 0$. Займемся отысканием оптимальных параметров решетки в длинноволновом диапазоне. Профиль рассматриваемых решеток в общем случае характеризуется двумя параметрами — относительной шириной щелей θ и относительной толщиной δ .

Частным случаем является ленточная дифракционная решетка, которая определяется одним параметром θ (здесь $\delta = 0$). Для сравнения приведем выражения амплитуд волн дифракционного излучения, которое она порождает:

$$|a_{-\mu}^{(a)}| = |b_{-\mu}^{(a)}| = \frac{\sin(\pi\theta x a)}{\pi\theta x a} \left(1 + \zeta^2 x^2 4 \ln^2 \sin \pi \frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}. \quad (29)$$

Величины W_n^\pm и в этом случае определяются по формулам (26); следует учесть, что $|a_n^{(n)}| = |b_n^{(n)}|$. Оптимальные значения параметра θ для ленточной решетки лежат в интервале $0,15 \leq \theta \leq 0,25$.

Формула (29) не только весьма точно количественно определяет амплитуды волн для $\theta \leq 0,33$, но также правильно отражает качественную их зависимость на всем интервале $0 \leq \theta \leq 1$. Из (29) следует, что гармоника с номером $n = -\mu$ в диапазоне $0 \leq \theta \leq 1$ должна иметь μ нулей и такое же число максимумов за счет $\sin(\pi\theta\kappa\alpha)$. При численном расчете на ЭВМ [1] это полностью подтверждается. Значения θ , где эти максимумы и нули достигаются, оказываются несколько смещенными в сторону параметров, больших по сравнению с даваемыми формулой (29). Амплитуды волн как функции угла излучения максимальны при скользющем распространении ($\zeta \equiv \sin \varphi_{-\mu} = 0$) и минимальны при излучении по нормали, где $\zeta = 1$.

Для решетки из брусьев прямоугольного поперечного сечения оптимальные значения θ лежат приблизительно в том же интервале — $0,1 \leq \theta \leq 0,3$, что и для ленточной решетки. Однако эта структура обладает той примечательной особенностью, что для фиксированных значений θ и $\kappa\alpha$ можно подобрать оптимальную толщину брусьев, при которой величины W_n^\pm и W будут максимальны. В формулах (18) для $W_{-\mu}^\pm$ следует брать

$$|a_{-\mu}^{(3)}| = |b_{-\mu}^{(3)}| = \frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha}. \quad (30a)$$

Это возможно при первом условии (21). С точностью до поправок, пропорциональных θ^2 , максимумы величин $W_{-\mu}^+$, $W_{-\mu}^-$ в длинноволновом диапазоне не зависят от направления излучения и достигаются при толщине

$$2h = j \frac{\lambda}{2} + d \frac{4}{\pi} \ln \sin \pi \frac{\theta}{2} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (31)$$

(Мы здесь и далее будем пользоваться приближенной формулой (13) для S .)

Как видно, в решетке с оптимальным профилем по толщине брусьев $2h$ должно укладываться несколько меньше целого числа полуволн.

Поправка к полуволновой толщине $\Delta h = d \frac{4}{\pi} \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}$ одинакова

для всех гармоник, определяется только геометрическими параметрами решетки и с точностью до слагаемых $\sim \theta^2$ не зависит от длины волны и угла излучения. Эта поправка максимальна при ширине щели $\theta \simeq 0,3$ и достигает $\Delta h_{\max} \simeq -0,77d \simeq -0,23l$. При увеличении и уменьшении ширины щелей поправка уменьшается.

Интересно отметить, что, когда толщина брусьев в точности равна целому числу полуволн ($2h = j(\lambda/2)$), то комплексные амплитуды волн дифракционного излучения равны с точностью до поправок порядка θ^2 комплексным амплитудам волн излучения от ленточной решетки.

Если по толщине брусьев укладывается нечетное число четвертей волн, точнее, если

$$2h = (2j + 1) \frac{\lambda}{4} + d \frac{2}{\pi} \ln \sin \pi \frac{\theta}{2}, \quad (32)$$

то амплитуды волн минимальны и равны

$$|a_{-\mu}^{(3)}| = \frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \frac{2\theta^2}{\theta^2 + \zeta^2}, \quad |b_{-\mu}^{(3)}| = \frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha} \frac{\theta\zeta}{\theta^2 + \zeta^2}. \quad (30b)$$

Из формул (30а), (30б) видно, что энергии дифракционного излучения для решетки из брусьев оптимального и неоптимального профилей заметно различаются (за исключением особого случая скольжения волн вдоль решетке, которому соответствует $\zeta = 0$).

Для идеально проводящей гребенки каждому значению θ также можно подобрать резонансную глубину щелей

$$h = (2j + 1) \frac{\lambda}{4} + d \frac{2}{\pi} \ln \sin \pi \frac{\theta}{2} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (33)$$

при которой амплитуда излучающейся волны будет максимальной. В законе сохранения энергии (17) следует полагать $W_n^- = 0$, поскольку

$$\text{для гребенки } b_n = 0, \text{ а } |a_{-\mu}^{(1)}| = 2 \frac{\sin(\pi\theta\kappa\alpha)}{\pi\theta\kappa\alpha}.$$

Минимум излучения наблюдается при глубине щелей

$$h = j \frac{\lambda}{2} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (34)$$

В этом случае излучение отсутствует вообще: $W = 0$, $W_n^+ = 0$. Таким образом, различие между величиной энергии излучения от гребенки с оптимальной глубиной щелей (33) и неоптимальной глубиной (34) еще более значительное, чем для решетки из брусьев.

Можно вычислить максимально допустимое отклонение глубины щелей $\pm \Delta h$ от оптимального значения, при котором величина $W_{\pm\mu}^{\pm}$ будет составлять не менее $0,5 (W_{\pm\mu}^{\pm})_{\max}$. Для углов излучения

$$\begin{aligned} |\varphi - \pi/2| &\leq \pi/4 \\ |\Delta h| &\leq \lambda \frac{\theta}{2\pi \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Это ограничение можно использовать для определения допусков на изготовление реальных решеток.

4. Аномалии Вуда в дифракционном излучении. Как известно, при дифракции плоской волны на объемных решетках при некоторых условиях имеет место резонансное рассеяние волн, которое приводит к резкому изменению интенсивности дифракционного луча в узком диапазоне углов или длин волн. Это так называемые аномалии Вуда [4-9]. Они имеют место и при дифракционном излучении.

В п. 3 разд. 3 по существу уже рассматривались аномалии Вуда, причиной которых являются резонансы поля по глубине щели. Здесь мы займемся аномалиями, связанными с появлением быстрых дифракционных гармоник, скользящих вдоль решетки со скоростью, близкой к c . (В оптике аномалии такого рода впервые были предсказаны Релеем.) При этом мы ограничимся рассмотрением их в диапазоне $\kappa < 1/2$, где формулы для амплитуд волн дифрагированного поля имеют наиболее простой вид (14) — (16), а использование явления дифракционного излучения наиболее целесообразно.

Аномалиям Вуда этого типа в длинноволновом диапазоне соответствует $\zeta \rightarrow 0$. Из формул (14) — (16) видно, что при резонансе ($\zeta = 0$) дифрагированное поле с длиной волны λ в каждом из трех рассмотренных случаев существует только в том полупространстве, где движется источник ($z > h$). В щелях между элементами решетки оно

пропорционально θ^2 , а в случае решетки из брусев оно пренебрежимо мало и в полупространстве $z < -h$. Кроме того, в области $z > h$ вся энергия источника сосредоточивается в единственной гармонике с номером $n = -\mu$, а остальные гармоники и здесь малы по амплитуде.

Для величин $|a_n|^2$ и $|b_n|^2$, определяющих энергетические характеристики излучения, и в окрестности резонансов $\zeta \rightarrow 0$, пригодны формулы (25). Из этих формул следует, что резонансы такого рода могут быть очень узкополосными. При надлежащем выборе параметров δ и θ добротность резонансной кривой $\lambda/\Delta\lambda$ может быть достигнута сколь угодно большой; величина добротности ограничивается только омическими потерями в металле. (Здесь $\Delta\lambda$ — полоса длин волн в окрестности λ , на краях которой величина W_n^\pm уменьшается вдвое.) Для рассматриваемых решеток формулы для $\lambda/\Delta\lambda$ имеют соответственно следующий вид:

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^{(1)} = 2 \frac{(x\theta Q \operatorname{tg}(\pi x \delta) - 1)^2}{\theta^2 \operatorname{tg}^2(\pi x \delta)}, \quad \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^{(2)} = 2 \frac{(x\theta Q + \operatorname{tg}(\pi x \delta))^2}{\theta^2},$$

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^{(3)} = \frac{2(\alpha \pm 1) \sin^2(2\pi x \delta) (x\theta Q + \operatorname{tg}(\pi x \delta))^2 (x\theta Q - \operatorname{ctg}(\pi x \delta))^2}{\theta^2 [1 + \sqrt{1 + \sin^2(2\pi x \delta) (x\theta Q + \operatorname{tg}(\pi x \delta))^2 (\theta x Q - \operatorname{ctg}(\pi x \delta))^2}]}. \quad (36)$$

С помощью формул (9б), (10), можно аналогично рассмотреть особенности аномалий Вуда также и в окрестностях точек скольжения, $x = \frac{-n\beta}{1 \pm \beta}$.

5. *Возбуждение собственных поверхностных волн решеток с помощью электронных пучков.* Известно, что на периодической структуре может существовать режим собственных поверхностных волн. Например, этот режим для отражательной решетки рассматривался в работе [9].

Из формул (8), (9а), а также (13) — (15) следует, что собственный поверхностный режим, для которого поле представимо в виде (2), можно возбудить электронным потоком (1). Об этом свидетельствует тот факт, что амплитуды волн a_n , b_n , c_m , d_m , полученные при решении задачи в приближении заданного тока, могут обращаться в бесконечность при значениях x , β , для которых $(\alpha + n)^2 x^{-2} > 1$, $x < \frac{1}{2}$, если только

$$\theta \operatorname{tg}(\pi x \delta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[\pi\theta(\alpha + s)]}{[\pi\theta(\alpha + s)]^2 \sqrt{(\alpha + s)^2 x^{-2} - 1}}; \quad (37a)$$

$$\theta \operatorname{ctg}(\pi x \delta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[\pi\theta(\alpha + s)]}{[\pi\theta(\alpha + s)]^2 \sqrt{(\alpha + s)^2 x^{-2} - 1}}. \quad (37б)$$

Уравнение (37а) определяет режим собственных поверхностных волн для идеально проводящей гребенки, а (37б) — для гребенки с основанием из идеального магнетика. Для решетки из брусев возможно выполнение обоих уравнений (37а), (37б). При этом (37а) соответствует возбуждению режима собственных поверхностных волн, у которых поле \mathbf{H} в щелях симметрично относительно плоскости $z=0$, а (37б) — определяет условия возбуждения волн, у которых поле \mathbf{E} в щелях

симметрично относительно этой же плоскости. Решив уравнения (37а), найдем значения параметров β , κ , при которых соответствующий собственный режим возбуждается. Из самих уравнений (37а), (37б) видно, что эти параметры будут вещественными.

Приведем явные формулы коэффициентов замедления собственных поверхностных волн, которые найдем из решения (37а) и (37б), воспользовавшись приближенным значением суммы ряда, входящего в (37а):

$$\frac{1}{\beta_{-\mu}} \approx \sqrt{1 + \frac{\theta^2 \operatorname{tg}^2(\pi\kappa\delta)}{(1 - \kappa\theta Q \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta))^2}} \quad (\text{при } \kappa\theta Q \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta) < 1),$$

$$\frac{1}{\beta_{-\mu}} \approx \sqrt{1 + \frac{\theta^2 \operatorname{ctg}^2(\pi\kappa\delta)}{(1 + \kappa\theta Q \operatorname{ctg}(\pi\kappa\delta))^2}} \quad (\text{при } \kappa\theta Q \operatorname{ctg}(\pi\kappa\delta) > -1).$$
(38)

Здесь $\beta_{-\mu} = \frac{|v_{-\mu\phi}|}{c}$; $Q = -2 \ln \sin \frac{\pi\theta}{2}$; $Q > 0$ всегда; $v_{-\mu\phi}$ — фазовая скорость $-\mu$ -й пространственной гармоники. Волны с такой фазовой скоростью возбуждаются электронным потоком, относительная скорость которого $\beta = v/c$ равна

$$\beta = \frac{\kappa\beta_{-\mu}}{\mu\beta_{-\mu} + \kappa} \quad (\mu = 1, 2, \dots).$$
(39)

Интересно отметить, что согласно (38) фазовая скорость $-\mu$ -й поверхностной гармоники при надлежащем выборе параметров решетки θ , δ может сколь угодно мало отличаться от c , хотя источником ее, как видно из (39), может быть нерелятивистский электронный поток. Волна, скользящая вдоль решетки со скоростью, близкой к c , слабо затухает вдоль оси Oz ; коэффициент затухания ее равен

$$\alpha_{-\mu} = \frac{\theta^2 \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta)}{(1 + \kappa\theta Q \operatorname{tg}(\pi\kappa\delta))^2} \quad \text{или} \quad \alpha_{-\mu} = \frac{\theta^2 \operatorname{ctg}(\pi\kappa\delta)}{(1 - \kappa\theta Q \operatorname{ctg}(\pi\kappa\delta))^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 34, № 1, 33 (1966).
2. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопапов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 341 (1966).
3. В. Г. Сологуб, сб Радиотехника, изд ХГУ, № 4, 3 (1967)
4. В. Г. Сологуб, В. П. Шестопапов, Г. Г. Половников, ЖТФ, 35, № 4, 289 (1967).
5. R. W. Wood, Phil. Mag., 4, 396 (1902).
6. Rayleigh, Proc. Roy. Soc. (London), A-79, 399 (1907).
7. V. Twersky, J. Acust. Soc. Amer., 22, 539 (1950).
8. A. Hessel, A. A. Oliner, Appl. Opt., 4, 1275 (1965).
9. Л. Н. Дерюгин, Докторская диссертация, МЭИ, М., 1954

EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD BY AN ELECTRON FLUX
MOVING NEAR DIFFRACTION GRATINGS*V. G. Sologoub, O. A. Treť'yakov, V. P. Shestopalov*

The problem of diffraction of self-field of a charge moving uniformly near the array of bars of rectangular cross section and reflecting diffraction gratings of two types is solved. An exact solution of the boundary problem leads to the infinite systems of linear algebraic equations relative to the amplitude of spatial harmonics representing the field. In the case of arrays with narrow slots there have been obtained explicit expressions for the diffraction field. The physical properties of diffraction radiation are investigated.

УДК 621 376.234

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТОРОВ, ОСНОВАННЫХ НА РАЗОГРЕВЕ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В n -InSb

А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. Н. Листвин, В. В. Мигулин

Исследована зависимость предельной чувствительности и коэффициента преобразования детекторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, работающих на основе разогрева электронного газа в n -InSb, от параметров материала (концентрации донорных и акцепторных примесей), режима работы (величина электрического и магнитного полей) и геометрии детектора и приемной камеры. Показано, что выбором концентрации донорных и акцепторных примесей и геометрии полупроводника для заданной системы подвода излучения при оптимальном режиме работы можно создать детектор, работающий без магнитного поля, который при $\lambda \geq 0,7$ мм обладает предельной чувствительностью не хуже и коэффициентом преобразования примерно таким же, как и детектор, работающий с магнитным полем.

Показано, что применение интегрирующей приемной камеры не приводит к выигрышу в предельной чувствительности детектора. Рассчитана предельная чувствительность приемника с детектором из n -InSb без магнитного поля при 4,2°K с учетом реальных условий работы. Результаты расчета сопоставлены с экспериментом. Показано, что детектор из n -InSb на длинах волн $\lambda \geq 0,7$ мм обладает примерно такой же приведенной предельной чувствительностью, как и германиевый болометр Лоу, работающий при 2°K.

1. Приемники коротковолновой части миллиметрового и субмиллиметрового (дальнего ИК) диапазонов с охлажденным до гелиевых температур детектором из n -InSb, работающим на основе разогрева электронного газа в объеме полупроводника под действием постоянного электрического поля (смещения) и излучения, находят все более широкое применение в радиометрии, спектроскопии и в других областях [1-15]. В связи с этим при разработке детекторов становится важным определение оптимального материала по концентрации донорных и акцепторных примесей (n_d и n_a [см⁻³], соответственно, $n_d + n_a = n_i$), режима работы (магнитное и электрическое поля, температура) и оптимальной геометрии детектора и приемной камеры.

Для решения этих вопросов воспользуемся соотношениями для коэффициента преобразования K и предельной чувствительности $P_{пр}$ детекторов, излучение в которых поглощается всем объемом детектора и вызывает изменение сопротивления детектора (в частности, детекторов, работающих на основе обычной фотопроводимости или разогрева электронного газа излучением):

$$K = \frac{U_{эфф}}{P} = \xi \frac{\eta}{S_T} k_d; \quad (1)$$

$$P_{пр} = \frac{\sqrt{U_{ш}^2}}{K}, \quad (2)$$

где $U_{эфф}(\theta)$ — эффективная амплитуда сигнала на выходе детектора;

$P(\text{вт})$ — мощность падающего на детектор излучения; ξ — коэффициент, учитывающий форму модуляции принимаемого сигнала; η — коэффициент поглощения детектора, равный отношению поглощенной в объеме детектора мощности излучения к падающей; $S_T(\text{см}^2)$ — площадь поперечного сечения детектора, перпендикулярного току детектора; k_d — удельный коэффициент преобразования детектора — коэффициент преобразования детектора при $S_T = 1$, $\eta = 1$ и $\xi = 1$ [16]; $\sqrt{\bar{U}_{\text{ш}}^2}(\text{в})$ — среднеквадратичное шумовое напряжение на выходе детектора. Если уровень собственных шумов детектора близок к тепловому шуму, соответствующему величине сопротивления детектора в рабочей точке и его температуре, то можно записать

$$\bar{U}_{\text{ш}}^2 = 4tkTR_d\Delta f(\theta^2), \quad (3)$$

где t — шумовое отношение детектора, приведенное к его тепловым шумам при температуре T , $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1}$ — постоянная Больцмана, $T(\text{°К})$ — рабочая температура детектора, $R_d(\text{ом})$ — сопротивление детектора в рабочей точке, $\Delta f(\text{гц})$ — эффективная полоса пропускания усилителя продетектированного сигнала.

Если представить сопротивление детектора в виде

$$R_d = \frac{1}{\sigma} \frac{l_T}{S_T}, \quad (4)$$

где $\sigma(\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1})$ — электропроводность материала детектора на постоянном токе и низких частотах, $l_T(\text{см})$ — размер детектора в направлении тока смещения, то предельную чувствительность детектора (2) можно выразить следующим образом:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\sqrt{4tkT\Delta f}}{\xi} \frac{\sqrt{v}}{\eta} \frac{1}{k_d \sqrt{\sigma}}. \quad (5)$$

Обычно детектор выполняется так, что излучение поступает на одну из граней детектора, приемную поверхность площадью $S_d(\text{см}^2)$ и распространяется в объеме детектора вдоль одного из размеров, который мы назовем толщиной детектора и обозначим $d(\text{см})$. Выбор величин S_d и d определяется независимыми факторами, поэтому v в (5) удобно представить в виде $v = S_d d$.

Для полупроводниковых детекторов в случаях, представляющих практический интерес, $\sigma_{\omega}/\omega\varepsilon \ll 1$ и можно ввести параметр

$$\alpha = \sigma_{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} d, \quad (6)$$

где σ_{ω} — электропроводность материала детектора на частоте принимаемого излучения ($\omega = 2\pi f$), $\sqrt{\mu/\varepsilon}(\text{ом})$ — волновое сопротивление для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в объеме детектора, μ и ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости материала детектора. Введенный параметр α можно назвать оптической толщиной детектора, так как он характеризует затухание по мощности плоской электромагнитной волны, распространяющейся в одном направлении от одной грани детектора к другой.

Выражение (5) удобно представить в форме

$$P_{\text{пр}} = \left(\frac{\sqrt{4tkT\Delta f}}{\xi \sqrt{\mu/\varepsilon}} \right) \left(\sqrt{S_d} \frac{\sqrt{\alpha}}{\eta} \right) (k_d \sqrt{\sigma_{\omega}})^{-1}, \quad (7)$$

получающейся после подстановки в (5) $v = S_d d = S_d \alpha / \sigma_\omega \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Аналогичным образом можно представить и выражение (1) для коэффициента преобразования детектора:

$$K = \left(\xi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right) \left(\frac{L_T}{S_d} \frac{\eta}{\alpha} \right) (k_d \sigma_\omega). \quad (8)$$

2. С помощью соотношений (7) и (8) проанализируем зависимости предельной чувствительности и коэффициента преобразования детекторов от параметров материала, режима работы детектора, а также от геометрии детектора и приемной камеры для интересующих нас детекторов из n -InSb, работающих на основе разогрева электронного газа.

Для этих детекторов [16, 17]

$$k_d = \frac{\beta E}{\sigma(1 + 2\beta E^2)}, \quad (9)$$

где $\beta = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d(E^2)}$ — коэффициент нелинейности вольт-амперной характеристики детектора [17], E ($\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$) — электрическое поле смещения в объеме детектора.

Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что лучшие детекторы при $T=4,2^\circ\text{K}$ и оптимальном электрическом смещении (максимальном отношении сигнал/шум) обладают шумовым отношением $t \approx 3 \div 10$. При $T \approx 1,5^\circ\text{K}$ шумовое отношение несколько возрастает. Указанные значения шумового отношения наблюдаются при различной геометрии детекторов и содержании примесей. Величина волнового сопротивления $\sqrt{\mu/\varepsilon} \approx 94, 2 \text{ ом}$ и в интересующих нас случаях не зависит от концентрации электронов. Таким образом, на основании перечисленных выше фактов можно считать, что при заданной температуре и режиме модуляции сигнала (ξ) множители $\sqrt{4tkT\Delta f}/\xi \sqrt{\mu/\varepsilon}$ и $\xi \sqrt{\mu/\varepsilon}$, входящие в (7) и (8), в интересующих нас случаях остаются практически постоянными.

Анализ влияния геометрических факторов и параметров материала на предельную чувствительность наиболее просто провести для детекторов, работающих в отсутствие магнитного поля, поскольку при этом параметры k_d , σ и σ_ω не зависят от формы детектора. В этом случае в выражениях (7) и (8) от геометрии будут зависеть только множители $\sqrt{S_d} \sqrt{\alpha}/\eta$ и $L_T \eta/S_d \alpha$ соответственно.

Начнем с рассмотрения множителя $\sqrt{\alpha}/\eta$, входящего в (7). Для получения минимального значения $P_{\text{пр}}$ необходимо обеспечить максимальное значение отношения $\eta/\sqrt{\alpha}$, что соответствует выбору оптимальной толщины детектора d при заданном значении σ_ω .

Графики величин $\eta(\alpha)/\sqrt{\alpha}$ для двух простейших случаев — детектор с металлической подложкой и без нее в отсутствие какой-либо специальной приемной камеры — представлены на рис. 1. Расчет проводился по известным формулам для $\eta(\alpha)$:

$$\eta(\alpha) = \frac{(1-\rho)(1-e^{-\alpha})}{1-\rho e^{-\alpha}}; \quad (10)$$

$$\eta_0(\alpha) = \frac{(1-\rho)(1-e^{-2\alpha})}{1-\rho e^{-2\alpha}}, \quad (11)$$

где η соответствует детектору без металлической подложки, η_0 — детектору с металлической подложкой. В обоих случаях

$$\rho = \left(\frac{V_{\mu_0/\varepsilon_0} - V_{\mu/\varepsilon}}{V_{\mu_0/\varepsilon_0} + V_{\mu/\varepsilon}} \right)^2 = \left(\frac{V_{\varepsilon} - V_{\varepsilon_0}}{V_{\varepsilon} + V_{\varepsilon_0}} \right)^2 = 0,36, \quad (12)$$

где $V_{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \text{ ом}$ — волновое сопротивление свободного пространства.

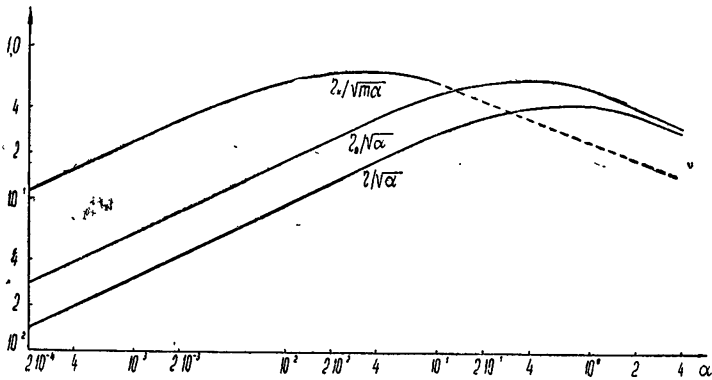


Рис. 1.

Формулы (10) — (12) справедливы для случая, когда а) толщина детектора, ширина полосы частот принимаемого излучения и распределение излучения по углам падения на приемную поверхность детектора таковы, что интерференционные эффекты усредняются, б) углы падения излучения на приемную поверхность детектора меньше значений угла Брюстера (для $n\text{-InSb}$ $\theta_{\text{Бр}} \approx 75^\circ$). Описанные условия имеют место в большинстве случаев на практике.

Из графиков на рис. 1 видно, что $\eta(\alpha)/V\alpha$ и $\eta_0(\alpha)/V\alpha$ имеют максимумы, равные $\sim 0,47$ и $\sim 0,655$ при $\alpha_{\text{опт}} \approx 0,76$ и $\alpha_{\text{опт}} \approx 0,38$ соответственно.

Коэффициент поглощения детектора, находящегося в интегрирующей камере без учета поглощения излучения в стенках камеры, что справедливо в интересующих нас случаях, при условии $\alpha \ll 0,1$ и $m = S_d/S_0 \gg 1$ (S_0 — площадь входного отверстия камеры) по аналогии с [18] можно представить в виде

$$\eta_k(\alpha) \approx \frac{m \eta_0(\alpha)}{m \eta_0(\alpha) + 1}. \quad (13)$$

Расчет показывает, что величина $\eta_k(\alpha)/V\alpha$ так же, как и в простейших случаях, имеет максимум, равный примерно $0,71 \sqrt{m}$ при $\alpha_{\text{опт}}$, зависящем от m . Этот максимум имеет место, как нетрудно показать, при $m \eta_0(\alpha) \approx 1$, и, поскольку при $\alpha \ll 0,1$ $\eta_0(\alpha) \rightarrow 2\alpha$, множитель

$$\frac{\eta_k(\alpha)}{V S_d V \alpha} = \frac{\eta_k(\alpha)}{V S_0 V m \alpha} \approx \frac{0,71}{V S_0} \text{ и } \alpha_{\text{опт}} \approx \frac{1}{2m}.$$

На рис. 1 приведен пример расчета величины $\eta_k/Vm\alpha$ с помощью формулы (13) для $m = 16$. Именно по этой величине нужно сравнивать детектор без интегрирующей камеры и детектор, помещаемый в интегрирующую камеру, поскольку площадь приемной поверхности детектора S_d в первом случае и площадь входного отверстия камеры во втором случае для конкретной приемной системы должны быть оди-

наковы. С учетом сказанного из графика на рис. 1 следует, что предельные чувствительности детектора с металлической подложкой в отсутствие камеры и детектора в интегрирующей камере, в каждом случае при соответствующем оптимальном значении α и при использовании одного и того же материала, примерно одинаковы.

Минимально возможная величина S_d , или S_0 в случае интегрирующей камеры, определяется условиями фокусировки (или концентрации) излучения оптической системой приемника при заданных параметрах источника излучения.

Таким образом, множители $V\sqrt{S_d}(\sqrt{\alpha}/\eta)$ и $L_T\eta/S_d\alpha$, входящие в (7) и (8), по крайней мере для рассмотренных систем, определяются геометрией детектора и оптической системой приемника. Для каждого конкретного случая при условии выбора оптимальной геометрии детектора, приемной камеры и всей оптической системы приемника эти множители должны иметь вполне определенные значения, не зависящие от параметров материала и режима работы детектора. Это справедливо по крайней мере до тех пор, пока малая толщина детектора не начнет влиять на электронные процессы в нем.

Теперь рассмотрим множители $(k_d\sqrt{\sigma\sigma_\omega})^{-1}$ и $k_d\sigma_\omega$, входящие в (7) и (8), которые зависят только от параметров материала (концентрации примесей и электронов) и режима работы (электрическое поле, температура). По этим множителям следует производить сравнение материала для детекторов и внешних физических условий, при которых они работают. Наиболее просто решается вопрос о выборе электрического поля смещения. Очевидно, его следует выбирать таким, чтобы обеспечить максимальное отношение сигнал/шум. Обычно это поле ($E_{\text{опт}}$) соответствует максимальному значению k_d .

В работе [16] получена зависимость $k_{d \text{ макс}}$ и $\sigma_{\text{опт}}$ от содержания примесей в отсутствие магнитного поля при температуре $T=4,2^\circ\text{K}$.

Для длин волн $\lambda \geq 0,7 \text{ мм}$, согласно классическим представлениям [4], $\sigma_\omega \approx \sigma$ и, следовательно, $k_d V \sigma \sigma_\omega \approx k_d \sigma_\omega \approx k_d \sigma$.

В таблице 1 приведены значения $k_{d \text{ макс}} \sigma_{\text{опт}}$ (при $H=0$), вычисленные по данным работы [16].

Таблица 1

№ образца	Концентрация электронов $n = n_d - n_a$ (см^{-3})	Концентрация примесей n_i (см^{-3})	$\sigma_{\text{опт}}$ (в рабочей точке) ($\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$)	$k_{d \text{ макс}}$ ($\text{в} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{вт}^{-1}$)	$k_{d \text{ макс}} \sigma_{\text{опт}}$
1—14	$1,4 \cdot 10^{14}$	$3,3 \cdot 10^{14}$	2,3	1,65	3,79
8—13	$8,4 \cdot 10^{13}$	$7,2 \cdot 10^{14}$	0,5	4,8	2,40
6—13	$6,0 \cdot 10^{13}$	$7,4 \cdot 10^{14}$	0,37	6,8	2,51
5—13	$5,9 \cdot 10^{13}$	$2,4 \cdot 10^{15}$	0,11	12,7	1,40
1—13	$1,5 \cdot 10^{13}$	$2,5 \cdot 10^{15}$	0,034	37,2	1,26

В работе [16] показано, что для детекторов, работающих в отсутствие магнитного поля, при оптимальном электрическом смещении $\sigma_{\text{опт}} \approx \chi_1(n_d - n_a)/(n_d + n_a)$ и $k_{d \text{ макс}} \approx \chi_2(n_d + n_a)^{1/2}/(n_d - n_a)$, где χ_1 и χ_2 — коэффициенты, зависящие только от рабочей температуры детектора. По этой причине $k_{d \text{ макс}} \sigma_{\text{опт}} \approx \chi_1 \chi_2 (n_d + n_a)^{-1/2}$ и $P_{\text{нр}} \sim (n_d + n_a)^{1/2}$, откуда следует, что более чистый по содержанию примесей материал при оптимальной геометрии детектора обеспечивает более высокую предельную чувствительность детекторов.

Проведенные измерения показали, что произведение $k_{д \max} \sigma_{\text{опт}}$ мало изменяется в диапазоне температур $\sim 1,5-8^\circ\text{K}$, а при $T \gtrsim 8^\circ\text{K}$ резко уменьшается, откуда следует, что предельная чувствительность детекторов при $T > 8^\circ\text{K}$ резко ухудшается.

Для получения более полных сведений о влиянии параметров материала на характеристики детекторов необходимо провести измерения зависимости $\sigma_\omega(\omega)$ материала детекторов во всем диапазоне частот при различном содержании примесей.

3. При наличии магнитного поля анализ влияния параметров материала, режима работы (в частности, магнитного поля) и геометрии детектора усложняется в силу ряда причин: 1) электропроводность становится анизотропной как на постоянном токе, так и на СВЧ; 2) на зависимость электропроводности на постоянном токе от магнитного поля влияет форма детектора; 3) при определенных условиях в механизм детектирования дает существенный вклад фотоионизация примесей, приводящая к примесной фотопроводимости [19]; 4) при электрических полях, близких к $E_{\text{опт}}$, в коротковолновом участке диапазона на механизм детектирования может влиять дополнительный разогрев электронов, связанный с фотоионизацией примесей [20]; 5) на длинах волн $\lambda \lesssim 0,25$ мм в сильных магнитных полях преобладает магнито-оптический эффект [21].

В работе [16] было показано, что при наложении магнитного поля вплоть до ~ 10 кэ, температуре $4,2^\circ\text{K}$ и оптимальном электрическом поле при длинах волн излучения $\lambda \gtrsim 1$ мм экспериментальные данные по эффекту детектирования в $n\text{-InSb}$ хорошо объясняются явлением разогрева свободных электронов постоянным электрическим полем и излучением и изменением вследствие этого подвижности и концентрации свободных электронов. В присутствии поперечного или продольного магнитного поля и, следовательно, при анизотропном характере электропроводности экспериментально измеряется «эффективное» значение электропроводности $\sigma = \sigma_{\text{эфф}}$. Можно показать, что в тех условиях, когда эффект разогрева электронного газа является преобладающим, выражения (7) и (8) остаются справедливыми для значения «эффективной» электропроводности. Кроме того, согласно экспериментальным данным, эффекты, связанные с формой детектора, не сказываются существенно из-за малости значения тангенса угла Холла при оптимальном электрическом поле (тангенс угла Холла обычно < 1 при магнитных полях $H \lesssim 10$ кэ). Следует учитывать также эффекты, связанные с различием взаимодействия с веществом электромагнитных волн левой и правой поляризации и проявляющиеся при наложении магнитного поля. Однако, согласно оценкам, проведенным в классическом приближении, эти эффекты не существенны для $n\text{-InSb}$ при магнитном поле ~ 10 кэ и длинах волн излучения $\gtrsim 1$ мм.

В связи с этим для магнитных полей $H \lesssim 10$ кэ и $E \simeq E_{\text{опт}}$ можно пользоваться выражениями (7) и (8), по крайней мере для анализа зависимости предельной чувствительности и коэффициента преобразования от оптической толщины детектора α и параметров материала. При этом о параметрах материала можно судить по величинам $k_{д \max}$ и $\sigma_{\text{опт}}$. В работе [16] приведены типичные зависимости $k_{д \max}$ и $\sigma_{\text{опт}}$ от магнитного поля при $E = E_{\text{опт}}$ и температуре $4,2^\circ\text{K}$. Из этих данных следует, что с ростом магнитного поля произведение $k_{д \max} \sigma_{\text{опт}}$ уменьшается, несмотря на возрастание $k_{д \max}$ в несколько раз при увеличении магнитного поля до 10 кэ. Уменьшение $k_{д \max} \sigma_{\text{опт}}$ указывает на то, что, по крайней мере, в длинноволновой части диапазона предельная чувствительность детектора не должна улучшаться с ростом магнитного

поля. Проведенные измерения предельной чувствительности детекторов в длинноволновой части субмиллиметрового диапазона и миллиметровом диапазоне волн при указанных выше условиях подтверждают этот вывод. Что касается выводов относительно предельной чувствительности в коротковолновой части субмиллиметрового диапазона, то они могут быть сделаны после проведения дополнительных экспериментальных исследований.

4. На основе развитых представлений можно сделать некоторые заключения, полезные для выбора детектора и условий согласования его с усилителем протектированного сигнала.

Поскольку для детектора, работающего в отсутствие магнитного поля, $\alpha_{\omega} \approx \sigma$ для длин волн $\lambda \geq 0,7$ мм [4], то, учитывая, что $S_T = bd$ где b — ширина детектора, в соответствии с (4) и (6) сопротивление детектора из n -InSb, имеющего оптимальную толщину в длинноволновой части субмиллиметрового диапазона, равно

$$R_{д\text{ опт}} \approx 124 \frac{l_T}{b} \text{ ом}$$

— без металлической подложки ($\alpha_{\text{опт}} \approx 0,76$) и

$$R_{д\text{ опт}} \approx 248 \frac{l_T}{b} \text{ ом}$$

— с металлической подложкой ($\alpha_{\text{опт}} \approx 0,38$). Пользуясь этими данными, можно контролировать оптимальную толщину детектора по величине его сопротивления.

Из этих данных вытекает, что сопротивление детектора примерно с квадратной формой приемной площади при оптимальной толщине в длинноволновой части диапазона равно ~ 100 — 300 ом, а при оптимальной толщине на длинах волн $\lambda < 0,7$ мм — еще меньше. Для того, чтобы уровень шума усилителя протектированного сигнала не превышал существенно уровень шума такого сравнительно низкоомного детектора (обладающего шумами, близкими к его тепловым шумам при гелиевых температурах [$\sim (1 \div 3) \cdot 10^{-10}$ в при $\Delta f = 1$ гц]), необходимо применять повышающий трансформатор с тем, чтобы обеспечить низкий коэффициент шума усилителя F_y , отнесенный к тепловым шумам детектора [4, 22]. Без повышающего трансформатора при таком низком сопротивлении детектора даже с самой малозумящей усилительной лампой [23] на входе низкий коэффициент шума получить невозможно.

В тех случаях, когда повышающий трансформатор не применим из-за ограничения быстродействия, которым обладают рассматриваемые детекторы ($\tau_d \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ сек), возможны два варианта.

1) Использование детектора с оптимальной оптической толщиной. При этом коэффициент шума усилителя (отнесенный к тепловым шумам детектора при $T = 4,2^\circ\text{K}$) даже с входным шумовым сопротивлением ~ 200 ом составит $F_y \approx 60$. Ситуацию можно несколько исправить, если разрезать детектор на части и последовательно соединить их между собой [9]. При этом, в соответствии с (7) и (8), предельная чувствительность детектора не изменится, а сопротивление детектора возрастет и, следовательно, уменьшится F_y .

2) Использование детектора с оптической толщиной, существенно меньшей оптимальной, но помещенного в интегрирующую камеру; при этом параметры интегрирующей камеры должны быть, естественно, оптимальными (см. разд. 2). Уменьшение оптической толщины достигается за счет снижения σ_{ω} при работе с магнитным полем или при исполь-

зовании материала с повышенным содержанием примесей в отсутствие магнитного поля, либо за счет уменьшения толщины детектора d . Во всех трех случаях возрастает сопротивление детектора и, следовательно, уменьшается F_y примерно при той же предельной чувствительности приемника, что и в отсутствие интегрирующей камеры, но при оптимальной толщине детектора и разрезании его на части.

5. В заключение в качестве примера проведем расчет параметров приемника непрерывного излучения с детектором, работающим в отсутствие магнитного поля, пользуясь полученными соотношениями и данными.

В соответствии с данными таблицы 1 для детектора следовало бы выбрать образец 1—14. Однако в соответствии с (6) и графиком на рис. 1 он должен иметь оптимальную толщину ~ 20 мк, что практически очень сложно выполнить. С этой точки зрения вполне приемлемы параметры образца 6—13. Для этого образца (все расчеты относятся к случаю $\lambda \geq 0,7$ мм)

$$d_{\text{опт}} = \frac{\alpha_{\text{опт}}}{\sigma \sqrt{\mu/\epsilon}} = \frac{0,38}{0,37 \cdot 94,2} \approx 0,11 \text{ мм.}$$

Для согласования со спектрометрами или антеннами радиометров субмиллиметрового диапазона обычно выбирается размер приемной площадки детектора $\sim 5 \times 5$ мм, т. е. $S_d \approx 0,25$ см². При постоянной времени после синхронного детектора $\tau_{\text{сх}} = 1$ сек ($\Delta f_{\text{эфф}} = 1/2 \tau_{\text{сх}} = 0,5$ гц), $\xi \approx 0,5$ (модуляция меандром), $t \approx 3$, $[\eta_0(\alpha)/\sqrt{\alpha}]_{\text{макс}} \approx 0,64$ и $T = 4,2^\circ\text{K}$ на основании (7) для образца 6—13 имеем $P_{\text{пр}} \approx 1,2 \cdot 10^{-12}$ вт. Коэффициент преобразования в этом случае, согласно (8), равен $K \approx 245$ в·вт⁻¹.

При $d = 1$ мм ($\alpha \approx 3,45$), в соответствии с графиком на рис. 1, получается ухудшение предельной чувствительности примерно в 1,8 раза. Коэффициент преобразования при этом будет равен $K \approx 44$ в·вт⁻¹, а $R_d \approx 30$ ом. Если учесть, что в лучшем случае удастся реализовать коэффициент шума усилителя $F_y \approx 2,5$, то это приведет к ухудшению предельной чувствительности еще в $[(t + F_y - 1)/t]^{1/2} = (4,5 \cdot 3)^{1/2} \approx 1,22$ р. Этому соответствует $P_{\text{пр}} \approx 2,6 \cdot 10^{-12}$ вт, что нам практически и удавалось получить [8, 11]: лучший результат составляет $P_{\text{пр}} \approx 10^{-12}$ вт [11].

Сравним рассматриваемые детекторы с германиевым болометром Лоу, который при $S_d \approx 0,01$ см², $\tau_{\text{сх}} = 10$ сек и $T \approx 2^\circ\text{K}$ обладает предельной чувствительностью $P_{\text{пр}} \approx 4 \cdot 10^{-14}$ вт [24]. С этой целью приведем предельные чувствительности к стандартным условиям: $S_d = 1$ см² и $\tau_{\text{сх}} = 1$ сек. При этом в соответствии с (7) получим: для лучшего детектора из n -InSb $P_{\text{пр}}^* \approx 2 \cdot 10^{-12}$ вт, для болометра Лоу $P_{\text{пр}}^* \approx 1,2 \cdot 10^{-12}$ вт. В таблице 2 приведены сравнительные характеристики этих двух детекторов.

Таблица 2

	Приведенная предельная чувствительность $P_{\text{пр}}^*$ (вт) (при $S_d = 1$ см ² , $\tau_{\text{сх}} = 1$ сек) (лучшие результаты)	Быстродействующие τ (сек)	Рабочая температура $T_{\text{раб}}$ (°K)
Болометр Лоу [24] $\lambda \approx 0,05 \div 1,5$ мм	$1,2 \cdot 10^{-12}$	$\sim 10^{-3}$	2
Детектор из n -InSb [11] $\lambda \approx 0,5 \div 1,5$ мм	$2 \cdot 10^{-12}$	$< 10^{-6}$	4,2

ЛИТЕРАТУРА

1. E. H. Putley, Proc. Phys. Soc., **76**, 802 (1960); Phys. Chem. Sol., **22**, 241 (1961).
2. E. H. Putley, Appl. Opt., **4**, 649 (1965).
3. B. V. Rollin, Proc. Phys. Soc., **77**, 1102 (1961).
4. M. A. Kinch, B. V. Rollin, Brit. JAP, **14**, 672 (1963).
5. Т. М. Лифшиц, Ш. М. Коган, А. Н. Выставкин, П. Г. Мельник, ЖЭТФ, **42**, 959 (1962).
6. J. Besson, B. Philippeau, R. Cano, M. Mattioli, R. Papoulat, L'Onde Electrique, **45**, 107 (1965).
7. Е. И. Попов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 5, 862 (1965).
8. К. А. Аганбекян, А. Н. Выставкин, В. Н. Листвин, В. Д. Штыков, Радиотехника и электроника, **11**, 1252 (1966).
9. Н. А. Горохов, Г. Г. Долгов-Савельев, ПТЭ, № 1, 126 (1966)
10. Е. А. Карлова, Н. В. Карлов, ПТЭ, № 2, 191 (1966).
11. Приемники субмиллиметрового диапазона ПСД-5 и ПСД-6, ПТЭ, № 4, 228 (1966).
12. A. J. Lichtenberg, S. Sesnic, JOSA, **56**, 75 (1966).
13. Plasma Diagnostic Techniques, ed. by R. H. Huddleston and S. L. Leonard, Academic Press, New York—London, 1965, ch. 9, M. F. Kimmitt, A. C. Prior, V. Roberts, Far-Infrared Techniques.
14. F. R. Adams, C. M. Allen, B. J. Peyton, E. W. Sard, Proc. IEEE, **54**, 12 (1966).
15. Е. М. Гершензон, Ю. А. Гурвич, Н. Г. Птицына, С. Л. Орлова, ФТТ, **9**, 691 (1967).
16. А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. Н. Листвин, В. В. Мигулин, Физика и техника полупроводников, **1**, 844 (1967).
17. Ш. М. Коган, ФТТ, **4**, 1891 (1962).
18. G. A. Morton, M. L. Schultz, W. E. Harty, RCA Rev., **20**, 599 (1959).
19. Т. М. Лифшиц, Ф. Я. Надь, ФТТ, **8**, 2149 (1966).
20. А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. Н. Листвин, ФТТ, **8**, 443 (1966).
21. M. A. C. S. Brown, M. F. Kimmitt, Infrared Phys., **5**, 93 (1965).
22. А. Н. Выставкин, П. Г. Мельник, ПТЭ, № 1, 189 (1963).
23. Н. А. Панкратов, В. П. Коротков, Опт.-мех. пром., № 9, 18 (1963).
24. F. J. Low, Proc. IEEE, **53**, 516 (1965).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
23 января 1967 г.

ON LIMITING SENSITIVITY OF DETECTORS, BASED ON THE ELECTRON-GAS HEATING IN n -InSb

A. N. Vystavkin, V. N. Gubankov, V. N. Listvin, V. V. Migulin

There is investigated the dependence of the limiting sensitivity and the conversion factor of the detectors in millimeter and submillimeter range, using an electron-gas heating, on the parameters of the material (concentration of donor and acceptor impurities), operating condition (the magnitude of electric and magnetic fields) and the geometry of the detector and the receiving chamber. It is shown that at an optimal operation regime there exists the possibility to construct the detector without the magnetic field by the variation of concentration of donor and acceptor impurities and semiconductor geometry for the given system of the radiation supply. The limiting sensitivity of this detector is not worse than, and the conversion factor about the same as the detector with the magnetic field at $\lambda \geq 0.7$ mm. The use of the integrating receiving chamber does not give the gain in the limiting sensitivity of the detector. The limiting sensitivity of the receiver with n -InSb detector without the magnetic field is calculated at 4,2°K, taking into account the real working conditions. The results of calculation are compared with the experiment. The n -InSb detector is shown to have the same limiting sensitivity as the germanium Low bolometer, operating at 2°K in the wavelength range $\lambda \geq 0.7$ mm.

Примечание при корректуре. Согласно более поздним данным [25], в диапазоне волн $\lambda \approx 0,8-4$ мм при $H=0$ σ_{ω} превышает σ , причем с ростом суммарной концентрации и степени компенсации примесей это различие возрастает. По этой причине параметр $k_d \text{ макс } \sigma_{\text{опт}}$ следует умножить на величину $\sqrt{\sigma_{\omega}/\sigma_{\text{опт}}}$, что приведет к некоторым поправкам, не меняющим, однако, существа сделанных выводов.

ЛИТЕРАТУРА

25. А. Н. Выставкин, Ю. С. Гальперн, В. Н. Губанков, Физика и техника полупроводников, **1**, 1737 (1967).

УДК 621.374.4:621.314.283

К ВОПРОСУ ОБ УМНОЖЕНИИ ЧАСТОТЫ НА ПОЛУПРОВОДНИКАХ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

В. Н. Генкин, П. М. Меднис

Показано, что нелинейная проводимость в полупроводниках может определяться отклонением закона дисперсии от квадратичного. Приводятся оценки возможности использования полупроводников для эффективного умножения частоты в СВЧ диапазоне.

1. Нелинейная зависимость тока от электрического поля в полупроводниках на низких частотах связывается обычно (см., например, [1-6]) с изменением подвижности электронов в полях большой амплитуды. К сильным нелинейным эффектам, однако, должны приводить в СВЧ диапазоне и особенности движения электрона в зоне, связанные с неквадратичностью закона дисперсии. Впервые, по-видимому, возможность такого эффекта была отмечена Батчером [7], который получил выражение для нелинейных проводимостей, определяемых законом дисперсии в предельном случае частот поля, стремящихся к нулю. Целью настоящей работы является проведение подробных оценок нелинейностей, связанных с особенностями закона дисперсии, и обсуждение возможностей использования эффекта для умножения частоты в СВЧ диапазоне.

2. Микроскопический расчет [8] в однозонном приближении приводит к следующему выражению для восприимчивостей s -го порядка по полю:

$$\alpha_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s) = \frac{e^{s+1}}{v \hbar^{s+1} s!} \frac{(i)^s}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s} \sum_{nk} \rho_n(\mathbf{k}) \left\{ \frac{\partial^{s+1} \epsilon_n(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha_1} \partial k_{\alpha_2} \dots \partial k_{\alpha_s}} + \right. \\ \left. + \hbar(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_s) \frac{\partial^s \Omega_{nn}^{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha_1} \partial k_{\alpha_2} \dots \partial k_{\alpha_s}} - \hbar s \omega_1 \frac{\partial^s \Omega_{nn}^{\alpha_1}(\mathbf{k})}{\partial k_{\alpha_1} \partial k_{\alpha_2} \dots \partial k_{\alpha_s}} \right\}. \quad (1)$$

Здесь e — заряд электрона; v — объем образца; \hbar — постоянная Планка; ω_s — частоты гармоник внешнего электрического поля $E(t)$; \mathbf{k} — волновой вектор; n — индекс, нумерующий законы; $\epsilon_n(\mathbf{k})$ — закон дисперсии в зоне; $e\Omega_{nn}^{\alpha}(\mathbf{k})$ — собственный дипольный момент электрона проводимости [8, 9]; индекс α нумерует проекции на оси координат. Выражение (1) имеет относительную точность

$$\delta \sim \frac{s\omega}{\Delta}, \quad (2)$$

где Δ — характерное расстояние между зонами. Естественно, что выражение (1), определяемое внутрizonным движением электронов, оказывается пропорциональным числу носителей в зоне и обращается в нуль для полностью заполненных зон. В последнем можно убедиться,

проводя суммирование по \mathbf{k} при учете периодичности $\varepsilon_n(\mathbf{k})$ и $\Omega_{nn}(\mathbf{k})$ с периодом обратной решетки. Что касается заполненных зон, то их вклад в проводимость по сравнению с частично заполненными зонами порядка $(\omega/\Delta)^3 n/n_0$, где n и n_0 — число электронов соответственно в частичной и полностью заполненных зонах. В интересующей нас области частот (СВЧ диапазон) этот вклад действительно мал для $s \geq 3$, так как характерное значение $\omega/\Delta \leq 10^{-3}$, а $n_0/n \sim 10^{-7}$. Здесь уместно отметить, что объяснение [10] эксперимента [11] только непараболичностью закона дисперсии является не совсем полным, так как параметр (2) в случае [11] отнюдь не мал и выражение (1) уже не полностью определяет проводимость. Можно, например, убедиться, проводя последовательный микроскопический расчет типа [8], что проводимость третьего порядка по полю, ответственная за появление наблюдавшейся в [11] гармоники частоты $2\omega_2 - \omega_1$ (ω_1 и ω_2 — частоты внешних полей), содержит слагаемые вида

$$\sigma_{\alpha\alpha_1\alpha_2}^k(\omega_2\omega_2 - \omega_1) \sim \frac{e^4}{\hbar^3} \sum_{n\mathbf{k}} \rho_n(\mathbf{k}) \frac{\Omega_{nn'}^{\alpha_2} \Omega_{n'n}^{\alpha_1} [\nabla_{k\alpha_1} \omega_{nn'}(\mathbf{k})] [\nabla_{k\alpha_1} \omega_{nn'}(\mathbf{k})]}{\omega_1^2 [\omega_{nn'}(\mathbf{k}) - \omega_2] [\omega_{nn'}(\mathbf{k}) - 2\omega_1]}, \quad (3)$$

где $\Omega_{nn'}^{\alpha}(\mathbf{k})$ — матричный элемент оператора координаты по блоховским функциям, относящимся к разным зонам. Ясно, что, например, для InSb в условиях эксперимента [11] ($\omega_{21}(\mathbf{k}) \sim 2\omega_2$) вклад в проводимость слагаемых типа (3) может оказаться существенным. Легко видеть, что вклад (3) также зависит от числа носителей.

Возвращаясь к обсуждению выражения для проводимости (1), справедливого при выполнении (2) (СВЧ диапазон), отметим, что первая сумма (1) описывает только эффекты нечетного порядка. Это следует из четности по \mathbf{k} функций $\varepsilon_n(\mathbf{k})$, $\Omega_{nn}(\mathbf{k})$ и распределения $\rho_n(\mathbf{k})$ [12]. Как показывают оценки, эффекты четного порядка по полю начинают сказываться в относительно больших полях ($10^2 - 10^3$ CGSE), поэтому здесь с них останавливаться не будем, предположив для простоты, что среда обладает центром инверсии. Эффекты четного порядка по полю в среде с центром инверсии исчезают вместе с $\Omega_{nn}(\mathbf{k})$ и проводимость уже полностью описывается первой суммой (1). Уместно добавить еще, что при выводе [8] выражения (1) предполагалось, что частоты полей велики по сравнению с частотой столкновений. В противном случае под ω_s следует понимать комплексные величины, мнимая часть которых определяется временем столкновений τ^* . Что касается оценочных формул для проводимости s -го порядка, то их легко получить из (1), если ввести эффективную массу и заменить дифференцирование по k_{α_s} делением на a^{-1} , где a — размер ячейки кристалла:

$$\sigma_{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_s} \sim \sigma_1 \frac{1}{s!} \left(\frac{ea}{\hbar\omega} \right)^{s-1}. \quad (4)$$

Здесь σ_1 — линейная по полю проводимость:

$$\sigma_1 = i \frac{e^2 n}{m^* \omega}, \quad (5)$$

* Из выражения (1) легко видеть, что в отсутствие столкновений ($\omega \gg \tau^{-1}$) нелинейные эффекты в зоне полностью определяются неквадратичностью закона дисперсии, и, следовательно, они могут быть использованы для уточнения закона дисперсии.

где m^* — эффективная масса, определяемая второй производной от закона дисперсии; n — плотность электронов. Величина

$$E^* = \frac{\hbar\omega}{ea} \quad (6)$$

представляет собой значение поля, при котором нелинейные эффекты при $s = 3$ становятся сравнимыми с линейным по полю откликом. Для частот поля, малых по сравнению с частотой столкновений, роль ω в (4) играет τ^{-1} , и, следовательно, именно τ^{-1} определяет минимальную величину E^* .

Оценочная формула (6) получена в результате грубого приближения. Она может быть несколько уточнена, по крайней мере, для случая $s = 3$, если воспользоваться при вычислении производных в выражении (1) типичным видом закона дисперсии электрона [13], который справедлив вблизи минимума зоны:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar\Delta}{2} \left(1 + \frac{2\hbar k^2}{m^*\Delta} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

В (7) Δ — расстояние между валентной зоной и зоной проводимости. Оценим для примера эффективные поля в InSb n -типа. При комнатной температуре ($\Delta \sim 2,6 \cdot 10^{14}$ рад·сек⁻¹, $\tau^{-1} \sim 1,5 \cdot 10^{12}$ сек⁻¹, $m^* \sim 1,2 \cdot 10^{-29}$ г) с помощью выражений (1), (4) и (7) находим для минимального значения поля E^* величину 2 ед. CGSE. Для германия в случае образцов n -типа ($\Delta \sim 10^{15}$, $\tau^{-1} \approx 2 \cdot 10^{12}$, $m^* \sim 1,1 \cdot 10^{-28}$ г) значение E^* , согласно (1), (4), (7), порядка 10 ед. CGSE, тогда как для образцов p -типа, где, как легко убедиться, основной вклад в нелинейность дают легкие дырки ($m^* = 3,6 \cdot 10^{-29}$ г), величина эффективного поля примерно в 1,5 раза меньше. Это обстоятельство, а также ход температурной зависимости E^* (E^* зависит от температуры через τ) находятся в соответствии с экспериментом [2, 5], хотя абсолютные значения эффективных полей, следующие из оценок, несколько завышены (примерно в три раза) по сравнению с наблюдаемыми на опыте. Возможно, это расхождение связано с неточностью аппроксимации закона дисперсии в германии выражением (7). Отметим, что рассматриваемый механизм является определяющим в ионных полупроводниках, где влияние разогрева на подвижность носителей сказывается при полях 300 ед. CGSE [1]. Что касается атомных полупроводников, то нелинейность, связанная с изменением подвижности из-за разогрева носителей, существенна при полях уже в несколько единиц [1] CGSE, и для выяснения роли рассматриваемого механизма требуется специальный анализ.

3. Отмеченное выше свойство полупроводников (малое значение E^* для эффектов нечетного порядка по полю) позволяет использовать их для умножения частоты в СВЧ диапазоне. В целях иллюстрации этого утверждения проведем подробную оценку требований к устройству для получения третьей гармоники.

Пусть имеется резонатор объема V , настроенный одновременно на частоты ω_0 и $\omega_s = 3\omega_0$ с добротностями Q_0 и Q_s . Пусть далее в резонатор помещен образец полупроводника, объем которого $v \ll V$, так, чтобы он находился в пучностях полей обеих частот. Для определенности предположим, что имеется образец с удельным сопротивлением $5 \text{ ом} \cdot \text{см}^{-1}$ и временем столкновений $\tau \sim 5 \cdot 10^{-11}$ сек (параметры вещества, использованные в эксперименте [5]), согласованный с резонатором. Рассмотрим поле, которое возникает на частоте $3\omega_0$ при заданном

поле на частоте ω_0 . Представляя поле в резонаторе обычным образом (см., например, [14]) в виде набора собственных гармоник:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} P_{\nu}(t) E_{\nu}(\mathbf{r}); \quad \int E_{\nu}(\mathbf{r}) E_{\nu'}(\mathbf{r}) dV = 4\pi\delta_{\nu\nu'}, \quad (8)$$

где $E_{\nu}(\mathbf{r})$ — собственные распределения полей в резонаторе, получаем для ν -ой гармоники поля при учете конечной добротности резонатора на частоте ω ,

$$\dot{P}_{\nu} + \frac{\omega_{\nu}}{2Q_{\nu}} \dot{P}_{\nu} + \omega_{\nu}^2 P_{\nu} = - \int \frac{\partial j}{\partial t} E_{\nu}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (9)$$

Учитывая, что вследствие малости образца можно пренебречь изменением $E_{\nu}(\mathbf{r})$ на размерах образца $E_{\nu}(\mathbf{r}) \simeq E_{\nu}(\mathbf{r}_0)$ и тот факт, что стационарное значение P_{ν} определяется в основном резонансной частью тока, найдем при $\omega \simeq 3\omega_0$ с помощью (1)

$$P_{\nu}(t) = \frac{i3\omega_0 P_0^3 \exp(-i3\omega_0 t)}{\omega_{\nu}^2 - (3\omega_0)^2 - i3\omega_0 \omega_{\nu}/2Q_{\nu}} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{e^{\alpha}}{\hbar^4 3! (-i)^3} \frac{1}{(\omega_0 + i2\pi\tau^{-1})} \times \\ \times \sum_{n\mathbf{k}} \rho_n(\mathbf{k}) \frac{\partial^3 \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial k_x \partial k_y \partial k_z} E_{\alpha_1 \omega_0}(\mathbf{r}_0) E_{\alpha_2 \omega_0}(\mathbf{r}_0) E_{\alpha_3 \omega_0}(\mathbf{r}_0). \quad (10)$$

Переходя к оценочным формулам, заменим $E_{\omega_0}(\mathbf{r}_0)$ его средним значением согласно (8), а $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ выразим через проводимость первого порядка и E^* согласно (4) — (6). Тогда вместо (9), пренебрегая расстройкой, получаем

$$E(3\omega_0) = \frac{4\pi Q_{\nu}}{9\omega_0} \left(\frac{E(\omega_0)}{E^*} \right)^2 \sigma_1(\omega_0) E(\omega_0). \quad (11)$$

В (9) под $E(3\omega_0)$ и $E(\omega_0)$ понимаются амплитуды полей на частотах $3\omega_0$ и ω_0 и введен фактор заполнения ξ :

$$\xi = \nu/V.$$

Мощность излучения на частоте $3\omega_0$ при добротности связи $Q_{\text{св}}$ равна

$$W(3\omega_0) = \frac{2\pi \xi^2 V Q_{\nu}^2 \sigma_1^2 \omega_0}{27\omega_0 Q_{\text{св}}} \left(\frac{E(\omega_0)}{E^*} \right)^4 E^2(\omega_0). \quad (12)$$

Как видно из (12), $W(3\omega_0)$ пропорциональна квадрату фактора заполнения и квадрату проводимости, если только добротность Q_{ν} не определяется потерями в образце. Наиболее интересен, однако, случай, когда объем образца достаточно велик, так что потери в основном определяются омическим поглощением в полупроводнике и связью резонатора с внешним пространством. Добротность, связанная с омическими потерями $Q_{\text{п}}$, как нетрудно сообразить, есть

$$Q_{\text{п}} = \xi^{-1} \frac{(3\omega_0)^3 \gamma_{3\omega_0}^2}{2(2\pi)^3 \sigma_0}, \quad \gamma_{\omega} = \begin{cases} \tau\omega, & (\omega > \tau^{-1}) \\ 1, & (\omega < \tau^{-1}) \end{cases}, \quad (13)$$

где σ_0 — проводимость в постоянном поле. Мощность, излучаемая на частоте $3\omega_0$, в этом случае равна

$$W(3\omega_0) = \frac{\beta \xi}{2(1 + \beta)^2 \delta^2} \left(\frac{E(\omega_0)}{E^*} \right)^4 E^2(\omega_0) \sigma_0 V, \quad (14)$$

где β есть отношение $Q_{св}/Q_{п}$, а δ принимает значения 1 или 3 соответственно при $\omega_0\tau \geq 1$ и $3\omega_0\tau < 1$, причем в первом случае основной вклад в третью гармонику связан с реактивной частью тока, а во втором — с активной. Легко видеть, что мощность пропорциональна только первой степени $\omega_0\xi$, и, следовательно, коэффициент полезного действия η при заданном β не зависит от объема и проводимости образца, так как омические потери также пропорциональны $\omega_0\xi$. Если учесть омические потери на частотах ω_0 и $3\omega_0$, то для η можно получить

$$\eta = (1 + \beta)^{-1} \left[1 + \frac{2\delta^2(1 + \beta)}{\gamma_{\omega_0}^2 \beta} (E^*/E(\omega_0))^4 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Оптимальное соотношение между омическими потерями и потерями на связь β при заданном $E(\omega_0)$ есть

$$\beta_{\text{опт}} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E(\omega_0)}{E^*} \right)^4 \frac{\gamma_{\omega_0}^2}{\delta^2} \right]^{-1/2}. \quad (16)$$

В частности, при $E(\omega_0) \sim E^*$ для $\tau^{-1} > \omega_0$, $\beta \sim 1$ η составляет около процента. Но уже при $E(\omega_0) = 2,5E^*$ $\beta = 0,6$ и η равно 30%. Если говорить об абсолютных величинах, то, полагая* $\omega_0 = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, $V \sim 1 \text{ см}^3$, $\xi \sim 3 \cdot 10^{-2}$, получим для добротности, связанной с омическими потерями на частотах ω_0 и $3\omega_0$, соответствующие значения 100 и 300. Полагая в соответствии с [2-6] $E^*(\omega_0) = 3 \text{ CGSE}$, находим, что мощность на входе на частоте $\omega_0 = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, необходимая для поддержания поля $E(\omega_0) = 2,5E^* = 2500 \text{ в.см}^{-1}$, составит 3 квт. Тогда на выходе на частоте $3\omega_0 = 6,6 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ мощность составит около киловатта.

Следует отметить, что повышение η при меньших мощностях возможно за счет увеличения добротности резонатора. Необходимо добавить, кроме того, что осуществление предлагаемого преобразователя в непрерывном режиме требует решения задачи о теплоотводе.

Авторы благодарны В. М. Файну за внимание к работе и обсуждение результатов и Г. М. Генкину за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, УФН, 24, 21 (1940).
2. K. Seger, Phys. Rev., 114, 476 (1959); J. Appl. Phys., 34, 1608 (1963).
3. J. Zucser, V. J. Fowler, E. M. Cowell, J. Appl. Phys., 32, 2606 (1961).
4. T. Morgan, C. E. Kelly, Phys. Rev., 137, 1576 (1965).
5. W. Schneider, K. Seger, Appl. Phys. Lett., 8 133 (1966).
6. В. Л. Гуревич, Р. Катиклюс, ЖЭТФ, 49, 1145 (1965)
7. В. N. Butcher, T. P. McDean, Proc. Phys. Soc., 81, 279 (1962).
8. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, Физика и техника полупроводника, 1, 1769, 1967.
9. В. Н. Генкин, П. М. Меднис, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 192 (1967); 10, № 4, 585 (1967).
10. P. A. Wolff, G. A. Pearson, Phys. Rev. Lett., 17, 1015 (1966).
11. C. K. L. Patel, R. E. Slusher, P. A. Fleurg, Phys. Rev. Lett., 17, 1011 (1966).

* Отметим, что эффект утроения в волноводе наблюдался в [2] с $\eta = 1\%$.

12. И. М. Лившиц, М. И. Коганов, УФН, 69, 419 (1963).
13. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1945 (1964); ЖЭТФ, 33, 944 (1957).
14. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 января 1967 г.

THE PROBLEM OF FREQUENCY MULTIPLICATION ON SEMICONDUCTORS IN UHF RANGE

V. N. Genkin, P. M. Mednis

The nonlinear conductance in semi-conductors is shown to be determined by the deviation of the dispersion law from the quadratic one. Estimations of applicability of semi-conductors for effective frequency multiplication in UHF range are given.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.32

**О ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИИ
РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА, ВЫЗВАННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ
ДВИЖЕНИЯМИ В ХРОМОСФЕРЕ**

О. И. Юдин

Известно, что изменения потока радиоизлучения Солнца связаны с теми или иными процессами в солнечной атмосфере. В связи с проводившимися наблюдениями слабых возмущений потока радиоизлучения Солнца [1, 2] в [3] был рассмотрен один из возможных механизмов модуляции потока радиоизлучения в сантиметровом диапазоне, связанный со спикульной структурой хромосферы. Ниже обращается внимание на возможность обнаружения периодической модуляции радиоизлучения Солнца, вызванной вертикальными движениями в хромосфере.

В фотосфере Солнца наблюдаются вертикальные движения небольшого масштаба [4-6]. Характерной особенностью этого поля вертикальных скоростей является их периодический характер. Величина периода в верхней фотосфере выражена очень четко и равна 296 ± 3 сек. Корреляция колебаний вдоль поверхности Солнца простирается на несколько тысяч километров, а во времени прослеживается на интервале, содержащем 2-4 колебания. Колебания прослеживаются вплоть до средних слоев хромосферы [7, 8], причем с высотой период колебаний несколько убывает. Расчеты, приведенные в [9] для некоторых моделей хромосферы, в первом приближении показывают возможность существования в хромосфере звуковых стоячих волн с нужными периодами. Очевидно, что стоячая звуковая волна в оптической толстой неизотермической атмосфере может привести к модуляции потока, если длина волны соизмерима с толщиной слоя. Оценим порядок величины этого эффекта. Известно [10], что радиоизлучение «спокойного» Солнца, для которого был проведен расчет, определяется тормозным механизмом излучения и поэтому в первом приближении можно не рассматривать влияние периодических изменений магнитного поля [12].

Для оценки глубины модуляции потока из-за перераспределения электронной концентрации в стоячей звуковой волне можно воспользоваться приближенным соотношением [13], выполняющимся в сантиметровом диапазоне, $T_{эфф}(\lambda) \simeq T_e(h_1)$, где h_1 — высота над фотосферой, соответствующая уровню, на котором оптическая глубина $\tau = 1$. Запишем распределение электронной концентрации в стоячей волне в хромосфере в виде

$$N(h) = \bar{N}(h) + \alpha \bar{N}(h) \cos kh \cos \Omega t,$$

где $\bar{N}(h)$ — зависимость средней электронной концентрации от высоты, а $\alpha \bar{N}(h)$ — амплитуда стоячей волны. Высота уровня будет периодически с частотой Ω изменяться, что вызовет периодические изменения $T_{эфф}(\lambda)$. Амплитуда смещения уровня определяется уравнением

$$\tau(h_1) \simeq A \left[\bar{\tau}(h_1) + 2\alpha \cos \Omega t \int_{h_1}^{\infty} \frac{N^2(s)}{T^{3/2}(s)} \cos ks ds \right] = 1.$$

Аппроксимируя [10] зависимости $T(h)$ и $\bar{N}(h)$ функциями

$$T(h) = T_0 e^{ah} \quad \text{и} \quad \bar{N}(h) = N_0 e^{-bh}$$

и учтя, что $\left(2b + \frac{3}{2}a\right) < k = \frac{2\pi}{\Lambda}$, где Λ — длина стоячей волны в хромосфере, получим

$$\Delta h \simeq \frac{a}{k}.$$

Амплитуда изменений эффективной температуры соответствующего участка поверхности Солнца

$$\Delta T_{\text{эфф}}(\lambda) = \frac{dT_e(h)}{dh} \Delta \bar{h} = T_e(h_1) a \Delta \bar{h}.$$

В рассматриваемом приближении в диапазоне сантиметровых волн глубина модуляции антенной температуры $\Delta T_a / \bar{T}_a$ не зависит от длины волны и определяется выражением

$$\frac{\Delta T_a}{\bar{T}_a} \simeq 12 a \Delta \bar{h} \sqrt{Q} \frac{\Omega_n}{\Omega_a},$$

где Ω_n — телесный угол части поверхности Солнца, на которой колебания когерентны, Ω_a — телесный угол диаграммы направленности антенны, Q — число источников модулированного излучения на поверхности Солнца.

По данным различных наблюдений [10] $0,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1} < a < 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1}$. Из оценок в [7, 8, 11] следует, что $a = \frac{v}{c} \simeq 0,1$, $\Delta \simeq 3 \cdot 10^7 \text{ см}$ [14]. В отношении величины Q

можно указать только верхнюю границу $Q \leq 10^5$ для $\sqrt{\Omega_n} \simeq 3'' \div 5''$ [15]. Если принять, что спектральный анализ позволит выделить периодическую составляющую при глубине модуляции $\sim 0,001$, что вполне реально, то необходимое пространственное разрешение радиотелескопа составляет $\sqrt{\Omega_a} < 3' \div 5'$. Учитывая рост амплитуды звуковых волн с высотой и то, что поток энергии волн в активной области может на порядок превышать поток энергии в невозмущенном участке, можно надеяться обнаружить эффект модуляции и с антеннами с меньшим разрешением. Следует заметить, что оптические наблюдения обнаруживают колебательные движения только в нижней хромосфере. Не исключено, однако, их существование и в более высоких слоях, и с этой точки зрения предлагаемый эксперимент в радиодиапазоне может дать существенную информацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Дурасова, Г. А. Лавринов, В. М. Шумкина, О. И. Юдин, Геомагнетизм и аэронавигация, **6**, 938 (1964).
2. М. С. Дурасова, О. И. Юдин, Солнечные данные, № 7 (1966)
3. О. И. Юдин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1180 (1967).
4. Космическая газодинамика, ИЛ, М., 1964.
5. R. V. Leighton, R. W. Noyes, G. W. Simon, *Astrophys. J.*, **135**, 474 (1962).
6. J. W. Evans, R. Michard, Report at Berkeley Meeting of IAU, Comm. 12, 1961.
7. R. V. Leighton, *Ann. Rev. Astron. Astrophys. USA*, **1**, 19 (1963).
8. С. Б. Пикельнер, УФН, **88**, 505 (1966).
9. J. Bahng, M. Schwarzschild, *Astrophys. J.*, **137**, 901 (1963).
10. В. В. Железняков, Радионизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
11. С. А. Каплан, Л. А. Островский, Солнечные данные, № 6 (1963).
12. А. Б. Северный, *Астрон. ж.*, **44**, 3, 481 (1967).
13. В. В. Железняков, *Астрон. ж.*, **41**, 6, 1021 (1964).
14. Э. Е. Дубов, *Астрон. ж.*, **44**, 2, 342 (1967).
15. J. W. Evans, *Astrophys. J.*, **136**, № 2, 493 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 июня 1967 г.

УДК 621.371.182

О ПРОНИКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАМАГНИЧЕННУЮ ПЛАЗМУ

Ю. В. Богомолов

В настоящей работе рассмотрена задача о проникновении электромагнитного поля в замагниченную плазму. Плазма занимает полупространство, на которое нормально падает плоская электромагнитная волна. Постоянное магнитное поле H_0 параллельно границе плазмы. Движением ионов пренебрегаем.

Слабая пространственная дисперсия характеризуется неравенством $\sqrt{\beta} \ll 1$, где $\beta = 8\pi NT/H_0^2$ — отношение газовой давления к магнитному. В этом случае поверхностный импеданс для обыкновенной волны и зеркальной границы равен

$$z = -\frac{4\pi i \omega}{c \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \left[1 + \frac{\beta}{2(\mu^2 + 1)} + \frac{3\beta x \mu}{4\sqrt{\pi}(\mu^2 + 1)^2} \operatorname{Re} J(\mu) \right], \quad (1)$$

где $x = (r_H/c)\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, ω_0 — плазменная частота, r_H — средний ларморовский радиус, $\mu = (i\omega - \nu)/\omega_H$, ν — частота столкновений ($\nu \rightarrow 0$), ω_H — ларморовская частота, $J(\mu)$ — некоторый интеграл [1]; зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$. Соотношение (1) справедливо при $\omega \ll \omega_0$. Если пренебречь током смещения ($\omega^2 \ll \omega_0^2$), то $x = \sqrt{\beta}$ и формула (1) переходит в соответствующее выражение работы [1]. При $\omega = \omega_0$ поглощение отсутствует.

Сильная пространственная дисперсия характеризуется неравенством $kr_H \gg 1^*$, где k — волновое число. Соответствующая теория для диффузной границы развита в работах [2–4]. Мы сделаем дополнительные замечания к этим работам. Так как импеданс не зависит от поляризации волны [2], то достаточно рассмотреть обыкновенную волну. Закон Ома запишется следующим образом.

$$I(k) = \sigma(k) \mathcal{E}(k) + \int_0^\infty dk' \mathcal{E}(k') (Q(k, k') + S(k, k')), \quad (2)$$

где $\mathcal{E}(k)$, $I(k)$ — фурье-преобразования поля и тока. Величины σ и Q описывают периодическое движение электронов, S характеризует столкновения электронов с поверхностью.

Асимптотические выражения для σ , $Q + S$ при kr_H , $k'r_H \gg 1$ имеются в работе [4]. Метод, развитый в работах [2–4], не дает возможности расщепить $Q + S$, поэтому роль столкновений электронов с поверхностью не ясна. Запишем асимптотические формулы для Q и S :

$$Q = -\frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{4kr_H^2} \frac{1 + e^{2\pi\mu}}{1 - e^{2\pi\mu}} \delta(k - k'), \quad S = \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{4kr_H^2} \delta(k - k'). \quad (3)$$

Слагаемыми, не содержащими дельта-функции, пренебрегаем, так как они слабо влияют на импеданс [2]. Из (2), (3) следует [2]:

$$Z = \frac{8}{9} Z(0) (1 - e^{2\pi\mu})^{1/3}, \quad (4)$$

где $Z(0)$ — импеданс Рейтера—Зондхаймера [5]. Если пренебречь столкновениями с поверхностью ($S = 0$), то

$$Z = \frac{8 \sqrt[3]{2}}{9} Z(0) \left(\frac{1 - e^{2\pi\mu}}{1 + e^{2\pi\mu}} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

Из сравнения формул (4) и (5) следует, что роль столкновений электронов с поверхностью незначительна при $\omega \simeq s\omega_H$ (s — целое число), но весьма заметна между гирорезонансами.

Глубина проникновения тока в том же приближении, что и выражение (4), равна

$$d_f = \frac{27}{16} d_H, \quad (6)$$

где d_H — комплексная глубина проникновения поля: $d_H = -(c^2/4\pi i \omega) Z$. Равенство (6) подтверждает сделанные ранее оценки [2].

Уравнение Азбеля—Канера (интегральное уравнение для фурье-компоненты электрического поля) является одним и тем же для обыкновенной и необыкновенной волн [2, 4]. Поэтому $E^{об} = E^{необ}$. Вычисляя, однако, глубины проникновения электрического поля для этих волн, авторы работы [4] пришли к выводу, что $d_E^{об} \neq d_E^{необ}$. Причиной этого парадокса является пренебрежение продольным полем при вычислении

* Точнее. $kr_H \gg s$.

$d_E^{\text{необ}}$. Нами был проведен иллюстративный расчет d_E для обеих волн при пренебрежении поверхностными эффектами ($Q = S = 0$), причем оказалось, что эти величины совпадают.

Автор признателен М. Л. Левину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Богомолов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 462 (1966).
2. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ, 32, 896 (1957).
3. Э. А. Канер, ЖЭТФ, 33, 544 (1957).
4. Э. А. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 1, 47 (1962).
5. G. E. H. Renter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., 195, 336 (1948).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
10 февраля 1967 г.

УДК 533.951 : 539.293

О РЕШЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ГОРЯЧИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ПЛАЗМЕ

Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич

В работе [1] было показано, что функция распределения электронного газа $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$, находящегося в постоянном магнитном и переменном электрическом полях в допущении о квазиупругости рассеяния электронов на фононах и примесях в полупроводнике и атомах и ионах в плазме, может быть записана так:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_0(\epsilon, \mathbf{r}, t) + \chi(\epsilon, \mathbf{r}, t) \frac{p}{m}, \quad (1)$$

где \mathbf{p} — квазиимпульс носителей тока, \mathbf{r} — его координата, t — время, ϵ — энергия электронов, причем $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$, m — эффективная масса электронов. Система уравнений для определения f_0 и χ имеет вид [1]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{p}{3m} \nabla_{\mathbf{r}} \chi + \frac{e}{3} \frac{1}{n(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{p}{m} n(\epsilon) \chi E \right\} = \frac{1}{n(\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ n(\epsilon) A(\epsilon) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{T} f_0(\epsilon) (1 - f_0(\epsilon)) + \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right] \right\} + S_e \{ f_0 \}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - \omega_H [\mathbf{h} \chi] + \nu(\epsilon) \chi = - \frac{p}{m} \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - eE \frac{p}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (3)$$

Здесь $n(\epsilon) = 4 \sqrt{2} \pi m^{3/2} \epsilon^{1/2}$ — плотность состояний; E — электрическое поле; $\omega_H = \frac{|e| H}{mc}$;

H — внешнее постоянное магнитное поле; $\mathbf{h} = \frac{H}{H}$; T — температура решетки в полупроводнике или атомах и ионов в плазме; $\nu(\epsilon)$ — частота соударений, связанная с передачей импульса; $A(\epsilon)/\epsilon^2$ с точностью до постоянного множителя совпадает с частотой соударений, связанных с передачей энергии ν_3 ; $S_e \{ f_0 \}$ — интеграл электрон-электронных соударений. Если переменное поле является монохроматическим с частотой ω , то, как показано в [1], при $\omega \ll \nu_3$ (квазистационарное поле) зависимость f_0 от t в уравнении (2) может не учитываться. В случае же быстропеременного поля $\omega \gg \nu_3$ функция f_0 не успевает следить за изменением поля и устанавливается на каком-то среднем уровне, т. е. зависимостью f_0 от времени в первом приближении также можно пренебречь.

Однако как в случае $\omega \ll \nu_3$, так и в случае $\omega \gg \nu_3$ пренебрежение зависимостью f_0 от t носит приближенный характер. Если же $\omega \sim \nu_3$, то такое пренебрежение вообще незаконно.

В настоящем сообщении будет показано, что при круговой поляризации переменного поля симметричная часть функции распределения f_0 не зависит от времени точно при любой частоте ω .

Пусть распространение электромагнитных волн происходит вдоль магнитного поля, направленного по оси z . Мы ограничимся одномерной задачей и будем считать, что функция распределения и электрическое поле зависят только от одной координаты z . Электрическое поле E имеет вид

$$E = E_c + E_v e^{-i\omega t} + E_v^* e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Знак* означает комплексное сопряжение.

Статическое поле E_c возникло из-за градиента симметричной части функции распределения f_0 и, как можно показать, направлено вдоль оси z [2], переменная часть электрического поля перпендикулярна оси z .

Предположим, что f_0 не зависит от времени, и покажем, что при сделанных допущениях это действительно так.

При f_0 , не зависящем от t , χ в уравнении (3) можно представить в виде

$$\chi = \chi_c + \chi_v e^{-i\omega t} + \chi_v^* e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Для того, чтобы f_0 не зависело от времени, необходимо, чтобы в уравнении (2) все коэффициенты также не зависели от t , т. е. нужно показать, что члены уравнения (2), содержащие χ , при сформулированных выше условиях не зависят от времени.

Подставив (4) и (5) в уравнение (3), для χ_v получим следующее уравнение:

$$[\nu(\epsilon) - i\omega] \chi_v - \omega_H [h \chi_v] = -eE_v \frac{p}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}. \quad (6)$$

Решение его имеет вид

$$\chi_v = -\frac{ep}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\omega_H}{(\nu - i\omega)^2 + \omega_H^2} \left\{ [hE_v] + \frac{\nu - i\omega}{\omega_H} E_v \right\}. \quad (7)$$

Выражение для χ_v^* получается из (7) заменой E_v на E_v^* и i на $-i$. В (7) мы учли, что в силу изложенных условий $(hE_v) = 0$.

Из (3) легко получить выражение для χ_c . Оно запишется так:

$$\chi_c = \left[-\frac{p}{m} \nabla_r f_0 - eE_c \frac{p}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right] \frac{1}{\nu}, \quad (8)$$

χ_c направлено по оси z .

Подставив (7) в (2), легко убедиться, что

$$\nabla_r \chi_v = \nabla_r \chi_v^* = 0, \quad (9)$$

так как в силу одномерности задачи $\nabla_r = \frac{\partial}{\partial z}$, а $\chi_{vz} = \chi_{vz}^* = 0$. В третьем члене с правой стороны равенства уравнения (2) зависимость от времени может появиться только из-за величины (χE) . Подставив в (χE) χ из (4), а E из (5) и учтя (7) и (8), получим, что часть (χE) , зависящая от времени, имеет вид

$$\begin{aligned} & (\chi_c, E_v e^{-i\omega t} + E_v^* e^{i\omega t}) + (E_c, \chi_v e^{-i\omega t} + \chi_v^* e^{i\omega t}) - \\ & - \frac{ep}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left[\frac{\nu - i\omega}{(\nu - i\omega) + \omega_H^2} E_v^2 e^{-2i\omega t} + \frac{\nu + i\omega}{(\nu + i\omega) + \omega_H^2} E_v^{*2} e^{2i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Но так как E_v, E_v^*, χ_v и χ_v^* лежат в плоскости, перпендикулярной z , а χ_c и E_c параллельны z , то первых два члена выражения (10) равны нулю.

Из уравнений Максвелла следует, что при распространении вдоль магнитного поля волна имеет круговую поляризацию [3], т. е. $E_{vx} = \pm iE_{vy}$. Благодаря этому $E_v^2 = E_x^2 + E_y^2 = 0$. Очевидно, что равно нулю и E_v^{*2} . Итак все выражение (10) в этом случае равно нулю. Приведенный вывод остается в силе при круговой поляризации волны и в отсутствие магнитного поля

Таким образом, при сделанных допущениях f_0 не зависит от времени при любых частотах. Заметим, что когда электрон-электронные соударения существенны, то

функция f_0 становится максвелловской, а поскольку уравнения для определения электронной температуры θ и концентрации электронов n получаются из уравнения (2), то θ и n также не зависят от времени. Отсюда вытекает, что в случае круговой поляризации поля все результаты, полученные в работах [2, 4], остаются в силе при любой частоте ω .

Из сказанного следует также, что при круговой поляризации электромагнитного поля эффекты, связанные с умножением частот, отсутствуют.

В заключение авторы выражают благодарность В. М. Яковенко, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).
2. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ, 51, 536 (1966).
3. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ, 47, 1322 (1964).
4. Ф. Г. Басс, Г. Гуревич, ЖЭТФ, 52, 175 (1967).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
3 июля 1967 г.

УДК, 621 378.325

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЧАСТОТЫ ОКГ С ПОМОЩЬЮ ЯВЛЕНИЯ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ В СЖАТЫХ ГАЗАХ*

О. Ф. Бутягин, В. Г. Дмитриев, Г. А. Шариф

Все возрастающий интерес исследователей вызывает явление вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), возникающее в различных средах (жидких, твердых, газообразных) при воздействии на них мощных импульсных лазеров [1]. Этот интерес в значительной мере обусловлен возможностью преобразования частоты возбуждающего излучения и создания на основе ВКР новых мощных многочастотных генераторов, перекрывающих ультрафиолетовый, видимый и инфракрасный диапазоны.

При осуществлении ВКР в газах, сжатых под большим давлением, коэффициент преобразования мощности основного излучения в мощность на комбинационных частотах достигает заметной величины [2]; при этом с увеличением давления интенсивность линий ВКР возрастает [3, 4].

В настоящем сообщении излагаются результаты предварительных экспериментальных исследований явления ВКР сжатого водорода при воздействии на него излучения мощного рубинового лазера, работающего в режиме модулированной добротности. Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. В генераторе возбуждающего излучения использовался рубин размерами 10×120 мм; источником накачки служила импульсная лампа с энергией вспышки до 7000 дж. В качестве модулятора добротности использовался фототропный затвор (раствор фталоцианина ванадия в нитробензоле с начальным пропусканием $T \sim 10\%$). Кювета с фототропной жидкостью помещалась между 100-процентным зеркалом и активным элементом; выходное зеркало отсутствовало (использовалось отражение от торца рубина). При накачке порядка 3 кдж лазер устойчиво генерировал моноимпульс мощностью ~ 35 Вт и длительностью ~ 15 нсек (по уровню 0,5).

Энергия в импульсе измерялась калиброванным калориметром конусного типа с термопарой и прибором М-95; длительность импульса — с помощью фотоэлемента Ф-5 и осциллографа С1-11. Излучение рубинового лазера фокусировалось линзой с фокусным расстоянием 250 мм внутрь специально сконструированной кюветы, заполненной водородом, сжатым до давления $P = 80$ ат (длина кюветы 15,2 см, диаметр входного и выходного окон из стекла — 1 см, длина пути луча света в водороде — 12 см). Точка геометрического фокуса находилась на расстоянии 20—30 мм от внутренней поверхности входного окна кюветы. Фильтр КС-17 служил для экранировки от фона накачки. Излучение, выходящее из кюветы, с помощью второй линзы ($f = 25$ см) и призмы направлялось на щель спектрографа ИСП-51.

* Доложено на секции квантовой электроники V Межвузовской конференции по электронике СВЧ, г. Саратов, 1966 г.

На спектрографе, кроме линии рубинового лазера ($\lambda = 6943 \text{ \AA}$), визуально наблюдались яркие антистоксовы компоненты ВКР, частоты которых находятся в видимом диапазоне (зеленая ($\lambda = 5388 \text{ \AA}$) и синяя ($\lambda = 4402 \text{ \AA}$) линии).

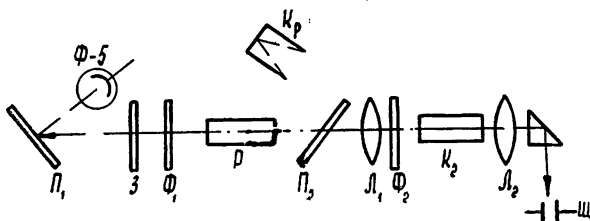


Рис. 1. P_1, P_2 — плоскопараллельные пластинки; Z — идеальное зеркало; Φ_1 — фототропный затвор; P — источник возбуждающего излучения; K_p — калориметр; L_1, L_2 — линзы с $f=25 \text{ см}$; K_2 — кювета со сжатым газом; Ψ — щель спектрографа ИСП-51; Φ_2 — фильтр КС-17.

Были также проведены предварительные измерения мощностей стоксовых и антистоксовых линий ВКР; результаты этих измерений сведены в табл. 1 (мощность лазера на входной линзе принята за 100%). Измерения проводились с помощью фильтров типа ИКС-1 (2 мм), СЗС-21 (2 мм) и СС-8 (2 мм). В табл. 1 приведены результаты с учетом поглощения фильтров и их просветления под действием мощного лазерного излучения.

Обращает на себя внимание тот факт, что полная мощность всех линий на выходе из кюветы не превышает 8,5 Мвт (см табл.), что составляет около 24% мощности воз-

Таблица 1

Область спектра	$\lambda, \text{ \AA}$	Мощность (Мвт)	Интенсивность (%)	Примечание
Инфракрасная	16420	3,6	10%	стоксовы компоненты на выходе кюветы антистоксовы компоненты
	9755			
Красная	6943	4,6	13%	
Зеленая	5388	0,15	0,4%	
Синяя	4402	0,15	0,4%	
Ультрафиолетовая	3721	не измерялась		

буждающего излучения. Это аномально большое поглощение излучения лазера нельзя полностью отнести за счет потерь в оптической системе (линзах, окнах кюветы и т. д.) В экспериментах были приняты меры по предупреждению возникновения светового пробоя внутри кюветы. По-видимому, указанное поглощение связано с эффектом вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зубов, М. М. Сущинский, И. К. Шувалов, УФН, 83 (2), 197 (1964).
2. R. W. Minck, R. W. Terhune, W. G. Rado, Appl. Phys. Lett., 3(10), 181 (1963).
3. S. Dumartin, B. Oksengorn, B. Vodar, Comp. rend., 259 (25), 4589 (1964)
4. В. А. Зубов, М. М. Сущинский, И. К. Шувалов, УФН, 89 (1), 49 (1966).
5. И. Л. Фабелинский. Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, 1965.

Поступила в редакцию
7 июня 1967 г.

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ НАПРАВЛЕННОГО ПРИЕМНИКА СВЕТА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Б. В. Ермаков, Ю. А. Ильинский

Распространение света в рассеивающей среде описывается уравнением переноса [1]. Решение этого уравнения в общем случае представляет определенные трудности. Однако для случая направленных пучков света в средах с узкими индикатрисами рассеяния эта задача решена [1, 2].

Принцип взаимности позволяет использовать полученные в этих работах результаты для решения задачи о приеме света приемником с узкой диаграммой направленности.

Для скалярного уравнения переноса теорема взаимности имеет вид [3]

$$G(M_1, n_1; M_2, -n_2) = G(M_2, n_2; M_1, -n_1), \quad (1)$$

где G — функция Грина для уравнения переноса.

Рассмотрим применение этой теоремы на примере расчета мощности, попадающей в направленный приемник после диффузного отражения от поверхности. Поверхность освещается направленным источником.

Пусть для простоты апертурные диафрагмы приемника и источника расположены в одной плоскости $z = 0$ системы координат x, y, z . Диаграммы направленности приемника и источника узкие, причем излучение и прием осуществляются в направлении оси z .

Отражающая поверхность находится в плоскости $z = z_0$ и представляет собой бесконечную плоскость.

Тогда для мощности, принимаемой приемником, имеет место выражение

$$W = \frac{\kappa}{\pi} \int E(M_1) \cos(\widehat{n_1 e}) R(M_2, n_2) G(M_1, n_1; M_2, -n_2) d\Omega_1 d\Omega_2 dS_1 dS_2. \quad (2)$$

Здесь κ — коэффициент диффузного отражения поверхности (по закону Ламберта), E — освещенность этой поверхности в точке M_1 , а e — единичный вектор по направлению оси z .

Интегрирование производится по всей плоскости $z = z_0$, где лежит точка M_1 , по поверхности $z = 0$, где находится апертурная диафрагма приемника, и по всем телесным углам.

Функция R является характеристикой приемника: в приемник попадает мощность

$$W = \int I(M_2, -n_2) R(M_2, n_2) d\Omega_2 dS_2, \quad (3)$$

если $I(M_2, n)$ есть интенсивность света в точке M_2 плоскости $z = 0$ по направлению n . Воспользовавшись принципом взаимности в форме (1) и введя обозначение

$$E_1(M_1) = \int E_0 \cos(\widehat{n_1 e}) R(M_2, n_2) G(M_2, n_2; M_1, -n_1) d\Omega_1 d\Omega_2 dS_2, \quad (4)$$

можно записать (2) в виде

$$W = \frac{\kappa}{\pi E_0} \int E(M_1) E_1(M_1) dS_1. \quad (5a)$$

Размерный постоянный множитель E_0 введен для удобства интерпретации. В окончательные выражения он не войдет.

Согласно формуле (4), $E_1(M_1)$ представляет собой освещенность в точке M_1 от фиктивного источника, находящегося в плоскости $z = 0$ и излучающего мощность $E_0 R(M_2, n_2)$ с единицы поверхности в точке M_2 в направлении n_2 .

Освещенности E и E_1 можно рассчитать на основе работы [1]. Так как использованный в этой работе метод дает трансформанты Фурье освещенностей и интенсивностей, то удобно переписать (5a) сразу через трансформанты Фурье освещенностей E_1 и E :

$$W = \frac{\kappa}{\pi E_0} \int E(k, z_0) E_1^*(k, z_0) d^2 k, \quad (5b)$$

где $E = \frac{1}{2\pi} \int E(M_1) e^{ikr} d^2 r$, и аналогично для E_1 . Здесь k и r — двумерные векторы в плоскости x, y .

Примем, что источник имеет гауссово распределение интенсивности по сечению пучка и по углам:

$$I(r, 0, n_{tr}) = \frac{\Phi_0}{\pi^2 r_1^2 \theta_1^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_1^2} - \frac{n_{tr}^2}{\theta_1^2}\right), \quad (6)$$

где Φ_0 — мощность источника, r_1 и θ_1 — радиус и расходимость пучка в плоскости $z = 0$, а n_{tr} — составляющая вектора \mathbf{n} , лежащая в плоскости x, y ; $n_{tr} = |n_{tr}|$.

Аналогично для приемника

$$R(r, n_{tr}) = \exp\left(-\frac{r^2}{r_2^2} - \frac{n_{tr}^2}{\theta_2^2}\right), \quad (7)$$

где r_2 и θ_2 имеют смысл радиуса и ширины диаграммы направленности приемника.

Для индикатрисы рассеяния возьмем ту же аппроксимацию, что использована в [1]:

$$\Gamma(\gamma) = \frac{2}{\delta^2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right). \quad (8)$$

Тогда можно получить следующее выражение для W :

$$W = \kappa \Phi_0 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 \theta_2^2 \exp[-2(\epsilon - \sigma) z_0] \varphi_c(2\sigma z_0), \quad (9)$$

где

$$\varphi_c(\tau) = 1 - \int_0^\tau \exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) + (t - \tau)\right] dt,$$

$$\tau = 2\sigma z_0, \quad c = \frac{2r_3^2 \sigma^2}{\delta^2}, \quad r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + z_0^2 \theta_1^2 + z_0^2 \theta_2^2,$$

ϵ и σ — коэффициенты поглощения и рассеяния среды.

Функция $\varphi_c(\tau)$ фигурирует в формулах в работе [1] и вычислена там при нескольких значениях параметра c .

При больших τ имеет место асимптотическая формула

$$W = \kappa \Phi_0 \frac{r_2^2 \theta_2^2}{\delta^2 \sigma z_0^3} \exp[-2(\epsilon - \sigma) z_0]. \quad (10)$$

Кроме экспоненциального множителя, в формуле (10) имеется множитель $1/z_0^3$ вместо $1/z_0^2$, который был бы в отсутствие рассеяния. Если радиусы приемника и источника, а также их углы зрения очень малы, именно, если $r_3^2 \ll \delta^2 z_0^2$, то

$$W = \kappa \Phi_0 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 \theta_2^2 \exp(-2\epsilon z_0). \quad (11)$$

Смысл последней формулы состоит в том, что при очень малом r_3 в приемник не попадает рассеянное излучение.

Авторы благодарят Э. С. Воронина за постановку задачи и Л. С. Долина за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 380 (1964).
2. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, 61 (1966).
3. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.

ИЗЛУЧЕНИЕ ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ ДОБРОТНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

А. М. Белянцев, В. И. Пискарёв

Для получения мощных импульсов излучения наносекундной длительности в твердотельных лазерах широко применяется метод быстрого «включения» (модуляции) добротности оптического резонатора. В гелий-неоновом лазере ($\lambda = 0,6328 \mu$) из-за относительно низкого коэффициента усиления этот метод не позволяет получить импульсы излучения короче нескольких сотен наносекунд. Более короткие импульсы излучения и выигрыш по мощности в лазерах с малым коэффициентом усиления могут быть получены с помощью схемы, основанной на быстром «выключении» добротности оптического резонатора [1].

Ниже приводятся результаты экспериментального исследования излучения He-Ne лазера ($\lambda = 0,6328 \mu$) при импульсном выключении добротности оптического резонатора.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Модулятор добротности состоит из кристалла KDP (z -среза) и двоякопреломляющей призмы из исландского шпата. Одна из кристаллографических осей (x или y) кристалла KDP ориентировалась параллельно плоскости поляризации излучения лазера (I_{\parallel}). Угол при вершине призмы, равный $62^{\circ}20'$, выбирался с таким расчетом, чтобы рабочие грани призмы были ориентированы под углом Брюстера по отношению к I_{\parallel} . Оптическая ось призмы устанавливалась перпендикулярно плоскости поляризации. Резонатор лазера состоял из плоского и сферического ($R = 2,5 \text{ м}$) зеркал с высоким коэффициентом отражения. Расстояние по оптическому пути между зеркалами составляло $1,63 \text{ м}$. Газоразрядная трубка имела длину 1 м и внутренний диаметр порядка 4 мм .

Если кристалл KDP поместить в электрическое поле, то плоскополяризованное излучение, дважды проходя через кристалл, становится, в общем случае, эллиптически поляризованным. Компоненты излучения I_{\parallel} и I_{\perp} с взаимно перпендикулярными поляризациями преломляются в призме под различными углами. Составляющая I_{\perp} отклоняется от направления распространения компоненты I_{\parallel} (в нашем случае на угол $16^{\circ}20'$) и выходит из оптического резонатора. Следовательно, изменение напряжения на кольцевых электродах, между которыми помещен кристалл KDP, меняет потери энергии на излучение в резонаторе, т. е. модулирует его добротность. Минимальная добротность резонатора достигается при полной трансформации I_{\parallel} в I_{\perp} . В данной конструкции модулятора необходимая для этого величина напряжения V_0 была порядка $7,5 \text{ кВ}$.

Модуляция добротности резонатора производилась с помощью прямоугольных импульсов ($\tau_n \gg \tau_{\phi}$) с длительностью фронта $\tau_{\phi} = 6 \text{ нсек}$. При напряжении прямоугольного импульса, превышающем некоторое критическое ($V_{кр} = 1,7 \text{ кВ}$), условие самовозбуждения лазера нарушается, и запасенная в резонаторе энергия из-за трансформации I_{\parallel} в I_{\perp} полностью выводится из резонатора. При этом длительность импульса излучения I_{\perp} и его амплитуда определяются, в основном, напряжением модулирующего импульса*.

На рис. 2 приведены осциллограммы модулирующего импульса и импульса излучения I_{\perp} , выведенного из резонатора при максимальной трансформации I_{\parallel} в I_{\perp} ,

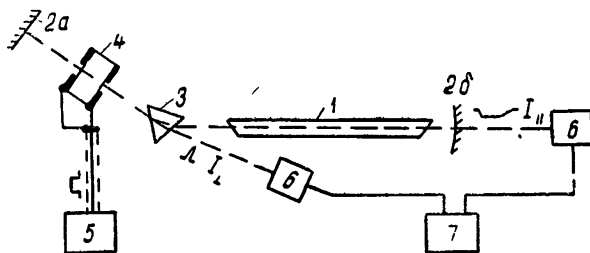


Рис. 1. 1—газоразрядная трубка, 2 а, б—соответственно плоское и сферическое зеркала, 3—двоякопреломляющая призма, 4—модулятор, 5—импульсный генератор, 6—фотоумножитель, 7—осциллограф.

* При $V < V_{кр}$ форма огибающей импульса излучения практически повторяет форму модулирующего импульса. Если амплитуда модулирующего импульса незначительно больше $V_{кр}$ и характерное время спада интенсивности I_{\parallel} велико по сравнению с τ_n , то длительность импульса излучения I_{\perp} также будет определяться величиной τ_n .

г. е. при $V = V_0$. В этом случае импульс излучения имел минимальную длительность $t_n = 28$ нсек (по уровню 0,1) и максимальную пиковую мощность I_m , которая превы-

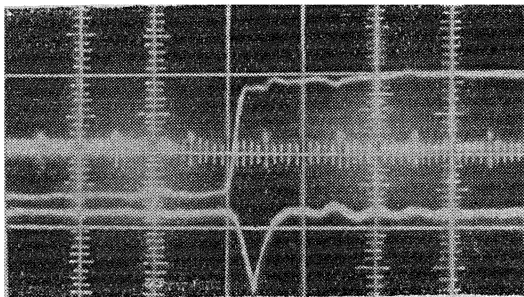


Рис. 2. Верхняя осциллограмма—модулирующий импульс. Нижняя—импульс излучения I_{\perp} . Масштаб по горизонтали 50 нсек·см⁻¹.

шала мощность лазера в непрерывном режиме примерно в 100—150 раз*. Такое увеличение пиковой мощности объясняется малым коэффициентом прозрачности оптического резонатора, определяющим отношение мощности резонатора к мощности, проходящей через зеркала. Зависимость $I_{\perp}(V)/I_m$ и $t_n(V)$ от напряжения модулирующего импульса показана на рис. 3. Пиковая мощность излучения I_{\perp} растет с ростом V и достигает максимума при $V = V_0$, длительность же импульса уменьшается с увеличением амплитуды модулирующего импульса, длительность фронта t_f практически постоянна и определяется фронтом модулирующего импульса. Измерение длительности импульса излучения I_{\perp} на различных уровнях (по осциллограммам) показало, что спад импульса происходит по экспоненте с постоянной времени резонатора $\tau = \tau(V)$; при $V = V_0$ постоянная времени равна $1,06 \cdot 10^{-8}$ сек.**

Модулируя добротность резонатора, можно, во-первых, проверить, является ли спад импульса экспоненциальным на очень низких уровнях мощности (при больших t), во-вторых, определить постоянную времени нарастания интенсивности или время установления колебаний в лазере и, в-третьих, оценить уровень спонтанного излучения лазера с одним зеркалом. Действительно, полагая, что спад интенсивности излучения в присутствии модулирующего импульса и последующее ее нарастание, когда условия самовозбуждения восстанавливаются, имеют экспоненциальный характер***с соответствующими постоянными времени τ и τ_0 . можно написать соотношение, связывающее эти постоянные с длительностью модулирующего импульса τ_n и интенсивностью излучения:

$$\tau_1 - \tau_n = \frac{\tau_n \tau_0}{\tau} - \tau_0 \ln [I_0/I_{\parallel}(\tau_1)]. \quad (1)$$

Здесь $I_{\parallel}(\tau_1)$ — интенсивность излучения I_{\parallel} в момент τ_1 , τ_1 — время, отсчитываемое от начала модулирующего импульса, I_0 — интенсивность излучения в стационарном режиме.

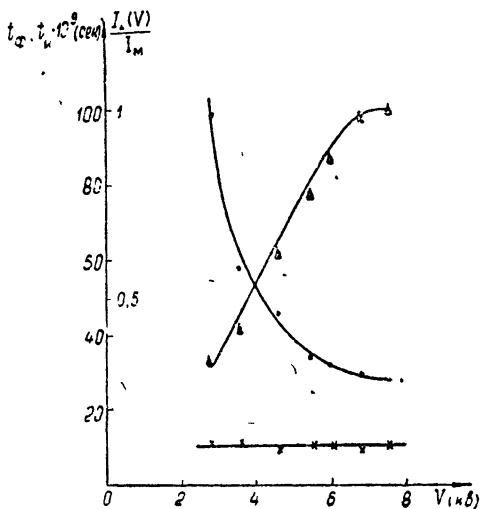


Рис. 3. —▲—▲—▲— $I_{\perp}(V)/I_m$,
—●—●—●— $\tau(V)$,
—×—×—×— $t_f(V)$.

* Когда настоящая работа была в основном закончена, в печати появилась аналогичная работа [2] по модуляции добротности лазера. Модулятор добротности в [2] состоит из кристалла KDP и призмы Волластона. Максимальное превышение пиковой мощности над мощностью непрерывного излучения в [2] порядка 130, длительность импульса излучения порядка 80 нсек.

** Имевшаяся в нашем распоряжении аппаратура позволяла измерять длительность импульса излучения лишь на уровнях $\geq 0,5 \cdot 10^{-3} I_m$ при $I_m \sim 100$ мвт.

*** Имеется в виду экспоненциальное нарастание интенсивности до уровней, где насыщение еще не существенно.

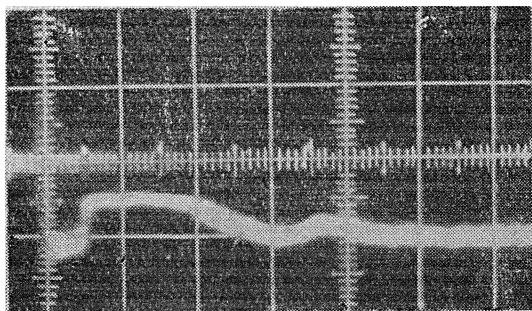


Рис. 4. Масштаб по горизонтали $1 \text{ мксек} \cdot \text{см}^{-1}$.

Величины τ , τ_1 , $I_0/I_{\parallel}(\tau_1)$ могут быть найдены по осциллограмме импульса I_{\parallel} (рис. 4). На рис. 5 показана зависимость $\tau_1 - \tau_n$ от $1/\tau$ при $I_{\parallel}(\tau_1)/I_0 = 0,1$ для двух значений $\tau_n = 530 \text{ нсек}$ и 350 нсек . Зависимость $\tau_1 - \tau_n$ от $1/\tau$, как видно из рис. 5, хорошо аппроксимируется прямой. Это указывает, в частности, на то, что спад интенсивности излучения происходит по экспоненте с постоянной времени резонатора до весьма низких уровней (точка А на рис. 5 соответствует уровню $I_{\parallel}/I_0 = 2,5 \cdot 10^{-7}$, $I_0 \sim 1 \text{ мвт}$). Найденная из графиков рис. 5 постоянная времени нарастания колебаний в He-Ne лазере оказалась в нашем случае равной $(1,52 \pm 0,05) \cdot 10^{-7} \text{ сек}$. К сожалению, с помощью модулятора на KDP выяснить характер спада интенсивности на более низких уровнях и оценить уровень спонтанного излучения не удалось, так как

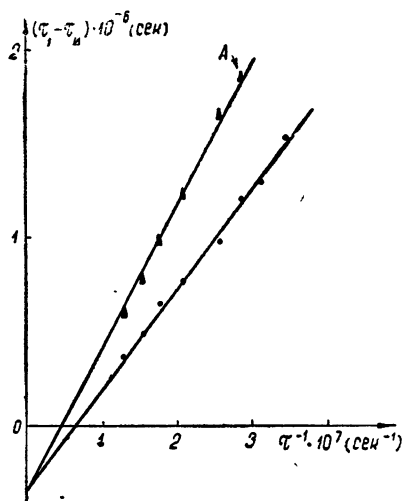


Рис. 5. —▲—▲—▲— — $\tau_n = 530 \text{ нсек}$,
—●—●—●— — $\tau_n = 350 \text{ нсек}$.

импульсное электрическое поле возбуждает в кристалле KDP колебания кристаллической решетки, которые создают паразитную модуляцию добротности резонатора*. Этот паразитный пьезоэлектрический эффект существенно ограничивает возможный диапазон измерения $\tau_1 - \tau_n$.

Авторы весьма признательны В. И. Беспалову и А. В. Гапонову за советы и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Vuylsteke, J. Appl. Phys., 34, № 6, 1615 (1963).
2. W. H. Steier, Proc. of the IEEE, 54, № 11, 1604 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 июля 1967 г.

* Второй импульс на осциллограмме рис. 4 — следствие паразитной модуляции добротности резонатора.

УДК 539.198

ФАЗОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА

Г. А. Васнева

Двухуровневая квантовая система в смешанном энергетическом состоянии обладает дипольным моментом, осциллирующим с частотой перехода ω_{12} [1]. Во внешнем постоянном электрическом поле фаза дипольного момента испытывает дополнительное изменение $\Delta\varphi = \Delta\omega_{12} l/v$, где l — длина, на которой действует поле, v — скорость частицы, а $\Delta\omega_{12}$ — соответствующее этому полю изменение частоты перехода (штарковское смещение).

Состояние частицы в смешанном энергетическом состоянии характеризуется поляризацией

$$p(v) = \mu_{12} \sin(E\mu_{12}L/\hbar v) (\cos \Delta\varphi \sin \omega_{12}t + \sin \Delta\varphi \cos \omega_{12}t), \quad (1)$$

где μ_{12} — матричный элемент дипольного момента перехода, E — высокочастотное поле, под действием которого поляризуется частица (рассматривается случай нулевой расстройки поля относительно частоты перехода), L — длина, на которой действует это поле, \hbar — постоянная Планка.

Поляризация потока частиц, усредненная по скоростям,

$$\langle P(v) \rangle = A \int_0^{\infty} (1/v) p(v) f(v) dv, \quad (2)$$

где A — коэффициент, пропорциональный интенсивности потока частиц и проекции момента M_J на направление поля.

Наблюдая за изменением поляризации пучка в электрическом поле, можно получить дополнительные сведения о статистических свойствах квантового ансамбля в смешанном энергетическом состоянии, например, о параметрах молекулярного пучка в пространстве между резонаторами двухрезонаторного молекулярного генератора [2].

Для исследования поляризации пучка разработан балансный фазовый метод, являющийся в данном случае фазовым методом исследования штарк-эффекта. Пучок поляризуется в результате воздействия на него резонансного высокочастотного поля, которое может возбуждаться внешним источником или быть следствием самовозбуждения при прохождении отсортированного пучка через первый резонатор двухрезонаторного молекулярного генератора. Пучок молекул, находящихся в смешанном состоянии, после выхода из поляризующего резонатора делится пополам тонким проводящим экраном. Одна из половин пучка служит опорной, а вторая проходит через постоянное продольное электрическое поле. Затем обе половины одновременно пропускаются через второй резонатор-приемник, на входе которого, согласно формуле (1), действует суммарная поляризация от обеих половин пучка:

$$\langle P(v) \rangle = \frac{A}{2} \int_0^{\infty} (1/v) \sin(E\mu_{12}L/\hbar v) [(1 + \cos \Delta\varphi) \sin \omega_{12}t + \sin \Delta\varphi \cos \omega_{12}t] f(v) dv. \quad (3)$$

Это основное соотношение, используемое при обработке результатов балансного фазового метода исследования штарк-эффекта, поскольку поле во втором резонаторе пропорционально поляризации пучка на его входе [3], зависит от разности фаз обеих составляющих поляризации. Наблюдаемый сигнал на выходе схемы индикации пропорционален квадрату поля во втором резонаторе, т. е. квадрату модуля поляризации (3).

Основная часть установки схематически показана на рис 1. Постоянное напряжение подается на средние сетки I или II. Крайние сетки заземляются. Для уменьшения краевых эффектов на экран наклеены дополнительные проволочки, соединенные через делитель напряжения с сетками I и II.

Применим соотношение (3) для трех видов распределения по скоростям:

1) $f(y) = \delta(y - 1) dy$ — моноскоростной пучок,

2) $f(y) = (1/y^2) e^{-(1/y)} dy$ — экспоненциальное распределение,

3) $f(y) = 2y^3 e^{-y^2} dy$ — распределение в неотсортированном пучке,

где $y = v/a$, $a = 5 \cdot 10^4$ см·сек⁻¹ — наиболее вероятная скорость молекул в источнике пучка.

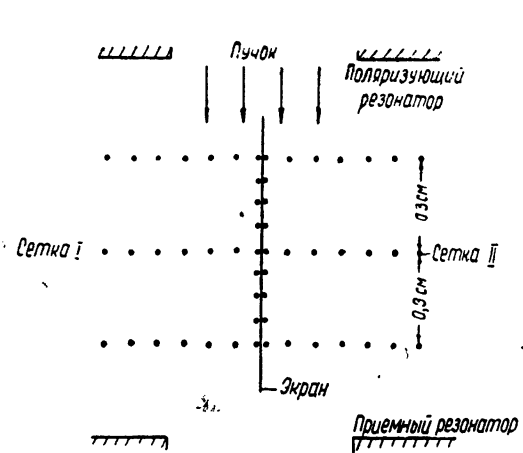


Рис. 1. Схема установки для исследования поляризации молекулярного пучка балансным фазовым методом при помощи штарк-эффекта.

Для линии 3—3 NH_3 штарковское смещение в однородном продольном поле [4] $\Delta\omega_{1,2} = 18,6M_J^2E_0^2$, где E_0 — напряженность постоянного поля ($\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$). Основной вклад в сигнал второго резонатора дает компонента $M_J = 3$, компоненты $M_J = 2$ и $M_J = 1$ изменяют результат меньше, чем на 13%, не вызывая качественных изменений хода зависимости P^2 от поля.

Расчет проводился для $M_J = 3$. В этом случае соотношение (3) принимает вид

$$1) |P(x)|^2 = (A \sin x_p \cos x)^2,$$

$$2) |P(x)|^2 = \frac{A^2}{4} \left\{ \left[\frac{x_p}{(1+x_p^2)^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \frac{x_p - x}{[1+(x_p-x)^2]^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \frac{x_p + x}{[1+(x_p+x)^2]^2} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{[1+(x_p-x)^2]^2} - \frac{1}{[1+(x_p+x)^2]^2} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$3) |P(x)|^2 = \frac{A^2}{4} \left\{ \left[2 \frac{dI(x_p)}{dx} + \frac{dI(x_p-x)}{dx} + \frac{dI(x_p+x)}{dx} \right]^2 + \left[\frac{dk(x_p-x)}{dx} - \frac{dk(x_p+x)}{dx} \right]^2 \right\},$$

где $x_p = \nu_{1,2}EL/\hbar\nu$, а $x = \Delta\varphi = 2,2 \cdot 10^{-2} U^2$, U — напряжение на сетке I или II [6] (в данном случае $L = 4 \text{ см}$, $l = 0,6 \text{ см}$). Таблицы функции $I(x)$ и $k(x)$, составленные Краузом и Рамзеем, приведены в [5]. Кривые $|P(x)|^2$ при небольшом превышении порога возбуждения в первом резонаторе и нулевой расстройке резонаторов относительно спектральной линии изображены на рис. 2. На этом рисунке кривая 3б построена для случая 3 с учетом компонент $M_J = 2$ и $M_J = 1$, что приводит к лишь незначительному сдвигу ее минимума по сравнению с кривой 3а в сторону больших напряжений.

Кривые рис. 2 показывают, что при фазовом балансовом наблюдении штарк-эффекта тип распределения молекул по скоростям в пучке определяет вид кривой, описывающей зависимость сигнала второго резонатора от величины постоянного электрического поля.

Отклонение экспериментальных точек от кривой 3б (рис. 2) при подаче напряжения на сетки I или II можно объяснить тем, что пучок разделен пополам недостаточно точно. В нашей установке большая часть пучка проходит через сетку II. Это подтверждается кривыми рис. 3, на котором показана зависимость $|P(x)|^2 = f(U^2)$ для случая распределения 3. Кривая (В) относится к случаю, когда через поле проходит 1/3 частиц, а 2/3 их идут вне поля. Кривая (Г) относится к случаю, когда через поле проходит 2/3 частиц. Расчет проводился для компоненты $M_J = 3$ с учетом неоднородности поля вблизи сеток.

Таким образом, применение предложенного фазового балансного метода наблюдения штарк-эффекта к двухрезонаторному молекулярному генератору позволяет сделать следующие выводы.

1. В молекулярном пучке молекулярного генератора распределение по скоростям близко к виду $u^2 e^{-u^2} du$.

2. Экспоненциальное распределение, для которого успешно развита теория однорезонаторного молекулярного генератора, может привести к качественным расхождениям при описании явлений, связанных с наличием смешанного квантового состояния в двухрезонаторном молекулярном генераторе, что отмечено также в работе [3].

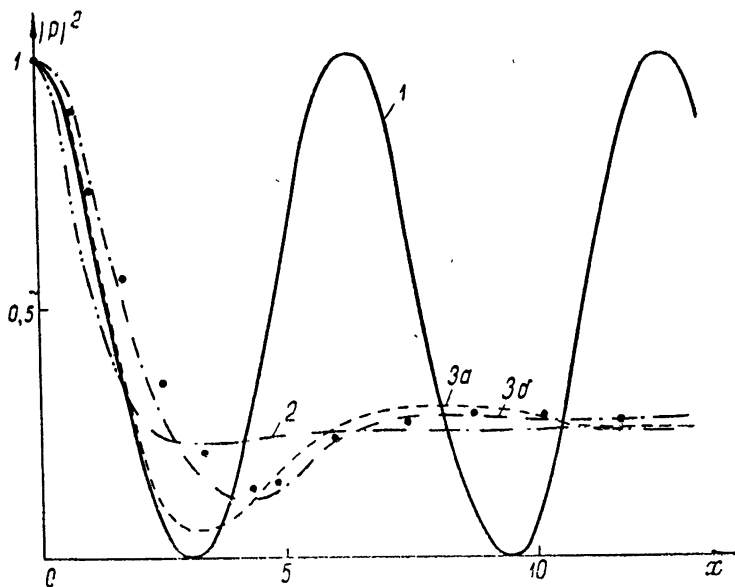


Рис. 2. Теоретическая зависимость $|P(x)|^2 = f(x)$ для видов распределения по временам пролета (3). Кривые 1, 2 и 3а рассчитаны для компоненты $M_J = 3$, кривая 3б построена с учетом компонент $M_J = 3$, $M_J = 2$ и $M_J = 1$. Экспериментальные точки получены усреднением экспериментальных кривых А и Б (рис. 3).

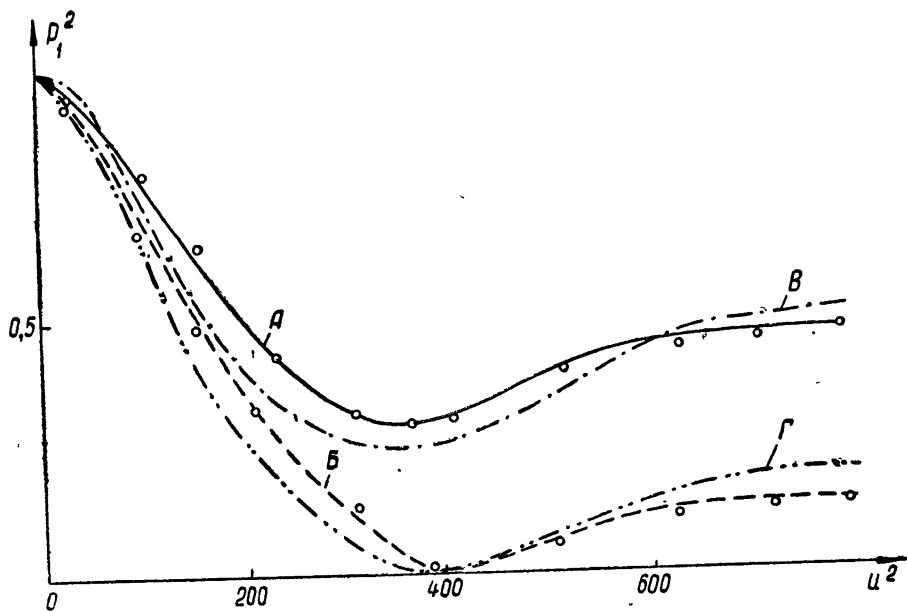


Рис. 3. Сравнение экспериментальных кривых $|P(x)|^2 = f(U)^2$ при подаче напряжения на сетки I и II (кривые А и Б) с расчетными кривыми, когда через поле проходит $1/3$ пучка (В) и $2/3$ пучка (Г).

В заключение автор благодарит М. Е. Жаботинского и Л. В. Левкина за обсуждение результатов и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, R. H. Romer, Rev. Sci. Instr., 26, № 9, 915 (1955); W. H. Wells, J. Appl. Phys., 29, № 4, 714 (1958).
2. W. H. Niga, Rev. Sci. Instr., 28, № 9, 726 (1957).
3. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
4. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбабуло, Радиоспектроскопия, Гостехиздат, М., 1955.
5. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.

Поступила в редакцию
11 мая 1967 г.

УДК 621.371.165

О РАССЕЯНИИ КОРОТКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ ТЕЛЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Е. А. Шмагер

В ряде случаев причиной флуктуаций отраженного от тела электромагнитного или акустического поля являются случайные его колебания вокруг неподвижного центра. Корреляционная функция этих флуктуаций определяется сравнительно просто, если известна индикатриса рассеяния тела [1]. Когда индикатриса рассеяния тела неизвестна или ее определение затруднительно, но суммарный отраженный сигнал от тела складывается из полей, рассеянных отдельными участками тела, корреляционная функция и спектральная плотность флуктуаций отраженного поля могут быть определены аналогично вычислению среднего [2].

Будем полагать, что дифрагирующее тело состоит из N элементов, центры которых расположены в точках с координатами x_i, y_i, z_i . Все элементы конструктивно составляют тело, поэтому отраженные от них поля сугубо зависимы, и фазы их изменяются синхронно в процессе случайных колебаний тела вокруг оси Oz . Приемно-передающие антенны полагаем совмещенными и расположенными в дальней зоне на оси Ox .

Согласно [2], эффективная площадь рассеяния (ЭПР) рассматриваемого тела при не слишком больших размахах колебаний ($|\gamma| < 20^\circ$) и без учета переотражений между элементами может быть записана в виде

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t) + 2 \sum_{i=1}^{\nu} A_i(t) \cos [2k\Delta_i\gamma(t) + 2k\delta_i + \varphi_i(t)], \quad (1)$$

где

$$\delta_i = x_n - x_p, \quad \Delta_i = y_n - y_p, \quad \varphi_i(t) = \varphi_n - \varphi_p,$$

$$A_i(t) = \sqrt{\sigma_n(t)\sigma_p(t)},$$

$\sigma_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — величина и фаза ЭПР i -го элемента, $\nu = \frac{N(N-1)}{2}$.

Следуя общим правилам, запишем автокорреляционную функцию $\sigma(t)$ при $\sigma_i(t) = \sigma_0$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = & N^2 \sigma_0^2 + 4\sigma_0^2 N \sum_{n=1}^{\nu} \overline{\cos [2k\Delta_n\gamma + 2k\delta_n]} + \\ & + 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} \{ \overline{\cos [2k(\Delta_n\gamma + \Delta_p\gamma')] \cos [2k(\delta_n + \delta_p)] + \overline{\cos [2k(\Delta_n\gamma - \\ & - \Delta_p\gamma')] \cos [2k(\delta_n - \delta_p)]} \}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma = \gamma(t)$, $\gamma' = \gamma(t+\tau)$, а черта означает усреднение по реализациям.

Полагая процесс колебаний тела стационарным и гауссовым с параметрами $0, D^2, r(\tau)$ и выполняя усреднения в (2), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = & N^2 \sigma_0^2 + 4\sigma_0^2 N \sum_{n=1}^{\nu} \exp(-4k^2 \Delta_n^2 D^2) \cos(2k\delta_n) + \\ & + 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} \exp\{-4k^2 D^2 [\Delta_n^2 + \Delta_p^2 - 2\Delta_n \Delta_p r(\tau)]\} \cos[2k(\delta_n - \delta_p)] + \\ & + 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{p=1}^{\nu} \exp\{-4k^2 D^2 [\Delta_n^2 + \Delta_p^2 + 2\Delta_n \Delta_p r(\tau)]\} \cos[2k(\delta_n + \delta_p)] + \\ & + 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{\nu} \exp\{-4k^2 \Delta_n^2 D^2 [1 - r(\tau)]\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если величина $k\Delta_n D$ велика для любых пар элементов, т. е.

$$k\Delta_n D \gg 1, \quad (4)$$

то оценка второй, третьей и четвертой сумм (3) может быть выполнена по аналогии с оценками подобных сумм в [2] и [3]. Повторяя эти выкладки применительно к (3), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = & 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{\nu} \exp\{-4k^2 \Delta_n^2 D^2 [1 - r(\tau)]\} + N^2 \sigma_0^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k\Delta_{\min} D}\right) + \right. \\ & \left. + O\left(\frac{1}{k(\Delta_n - \Delta_p)_{\min} D}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В тех случаях, когда среди различных пар элементов имеются такие, у которых $\Delta_n \approx \Delta_p$, их корреляционные функции необходимо приплюсовать к первой сумме (5) и продолжать это сложение до тех пор, пока погрешность не достигнет заданной величины. Если отражатели располагаются на одинаковых расстояниях друг от друга, то число слагаемых с $\Delta_n = \Delta_p$ становится сравнимым с ν , и формула (5) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(\tau) = & 2\sigma_0^2 \sum_{n=1}^N (N - n) \exp\{-4k^2 n^2 \Delta_0^2 D^2 [1 - r(\tau)]\} + \\ & + 4\sigma_0^2 \sum_{n=1}^{N-2} (N - n)(N - n - 1) \exp\{-4k^2 \Delta_0^2 n^2 D^2 [1 - r(\tau)]\} + \\ & + N^2 \sigma_0^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k\Delta_0 D}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Определим понятие времени корреляции процесса как ширину графика его корреляционной функции на определенном уровне. Тогда, анализируя (5) и (6), нетрудно убедиться, что при выполнении (4) время корреляции флуктуации ЭПР тела не зависит от времени корреляции процесса качки. Более того, характер зависимости $\Phi(\tau)$ в пределах времени корреляции практически определяется лишь поведением $r(\tau)$ вблизи $\tau=0$. Поэтому можно полагать, что угловая скорость колебаний тела $\left(v = \frac{d\gamma}{dt}\right)$

за время корреляции $\Phi(\tau)$ остается постоянной. Последнее обстоятельство позволяет достаточно просто определить спектральную плотность флуктуаций ЭПР рассматриваемого тела. Действительно, заменим в (2) $\gamma - \gamma' = v\tau$ и, оставив лишь главные члены, получим

$$G(f) = \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} W(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f\tau) \cos(2k\Delta_n v\tau) d\tau,$$

или, согласно фильтрующему свойству дельта-функции, имеем

$$G(f) = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\nu} W\left(\frac{\pi f}{k\Delta_n}\right) + W\left(-\frac{\pi f}{k\Delta_n}\right). \quad (7)$$

При симметричном законе распределения вероятностей угловых скоростей колебания тела

$$G(f) = \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\nu} W\left(\frac{\pi f}{k\Delta_n}\right). \quad (8)$$

Соотношения, подобные (7) и (8), по-видимому, впервые были описаны в [4] при анализе спектров гидрометеоров.

Уравнение (8) можно записать и в иной форме, если учесть, что величина $2k\Delta_n\gamma_0$ приближенно равна разности фаз между сигналами, отраженными от двух элементов, расположенных на удалении Δ_n друг от друга и при повороте тела на угол γ_0 . Поэтому величина $\frac{2k\Delta_n}{2\pi}$ есть плотность лепестков диаграммы отражения от рассматриваемых элементов в секторе углов поворота γ_0 ; обозначая ее через η , имеем

$$G(f) = \frac{2\sigma_0^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\nu} W\left(\frac{f}{\eta_n}\right). \quad (9)$$

Предельная частота f_{\max} спектра флуктуаций ЭПР тела, очевидно, определится слагаемыми сумм (8) и (9) с наибольшими Δ_n и η_n .

Если известны линейные размеры дифрагирующего тела вдоль оси Oy и функция $W(v)$, то f_{\max} определится слагаемым $W\left(\frac{f}{kL}\right)$, где L — длина тела, определенная по крайним элементам. Напротив, если исследователь располагает лишь диаграммой отражения от неизвестного тела, и, следовательно, может определить η_{\max} , то предельная частота спектра находится из (9). В этом состоит назначение записи спектра в двух модификациях (8) и (9).

В заключение рассмотрим пример, когда распределение углов колебаний дифрагирующего тела отвечает гауссову закону. В этом случае, согласно [5],

$$W(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2 m^2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2D^2 m^2}\right), \quad (10)$$

где

$$m^2 = -\frac{d^2 r(\tau)}{d\tau^2}.$$

Для конкретности положим, что $r(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2) \cos(\beta\tau)$, следовательно, $m^2 = \beta^2 + \alpha^2$. Подставляя (10) в (8), получаем

$$G(f) = \frac{2\sigma_0^2}{\sqrt{2\pi D^2 (\beta^2 + \alpha^2)}} \sum_{n=1}^{\nu} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{2k^2 \Delta_n^2 D^2 (\beta^2 + \alpha^2)}\right).$$

Отсюда предельная частота спектра

$$f_{\max} \sim kLD \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Штагер, Радиотехника и электроника, 10, 1523 (1965).
2. Е. А. Штагер, Радиотехника и электроника, 10, 1961 (1965).
3. Е. А. Штагер, Радиотехника (в печати).
4. А. Г. Горелик и Ю. В. Мельничук, ДАН СССР, 140, № 3 (1961).
5. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1957.

УДК 621.372.214

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЛЕНТОЧНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА СЛОЕ ДИЭЛЕКТРИКА С ЭКРАНОМ, В КАЧЕСТВЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

В. Н. Злуницyna

В настоящее время уделяется большое внимание созданию канализирующих систем миллиметрового диапазона. В работе [1] предлагается использовать в качестве линии передачи систему в виде диэлектрической ленты с нанесенными на нее тонкими металлическими полосами. Указываются преимущества предлагаемой передающей линии по сравнению с существующими. В данной работе анализируется возможность применения в качестве линии передачи структуры, состоящей из металлической решетки, лежащей на слое диэлектрика с экраном. Решетка образована периодически расположенными бесконечно тонкими металлическими лентами. Предполагается, что экран и решетка обладают идеальной проводимостью.

Однородность системы вдоль лент (рис. 1) позволяет рассматривать отдельно два независимых типа волн: поперечномагнитные волны (ТМ-волны) и поперечно-электрические волны (ТЕ-волны). Теоретический анализ произведен методом, изложенным в работе [2]. Окончательное выражение представляет собой бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомого поля в ряд Фурье:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left\{ \frac{|n|}{n} g_n W_m^n - \delta_{mn} \right\} = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1)$$

где

$$g_n = \begin{cases} 1 + i \frac{|n|}{2n\eta_n} \left[\gamma_{n1} + \gamma_{n2} \frac{1 + \exp(i4\pi a \gamma_{n2}/l)}{1 - \exp(i4\pi a \gamma_{n2}/l)} \right] & \text{ТЕ-волны} \\ 1 + i \frac{|n|}{n\eta_n} \frac{\gamma_{n2} [1 - \exp(i4\pi a \gamma_{n2}/l)] (1 + 1/\epsilon)}{1 + \exp(i4\pi a \gamma_{n2}/l) + (\gamma_{n2}/\epsilon \gamma_{n1}) [1 - \exp(i4\pi a \gamma_{n2}/l)]} & \text{ТМ-волны} \end{cases}$$

$$\gamma_{n1} = \frac{l}{2\pi} \beta_{n1}, \quad \gamma_{n2} = \frac{l}{2\pi} \beta_{n2}, \quad \eta_n = \frac{l}{2\pi} \gamma_n, \quad \beta_{n1} = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2},$$

$$\beta_{n2} = \sqrt{k^2 \epsilon - \gamma_n^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases},$$

$$\gamma_n = \gamma_0 + \frac{2\pi n}{l}, \quad W_m^n = V_m^n - \frac{\tilde{V}_{[\sigma]}^n}{\tilde{R}_{[\sigma]}} \frac{R_m}{\tilde{R}_{[\sigma]}}$$

λ — длина волны в свободном пространстве, γ_n и β_n — постоянные распространения в направлении z и x соответственно, V_m^n , R_m , $\tilde{V}_{[\sigma]}^n$, $\tilde{R}_{[\sigma]}$ выражаются через функции и полиномы Лежандра аргумента $u = \cos \theta$ и вычислены в [2, 3]; $\theta = \frac{\pi d}{l}$ для ТЕ-волн и $\theta = \frac{\pi(l-d)}{l}$ для ТМ-волн, X_n — коэффициенты разложения искомого поля в ряд Фурье.

Условие существования нетривиального решения системы (2), т. е. равенство нулю ее определителя, дает дисперсионные уравнения для ТМ- и ТЕ-волн.

В данной структуре перпендикулярно лентам металлической решетки может распространяться бесчисленное множество типов TM_m ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) и TE_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) волн. Наименьшие критические частоты имеют TM_0 , TE_1 - и TM_1 -волны. Эти волны и будем рассматривать в дальнейшем подробно. При $d \rightarrow 0$ указанные типы волн переходят соответственно в TEM -, TE_1 - и TM_1 -волны плоскопараллельного волновода высотой a с данным диэлектрическим заполнением, а при $d \rightarrow l$ в E_{00} -, H_{10} - и E_{20} -волны «гладкой» передающей линии толщиной a .

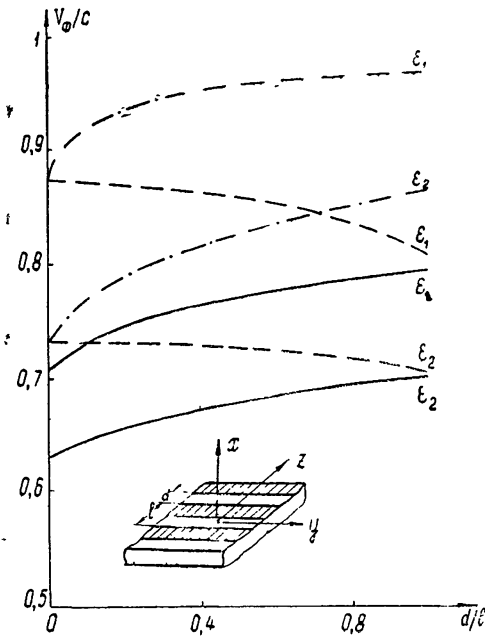


Рис. 1. Зависимость фазовой скорости волн от ширины щели:

— — — TM_0 , - - - TE_1 , - · - · TM_1 .

которые соответствуют фторопласту-4 и полистиролу в миллиметровом диапазоне.

На рис. 1—5 представлены некоторые результаты численного счета.

На рис. 1 изображены зависимости фазовой скорости TM_0 , TM_1 - и TE_1 -волн от ширины щели при $l/\lambda = 0,3$; $l/a = 1$ для TM_0 -волны и $l/a = 0,5$ для TM_1 - и TE_1 -волн для двух значений ϵ диэлектриков. Из графиков видно, что с уменьшением ширины щели (d/l) фазовая скорость TE_1 -волны увеличивается, а TM_0 - и TM_1 -волн уменьшается. При сравнении рассматриваемой структуры с «гладкой» передающей линией оказалось, что наличие периодически расположенных лент на диэлектрическом слое приводит к уменьшению фазовой скорости TM_0 - и TM_1 -волн.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости фазовой скорости TM_0 - и TM_1 -волн соответственно от ширины щели для различных значений геометрических параметров структуры при $\epsilon = 2 + 0,0004i$. Из графиков видно, что для TM_0 -волны при $d \rightarrow 0$ при любых параметрах структуры $V_{\phi}/c \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon}$. С ростом ширины щели фазовая скорость TM_0 -волны увеличивается до тем большей величины, чем меньше отношение a/λ . Крутизна изменения V_{ϕ}/c от d/l при фиксированном a/λ зависит от периода расположения лент и тем больше, чем меньше l . Для TM_1 -волны при $d \rightarrow 0$ значение V_{ϕ}/c зависит от a . Крутизна изменения характеристик определяется l .

Таким образом, в исследуемой структуре при тех же значениях λ , a и ϵ можно получить, значительно большее замедление, чем в «гладкой» передающей линии.

На рис. 4 приведены зависимости величины затухания TM_0 -волны в системе от ширины щели при различных значениях a и фиксированных l и λ ($l = 0,3\lambda$, $\epsilon = 2 + 0,0004i$). Из графиков видно, что затухание TM_0 -волны в системе тем больше, чем больше расстояние a и меньше ширина щели. При $d \rightarrow 0$ затухание TM_0 -волны при различных a увеличивается до одной и той же величины, не зависящей от геометрических параметров структуры и определяемой рабочей частотой и значением диэлектрической проницаемости среды.

На рис. 5 изображены зависимости затухания TM_0 -волны от величины фазовой скорости при фиксированных l и λ и различных a ($l = 0,3\lambda$, $\epsilon = 2 + 0,0004i$). Пределы изменения фазовой скорости каждой кривой соответствуют изменению ширины щели от $d = 0$ до $d = l$. Точка 1 соответствует $d = 0$, точки 2, 3, 4 — $d = l$, т. е.

Рассматриваемая структура может применяться в качестве линии передачи при таких соотношениях между параметрами структуры и частотой, что удовлетворяются следующие неравенства:

$$p > \frac{C_1}{2\sqrt{\epsilon - 1}}, \quad (2)$$

$$\frac{l}{\lambda} < \frac{C_2}{1 + \sqrt{\epsilon - C_1(1/2p)^2}},$$

где

$$p = \frac{a}{\lambda},$$

$$C_1 = \begin{cases} 0 & \text{для } TM_0\text{-волны} \\ 1 & \text{для } TM_1\text{- и } TE_1\text{-волн} \end{cases},$$

величина C_2 зависит от ширины щели, и для TM_0 - и TM_1 -волн $C_2 \approx 1,8$ при $d < 0,5l$ и больше при больших щелях, а для TE_1 -волн $C_2 \approx 0,93$ при $d < 0,5l$ и меньше при больших щелях.

На ЭВМ произведено исследование фазовых и амплитудных характеристик, распространяющихся в структуре волн. Анализировались зависимости фазовой скорости и постоянной затухания от геометрических параметров структуры и частоты, а также влияние диэлектрика на характеристики волн. Исследования проводились для двух значений диэлектрической проницаемости среды $\epsilon_1 = 2 + 0,0004i$ и $\epsilon_2 = 2,55 + 0,0008i$, ко-

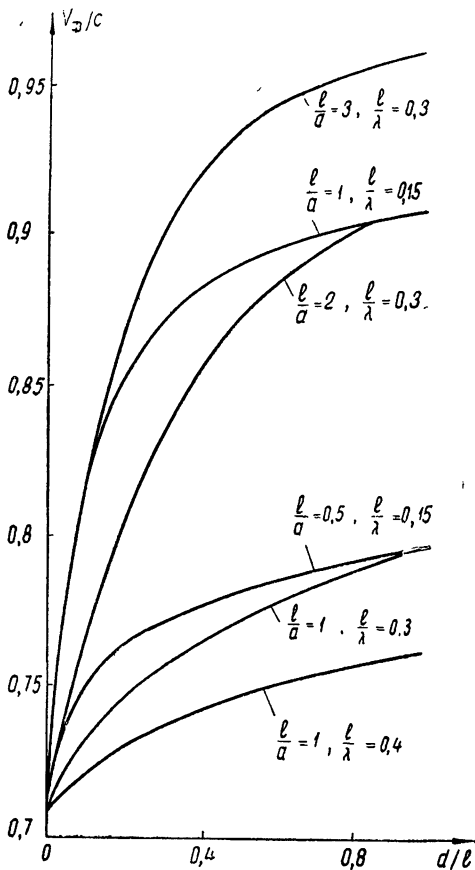


Рис. 2

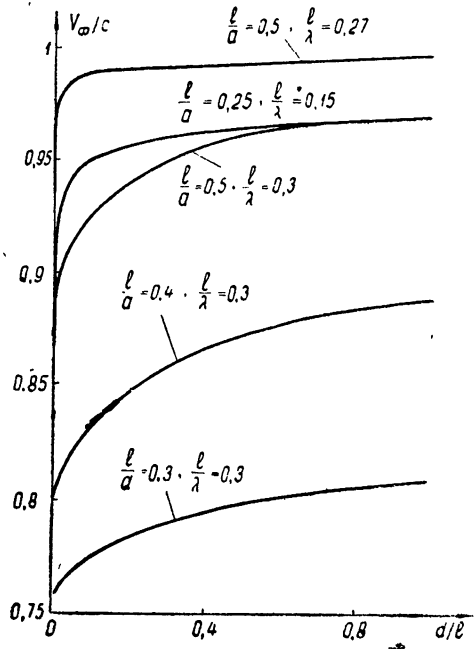


Рис. 3.

«гладкой» передающей линии. Из графиков видно, что при фиксированной рабочей частоте и диэлектрическом заполнении среды фазовая скорость TM_0 -волны в системе может быть уменьшена либо за счет уменьшения ширины щели, либо за счет увеличения размера a , причем при одной и той же фазовой скорости затухание TM_0 -волны в первом случае несколько выше, чем во втором, но эта разница незначительна.

Амплитудные характеристики распространяющихся в структуре волн определяются из решения (1). Периодичность структуры позволяет записать искомое поле в виде разложения в ряд Фурье, что соответствует представлению его в виде бесконечного набора пространственных гармоник. При выполнении условия (2) все пространственные гармоники являются медленными поверхностными волнами. Исследования показали, что при любых параметрах структуры, удовлетворяющих (2), амплитуда нулевой гармоники наибольшая. Амплитуды остальных пространственных гармоник малы по сравнению с амплитудой нулевой гармоники и определяются шириной щели, убывая до нуля при $d \rightarrow 0$ и $d \rightarrow 1$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Шестопалову за постановку задачи и руководство работой.

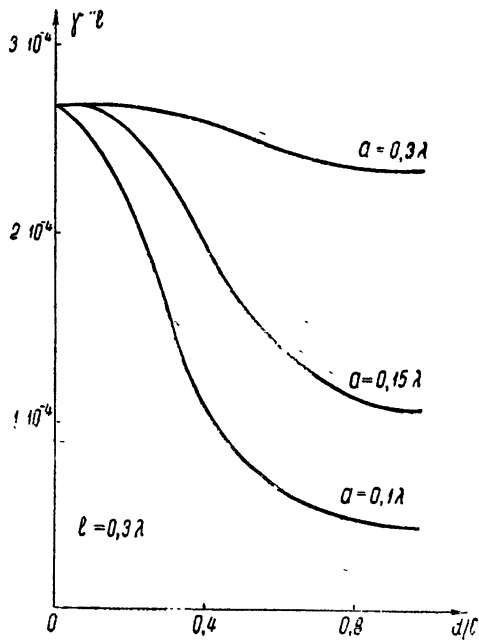


Рис. 4.

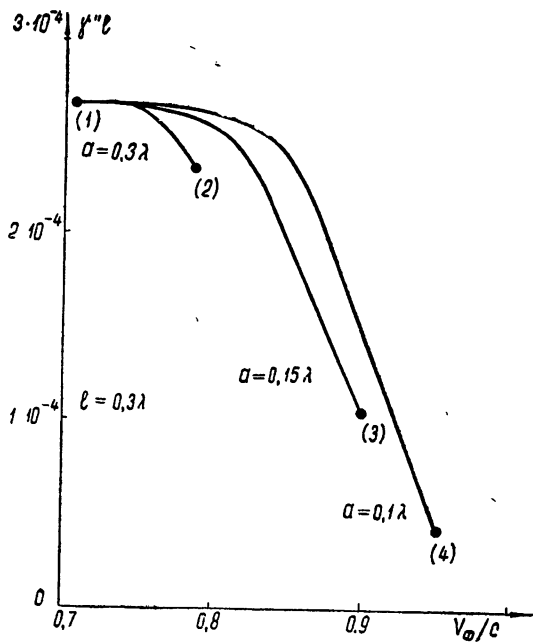


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Кац, Э. Л. Куликов, Радиотехника и электроника, 11, № 11, 2074 (1966).
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 32, № 4, 326 (1962).
3. А. И. Адонина, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 33, № 6, 641 (1963).

Харьковский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию
10 июля 1967 г.

УДК 621.396.679.432

ЭКРАНИРОВАННАЯ СВЯЗАННАЯ ПОЛОСКОВАЯ ЛИНИЯ С ШИРОКИМИ
ПРОВОДЯЩИМИ ПЛАСТИНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Н. И. Лесик, В. М. Седых, Б. В. Кондратьев

При конструировании многих узлов с применением полосковых линий используются связанные полосковые линии рис. 1а. Для проектирования таких узлов с заданными характеристиками необходимо знать зависимость волнового сопротивления и поля в связанной линии от ее размеров. Связанные полосковые линии такого вида с бесконечно тонкими внутренними проводниками исследованы хорошо [1, 6, 7], однако влияние конечной толщины пластин фактически еще не исследовано. Данная работа посвящена этому вопросу. Будем считать, что линия заполнена диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ и потерь не имеет; внешние заземленные пластины простираются в обе стороны до бесконечности. В этом случае в линии могут существовать два типа ТЕМ-волн [1]: четный и нечетный, поле и другие характеристики которых нужно определить. Задача решается методом конформного отображения z в приближении широких внутренних пластин.

Для нечетного типа колебаний поле в поперечном сечении и емкость такие же, как в случае электростатической задачи с той же конфигурацией проводников, когда нижняя и верхняя внутренние пластины имеют одинаковые по величине, но противоположные по знаку потенциалы $+V$ и $-V$, а внешние экранирующие пластины заземлены. В этом случае горизонтальная плоскость симметрии линии имеет потенциал внешних экранирующих пластин и может быть заменена бесконечно тонкой идеально проводящей заземленной плоскостью [1]. Вследствие симметрии линии можно рассматривать только одну ее верхнюю половину (рис. 1б). Такая экранированная полосковая

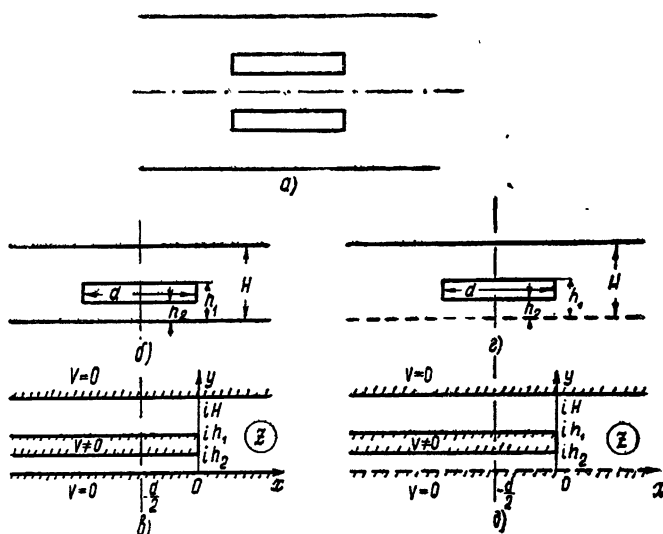


Рис. 1.

линия с несимметрично расположенной внутренней пластиной произвольной толщины представляет и самостоятельный интерес. Известно далее, что в случае широкой внутренней пластины можно вместо реальной полосковой линии рис. 1б рассматривать вспомогательную линию рис. 1в [2].

Поле в такой вспомогательной линии может быть найдено из выражения

$$E = -i \left(\frac{dz}{dw} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где $w(z)$ — комплексный потенциал области рис. 1 в имеет вид [3]

$$\frac{\pi}{H} z(\omega) = \operatorname{arsh} \frac{\omega(a_1 + a_2 + 2) + 2a_1a_2 + a_1 + a_2}{(1 - \omega)(a_1 - a_2)} - \frac{h_2}{H} \operatorname{arch} \frac{\omega(a_1 + a_2) + 2a_1a_2}{\omega(a_1 - a_2)} - \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) \operatorname{arch} \frac{2\omega + a_1 + a_2}{a_1 - a_2}; \quad (2)$$

$$\omega = \exp \left(\frac{\pi}{V} w \right); \quad (3)$$

параметры a_1, a_2 определяются через размеры линии по формулам

$$a_1 = u/2(H - h_1)^2, \quad a_2 = 2h_2^2/u, \quad (4)$$

$$u = 2Hh_1 - h_1^2 - h_2^2 + \sqrt{(h_1^2 - h_2^2) [(2H - h_1)^2 - h_2^2]}.$$

Погонная емкость внутренней пластины линии рис. 1б может быть записана в виде

$$C = \epsilon \left(\frac{d}{H - h_1} + \frac{d}{h_2} \right) + 2C_{кр}, \quad (5)$$

где $\epsilon \frac{d}{H - h_1}$ — емкость плоского конденсатора, образованного верхней частью внутренней пластины линии и верхней заземленной плоскостью, без учета краевых эффектов, $\epsilon \frac{d}{h_2}$ — емкость плоского конденсатора, образованного нижней частью внутренней пластины линии и нижней заземленной плоскостью, также без учета краевых эффектов; $C_{кр}$ — краевая емкость внутренней пластины. Выражения (2)–(4) позволяют определить краевую емкость.

$$\frac{\pi}{\epsilon} C_{кр} = \frac{H}{H - h_1} \operatorname{arch} \frac{a_1 + a_2 + 2}{a_1 - a_2} + \frac{H}{h_2} \operatorname{arch} \frac{a_1 + a_2 + 2a_1a_2}{a_1 - a_2} + 2 \ln \frac{a_1 - a_2}{4\sqrt{a_1a_2}} - \left(\frac{h_2}{H - h_1} + \frac{H - h_1}{h_2} \right) \operatorname{arch} \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}. \quad (6)$$

Зная емкость линии C , можно по формуле

$$Z_0 = \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\epsilon}{C} \quad (7)$$

найти волновое сопротивление линии.

Для четного типа колебаний поле в поперечном сечении и емкость такие же, как в случае электростатической задачи с той же конфигурацией проводников, когда нижняя и верхняя внутренние пластины имеют одинаковые по величине и знаку потенциалы, а внешние экранирующие пластины заземлены. В этом случае горизонтальная плоскость симметрии может быть заменена магнитной стенкой, на которой выполняется граничное условие $E_n = 0$; и вследствие симметрии линии можно рассматривать одну верхнюю половину ее (рис. 1г). Как и в предыдущем случае для широкой внутренней пластины, вместо реальной полосковой линии рис. 1г можно рассматривать вспомогательную линию рис. 1д [2].

Поле в такой вспомогательной линии рис. 1д может быть найдено из выражения (1) с учетом (2), (4), только вместо функций (3) следует брать функцию

$$\omega = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi w}{2V}. \quad (8)$$

Погонная емкость внутренней пластины линии рис. 1 г в данном случае может быть записана в виде

$$C = \epsilon \frac{d}{H - h_1} + 2C_{кр}, \quad (9)$$

где $\epsilon \frac{d}{H - h_1}$, как и в предыдущем случае,—емкость плоского конденсатора, образованного верхней частью внутренней пластины линии и верхней заземленной плоскостью, без учета краевых эффектов; $C_{кр}$ — краевая емкость внутренней пластины, которая в данном случае записывается в виде

$$\frac{\pi}{\epsilon} C_{кр} = \frac{H}{H - h_1} \operatorname{arsh} \frac{a_1 + a_2 + 2}{a_1 - a_2} - \frac{h_2}{H - h_1} \operatorname{arsh} \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} + \ln(a_1 - a_2). \quad (10)$$

Волновое сопротивление, как и в предыдущем случае, определяется по известной погонной емкости C из выражения (7).

Полученные для четного типа колебаний в связанной полосковой линии результаты позволяют рассмотреть высокочастотную полосковую линию (сэндвич), поперечное сечение которой изображено на рис. 1 а, но обе внутренние пластины на входе и выходе соединяются параллельно. Из этого следует, что емкость высокочастотной линии в два раза больше, чем емкость одной пластины в связанной полосковой линии рис. 1 а в случае четного типа ТЕМ-колебаний, волновое сопротивление в два раза меньше, а поле полностью совпадает.

Анализ полученных результатов и сравнение их с результатами работ [4-7] показывает, что полученные формулы могут быть использованы для расчета волнового сопротивления и других характеристик линии в широкой области изменения размеров ее с достаточной степенью точности. Так, например, в случае $h_1 - h_2 < 0,3H$, $h_2 < 0,5H$ для $d = 0,7h_2$ для волнового сопротивления четного типа колебания ошибка меньше — 3%, а для нечетного — меньше — 1,5%, и с увеличением d/h_2 погрешность очень быстро уменьшается. Вне указанной области изменения $h_1 - h_2$ и h_2 для $d = 0,7h_2$ ошибка несколько больше, но также очень быстро уменьшается с увеличением d/h_2 .

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что связанные полосковые линии рассмотренной конфигурации позволяют осуществить более сильную связь, чем связанные полосковые линии, у которых внутренние пластины расположены в одной плоскости. Поэтому рассмотренные полосковые линии более пригодны для конструирования устройств, в которых необходимо осуществить сильную связь.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Кон, Полосковые системы сверхвысоких частот, сб. статей, ИЛ, М., 1959, стр. 173
2. Б. А. Дальмен, Полосковые системы сверхвысоких частот, сб. статей, ИЛ, М., 1959, стр. 20
3. Н. И. Лесик, В. М. Седых, Б. В. Кандратьев, 22 Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио, 1966, тезисы докладов секции волноводных устройств, стр. 9
4. С. Б. Кон, Полосковые системы сверхвысоких частот, сб. статей, ИЛ, М., 1959, стр. 33
5. Р. Бейтс, Полосковые системы сверхвысоких частот, сб. статей, ИЛ, М., 1959, стр. 78
6. K. Foster, J. Brit. IRE, 18, № 12, 715 (1958).
7. J. W. Duncan, Trans. IEEE, MTT-13, № 1, 107 (1965).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 июля 1966 г.