

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Эшмурадов К. Необходимые условия грубости системы трех дифференциальных уравнений без замкнутых траекторий	333
Сабаев Е. Ф., Постников И. С. Применение метода матричных неравенств Якубовича к исследованию устойчивости некоторых систем с распределенными параметрами	343
Брусин В. А. Обобщенная задача о стохастической аппроксимации	353
Ахманов Ш. А., Черепанов А. И. Применение теорем об абсолютной устойчивости для анализа релейно-импульсных систем регулирования	368
Климов В. Г., Фейгин М. И. Бифуркации периодических режимов в системе с конструкционным демпфированием	374
Белюстина Л. Н., Шалфеев В. Д. К теории нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты	383
Шалфеев В. Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с разделительным конденсатором в цепи управления	397
Белых В. Н., Шалфеев В. Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с нелинейной емкостью в фильтре нижних частот	407
Пономаренко В. П. Динамика нелинейной системы частотной автоподстройки с инерционным управляющим элементом	418
Постников Л. В., Тарантович А. С. Некоторые вопросы динамики индуктивного параметрона без смещения	424
Карасик Г. Я., Ляско А. Б. К теории возбуждения параметрических колебаний на высших субгармониках в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами	431
Гудзенко Л. И. К анализу структуры объекта по его сигналу	443
Батишев Д. И., Шевякова Т. К. Расчет оптимальных параметров реостатно-транзисторных логических схем	451
Дозоров В. А., Минчук Т. В. К теории простейших динамических моделей логических схем	461
Метрикин В. С. Об устойчивости одной модели вибромолота	465
Разевиг В. Д. Анализ марковских случайных процессов в линейных и нелинейных системах с помощью аналоговых вычислительных машин	469
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Скупой В. Ф. К теории синхронизации LC-автогенератора	475
Конев Ф. Б., Конев Ю. Б. К вопросу об исследовании линейных систем с распределенными параметрами	477

УДК 517.91

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ*

К. Эшмурадов

Устанавливаются необходимые условия грубости системы трех дифференциальных уравнений без замкнутых траекторий и дается классификация возможных типов траекторий.

В некоторой ограниченной области G трехмерного евклидова пространства рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), \quad (1)$$

правые части которой непрерывно дифференцируемы.

Предполагается, что границей области G является гладкая простая замкнутая поверхность без контакта π и в области G система (1) не имеет замкнутых траекторий (без ограничения общности предполагается, что траектории, пересекающие поверхность π , входят внутрь области G при возрастании времени t).

Наряду с системой (1) рассматривается измененная система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, z) + p(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z) + q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z) + r(x, y, z), \end{aligned} \quad (2)$$

где функции $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ и $r(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в области G .

При достаточно малых $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ и $r(x, y, z)$ поверхность π является поверхностью без контакта для траекторий системы (2).

В соответствии с определением 1 работы [1] введем определение.

Определение. Система (1) называется грубой в области G , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всевозможных непрерывно дифференцируемых функциях $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ и $r(x, y, z)$, удовлетворяющих в области G условиям

$$|p| + |q| + |r| + |p'_x| + |p'_y| + |p'_z| + |q'_x| + |q'_y| + |q'_z| + |r'_x| + |r'_y| + |r'_z| < \delta. \quad (3)$$

* Доклад на конференции молодых научных сотрудников, Горький, 1966.

существует топологическое отображение области G в себя, при котором каждая траектория системы (1) отображается в траекторию системы (2), при этом соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем ε .

Необходимые условия грубости системы (1) в области G могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если система (1) является грубой в области G , то система (1) в области G : 1) имеет только такие состояния равновесия, для которых соответствующие характеристические уравнения не имеют корней с нулевой действительной частью, причем число таких состояний равновесия конечно; 2) не имеет отличных от состояния равновесия устойчивых по Пуассону полутраекторий; 3) не имеет траекторий, идущих из седла (седло-фокуса) в то же самое седло (седло-фокус); 4) имеет только конечное число идущих из седла (седло-фокуса) в другое седло или седло-фокус траекторий, по которым сепаратрисные поверхности соответствующих седел или седло-фокусов пересекаются без касания; 5) не имеет траекторий, идущих из седла (седло-фокуса) в седло или седло-фокус, кроме траекторий, перечисленных в предыдущем пункте; 6) не имеет отличного от состояния равновесия предельного множества полутраекторий.

Доказательство каждого пункта теоремы будем проводить отдельно:

1. Уравнения (1) рассматриваются в ограниченной области G . В силу этого среди систем, сколь угодно близких к системе (1), содержатся системы (2), правые части которых представляют собою полиномы от x , y и z и которые имеют конечное число состояний равновесия. Это означает, что грубая система может иметь только конечное число состояний равновесия. Далее, согласно работе [2] характеристическое уравнение изолированного состояния равновесия грубой системы не может иметь корней с нулевой действительной частью.

2) Предположим противное, т. е. пусть система (1) является грубой и имеет в области G отличную от состояния равновесия устойчивую по Пуассону положительную (отрицательную) полутраекторию L^+ . Тогда, как известно [3], замыкание полутраектории L^+ является квази-минимальным множеством, содержащим траекторию, устойчивую по Пуассону в обе стороны. Откуда в силу «леммы о замыкании» работы [4] следует, что при любом $\delta > 0$ можно построить систему вида (2), удовлетворяющую в G условиям (3) и имеющую замкнутую траекторию. Это противоречит нашему предположению о существовании топологического отображения области G в себя, переводящего траектории одной системы в траектории другой, так как исходная система (1) по предположению не имеет в области G замкнутых траекторий.

Прежде чем перейти к доказательству следующих пунктов, докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть L — некоторая отличная от состояния равновесия траектория системы (1), M_0 и M_1 — точки траектории L , соответствующие значениям $t=t_0$ и $t=t_1$ ($t_1 > t_0$); Π_0 и Π_1 — плоскости, нормальные к траектории L в точках M_0 и M_1 соответственно; T — отображение плоскости Π_0 на плоскость Π_1 определяемое траекториями системы (1). Обозначим через C_0 круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0 , лежащий на плоскости Π_0 , C_1 — образ круга C_0 на плоскости Π_1 , определяемый отображением T , и через g — цилиндрическую область, ограниченную плоскостями Π_0 , Π_1 и траекториями, проходящими через граничные точки круга C_0 (рис. 1).

Пусть $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$ и $z=\psi(t)$ — решение системы (1), которому

соответствует фазовая траектория L . Введем в достаточно малой окрестности траектории L новые переменные s, u, v :

$$\begin{aligned} x &= f(s) + f_1(s)u + f_2(s)v, \\ y &= \varphi(s) + \varphi_1(s)u + \varphi_2(s)v, \\ z &= \psi(s) + \psi_1(s)u + \psi_2(s)v, \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ дважды непрерывно дифференцируемы в области G и выбраны так, что $s = \text{const}$ представляет собой семейство нормальных к траектории L плоскостей (причем $s = s_0$ соответствует Π_0 и $s = s_1$ соответствует Π_1), $u = \text{const}, v = \text{const}$ есть траектории, причем $u = v = 0$ соответствует траектории L), якобиан замены переменных (4) отличен от нуля. Запишем систему (1) в новых переменных в виде

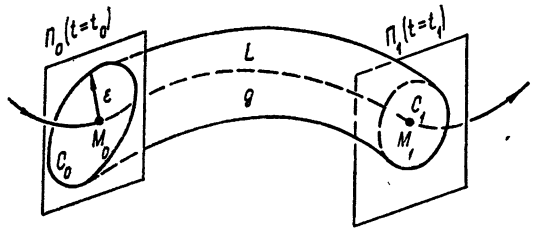


Рис. 1.

$$\frac{du}{ds} = F(s, u, v), \quad \frac{dv}{ds} = \Phi(s, u, v). \quad (5)$$

Отображение, порождаемое системой (5), записывается в виде

$$\bar{u} = U(s, s_0, u, v), \quad \bar{v} = V(s, s_0, u, v). \quad (6)$$

Отображение (6) соответствует сдвигу фазовых точек вдоль фазовых траекторий на время $s - s_0$. Уравнения (6) при $s = s_1$ дают отображение T плоскости Π_0 на плоскость Π_1 .

Рассмотрим наряду с отображением (6) следующие измененные отображения:

$$|\bar{u}| = \tilde{U}(s, s_0, u, v, \mu) = U(s, s_0, u, v) + \mu U_0(u, v) V_0(s), \quad (7)$$

$$\bar{v} = \tilde{V}(s, s_0, u, v, \mu) = V(s, s_0, u, v) + \mu U_0(u, v) V_0(s);$$

$$\begin{aligned} \bar{u} = \tilde{U}_1(s, s_0, u, v, \mu) &= U(s, s_0, u, v) \cos [\mu U_0(u, v) V_0(s)] - \\ &- V(s, s_0, u, v) \sin [\mu U_0(u, v) V_0(s)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = \tilde{V}_1(s, s_0, u, v, \mu) &= V(s, s_0, u, v) \cos [\mu U_0(u, v) V_0(s)] + \\ &+ U(s, s_0, u, v) \sin [\mu U_0(u, v) V_0(s)], \end{aligned}$$

где функции $U_0(u, v), V_0(s)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} U_0(u, v) &\equiv 0 && (\text{при } u^2 + v^2 \leq \varepsilon_0 < \varepsilon), \\ U_0(u, v) &\equiv 0 && (\text{при } u^2 + v^2 \geq \varepsilon), \\ 0 < U_0(u, v) < 1 && (\text{при } \varepsilon_0 < u^2 + v^2 < \varepsilon), \\ V_0(s \leq s_0) &\equiv 0, && V_0(s \geq s_1) \equiv 1, \\ 0 < V_0(s_0 < s < s_1) &< 1, \end{aligned} \quad (9)$$

причем функция $V_0(s)$ в интервале (s_0, s_1) монотонна. Отображения (7), (8) так же, как и отображение (6), соответствуют сдвигу фазовых точек вдоль фазовых траекторий. Обозначим через \tilde{T} и \tilde{T}_1 отображения, полученные соответственно из уравнений (7), (8) при $s=s_1$.

Отображение $\tilde{T}(\tilde{T}_1)$ в области $u^2 + v^2 \geq \epsilon$ совпадает с отображением T и при достаточно малом μ сколь угодно мало отличается от отображения T в области $u^2 + v^2 < \epsilon$. При $\mu = 0$ отображение $\tilde{T}(\tilde{T}_1)$ переходит в отображение T . Отметим, что отображение $\tilde{T}(\tilde{T}_1)$ так же, как и отображение T , является дважды непрерывно дифференцируемым, причем якобиан отображения $\tilde{T}(\tilde{T}_1)$ при достаточно малом μ отличен от нуля.

Систему (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} U(s, s_0, U(s_0, s, u, v), V(s_0, s, u, v)), \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} V(s, s_0, U(s_0, s, u, v), V(s_0, s, u, v)). \end{aligned} \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений, порождающая отображения \tilde{T} , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} \tilde{U}(s, s_0, \tilde{U}(s_0, s, u, v, \mu), \tilde{V}(s_0, s, u, v, \mu), \mu), \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V}(s, s_0, \tilde{U}(s_0, s, u, v, \mu), \tilde{V}(s_0, s, u, v, \mu), \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Система дифференциальных уравнений, порождающая отображения \tilde{T}_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} \tilde{U}_1(s, s_0, \tilde{U}_1(s_0, s, u, v, \mu), \tilde{V}_1(s_0, s, u, v, \mu), \mu), \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V}_1(s, s_0, \tilde{U}_1(s_0, s, u, v, \mu), \tilde{V}_1(s_0, s, u, v, \mu), \mu). \end{aligned} \quad (12)$$

В силу условий (9) при любых u, v имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^i \tilde{U}}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}} &= \left(\frac{\partial^i \tilde{U}_1}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}} = \left(\frac{\partial^i U}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}}, \\ \left(\frac{\partial^i \tilde{V}}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}} &= \left(\frac{\partial^i \tilde{V}_1}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}} = \left(\frac{\partial^i V}{\partial s^i} \right)_{\substack{s < s_0 \\ s > s_1}}, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Системы (11), (12) определены и непрерывно дифференцируемы в области $s_0 \leq s \leq s_1$, $u^2 + v^2 \leq \epsilon$. Продолжим их, исходя из непрерывной дифференцируемости правых частей, условий (9) и соотношений (13). Продолженные системы совпадают с системой (5) и являются непрерывно дифференцируемыми.

Системы (11), (12) в исходных переменных x, y, z соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y, z) + \mu p_0(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z) + \mu q_0(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z) + \mu r_0(x, y, z); \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y, z) + \mu p_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z) + \mu q_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z) + \mu r_1(x, y, z), \end{aligned} \quad (15)$$

где функции $p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1$ непрерывно дифференцируемы в области G , причем $p_0 \equiv q_0 \equiv r_0 \equiv p_1 \equiv q_1 \equiv r_1 \equiv 0$ в области $G-g$.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма. Системы дифференциальных уравнений (14), (15), порождающие отображения \tilde{T} и \tilde{T}_1 соответственно, в области G непрерывно дифференцируемы, в области $G-g$ совпадают с системой (1) и в области g при достаточно малом μ сколь угодно мало отличаются от системы (1).

Следствие. Системы (14), (15) при достаточно малом μ удовлетворяют в области G условиям (3) со сколь угодно малым $\delta > 0$.

Условимся называть седло или седло-фокус устойчивым (неустойчивым), если соответствующее характеристическое уравнение имеет два корня с отрицательной (положительной) действительной частью. Пусть дано устойчивое (неустойчивое) седло или седло-фокус O . Траектории, которые стремятся к устойчивому (неустойчивому) седлу или седло-фокусу O при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) и образуют сепаратрисную поверхность, будем называть устойчивыми (неустойчивыми) сепаратрисами, а две траектории, которые стремятся к седлу или седло-фокусу O при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) и не лежат на сепаратрисной поверхности, — неустойчивыми (устойчивыми) усами данного седла или седло-фокуса*. устойчивыми (устойчивыми) усами данного седла или седло-фокуса O^* .

3) Предположим противное, т. е. пусть грубая система (1) имеет неустойчивый ус L устойчивого седла O , возвращающийся при $t \rightarrow +\infty$ в то же самое седло в качестве устойчивой сепаратрисы. Сепаратрисную поверхность седла O обозначим через S , а пересечение поверхности S с кругом C_1 — через γ ($M_0, M_1, \Pi_0, \Pi_1, C_0, C_1, g, T$ и \tilde{T} — введенные выше обозначения, рис. 2). Заметим, что $M_1 \in \gamma$ и в любой сколь угодно малой окрестности точки M_1 можно указать точку \tilde{M}_1 , не принадлежащую γ и лежащую на C_1 . Точки M_0 и M_1 в новых переменных s, u, v имеют координаты $(s_0, 0, 0)$ и $(s_1, 0, 0)$ соответственно, причем $M_1(s_1, 0, 0) = TM_0(s_0, 0, 0)$. Пусть точка \tilde{M}_1 имеет координаты (s_1, μ, μ) , причем $\tilde{M}_1(s_1, \mu, \mu) = \tilde{T}M_0(s_0, 0, 0)$ в силу (7) и (9).

* В дальнейшем ради краткости будем опускать слова «седло-фокус» и не будем различать седла от седло-фокусов, так как они топологически эквивалентны [2].

** В дальнейшем будем пользоваться обозначениями, введенными выше.

Траектории системы (14), проходящие через точки, принадлежащие γ , при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к седлу O в качестве сепаратрис, а единственная траектория системы (14), проходящая через точку \tilde{M}_1 , при $t \rightarrow -\infty$ стремится к седлу O в качестве уса, никакая другая траектория, пересекающая круг C_1 , при $t \rightarrow -\infty$ не может стремиться к седлу в качестве уса.

Система (14) в силу следствия леммы при достаточно малом μ удовлетворяет в области G условиям (3). Из леммы следует, что система (14) имеет в точке O устойчивое седло, а в силу построения отображения \tilde{T} (т. е.

в силу того, что точка \tilde{M}_1 не принадлежит множеству γ) в ε -окрестности траектории L системы (1) не имеет траектории, идущей из седла O в то же самое седло.

Но с другой стороны, в силу грубости системы (1), система (14) должна иметь в ε -окрестности траектории L точно одну траекторию, идущую из седла O в то же самое седло. Это противоречие доказывает пункт 3 теоремы.

4) Если система (1) является грубой в области G , то в области G

не может существовать идущая из седла O в седло O_1 сепаратриса, в точках которой сепаратрисные поверхности имеют общие касательные плоскости. Действительно, предположим противное, т. е. пусть в точке M_1 траектории L , являющейся одновременно сепаратрисой неустойчивого седла O и устойчивого седла O_1 , сепаратрисные поверхности S и S_1 седел O и O_1 имеют общую касательную плоскость (рис. 3).

Обозначим пересечение поверхности S с кругом C_0 через γ , пересечение поверхности S с кругом C_1 — через γ_0 и пересечение поверхности S_1 с кругом C_1 — через γ_1 . Отметим, что γ , γ_0 и γ_1 являются простыми гладкими дугами, причем $\gamma_0 = T\gamma$. Тогда, как нетрудно видеть, каждой общей точке кривых γ_0 и γ_1 соответствует единственная траектория, идущая из седла O в седло O_1 и являющаяся одновременно сепаратрисой для обоих седел и наоборот.

Пусть M_1 является изолированной общей точкой кривых γ_0 и γ_1 т. е. пусть в достаточно малой окрестности траектории L не содержатся целиком отличные от нее траектории, идущие из седла O в седло O_1 .

Вводя по формулам (4) в достаточно малой окрестности траекто-

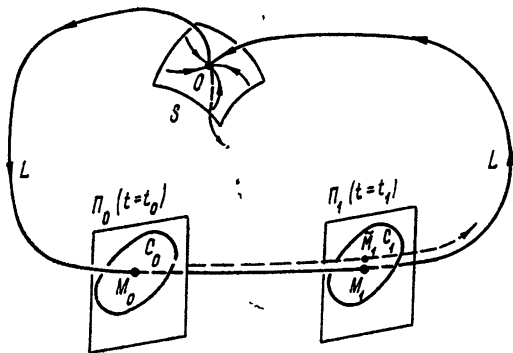


Рис. 2.

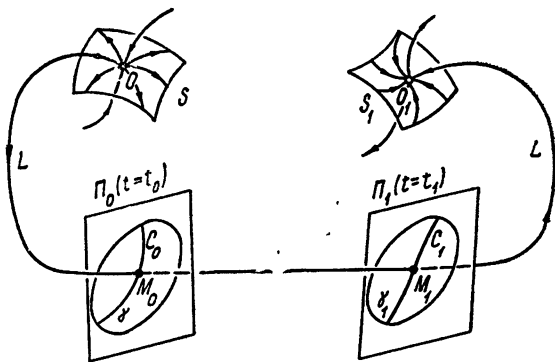


Рис. 3.

при L новые переменные s, u, v , запишем систему (1) в виде (10). Пусть уравнение дуги γ имеет вид $u = \Gamma(v)$, $s = s_0$. Тогда уравнение дуги γ_0 согласно (6) имеет вид:

$$s = s_1, \bar{u} = U(s_1, s_0, \Gamma(v), v), \bar{v} = V(s_1, s_0, \Gamma(v), v). \quad (16)$$

Пусть уравнение дуги γ имеет вид: $u = \Gamma_1(v)$, $s = s_1$.

Здесь могут быть два случая: кривые γ_0 и γ_1 в точке M_1 либо касаются, не пересекаясь (рис. 4а), либо пересекаются, касаясь (рис. 4в). Первому случаю соответствует касание без пересечения сепаратрисных поверхностей S и S_1 по траектории L , а второму — пересечение с касанием.

Рассмотрим первый случай. В качестве вспомогательного отображения используем отображение \tilde{T} . Образ дуги γ на плоскости Π_1 , определяемый отображением \tilde{T} , обозначим через $\tilde{\gamma}_0$. Уравнение дуги $\tilde{\gamma}_0$ согласно (7) имеет вид

$$s = s_1, \bar{u} = \tilde{U}(s_1, s_0, \Gamma(v), v, \mu), \bar{v} = \tilde{V}(s_1, s_0, \Gamma(v), v, \mu), \quad (17)$$

причем дуга $\tilde{\gamma}_0$ при $\mu = 0$ совпадает с дугой γ_0 . Каждой общей точке дуг $\tilde{\gamma}_0$ и γ_1 соответствует точно одна траектория системы (14), идущая из седла O в седло O_1 и наоборот.

При соответствующем выборе координатной системы u, v дуги $\tilde{\gamma}_0$ и γ_1 не имеют ни одной общей точки (рис. 4б). Откуда следует, что в силу следствия леммы система (14) при достаточно малом μ удовлетворяет в области G условиям (3), в силу леммы имеет в точках O и O_1 соответственно неустойчивое и устойчивое седла и в силу уравнений (7) и (17) в ε -окрестности траектории L системы (1) не имеет траектории, идущей из седла O в седло O_1 .

Рассмотрим второй случай. В качестве вспомогательного отображения пользуемся отображением \tilde{T}_1 . Образ дуги γ на плоскости Π_1 , определяемый отображением \tilde{T}_1 , обозначим через $\tilde{\gamma}_1$. Уравнение дуги $\tilde{\gamma}_1$ согласно (8) имеет вид

$$s = s_1, \bar{u} = \tilde{U}_1(s_1, s_0, \Gamma(v), v, \mu), \bar{v} = \tilde{V}_1(s_1, s_0, \Gamma(v), v, \mu), \quad (18)$$

причем дуга $\tilde{\gamma}_1$ при $\mu = 0$ совпадает с дугой γ_0 . Каждой общей точке дуг $\tilde{\gamma}_1$ и γ_1 соответствует точно одна траектория системы (15), идущая из седла O в седло O_1 и наоборот. При соответствующем выборе знака константы μ кривые $\tilde{\gamma}_1$ и γ_1 имеют, кроме точки M_1 , еще две

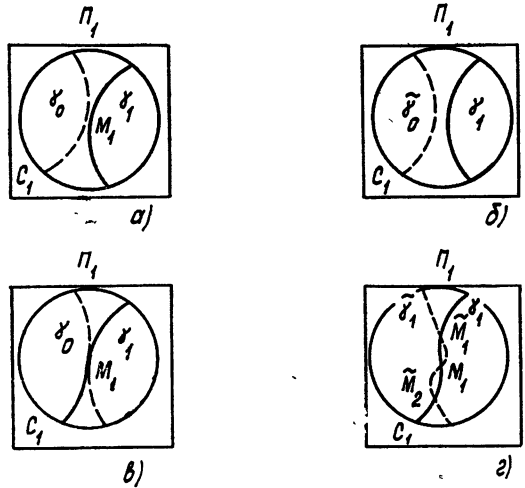


Рис. 4.

общие точки \tilde{M}_1 и \tilde{M}_2 , причем при достаточно малом μ точки \tilde{M}_1 и \tilde{M}_2 содержатся в сколь угодно малой окрестности точки M_1 (рис. 4г). Откуда следует, что система (15) в силу следствия леммы при достаточно малом μ удовлетворяет в области G условиям (3), в силу леммы имеет в точках O и O_1 соответственно неустойчивое и устойчивое седла и в силу уравнений (8) и (18) в ε -окрестности траектории L системы (1) имеет три траектории, идущие из седла O в седло O_1 .

Но, с другой стороны, в силу грубости системы (1) и наших предположений, системы (14) и (15) в ε -окрестности траектории L системы (1) должны иметь точно по одной траектории, идущей из седла O в седло O_1 . Полученные противоречия доказывают наше утверждение в рассматриваемых случаях.

Мы не рассмотрели случай, когда точка M_1 является неизолированной общей точкой кривых γ_0 и γ_1 , т. е. случай, когда в любой малой окрестности траектории L существуют отличные от нее траектории, идущие из седла O в седло O_1 и являющиеся сепаратрисами для обоих седел. В этом случае система (1) в ε -окрестности траектории L имеет не менее чем счетное число траекторий, идущих из седла O в седло O_1 . Тогда, как и в предыдущих случаях с помощью вспомогательного отображения T можно построить непрерывно дифференцируемую систему

вида (14), которая удовлетворяет в области G условиям (3), имеет в точках O и O_1 соответственно неустойчивое и устойчивое седла и имеет в ε -окрестности траектории L лишь конечное число траекторий, идущих из седла O в седло O_1 . Но, с другой стороны, в силу грубости системы (1) и наших предположений, система (14) в ε -окрестности траектории L системы (1) должна иметь не менее чем счетное число траекторий, идущих из седла O в седло O_1 . Таким образом, и в этом случае мы получили противоречие, доказывающее наше утверждение.

Для полного доказательства пункта 4 теоремы достаточно доказать следующее: если система (1) грубая в области G , то в области G может существовать только конечное число идущих из седла в седло сепаратрис, по которым сепаратрисные поверхности пересекаются без касания. Для этого предположим противное, т. е. пусть грубая система (1) в области G имеет бесконечное число сепаратрис, идущих из неустойчивого седла O в устойчивое седло O_1 , по которым сепаратрисные поверхности пересекаются без касания. Тогда должна существовать траектория L , в любой малой окрестности которой существуют отличные от нее траектории, идущие из седла O в седло O_1 ; следовательно, в любой малой окрестности точки M_1 существуют отличные от L общие точки кривых γ_0 и γ_1 , т. е. точка M_1 является точкой сгущения множества точек $\gamma_0 \cap \gamma_1$. Кривые γ_0 и γ_1 являются простыми гладкими, и образы достаточно близких к M_0 точек кривой γ на C_1 , определяемые отображением T , в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий (так как $s_1 - s_0$ конечно), содержатся в сколь угодно малой окрестности точки M_1 . Тогда существует по крайней мере одна общая точка дуг γ_0 и γ_1 , в которой эти дуги имеют общую касательную, следовательно, существует сепаратриса, идущая из седла O в седло O_1 , в точках которой сепаратрисные поверхности имеют общие касательные плоскости, что противоречит нашему утверждению, сделанному в начале настоящего пункта.

5) Для доказательства утверждения пункта 5 достаточно доказать следующее: если система (1) является грубой в области G , то в области G ус седла не может стремиться к другому седлу. Это утверждение доказывается тем же методом, примененным при доказательстве пунктов 3 и 4, т. е. предположим противное, именно, пусть

грубая система (1) имеет неустойчивый ус L устойчивого седла O , стремящийся при $t \rightarrow +\infty$ либо к неустойчивому седлу O_1 в качестве уса (рис. 5), либо к устойчивому седлу O_2 в качестве сепаратрисы (рис. 6). В обоих случаях противоречия получим с помощью построения отображения типа \tilde{T} (как и в пункте 3).

6) Всякая траектория, пересекающая граничную поверхность без контакта, не может быть предельной для отличной от нее траектории. Действительно, предположим противное, т. е. пусть покидающая область G при $t \rightarrow -\infty$ траектория L_0 является предельной для полутраектории L^+ или L^- траектории L . Тогда нетрудно показать, что траектория L пересекает граничную поверхность без контакта более одного раза. Последнее невозможно, так как граничная поверхность без контакта, по предположению, простая замкнутая и гладкая.

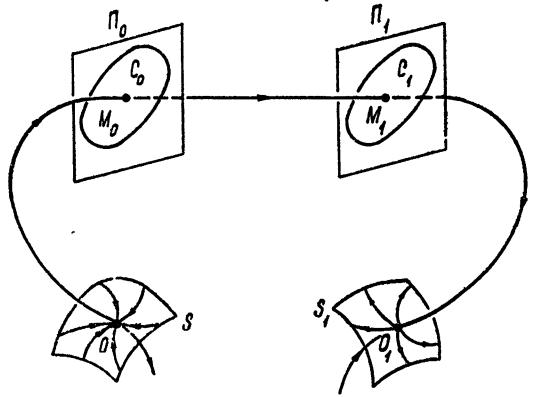


Рис. 5.

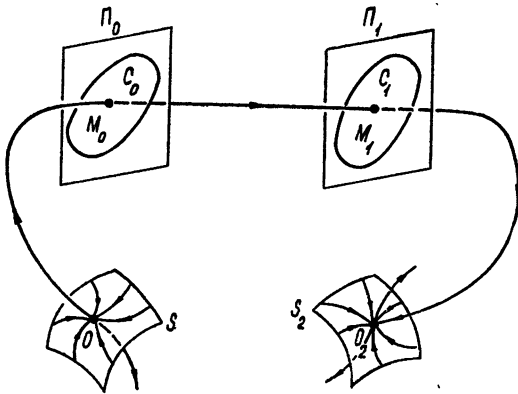


Рис. 6.

Из утверждений пунктов 1 и 2 настоящей теоремы и основных теорем о предельных множествах полутраекторий [3, 5] следует, что предельное множество всякой полутраектории может быть одного из следующих типов: 1) одно состояние равновесия, 2) совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$.

В состав предельного множества Ω типа 2 не могут входить узлы или фокусы. Пусть

в состав Ω входит устойчивое седло O . Тогда в состав Ω непременно входит ус L данного седла. Ус L при $t \rightarrow +\infty$ в силу утверждений пунктов 3—5 не может стремиться к седлу или седло-фокусу. Откуда следует, что в грубых системах не могут быть предельные множества типа 2.

Вопрос о возможных в области G типах траекторий и полутраекторий решается следующей теоремой.

Теорема 2. Если система (1) в области G удовлетворяет условиям 1—6 теоремы 1, то система (1) в области G может иметь траектории только следующих типов:

I. Состояния равновесия: 1) устойчивый или неустойчивый узел (фокус); 2) устойчивое или неустойчивое седло (седло-фокус).

II. Устойчивый (неустойчивый) ус неустойчивого (устойчивого) седла или седло-фокуса: 1) стремящийся при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) к не-

устойчивому (устойчивому) узлу или фокусу; 2) выходящий при $t \rightarrow -\infty$ из области G .

III. Устойчивая (неустойчивая) сепаратриса устойчивого (неустойчивого) седла или седло-фокуса: 1) стремящаяся при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) к неустойчивому (устойчивому) узлу или фокусу; 2) выходящая при $t \rightarrow -\infty$ из области G ; 3) стремящаяся при $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) к неустойчивому (устойчивому) седлу или седло-фокусу, по которой сепаратрисные поверхности пересекаются без касания.

IV. Траектория, стремящаяся при $t \rightarrow +\infty$ к устойчивому узлу или фокусу: 1) стремящаяся при $t \rightarrow -\infty$ к неустойчивому узлу или фокусу; 2) выходящая при $t \rightarrow -\infty$ из области G .

Теорема непосредственно следует из утверждений теоремы 1 и сделанных предположений относительно области G .

Автор приносит искреннюю благодарность Ю. И. Неймарку за ценные указания и большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 14, № 5, 247 (1937).
- 2 Р. М. Минц, ДАН СССР, 124, № 6, 1215 (1959).
- 3 В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1949.
- 4 С. С. Pugh, Bull. Amer. Math. Soc., 70, № 4, 584 (1964).
- 5 Д. Д. Биркгоф, Динамические системы, Гостехиздат, М—Л, 1941.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 мая 1967 г.

NECESSARY CONDITIONS FOR STRUCTURAL STABILITY OF THE THREE DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM WITHOUT CLOSED TRAJECTORIES

K. Eshmooradov

The necessary conditions for structural stability of the three differential equations system without closed trajectories are stated and the classification of all the possible modes is provided.

УДК 517.944+517.94

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ ЯКУБОВИЧА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. Ф. Сабаев, И. С. Постников

Показывается возможность эффективного использования матричных неравенств Якубовича при исследовании устойчивости систем с распределенными параметрами. В качестве примера, представляющего и самостоятельный интерес, рассмотрена задача об устойчивости динамической системы, описываемой квазилинейным уравнением параболического типа и системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных производных. На этом же примере показана возможность применения процедур Бруне и Ботта—Даффина для нахождения коэффициентов квадратичных форм.

Второй метод Ляпунова в настоящее время является одним из основных методов исследования устойчивости самых разнообразных динамических систем, причем рамки эффективного применения этого метода непрерывно расширяются. Имеются работы [1-4], в которых второй метод Ляпунова обобщается на случай систем с распределенными параметрами и систем с запаздывающим аргументом. Для таких систем вопрос об устойчивости сводится к построению функционала, обладающего определенными свойствами.

Таким образом, основная трудность исследования устойчивости переносится в область отыскания необходимых и достаточных условий существования и эффективных методов построения функций или функционалов Ляпунова. При этом не существует общих правил, позволяющих в каждом конкретном случае построить или указать условия существования таких функций и функционалов. Чаще всего построение носит специфический характер, связанный с рассматриваемой задачей. Поэтому разработка методов эффективного построения функций и функционалов Ляпунова, общих для некоторого класса задач, является весьма актуальной.

В настоящей статье для одного класса динамических систем предлагается рецепт построения функций и функционалов Ляпунова, основанный на использовании метода матричных неравенств Якубовича [5-7] и процедур Бруне, Ботта—Даффина [8-10].

Рассмотрим динамические процессы, которые описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений в обыкновенных или в частных производных и системой линейных дифференциальных уравнений вида*

$$\frac{dy}{dt} = Py + qu \quad (1)$$

* Здесь и ниже P — $\nu \times \nu$ матрица; q, b, y — $\nu \times 1$ вектор-столбцы; u — скаляр; P^* — транспонированная матрица; I — единичная матрица.

с коэффициентами, не зависящими от времени. Связь между выделенной подсистемой (1) и остальными уравнениями динамической системы осуществляется посредством переменных u и σ , где

$$\sigma = b^*y.$$

Преобразуем систему (1) по Лапласу при нулевых начальных условиях и найдем коэффициент передачи

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{u}} = K(p) = \frac{Q(p)}{D(p)} = b^*(pI - P)^{-1}q, \quad (2)$$

где p — параметр преобразования Лапласа, $\tilde{\sigma}$ и \tilde{u} — изображения по Лапласу переменных σ и u .

Лемма. Пусть матрица P — гурвицева (уравнение $\det\|pI - P\| = 0$ имеет все корни в открытой левой полуплоскости). Пусть векторы

$$\begin{aligned} q, Pq, \dots, P^{v-1}q, \\ b, P^*b, \dots, P^{v-1}b \end{aligned} \quad (3)$$

являются линейно независимыми. Тогда существуют 1) неотрицательное действительное число χ , 2) положительно определенная квадратичная форма $U_1(y)$ и 3) неотрицательная квадратичная форма $U_2(y, u)$, такие, что для любых y и u , удовлетворяющих системе уравнений (1), справедливо тождество

$$u[\sigma + \chi u] = \frac{d}{dt}U_1(y) + U_2(y, u). \quad (4)$$

Лемма является простым следствием теорем Якубовича о решении матричных неравенств [5-7] и основной леммы Калмана [11].

Действительно, пусть $U_1(y) = y^*Hy$, где H — искомая $v \times v$ матрица ($H = H^*$). Тогда производная от квадратичной формы $U_1(y)$; вычисленная в силу системы (1), равна

$$\frac{d}{dt}y^*Hy = y^*(P^*H + HP)y + y^*2Hqu. \quad (5)$$

Добавляя к обеим частям равенства (5) величину $u[\sigma + \chi u]$, имеем

$$u[\sigma + \chi u] = \frac{d}{dt}y^*Hy + y^*Gy + 2y^*gu + \chi u^2, \quad (6)$$

где $G = -(P^*H + HP)$, $g = -(Hq - b/2)$. Вводя $(v + 1) \times (v + 1)$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} G & g \\ g^* & \chi \end{pmatrix},$$

представим (6) в виде

$$u[\sigma + \chi u] = \frac{d}{dt}y^*Hy + (y, u)^*F(y, u),$$

где (y, u) — $(v + 1) \times 1$ вектор-столбец. Поскольку матрица P — гурвицева, всегда можно найти неотрицательное действительное число χ , та- кое, что*

* Достаточно взять $\chi = -\inf_{\omega \in [0, \infty)} \operatorname{Re} K(j\omega) < +\infty$.

$$\operatorname{Re} K(j\omega) + \chi \geq 0 \quad (7)$$

при всех $\omega \in [0, \infty)$. При выполнении условия (7) существование матрицы $H = H^* > 0$, удовлетворяющей условию $F \geq 0$, непосредственно следует из [6, 11]*. Положив

$$U_2(y, u) = (y, u)^* F(y, u),$$

приходим к утверждению леммы.

З а м е ч а н и е. Условие линейной независимости векторов (3) является необходимым и достаточным для того, чтобы система (1) была невырожденной [12, 13] (согласно [13] система (1) является невырожденной, если полиномы $Q(p)$ и $D(p)$ в выражении (2) не имеют общих корней).

При выполнении условий леммы квадратичную форму $U_1(y) = y^* H y$ можно интерпретировать как функцию Ляпунова для подсистемы (1) и использовать для построения функции или функционала Ляпунова исходной динамической системы. При этом для установления устойчивости в целом [12] достаточно лишь факта существования положительно определенной квадратичной формы $U_1(y)$, обладающей определенными свойствами. Однако в случае, когда нелинейности исходной динамической системы таковы, что устойчивость в целом не имеет места, существенным является отыскание конкретного вида квадратичной формы $U_1(y)$.

Для определения коэффициентов матрицы H можно воспользоваться результатами работы [11], в которой дается метод построения решений предельных разрешающих уравнений Лурье [12, 14].

С другой стороны, при условиях леммы $K(p) + \chi$ является рациональной положительной действительной функцией комплексного аргумента p , т. е. функцией Бруне [8, 9]. В теории пассивных систем доказано [8, 9, 10], что любой функции Бруне может быть поставлен в соответствие пассивный двухполюсник, состоящий из индуктивностей, емкостей и сопротивлений, для которого указанная функция является импедансом. Для построения пассивного двухполюсника по заданному импедансу существуют процедуры Бруне [8, 10] и Ботта—Даффина [9].

Рассматривая систему дифференциальных уравнений для контурных токов и узловых напряжений, легко составить выражение для баланса энергии пассивного двухполюсника [8]. В результате получим энергетическое соотношение

$$u[\sigma + \chi u] = \frac{d}{dt} U_1 + U_2,$$

аналогичное (4), но уже с определенными формами U_1 и U_2 . Величина $u[\sigma + \chi u]$ равна мгновенной мощности, поступающей в двухполюсник, U_2 представляет собой мгновенную мощность, рассеиваемую в активных сопротивлениях, U_1 представляет собой энергию, запасенную в индуктивностях и конденсаторах. В силу пассивности двухполюсника квадратичная форма U_1 является положительно определенной, а квадратичная форма U_2 — неотрицательной [8].

Таким образом, процедуры Бруне и Ботта—Даффина доставляют удобный для практического применения способ нахождения коэффициентов матриц H и F .

Эффективность указанного способа проиллюстрируем на примере, представляющем и самостоятельный интерес.

* $H > 0$ означает, что $y^* H y > 0$ при $y \neq 0$; $F \geq 0$ означает, что $(y, u)^* F(y, u) \geq 0$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть Ω — ограниченная область, m -мерного евклидова пространства E^m с координатой $x = (x_1, \dots, x_m)$. Границу области Ω обозначим через Γ .

Рассмотрим систему с распределенными параметрами, динамика которой описывается квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu(x, t) + f(x, u) + h(x) \sigma(x, t) + \int_{\Omega} T(x, x') u(x', t) d\Omega' = 0, \quad (8)$$

$$(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

с краевым условием

$$Ru(x, t) = 0 \quad (\text{при } (x, t) \in \Gamma \times [0, \infty)) \quad (9)$$

и системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка в обыкновенных производных

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 a_{ij} y_j + q_i u \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^2 b_k y_k.$$

Здесь L — эллиптический оператор вида

$$L = \sum_{i, j=1}^m \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m \beta_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + \gamma(x); \quad (11)$$

R — линейный дифференциальный оператор вида

$$R = \sum_{k=1}^m \eta_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + \vartheta(x); \quad (12)$$

$f(x, u)$ — нелинейная функция от u , такая, что

$$f(x, u) = o(u) \quad (\text{при } u \rightarrow 0); \quad (13)$$

коэффициенты a_{ij} , q_i , b_k зависят только от x . Будем предполагать, что коэффициенты системы уравнений (8), (10) так же, как и граница Γ , удовлетворяют некоторым условиям гладкости. Будем также считать, что система (10) при всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условиям леммы.

Устойчивость динамических систем, аналогичных рассмотренной выше, но при $h(x) \equiv 0$, рассматривалась ранее (см., например, [15–17]). При $h(x) \neq 0$ к анализу системы уравнений (8), (10) сводится, например, задача об устойчивости стационарного режима ядерного энергетического реактора по уравнениям одnogруппового диффузионного приближения [18–19]. При этом $u(x, t)$ имеет смысл локального отклонения потока нейтронов в реакторе, $h(x)$ — коэффициент реактивности. Интеграл по области Ω в уравнении (8) может представлять собой вклад в реактивность, обусловленный наличием линейного безынерционного регулятора.

Будем предполагать, что $h(x) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$. При этом без

нарушения общности можно принять $h(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

При выполнении условия (13) система уравнений (8), (10) имеет нулевое решение. Поставим задачу об устойчивости нулевого решения системы (8), (10) с краевым условием (9).

Рассмотрим множество вещественных функций $u(x, t)$, $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$, определенных и непрерывных по совокупности x, t в области $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ вместе со своими частными производными первого порядка по пространственным координатам. Состояние системы (8), (10) в любой момент времени однозначно определяется с помощью вектор-функции $Z = \{u(x), y_1(x), y_2(x)\}$. В множество вектор-функций Z , удовлетворяющих краевому условию (9), введем норму

$$\rho(t) = \|Z\| = \left[\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^2 y_i^2 \right) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Устойчивость нулевого решения системы (8), (10) будем рассматривать по норме (14).

Определение. Нулевое решение системы (8), (10) будем называть устойчивым по норме (14), если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует действительное число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $\rho(0) < \delta$ имеет место $\rho(t) < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Если, кроме того, $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то нулевое решение будем называть асимптотически устойчивым по норме (14).

Вывод энергетического соотношения. Преобразуя систему (10) по Лапласу, найдем коэффициент передачи

$$K(p) = \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{u}} = \frac{(a_{21} q_1 - a_{11} q_2) + q_2 p}{p^2 - (a_{11} + a_{22})p + (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})}. \quad (15)$$

Условия леммы будут выполняться при следующих ограничениях на коэффициенты системы уравнений (10):

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{22}) < 0, \quad (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) > 0, \quad a_{21} \neq 0, \\ q_1(a_{21} q_1 - a_{11} q_2) + q_2(a_{22} q_1 - a_{12} q_2) \neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

При выполнении неравенств (16) факт существования квадратичных форм, обладающих определенными свойствами, является доказанным (см. лемму). Для конкретного построения квадратичных форм $U_1(y_1, y_2)$ и $U_2(y_1, y_2, u)$ воспользуемся процедурой Бруне.

Построение будем проводить при дополнительных ограничениях на коэффициенты системы (10)*.

$$\begin{aligned} a_{21} q_1 - a_{11} q_2 > 0, \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

и для наименьшего значения $\chi = \chi_0$, удовлетворяющего условиям леммы. Для χ_0 имеем

$$\chi_0 = -\text{Inf Re } K(j\omega) \quad (\text{при } \omega \in [0, \infty)). \quad (18)$$

При некотором значении $p = j\omega_0$ $K(j\omega_0) + \chi_0 = jM$, где в общем случае M может быть как положительной, так и отрицательной величиной. При выполнении неравенств (17) $M < 0$. Применяя для этого случая

* В остальных случаях построение проводится по аналогичной схеме.

процедуру Бруне и используя результаты работ [8, 10], $K(p) + \chi_0$ можно представить в виде

$$K(p) + \chi_0 = k \left[L_1 p + \frac{(L_2 p + r)(L_3 p + 1/cp)}{(L_2 + L_3)p + r + 1/cp} \right], \quad (19)$$

где

$$r = -(a_{11} + a_{22}), \quad 1/c = (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}), \quad k = \chi_0 / r L_3^2,$$

$$L_1 = \frac{c[(q_2 + \chi_0 r)r - (a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]}{2[\chi_0 + c(a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]},$$

$$L_2 = \frac{c[(q_2 + \chi_0 r)r + (a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]}{2[\chi_0 + c(a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]}, \quad (20)$$

$$L_3 = \frac{2\chi_0 - c[(q_2 + \chi_0 r)r - (a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]}{2[\chi_0 + c(a_{21} q_1 - a_{11} q_2)]}.$$

В силу того, что χ_0 выбирается из условия (18), L_1 , L_2 и L_3 удовлетворяют тождеству

$$L_1(L_2 + L_3) + L_2 L_3 = 0.$$

Нетрудно показать, что при выполнении неравенств (16), (17) $\chi_0 > 0$ и $0 < L_3 < \infty$.

В соответствии с (19) система уравнений, описывающая зависимость между y_2 и u , может быть представлена в виде

$$y_2 + \chi_0 u = L_1 \frac{d}{dt} (i_1 + i_2) + L_3 \frac{di_1}{dt} + v,$$

$$y_2 + \chi_0 u = L_1 \frac{d}{dt} (i_1 + i_2) + L_2 \frac{di_2}{dt} + r i_2, \quad (21)$$

$$i_1 = c \frac{dv}{dt}, \quad i_1 + i_2 = ku.$$

Умножая первое уравнение системы (21) на i_1 , второе уравнение на i_2 и складывая полученные равенства, после несложных преобразований получим

$$u[y_2 + \chi_0 u] = \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} [(L_3 i_1 - L_2 i_2)^2 + cv^2] + \frac{r}{k} i_2^2. \quad (22)$$

Переменные i_1 , i_2 , v можно выразить через исходные переменные y_1 , y_2 , u . Преобразование, связывающее i_1 , i_2 , v с y_1 , y_2 , u , находится путем сравнения систем уравнений (10) и (21) и имеет вид

$$i_1 = kL_2 u - \frac{1 - L_2 d_2}{rL_3} y_2 + \frac{L_2 d_1}{rL_3} y_1,$$

$$i_2 = kL_3 u + \frac{1 - L_2 d_2}{rL_3} y_2 - \frac{L_2 d_1}{rL_3} y_1, \quad (23)$$

$$v = d_1 y_1 + d_2 y_2,$$

где

$$d_1 = \frac{k[L_2(a_{21} q_1 - a_{11} q_2) - q_2 r]}{c[q_1(a_{21} q_1 - a_{11} q_2) + q_2(a_{22} q_1 - a_{12} q_2)]},$$

$$d_2 = \frac{k[q_1 r - L_2(a_{12} q_2 - a_{22} q_1)]}{c[q_1(a_{21} q_1 - a_{11} q_2) + q_2(a_{22} q_1 - a_{12} q_2)]}$$

Якобиан преобразования равен $d_1 k^2 / \chi_0$. Отсюда и из неравенств (16), (17) следует, что преобразование (23) является неособым.

Теперь (22) можно записать в виде (4), где

$$U_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2k} \left[\left(\frac{L_2 d_2 - 1}{r L_3} y_2 + \frac{L_2 d_1}{r L_3} y_1 \right)^2 + c(d_1 y_1 + d_2 y_2)^2 \right], \tag{24}$$

$$U_2(y_1, y_2, u) = \frac{1}{\chi_0} [\chi_0 u + (1 - L_2 d_2) y_2 - L_2 d_1 y_1]^2.$$

Положительность коэффициентов c, k, χ_0 (а вместе с тем и неотрицательность квадратичных форм U_1 и U_2) следует из соотношений (20), если принять во внимание неравенства (16), (17). Кроме того, из выражения (24) видно, что $U_1(y_1, y_2)$ обращается в нуль только при $y_1 = y_2 = 0$, откуда следует положительная определенность квадратичной формы $U_1(y_1, y_2)$.

Вывод критерия устойчивости. Решение задачи об устойчивости нулевого решения системы уравнений (8), (10) с краевым условием (9) дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть система (10) при всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условиям леммы, т. е. выполнены ограничения: 1) матрица $P = (a_{ij})$ — гурвицева, 2) векторы q, Pq и b, P^*b — линейно независимы. Тогда для асимптотической устойчивости по норме (14) нулевого решения системы уравнений (8), (10) с краевым условием (9) достаточно, чтобы функционал

$$W[u] = \int_{\Omega} [Lu + f(x, u) - \chi_0(x) h(x) u + \int_{\Omega'} T(x, x') u(x', t) d\Omega'] u d\Omega, \tag{25}$$

где

$$\chi_0(x) = - \operatorname{Inf}_{\omega \in [0, \infty)} \operatorname{Re} K(j\omega, x),$$

было положительно определенным.

Доказательство. Умножим уравнение (8) на u и представим его в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + uLu + u f(x, u) + u \int_{\Omega'} T(x, x') u(x', t) d\Omega' + \\ + h(x) [\sigma + \chi_0(x) u] u - h(x) \chi_0(x) u^2 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Заменяя $u[\sigma + \chi_0(x) u]$ в соответствии с леммой на $\frac{d}{dt} U_1 + U_2$ и интегрируя (26) по области Ω , имеем

$$\frac{d}{dt} V[u, y_1, y_2] = - \varphi[u, y_1, y_2], \tag{27}$$

где

$$V = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u^2 + h(x) U_1(y_1, y_2) \right] d\Omega,$$

$$\begin{aligned} \varphi = \int_{\Omega} [Lu + f(x, u) - \chi_0(x) h(x) u + \int_{\Omega'} T(x, x') u(x', t) d\Omega'] u d\Omega + \\ + \int_{\Omega'} h(x) U_2(u, y_1, y_2) d\Omega. \end{aligned}$$

Функционал $V[u, y_1, y_2]$ является непрерывным по норме (14) в силу непрерывности подынтегрального выражения по совокупности своих переменных. Так как $U_1(y_1, y_2)$ есть положительно определенная квадратичная форма переменных y_1, y_2 и $h(x) > 0$ при всех $x \in \Omega$, функционал V является и положительно определенным по норме (14). Согласно (27) производная функционала V по времени, вычисленная в силу системы (8), (10), равна $-\varphi[u, y_1, y_2]$. В силу требования положительной определенности функционала $W[u]$ имеет место оценка

$$\varphi[u, y_1, y_2] \geq \mu^2 \int_{\Omega} u^2 d\Omega + \int_{\Omega} h(x) U_2(u, y_1, y_2) d\Omega,$$

где μ^2 — некоторая положительная постоянная, откуда следует, что функционал $\varphi[u, y_1, y_2]$ мажорируется снизу квадратичным функционалом, который обращается в нуль лишь при $u = 0, U_2(u, y_1, y_2) = 0$. Легко показать, что, поскольку $h(x) \neq 0$, при выполнении условий теоремы система уравнений (8), (10) не имеет целых полутраекторий, отличных от нулевого решения на поверхности $u = 0$. Таким образом, функционал $\varphi[u, y_1, y_2]$ является положительно определенным по норме (14) на всех траекториях системы. Согласно [3, 20] в этом случае нулевое решение краевой задачи (8) — (10) асимптотически устойчиво по норме (14). Доказательство закончено.

Теорема сводит задачу об устойчивости рассматриваемой динамической системы к вопросу о положительной определенности функционала $W[u]$ на классе допустимых функций. Согласно постановке задачи об устойчивости допустимыми будут являться функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка по пространственным координатам и удовлетворяющие краевому условию (9).

Вопрос о положительной определенности функционала сводится к отысканию минимального значения функционала

$$J = W[u] / \int_{\Omega} u^2 d\Omega.$$

Для нахождения экстремальных значений функционалов существует ряд прямых методов (метод Галеркина, метод Рунге, градиентные методы). Кроме того, известно [21], что задача минимизации квадратичного функционала эквивалентна решению линейной краевой задачи.

Положим сначала $f(x, u) \equiv 0$. В этом случае достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения краевой задачи (8) — (10) можно сформулировать в более удобной для приложений форме.

Для асимптотической устойчивости по норме (14) нулевого решения системы уравнений (8), (10) с краевым условием (9) достаточно, чтобы наименьшее собственное значение λ_0 краевой задачи

$$L\psi - h(x) \chi_0(x) \psi + \int_{\Omega} \left[\frac{T(x, x') + T(x', x)}{2} \right] \psi(x') d\Omega' = \lambda \psi, \quad (28)$$

$$R\psi = 0 \quad (\text{при } x \in \Gamma)$$

было положительным.

К этому условию приходим, если приравнять нулю первую вариацию функционала J и учесть очевидное тождество

$$\int_{\Omega} u(x) \int_{\Omega} T(x, x') \delta u(x') d\Omega' d\Omega = \int_{\Omega} \delta u(x) \int_{\Omega} T(x', x) u(x') d\Omega' d\Omega.$$

Пусть теперь $f(x, u)$ отлична от нуля и такова, что

$$uf(x, u) \geq 0 \quad (29)$$

при всех $x \in \Omega$. Тогда для асимптотической устойчивости по-прежнему достаточно положительности наименьшего собственного значения λ_0 краевой задачи (28). Если неравенство (29) выполняется при любых $\|u\|$ и $\lambda_0 > 0$, то нулевое решение системы уравнений (8), (10) с краевым условием (9) устойчиво в целом. Используя неравенство Буниковского—Шварца [22], легко показать, что если нелинейность удовлетворяет ограничению

$$\|f(x, u)\| < \lambda_0 \|u\| \quad (30)$$

для любых $\|u\|$ и $\lambda_0 > 0$, то нулевое решение также устойчиво в целом.

В тех случаях, когда неравенство (29) или (30) выполняется только при $\|u\| < N$, устойчивость в целом может не иметь места. Для оценки притяжения нулевого решения краевой задачи (8)—(10) можно использовать построенный выше функционал Ляпунова $V[u, y_1, y_2]$. Очевидно, область

$$V[u, y_1, y_2] < N/2.$$

будет принадлежать области притяжения нулевого решения краевой задачи (8)—(10). Полученные результаты без существенных затруднений переносятся на системы, отличающиеся от рассмотренной только более высоким порядком системы уравнений (10).

В заключение отметим, что приведенная выше лемма допускает усиление: излишне ограничение, связанное с требованием линейной независимости векторов (3). Действительно, будем искать матрицу $H > 0$ так, чтобы $F > 0$. Условие $F > 0$ равносильно двум: $\chi > 0$ и $\chi G - gg^* > 0$. Решение последнего неравенства приведено в [7], откуда следует, что для этого необходимо и достаточно выполнения строгого неравенства (7). Соответственно излишне ограничение (2) теоремы, если $\chi_0(x)$ заменить на $\chi_0(x) + \varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x) > 0$ при всех $x \in \Omega$ и $\|\varepsilon(x)\|$ сколь угодно мала. Авторы пользуются случаем поблагодарить Н. А. Железцова и В. А. Дозорова за полезное обсуждение и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, изд. ЛГУ, 1957.
2. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
3. А. А. Мовчан, ПММ, 24, вып. 6, 988 (1960).
4. Т. К. Сиразетдинов, Труды КАИ, вып. 83, 16 (1964).
5. Ф. Р. Гантмахер, В. А. Якубович, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 1, 30 (1965)
6. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, 26, № 4, 577 (1965).
7. В. А. Якубович, ДАН СССР, 143, № 6, 1304 (1962).
8. Г. Бодэ, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, М., 1948
9. В. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
10. В. А. Тафт, Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам, изд. АН СССР, М., 1954.
11. R. E. Kalman, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 49, № 2, 201 (1963).
12. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963
13. В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 24, № 1, 7 (1963).

14. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1951.
15. Л. Ф. Рахматуллина, ПММ, 25, вып 3, 591 (1961)
16. P. K. C. Wang, IEEE Trans. Automat. Control, 11, № 1, 46 (1966).
17. P. K. C. Wang, Internat. J. Control, 3, № 2, 139 (1966).
18. D. Randall, D. S. St. John, Nucleonics, 16, № 3, 82 (1958).
19. И. С. Постников, Е. Ф. Сабаяев, Изв. АН БССР, серия физико-технических наук, № 3, 46 (1967).
20. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, ДАН СССР, 36, № 3, 453 (1952).
21. С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1950.
22. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, изд. Мир, М., 1965.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 февраля 1967 г.

APPLICATION OF YAKOOBOVECH'S METHOD OF MATRIX INEQUALITIES TO THE STABILTY ANALYSIS FOR SOME SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Ye. F. Sabayev, I. S. Postnikov

The possibility of efficient application of Yakoobovech's matrix inequalities in stability analysis for the systems with distributed parameters is shown in this paper. Stability analysis for a dynamic system described by a quasilinear parabolic equation and a second order system of ordinary differential is considered as an example.

УДК 621.391.192.5

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА О СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В. А. Брусин

Формулируется обобщенная задача о стохастической аппроксимации в дискретном и непрерывном вариантах. Показывается, что алгоритм Роббинса—Монро решает эту задачу в смысле сходимости по вероятности.

Задача о стохастической аппроксимации была впервые поставлена и решена Роббинсом и Монро [1]. Эта задача, возникшая из потребностей регрессионного анализа, заключается в построении итерационного процесса, сходящегося в стохастическом смысле к корню уравнения $E_{\xi=x} \omega(\xi) = 0$, где $\omega(x)$ — случайная величина, зависящая от x , а $E_{\xi=x}$ — математическое ожидание этой случайной величины при заданном значении аргумента. Роббинсом и Монро был найден такой процесс и доказана теорема о его сходимости по вероятности к искомой величине при соответствующих ограничениях на случайную величину $\omega(x)$.

Работа [1] положила начало большому количеству исследований по задаче о стохастической аппроксимации. Достаточно полный обзор этих работ опубликован в журнале «Автоматика и телемеханика» № 4, 1966.

Два года назад эти работы привлекли внимание специалистов, работающих в области технической кибернетики. Оказалось, и это было впервые замечено Цыпкиным [2], что задача о стохастической аппроксимации тесно связана со многими задачами кибернетики, возникшими в последние годы, как-то распознавание образов, дуальное управление и т. п. Цыпкиным же [2] была дана интерпретация этой задачи как задачи об устойчивости (стохастической) некоторой нелинейной неавтономной стохастической импульсной системы регулирования специального вида (рис. 1а). Отсюда естественно вытекало и обобщение задачи Роббинса—Монро на случай непрерывного поиска — этому случаю соответствует непрерывная система регулирования с аналогичной структурой (рис. 2а).

В настоящей работе проводится дальнейшее обобщение задачи Роббинса—Монро в направлении усложнения структуры соответствующих систем регулирования. Для дискретного варианта задачи структурная модель такой системы регулирования приведена на рис. 1б, а для непрерывного варианта, — на рис. 2б. Показано, что алгоритм Роббинса—Монро, решающий «классическую» задачу о стохастической аппроксимации, решает и обобщенную в указанном смысле задачу при тех же ограничениях на случайную величину ξ .

В работе подробно рассматривается дискретный вариант задачи. Для непрерывного варианта в силу его аналогии с дискретным приводится лишь постановка задачи и основной результат.

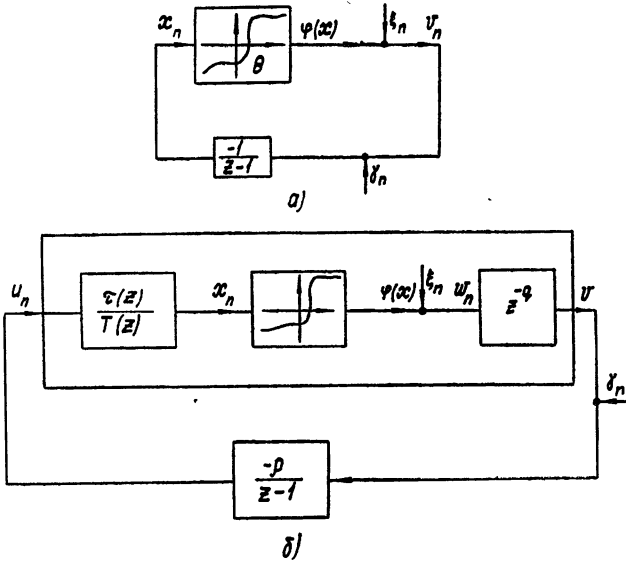


Рис. 1.

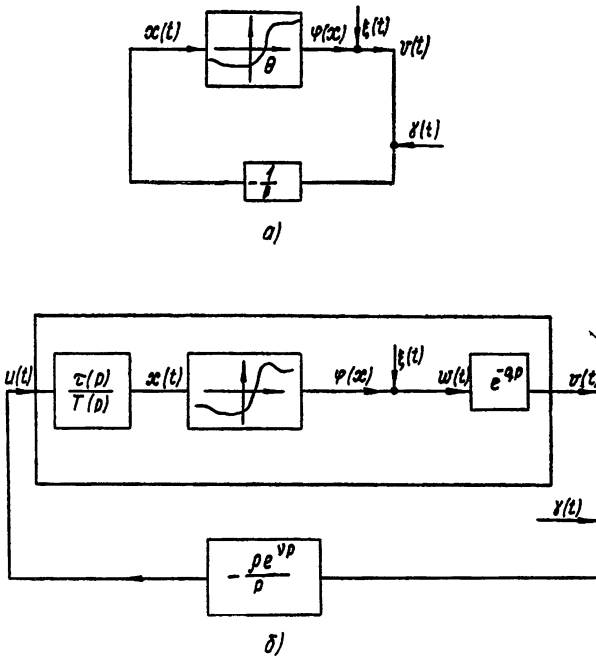


Рис. 2.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ДИСКРЕТНОМ ВАРИАНТЕ

Рассматривается нелинейный стохастический объект с управляемым входным воздействием $\{u_n\}$, неуправляемым стохастическим воздействием $\{\xi_n\}$ и выходом $\{v_n\}$ ($n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$).

Выходная переменная $\{v_n\}$ связана с входными переменными разностным уравнением следующего вида:

$$v_n = w_{n-q} \quad (q \geq 0), \quad (1)$$

$$\omega_n = \varphi(x_n) + \xi_n, \quad (2)$$

$$T_0 x_n + T_1 x_{n-1} + \dots + T_s x_{n-s} = \tau_0 u_n + \tau_1 u_{n-1} + \dots + \tau_s u_{n-s}, \quad (3)$$

где $\{x_n\}$, $\{\omega_n\}$ — «внутренние» переменные объекта.

Структурная модель объекта представлена на рис. 1б. Состоянием объекта (1) — (3) [3] в момент k служит s -вектор $(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-s+1})$.

Будем предполагать, что в момент $n = 0$ объект находится в состоянии M^0

$$(x_0^0, x_{-1}^0, \dots, x_{-s+1}^0) \quad (4a)$$

и что

$$u_n = 0 \quad (n \leq 0). \quad (5)$$

Кроме того, мы постулируем следующие свойства объекта.

Нелинейность $\varphi(x)$.

1) Существует такое число Θ , что

$$\varphi(\Theta) = 0, \quad (6a)$$

а при $x \neq \Theta$

$$\varphi(x) (x - \Theta) > 0. \quad (6б)$$

2) Существует такая константа $R < \infty$, что при всех x

$$|\varphi(x)| \leq R. \quad (6в)$$

3) Для любого $\delta > 0$ существует такое $\Delta(\delta) > 0$, что

$$|\varphi(x)| > \Delta, \quad (6г)$$

если $|x - \Theta| > \delta$.

Линейная часть объекта.

1) Нули полинома

$$T_s(z) \equiv T_0 z^s + T_1 z^{s-1} + \dots + T_s \quad (7a)$$

расположены внутри единичного круга.

$$2) T_0 \neq 0, \quad \sum_0^s \tau_i^2 \neq 0. \quad (7б)$$

Случайный процесс $\{\xi_n\}$.

Случайный процесс $\{\xi_n\} = \xi_n(\lambda)$ определяется обычным образом как функция двух переменных — целочисленного n и λ , причем λ есть элемент некоторого множества Λ , на котором определена σ -алгебра и вероятностная мера $P(\lambda)$ [4] и которое называется вероятностным пространством.

При фиксированном элементе $\lambda \in \Lambda$ получаем функцию одного переменного n — реализацию случайного процесса.

Согласно (1), (2) выходной процесс v_n , а также процесс w_n суть случайные процессы, заданные на том же вероятностном пространстве Λ (так что, строго говоря, следует писать $v_n(\lambda)$, $w_n(\lambda)$). Пусть Λ_0 — некоторое подмножество Λ (входящее в σ -алгебру). Обозначим через E_{Λ_0}

оператор условного математического ожидания по Λ_0 :

$$E_{\Lambda_0} s(\lambda) = \int_{\Lambda_0} s(\lambda) dP(\lambda).$$

Будем также обозначать через ξ_k ($k+1$)-вектор (ξ_0, \dots, ξ_k) , а через $E(\lambda)$ — математическое ожидание $s(\lambda)$ по множеству $\Lambda(\xi_k)$, определенному условием $\xi_i(\lambda) = \xi_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$).

Требование к случайному процессу $\{\xi_n\}$ можно теперь сформулировать так:

$$\begin{aligned} E_{\xi_{n-1}} \xi_n &= 0 \quad (j = 1 + q, 2 + q, \dots, n), \\ E_{\Lambda} \xi_n^2 &\leq \sigma^2 < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, задан объект, описывающийся уравнениями (1)–(5), (6а)–(6г), (7а), (7б) и (8). В каждый момент времени n известно значение выхода w_n , и в каждый момент времени мы можем задавать значение входного процесса u_n . Под обобщенной задачей о стохастической аппроксимации будем понимать нахождение алгоритма f

$$u_n = f(v_{n-1}, v_{n-2}, \dots; u_{n-1}, u_{n-2}, \dots), \quad (9)$$

не зависящего от значений каких бы то ни было параметров объекта и такого, что процесс $\{u_n\}$ осуществлял бы поиск корня Θ уравнения

$$\varphi(x) = 0. \quad (10)$$

Точнее задача формулируется так. Найти алгоритм (9) такой, что случайный процесс $\{x_n\}$, порожденный в силу (2), (3) процессом $\{u_n\}$, сошелся по вероятности [4] к корню уравнения (10)

$$\lim_n \{x_n\}^{(p)} = \Theta. \quad (11)$$

Ниже (разделы 2, 3) будет доказано, что эту задачу решает алгоритм Роббинса—Монро [1]:

$$u_{n+1} = u_n - \gamma_n v_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (12a)$$

где $\{\gamma_n\}$ — знакопостоянная последовательность (или содержащая только конечную знакопеременную подпоследовательность), причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty. \quad (13a)$$

2. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ (ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ)

Зададим алгоритм поиска вида (12а)

$$u_{n+1} = u_n - \operatorname{sgn} \left(\sum \tau_i / \sum T_i \right) \gamma_n v_n, \quad (12б)$$

где $\gamma_n > 0$ и удовлетворяет вышеприведенным условиям (13а) при $n \geq 0$. Кроме того, условимся считать

$$\gamma_n = 0 \quad (\text{при } n < 0). \quad (13б)$$

Алгоритм (12а) порождает в силу (1)–(3) случайный процесс $\{x_n(\lambda)\}$ ($\lambda \in \Lambda$). Структурная модель системы (1)–(3), (12б) изображена на рис. 1б. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Случайный процесс $\{x_n(\lambda)\}$, порождаемый алгоритмом (12б), (13а), сходится по вероятности к значению Θ .

Прежде чем перейти к доказательству, приведем необходимые в дальнейшем факты из теории линейных разностных уравнений и докажем несколько лемм.

Из равенств (1) — (4а), (12б), (13б) вытекает

$$T_0(x_n - x_{n-1}) + T_1(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + T_s(x_{n-s} - x_{n-s-1}) = \tag{14a}$$

$$= -\rho(\tau_0 y_{n-1-q} + \tau_1 y_{n-2-q} + \dots + \tau_s y_{n-s-q-1});$$

$$y_n = \gamma_n w_n = \gamma_n(\varphi(x_n) + \xi_n), \tag{4б}$$

$$x(0) = x_0, \quad x_{-1} = x_{-1}^0, \dots, \quad x_{-s+1} = x_{-s+1}^0,$$

где для сокращения написания у всех переменных $x_i(\lambda)$ опущены скобки с параметром λ и введено обозначение $\rho = \text{sgn}(\sum \tau_i / \sum T_i)$.

Из (14а) вытекает [3], что

$$x_n = -\rho \sum_{m=0}^{n-q-1} H(n-m) y_m + C_0(M_0) + f(n, M_0), \tag{15a}$$

где $H(n)$ — оригинал z — преобразования от функции

$$W(z) = \frac{\tau_0 z^s + \tau_1 z^{s-1} + \dots + \tau_s}{z^q(z-1)(T_0 z^s + T_1 z^{s-1} + \dots + T_s)}, \tag{16a}$$

а функции $C_0(M_0)$ и $f(n, M_0)$ таковы, что

$$|f(n, M_0)| \leq C_1(M_0) |\tilde{z}|^n, \tag{17a}$$

где \tilde{z} — максимальный по модулю нуль полинома $T_s(z)$,

$$C_0 \rightarrow 0, \quad C_1 \rightarrow 0 \quad (\text{при } \sum_{i=-s+1}^0 |x_i| = \|M_0\| \rightarrow 0). \tag{17б}$$

Пусть Q — некоторое натуральное число, большее $1 + q$, и $N^* = s + Q$. Определим случайный процесс $x_n(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$, $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) следующим образом:

$$T_0(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}) + T_1(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-2}) + \dots + T_s(\bar{x}_{n-s} - \bar{x}_{n-s-1}) = \tag{14б}$$

$$= -\rho(\tau_0 \bar{y}_{n-1-q} + \tau_1 \bar{y}_{n-2-q} + \dots + \tau_s \bar{y}_{n-s-1-q}),$$

$$y_k = \begin{cases} \gamma_k(\bar{\varphi}(\bar{x}_k) + \bar{\xi}_k) & (\text{если } k > N^*) \\ \Omega_k(M_0, Q) & (\text{если } 0 < k \leq N^*), \\ 0 & (\text{если } k \leq 0) \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\bar{\gamma}_k = \gamma_{k-N^*}, \quad \bar{\xi}_k = \xi_{k-N^*}, \quad \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x - \Theta), \tag{19}$$

а функция Ω определяется следующими условиями:

$$\Omega(k) = 0 \quad (k = N^* - s - q - 1, \dots, N^* - 1, N^*); \tag{20}$$

$$\bar{x}_0 = \bar{x}_{-1} = \dots = \bar{x}_{-s+1} = 0, \tag{21}$$

$$\bar{x}_{N^*-j} = x_{-j} - \Theta \quad (j = 0, 1, \dots, s-1).$$

Условие (20) означает, что управляющая функция $\bar{y}_k = \Omega_k$ переводит за N^* шагов систему (14б) из нулевого начального состояния $\bar{M}_0 = (0, \dots, 0)$ в состояние \bar{M}_{N^*} , совпадающее с точностью до сдвига на Θ с состоянием M_0 исходной системы; причем на последних $s + q + 1$ шагах оно тождественно равно нулю.

Такое управление всегда существует (при соответствующем Q), если система «полностью управляема» по Калману [5]. Последнее же обеспечивается условием (76).

Нетрудно показать, что при $n > N^*$

$$\bar{x}_n(\lambda) = x_{n-N^*}(\lambda) - \Theta. \quad (22)$$

Действительно, при $n > N^*$ реализации случайного процесса $\bar{x}_n(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (14б), (18)–(20) при начальных условиях (21) в момент $n = N^*$. Согласно теореме единственности эти условия однозначно определяют $x_n(\lambda)$ при $n > N^*$ и для любых $\lambda \in \Lambda$.

Замена переменных $\bar{y}_n = y_{n-N^*}$, $\bar{x}_n = x_{n-N^*} - \Theta$ и независимого переменного $\bar{n} = n - N^*$ переводит (с учетом (19)) систему (14б), (18) при $\bar{n} > N^*$ в систему (14а) при $n > 0$, а начальные условия (21) в (4б). При этом условие (20) переходит в условие $\bar{y}_n = 0$ ($n \leq 0$). Следовательно, при $n > N^*$ будет выполняться равенство (22). Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1. Сходимость процесса $x_n(\lambda)$ к Θ эквивалентна сходимости процесса $\bar{x}_n(\lambda)$, определяемого (14б), (18)–(21), к нулю.

Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать утверждение, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n^{(p)} = 0. \quad (23)$$

Доопределим случайный процесс $\bar{\xi}_n(\lambda)$ в моменты $0 \leq n \leq N^*$, положив $\xi_n = 0$. Согласно (8а), (19) при $n \geq 0$

$$\begin{aligned} E \bar{\xi}_n &= 0 \quad (j = 1 + q, 2 + q, \dots, n), \\ E \bar{\xi}_n^2 &\leq \sigma^2 < \infty \end{aligned} \quad (24)$$

$$(\bar{\xi}_{n-j} = (\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_{n-j}); \quad n = 1, 2, \dots).$$

Аналогично соотношениям (15а)–(17б) для процесса $\bar{x}_n(\lambda)$ при $n > N \geq 0$ будем иметь

$$\bar{x}_n(\lambda) = -\rho \sum_{m=N-q-1}^{n-q-1} H(n-m) \bar{y}_m + C_0(\bar{M}_N) + f(n-N, \bar{M}_N), \quad (15б)$$

где \bar{M}_N — вектор состояния $(\bar{x}_N, \bar{x}_{N-1}, \dots, \bar{x}_{N-s+1})$, а C_0 и f — те же функции, что и в (15а).

Для упрощения обозначений временно опустим черту над переменными (x_n, y_n, φ_n и т. д.), помня, однако, что дальше в этом разделе речь идет о вспомогательном процессе.

Введем еще некоторые обозначения. Представим $W(z)$ из (16а) в виде

$$W(z) = \frac{k_0 z^{-q}}{z-1} + K(z), \quad K(z) = \sum_{i=1}^s \frac{k_i z^{-q}}{z-z_i}, \quad (166)$$

где z_i — полюса $W(z)$ (нули $T_s(z)$), по модулю меньшие единицы, а $k_0 = \sum \tau_i / \sum T_i$. Очевидно, [3] существует такая константа C_2 , что

$$\sup_{|z|=1} |K(z)| \leq C_2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(e^{i\omega})|^2 d\omega \leq C_2^2. \quad (25)$$

Обозначим

$$y_{N,T}(n) = \begin{cases} y_n & (\text{если } N \leq n \leq T+N) \\ 0 & (\text{если } n > T+N \text{ или } n < N) \end{cases}, \quad (26)$$

а через $Y_{N,T}(e^{i\omega})$ — фурье-изображение $y_{N,T}(n)$. И, наконец, обозначим

$$\tilde{\rho}_T(\xi_{N-q-1}) = E_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} x_n(\lambda) y_n(\lambda), \quad (27)$$

$$\rho_T = E_{\Lambda} \sum_{n=0}^T x_n(\lambda) y_n(\lambda). \quad (28)$$

Лемма 2. Для любого $N \geq 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_T(\xi_{N-q-1}) &\leq -\frac{|k_0|}{2} E_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 + \left[E_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[|C_0(M_N)| + \sqrt{2} (R^2 + \sigma^2)^{1/2} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \gamma_m \right] + \\ &+ 2 \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n^2 \bar{C}_2 (R^2 + \sigma^2) + \left(\sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n^2 \right)^{1/2} \left[\sqrt{2} C_1^{1/2} (R^2 + \sigma^2)^{1/2} \times \right. \\ &\left. \times (1 + |\bar{z}|)^{-1/2} + R\sigma C_2 \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \gamma_m \right] + L(N, N^*), \end{aligned} \quad (29a)$$

где $L(N, N^*) = 0$ при $N > N^* + q + 1$.

Согласно (15б), (16а), (26) при $N+T \geq n \geq N \geq 0$

$$\begin{aligned} x_n &= -|k_0| \sum_{m=-\infty}^{n-q-1} y_{N,T}(m) - \rho \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k(n-m) y_{N,T}(m) + \\ &+ C_0(M_N) + f(n-N, M_N) - |k_0| \sum_{N-q-1}^{N-1} y_n - \rho \sum_{N-q-1}^{N-1} k(n-m) y_m, \end{aligned}$$

где $k(n)$ — функция-оригинал от $K(z)$. Тогда

$$\tilde{\rho}(\xi_{N-q-1}) = -|k_0| E_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{n-q-1} y_{N,T}(m) y_{N,T}(n) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} k(n-m) y_{N,T}(m) y_{N,T}(n) + C_0(M_N) \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} y_n + \\
 & + \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} f(n-N) y_n - |k_0| \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} y_m \sum_{n=N}^{N+T} y_n - \quad (296) \\
 & -\rho \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} k(n-m) y_m y_n.
 \end{aligned}$$

Используя равенство Парсевяля для решетчатых функций [3] и учитывая (25), (26), (6в), (8), получим при $N > N^* + q + 1$

$$\begin{aligned}
 & \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} k(n-m) y_{N,T}(n) y_{N,T}(m) \right] \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(e^{j\omega})| \times \\
 & \times \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} |Y_{N,T}(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq \frac{C_2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} |Y_{N,T}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \quad (30) \\
 & = C_2 \sum_{n=N}^{N+T} \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} y_n^2 \leq 2C_2(R^2 + \sigma^2) \sum_N^{N+T} \gamma_n^2.
 \end{aligned}$$

Используя, кроме того, условия (7а) и (24), получим следующие неравенства для $N > N^* + q + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} f(n-N) y_n \right| \leq \left(\sum_{n=N}^{N+T} f^2(n-N) \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{m=N}^{N+T} y_m^2 \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq C_1^{1/2}(M_N) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{z}|^k \right)^{1/2} \cdot \left(\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} y_n^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} C_1^{1/2}(M_N) \times \quad (31а) \\
 & \times (1 - |\tilde{z}|)^{-1/2} (R^2 + \sigma^2)^{1/2} \left(\sum_N^{N+T} \gamma_n^2 \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right) \leq \left[\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (31б)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \sum_{n=N}^{N+T} y_m y_n = \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left[\sum_{m=N-q-1}^{N-1} y_m \left(\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-1}} \sum_{n=N}^{N+T} y_n \right) \right] \leq \\
 & \leq \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left\{ \sum_{m=N-q-1}^{N-1} |y_m| \left[\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-1}} \left(\sum_N^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \leq \mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} |y_m| \times \quad (31в) \\
 & \times \left[\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_N^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2} \leq \sqrt{2} (R^2 + \sigma^2)^{1/2} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \gamma_m \left[\mathop{\mathbb{E}}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_N^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} k(n-m) y_n y_m &\leq \sum_{n=N}^{N+T} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} |k(n-m)| \gamma_n \gamma_m \times \\
 \times \left| \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} (\varphi_m + \xi_m)(\varphi_n + \xi_n) \right| &= \sum_{n=N}^{N+T} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} |k(n-m)| \gamma_m \gamma_n \times \\
 \times \left| \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \xi_m \varphi_n \right| &\leq R \sigma \sum_{n=N}^{N+T} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} |k(n-m)| \gamma_n \gamma_m \leq R \sigma C_2 \times \\
 \times \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \gamma_m \left(\sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n^2 \right)^{1/2}. &
 \end{aligned} \tag{32}$$

Применим равенство Парсваля к первому слагаемому в (29б):

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{n-q-1} y_{N,T}(m) y_{N,T}(n) &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-qi\omega} (e^{i\omega} - 1)^{-1} \times \\
 \times |Y_{N,T}(e^{i\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-qi\omega} - e^{i\omega}) (e^{i\omega} - 1)^{-1} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} |Y_{N,T}(e^{i\omega})|^2 d\omega + \\
 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-j\omega})^{-1} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} |Y_{N,T}(e^{i\omega})|^2 d\omega &= J_{N,T} + \\
 + \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^n y_{N,T}(m) y_{N,T}(n). &
 \end{aligned} \tag{33a}$$

Существует такая константа $\bar{C}_2 > C_2$, что $|e^{-qi\omega} - e^{i\omega}| |e^{i\omega} - 1|^{-1} \leq \bar{C}_2 - C_2$ при $\omega \in [-\pi, \pi]$, так что при $N > N^* + q + 1$

$$J_{N,T} \leq (\bar{C}_2 - C_2) \sum_{n=N}^{N+T} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} y_n^2 \leq 2(\bar{C}_2 - C_2) (R^2 + \sigma^2) \sum_N^{N+T} \gamma_n^2. \tag{33б}$$

Легко проверить также, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^n y_{N,T}(m) y_{N,T}(n) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2. \tag{33в}$$

Итак, подставляя (33б), (33в) в (33а), а затем неравенства (30) — (33а) в (29б), приходим к (29а) для $N > N^* + q + 1$. Как легко показать, правая часть неравенства (29а) для случая $N \leq N^* + q + 1$ получается отсюда прибавлением константы $L > 0$.

Лемма 3. Существуют положительные константы такие C_3, C_4 , что для любых $N \geq 0, T > 0$

$$0 \leq \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \varphi(x_n) \leq C_3, \tag{34}$$

$$\mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 \leq C_4. \quad (35)$$

Покажем сначала, что

$$\tilde{\rho}_T(\xi_{N-q-1}) = \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \varphi(x_n) + A(N, N^*), \quad (36)$$

где $A(N, N^*) = 0$ при $N > N^*$. Действительно, при $N > N^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} x_n y_n &= \sum_{n=N}^{N+T} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \gamma_n (\varphi_n + \xi_n) = \\ &= \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n \left\{ \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \left[\mathbb{E}_{\xi_{n-q-1}} (x_n \varphi_n + x_n \xi_n) \right] \right\} = \\ &= \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \mathbb{E}_{\xi_{n-q-1}} x_n \varphi_n = \sum_{n=N}^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \varphi(x_n). \end{aligned} \quad (37a)$$

Используя здесь равенство $\mathbb{E}_{\xi_{n-q-1}} x_n \xi_n = 0$ следует из факта независимости x_n от ξ_{n-j} ($j = 1, 2, \dots, q+1$) и условия (8). Аналогично в случае $0 \leq N \leq N^*$ получим (согласно (18))

$$\mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \sum_{n=N}^{N+T} x_n y_n = \sum_{n=N^*}^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \varphi_n + \sum_{n=N}^{N^*-1} x_n \Omega_n. \quad (37b)$$

Подставляя (36) в (29a), получим ($C_3 \equiv 2R^2 + 2\sigma^2$)

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_N^{N+T} \gamma_n \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} x_n \varphi_n &\leq A(N, N^*) + L(N, N^*) - \frac{1}{2} |k_0| \times \\ &\times \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 + [|C_0(M_N)| + \sqrt{C_5} \sum_{m=N-q-1}^{N-1} \gamma_m] \left[\mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n \right)^2 \right]^{1/2} + \\ &+ \bar{C}_2 C_5 \sum_N^{N+T} \gamma_n^2 + [C_1^{1/2}(M_N) C_5^{1/2} (1 - |\tilde{z}|)^{-1/2} + R \sigma C_2 \sum_{N-q-1}^{N-1} \gamma_m] \left(\sum_{n=N}^{N+T} y_n^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда в силу (18), (21) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Lambda} \left(\sum_{n=0}^T y_n \right)^2 &\leq 2 |k_0|^{-1} \left[\bar{C}_2 C_5 \sum_0^{\infty} \gamma_n^2 + C_1^{1/2}(M_0) C_5^{1/2} (1 - |\tilde{z}|)^{-1/2} \right] \times \\ &\times \left(\sum_0^{\infty} \gamma_n^2 \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{4} C_4, \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}} \left(\sum_N^{N+T} y_n \right)^2 \leq 2 \mathbb{E}_{\Lambda} \left(\sum_0^{N+T} y_n \right)^2 + 2 \mathbb{E}_{\Lambda} \left(\sum_0^N y_n \right)^2 \leq C_4. \quad (39b)$$

Из (35), (36), (37а, б), (38), (39а, б) следует (34). Лемма доказана.

Лемма 4. При любом $N \geq 0$

$$\mathbb{E}_{\xi_N} |x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0 \quad (\text{при } n \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Из (15б), (16б) следует, что при $n > N + q + 1$

$$x_n = -|k_0| \sum_{N-q-1}^{n-q-1} y_m - \rho \sum_{N-q-1}^{n-q-1} k(n-m) y_m + C_0(M_N) + f(n-N, M_N), \quad (41)$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\xi_N} |x_{n+1} - x_n| &\leq |k_0| \mathbb{E}_{\xi_N} |y_{n-q}| + \sum_{m=N-q-1}^{n-q} |k(n+1-m) - k(n-m)| \times \\ &\times \mathbb{E}_{\xi_N} |y_m| + |f(n+1-N) - f(n-N)|. \end{aligned}$$

Так как $\mathbb{E}_{\xi_N} |y_m| \leq \left(\mathbb{E}_{\Lambda} |y_m|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{C_5} \gamma_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то в силу свойств функции $k(n)$ ($k(n)$ есть оригинал от $K(z)$ из (16б)) при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=N-q-1}^{n-q-1} |k(n-m)| \mathbb{E}_{\xi_N} |y_m| \rightarrow 0. \quad \text{Это и доказывает (40).}$$

Обозначим через $\Lambda_{\delta, k}(n)$ подмножество Λ , определяемое условием

$$|x_n(i)| \leq \delta, \quad |x_{n-1}(i)| \leq \delta, \dots, |x_{n-k+1}(i)| \leq \delta. \quad (42)$$

Лемма 5. Для любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно найти такое $N = N(\varepsilon, \delta)$, что

$$\text{mes } \Lambda_{\delta, k}(N) \geq 1 - \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, s), \quad (43)$$

причем N можно выбрать больше любого натурального числа.

Покажем сначала, что (43) справедливо для $k = 0$. Так как в силу (34) положительный ряд $\sum_0^{\infty} \gamma_n \mathbb{E}_{\Lambda} x_n \varphi_n$ сходится и имеет место (18), существует такая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, что

$$\mathbb{E}_{\Lambda} x_{n_i} \varphi_{n_i} \rightarrow 0 \quad (\text{при } i \rightarrow \infty) \quad (44)$$

Обозначим эту подпоследовательность натуральных чисел через Γ . Согласно (6б), (6г) и (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\Lambda} x_n \varphi_n &= \int_{\Lambda_{\delta, 0}(n)} x_n \varphi_n dP + \int_{\Lambda - \Lambda_{\delta, 0}(n)} x_n \varphi_n dP \geq \\ &\geq \int_{\Lambda - \Lambda_{\delta, 0}(n)} x_n \varphi_n dP \geq \Delta \delta [1 - \text{mes } \Lambda_{\delta, 0}(n)]. \end{aligned}$$

Согласно (44)

$$\text{mes } \Lambda_{\delta, 0}(n) \rightarrow 1 \quad (\text{при } n \rightarrow \infty, n \in \Gamma). \quad (45)$$

Покажем теперь справедливость (43) при $k = s$, откуда уже будет следовать (43) и для любого $k \leq s$.

Введем в рассмотрение следующие подмножества Λ . Через $U_{\delta}(n)$ обозначим множество $\lambda \in \Lambda$, определяемое условием

$$|x_{n+1}(\lambda) - x_n(\lambda)| \leq \delta, \quad (46)$$

а через $U_{\delta, s}(n)$ — множество

$$\Lambda_{\frac{\delta}{s}, \theta} (n-s) \cap U_{\frac{\delta}{s}} (n-s) \cap \dots \cap U_{\frac{\delta}{s}} (n-1). \quad (47a)$$

Очевидно, что $U_{\delta, s}(n) \subset \Lambda_{\delta, s}(n)$. Из известных теорем теории вероятностей [4] вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{mes } \Lambda_{\delta, s}(n) > \text{mes } U_{\delta, s}(n) = \text{mes } \Lambda_{\frac{\delta}{s}, 0} (n-s) \times \\ \times \prod_{j=1}^s \text{mes } U_{\frac{\delta}{s}} (n-j). \end{aligned} \quad (47b)$$

Пусть $\bar{\varepsilon} > 0$ — некоторое достаточно малое число. Согласно (45) можно найти такое $\bar{N}_0 \in \Gamma$, что

$$\text{mes } \Lambda_{\delta, 0}(\bar{N}_0) \geq 1 - \bar{\varepsilon}. \quad (48)$$

Используя лемму 4 и известное неравенство Чебышева [4], можно показать, что существует такое \tilde{N}_j , что имеет место

$$\text{mes } U_{\delta} (n-j) \geq 1 - \bar{\varepsilon} \delta^{-1} \quad (n \geq \tilde{N}_j; \quad j = 1, 2, \dots, s). \quad (49)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{N}_j < \tilde{N}_0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Выберем $\bar{\varepsilon}$ таким, что $(1 - \bar{\varepsilon})(1 - \bar{\varepsilon} \delta^{-1})^s \geq (1 - \varepsilon)$, и положим $N(\varepsilon, \delta) = \tilde{N}_0$. Тогда согласно (47) $\text{mes } \Lambda_{\delta, s}(N) \geq (1 - \bar{\varepsilon})(1 - \bar{\varepsilon} \delta^{-1})^s \geq (1 - \varepsilon)$, что и требовалось доказать. Из того, что неравенство (43) выполняется для всех достаточно больших $N \in \Gamma$, следует, что число N можно выбрать сколь угодно большим.

Доказательство теоремы 1. Нам требуется доказать (23), т. е. [4] что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon, \delta) > 0$, что при $n > N$

$$\text{mes } \Lambda_{\delta}(n) \geq (1 - \varepsilon), \quad (50a)$$

где $\Lambda_{\delta}(n)$ — множество $\lambda \in \Lambda$, определяемое условием

$$|x_n| \leq \delta. \quad (50b)$$

Пусть $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\varepsilon}$ — некоторые сколь угодно малые положительные числа. Согласно лемме 5 можно выбрать такое число $\tilde{N}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta})$, что

$$\text{mes } \Lambda_{\tilde{\delta}, s}(\tilde{N}) \geq (1 - \tilde{\varepsilon}), \quad (51)$$

причем это \tilde{N} можно выбрать сколь угодно большим. Это \tilde{N} , в частности, можно считать таким, что $\tilde{N} > N^*$ и

$$\sum_{\tilde{N}}^{\infty} \gamma_n^2 \leq C_6 \tilde{\delta}; \quad \sum_{N-q-1}^{N-1} \gamma_n \leq C_7 \tilde{\delta} \quad (N > \tilde{N}^*), \quad (52)$$

где C_6, C_7 — некоторые константы.

Пусть $\tilde{\lambda}$ — произвольная точка множества $\Lambda_{\tilde{\delta}, s}(\tilde{N})$. Рассмотрим неравенство (29а) леммы 2 при $N = \tilde{N}$ и $\xi_{N-q-1}^{\sim} = \xi_{N-q-1}^{\sim}(\tilde{\lambda})$. Так как в силу (42) $\sum_{\tilde{N}-s+1}^{\tilde{N}} |x_i(\tilde{\lambda})| \leq \tilde{s}\tilde{\delta}$, то, согласно (176), можно выбрать такую константу $C_8 s^{-1}$, что

$$|C_0(M_{\tilde{N}})|^2 \leq C_8 \tilde{\delta}, \quad |C_1(M_{\tilde{N}})|^2 \leq C_8 \tilde{\delta}. \quad (53)$$

Тогда из (29а), (35), (36), (38) будет следовать

$$\begin{aligned} & \frac{|k_0|}{2} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} \left(\sum_{\tilde{N}}^{\tilde{N}+T} y_n \right)^2 \leq \sqrt{C_4} (C_8 + \sqrt{C_5} C_7) \tilde{\delta} + \\ & + \overline{C_2} C_5 C_6 \tilde{\delta} + [\sqrt{C_7} \sqrt{C_5} (1 - |\tilde{z}|)^{-1/2} + R \sigma C_2 C_7] C_6 \tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (54)$$

Обратимся теперь к равенству (41). Возводя обе части его в квадрат и применяя оператор $\mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}}$, получим после соответствующих оценок

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} x_{N+T}^2 \leq 6 |k_0|^2 \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} \left(\sum_{\tilde{N}}^{\tilde{N}+T} y_n \right)^2 + \\ & + 6 \sum_{-\infty}^{+\infty} k^2(n) \sum_{\tilde{N}-q-1}^{\infty} \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} y_n^2 + 6 |C_0(M_{\tilde{N}})|^2 + 6 |C_1(M_{\tilde{N}})|^2 + \\ & + 6 |k_0|^2 \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} \left[\left(\sum_{\tilde{N}-q-1}^{\tilde{N}-1} y_n \right)^2 + \left(\sum_{n=\tilde{N}+T-q-1}^{\tilde{N}+T} y_n \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

И, следовательно, согласно (25), (51), (52), (53), (54) для любого $T > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\xi_{N-q-1}^{\sim}} x_{N+T}^2 \leq 12 |k_0| C_9 \tilde{\delta} + 6 C_2^2 C_5 C_6 \tilde{\delta} + \\ & + 12 C_8 \tilde{\delta} + 12 q |k_0|^2 C_5 C_6 \tilde{\delta} \equiv C_{10} \tilde{\delta}, \end{aligned} \quad (55)$$

где C_{10} не зависит от \tilde{N} , $\tilde{\delta}$ и T .

Обозначим $\Lambda_{\tilde{\delta}}^*(\tilde{N} + T, \tilde{\lambda})$ множество $\lambda \in \Lambda$:

$$|x_{N+T}^{\sim}| \leq \tilde{\delta}, \quad \xi_{N-q-1}^{\sim} = \xi_{N-q-1}^{\sim}(\tilde{\lambda}). \quad (56a)$$

Тогда из (55) (согласно неравенству Чебышева) будет следовать

$$\text{mes } \Lambda_{\delta}^+(\tilde{N} + T, \tilde{\lambda}) \geq (1 - C_{10} \tilde{\delta} \delta^{-2}). \quad (56б)$$

Используя известные свойства вероятностной меры [4], а также (43), (50б), (56а), получим

$$\text{mes } \Lambda_{\varepsilon}(\tilde{N} + T) \geq (1 - C_{10} \tilde{\delta} \delta^{-2}) (1 - \tilde{\varepsilon}).$$

Пусть теперь $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\delta}$ настолько малы, что

$$(1 - C_{10} \tilde{\delta} \delta^{-2}) (1 - \tilde{\varepsilon}) > (1 - \varepsilon).$$

Тогда получаем (50а) и теорема доказана.

3. НЕПРЕРЫВНЫЙ ВАРИАНТ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Определим непрерывный аналог объекта (1)–(3), (4а), (4б), (5), (6а)–(6г), (7а), (7б), (8).

Пусть $u(t)$ — управляемое входное воздействие объекта, $\xi(t)$ — неуправляемое стохастическое входное воздействие объекта, $v(t)$ — выходной сигнал объекта. Обозначим также через $x(t)$, $w(t)$ переменные, аналогичные x_n , w_n в дискретном варианте. Тогда уравнения, описывающие объект, запишутся в виде

$$v(t) = w(t - q), \quad (57)$$

$$w(t) = \varphi(x(t)) + \xi(t), \quad (58)$$

$$T_0 x^{(s)} + T_1 x^{(s-1)} + \dots + T_s = \tau_0 u^{(s)} + \tau_1 u^{(s-1)} + \dots + \tau_s u. \quad (59)$$

Состоянием такого объекта M_t в момент t служит s -вектор $(x(t), x(t), \dots, x^{(s-1)}(t))$. Нелинейная функция $\varphi(x)$ снова удовлетворяет условиям (6а)–(6г).

Далее предполагаем выполненными следующие условия на линейную часть объекта (59), аналогичные условиям (7а), (7б).

1) Нули λ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) полинома $T_0 p^s + T_1 p^{s-1} + \dots + T_s$ лежат в левой полуплоскости

$$\text{Re } \lambda_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (60)$$

2) Выполнено условие полной управляемости [5]. Для этого достаточно потребовать, как показано в [6], чтобы

$$\tau_0 \lambda_i^s + \tau_1 \lambda_i^{s-1} + \dots + \tau_s \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (61)$$

Аналогично дискретному варианту определяется класс случайных процессов $\xi(t, \lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) [4]. Предполагаем, что существует такое $\nu > 0$, что для любого $t > \nu$ и любой реализации $\xi^*(t)$

$$\mathbb{E}_{\xi^*(t-\nu)} \xi(t, \lambda) = 0, \quad (62)$$

где $\mathbb{E}_{\xi^*(t-\nu)}$ — оператор условного среднего по множеству $\Lambda[\xi^*(t-\nu)]$,

определяемому условием

$$\xi(s, \lambda) = \xi^*(s) \quad (\text{при } 0 \leq s \leq (t - \nu)) \quad (63)$$

Кроме того, для всех $t \geq 0$ должно выполняться неравенство

$$\mathbb{E} \xi^2(t, \lambda) \leq \sigma^2 < \infty. \quad (64)$$

Задача о стохастической аппроксимации в этом варианте формулируется следующим образом. Построить алгоритм

$$u(t) = f[u(s), v(s); \quad 0 \leq s < t],$$

не зависящий от параметров объекта и такой, чтобы случайный процесс $x(t, \lambda)$ ($t > 0, \lambda \in \Lambda$), порождаемый этим алгоритмом в силу (57)–(59), сходиллся по вероятности к Θ .

Для этой задачи справедлив результат, аналогичный теореме 1.

Теорема 2. Алгоритм вида

$$\dot{u}(t) = -\operatorname{sgn} \frac{\tau_s}{T_s} \gamma(t) v(t - \mu),$$

где

$$\gamma(t) > 0, \quad \int_0^{\infty} \gamma(t) dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} \gamma^2(t) dt < \infty, \quad (\mu + q) \geq \nu,$$

при условиях (60)–(64) решает задачу о стохастической аппроксимации.

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 1. (С заменой соответствующих решетчатых функций на обычные, знаков суммы на интеграл и т. п.)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Robbins, Монро, Ann. Math. Stat., 22, 400 (1951).
2. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 27, № 1, 23 (1966).
3. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963
4. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
5. Р. Е. Калман, Тр. I Международного конгресса ИФАК, изд. АН СССР, М., 1961.
6. В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 24, № 1, 3 (1963).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 апреля 1967 г.

A GENERALIZED STOCHASTIC APPROXIMATION PROBLEM

V. A. Broosin

Discret and continuous versions of a generalized stochastic approximation problem are formulated. It is shown that this problem could be solved by Robbins—Monro process which converges with probability one.

* Несколько отличается в этом смысле формулировка лемм, аналогичных леммам 4 и 5 раздела 2.

Лемма 4а. Для любого $T > 0$ и $t_0 > 0$

$$\mathbb{E} |x(t+T) - x(t)| \rightarrow 0 \quad (\text{при } t \rightarrow \infty).$$

Лемма 5а. Пусть $\Lambda_\delta(t) \subset \Lambda$ — множество, определяемое условием

$$|x(t)| < \delta, \quad |\dot{x}(t)| < \delta, \dots, \quad |x^{(s-1)}(t)| < \delta.$$

Тогда по любым сколь угодно малым $\varepsilon > 0, \delta > 0$ найдется такое сколь угодно большое $T(\varepsilon, \delta) > 0$, что $\operatorname{mes} \Lambda_\delta(T) \geq (1 - \varepsilon)$.

Доказательство ее основано на сходимости интеграла $\int_0^{\infty} \gamma(t) x(t) \varphi(t) dt$ и лемме 4а:

УДК 531.391

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЛЕЙНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ш. А. Ахманов, А. И. Черепанов

Рассматривается вопрос о возможности применения теорем об абсолютной устойчивости к анализу релейно-импульсных систем. На примере релейно-импульсной системы второго порядка указанные условия устойчивости сравниваются с необходимыми и достаточными условиями устойчивости, полученными на модели.

Под абсолютной устойчивостью нелинейной импульсной системы автоматического регулирования (НИСАР), структурная схема которой изображена на рис. 1, понимают систему, устойчивую при любых характеристиках нелинейного элемента $\varphi(x)$ заключенных в пределах некоторого угла [1,2]

$$\varphi(0) = 0 \quad 0 < \varphi(x) \quad x < k. \quad (1)$$

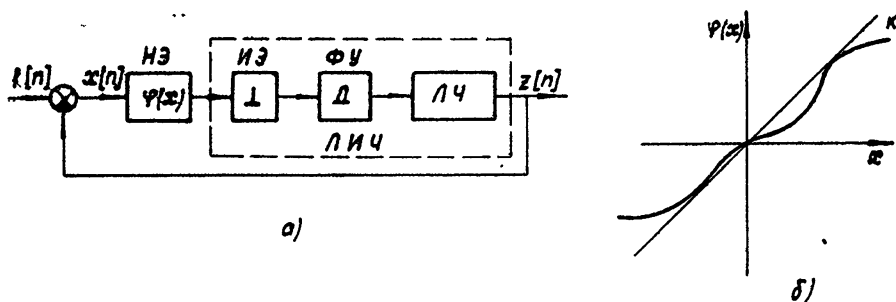


Рис. 1. а) Структурная схема нелинейной импульсной системы автоматического регулирования (НИСАР):

НЭ—нелинейный элемент, ИЭ—импульсный элемент, ФУ—формирующее устройство, ЛЧ—линейная часть, ЛИЧ—линейная импульсная часть.

б) Характер нелинейности.

Для получения более широкой области устойчивости на функцию $\varphi(x)$ налагают дополнительные ограничения

$$k_1 < \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| < k_2. \quad (2)$$

В [2-5] доказан ряд теорем об абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем. Ниже будем рассматривать вопрос о применимости этих теорем для практической оценки устойчивости релейно-импульсных систем регулирования. Эта оценка сводится к сравнению областей устойчивости, полученных с помощью теорем об абсолютной

устойчивости [2-5], с областями устойчивости, полученными экспериментально и по методу, изложенному в [6].

Согласно теоремам работы [5] для абсолютной устойчивости НИСАР рассматриваемого класса (условия (1), (2) при $k_2 = \infty$) достаточно выполнения условия

$$\operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) \left(1 + q \frac{e^{j\bar{\omega}} - 1}{e^{j\bar{\omega}}} \right) + \frac{1}{k} - q \frac{k_1}{2} |(e^{j\bar{\omega}} - 1) W^*(j\bar{\omega})|^2 \geq 0. \quad (3)$$

Поскольку для релейно-импульсной системы (рис. 2б) $k_2 = \infty$, $k_1 = 0$, условие устойчивости будет

$$\operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) \left(1 + q \frac{e^{j\bar{\omega}} - 1}{e^{j\bar{\omega}}} \right) + \frac{1}{k} \geq 0. \quad (4)$$

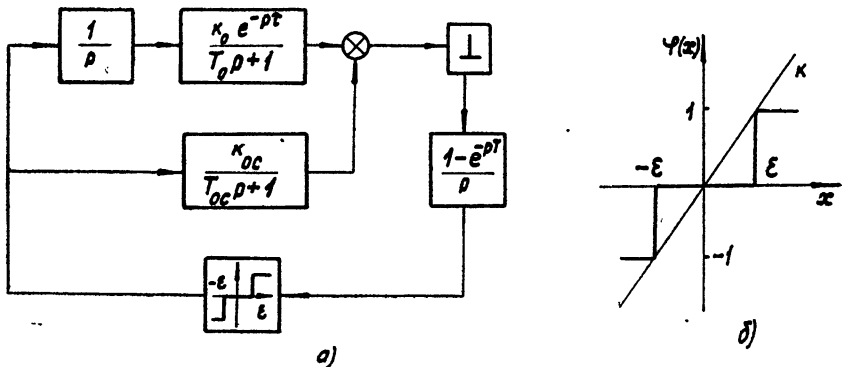


Рис. 2. а) Структурная схема релейно-импульсной системы автоматического регулирования (РИСАР) с корректирующей обратной связью. б) Характеристика реле.

При $q = 0$ получаем известное условие устойчивости Цыпкина [2]. В (3) и (4) $W^*(j\bar{\omega})$ — частотная характеристика линейной импульсной части (ЛИЧ) системы, q — произвольное неотрицательное число.

Для практической оценки устойчивости рассматриваемых систем на основании (4) получим более удобный критерий. Представим (4) в виде

$$\operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) + q[(1 - \cos \bar{\omega}) \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) - \operatorname{Im} W^*(j\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}] + 1/k \geq 0. \quad (5)$$

Введем новую частотную характеристику

$$\bar{W}^*(j\bar{\omega}) = X + jY, \quad (6)$$

где

$$X = \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}), \quad Y = (1 - \cos \bar{\omega}) \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) - \operatorname{Im} W^*(j\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}. \quad (7)$$

Теперь условие (5) будет иметь вид

$$X + qY + 1/k \geq 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) при равенстве нулю представляет прямую (в системе координат X, Y), проходящую через точку $-1/k$ на действительной оси и имеющую угловой коэффициент $1/q$. Эта прямая является прямой Попова. Неравенство (8) требует, чтобы новая (эквивалентная) частотная характеристика $\bar{W}^*(j\bar{\omega})$ лежала справа от прямой Попова.

Заметим, что критерий (4) справедлив для систем с запаздыванием и для релейных систем с несколькими уровнями реле (цифровых систем).

Поскольку не известны в общем виде необходимые и достаточные критерии устойчивости рассматриваемых систем, проведем сравнение критерия (4), (8) с экспериментом и критерием, изложенным в [6] на примере релейно-импульсной системы второго порядка с запаздыванием и с аperiodической обратной связью, структурная схема которой изображена на рис. 2а. Такую структурную схему имеют, например, системы многоканального регулирования или системы с периодическим контролем.

Дискретная передаточная функция ЛИЧ рассматриваемой системы согласно [7] будет

$$W^*(q) = k_0 \left[-T_0 + T(1 - \tau_1) + \frac{T}{e^q - 1} + T_0 \exp[-\alpha(1 - \tau_1)] \right] \times \exp[-q(m+1)] + k_{0c} \left(1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} \right), \quad (9)$$

где T — интервал квантования, k_0 , T_0 — коэффициент усиления и постоянная времени объекта, k_{0c} , T_{0c} — коэффициент усиления и постоянная времени обратной связи

$$\alpha = \frac{T}{T_0}, \quad \beta = \frac{T}{T_{0c}}, \quad \tau = m + \tau_1 \quad (0 < \tau_1 \leq 1).$$

Частотная характеристика ЛИЧ

$$W^*(j\bar{\omega}) = \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega} + j \operatorname{Im} W^*(j\bar{\omega})) = \operatorname{Re} W_0(j\bar{\omega}) \cos[(m+1)\bar{\omega}] + \operatorname{Im} W_0(j\bar{\omega}) \sin[(m+1)\bar{\omega}] + \operatorname{Re} W_{0c}^*(j\bar{\omega}) + j \{ \operatorname{Im} W_0^*(j\bar{\omega}) \cos[(m+1)\bar{\omega}] - \operatorname{Re} W_0^*(j\bar{\omega}) \sin[(m+1)\bar{\omega}] + \operatorname{Im} W_{0c}^*(j\bar{\omega}) \}, \quad (10)$$

где

$$\operatorname{Im} W_0^*(j\bar{\omega}) = k_0 \left\{ T_0 \frac{(1 - e^{-\alpha}) \sin \bar{\omega}}{1 + e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega}} \exp[-\alpha(1 - \tau_1)] - T \frac{\sin \bar{\omega}}{2(1 - \cos \bar{\omega})} \right\},$$

$$\operatorname{Re} W_0^*(j\bar{\omega}) = k_0 - T_0 - \frac{T}{2} + T(1 - \tau_1) +$$

$$+ T_0 \exp[-\alpha(1 - \tau_1)] \frac{(1 - \cos \bar{\omega})(1 + e^{-\alpha})}{1 + e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} \cos \bar{\omega}},$$

$$\operatorname{Re} W_{0c}^*(j\bar{\omega}) = k_{0c} \left[1 - \frac{(1 - \cos \bar{\omega})(1 + e^{-\beta})}{1 + e^{-2\beta} - e^{-\beta} \cos \bar{\omega}} \right],$$

$$\operatorname{Im} W_{0c}^*(j\bar{\omega}) = k_{0c} \frac{(e^{-\beta} - 1) \sin \bar{\omega}}{1 + e^{-2\beta} - 2e^{-\beta} \cos \bar{\omega}}.$$

Эквивалентная частотная характеристика согласно (6), (7) равна

$$\bar{W}^*(j\bar{\omega}) = \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) + j[(1 - \cos \bar{\omega}) \operatorname{Re} W^*(j\bar{\omega}) - \operatorname{Im} W^*(j\bar{\omega}) \sin \bar{\omega}]. \quad (11)$$

На рис. 3 для примера приведено семейство эквивалентных частотных характеристик для различных случаев запаздывания и квантования при $T_0 = 1$ и $k_0 = 1$.

На рис. 4 приведены эквивалентные частотные характеристики системы, изображенной на рис. 2а, для случая $T_0 = 1$, $k_0 = 1$, $T_{0c} = 0,1$ при двух значениях запаздывания $\tau/T = 1$ (сплошные кривые), $\tau/T = 0,5$ (пунктирные кривые) и при четырех значениях k_{0c} , равных $0,25$; $0,5$; $0,75$; 1 .

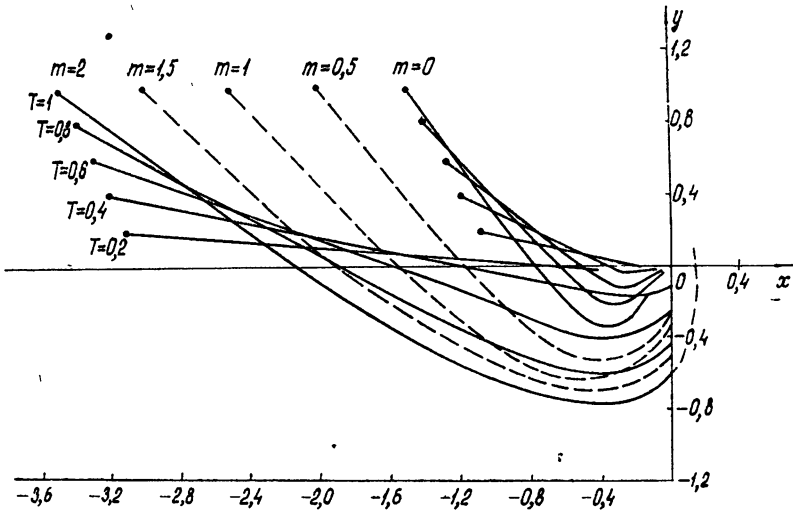


Рис. 3. Эквивалентные частотные характеристики ЛИЧ объекта первого порядка с сервомотором при различных значениях квантования T и относительно запаздывания $m = \tau/T$.

Расчет характеристик и последующая экспериментальная проверка показали, что изменение величины T_{0c} мало сказывается на свойствах системы, поэтому все дальнейшие расчеты и эксперименты проводились при значениях $T_{0c} = 0,1$.

На основе рассчитанных характеристик были построены области устойчивости системы (рис. 5 и 6). На рис. 5 построена область устойчивости системы без обратной связи ($k_{0c} = 0$) в плоскости параметров $\varepsilon = 1/k$, T и τ/T . Область устойчивости системы соответствует значениям параметров, находящихся выше поверхностей 1, 2, 3 и 4. Поверхность 1 построена по критерию (4) при $q = 0$ (критерий работы [2]). Поверхность 2 построена по критерию (4) при $q \neq 0$ (критерий работы [5]). Для сравнения там же построена поверхность 3 по критерию работы [6], использующему метод фазовой плоскости и эквивалентного дополнительного за-

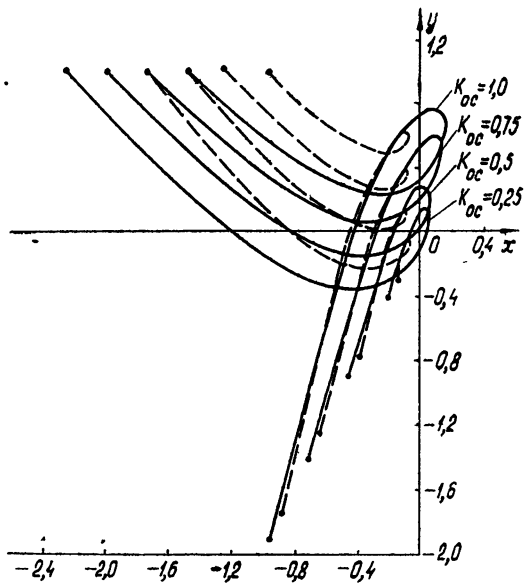


Рис. 4. Эквивалентные частотные характеристики системы, изображенной на рис. 2а при $m=1$ (сплошные кривые) и $m=0,5$ (пунктирные кривые).

паздывания $\tau = T$. Поверхность 4 соответствует результатам, полученным на моделирующей установке.

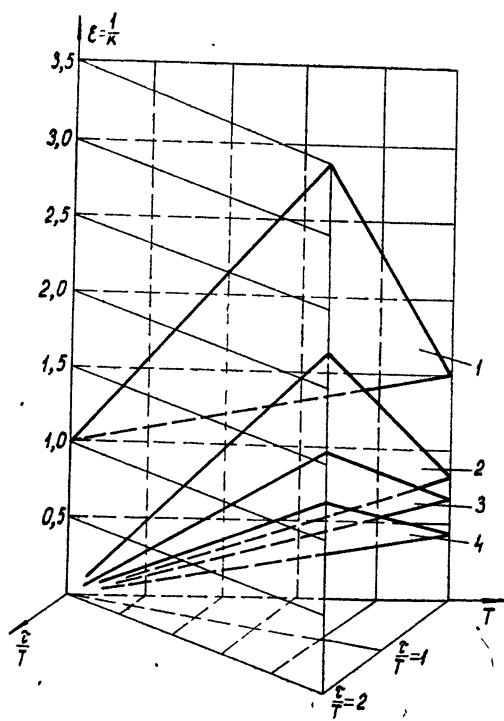


Рис. 5. Области устойчивости РИССАР без корректирующей обратной связи.

тывать, что запас устойчивости, полученный по этому критерию, составляет 80—100% по коэффициенту усиления.

3) Наилучшее совпадение с необходимым и достаточным условием устойчивости релейно-импульсной системы дает метод, изложенный в [6].

На рис. 6 построены области устойчивости системы (рис. 2а) при $T_{0c} = 0,1$ и $T = 1$ в плоскости параметров $\varepsilon = 1/k$, k_{0c} и τ/T . Поверхность 1 соответствует критерию (4) при $q = 0$, поверхность 2 — критерию (4) при $q \neq 0$. Поверхность 3 получена экспериментально.

Построения и расчеты (рис. 6) для релейно-импульсной системы второго порядка с аperiodической обратной связью позволяют сделать следующие выводы.

Следует отметить, что нахождение угла k , определяющего сектор абсолютной устойчивости рассматриваемого класса релейно-импульсных систем, путем моделирования облегчалось из-за специфики указанных систем: угол k не зависит от величины зоны нечувствительности и высоты импульса реле, а зависит только от их соотношения.

Полученные области устойчивости импульсной системы без обратной связи (рис. 5) позволяют сделать следующие выводы.

1) Наиболее удален от условий устойчивости, полученных на модели, критерий (4) при $q = 0$. Для расчета указанного класса релейно-импульсных систем пользоваться им нежелательно.

2) Лучшие результаты дает критерий (4) при $q \neq 0$. Им можно пользоваться для анализа устойчивости рассматриваемых релейно-импульсных систем. При этом следует учи-

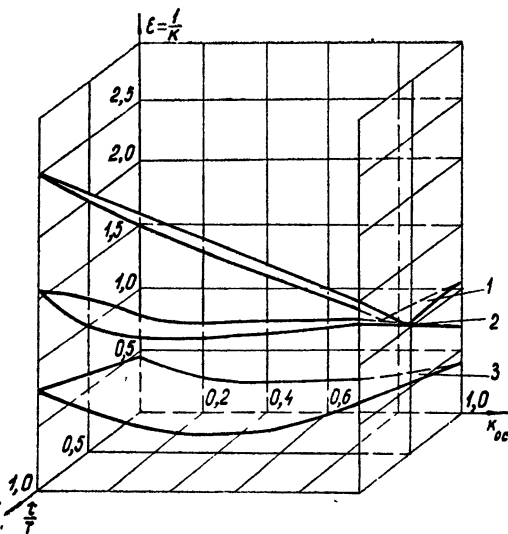


Рис. 6. Области устойчивости РИССАР с коррекцией.

1) Критерий устойчивости (4) при $q = 0$ и $q \neq 0$ совпадают при некоторых параметрах системы в области $T = 0,78$ ($\tau = 0$), $T = 1$ ($\tau/T = 0,48$) (рис. 6). В другой области параметров критерий (4) при $q = 0$ дает значительно завышенный результат.

2) Увеличение коэффициента усилителя обратной связи сначала дает повышение устойчивости (поверхность 2) системы ($k_{0c} < 0,2$ при $\tau/T = 0$, $k_{0c} < 0,3$ при $\tau/T = 1$), а затем понижение ее. Это подтверждается экспериментально (плоскость 3). Здесь также устойчивость системы в начале увеличивается с увеличением k_{0c} ($k_{0c} < 0,3$ при $m = 0$ и $k_{0c} < 0,5$ при $m = 1$), а затем уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963.
2. Я. З. Цыпкин, Тр. 2 Конгресса ИФАК, 2, 63 (1963).
3. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 24, № 12, 1601 (1963).
4. E. I. Jury, B. W. Lee, IEEE Trans. Automat. Control, 9, № 1, 51 (1964).
5. E. I. Jury, B. W. Lee, IEEE Trans. Automat. Control, 9, № 4, 551 (1964).
6. А. И. Черепанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 383 (1967).
7. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию
3 мая 1967 г.

APPLICATION OF ABSOLUTE STABILITY THEOREMS FOR THE RELAY—IMPULSE CONTROL SYSTEMS ANALYSIS

Sh. A. Achmanov, A. I. Cherypanov

Possibility for absolute stability theorems application to the relay-impulse control systems analysis is considered in this paper. For the case of the second order relay-impulse control system the stability conditions pointed in the above theorems are compared with the necessary and sufficient stability conditions obtained on the model

УДК 531.391.

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМЕ С КОНСТРУКЦИОННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В. Г. Климов, М. И. Фейгин

Методом точечных преобразований изучаются вынужденные колебания системы с полигональной петлей гистерезиса. Определяются возможные нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа «сшиваемых» участков фазовых траекторий (С-бифуркации), а также случаи особых бифуркаций В плоскости параметров одностепенной системы с симметричной характеристикой выделяются области существования сложных режимов.

Исследованию динамики систем с полигональной гистерезисной характеристикой посвящены многочисленные работы, решающие задачу как приближенными методами и посредством моделирования уравнений на вычислительных машинах (см. работу [1] и приведенную в ней библиографию), так и с помощью метода точечных преобразований [2]. При этом изучение сложных режимов сводилось лишь к качественному описанию поведения системы при некоторых значениях параметров [3].

Настоящая работа посвящена исследованию сложных режимов и анализу поведения динамической системы с полигональной петлей гистерезиса во всей области изменения параметров. В результате изучения особенностей фазового пространства устанавливаются все возможные случаи нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа «сшиваемых» участков фазовых траекторий, образующих траекторию периодического движения (С-бифуркациями), а также случаи особых бифуркаций. Последние существенно облегчают определение взаиморасположения бифуркационных поверхностей в пространстве параметров.

Выделены области существования сложных режимов в плоскости параметров одностепенной системы с симметричной характеристикой. Численный анализ проведен при помощи ЭЦВМ.

1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ПРОСТЕЙШИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим динамическую систему с одним нелинейным элементом, имеющим полигональную гистерезисную характеристику (рис. 1а),

$$f(x) = \begin{cases} k_+(x-x_+) + f_3 + k_3x_+ & (\text{если } x_+ - 2d_+ \leq x \leq x_+) \\ k_2x + f_2 & (\text{если } x \leq x_+ - 2d_+, \dot{x} < 0) \\ k_-(x-x_-) + f_2 + k_2x_- & (\text{если } x_- \leq x \leq x_- + 2d_-) \\ k_3x + f_3 & (\text{если } x_- + 2d_- \leq x, \dot{x} > 0) \end{cases} \quad (1)$$

Нелинейная зависимость (1) обуславливает кусочную структуру и «двулистность» фазового пространства. Движения, соответствующие

более пологим сторонам полигональной характеристики, происходят в полупространствах $G_+(x > 0)$ и $G_-(x < 0)$. Движения, соответствующие крутым сторонам характеристики, происходят в слое g толщиной $2d_{\pm}$, имеющем ту же размерность, что и фазовое пространство. Местоположение слоя в фазовом пространстве в известном смысле произвольное: оно определяется значением координаты x (x_+ или x_-) фазовой точки в момент ее выхода из полупространства G_+ или G_- при обращении в нуль величины \dot{x} (рис. 1б). Значения k_+ , k_- , d_+ , d_- могут в общем случае зависеть от координат x_+ или x_- .

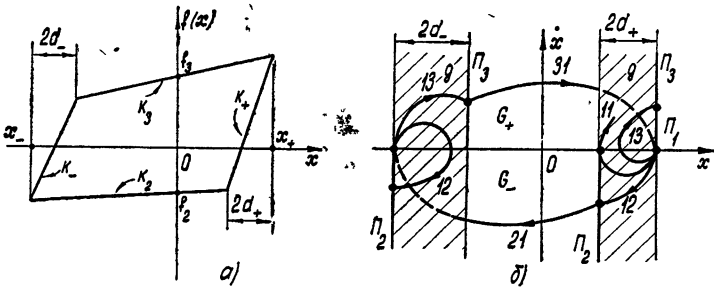


Рис. 1.

Будем рассматривать любое движение в изучаемой кусочно-линейной системе как некоторую последовательность простейших точечных отображений конфигураций Π_i фазового пространства друг в друга или самих в себя. В качестве Π_i целесообразно [4, 5] выбрать конфигурации, на которых происходит шивание фазовых траекторий при их переходе из одной области кусочной линейности в другую. В изучаемом случае это будут:

- а) конфигурация Π_1 ($\dot{x} = 0$), покидая которую фазовая точка попадает в слой g ;
- б) конфигурация Π_2 ($\dot{x} < 0$, $x = x_+ - 2d_+$ или $\dot{x} < 0$, $x = x_-$), покидая которую фазовая точка попадает в область G_- ;
- в) конфигурация Π_3 ($\dot{x} > 0$, $x = x_- + 2d_-$ или $\dot{x} > 0$, $x = x_+$), на которой начинаются участки фазовых траекторий области G_+ .

Следует отметить, что из точек пересечения конфигураций Π_1 , Π_2 и Π_1 , Π_3 не может выходить более одной траектории. Это следует из непрерывности функции x в указанных точках и обеспечивает непрерывность точечных отображений при изменении параметров.

В фазовом пространстве могут реализоваться все девять формально возможных простейших точечных отображений T_{ij} конфигураций Π_i :

$$T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}, T_{33}.$$

Обозначим каждый участок фазовой траектории двузначным числом ij , совпадающим с индексом соответствующего ему преобразования T_{ij} , и будем описывать прохождение фазовой точки по траектории некоторой последовательностью двузначных чисел (рис. 1б). При этом числа 12, 13, 21, 31 описывают обычные участки фазовых траекторий, отображающие конфигурации Π_i друг в друга; числа 11, 22, 33 — участки траекторий, отображающие соответствующие конфигурации сами в себя; числа 23, 32 — участки, возможные в случае $d_{\pm} = 0$ или $d_- = 0$.

Таким образом, любое движение системы, состоящее из вышепер-

численных участков фазовых траекторий, может быть описано последовательностью двузначных чисел, в которой за числом ij может следовать лишь jk .

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ С-БИФУРКАЦИЙ. УРАВНЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа «сшиваемых» участков фазовых траекторий, можно формально описать некоторыми неориентированными подстановками, если соответствующее изменение хода фазовых траекторий не вызывает нарушения непрерывности точечного отображения. В рассматриваемой задаче возможны четыре типа указанных бифуркаций:

$$\begin{array}{ll} C_1: 12.21 - 11 & \text{или} & C'_1: 13.31 - 11 \\ C_2: 12.21 - 11 & \text{или} & C'_2: 13.31 - 11 \\ C_3: 21.12 - 22 & \text{или} & C'_3: 31.13 - 33 \\ C_4: 21.13 - 23 & \text{или} & C'_4: 31.12 - 32 \end{array}$$

Одинаковое формальное описание двух бифуркаций C_1 и C_2 связано с тем, что фазовое пространство состоит только из трех областей кусочной непрерывности: фазовая точка попадает в слой g как из области G_+ , так и из области G_- (рис. 2а, б).

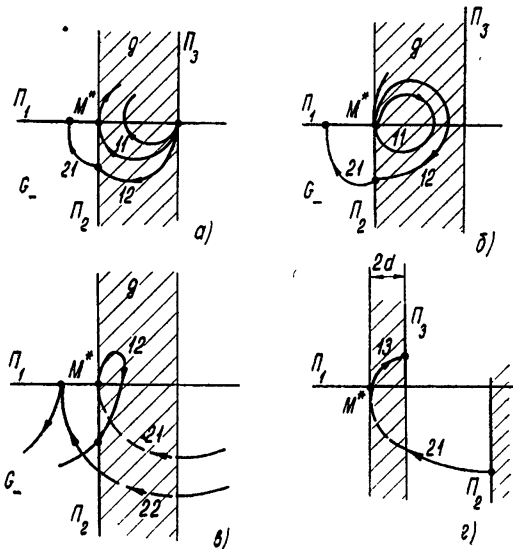


Рис. 2.

Как известно [4], уравнения бифуркационных поверхностей включают в себя уравнения соответствующего периодического движения и некоторые дополнительные условия, при написании которых возможен двойной подход. При первом подходе бифуркационная фазовая траектория рассматривается как граничный случай перехода от более сложного периодического движения к менее сложному. Дополнительные условия сводятся в этом случае к обращению в нуль одного из интервалов времени τ_{ij} движения фазовой точки по исчезающему участку траектории более сложного режима.

При втором подходе бифуркационную фазовую траекторию следует рассматривать как граничный случай перехода от менее сложного периодического режима к более сложному.

Перейдем к подробной характеристике каждого типа бифуркаций, ограничиваясь при этом рассмотрением случаев C_1 — C_4 , так как случаи C'_1 — C'_4 совершенно аналогичны.

Бифуркация C_1 соответствует исчезновению участка фазовой траектории 21 периодического режима ... 12, 21... или появлению участка 21 периодического режима ... 1 1... (рис. 2а). При этом участок 12

является продолжением траектории области G_+ . Дополнительные условия для определения бифуркационной поверхности C_1 в пространстве параметров сводятся к требованию $\tau_{21} = 0$, если существовал режим ...1 2, 2 1..., и $x^* = x_+ - 2d_+$, $(\dot{x})^* = 0$, $(\ddot{x})^* > 0$ при наличии режима ...1 1...

Бифуркация происходит при касании фазовой траекторией слоя g конфигурации Π_2 .

Бифуркация C_2 также соответствует исчезновению участка фазовой траектории 2 1 периодического режима ...1 2.2 1... или появлению участка траектории 2 1 периодического режима ...1 1... (рис. 2б). Однако при C_2 участок траектории 1 2 является продолжением траектории области G_- . Дополнительные условия в первом случае выражаются равенством $\tau_{21} = 0$, а во втором случае уравнениями $x^* = x_-$, $(\dot{x})^* = 0$, $(\ddot{x})^* > 0$.

Бифуркация C_3 соответствует исчезновению участка фазовой траектории 1 2 более сложного периодического режима ...2 1.1 2... или появлению участка траектории 1 2 периодического режима ...2 2... (рис. 2в). При наблюдении движения на плоскости $f(x)$, x бифуркация характеризуется исчезновением или появлением «пичка» в любом месте пологого участка полигональной характеристики. Дополнительные условия для определения бифуркационной поверхности C_3 в пространстве параметров будут: $\tau_{12} = 0$ при наличии режима ...2 1.1 2... и $(\dot{x})^* = 0$, $(\ddot{x})^* = 0$, $(\dot{x})^* < 0$ при наличии режима ...2 2... Рассматриваемому бифуркационному случаю соответствует касание фазовой траектории области G_- конфигураций Π_1 .

Бифуркация C_4 соответствует исчезновению или появлению участка траектории 1 3 в слое g и связана с исчезновением самого слоя (рис. 2г). Дополнительным условием для определения бифуркационной поверхности C_4 в пространстве параметров будет равенство $d = 0$.

Дополнительные условия для определения в плоскости параметров бифуркационных поверхностей $C'_1 - C'_4$ отличаются от вышеописанных лишь соответствующей заменой $x_+ \leftrightarrow x_-$, $d_+ \leftrightarrow d_-$ и изменением знаков первой, отличной от нуля, производной.

3. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ОСОБЫХ С-БИФУРКАЦИЙ

Как и в работе [4], будем называть особыми такие бифуркации, при которых возможно появление или исчезновение более чем одного участка фазовой траектории. Простейшие случаи особых С-бифуркаций соответствуют такому пересечению бифуркационных поверхностей в пространстве параметров, когда они не могут быть продолжены за линию пересечения.

Возможных пересечений бифуркационных поверхностей оказывается двенадцать:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \text{ и } C_3 (\dots 12.21.12 \dots), & C'_1 \text{ и } C'_3 (\dots 13.31.13 \dots) \\
 & C_2 \text{ и } C_3 (\dots 12.21.12 \dots), & C'_2 \text{ и } C'_3 (\dots 13.31.13\dots); & (2) \\
 & C_3 \text{ и } C_2 (\dots 21.12.21 \dots), & C'_3 \text{ и } C'_2 (\dots 31.13.31 \dots) \\
 & C_1 \text{ и } C_4 (\dots 12.21.13 \dots), & C'_1 \text{ и } C'_4 (\dots 13.31.12 \dots) \\
 & C_2 \text{ и } C_4 (\dots 12.21.13 \dots), & C'_2 \text{ и } C'_4 (\dots 13.31.12 \dots). & (3) \\
 & C'_4 \text{ и } C_1 (\dots 31.12.21 \dots), & C'_4 \text{ и } C'_1 (\dots 21.13.31 \dots)
 \end{aligned}$$

Последние шесть случаев пересечений происходят лишь при $d = 0$.

В скобках указан тип периодического движения, область которого заключена между пересекающимися поверхностями.

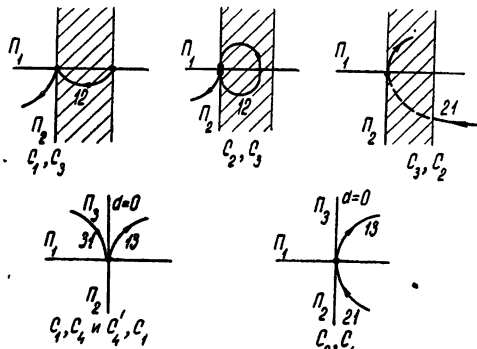


Рис. 3.

Дополнительные связи на параметры системы, которые позволяют определить в пространстве параметров перечисленные пересечения, сводятся к одновременному выполнению дополнительных условий для «пересекающихся» бифуркаций, что требует обращения в нуль производных $x^*(\tau)$ более высокого порядка.

При конкретном исследовании динамической системы тип особой бифуркации легко определяется по знаку первой отличной от нуля производной от функции $x^*(\tau)$ или по известному типу периодического движения в особом случае. На рис. 3 изображено поведение фазовых траекторий, соответствующее левым столбцам особых бифуркаций (2) и (3). Например, особыми бифуркационными случаями простейшего симметричного режима ...1 2.2 1.1 3.3 1... могут быть пересечения C_1 и C_3 ; C_3 и C_2 ; C_2 и C_4 .

4. С-БИФУРКАЦИОННЫЕ ГРАНИЦЫ И ИХ «ИСТОЧНИКИ» В ОДНОСТЕПЕННОЙ СИСТЕМЕ С СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

Каждый тип участка фазовой траектории ij определяет точечное преобразование, связывающее зависимость координаты его начала и конца. Следовательно, всякому периодическому движению в рассматриваемой системе соответствует неподвижная точка некоторой последовательности преобразований, а каждому типу С-бифуркаций соответствует исчезновение или появление вполне определенного участка фазовой траектории в соответствующем периодическом движении.

Для одностепенной системы с симметричной полигональной петлей гистерезиса ($d_+ = d_- = d$, $k_2 = k_3 = k$, $k_+ = k_- = 4k$) уравнения неподвижной точки периодического режима ...1 2.2 1.1 3.3 1... имеют следующий вид [2]:

$$\begin{aligned}
 x_1(t_1) &= \frac{-\omega \cos(\omega t_0)}{2(4-\omega^2)} \sin[2(t_1-t_0)] + \left[x_+ - a_1 - \frac{\sin(\omega t_0)}{4-\omega^2} \right] \times \\
 &\quad \times \cos[2(t_1-t_0)] + \frac{\sin(\omega t_1)}{4-\omega^2} + a_1 = x_+ - 2d, \\
 \dot{x}_1(t_1) &= \frac{-\omega \cos(\omega t_0)}{4-\omega^2} \cos[2(t_1-t_0)] - 2 \left[x_+ - a_1 - \frac{\sin(\omega t_0)}{4-\omega^2} \right] \times \\
 &\quad \times \sin[2(t_1-t_0)] + \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{4-\omega^2}, \\
 x_{II}(t_2) &= \left[\dot{x}_1(t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1-\omega^2} \right] \sin(t_2-t_1) + \\
 &+ \left[x_+ - 2d - a_2 - \frac{\sin(\omega t_1)}{1-\omega^2} \right] \cos(t_2-t_1) + \frac{\sin(\omega t_2)}{1-\omega^2} + a_2 = -x_+,
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{II}(t_2) &= \left[\dot{x}(t_1) - \frac{\omega \cos(\omega t_1)}{1-\omega^2} \right] \cos(t_2-t_1) - \\ &- \left[x_+ - 2d - a_2 - \frac{\sin(\omega t_1)}{1-\omega^2} \right] \sin(t_2-t_1) + \frac{\omega \cos(\omega t_2)}{1-\omega^2} = 0, \\ \omega(t_2-t_0) &= \pi, \end{aligned}$$

где $a_1 = (3/4)(x_+ - d)$, $a_2 = 3d$.

При изменении числа участков фазовых траекторий, образующих траекторию периодического режима ...1 2.2 1.1 3.3 1..., последний может переходить как в более простой режим (система становится при этом линейной), так и в более сложный. С-бифуркации, при которых происходит упрощение исследуемого режима, обозначим \bar{C}_i .

Накладывая дополнительные к уравнениям (4) условия $\tau_{21} = 0$ ($t_2 - t_1 = 0$) или $\tau_{12} = 0$ ($t_1 - t_0 = 0$), получим соответственно уравнения бифуркационных границ \bar{C}_1 и \bar{C}_4 в плоскости параметров (d, ω):

$$d = \left| \frac{1}{4 - \omega^2} \right|, \quad d = 0.$$

Отметим, что в результате указанных бифуркаций будет иметь место симметричное движение, при котором система становится линейной: в первом случае полностью исчезает проскальзывание в системе, а во втором ($d=0$) — нелинейная связь.

Бифуркация $C_1 - C_3$ соответствует усложнение типа периодического режима. Дополнительные условия для составления уравнений бифуркационных границ получаются в этих случаях в виде трансцендентных уравнений, их исследование совместное с уравнениями (4) представляет значительные трудности. Использование современной вычислительной техники при определении местоположения бифуркационных границ в пространстве параметров может снять указанные трудности, если иметь предварительные качественные соображения о характере их возможных взаиморасположений.

Рассмотрим возможные случаи пересечения бифуркационных границ, которые, ограничивая область более сложного периодического движения, соответствовали бы обращению в нуль соседних времен τ_{ij} этого режима [4]. Тип периодического движения, заключенного между пересекающимися границами, будем указывать в скобках.

1) Пересечение $C_1 C_3$ (...1 2.2 1.1 2...).

Условия существования C_1 :

$$x_1(\tau^*) = x_+ - 2d, \quad \dot{x}_1(\tau^*) = 0, \quad \ddot{x}_1(\tau^*) > 0, \quad (5)$$

где $t_0 \leq \tau^* \leq t_1$.

Условия существования C_3 :

$$\dot{x}_{II}(\tau^*) = \ddot{x}_{II}(\tau^*) = 0, \quad \ddot{\ddot{x}}_{II}(\tau^*) < 0, \quad (6)$$

где $t_1 \leq \tau^* \leq t_2$.

В точке пересечения бифуркационных границ $\tau^* = t_1$ и уравнения (4) — (6) сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} &- 2\omega \cos(\omega t_0) \sin[2(t_1 - t_0)] + [(x_+ + 3d)(4 - \omega^2) - 4 \sin(\omega t_0)] \times \\ &\quad \times \cos[2(t_1 - t_0)] = -\omega^2 \sin(\omega t_1), \\ &- 2\omega \cos(\omega t_0) \cos[2(t_1 - t_0)] - [(x_+ + 3d)(4 - \omega^2) - 4 \sin(\omega t_0)] \times \\ &\quad \times \sin[2(t_1 - t_0)] = -2\omega \cos(\omega t_1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega \cos(\omega t_1) \sin(t_2 - t_1) - \omega^2 \sin(\omega t_1) \cos(t_2 - t_1) = \\
 & = -[(x_+ + 3d)(1 - \omega^2) - \sin(\omega t_0)], \\
 & -\omega \cos(\omega t_1) \cos(t_2 - t_1) + \omega^2 \sin(\omega t_1) \sin(t_2 - t_1) = \omega \cos(\omega t_0).
 \end{aligned}$$

Из уравнений (7) следует, что часть точек пересечения бифуркационных границ C_1 и C_3 лежит на границе \bar{C}_4 : $d = 0$, $\omega = 1/(1 + 2k)$. Определение других особых точек будет сделано в разделе 5 при помощи ЭЦВМ.

2) Пересечение C_3 и C_2 (...2.1.1 2.2 1...).

Условия существования C_3 :

$$\dot{x}_{II}(\tau^*) = \ddot{x}_{II}(\tau^*) = 0, \quad \ddot{x}_{II}(\tau^*) < 0, \quad (8)$$

где $t_1 \leq \tau^* \leq t_2$.

Условия существования C_2 :

$$x_{III}(\tau^*) = -x_+, \quad \dot{x}_{III}(\tau^*) = 0, \quad \ddot{x}_{III}(\tau^*) > 0, \quad (9)$$

где $t_2 \leq \tau^* \leq t_3$.

Их пересечение означает, что $\tau^* = t_2$ и функция $\dot{x}(t)$ при $t = \tau^*$ имеет точку перегиба (рис. 3).

Поскольку мы рассматриваем симметричную петлю гистерезиса, то условия пересечения бифуркаций C_3 и C_2 сводятся к следующим:

$$\ddot{x}_{II}(t_2) = \ddot{x}_I(t_0) = \ddot{x}_I(t_0) = 0.$$

Эти условия после соответствующих преобразований записываются в виде $x_+ + 3d = \sin(\omega t_0)$, $\omega \cos(\omega t_0) = 0$. Так же как и в предыдущем случае, часть точек пересечения расположена на границах \bar{C}_1 и \bar{C}_4 . Действительно, при предположении, что $t_1 = t_2$, из уравнений (4) получим $d = 1/4$, $\omega = 0$, а положив $t_1 = t_0$, получим $d = 0$, $\omega = 1/(1 + 2k)$. Оба эти выражения удовлетворяют уравнениям границ \bar{C}_1 и \bar{C}_4 соответственно. Определение особых точек, не лежащих на поверхностях \bar{C}_1 и \bar{C}_4 , затруднительно без применения вычислительных машин.

Полученные результаты существенно облегчают поиск бифуркационных границ и других точек их пересечения с помощью современной вычислительной техники.

5. ПОСТРОЕНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ОДНОСТЕПЕННОЙ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА С ПОМОЩЬЮ ЭЦВМ

Построение границ областей со сложными периодическими движениями, а также просмотр характера движений при различных параметрах d , ω были проведены посредством моделирования уравнений системы с симметричной полигональной петлей гистерезиса на ЭЦВМ.

Исследование плоскости параметров (d , ω) проводилось с шагом $\Delta\omega = 0,05$ и $\Delta d = 0,02$. В районах ожидаемого пересечения бифуркационных границ, а также вблизи границ смены режима, анализ производился с повышенной точностью. В процессе решения анализировался тип движения и контролировалась его сходимости.

Результаты исследования приведены на рис. 4

Области сложных режимов обозначены I и II. Граница $d = 0$ (\bar{C}_4) соответствует отсутствию нелинейной связи в системе; а $d = |1/(4 - \omega^2)|$, (\bar{C}_1) — граница другого линейного случая полного отсутствия проскаль-

звания в системе. На границе N_+ происходит скачкообразное изменение амплитуды колебаний без изменения характера периодического движения [2].

Как видно из рисунка, численный анализ подтверждает теоретические результаты о наличии особых бифуркационных точек $d=0$, $\omega=1/(1+2k)$ и $d=0,25$, $\omega=0$, в которых происходит пересечение бифуркационных границ. В интервале $0 < \omega < 0,1$, где происходит пересечение бифуркационных границ, наблюдались сложные режимы с двумя и более «пичками».

Для иллюстрации характера изменения периодических режимов при S -бифуркациях опишем поведение системы при некоторых изменениях параметров ω , d .

Так, при $\omega=0,25$ и увеличении d рассматриваемый периодический режим на границе C_3 переходит в более сложный с «пичком» на пологом участке петли гистерезиса, который при дальнейшем увеличении d в области II перемещается к острому углу, вликая в него на границе C_2 . Рассматриваемый режим на границе C_1 переходит в периодическое движение линейной системы. При изменении параметров вдоль границы C_3 от $\omega=0$ до $\omega=1/3$ «пичек» начинается все ближе к острому углу полигональной характеристики.

При $\omega=0,6$ и увеличении d рассматриваемый режим на границе C_3 сменяется сложным. Далее, на поверхности C_1 происходит влипание «пичка» в тупой угол, режим становится простым, переходя в периодическое движение линейной системы на \bar{C}_1 . При изменении параметров вдоль границы C_3 от $\omega=1/3$ до $\omega=2/3$ «пичек» начинается все ближе к тупому углу полигональной характеристики.

Таким образом, численный анализ с помощью ЭЦВМ полностью подтверждает теоретические выводы о наличии S -бифуркационных границ и их пересечениях. Очевидно, подобный анализ можно провести для произвольной полигональной характеристики.

Следует отметить, что периодические режимы могут быть нарушены и на границах устойчивости [2], однако этот тип бифуркаций в настоящей работе не рассматривался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Пановко, Сб. Динамика машин, Машгиз, М., 1963, стр. 209.
2. В. Г. Климов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 7, 979 (1967).
3. И. Г. Прусис, Г. И. Страхов, Сб. Вопросы динамики и прочности, изд. АН Латв. ССР, Рига, вып. 10, 175 (1963).
4. Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 358 (1964).
5. М. И. Фейгин, сб. Динамика машин, Машиностроение, М., 1966, стр. 414.

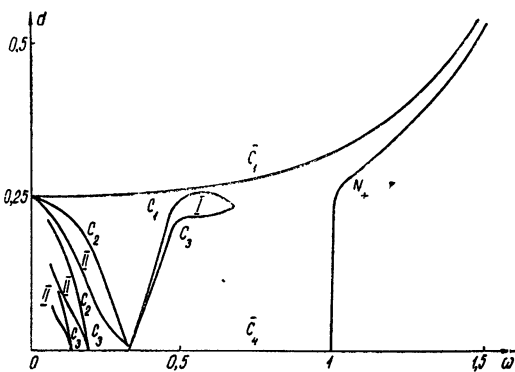


Рис. 4.

**BIFURCATIONS OF PERIODICAL MODES IN THE SYSTEM WITH
CONSTRUCTIVE DAMPING***V. G. Klimov, M. I. Feigin*

Forced oscillations in the system with polygonal hysteresis are studied with the use of point transformation technique. The possible transgressions in conditions necessary for existence of periodical modes caused by variations of the number of „stitched“ parts in phase trajectories (C—bifurcations) and the singular bifurcations are determined. The domain of complex modes existence is obtained in the parameters plane for the first degree system with simmetrical characteristic.

УДК 531.391+517.9

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев

Рассматривается динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты генератора с интегрирующими фильтрами в фазовом и частотном кольцах при нелинейных характеристиках фазового и частотного дискриминаторов в случае, когда постоянная времени фильтра в частотном кольце мала*. Задача сводится к изучению нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при старшей производной. Дано качественное исследование системы на устойчивых поверхностях медленных движений. Установлена возможность существования разрывных движений. Изучены бифуркации, определяющие изменение режимов работы системы.

1. Для стабилизации частоты широкое применение находит фазовая автоподстройка частоты (ФАП). Эффективным средством повышения помехоустойчивости системы ФАП при сохранении большой полосы захвата является использование совместной системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП). В связи с имеющимися данными [1-5] о преимуществах систем ЧФАП приобретает интерес изучение общей динамики этих систем.

Блок-схема простейшей ЧФАП изображена на рис. 1. На реактивную лампу РЛ поступают через фильтры Ф1 и Ф2 с выхода фазового детектора ФД управляющее напряжение, зависящее от разности фаз колебаний подстраиваемого ПГ и эталонного ЭГ генераторов, и с выхода частотного детектора ЧД управляющее напряжение, зависящее от расстройки текущей частоты ПГ относительно переходной частоты ЧД.

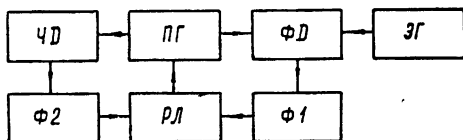


Рис. 1.

Уравнение системы ЧФАП получено в [1] при некоторых упрощающих предположениях и может быть записано в виде

$$p\varphi + \Omega K_1(p) F(\varphi) + \Omega_1 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где $K_1(p)$ и $K_2(p)$ ($p \equiv d/dt$) — коэффициенты передачи фильтров Φ_1 и Φ_2 соответственно, $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ — характеристики фазового и частотного детекторов, нормированные так, что их максимальные значения равны единице, Ω , Ω_1 , $\delta\omega$ — параметры системы (Ω и Ω_1 — максимальные расстройки, вырабатываемые в фазовом и частотном кольцах соответственно, $\delta\omega$ — начальная расстройка подстраиваемого и эталонного генераторов).

В [1] рассмотрена система ЧФАП с различными фильтрами перво-

* Доклад на XXII Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио, М., 1966.

го порядка в фазовом и частотном кольцах, приводящими к дифференциальному уравнению не выше второго порядка в предположении кусочно-линейной аппроксимации характеристики фазового детектора и линейной аппроксимации характеристики частотного детектора*.

В настоящей работе рассматривается динамика системы ЧФАП с интегрирующими фильтрами $K_1(p) = 1/(T_1 p + 1)$, $K_2(p) = 1/(T_2 p + 1)$ в фазовом и частотном кольцах в предположении синусоидальной аппроксимации характеристики фазового детектора $F(\varphi) = \sin \varphi$ и нелинейной аппроксимации характеристики частотного детектора $\Phi(p\varphi) = 2\beta_1 p \varphi / [1 + (\beta_1 p \varphi)^2]$ (рис. 2). Здесь T_1 и T_2 — постоянные времени фильтров, $1/\beta_1$ — разность частот, при которой напряжение на выходе ЧД максимально. Величину расстройки $1/\beta_1$ легко выразить через параметры каждой конкретной схемы ЧД [4]. Рассматривается случай малой постоянной времени фильтра в частотном кольце $T_2 \ll \min(T_1, 1/\Omega)$.

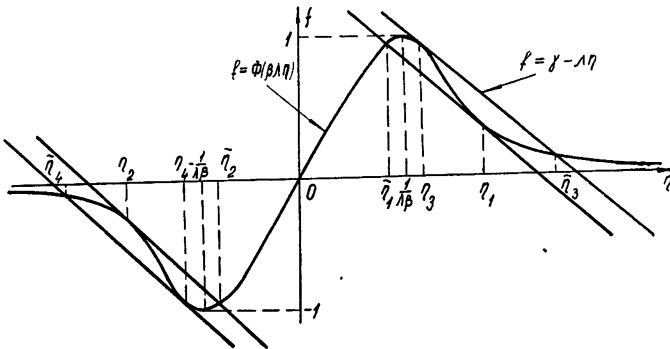


Рис. 2.

Преобразуем уравнение (1), вводя безразмерное время τ , относительную расстройку γ , отношение максимальных расстроек, вырабатываемых в частотном и фазовом кольцах b , величину λ , пропорциональную затуханию, отношение постоянных времени ε и безразмерный параметр β :

$$\tau = t \sqrt{\Omega/T_1}, \quad \gamma = \delta\omega/\Omega, \quad b = \Omega_1/\Omega, \quad \lambda = 1/\sqrt{\Omega T_1}, \quad \varepsilon = T_2/T_1, \quad \beta = \beta_1 \Omega$$

и обозначения $y = \beta\lambda\eta$, $\Phi(y) = 2y/(1+y^2)$, $\Phi'(y) = 2(1-y^2)/(1+y^2)^2$.

Вместо (1) имеем систему

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = z, \quad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{dz}{d\tau} = \gamma - [1 + \varepsilon + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)]z - [\lambda + (\varepsilon/\lambda)\cos\varphi]\eta - \sin\varphi - b\Phi(\beta\lambda\eta) \equiv G(\varphi, \eta, z).$$

При сделанных предположениях относительно малости постоянной времени фильтра в частотном кольце $T_2 \ll \min(T_1, 1/\Omega)$ (что соответствует неравенству $\varepsilon \ll \min(1, \lambda^2)$) система имеет малый параметр при старшей производной.

2. Исследование системы (2) в рассматриваемом случае $\varepsilon/\lambda \ll 1$ сводится к изучению в фазовом пространстве быстрых и медленных дви-

* Более подробное изложение этих случаев и некоторые данные о системе с нелинейными характеристиками имеются в диссертации М. В. Капранова (Московский энергетический институт, 1957).

жений [6, 7, 8]. Зависимость от параметра ε правой части (2) будет оказывать влияние на порядок приближения решений системы к поверхности медленных движений [8]. В силу периодичности правых частей (2) по координате φ за фазовое пространство исследуемой системы может быть принята область трехмерного пространства φ, η, z , определяемая неравенствами $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Плоскости $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ отождествляются.

Быстрые движения системы. В области быстрых движений траектории системы определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 = \text{const}, & \eta &= \eta_0 = \text{const}, \\ \dot{z} &= \gamma - [1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)]z - \lambda\eta_0 - \sin\varphi_0 - b\Phi(\beta\lambda\eta_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь дифференцирование по быстрому времени. Точки пересечения прямых $\varphi = \varphi_0, \eta = \eta_0$ с поверхностью

$$z = \frac{\gamma - \lambda\eta - \sin\varphi - b\Phi(\beta\lambda\eta)}{1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)} \quad (4)$$

являются состояниями равновесия быстрых движений, определяемых (3).

Поверхность (4) есть поверхность медленных движений. Эта поверхность однозначна по координате z , является периодической по координате φ и всюду непрерывной для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$b\beta < 4. \quad (5)$$

Для значений параметров, удовлетворяющих неравенству $b\beta \geq 4$, поверхность (4) имеет бесконечные разрывы при значениях η , определяемых уравнениями

$$\eta = \eta_1, \quad \eta = \eta_2, \quad \eta = \eta_3, \quad \eta = \eta_4, \quad (6)$$

где

$$\eta_{1,2} = \pm \frac{1}{\beta\lambda} [b\beta - 1 + \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}, \quad \eta_{3,4} = \pm \frac{1}{\beta\lambda} [b\beta - 1 - \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}. \quad (7)$$

Поверхность медленных движений (4) устойчива по отношению к быстрым движениям [7], если в (2) $G'_z < 0$, и неустойчива, если $G'_z > 0$. Определяя знак величины G'_z , устанавливаем, что поверхность медленных движений устойчива для значений параметров, удовлетворяющих неравенству (5). Для значений параметров, удовлетворяющих неравенству $b\beta > 4$, поверхность медленных движений имеет устойчивые и неустойчивые области. Области устойчивости поверхности медленных движений определяются неравенствами

$$\eta_4 < \eta < \eta_3, \quad \eta > \eta_1, \quad \eta < \eta_2, \quad (8)$$

а области неустойчивости — неравенствами

$$\eta_3 < \eta < \eta_1, \quad \eta_2 < \eta < \eta_4. \quad (9)$$

Здесь $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ определяются выражениями (7).

Изменение устойчивости поверхности медленных движений, имеющее место на границе областей (8) и (9), происходит при тех же значениях η , при которых эта поверхность имеет разрывы (см. (5) — (9)).

Медленные движения системы. На поверхности медленных движений (4) траектории определяются «вырожденной» [7] системой ($\varepsilon/\lambda = 0$)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \eta \equiv M(\varphi, \eta), \quad (10)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\gamma - \lambda\eta - \sin\varphi - b\Phi(\beta\lambda\eta)}{1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)} \equiv N(\varphi, \eta),$$

эквивалентной одному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\gamma - \lambda\eta - \sin\varphi - b\Phi(\beta\lambda\eta)}{1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)}. \quad (11)$$

Пользуясь однозначностью поверхности медленных движений (4) по координате z и периодичностью правых частей (10) по φ , будем рассматривать систему (10) на цилиндрической фазовой поверхности с образующей, параллельной оси η . Цилиндр будем рассматривать развернутым на плоскость.

Ниже следует иметь в виду, что интегральные кривые, определяемые (11) в областях неустойчивости (9), не соответствуют траекториям медленных движений системы.

3. Разбиение цилиндрической фазовой поверхности на траектории определяют [6, 9] особые траектории (состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы). Физическая интерпретация особых траекторий [9] в рассматриваемой системе аналогична данной в [10].

Состояния равновесия и проходимые особые точки. Координаты состояний равновесия системы (10) определяются уравнениями

$$\varphi_1 = \arcsin \gamma, \quad \eta_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma, \quad \eta_2 = 0. \quad (12)$$

Исследуя корни соответствующего характеристического уравнения [6], устанавливаем, что состояние равновесия $(\varphi_1, 0)$ является устойчивым узлом для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$2b\beta > 4\sqrt{1 - \gamma^2/\lambda^2} - 1, \quad (13)$$

и устойчивым фокусом для значений параметров, удовлетворяющих обратному неравенству. Состояние равновесия $(\varphi_2, 0)$ для всех значений параметров — седло.

Поверхность, разделяющая пространство параметров $2b\beta, \gamma, \lambda$ на области, для точек которых состояние равновесия $(\varphi_1, 0)$ является устойчивым узлом (область У) или фокусом (область Ф), представлена на рис. 3. При значениях параметров, удовлетворяющих равенству $\gamma=1$ (рис. 3), узел $(\varphi_1, 0)$ и седло $(\varphi_2, 0)$ сливаются, образуя сложное состояние равновесия типа седло—узел.

Уравнение (11) имеет особые точки, не являющиеся состояниями равновесия системы (10). Эти особые точки (проходимые для системы (10)) определяются точками пересечения изоклины вертикальных наклонов.

$$1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta) = 0 \quad (14)$$

и горизонтальных наклонов

$$\sin\varphi = \gamma - \lambda\eta - b\Phi(\beta\lambda\eta) \quad (15)$$

уравнения (11). Действительные решения уравнения (14), определяемые (7), существуют при выполнении условия $b\beta > 4$, следовательно,

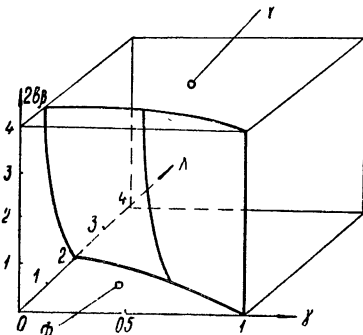


Рис. 3.

проходимые особые точки системы (10) могут существовать только при выполнении этого условия. Поверхность в пространстве параметров, определяемую равенством $b\beta=4$, обозначим через W (см. рис. 5). Различные возможные случаи расположения изоклин (14) и (15) представлены на рис. 4. Проходимые особые точки системы (10) имеют обозначения $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$. Координаты их легко определяются

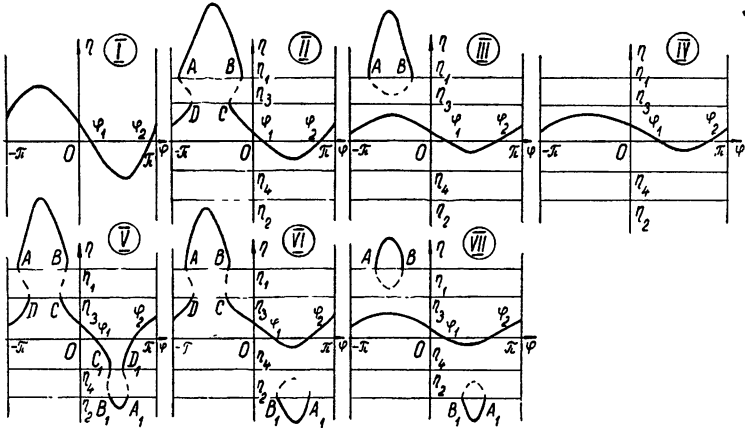


Рис. 4.

из (14) и (15). Исследуя корни соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что точки A, C, A_1, C_1 являются проходимыми особыми точками типа седло, а точки B, D, B_1, D_1 — типа сложный фокус или центр. При слиянии особых точек образуется сложная проходимая особая точка. Многообразия бифуркационных значений параметров $V_{AB}, V_{A_1B_1}, V_{CD}, V_{C_1D_1}$ в пространстве параметров $\gamma, \beta, b, \lambda$, точки которых удовлетворяют условию слияния особых точек A и B, A_1 и B_1, C и D, C_1 и D_1 , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma - \lambda \eta_1 - b\Phi(\beta \lambda \eta_1) &= -1 \quad (V_{AB}), & \gamma - \lambda \eta_2 - b\Phi(\beta \lambda \eta_2) &= 1 \quad (V_{A_1B_1}), \\ \gamma - \lambda \eta_3 - b\Phi(\beta \lambda \eta_3) &= -1 \quad (V_{CD}), & \gamma - \lambda \eta_4 - b\Phi(\beta \lambda \eta_4) &= 1 \quad (V_{C_1D_1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что выражения (16), где $\eta_{1,2,3,4}$ определяются (7), не будут зависеть от параметра λ . На рис. 5 представлено расположение бифуркационных поверхностей (16) в подпространстве параметров γ, β, b при $\lambda = \text{const}$. Эти поверхности вместе с поверхностью W разделяют пространство параметров γ, β, b на семь областей с различным количеством проходимых особых точек*. На рис. 6 даны сечения $(b\beta)$ поверхностей $V_{AB}, V_{A_1B_1}, V_{CD}, V_{C_1D_1}, W$ при фиксированных разных значениях параметра γ .

Для точек областей I и IV пространства параметров (рис. 5) система (10) имеет два состояния равновесия: устойчивое — узел или фокус и неустойчивое — седло и не имеет проходимых особых точек. Эти области параметров являются наиболее реальными. На изучении соответствующих им качественных структур мы будем останавливаться более подробно в дальнейшем.

* На рис. 4 числа в кружках указывают номера соответствующих областей пространства параметров.

Сепаратрисы седел и их бифуркации. Сначала рассмотрим случай, когда для изучения расположения сепаратрис и их бифуркаций достаточно рассмотреть только возрастающего участка нелинейной характеристики ЧД, обычно аппроксимируемого линейной функцией. Для областей I и IV это имеет место для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$b \geq \gamma - 1/\beta + 1. \quad (17)$$

Эти области обозначим соответственно I_1 и IV_1 . Поверхность U , определяемая равенством (17), представлена на рис. 5. Для точек этих об-

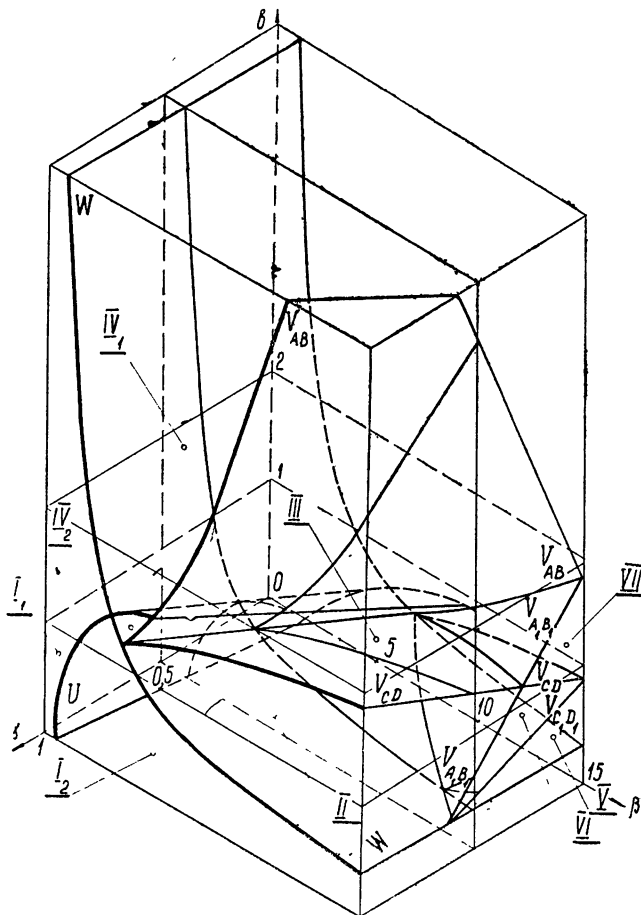


Рис. 5.

ластей петля сепаратрисы, а также циклы II рода, если они существуют, расположены целиком в части фазовой поверхности, определяемой неравенствами

$$0 < \eta < 1/\lambda\beta, \quad (18)$$

поскольку при этом максимальная ордината изоклины горизонтальных наклонов не превышает величины $1/\lambda\beta$. Значениям η , удовлетворяющим неравенствам (18), соответствует возрастающий участок характеристики частотного детектора $\Phi(\beta\lambda\eta)$ (см. рис. 2). Возрастающий участок характеристики может быть с достаточным приближением ап-

проксимирован линейной функцией $\Phi(\beta\lambda\eta) = \beta\lambda\eta$. В этом случае, применяя замену $\tilde{\eta} = \sqrt{(1+b\beta)}\eta$, $\tilde{\lambda} = \sqrt{(1+b\beta)}\lambda$ уравнение (11) может быть записано в виде

$$\frac{d\tilde{\eta}}{d\varphi} = \frac{\gamma - \tilde{\lambda}\tilde{\eta} - \sin\varphi}{\tilde{\eta}}. \quad (19)$$

Изучению этого уравнения посвящена обширная литература. Для уравнения (19) полностью изучено расположение сепаратрис и установлено [6, 11] существование петли сепаратрисы седла II рода для значений параметров $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*(\gamma)$. При прохождении с уменьшением $\tilde{\lambda}$ через значения параметров $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*(\gamma)$ в системе появляется единственный устойчивый предельный цикл II рода.

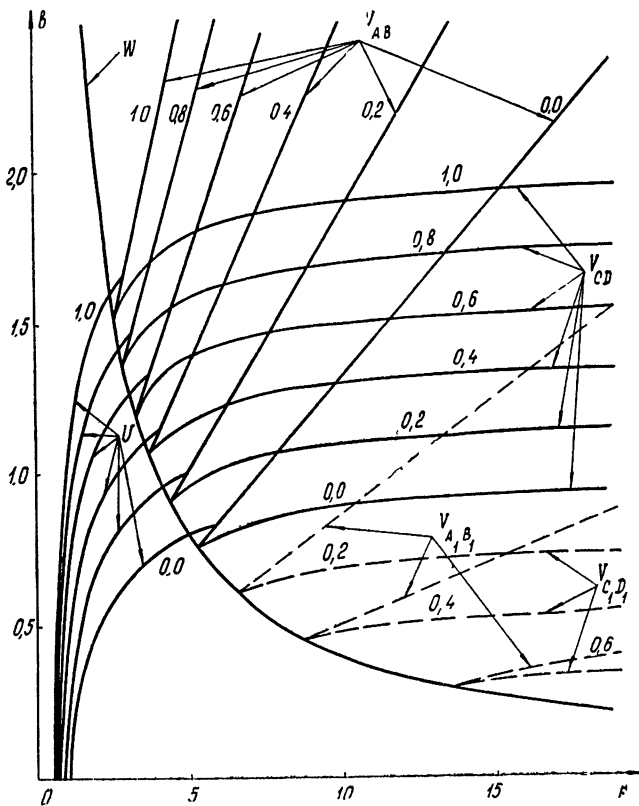


Рис. 6.

В работах [11–15] получены достаточно точные оценки кривой $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*(\gamma)$. Для системы ЧФАП в рассматриваемом случае бифуркационная кривая $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*(\gamma)$ определяет полосу захвата. Согласно сделанной замене, $\tilde{\lambda} = \sqrt{(1+b\beta)}\lambda > \lambda$ при $b\beta > 0$, следовательно, наличие частотного кольца в системе фазовой автоподстройки увеличивает полосу захвата (см. также [1]).

Перейдем к изучению расположения сепаратрис седла системы (10) и их бифуркаций при нелинейной характеристике частотного детектора для значений параметров, принадлежащих областям I и IV. Это изучение проводится, исходя из определения качественной структуры грубой системы (10) с помощью [16] приближенных методов. Сепаратрисы седла строятся приблизительно [17] для ряда значений параметров. Рассматривается полуплоскость $\eta > 0$. Выбирается сетка фиксированных значений параметров γ, β, b . Устанавливается, что при фиксированных значениях параметров $\gamma = \gamma_0, \beta = \beta_0, b = b_0$ существуют значения $\lambda = \lambda_1$ при которых сепаратриса S_1 седла ($\varphi_2 - 2\pi, 0$) (с положительным наклоном) пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ ниже, чем сепаратриса S_2 (с отрицательным наклоном), и значения параметра $\lambda = \lambda_2$, при которых сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ выше, чем сепаратриса S_2 . Следовательно, при значениях параметров $\gamma = \gamma_0, \beta = \beta_0, b = b_0$ существует хотя бы одно значение параметра $\lambda = \lambda^*$, удовлетворяющее неравенствам $\lambda_2 < \lambda^* < \lambda_1$, при котором сепаратриса $S_1(S_2)$ идет из седла в седло, охватывая фазовый цилиндр (рис. 10б). Бифуркационные значения параметров $\lambda = \lambda^*$, соответствующие петле сепаратрисы седла II рода, определялись приближенно, с помощью построения численными методами сепаратрис близких грубых систем*.

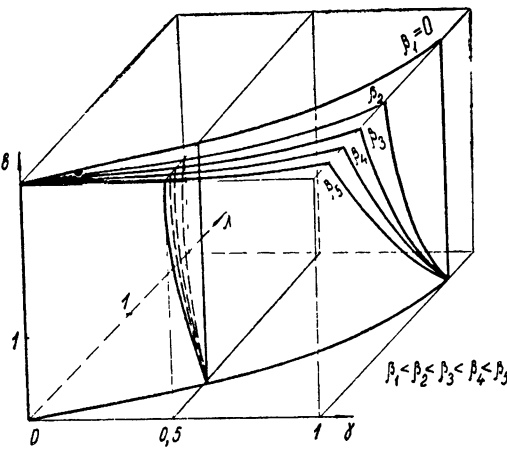


Рис. 7.

Расположение бифуркационной поверхности в пространстве γ, λ, b при различных значениях β представлено на рис. 7. Сечения этой поверхности для различных фиксированных b и β даны на рис. 8, где по оси абсцисс вместо параметра λ отложен чаще употребляемый на практике параметр $\Omega T_1 = 1/\lambda^2$. Ряд бифуркационных кривых при фиксированных значениях β представлен сплошными ли-

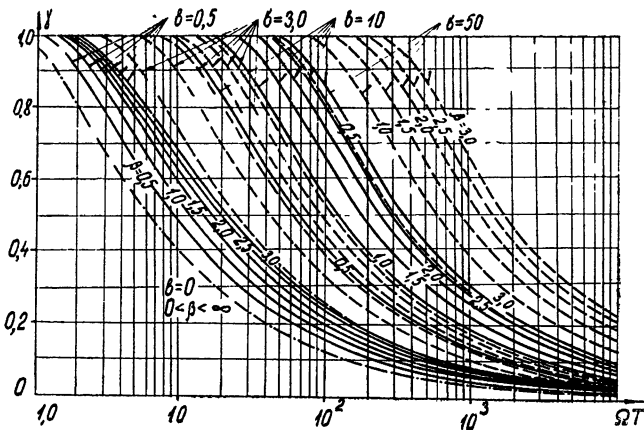


Рис. 8.

* Счет по приближенному построению сепаратрис спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭЦВМ БЭСМ-3М.

ниями для $b=0,5$ и $b=10$ и при тех же значениях параметра β пунктирными линиями для $b=3$ и $b=50$. Штрихпунктирной линией представлена известная для системы ФАП [10, 15] бифуркационная кривая, имеющая место для ЧФАП при $b=0$ и любом положительном значении β .

Определим устойчивость петли сепаратрисы седла II рода. Это позволит решить вопрос об устойчивости цикла, появляющегося из петли. Следуя [6, 18, 19], определим знак седловой величины

$$\sigma = M'_\varphi(\varphi_2, 0) + N'_\eta(\varphi_2, 0). \quad (20)$$

Для седла $(\varphi_2, 0)$ системы (10) при рассматриваемых положительных значениях параметров седловая величина отрицательна, т. е.

$$\sigma = -\lambda(1 + 2b\beta) < 0. \quad (21)$$

Следовательно, петля сепаратрисы седла $(\varphi_2, 0)$ устойчива.

Предельные циклы. Для изучения предельных циклов, целиком лежащих в областях устойчивости поверхности медленных движений (8), перейдем к системе

$$\frac{d\varphi}{d\tau_1} = [1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)] \eta \equiv P(\varphi, \eta), \quad (22)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau_1} = \gamma - \lambda\eta - \sin\varphi - b\Phi(\beta\lambda\eta) \equiv Q(\varphi, \eta),$$

введя в (10) новое время

$$\tau_1 = \tau/[1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)]. \quad (23)$$

В этих областях направление движения изображающей точки по траекториям систем (10) и (22) совпадают.

Прежде всего, аналогично тому, как это сделано в [6] для уравнения маятника, установив, что система (22) не может иметь замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр и пересекающих линию $\eta > 0$ и замкнутые траектории, охватывающие цилиндр, если они существуют, лежат целиком в области $\eta > 0$.

При изучении вопроса о существовании и расположении предельных циклов оказывается полезным рассмотрение возможного их появления и исчезновения. Число и устойчивость циклов, которые могут появиться из петли сепаратрис седла $(\varphi_2, 0)$, определяются знаком седловой величины (20). В силу (21) из петли сепаратрисы седла $(\varphi_2, 0)$ исследуемой системы может появиться (если это допускается системой) только один устойчивый предельный цикл, охватывающий цилиндр.

Для дальнейшего выяснения вопроса о существовании предельных циклов применим критерий Бендиксона—Дюлака на цилиндре [6, 9].

Для системы (22) величина $B = \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} = -\lambda[1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)]$

не меняет знак на всей фазовой поверхности (φ, η) для значений параметров, принадлежащих области I пространства параметров, и изменяет знак на прямых (6) для значений параметров, принадлежащих другим областям. Следовательно, для значений параметров, принадлежащих области I, система (22) согласно критерию Бендиксона—Дюлака не имеет предельных циклов I рода на всей фазовой плоскости (φ, η) ; если имеется предельный цикл II рода, то он единственный и, согласно сказанному ранее, целиком расположен в области $\eta > 0$ фазовой плоскости. Для этих значений параметров цикл II рода устойчив, в силу того, что для него характеристический показатель

$$h_s = -\frac{1}{T} \int_0^T \lambda [1 + b \beta \Phi'(\beta \lambda \eta)] d\tau \quad (24)$$

имеет отрицательный знак ($h_s < 0$). Аналогично устанавливаем, что для точек области IV пространства параметров система (22) не имеет предельных циклов I рода, целиком лежащих в области $\eta_4 < \eta < \eta_3$ поверхности (φ, η) , и может иметь единственный устойчивый предельный цикл II рода, целиком лежащий в области $0 < \eta < \eta_3$. В области $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности циклов нет. Для точек остальных областей II, III, V, VI, VII пространства параметров система (22) не имеет предельных циклов I рода, целиком лежащих в области $\eta_4 < \eta < \eta_3$ фазовой поверхности, и может иметь по одному устойчивому предельному циклу II рода, целиком лежащему в области $0 < \eta < \eta_3$ и в области $\eta > \eta_1$ фазовой поверхности (φ, η) .

Проследим за изменением расположения устойчивого предельного цикла II рода (если он существует) при изменении параметра γ . Возьмем два значения параметра γ , удовлетворяющие неравенству $\gamma_2 < \gamma_1$, и вычислим поворот векторного поля системы (10) при уменьшении γ . Разность направлений векторных полей [9] в каждой точке поверхности (φ, η) определяется равенством

$$R = \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)_{\gamma=\gamma_2} - \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)_{\gamma=\gamma_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{[1 + b\beta\Phi'(\beta\lambda\eta)] \eta}. \quad (25)$$

Поворот поля происходит по часовой стрелке ($R < 0$) в областях фазовой поверхности, определенных неравенствами $0 < \eta < \eta_3$, $\eta > \eta_1$. Следовательно, если существует устойчивый предельный цикл II рода, то на цилиндре он опускается с уменьшением параметра γ , т. е. координаты цикла удовлетворяют неравенству $\eta_2 < \eta_1$.

Для доказательства существования предельного цикла II рода при некоторых значениях параметров достаточно показать, что у системы (10) при этих значениях параметров при наличии траекторий, для которых выполняется неравенство

$$\eta(\varphi + 2\pi) < \eta(\varphi), \quad (26)$$

существует траектория, для которой справедливо

$$\eta(\varphi + 2\pi) \geq \eta(\varphi). \quad (27)$$

Ординаты изоклины горизонтальных наклонов (15) ограничены некоторой величиной η_M . Следовательно, в части фазовой поверхности, ограниченной неравенством $\eta > \eta_M$, все траектории системы (10) имеют отрицательный наклон и удовлетворяют неравенству (26). В силу установленного выше расположения сепаратрис для областей I и IV пространства параметров, траектории системы (10), удовлетворяющие неравенству (27), существуют при значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda > \lambda^*(\gamma, \beta, b)$. Следовательно, в областях I и IV пространства параметров для значений параметров, удовлетворяющих неравенству $\lambda < \lambda^*(\gamma, \beta, b)$, система (10) имеет предельный цикл II рода. В силу сказанного выше этот цикл единственный, устойчивый и расположен в области фазового цилиндра $\eta > 0$.

4. *Разрывные движения.* Исследование системы (10) позволяет установить расположение фазовых траекторий только в областях устойчивости (8) поверхности медленных движений. Продолжение траектории за границы областей (8), исходя из системы (2), установить не удается из-за наличия разрывов поверхности медленных движений.

Перейдем к новым переменным*, в которых поверхность медленных движений не имеет разрывов. Заменой

$$\varphi = \varphi,$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda}(\gamma - v - bu), \quad (28)$$

$$z = - \left\{ (\sin \varphi - v) + \frac{b}{\varepsilon} \left[\frac{2\beta(\gamma - v - bu)}{1 + \beta^2(\gamma - v - bu)^2} - u \right] \right\}$$

система (2) преобразуется к виду

$$\lambda \frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - v - bu,$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dv}{d\tau} = -v + \sin \varphi, \quad (29)$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} \frac{du}{d\tau} = -u + \frac{2\beta(\gamma - v - bu)}{1 + \beta^2(\gamma - v - bu)^2}.$$

Новые переменные v и u имеют следующий физический смысл: $v = e_{y\phi}/E$ — отношение управляющего напряжения в фазовом кольце к максимальному напряжению с выхода ФД, $u = e_{y\psi}/E_1$ — отношение управляющего напряжения в частотном кольце к максимальному напряжению с выхода ЧД.

Поставленная в работе задача эквивалентна исследованию системы (29). Перейдем к изучению разрывных движений в системе (29).

Поверхность медленных движений в пространстве φ, v, u определяется уравнением

$$S(\varphi, v, u) \equiv -u + \frac{2\beta(\gamma - v - bu)}{1 + \beta^2(\gamma - v - bu)^2} = 0. \quad (30)$$

На рис. 9 качественно представлено расположение поверхности медленных движений (30) в фазовом пространстве φ, v, u .

Система уравнений быстрых движений имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const},$$

$$v = v_0 = \text{const}, \quad (31)$$

$$\dot{u} = -u + \frac{2\beta(\gamma - v_0 - bu)}{1 + \beta^2(\gamma - v_0 - bu)^2}.$$

Область устойчивости поверхности медленных движений $S(\varphi, v, u) = 0$ по отношению к быстрым движениям определяется неравенствами

$$u_4 < u < u_3, \quad u > u_1, \quad u < u_2, \quad (32)$$

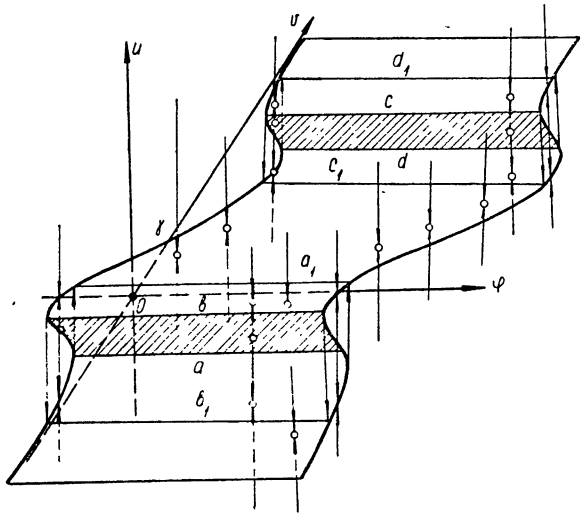


Рис. 9.

* На целесообразность такого перехода наше внимание обратил В. В. Быков.

а область неустойчивости неравенствами

$$u_3 < u < u_1, \quad u_2 < u < u_4, \quad (33)$$

где

$$u_{1,2}(v) = \pm \frac{1}{b\beta} [b\beta - 1 + \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2} + \frac{\gamma - v}{b}, \quad (34)$$

$$u_{3,4}(v) = \pm \frac{1}{b\beta} [b\beta - 1 - \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2} + \frac{\gamma - v}{b}.$$

Области (32) и (33) соответствуют областям (8) и (9) в координатах φ , η , z соответственно. На рис. 9 стрелками указано направление движения по траекториям быстрых движений, а области неустойчивости поверхности медленных движений заштрихованы. Прямые a , b , c , d на рис. 9, являющиеся линиями пересечения поверхности (30) с плоскостями (34), определяют границы устойчивых и неустойчивых участков поверхности медленных движений.

Если изображающая точка системы, двигаясь по траектории медленных движений на устойчивом участке поверхности медленных движений (30), приходит в некоторую точку на прямой $a(b)$, то далее она выходит в область быстрых движений и движется («быстро», скачком) по выходящей из этой точки траектории быстрых движений $\varphi = \varphi_0$, $v = v_0$, пока не придет снова на поверхность медленных движений (на прямую $a_1(b_1)$). В этом случае в системе будут иметь место разрывные движения, состоящие из медленных и быстрых движений.

Как следует из (28), каждой точке на прямых $a(b)$ и $a_1(b_1)$ при любом значении φ соответствует на плоскости (φ, η) точка с тем же значением φ на прямых $\eta = \eta_1 (\eta = \eta_3)$ и $\eta = \tilde{\eta}_1 (\eta = \tilde{\eta}_3)$ (см. рис. 2, 9). Тогда описанным выше разрывным движениям в координатах (φ, v, u) соответствуют гипотезы скачков на плоскости (φ, η) т. е. если изображающая точка на плоскости (φ, η) приходит в некоторую точку на линии $\eta = \eta_1 (\eta = \eta_3)$, то далее она перескакивает в точку с тем же значением разности фаз φ на линии $\eta = \tilde{\eta}_1 (\eta = \tilde{\eta}_3)$ и движется вдоль начинающейся в этой точке траектории медленных движений. Когда чередование траекторий медленных движений и скачков становится периодическим по координате φ (если такое чередование возможно), возникает предельный цикл II рода, состоящий из чередующихся между собой траекторий медленных движений и скачков.

Аналогично поверхности устанавливаем наличие разрывных движений в области фазовой поверхности $\eta < 0$. Выражения для $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$, $\tilde{\eta}_3$, $\tilde{\eta}_4$ могут быть получены через параметры системы. С этой целью определяем двойные корни кубического уравнения, полученного для абсцисс точек пересечения прямой $f = \gamma - \lambda \eta$ и кривой $f = \Phi(\beta \lambda, \eta)$ (см. рис. 2)

$$\eta^3 - \frac{\gamma}{\lambda} \eta^2 + \frac{1 + b\beta}{\beta^2 \lambda^2} \eta - \frac{\gamma}{\beta^2 \lambda^3} = 0. \quad (35)$$

Тогда

$$\tilde{\eta}_{3,4} = \pm \frac{2 + b\beta + \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}}{2\beta\lambda [b\beta - 1 - \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}}, \quad \tilde{\eta}_{1,2} = \pm \frac{2 + b\beta - \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}}{2\beta\lambda [b\beta - 1 + \sqrt{b\beta(b\beta - 4)}]^{1/2}}. \quad (36)$$

5. *Полоса захвата.* Область начальных расстроек, в которой при любых начальных условиях в системе устанавливается режим синхронизма, как известно, называется полосой захвата. В исследуемой системе

для наиболее интересных для практики областей I и IV пространства параметров выход системы из синхронизма возможен только при наличии на фазовой поверхности устойчивого предельного цикла II рода (имеется в виду случай $\lambda > 0$, реализуемый на практике). Возникновение предельного цикла II рода, согласно сказанному выше, происходит только от петли сепаратрисы седла. Следовательно, для указанных областей пространства параметров полоса захвата исследуемой системы полностью определяется бифуркацией, связанной с петлей сепаратрисы седла II рода. Графики зависимости полосы захвата от параметров системы представлены на рис. 8. Фазовые картины, соответствующие параметрам системы, удовлетворяющим неравенствам $\gamma < \gamma_3$, $\gamma = \gamma_3$, $\gamma > \gamma_3$, представлены на рис. 10. Номера областей I и IV пространства

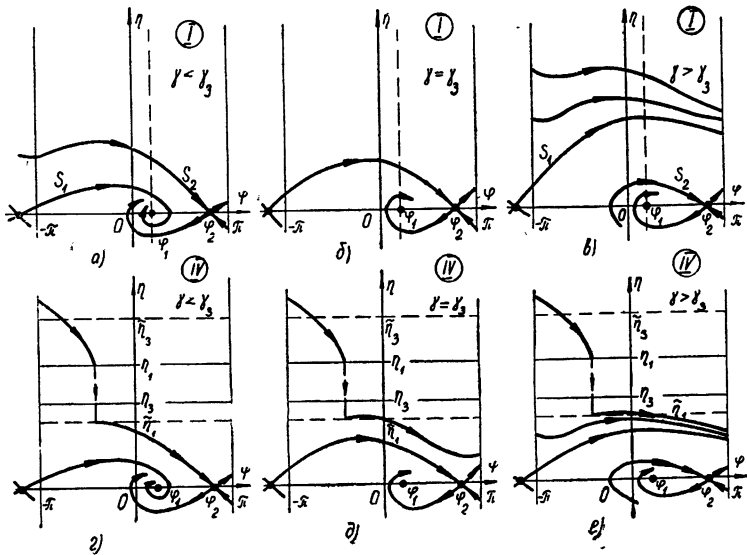


Рис. 10.

параметров указаны на рисунках. Наличие разрывных движений для точек области IV, как это следует из очевидного, рассмотрения, не нарушает характера и расположения особых траекторий системы и, следовательно, условий захвата.

1) Изучение динамики системы ФАП при введении в нее частотного кольца с малоинерционным фильтром нижних частот приводит к необходимости рассмотрения системы дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при старшей производной.

2) Полоса синхронизма рассмотренной нелинейной совместной системы ЧФАП, так же как системы с линейной характеристикой ЧД [1], равна полосе синхронизма Ω системы ФАП. Следовательно, стационарный режим синхронизма в совместной системе ЧФАП может иметь место лишь при начальных расстройках $\delta\omega$, меньших полосы синхронизма Ω системы ФАП.

3) Введение частотного кольца в систему фазовой автоподстройки приводит к расширению области в пространстве параметров, для которой на фазовой поверхности системы существует состояние равновесия типа устойчивый узел, за счет уменьшения области, соответствующей состоянию равновесия типа устойчивый фокус (см. рис. 3). Следо-

вательно, увеличивается область параметров, для которой процесс установления режима синхронизма происходит с большим затуханием.

4) Введение частотного кольца в систему ФАП в рассмотренном случае, так же как и в случае линейной характеристики ЧД [1], приводит к увеличению полосы захвата системы автоподстройки. Численно просчитана величина полосы захвата (см. рис. 7 и 8). Учет нелинейности характеристики частотного детектора позволил выделить области пространства параметров, в которых для определения полосы захвата достаточно рассматривать только возрастающий участок характеристики.

5) Установлено существование в системе разрывных движений и определены области значений параметров, для которых они имеют место.

Авторы признательны М. В. Капранову, предложившему задачу об исследовании динамики системы ЧФАП при нелинейных характеристиках детекторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Капранов, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, № 2, 162 (1958).
2. Л. С. Тюфякин, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, № 1, 239 (1959).
3. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
4. М. Р. Капранов, В. Л. Левин, Автоматическая подстройка частоты 3-е издание, Госэнергоиздат, М., 1962.
5. Б. Х. Кривицкий, Автоматические системы радиотехнических устройств, Госэнергоиздат, М., 1962.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 2-е издание, Физматгиз, М., 1959.
7. Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, ДАН СССР, 102, 889 (1955).
8. Д. В. Аносов, Мат. сб., 50, № 3, 299 (1960).
9. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 118 (1958).
10. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
11. Т. Tricomi, Ann. della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 2, 2 (1933).
12. L. Amerio, Ann. Math. pura Appl., 30, 75 (1949).
13. C. Vohm, Ann. Math. pura Appl., 35, 4 (1953).
14. G. Seifert, Zs. f. angewandte Math. und Phys., 3, 407 (1952).
15. A. Giger, Zs. f. angewandte Math. und Phys., 7, 121 (1956).
16. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 638 (1959).
17. Е. А. Андропова-Леонтович, Л. Н. Белюстина, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, изд. АН УССР, Киев, 1963.
18. Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 78, 641 (1951).
19. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Мат. сб., 43 (90), 335 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 января 1967 г.

TO THE THEORY OF NONLINEAR SYSTEM FOR AUTOMATIC PHASE-FREQUENCY CONTROL

L. N. Byelyoostina, V. D. Shalfeyev

Dynamics of the automatic phase-frequency control system with integrating filters in both phase and frequency control loops and with phase and frequency discriminators having nonlinear characteristics is considered for the case when time constant of a filter in frequency control loop is small. The problem is reduced to the investigation of a third order nonlinear differential equation with a small parameter in the highest order derivative form. A qualitative study of a system on stable surfaces of slow motions is provided. A possible existence of relaxation motions is ascertained. Bifurcations causing the change in the operation modes of the system are studied.

УДК 531.391 3/4+621.396 6 078 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С РАЗДЕЛИТЕЛЬНЫМ КОНДЕНСАТОРОМ В ЦЕПИ УПРАВЛЕНИЯ

В. Д. Шалфеев

Рассмотрена динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтрами верхних и нижних частот в цепи управления в случае, когда постоянная времени фильтра нижних частот мала*. Задача сводится к изучению системы дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при старшей производной. Для изучения цилиндрической фазовой поверхности медленных движений применяются методы качественного анализа. Устанавливаются возможность и условия существования квазистационарных режимов. Показано, что стабилизация частоты возможна с некоторой ошибкой и только при импульсном режиме работы.

1. В современных радиотехнических устройствах широкое применение находят системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП). Обычно, в цепи управления системы ФАП присутствует фильтр нижних частот, включаемый на выходе фазового детектора. В некоторых случаях, в частности, при импульсной работе, целесообразно, а иногда необходимо [1] введение в цепь управления разделительного конденсатора, образующего вместе с другими элементами схемы фильтр верхних частот.

Блок-схема такой системы ФАП представлена на рис. 1.

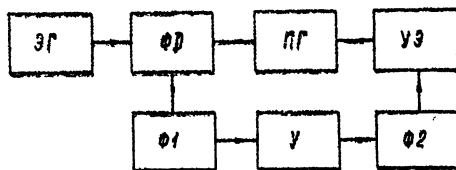


Рис. 1.

На управляющий элемент УЭ поступает через фильтр нижних частот Ф1, усилитель У и фильтр верхних частот Ф2 управляющее напряжение с выхода фазового детектора ФД, зависящее от разности фаз φ колебаний подстраиваемого ПГ и эталонного ЭГ генераторов. Уравнение системы ФАП при некоторых упрощающих предположениях может быть представлено [2, 3] в виде

$$p\varphi + \Omega K(p) F(\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где $p\varphi$ — расстройка текущей частоты ПГ относительно частоты ЭГ. $K(p)$ (оператор $p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициент передачи фильтра в цепи уп-

* Доклад на XXII Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио, Москва, 1966.

равления, $F(\varphi)$ — характеристика ФД, нормированная так, что ее максимальное значение равно единице, $\Omega, \delta\omega$ — параметры системы (Ω — максимальная расстройка, которую может компенсировать цепь управления, $\delta\omega$ — начальная расстройка ПГ относительно ЭГ). Для рассматриваемой системы [1] $K(p) = K_1(p)K_2(p)$, где $K_1(p)$ и $K_2(p)$ — коэффициенты передачи фильтра нижних частот $\Phi 1$ и верхних частот $\Phi 2$ соответственно.

В данной работе изучается случай простейших фильтров нижних и верхних частот в цепи управления: интегрирующего RC -фильтра $K_1(p) = (T_1 p + 1)^{-1}$ и дифференцирующего CR -фильтра $K_2(p) = Tp(Tp + 1)^{-1}$. Характеристика фазового детектора $F(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π . Рассматривается треугольная характеристика фазового детектора [2, 3]

$$F(\varphi) = \begin{cases} 2\varphi\pi^{-1} & (\text{при } -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2) \\ 2-2\varphi\pi^{-1} & (\text{при } \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2) \end{cases} \quad (2)$$

В [1] для такой системы получена зависимость от времени текущей разности фаз φ и разности частот $p\varphi$ для интервала значений φ , соответствующего возрастающему участку характеристики ФД.

В настоящей работе рассматривается весь интервал значений φ . Изучается динамика данной системы в случае $T_1 \ll \min(T, \sqrt{T\Omega^{-1}})$. Рассматриваемый случай представляет интерес для практики, так как в реальных системах постоянная времени фильтра верхних частот значительно превосходит постоянную времени фильтра нижних частот [1]. В силу периодичности по φ функции $F(\varphi)$ уравнение (1) достаточно рассмотреть на интервале периодичности 2π .

Преобразуем уравнение (1), вводя безразмерное время τ , относительную начальную расстройку γ , величину λ , характеризующую затухание, отношение постоянных времени μ : $\tau = t\sqrt{\Omega T^{-1}}$, $\gamma = \delta\omega\Omega^{-1}$, $\lambda = (\sqrt{\Omega T})^{-1}$, $\mu = T_1 T^{-1}$ и обозначения

$$\Lambda = \lambda [1 + 2(\pi\lambda^2)^{-1}], \quad V = -\lambda [1 - 2(\pi\lambda^2)^{-1}]. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = z,$$

$$\frac{\mu}{\lambda} \frac{dz}{d\tau} = \begin{cases} \gamma - (1 + \mu)z - \Lambda y & (\text{при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2) \\ \gamma - (1 + \mu)z + Vy & (\text{при } \pi/2 < \varphi < 3\pi/2) \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) получена от склейки [4] двух линейных систем 3-го порядка, однозначно определенных в областях фазового пространства $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. На плоскостях склейки $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$ $\varphi = 3\pi/2$ производная $\frac{dz}{d\tau}$ имеет разрыв I рода при сохранении непрерывности [5] переменных φ, y, z .

Фазовым пространством рассматриваемой системы является область трехмерного пространства φ, y, z , определенная неравенством $-\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$. Плоскости $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ отождествляются.

Система (4) рассматривается в предположении $T_1 \ll \min(T, \sqrt{T\Omega^{-1}})$, что соответствует неравенству $\mu \ll \min(1, \lambda)$.

2. При сделанных предположениях система (4) имеет малый параметр при старшей производной. Исследование этой системы приводит [5, 6] к изучению в фазовом пространстве быстрых и медленных движений. Зависимость от параметра μ правой части системы (4) будет оказывать влияние на порядок приближения [7] решений системы к поверхности медленных движений. Изучается подпространство медленных движений, точки которого являются состояниями равновесия для быстрых движений. При устойчивости этого подпространства исследование сводится к изучению в нем так называемой «вырожденной системы», получающейся из (4) при $\mu/\lambda = 0$.

Быстрые движения. Система быстрых движений имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 = \text{const}, \\ y &= y_0 = \text{const}, \\ \dot{z} &= \begin{cases} \gamma - z - \Lambda y_0 \equiv G_1 & (\text{при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2) \\ \gamma - z + Vy_0 \equiv G_2 & (\text{при } \pi/2 < \varphi < 3\pi/2) \end{cases}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь дифференцирование происходит по «быстрому» времени. Состояниями равновесия для быстрых движений являются точки поверхности медленных движений, определяемой уравнениями

$$z = \begin{cases} \gamma - \Lambda y \equiv z_1 & (\text{при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2) \\ \gamma + Vy \equiv z_2 & (\text{при } \pi/2 < \varphi < 3\pi/2) \end{cases}. \quad (6)$$

Поверхность (6) в пространстве φ, y, z образована из двух плоскостей $z = z_1$ и $z = z_2$, определенных соответственно для значений φ , удовлетворяющих неравенствам $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. При значениях $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ поверхность (6) имеет разрывы I рода. Поверхность медленных движений (6) является устойчивой по отношению к быстрым движениям [5, 6], поскольку $G'_1(\varphi, y, z) = G'_2(\varphi, y, z) = -1 < 0$.

Медленные движения. Траектории медленных движений определяются «вырожденной системой» [4, 6]

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = \gamma - \Lambda y \quad (\text{при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2), \quad (7a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = \gamma + Vy \quad (\text{при } \pi/2 < \varphi < 3\pi/2) \quad (7b)$$

на поверхности медленных движений (6). Доопределение поведения изображающей точки при значениях $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$ производим, учитывая, как обычно [4], знаки и величины производных $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и $\frac{dy}{d\tau}$ вблизи

значений $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$. При этих значениях φ происходит переход изображающей точки либо с плоскости медленных движений $z = z_1$ на плоскость $z = z_2$, либо с плоскости $z = z_2$ на плоскость $z = z_1$ при сохранении $y = \text{const}^*$. Принимая это во внимание и учитывая однозначность поверхности (6) по координате z , далее будем рассматривать систему (7a), (7b) на проекции этой поверхности на плоскость (φ, y) ($-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$). Проекция представляет собой развертку цилиндрической

* Доопределение сделано исходя из поведения изображающей точки при любой гладкой нелинейной характеристике ФД, для которой рассматриваемая негладкая треугольная характеристика может служить аппроксимацией.

фазовой поверхности с образующей, параллельной оси y . Переход изображающей точки через линии склейки происходит с непрерывным изменением координаты y , но со скачком производной $\frac{dy}{d\tau}$.

Разбиение цилиндрической фазовой поверхности на траектории определяют [5] особые траектории (состояния равновесия, предельные циклы и сепаратрисы седел).

3. Разбиение на траектории системы (7а), (7б) для значений параметра $\gamma > 0^*$. При рассматриваемых значениях параметра γ система (7а), (7б) не имеет состояний равновесия, следовательно, особыми траекториями системы (7а), (7б) могут быть только предельные циклы II рода (охватывающие фазовый цилиндр).

Система (7а), (7б) определяет на фазовой поверхности векторное поле. Характер этого поля устанавливается [5], исходя из знаков производных $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и $\frac{dy}{d\tau}$ в областях фазовой поверхности между изоклиной горизонтальных наклонов

$$y = \gamma \Delta^{-1} \quad (\text{при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2), \quad (8a)$$

$$y = -\gamma V^{-1} \quad (\text{при } \pi/2 < \varphi < 3\pi/2) \quad (8б)$$

и изоклиной вертикальных наклонов

$$y = 0. \quad (9)$$

В области фазовой поверхности $y > 0$ движение изображающей точки происходит в сторону возрастания координаты φ , а в области $y < 0$ в сторону убывания. В силу (7а) изоклина (8а) является траекторией этой системы. К ней приближаются все другие траектории системы (7а). Изоклина (8б) также есть траектория системы (7б). Все другие траектории системы (7б) удаляются от нее при значении параметра $V > 0$ и приближаются к ней при $V < 0$ (см. рис. 2а, б).

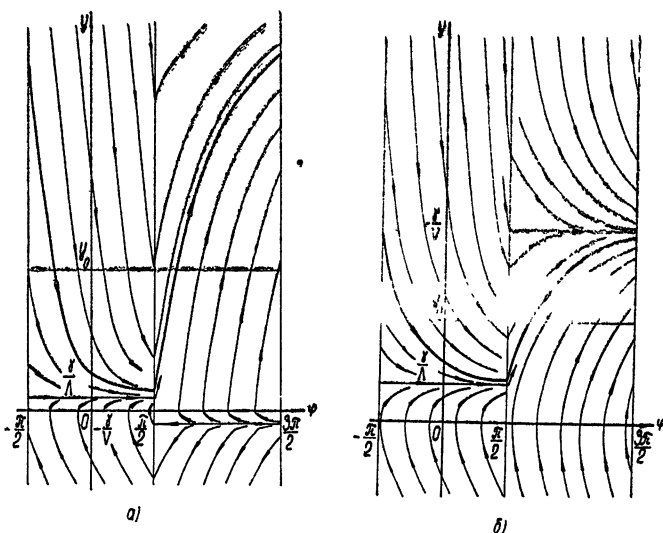


Рис. 2.

* Случай $\gamma < 0$ сводится к рассмотренному заменой переменных $\varphi = -\bar{\varphi}$.

Предельные циклы. Для решения вопроса о существовании предельных циклов II рода сравним наклоны векторных полей систем (7а) и (7б) при одном и том же значении y . С этой целью для рассматриваемой системы определим знак величины

$$r = \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)_a + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)_b \quad (10)$$

при $y = \text{const}$. Величина $r < 0$ в области фазовой поверхности, определенной неравенством $y > y_0 \equiv 2\gamma(\Lambda - V)^{-1}$, и в области $y < 0$. Заметим, что при рассматриваемых положительных значениях параметров γ и λ величина* $y_0 \equiv 2\gamma(\Lambda - V)^{-1} > 0$. В области фазовой поверхности, определенной неравенствами $0 < y < y_0$, $r > 0$. В силу этого для фазовых траекторий скленной системы (7а), (7б), целиком расположенных в области фазовой поверхности, определенной неравенством $y > y_0$, и в области $y < 0$, справедливо соотношение

$$y(\varphi) > y(\varphi + 2\pi). \quad (11)$$

В области, определенной неравенствами $0 < y < y_0$, справедливо соотношение

$$y(\varphi) < y(\varphi + 2\pi). \quad (12)$$

На основании (11) и (12) заключаем [5, 8], что система (7а), (7б) в области фазовой поверхности $y < 0$ не имеет предельных циклов II рода, а в области фазовой поверхности $y > 0$ имеет один устойчивый предельный цикл II рода (либо нечетное число предельных циклов II рода, из которых число устойчивых циклов на единицу больше числа неустойчивых). Цикл, если он существует, должен пересекать прямую $y = y_0$, так как он не может быть целиком расположен в области фазовой поверхности, определенной неравенством $y > y_0$, или в области, определенной неравенством $0 < y < y_0$.

Вопрос о числе и расположении предельных циклов системы (7а), (7б) в области фазовой поверхности $y > 0$ решается исходя из изучения соответствующих точечных преобразований. Обозначим через S_1 , S_2 , S_3 полупрямые $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 3\pi/2$, соответствующие значениям $y > 0$. Фазовые траектории системы (7а) определяют точечное преобразование Π_1 полупрямой S_1 в S_2 , а (7б) точечное преобразование Π_2 полупрямой S_2 в S_3 . Тогда точечное преобразование Π полупрямой S_1 в S_3 представляется как произведение $\Pi = \Pi_1 \Pi_2$ преобразований Π_1 и Π_2 .

Рассмотрим преобразование Π_1 . Решение системы (7а) имеет вид

$$\varphi = \gamma\Lambda^{-1}\tau - C_1\Lambda^{-1}e^{-\Lambda\tau} + C_2, \quad y = \gamma\Lambda^{-1} + C_1e^{-\Lambda\tau}. \quad (13)$$

Постоянные C_1 и C_2 выбираем так, чтобы удовлетворялись условия $\varphi = -\pi/2$, $y = y_0 > 0$ при $\tau = 0$. Пусть через время τ_1 изображающая точка достигает полупрямой S_2 в точке $\varphi = \pi/2$, $y = y_1$. Подставив $\tau = \tau_1$ в (13) и выражая y_0 и y_1 через τ_1 получим формулы точечного преобразования Π_1 :

$$\begin{aligned} y_0 &= (\pi\Lambda - \gamma\tau_1)(1 - e^{-\Lambda\tau_1})^{-1} + \gamma\Lambda^{-1}, \\ y_1 &= (\pi\Lambda - \gamma\tau_1)(e^{\Lambda\tau_1} - 1)^{-1} + \gamma\Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим преобразование Π_2 . Решение системы (7б) имеет вид

* Величина y_0 есть безразмерная начальная расстройка. Поэтому для системы ФАП при нулевой значении энергии в элементах фильтров в момент включения изображающая точка на поверхности (φ, y) всегда начинает движение с линии $y = y_0$.

$$\varphi = -\gamma V^{-1} \tau + C_3 V^{-1} e^{V\tau} + C_4, \quad y = -\gamma V^{-1} + C_3 e^{V\tau}. \quad (15)$$

Постоянные C_3 и C_4 выбираем так, чтобы удовлетворялись условия $\varphi = \pi/2$, $y = y_1$ при $\tau = \tau_1$. Пусть через время $\tau = \tau_1 + \tau_2$ изображающая точка достигнет полупрямой S_3 в точке $\varphi = 3\pi/2$, $y = y_2$. Подставляя $\tau = \tau_1 + \tau_2$ в (15) и выражая y_1 и y_2 через τ_2 , получим формулы точечного преобразования Π_2 :

$$\begin{aligned} y_1 &= (V\pi + \gamma\tau_2) (e^{V\tau_2} - 1)^{-1} - \gamma V^{-1}, \\ y_2 &= (V\pi + \gamma\tau_2) (1 - e^{-V\tau_2})^{-1} - \gamma V^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (14) определяют кривую A , расположенную в плоскости y_1, y_0 , а уравнение (16) кривую B , расположенную в плоскости y_1, y_2 . Точка пересечения этих кривых определяет неподвижную точку точечного преобразования Π .

Асимптоты кривых A и B определяются соответственно уравнениями

$$y_0 = y_1 + \pi\Lambda, \quad y_2 = y_1 + V\pi. \quad (17)$$

Учитывая (17) и знаки производных $\frac{dy_0}{dy_1}$, $\frac{d^2y_0}{dy_1^2}$, $\frac{dy_2}{dy_1}$, $\frac{d^2y_2}{dy_1^2}$, устанавливаем единственность неподвижной точки точечного преобразования Π и ее устойчивость. Расположение кривых A и B качественно дано на рис. 3.

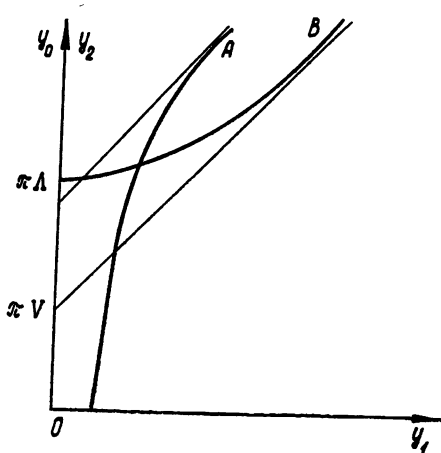


Рис. 3.

Исключая из (14) и (16) параметры τ_1 и τ_2 , получим для определения координат y_1^* и $y_2^* = y_0^*$ неподвижной точки точечного преобразования систему уравнений

$$\begin{aligned} y_0^* - y_1^* + \gamma\Lambda^{-1} \ln [(y_0^* - \gamma\Lambda^{-1}) (y_1^* - \gamma\Lambda^{-1})^{-1}] - \pi\Lambda &= 0, \\ y_0^* - y_1^* - \gamma V^{-1} \ln [(y_0^* + \gamma V^{-1}) (y_1^* + \gamma V^{-1})^{-1}] - \pi V &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Период движения по циклу определяется из (14) и (16) выражением

$$\tau_{\Pi} = \pi\gamma^{-1} (\Lambda - V). \quad (19)$$

Таким образом, у системы (7а), (7б) при $\gamma > 0$ в области фазовой поверхности $y > 0$ всегда существует предельный цикл единственный, устойчивый, охватывающий фазовый цилиндр. Этот цикл полностью определяет качественную структуру разбиения на траектории системы,

(7а), (7б). Расположение фазовых траекторий системы представлено на рис. 2а, б для $V > 0$ и $V < 0$ соответственно.

Для установления зависимости от параметра γ расположения предельного цикла II рода на фазовой поверхности (φ, y) определим поворот векторного поля системы (7а), (7б) при изменении этого параметра [5, 8]. Возьмем $\gamma_2 < \gamma_1$. Разность направлений векторных полей определяется выражением

$$R = \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)_{\gamma=\gamma_2} - \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)_{\gamma=\gamma_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{y}. \quad (20)$$

Для области фазовой поверхности $y > 0$ величина R имеет отрицательный знак. Пользуясь этим свойством поворота векторного поля системы (7а), (7б), устанавливаем, что устойчивый предельный цикл II рода на цилиндре опускается с уменьшением параметра γ , т. е. ординаты цикла удовлетворяют неравенству $y_{\gamma_2} < y_{\gamma_1}$.

При $\gamma = 0$ прямая $y = 0$ является прямой состояний равновесия системы (7а), (7б). При положительных значениях параметра $V > 0$ в интервале $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ все точки прямой $y = 0$ есть устойчивые состояния равновесия, а в интервале $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ — неустойчивые состояния равновесия системы (7а), (7б). При отрицательных значениях параметра $V < 0$ прямая $y = 0$ есть прямая устойчивых состояний равновесия при любых φ .

Предельные циклы II рода при $\gamma = 0$ отсутствуют в силу того, что величина r , определяемая (10) в области фазовой поверхности $y > 0$, и в области $y < 0$ отрицательна, т. е. $r < 0$.

4. Проведенное исследование динамики системы позволяет сделать вывод о принципиальной невозможности работы исследуемой системы синхронизации в непрерывном режиме. Действительно, отсутствие состояний равновесия системы (7а), (7б) указывает на невозможность существования стационарного режима синхронизма в системе, при котором разность частот устанавливается нулевой, а разность фаз постоянной. При работе в непрерывном режиме в системе устанавливается стационарный режим биений, при котором разность частот периодически меняется около начальной расстройки, а разность фаз растет. Этот режим соответствует движению изображающей точки по предельному циклу II рода. Если расположение предельного цикла таково, что минимальное значение его ординаты достаточно близко к нулю, то движение изображающей точки по предельному циклу вблизи нулевых расстроек происходит достаточно медленно, поскольку производная $\frac{d\phi}{d\tau}$

мала. Такое движение изображающей точки соответствует наличию в системе в течение некоторого времени разности частот, близкой к нулю. В этом случае в системе существует режим биений, при котором периодически повторяется разность частот, близкая к нулю.

Реальные системы ФАП, имеющие разделительный конденсатор в цепи управления, работают только в импульсном режиме. Рассмотрим импульсный режим, при котором работа системы в каждом последующем импульсе не зависит от предыдущих. В этом случае достаточно рассмотреть моноимпульсный режим. Вышеприведенное исследование работы ФАП в непрерывном режиме позволяет определить поведение системы в этом режиме.

В моноимпульсном режиме в исследуемой системе ФАП возможно существование режима квазисинхронизма. Действительно, из расположения фазовых траекторий системы (7а), (7б) следует, что в рассма-

триваемой системе возможно существование такого движения, при котором разность частот в течение конечного интервала времени (в течение импульса) стремится к некоторому постоянному значению, равному γ/Δ , а разность фаз медленно растёт. При достаточно больших постоянных времени T дифференцирующей цепочки (что имеет место на практике) значение γ/Δ достаточно близко к нулю. Тогда движение изображающей точки вблизи линии $y = \gamma/\Delta$ происходит достаточно медленно.

Режим, при котором изображающая точка движется в достаточно малой ϵ -окрестности линии $y = \gamma/\Delta$, будем называть режимом квазисинхронизма со статической ошибкой γ/Δ , а режим прихода изображающей точки с линии начальных расстройок $y = y_0$ в ϵ -окрестность линии $y = \gamma/\Delta$ переходным режимом.

Обозначим время нахождения системы в квазисинхронизме τ_c , время переходного процесса τ_n , максимально допустимое время переходного процесса $\tau_{n\max}$, длительность импульса τ_n (на рис. 4 для траектории I даны обозначения τ_{n1} , τ_{c1}). Очевидно, что пребывание си-

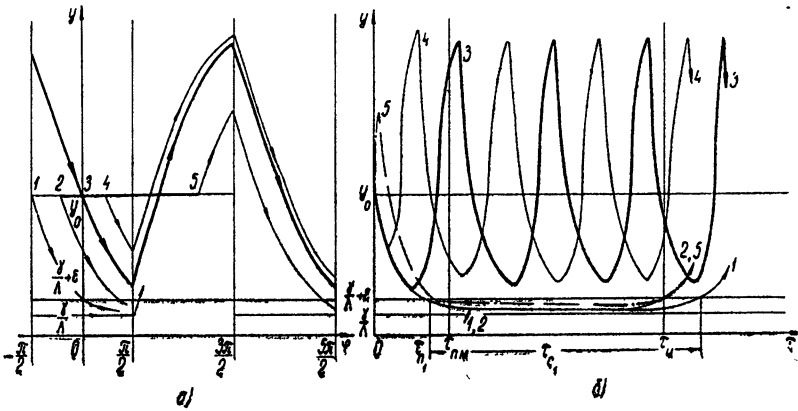


Рис. 4.

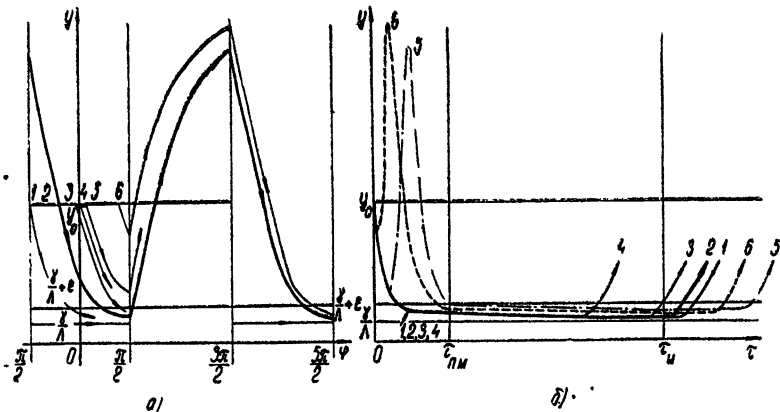


Рис. 5.

стемы в квазисинхронизме в течение импульса осуществляется только при движениях изображающей точки по траекториям, для которых справедливо соотношение

$$\tau_n - \tau_n < \tau_c, \tau_n < \tau_{n\max}. \quad (21)$$

Расположение нескольких таких фазовых траекторий и соответствующих им изменений разности частот y от времени τ качественно представлено на рис. 4а, б и 5а, б (траектория 1, на рис. 4 и траектории 1, 2, 6 на рис. 5).

Установление режима квазисинхронизма зависит от расположения предельного цикла II рода относительно ε -окрестности линии $y = \gamma/\Lambda$. В случае, когда предельный цикл II рода не проходит ни при каких значениях φ в ε -окрестности линии $y = \gamma/\Lambda$, существует один интервал начальных разностей фаз, для которого фазовые траектории не удовлетворяют условиям пребывания системы в квазисинхронизме в течение импульса (интервал 2—5 на рис. 4а выделен жирной линией). Траектории, расположенные выше предельного цикла, заведомо никогда не приходят в ε -окрестность линии $y = \gamma/\Lambda$. На рис. 4 представлены фазовые траектории и соответствующие им осциллограммы в этом случае. Предельный цикл проведен жирной линией. В случае, когда предельный цикл II рода проходит при некоторых значениях φ в ε -окрестности линии $y = \gamma/\Lambda$, все фазовые траектории, приближаясь с ростом времени к предельному циклу, обязательно пройдут в ε -окрестности линии $y = \gamma/\Lambda$. Тем не менее в этом случае также существует интервал начальных разностей фаз (возможно существование нескольких интервалов), для которого фазовые траектории не удовлетворяют условиям (21). На рис. 5а представлен случай, когда для интервала 3—5 начальных разностей фаз (интервал выделен жирной линией) фазовые траектории не удовлетворяют условиям пребывания системы в квазисинхронизме в течение импульса. Осциллограммы зависимости разности частот от времени, соответствующие траекториям рис. 5а, даны на рис. 5б. Для траекторий 2, 5 на рис. 4а и траектории 3 на рис. 5а выполняются граничные соотношения (21) $\tau_n - \tau_n = \tau_c$, $\tau_n < \tau_{n \max}$, а для траектории 5, на рис. 5а соотношения $\tau_n - \tau_n < \tau_c$, $\tau_n = \tau_{n \max}$.

Величина интервалов начальных разностей фаз, для которых фазовые траектории не удовлетворяют условиям пребывания системы в квазисинхронизме в течение импульса уменьшается с уменьшением параметра γ .

Оценим приближенно время переходного процесса в случае, когда ε -окрестность линии $y = \gamma/\Lambda$ определяется некоторой конкретной величиной ε . Время движения изображающей точки по траектории системы (7а) с линии начальных расстройек $y = y_0$ до линии $y = \varepsilon + \gamma/\Lambda$ в случае, когда фазовая траектория проходит только в области фазовой поверхности $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, определяется исходя из (13) выражением

$$\tau_n = \Lambda^{-1} \ln \{ \gamma(\Lambda + V) [\varepsilon\Lambda(\Lambda - V)]^{-1} \}. \quad (22)$$

Для примера рассмотрим $\varepsilon = 0,1 \gamma\Lambda^{-1}$. При значении параметра $\lambda = 0,01$, близком к реальному, переходя в (22) к размерному времени, имеем следующую оценку для времени переходного процесса: $t_n \cong \cong 0,001 T$.

Движение изображающей точки по фазовой траектории, проходящей в ε -окрестности линии $y = \gamma/\Lambda$, происходит примерно с той же скоростью, что и по самой прямой $y = \gamma/\Lambda$, так как наклон касательных к фазовым траекториям при этом близок к горизонтальному. Поэтому время, в течение которого система находится в квазисинхронизме, можно приближенно оценить, рассчитав время движения по прямой $y = \gamma/\Lambda$. Время движения изображающей точки по прямой $y = \gamma/\Lambda$ от линии $\varphi = -\pi/2$ до $\varphi = \pi/2$ получаем из (13): $\tau_c = \pi\Lambda/\gamma$. Переходя к размерному времени при $\lambda = 0,01$, определяем $t_c = 2T/\gamma$. За это время разность фаз нарастает на π . Следовательно, нарастание разности фаз на один

градус происходит при движении в ϵ -окрестности линии $y = \gamma/\Delta$ приближенно за время $t'_c \approx 0,01 T/\gamma$.

Проведенный теоретический анализ системы ФАП с разделительным конденсатором в цепи управления позволяет установить основные особенности данной системы, а также ее отличия от обычных систем ФАП без разделительного конденсатора в цепи управления. Для обычных систем ФАП режиму синхронизма соответствует на фазовой поверхности устойчивое состояние равновесия [2, 3, 9]. В исследуемой системе стационарный режим синхронизма с нулевой остаточной разностью частот невозможен, поскольку на фазовой поверхности отсутствуют состояния равновесия. При импульсной работе в данной системе возможен режим квазисинхронизма, которому соответствует на фазовой поверхности медленное движение изображающей точки за время импульса в достаточно малой окрестности некоторой остаточной расстройки по частоте при постоянном медленном нарастании разности фаз. Причем приход системы в квазисинхронизм и пребывание в квазисинхронизме в течение импульса возможны не при всех значениях начальных разностей фаз. При уменьшении начальной расстройки и при увеличении постоянной времени разделительной цепочки остаточная расстройка уменьшается.

Автор благодарен М. М. Кобрину, предложившему задачу об исследовании данной системы, и Л. Н. Белюстиной за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. А. Певзнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 7, № 1, 103 (1964).
2. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
3. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты. Изд. Связь, М., 1966.
4. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 3, 478 (1960).
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, издание 2, Физматгиз, М., 1959.
6. Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, серия матем., 21, 605 (1957).
7. Д. В. Аносов, Мат. сб., 50, № 3, 299 (1960).
8. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 118 (1958).
9. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 марта 1967 г.

INVESTIGATION OF DYNAMICS IN THE PHASE-FREQUENCY CONTROL SYSTEM WITH DIFFERENTIAL CAPASITOR IN CONTROL LOOP

V. D. Shalfeyev

This paper considers the dynamics of the phase-frequency control system with low frequency and high frequency filters in the control loop when the time constant in the low frequency filter is small. The problem is converted to the exploration of the third order differential equations system with the higher order derivative multiplied by small parameter. The possibility and conditions for the quasistationary modes existence are stated. It is shown that frequency stabilization could be performed but with some error and only in the impulse mode of operation.

УДК 531.391+517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ В ФИЛЬТРЕ НИЖНИХ ЧАСТОТ

В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев

Дано качественное исследование нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка*, описывающей динамику системы фазовой автоподстройки частоты с нелинейным RC -фильтром, состоящим из нелинейной емкости и линейного сопротивления. Получено разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным режимам работы. Определена зависимость полосы захвата от параметров системы.

На практике находят применение системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с инерционно-нелинейными параметрами. В [1] впервые предложено использовать в системе ФАП нелинейный фильтр на выходе фазового детектора (ФД) и рассмотрен случай применения RC -фильтра, состоящего из нелинейного сопротивления и линейной емкости. Некоторые другие системы ФАП с инерционно-нелинейными параметрами описаны в [2]. Экспериментальные результаты работы [3] устанавливают возможность применения в фильтре нижних частот системы ФАП нелинейной емкости.

В настоящей работе рассматривается динамика системы ФАП с однозвенным RC -фильтром, состоящим из нелинейной емкости $C(e)$ и линейного сопротивления R .

Зависимость емкости $C(e)$ от напряжения e (рис. 1) может быть представлена в виде

$$C(e) = C_0 G(e), \quad (1)$$

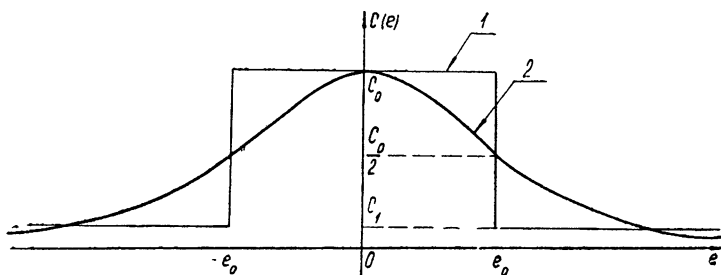


Рис 1.

где C_0 — максимальное значение величины емкости, $G(e)$ — функция, описывающая вид нелинейной зависимости емкости от напряжения,

* Доклад на I Всесоюзной конференции по приборам и методам измерения времени и частоты, Горький, 1966.

нормированная так, что ее максимальное значение равно единице. Функцию $G(e)$ будем называть характеристикой нелинейной емкости.

Введем следующие обозначения: $\delta\omega$ — расстройка подстраиваемого и эталонного генераторов при разомкнутой петле обратной связи, φ — текущая разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов, $F(\varphi)$ — характеристика ФД, нормированная так, что ее максимальное значение равно единице, E — максимальное значение напряжения с выхода ФД, Ω — максимальная расстройка, создаваемая фазовым детектором и реактивной лампой.

Дифференциальное уравнение исследуемой системы ФАП при некоторых упрощающих предположениях [1, 4] после введения безразмерного времени τ , безразмерного напряжения на емкости u и параметров γ , λ может быть записано в виде

$$\lambda \frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - u, \quad (2)$$

$$\frac{G(u)}{\lambda} \frac{du}{d\tau} = F(\varphi) - u,$$

где

$$\tau = t \sqrt{\Omega/RC_0}, \quad u = e/E, \quad \lambda = 1/\sqrt{\Omega RC_0}, \quad \gamma = \delta\omega/\Omega.$$

Ниже система (2) изучается отдельно в двух случаях различных аппроксимаций нелинейных функций $F(\varphi)$ и $G(u)$.

1-й случай. Рассматривается полигональная аппроксимация периодической (с периодом 2π) характеристики фазового детектора

$$F(\varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \varphi & \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ 2 - \frac{2}{\pi} \varphi & \left(\text{при } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

и прямоугольная аппроксимация характеристики нелинейной емкости (кривая 1 на рис. 1).

$$G(u) = \begin{cases} 1 & (\text{при } -H < u < H) \\ \mu & (\text{при } |u| > H) \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $H = e_0/E$ — величина напряжения на емкости, представляющая некоторую условную границу участков характеристики нелинейной емкости, соответствующих малой и большой емкостям, отнесенная к величине максимального напряжения с выхода ФД, а $\mu = C_1/C_0$ — отношение минимальной емкости к максимальной (см. рис. 1). Задача решается в предположении $C_1 \ll C_0$, что соответствует неравенству $\mu \ll 1$. В рассматриваемом случае система (2) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \lambda z - \frac{2}{\pi} \varphi \quad \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; z_2 < z < z_1 \right), \quad (5a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \lambda z + \frac{2}{\pi} (\varphi - \pi) \quad \left(\text{при } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; z_2 < z < z_1 \right), \quad (5b)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \lambda z - \frac{2}{\pi} \varphi \equiv M(\varphi, z) \quad \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \right. \\ \left. z > z_1, \quad z < z_2 \right), \quad (5в)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \lambda z + \frac{2}{\pi} \varphi - \pi \equiv N(\varphi, z) \quad \left(\text{при } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; \right. \\ \left. z > z_1, \quad z < z_2 \right), \quad (5г)$$

где

$$z_1 = (\gamma + H)/\lambda, \quad z_2 = (\gamma - H)/\lambda.$$

За фазовое пространство изучаемой системы в связи с периодичностью правых частей по φ принимается фазовый цилиндр с образующей, параллельной оси z . Ниже рассматривается развертка цилиндра на плоскость. Система (5) получена от склейки четырех систем (5а) — (5г), однозначно определенных в шести областях фазового цилиндра, попарно имеющих общую границу, причем на линиях склейки $\varphi = -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ производная $dz/d\tau$ непрерывна, а на линиях $z = z_1, z_2$ разрыва. На рис. 2 буквами *a, б, в, г*, обозначены области фазовой поверхности, в которых определены соответствующие системы (5а) — (5г). В областях *a, б* (рис. 2), определенных неравенствами $z_2 < z < z_1$, разбиение цилиндра на траектории определяется системой, полученной от склейки линейных систем (5а) и (5б). Физически эти уравнения описывают работу системы ФАП с линейным интегрирующим фильтром с постоянной времени, равной RC_0 . В областях *в, г* (рис. 2) цилиндра, определенных неравенствами $z < z_2, z > z_1$, справедливы системы уравнений (5в) и (5г)*. При сделанном предположении $\mu \ll 1$ эти уравнения описывают работу системы ФАП с линейным интегрирующим фильтром с малой постоянной времени, равной $RC_1 \ll RC_0$.

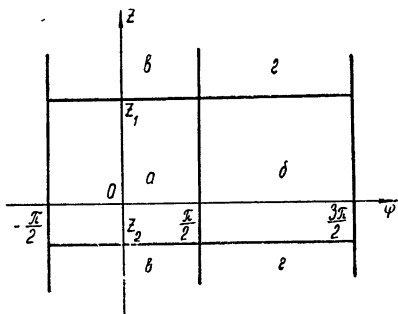


Рис. 2.

Склеенная система (5а), (5б) изучена в [4]. В работе [1] представлен фазовый портрет системы (5в), (5г) в случае, когда параметр $\mu = 0$.

При $\mu \ll 1$ система (5в), (5г) имеет малый параметр при производной и ее исследование сводится к изучению быстрых и медленных движений на фазовой поверхности [5]. Линия медленных движений, определяемая уравнениями

* Как обычно [5], фазовые траектории считаем всюду непрерывными на фазовой поверхности и, в частности, на линиях склейки, в точках которых производная $\frac{dz}{d\tau}$ терпит разрыв.

$$z = \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{2}{\pi\lambda} \varphi \quad \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; z > z_1, z < z_2 \right),$$

$$z = \frac{\gamma}{\lambda} + \frac{2}{\pi\lambda} (\varphi - \pi) \quad \left(\text{при } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; z > z_1, z < z_2 \right),$$
(6)

является устойчивой по отношению к быстрым движениям, поскольку $M'_z(\varphi, z) = N'_z(\varphi, z) = -\lambda < 0$. Поведение изображающей точки на линии медленных движений определяется «вырожденной» системой (5в), (5г) при $\mu = 0$. Уравнения медленных движений имеют вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \left(\gamma - \frac{2}{\pi} \varphi \right) \quad \left(\text{при } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; z > z_1, z < z_2 \right),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \left[\gamma + \frac{2}{\pi} (\varphi - \pi) \right] \quad \left(\text{при } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}; z > z_1, z < z_2 \right).$$
(7)

Фазовые траектории системы (5) получаются от склейки траекторий систем (5а)—(5г). Перейдем к изучению разбиения фазового цилиндра системы (5) на траектории. Будем рассматривать отдельно случаи $\gamma \leq H$ и $\gamma > H$.

$\gamma \leq H$. В этом случае величина $z_2 \leq 0$. Состояние равновесия системы (5) $(\pi\gamma/2, 0)$ — устойчивый фокус или узел, а $(\pi - \pi\gamma/2, 0)$ — седло. Рассмотрением соответствующих точечных преобразований [4, 5, 6] установлено, что петля II рода сепаратрисы седла $(\pi - \pi\gamma/2, 0)$, существующая при некоторых значениях параметров системы, расположена целиком в части фазовой поверхности, удовлетворяющей неравенствам $z_2 < z < z_1$. Следовательно, полоса захвата исследуемой системы при $\gamma \leq H$ определяется бифуркацией, связанной с образованием от склейки траекторий систем (5а) и (5б) петли сепаратрисы седла II рода, т. е. так же, как в системе ФАП с линейным интегрирующим фильтром [4].

Зависимость полосы захвата γ_s от параметров, полученная в [4] для этого случая, дана на рис. 3 сплошной жирной линией А.

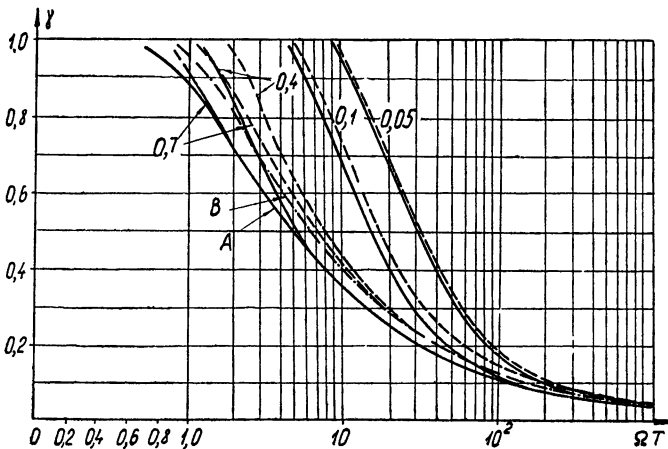


Рис. 3.

На рис. 4а-в представлено расположение фазовых траекторий системы (5) для значений параметров $\gamma < \gamma_s \leq H$, $\gamma = \gamma_s \leq H$, $\gamma_s < \gamma \leq H$ соответственно. Жирными линиями выделены сепаратрисы седел и предельные циклы.

$\gamma > H$. В этом случае величина $z_2 > 0$. Состояния равновесия системы (5) определяются системами (5в) и (5г) и являются состояниями равновесия уравнений медленных движений (7). Состояние равновесия $(\pi\gamma/2, 0)$ — устойчивое, а $(\pi - \pi\gamma/2, 0)$ — неустойчивое. Расположение фазовых траекторий системы (5) для значений параметров

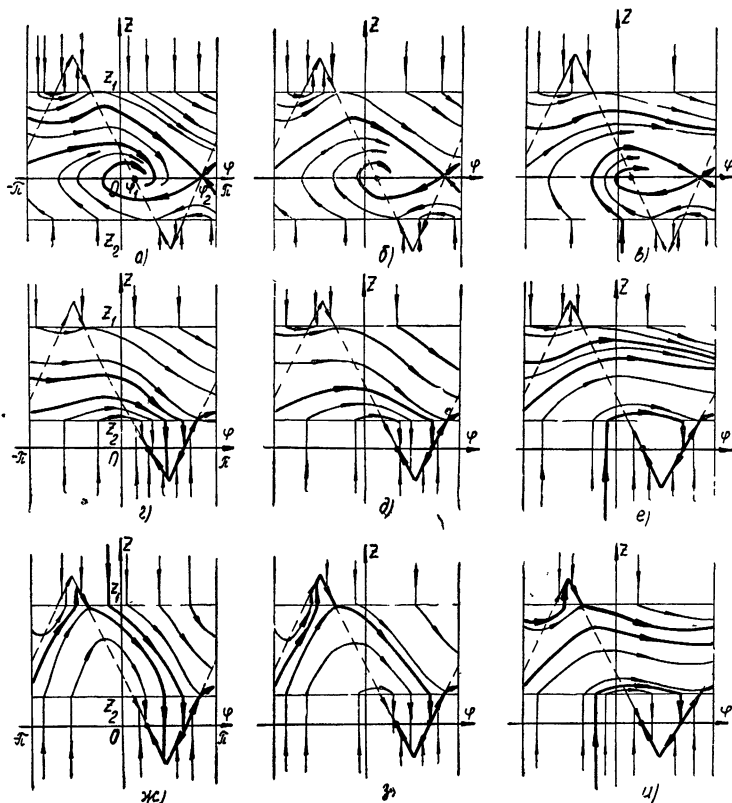


Рис. 4.

$H < \gamma < \gamma_{33}$, $H < \gamma = \gamma_{33}$, $\gamma > \gamma_{33} > H$ дано на рис. 4г, ж; д, з; е, и соответственно. Жирными линиями выделены предельные циклы и кривые, играющие в данном случае (вместо сепаратрис) роль кривых, разделяющих потоки траекторий. Полоса захвата при $\gamma > H$ определяется бифуркацией, связанной с совпадением разделяющих кривых. Бифуркационные значения параметров, соответствующие совпадению разделяющих кривых, могут быть определены аналитически из соответствующих точечных преобразований. В силу громоздкости этих преобразований в данной работе бифуркационные значения определены приближенно, исходя из численного построения разделяющих кривых [7]. Построение проводилось на ЭЦВМ БЭСМ-3М. Получено несколько сечений $H = \text{const}$ бифуркационной поверхности $\gamma = \gamma_3(\lambda, H)$, определяющей полосу захвата при $\gamma > H$. Эти сечения в координатах γ и $\Omega T = 1/\lambda^2$ даны на рис. 3 сплошными тонкими линиями. Здесь $T = RC_0$.

Из сравнения полученных кривых (рис. 3) следует, что полоса захвата в системе ФАП с рассматриваемым нелинейным фильтром

в случае $\gamma > H$ больше, чем в системе с соответствующим линейным фильтром. В случае $\gamma \leq H$ полосы одинаковы*.

2-й случай. Рассматривается синусоидальная аппроксимация характеристики фазового детектора $F(\varphi) = \sin \varphi$ и аппроксимация характеристики нелинейной емкости функцией $G(u) = 1/(1+u^2/H^2)$ (кривая 2 на рис. 1). Система (2) в этом случае может быть записана в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = z \equiv \Phi(\varphi, z),$$

$$\frac{dz}{d\tau} = (\gamma - \lambda z - \sin \varphi) \left[1 + \frac{1}{H^2} (\gamma - \lambda z)^2 \right] \equiv Z(\varphi, z). \quad (8)$$

Фазовое пространство системы (8) есть поверхность цилиндра с образующей, параллельной оси z . Ниже фазовый цилиндр принимается развернутым на плоскость (φ, z) . Разбиение фазовой поверхности на траектории определяется особыми траекториями [5]: состояниями равновесия, сепаратрисами седел и предельными циклами. Физическая интерпретация особых траекторий в данной системе аналогична интерпретации, данной в [8].

Состояния равновесия системы (8) имеют координаты

$$\varphi_1 = \arcsin \gamma, \quad z_1 = 0; \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma, \quad z_2 = 0.$$

Определяя корни соответствующих характеристических уравнений [7], устанавливаем, что состояние равновесия $(\varphi_1, 0)$ — устойчивый узел или фокус (при $\Delta \equiv \lambda^2(1 + \gamma^2/H^2) - 4\sqrt{1 - \gamma^2} > 0$ — устойчивый узел, при $\Delta < 0$ — устойчивый фокус). Состояние равновесия $(\varphi_2, 0)$ — седло. При $\gamma = 1$ узел $(\varphi_1, 0)$ и седло $(\varphi_2, 0)$ сливаются, образуя сложное состояние равновесия типа седло-узел. При $\gamma > 1$ состояний равновесия нет.

Сепаратрисы седел. Аналогично тому, как это сделано в [8], определяется расположение сепаратрис седла $(\varphi_2, 0)$. Установлено, что при изменении параметра λ касательные к сепаратрисам в седле $\chi_{1,2}$ поворачиваются по часовой стрелке, так как

$$\frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma^2}{H^2} \right) \left\{ 1 \mp \left[1 + \frac{4H^2 \sqrt{1 - \gamma^2}}{\lambda^2(H^2 + \gamma^2)} \right]^{-1/2} \right\} < 0. \quad (9)$$

Для изучения зависимости векторного поля системы (8) от параметра λ найдем производную

$$R = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{3\lambda^2}{H^2} \left(z^2 + \frac{2 \sin \varphi - 6\gamma}{3\lambda} z + \frac{H^2 + 3\gamma^2 - 2\gamma \sin \varphi}{3\lambda^2} \right). \quad (10)$$

Из (10) следует, что величина $R < 0$ на всем фазовом цилиндре для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \gamma < 1$, $H > 1/\sqrt{3}$. Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \gamma < 1/3$, $\gamma \sqrt{3} < H < 1/\sqrt{3}$, величина $R < 0$ в области фазового цилиндра $z > 0$. Следовательно, для этих значений параметров γ и H при увеличении параметра λ поворот векторного поля в рассматриваемых областях фазового цилиндра происходит по часовой стрелке [9].

* Как сообщил авторам М. В. Капранов (МЭИ), им совместно с Т. И. Наяновой получены приближенные выражения для полосы захвата этой системы в случае синусоидальной характеристики фазового детектора.

Взаимное расположение сепаратрис седла $(\varphi_2, 0)$ для этих значений параметров γ и H при $\lambda > 0$ можно установить с помощью оценок для частей сепаратрис S_1 и S_2 (рис. 5) аналогично тому, как это сделано в [8, 10] для соответствующих уравнений.

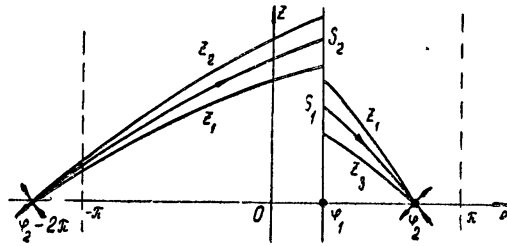


Рис. 5.

Рассмотрим вспомогательные кривые

$$\frac{H}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\lambda z_1 - \gamma}{H} = \frac{H^2}{H^2 + \gamma^2} [\rho(\varphi) - \rho(\varphi_2 - 2\pi)]^{1/2} - \lambda(\varphi - \varphi_2 + 2\pi) - \frac{H}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{H},$$

$$z_2 = [\rho(\varphi) - \rho(\varphi_2 - 2\pi)]^{1/2}, \tag{11}$$

$$z_3 = [\rho(\varphi) - \rho(\varphi_2) + \lambda^2(\varphi_2 - \varphi)^2]^{1/2},$$

$$\frac{H}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\lambda z_4 - \gamma}{H} = \frac{H^2}{H^2 + \gamma^2} [\rho(\varphi) - \rho(\varphi_2)]^{1/2} + \lambda(\varphi_2 - \varphi) - \frac{H}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{H},$$

где $\rho(\varphi) = 2(1 + \gamma^2/H^2)(\gamma\varphi + \cos \varphi)$. Сравнивая векторные поля системы (8) и дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют кривые (11), устанавливаем, что кривые (11) являются мажорирующими для частей сепаратрис S_1 и S_2 ($z > 0$) седла системы (8). А именно, ординаты z_{S_1} , z_{S_2} сепаратрис S_1 , S_2 (рис. 5) удовлетворяют неравенствам $z_1 \leq z_{S_2} \leq z_2$ на отрезке $\varphi_2 - 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_1$ и $z_3 \leq z_{S_1} \leq z_4$ на отрезке $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. При условии

$$\lambda < \lambda_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{H}{(H^2 + \gamma^2)^{1/2}} \{ [2\gamma(\pi + 2 \arcsin \gamma) + 4\sqrt{1 - \gamma^2}]^{1/2} - [2\gamma(-\pi + 2 \arcsin \gamma) + 4\sqrt{1 - \gamma^2}]^{1/2} \} \tag{12}$$

сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ ниже, чем сепаратриса S_2 , а при условии

$$\lambda > \lambda_2 = 2[\pi\gamma(1 + \gamma^2/H^2)]^{1/2}/(\pi - 2 \arcsin \gamma) \tag{13}$$

сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ выше, чем сепаратриса S_2 . Учитывая свойства (9), (10) векторного поля, устанавливаем, что для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \gamma < 1$, $H > 1/\sqrt{3}$ и $0 < \gamma < 1/3$, $\gamma\sqrt{3} < H < 1/\sqrt{3}$, при переходе от значений параметра λ , удовлетворяющих (12), к значениям λ , удовлетворяю-

щим (13), система (8) обязательно, и притом единственный раз, проходит через бифуркационное состояние, при котором сепаратриса $S_1(S_2)$ идет из седла в седло, охватывая фазовый цилиндр. Бифуркационные значения параметров, соответствующие петле сепаратрисы седла, определялись приближенно, с помощью построения численными методами на ЭЦВМ М-20 сепаратрис, идущих из седла в седло*. Ряд сечений $H = \text{const}$ бифуркационной поверхности $\gamma = \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T = 1/\lambda^2)$ представлен на рис. 3 пунктирными линиями.

В результате проведенного рассмотрения осталось недоказанным существование петли сепаратрисы седла для значений параметров γ и H , удовлетворяющих неравенствам $H/\sqrt{3} < \gamma < 1$, $0 < H < 1/\sqrt{3}$. Для этих значений параметров вопрос о существовании бифуркации сепаратрис седла решен, исходя из качественного интегрирования [7] приближенными методами грубой системы (8). Сепаратрисы седла строились приближенно для ряда значений параметров при помощи ЭЦВМ М-20. Установлено, что при одних и тех же значениях γ и H существуют такие значения $\bar{\lambda}_1$, при которых сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ ниже, чем сепаратриса S_2 , и такие значения $\bar{\lambda}_2$, при которых сепаратриса S_1 пересекает прямую $\varphi = \varphi_1$ выше, чем сепаратриса S_2 . Следовательно, при этих значениях γ и H существует хотя бы одно значение λ , удовлетворяющее неравенствам $\bar{\lambda}_1 < \lambda < \bar{\lambda}_2$, при котором сепаратриса $S_1(S_2)$ идет из седла в седло, охватывая фазовый цилиндр. Соответствующие бифуркационные значения параметров определены численно с помощью счета на ЭЦВМ М-20. Сечения $H = \text{const}$ бифуркационной поверхности $\gamma = \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T)$ даны на рис. 3 пунктирными линиями.

Рассмотрим вопрос об устойчивости петли II рода сепаратрисы седла $(\varphi_2, 0)$ [5, 11, 12]. Для этого достаточно определить знак седловой величины, определяемой равенством

$$\sigma = \Phi'_\varphi(\varphi_2, 0) + Z'_z(\varphi_2, 0). \quad (14)$$

Для седла $(\varphi_2, 0)$ системы (8) седловая величина отрицательна, т. е.

$$\sigma = -\lambda(1 + \gamma^2/H^2) < 0. \quad (15)$$

Следовательно, петля II рода сепаратрисы седла $(\varphi_2, 0)$ устойчива.

Предельные циклы. Устойчивость петли сепаратрисы седла позволяет определить устойчивость возникающего из нее предельного цикла II рода [11, 12]. В силу (15) из петли сепаратрисы седла может родиться единственный, устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

Для дальнейшего рассмотрения вопроса о существовании предельных циклов системы (8) применим критерий Бендиксона — Дюлака на цилиндре [5, 8, 9], утверждающий, что если выражение

$$D = \frac{\partial(B\Phi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(BZ)}{\partial z}$$

знакопостоянно в некоторой области фазовой поверхности $(B(\varphi, z) — \text{некоторая непрерывная, с непрерывными производными функция})$, то в этой области не существует предельных циклов I рода и не может быть более одного предельного цикла II рода. Выберем функцию вида

$$B(\varphi, z) = \left[1 + \frac{(\gamma - \lambda z)^2}{H^2} \right]^{-1}. \quad (16)$$

* Счет по приближенному построению сепаратрис спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭЦВМ М-20.

Так как для системы (8) величина $D = -\lambda < 0$ не меняет знака на всей фазовой поверхности, то система (8) не имеет предельных циклов I рода и может иметь не более одного предельного цикла II рода. Для доказательства существования при некоторых значениях параметров предельного цикла II рода достаточно показать, что у системы (8) при этих параметрах при наличии траекторий, для которых выполняется неравенство

$$z(\varphi + 2\pi) < z(\varphi), \quad (17)$$

существует траектория, для которой справедливо неравенство

$$z(\varphi + 2\pi) \geq z(\varphi). \quad (18)$$

Ординаты изоклины горизонтальных наклонов системы (8) $z = (\gamma - \sin \varphi)/\lambda$ ограничены некоторой величиной z_{\max} . Следовательно, в части фазовой поверхности, ограниченной неравенством $z > z_{\max}$, все траектории системы (8) имеют отрицательный наклон и удовлетворяют неравенству (17). В силу установленного выше расположения сепаратрис S_1 и S_2 траектории системы (8), удовлетворяющие неравенству (18), существуют при значениях параметров $\gamma > \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T)$. Следовательно, при этих значениях параметров система (8) имеет предельный цикл II рода, единственный в силу критерия Бендиксона—Дюляка. Цикл расположен в области фазового цилиндра $z > 0$. Отсутствие предельных циклов II рода, целиком лежащих в области цилиндра $z < 0$, устанавливается так же, как это сделано для уравнения маятника в [5].

Для исследования устойчивости предельного цикла II рода определяется знак характеристического показателя h_s , соответствующего этому циклу [5]. Введем в уравнение (8) новое время $\tau_1 = \tau [1 + (\gamma - \lambda z)^2 / H^2]$. Тогда вместо (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau_1} &= z \left[1 + \frac{(\gamma - \lambda z)^2}{H^2} \right]^{-1} \\ \frac{dz}{d\tau_1} &= \gamma - \lambda z - \sin \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Указанная замена времени не изменяет направления движения на траекториях системы (8). Следовательно, устойчивость циклов систем (8) и (19) одинакова. Определяя знак характеристического показателя h_s предельного цикла II рода системы (19), имеем $h_s = -\lambda < 0$. В силу этого единственный предельный цикл II рода системы (8) устойчив, если он существует.

Полоса захвата. Как принято в литературе [2, 4], под полосой захвата системы ФАП понимается область начальных расстроек, в которой при любых начальных условиях осуществляется вхождение системы в синхронизм. Граница этой области, которая также часто называется полосой захвата, отделяет значения параметров, для которых, хотя бы при некоторых начальных условиях, в системе возможен выход из синхронизма. Согласно проведенному теоретическому рассмотрению в исследуемой системе выход из синхронизма возможен только лишь при существовании на фазовой поверхности устойчивого предельного цикла II рода (имеется в виду случай $\lambda > 0$, реализуемый на практике). Его возникновение, как установлено выше, происходит от петли сепаратрисы седла II рода. Следовательно, бифуркация, связанная с петлей сепаратрисы седла II рода, определяет в данной задаче полосу захвата. Полученные графики зависимости полосы захвата от параметров системы представлены на рис. 3 пунктирными линиями.

Для сравнения штрих-пунктирной линией B представлена зависимость полосы захвата системы ФАП с линейным фильтром.

Для значений начальной расстройки γ , удовлетворяющих неравенству $\gamma < \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T)$ ($\gamma_{\text{биф}}$ соответствует бифуркации, связанной с петлей сепаратрисы седла II рода), на фазовой поверхности отсутствуют предельные циклы I и II рода (рис. 6а). Для всех начальных условий траектории идут к устойчивому состоянию равновесия. Физически это соответствует установлению в системе ФАП стационарного

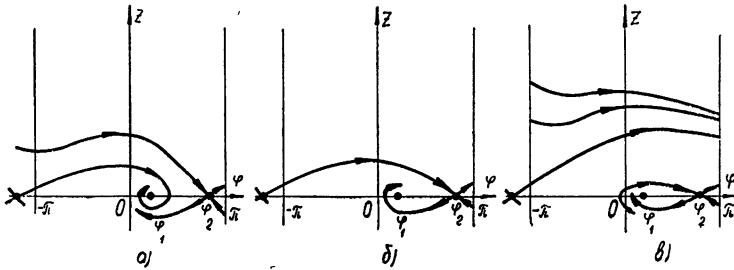


Рис. 6.

режима синхронизма. Для значений начальной расстройки γ , удовлетворяющих неравенству $\gamma > \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T)$, в области фазовой поверхности $z > 0$ существует единственный устойчивый предельный цикл II рода (рис. 6в). Это соответствует тому, что в системе ФАП при некоторых начальных условиях возможно установление стационарного режима биений II рода, означающего выход из синхронизма. Значение параметра $\gamma = \gamma_{\text{биф}}(H, \Omega T)$ является бифуркационным, при котором на фазовой поверхности имеется петля сепаратрисы седла II рода. В силу проведенного исследования установлено, что эта бифуркация является единственной, определяющей полосу захвата.

Отметим одну особенность рассматриваемой системы ФАП, касающуюся ее фильтрующей способности. Как известно [2], фильтрующая способность системы ФАП увеличивается при увеличении постоянной времени фильтра в петле обратной связи. В системе ФАП с нелинейным фильтром, рассмотренной в [1], величина постоянной времени фильтра при работе в стационарном режиме синхронизма максимальна. В данной системе ФАП это не имеет места. Величина постоянной времени фильтра в стационарном режиме работы ФАП зависит от начальной расстройки $\delta\omega$, поскольку в этом режиме на нелинейной емкости фильтра есть остаточное напряжение, пропорциональное начальной расстройке.

Авторы глубоко благодарны Л. Н. Белюстиной за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Капранов, В. А. Иванов, Н. Н. Иванова, Радиотехника и электроника, 5, № 11, 1774 (1960).
2. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
3. Ю. В. Ульяновский, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 8, № 1, 96 (1965).
4. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Н. А. Губарь, ПММ, 25, № 6, 1011 (1961).

7. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 638 (1959).
8. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
9. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 118 (1958).
10. Л. Н. Белюстина, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 175.
11. Е. А. Леонтович, ДАН СССР, 78, 641 (1951).
12. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Мат. сб., 48 (90), 335 (1959).

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 января 1967 г.

DYNAMICS INVESTIGATION FOR THE AUTOMATIC PHASE-FREQUENCY
CONTROL SYSTEM WITH NONLINEAR CAPACITANCE IN LOW
FREQUENCY FILTER

V. N. Byelach, V. D. Shalfeyev

Dynamics of automatic phase-frequency control system with nonlinear RC -filter consisting of nonlinear capacitance and linear resistance is described using second order nonlinear system of differential equations. The qualitative study of this equations is provided. The parameters space decomposition showing the domains corresponding to different modas of operation is obtained. Band of entrainment as a function of system parameters is determined.

УДК 531.391.3/4+621.396.6.078.6

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ С ИНЕРЦИОННЫМ УПРАВЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В. П. Пономаренка

Дано качественное исследование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего динамику системы частотной автоподстройки частоты с ферритом в качестве управляющего элемента* при гладкой нелинейной характеристике частотного детектора. Рассмотрено влияние запаздывания на динамику этой системы. Для исследования применяются методы теории колебаний. Установлены возможные режимы работы системы, дано разбиение пространства параметров на области, соответствующие этим режимам.

Системы автоматической подстройки частоты широко применяются в современной радиотехнике. В ряде случаев [1, 2] в системах частотной автоподстройки (ЧАП) используется феррит в качестве управляющего элемента. Дифференциальное уравнение системы ЧАП с ферритом в качестве управляющего элемента получено в работе [1], в которой с помощью мажорирования нелинейной характеристики частотного дискриминатора кусочно-линейными функциями дан анализ переходных процессов при некоторых ограничениях на начальные расстройки.

В настоящей работе рассматривается динамика этой системы ЧАП в предположении гладкой нелинейной характеристики частотного дискриминатора. Исследование проводится в двух случаях: при отсутствии запаздывания в кольце автоподстройки и в случае учета запаздывания.

1. Будем считать все звенья системы, кроме фильтра и управляющего элемента, безынерционными, а закон изменения частоты подстраиваемого генератора под воздействием управляющего напряжения линейным. При этих предположениях уравнение рассматриваемой системы может быть представлено в виде [3]

$$\Delta\omega + \Omega K(p) \frac{1}{1 + \tau p} \Phi(\Delta\omega) = \Delta\omega_n, \quad (1)$$

где $\Delta\omega$ — текущее отклонение частоты подстраиваемого генератора от номинального значения; $K(p)$ ($p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициент передачи фильтра нижних частот; $\Phi(\Delta\omega)$ — характеристика частотного дискриминатора, нормированная так, что ее максимальное значение равно единице; Ω — максимальная расстройка, создаваемая частотным дискриминатором и управляющим элементом; $\Delta\omega_n$ — отклонение частоты подстраиваемого генератора от номинального значения при разомкнутой цепи автоподстройки; τ — параметр, характеризующий инерционность уп-

* Доклад на I Всесоюзной конференции по приборам и методам измерения времени и частоты, Горький, 1966.

равляющего элемента [1] (отношение индуктивности обмотки электромагнита к суммарному сопротивлению обмотки электромагнита и внутреннего сопротивления управляющей лампы). Характеристика частотного дискриминатора полагается нелинейной: $\Phi(\Delta\omega) = 2\beta_1\Delta\omega [1 + (\beta_1\Delta\omega)^2]^{-1}$. Здесь β_1^{-1} — отклонение частоты $\Delta\omega$, при котором напряжение на выходе частотного детектора максимально.

Полагая фильтр в петле обратной связи интегрирующим с коэффициентом передачи $K(p) = (1 + Tp)^{-1}$ (T — постоянная времени) и вводя безразмерное время t' и параметры γ , n , β , получаем уравнения рассматриваемой системы в дифференциальной форме [1]:

$$\frac{dx}{dt'} = y, \quad \frac{dy}{dt'} = \gamma - x - \Phi(x) - ny, \quad (2)$$

где $t' = t(T\tau)^{-1/2}$, $x = \Delta\omega\Omega^{-1}$, $\gamma = \Delta\omega_n\Omega^{-1}$, $n = (\tau + T)(\tau T)^{-1/2}$, $\Phi(x) = 2\beta x(1 + \beta^2 x^2)^{-1}$, $\beta = \beta_1\Omega$. Система (2) эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma - x - \Phi(x) - ny}{y}. \quad (3)$$

Фазовым пространством рассматриваемой системы является плоскость (x, y) . Разбиение фазовой плоскости на траектории определяют [4] состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы.

Как следует из (2), при рассматриваемых положительных значениях τ и T параметр $n \geq 2$. Следовательно, система (2) при $n = 0$ не описывает динамику системы ЧАП. Однако математическое рассмотрение этого случая облегчает исследование системы (2) при $n > 0$.

В случае $n = 0$ система (2) является консервативной с общим интегралом

$$y^2 = 2\gamma x - x^2 - 2\beta^{-1} \ln(1 + \beta^2 x^2) + C. \quad (4)$$

Координаты состояний равновесия определяются уравнениями

$$\gamma - x = \Phi(x), \quad y = 0. \quad (5)$$

Первое уравнение из (5) является кубическим относительно x . Графически корни этого уравнения определяются как точки пересечения кривой $f = \Phi(x)$ и прямой $f = \gamma - x$ (рис. 1а). Число состояний равновесия зависит от величины параметров γ и β . Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\beta > 4$, $0 \leq \gamma < \gamma_0$, на фазовой плоскости x, y системы (2) существует* одно состояние равновесия $A_1(x_{A_1}, 0)$. Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\beta > 4$, $\gamma > \gamma_1$, на фазовой плоскости также существует одно состояние равновесия $C_1(x_{C_1}, 0)$. Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\beta > 4$, $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$, существуют три состояния равновесия $A(x_A, 0)$, $B(x_B, 0)$, $C(x_C, 0)$ (рис. 1). Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\beta < 4$, $\gamma \geq 0$, существует одно состояние равновесия $A_3(x_{A_3}, 0)$. Значения γ_0 и γ_1 , определяемые из условия существования двойного корня первого уравнения из (5), удовлетворяют равенствам

$$\gamma = \beta^{-1} [\beta - 1 + \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{1/2} \{1 + 2\beta [\beta + \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{-1}\} \equiv \gamma_0(\beta), \quad (6)$$

$$\gamma = \beta^{-1} [\beta - 1 - \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{1/2} \{1 + 2\beta [\beta - \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{-1}\} \equiv \gamma_1(\beta). \quad (7)$$

* Соответственно точкам пересечения (5) (рис. 1а) даны обозначения состояний равновесия

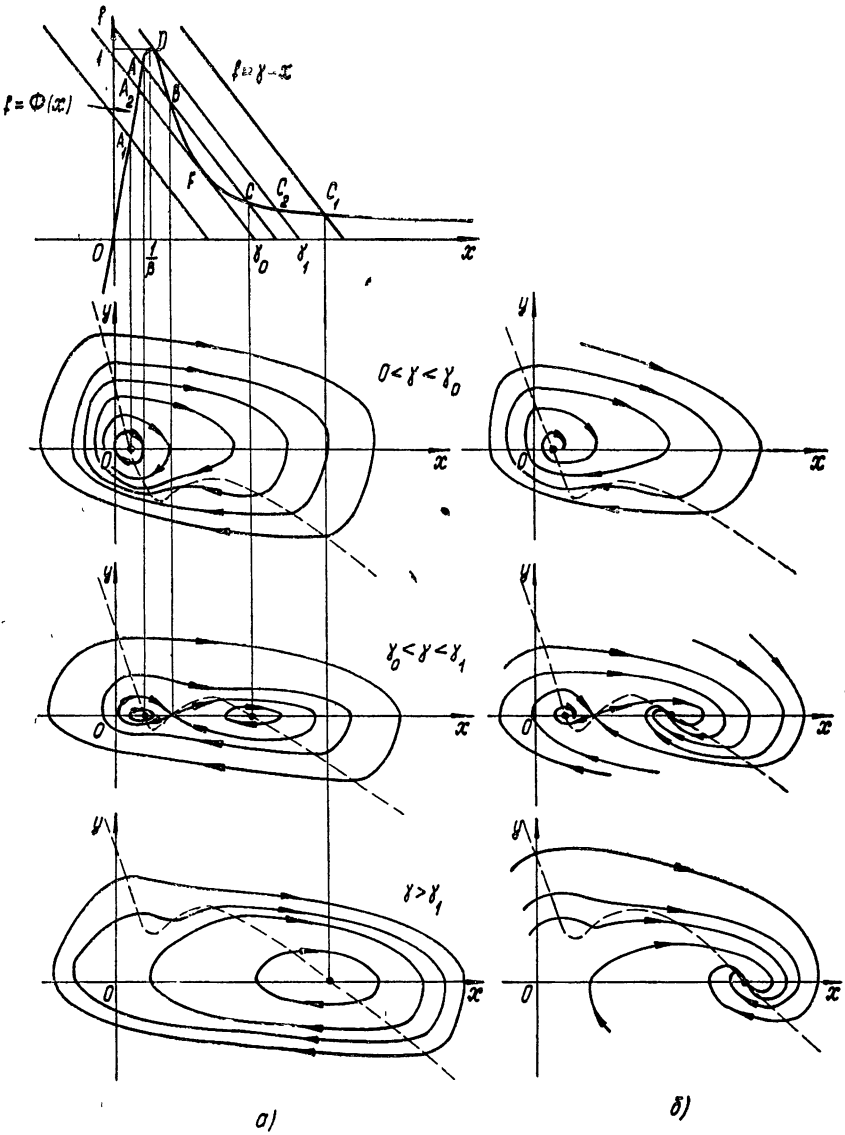


Рис. 1.

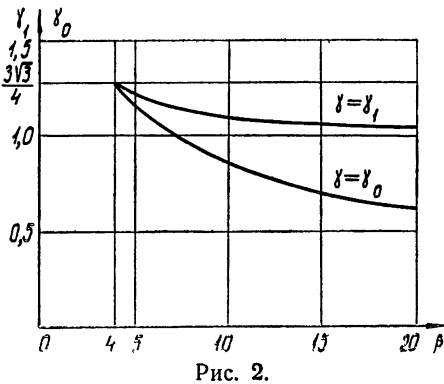


Рис. 2.

Кривые $\gamma = \gamma_0(\beta)$ и $\gamma = \gamma_1(\beta)$ представлены на рис. 2. Характер состояний равновесия и расположение интегральных кривых устанавливаются с помощью изучения общего интеграла (4) аналогично тому, как это сделано в [4]. Состояния равновесия A и C — центры, B — седло. Расположение фазовых траекторий для различных значений $\gamma > 0$ при $\beta > 4$ представлено на рис. 1а. Случай $n \neq 0$. В этом случае система (2) неконсервативна.

Состояния равновесия. Координаты состояний равновесия определяются, как и в консервативном случае, уравнениями (4). Характер состояний равновесия определяется по корням соответствующих характеристических уравнений. Состояние равновесия $A(x_A, 0)$ — устойчивый узел или фокус (при $\delta \equiv n^2 - 4 [1 + \Phi'(x_A)] > 0$ — устойчивый узел, при $\delta < 0$ — устойчивый фокус), состояние равновесия $B(x_B, 0)$ всегда седло, состояние равновесия $C(x_C, 0)$ — устойчивый узел для значений параметра $n \geq 2$. Для значений $0 < n < 2$ состояние равновесия $C(x_C, 0)$ — устойчивый узел при $\delta_1 \equiv n^2 - 4 [1 + \Phi'(x_C)] > 0$, устойчивый фокус при $\delta_1 < 0$.

Бифуркации состояний равновесия происходят при значениях параметров γ и β , удовлетворяющих равенствам (6) и (7). При выполнении равенства (6) состояния равновесия B и C сливаются, образуя сложное состояние равновесия D типа седло—узел; его координаты определяются равенствами

$$x_D = \beta^{-1} [\beta - 1 + \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{1/2}, \quad y_D = 0. \quad (8)$$

При значениях параметров γ и β , удовлетворяющих (7), сливаются состояния равновесия A и B , образуя сложное состояние равновесия F типа седло—узел с координатами

$$x_F = \beta^{-1} [\beta - 1 - \sqrt{\beta(\beta - 4)}]^{1/2}, \quad y_F = 0. \quad (9)$$

Кривые $\gamma = \gamma_0(\beta)$ и $\gamma = \gamma_1(\beta)$ на плоскости (β, γ) пересекаются в точке с координатами $\gamma = 3\sqrt{3}/4$, $\beta = 4$. При этих значениях параметров сложные особые точки D и F сливаются, образуя сложную особую точку более высокого порядка кратности.

Сепаратрисы седла. Направления касательных к сепаратрисам в седле $B(x_B, 0)$ определяются соотношениями

$$k_{1,2} = -\frac{n}{2} \pm \left\{ \frac{n^2}{4} - [1 + \Phi'(x_B)] \right\}^{1/2}. \quad (10)$$

При возрастании параметра n касательные к сепаратрисам в седле поворачиваются по часовой стрелке, так как

$$\frac{\partial k_{1,2}}{\partial n} = -\frac{1}{2} \pm \frac{n}{\{n^2 - 4[1 + \Phi'(x_B)]\}^{1/2}} < 0. \quad (11)$$

Предельные циклы. Пользуясь тем, что с ростом параметра n разность направлений векторных полей системы (2) остается отрицательной, что видно из того, что при $n_2 > n_1$ значение

$$R = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{n=n_2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{n=n_1} = -(n_2 - n_1) < 0, \quad (12)$$

а также используя изменение с ростом n направлений сепаратрис в седле, (соотношение (11)), устанавливаем, что интегральные кривые системы (2) при $n=0$ являются кривыми без контакта для системы (2) при $n>0$. Следовательно [4] при $n>0$ система (2) не имеет предельных циклов. Расположение фазовых траекторий системы (2) при фиксированном $\beta > 4$ для различных значений $\gamma > 0$ и $\beta > 4$ представлено на рис. 16. Пунктирной линией дана изоклина горизонтальных наклонов.

2. Рассмотрим влияние запаздывания на динамику исследуемой системы. Ограничиваясь [5, 6] рассмотрением звена запаздывания, имеющего коэффициент передачи $(1 - T_3 p)$ (T_3 — время запаздывания)*, получаем уравнение системы ЧАП в виде

$$\Delta\omega + \Omega K(p) \frac{1 - T_3 p}{1 + \tau p} \Phi(\Delta\omega) = \Delta\omega_n. \quad (13)$$

После введения безразмерного времени уравнение (13) преобразуется в систему

$$\frac{dx}{dt'} = y, \quad \frac{dy}{dt'} = \gamma - x - \Phi(x) - [n - \alpha\Phi'(x)] y, \quad (14)$$

где $\alpha = T_3 \Omega (\tau T)^{-1/2}$. Уравнение (5) для нахождения координат состояний равновесия, а также равенства (6) и (7) для бифуркационных значений параметров γ и β остаются справедливыми и для системы (14). Состояние равновесия $B(x_B, 0)$ — седло; $C(x_C, 0)$ при $n \geq 2$ — устойчивый узел (при $0 < n < 2$ — устойчивый узел или фокус); $A(x_A, 0)$ — фокус или узел (при $\delta \equiv [n - \alpha\Phi'(x_A)]^2 - 4[1 + \Phi'(x_A)] < 0$ — фокус, при $\delta > 0$ узел). Фокус $A(x_A, 0)$ меняет устойчивость при прохождении значений параметров, удовлетворяющих равенству

$$\alpha = \alpha_0 \equiv n [\Phi'(x_A)]^{-1}. \quad (15)$$

При рассматриваемых положительных значениях параметров системы выполнение равенства (15) может иметь только тогда, когда $\Phi'(x_A) > 0$, т. е. в области параметров $\beta > 0$, $0 \leq \gamma \leq (1 + \beta^{-1})$. Для параметров $\beta > 0$, $1 + \beta^{-1} < \gamma < \gamma_1$ состояние равновесия $A(x_A, 0)$ всегда устойчиво. Рассмотрим далее область параметров $\beta > 0$, $0 \leq \gamma \leq (1 + \beta^{-1})$. При $\alpha < \alpha_0$ фокус устойчив, при $\alpha > \alpha_0$ фокус неустойчив. При значениях параметров, удовлетворяющих равенству (15), фокус $A(x_A, 0)$ системы (14) становится сложным. Для выяснения возможности появления предельного цикла от сложного фокуса [7] и установления его устойчивости определяем знак первой ляпуновской величины. В окрестности фокуса $x = x_A + \xi$, $y = 0 + \eta$ разложение, включающее вторые и третьи степени, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} = & \left\{ - [1 + \Phi'(x_A)] \xi - [n - \alpha\Phi'(x_A)] \eta - \frac{1}{2} [\Phi''(x_A) \xi^2 - \right. \\ & \left. - 2\alpha\Phi''(x_A) \xi\eta] - \frac{1}{6} [\Phi'''(x_A) \xi^3 - 3\alpha\Phi'''(x_A) \xi^2\eta] \right\} \eta^{-1}. \end{aligned}$$

Используя [7], устанавливаем, что первая ляпуновская величина L при $\alpha = \alpha_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} L(\alpha = \alpha_0) = & -\pi n \{ 8\Phi'(x_A) [1 + \Phi'(x_A)]^{3/2} \}^{-1} \times \\ & \times \{ [\Phi''(x_A)]^2 - \Phi'''(x_A) [1 + \Phi'(x_A)] \} < 0, \end{aligned}$$

т. е. отрицательна, так как $\Phi'(x_A) > 0$, $\Phi'''(x_A) < 0$. Следовательно, граница устойчивости $\alpha = \alpha_0$ является безопасной. При переходе от значений $\alpha < \alpha_0$ к значениям $\alpha > \alpha_0$ устойчивый фокус (через сложный фокус) становится неустойчивым; при этом из сложного фокуса рождается единственный устойчивый предельный цикл (рис. 3). Появившийся из

* Такой учет запаздывания возможен при малых значениях параметра T_3 .

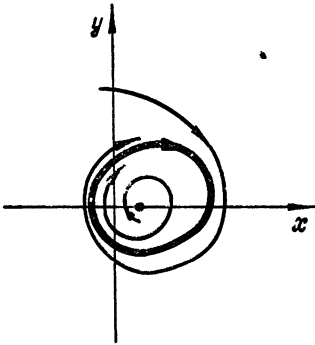


Рис. 3.

сложного фокуса цикл растет с ростом параметра α по крайней мере до тех пор, пока он остается в полосе фазовой плоскости, определенной неравенствами. — $\beta^{-1} < x < \beta^{-1}$. Это следует из свойств поворота векторного поля системы (14) с ростом параметра α и устанавливается аналогично тому, как это сделано в [6].

Проведенное качественное исследование позволяет разбить пространство параметров системы на области, соответствующие различным режимам работы системы автоподстройки (эффективному и неэффективному). При значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\gamma < \gamma_0(\beta)$, осуществляется эффективный режим работы системы ЧАП, при котором имеет место остаточная разность частот $x = x_A < x_D$. В этом случае на фазовой плоскости системы (2) существует единственное состояние равновесия A_1 , область притяжения которого является вся фазовая плоскость.

При $\gamma > \gamma_1(\beta)$ осуществляется неэффективный режим работы ЧАП с остаточной расстройкой $x = x_{C_1} > x_F$. В этом случае на фазовой плоскости системы (2) существует единственное, устойчивое в целом состояние равновесия C_1 . При $\gamma_0(\beta) < \gamma < \gamma_1(\beta)$ в зависимости от начальных условий могут реализоваться эффективный или неэффективный режимы работы ЧАП. Фазовая плоскость системы (2) в этом случае разделяется сепаратрисами седла B на области притяжения состояний равновесия A и C . Наличие звена запаздывания при условии $\alpha > \alpha_0$ приводит к возникновению в системе ЧАП режима автоколебаний, при котором разность частот периодически меняется около остаточной. На фазовой плоскости системы (2) при этом существует устойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия A .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Каганов, Радиотехника, 14, № 8, 57 (1959).
2. М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, Госэнергоиздат, М., 1962.
3. М. В. Капранов, Научн. докл. высш. школы.—Радиотехника и электроника, № 2, 162 (1958).
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
5. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
6. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 277 (1959).
7. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 марта 1967 г.

DYNAMICS OF THE NONLINEAR PHASE-FREQUENCY CONTROL SYSTEM WITH THE RELAXATION CONTROL ELEMENT

V. P. Ponomarenko

This paper provides qualitative study of the second order differential equation describing the dynamics of the phase-frequency control system with the ferrite element and frequency discriminator with smooth nonlinear characteristic. The time delay effect on the dynamics of this system is considered. Possible modes for system operation are found and decomposition of the parameter space into domains corresponding to this modes is provided.

УДК 681.14

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ИНДУКТИВНОГО ПАРАМЕТРОНА БЕЗ СМЕЩЕНИЯ

Л. В. Постников, А. С. Тарантович

Методом медленно меняющихся амплитуд рассмотрена динамика индуктивного параметрона без постоянного подмагничивания ферритовых сердечников. Получены амплитудно-частотные характеристики для основной частоты и субгармоник. Найдены условия существования n -й субгармоники в зависимости от амплитуды подкачки и потерь в резонаторе. Для некоторых значений частоты и амплитуды подкачки построены разбиения фазовой плоскости на траектории.

За последние годы вновь возрос интерес к теории параметрического резонанса в связи с использованием этого явления в различного рода элементах и устройствах радиоэлектроники и вычислительной техники. Кроме известных работ Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и их учеников, появился целый ряд теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию параметрического резонанса в схемах с нелинейной индуктивностью [2-5]. В этих работах либо изучается поведение системы на второй субгармонике [2-4], либо на субгармонике интересующего номера [5]. Представляет интерес найти условие существования колебаний на произвольной субгармонике в зависимости от параметров системы. В настоящей работе такая задача решается на примере индуктивного параметрона без постоянного подмагничивания сердечников.

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПАРАМЕТРОНА

Рассмотрим симметричный параметрон, принципиальная схема которого изображена на рис. 1. На схеме приняты следующие обозначения: i — ток резонансного контура, i_0 — ток параметрического возбуждения, R — эквивалентное сопротивление потерь и нагрузки, C — суммарная емкость контура.

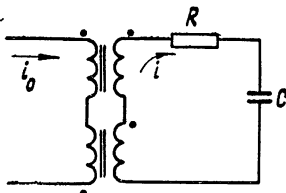


Рис. 1.

Будем считать, что катушки индуктивности выполнены на отдельных одинаковых тороидальных ферритовых сердечниках, так что при выводе уравнения рассеянием магнитных потоков можно пренебречь, и что их вторичные обмотки в резонансном контуре имеют противоположные направления относительно магнитного потока, создаваемого током подкачки i_0 . Будем считать также, что число витков в первичной и вторичной обмотках каждого из колец одинаково. В этих предположениях уравнение, описывающее рассматриваемую схему, имеет вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0, \quad (1)$$

где

$$z = \Phi(i + i_0) + \Phi(i - i_0), \quad (2)$$

а функция $\Phi(x)$ аппроксимирует кривую намагничивания при отсутствии гистерезиса. Разрешая уравнение (2) относительно i , приведем его к виду,

$$Li = f(z, Li_0), \quad (3)$$

где L — коэффициент наклона функции $\Phi(x)$ в начале координат, имеющий размерность индуктивности и введенный для того, чтобы переменные z и f имели одинаковую размерность и уравнение в этих переменных можно было считать безразмерным. Будем считать, что $Li_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon \cos(\omega t)$. Переходя к новому времени $t_n = \omega t$ и заменяя i в уравнении (1) его выражением (3), получим

$$\frac{d^2 z}{dt_n^2} + \frac{R}{L\omega} \frac{df}{dt_n} + \frac{1}{LC\omega^2} f = 0. \quad (4)$$

В предположении, что $i_0 \ll i$ и что зависимость тока в обмотке каждого трансформатора от магнитного потока можно представить кубической параболой, функция f определяется следующим выражением:

$$Li = f(z, Li_0) = z + z^3 + (Li_0)^2 \frac{3z}{(1 + 3z^2)^2}. \quad (5)$$

2. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Будем искать решение уравнения (4) в виде $z = K \cos \vartheta$, $\dot{z} = -\frac{K}{n} \sin \vartheta$,

где $\vartheta = \frac{t_n}{n} + \varphi$. Подставляя это решение в уравнение (4) и усредняя по явно входящему времени за период в предположении, что δ достаточно мало по сравнению с единицей, ω_n — близка к единице, $f(K \cos \vartheta, Li_0)$ функция, мало отличающаяся от $K \cos \vartheta$, а смещение в параметроне отсутствует ($\varepsilon_0 = 0$), получим систему укороченных уравнений Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\tau} &= -K \left\{ \delta \omega_n x + 3\varepsilon^2 [\delta \omega_n x_1 \cos(2n\varphi) - x_4 \sin(2n\varphi)] \right\}, \\ K \frac{d\varphi}{d\tau} &= K \{-\omega_n^2 + x + 3\varepsilon^2 [\delta \omega_n x_4 \sin(2n\varphi) + x_1 \cos(2n\varphi)]\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau = \frac{t_n}{n} \frac{1}{2\omega_n^2}$; $\omega_n = \frac{\omega \sqrt{LC}}{n}$; $\delta = R \sqrt{\frac{C}{L}}$; x , x_1 , x_4 — функции K и n , имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} x(K) &= 1 + \frac{3}{4} K^2 + 3\varepsilon^2 x_0, \\ x_0(K) &= \frac{1}{2\gamma^3}, \\ x_4(K, n) &= \frac{n(1 - \gamma)^{n-1}}{\gamma(1 + \gamma)^{n+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_1(K, n) = x_4 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n\gamma^2} \right),$$

$$\gamma = \sqrt{1 + 3K^2}.$$

3. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Состояния равновесия системы (6) определяют установившиеся режимы параметрона. При этом состояние равновесия $K = 0$ соответствует отсутствию колебаний в параметроне, а состояния равновесия, определяемые системой

$$x_4 \sin(2n\varphi) - \delta\omega_n \cos(2n\varphi) = \frac{\delta\omega_n}{3\varepsilon^2} x, \quad (8)$$

$$\delta\omega_n x_4 \sin(2n\varphi) + x_1 \cos(2n\varphi) = \frac{\omega_n^2 - x}{3\varepsilon^2},$$

соответствуют стационарным колебаниям в параметроне. Исключая из этих уравнений φ , получим уравнение амплитудно-частотной характеристики

$$\frac{\delta^2\omega_n^6}{x_4^2} + \frac{[\omega_n^2 - (1 + \delta^2\omega_n^2)x]^2}{x_1^2} = [3\varepsilon^2(1 + \delta^2\omega_n^2)]^2. \quad (9)$$

В предположении, что δ и $\varepsilon^2 \ll 1$, можно найти из (9) приближенное выражение ω_n^2 , соответствующее первой итерации,

$$\omega_n^2 = \frac{x}{1 - \delta^2 x} \pm \frac{x_1}{(1 - \delta^2 x)^2} \left[(3\varepsilon^2)^2 - \frac{\delta^2 x^3}{(1 - \delta^2 x)x_4^2} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где за нулевую итерацию принято выражение $\omega_n^2 = \frac{x}{1 - \delta^2 x}$. Зависи-

мость $K(n, \omega_n)$, соответствующая нулевой итерации, представлена на рис. 2 для трех значений ε и $n = 1, 2, 3$. Из выражения для нулевой итерации видно, что амплитуда колебаний при параметрическом резонансе не может превосходить некоторого значения, определяемого со-

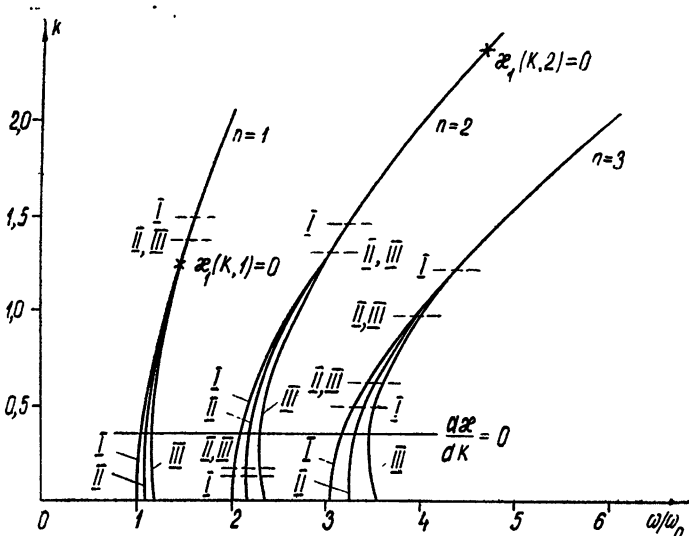


Рис. 2. I— $\delta=0,0005$, $\varepsilon=1/6$; II— $\delta=0,0028$, $\varepsilon=1/3$; III— $\delta=0,0063$, $\varepsilon=1/2$.

отношением $1 = \delta^2 x$. Если $\varepsilon^2 \ll 1$, то это условие принимает вид $\bar{K} = 2/\delta\sqrt{3}$, т. е. амплитуда стационарных колебаний определяется добротностью контура. Однако ограничение амплитуды наступает значительно раньше. Из выражения (10) видно, что подкоренное выражение должно быть положительным. Предполагая, что $\varepsilon \ll 1$, и учитывая (7), получим следующее условие существования стационарной амплитуды колебаний:

$$\frac{\delta}{\varepsilon^2} < \frac{24n(\gamma - 1)^{n-1}}{\gamma(3 + \gamma^2)^{3/2}(\gamma + 1)^{n+1}}. \quad (11)$$

Граница этого неравенства определяет допустимые значения амплитуд для различных n и параметра δ/ε^2 . Легко заметить, что с уменьшением отношения δ/ε^2 число существующих субгармоник возрастает.

На рис. 2 границы допустимых значений амплитуд отмечены пунктиром для трех различных конкретных значений параметров, причем параметры выбраны так, что существует область допустимых значений для первых трех субгармоник ($n = 1, 2, 3$). Используя соотношения (7), (10) и неравенство (11), легко построить амплитудно-частотную характеристику. На рис. 3а, б схематически изображены такие характеристики для трех первых значений n и $\varepsilon < 1/3$, $\varepsilon > 1/3$ соответственно (кривые I и III на рис. 2).

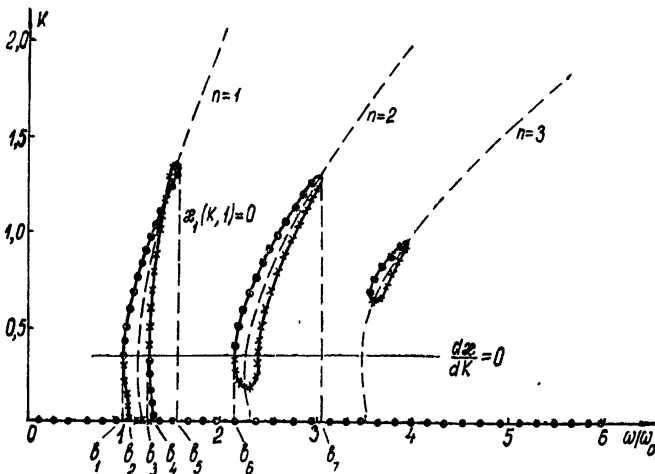
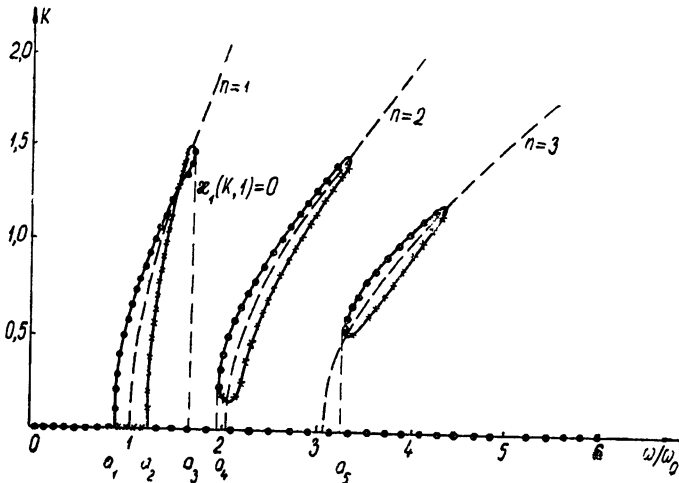


Рис. 3 а, б.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Характер состояний равновесия системы укороченных уравнений (6) определялся по коэффициентам характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений (6). На рис. 3а, б кружочками отмечены устойчивые состояния равновесия—фокусы, а крестиками—неустойчивые состояния равновесия—седла.

5. РАЗБИЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ НА ТРАЕКТОРИИ

Из уравнения (8), заменяя ω_n^2 его выражением (10) и полагая $\delta \ll 1$, $x_1 \ll x$, найдем амплитудно-фазовую зависимость в виде

$$\operatorname{tg}(2n\varphi) = \pm \frac{\delta x^{3/2} \gamma (1 + \gamma)^{n+1}}{n(1 - \gamma)^{n-1} r} = \pm \theta, \quad (12)$$

где

$$r = \left[(3\varepsilon^3)^2 - \frac{\delta^2 x^3}{(1 - \delta^2 x) x_4^2} \right]^{1/2}.$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2n} (v\pi \pm \operatorname{arctg} \theta), \quad (13)$$

причем допустимые значения φ определяются следующими условиями:

$$\left. \begin{aligned} v = 0, 2, 4, \dots; \theta > 0 \\ v = 1, 3, 5, \dots; \theta < 0 \end{aligned} \right\} (n - \text{нечетное}), \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} v = 1, 3, 5, \dots; \theta > 0 \\ v = 0, 2, 4, \dots; \theta < 0 \end{aligned} \right\} (n - \text{четное}).$$

На основе рис. 3б и соотношений (12), (13), (14) построено качественное разбиение фазовой плоскости на траектории для случая $\varepsilon > 1/3$ и некоторых частных значений частоты накачки, приведенное на рис. 4.

Для интервала $0 < \omega/\omega_0 < b_1$ (рис. 3б) единственным состоянием равновесия является состояние $K = 0$ типа устойчивого фокуса. При $\omega/\omega_0 = b_1$ на конечном расстоянии от состояния равновесия $K = 0$ рождается 2 устойчивых фокуса и 2 седла. На рис. 4а изображено разбиение фазовой плоскости на траектории для интервала $b_1 < \omega/\omega_0 < b_2$. При $\omega/\omega_0 = b_2$ седла сливаются с центральным фокусом и образуют седло. Разбиение, соответствующее интервалу $b_2 < \omega/\omega_0 < b_3$, изображено на рис. 4б.

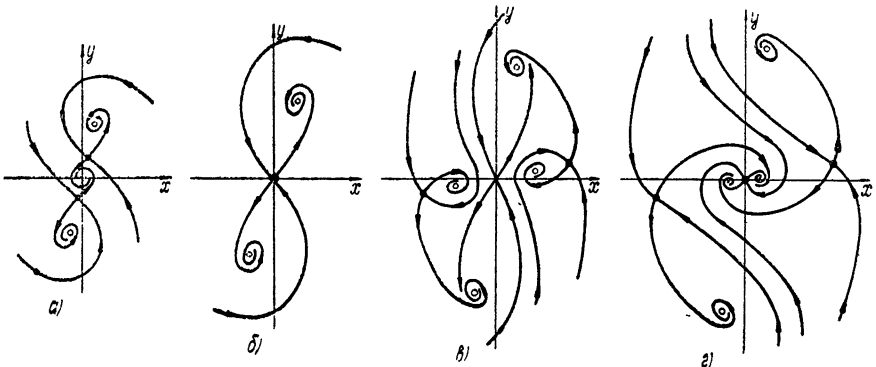


Рис. 4 а, б, в, г.

При $\omega/\omega_0 = b_3$ и $K \neq 0$ появляется 2 устойчивых фокуса и 2 седла (рис. 4в). При дальнейшем изменении ω/ω_0 вид разбиения фазовой плоскости меняется (рис. 4г) и при $\omega/\omega_0 = b_4$ внутренние фокусы сливаются с центральным седлом и образуют устойчивый фокус (рис. 4д). При $\omega/\omega_0 = b_5$ наружные фокусы сливаются с седлами и исчезают.

На рис. 4е изображено разбиение фазовой плоскости в интервале ω/ω_0 , в котором возможны колебания параметрона на второй субгармонике ($n=2$), а на рис. 4ж — для случая существования третьей субгармоники ($n=3$).

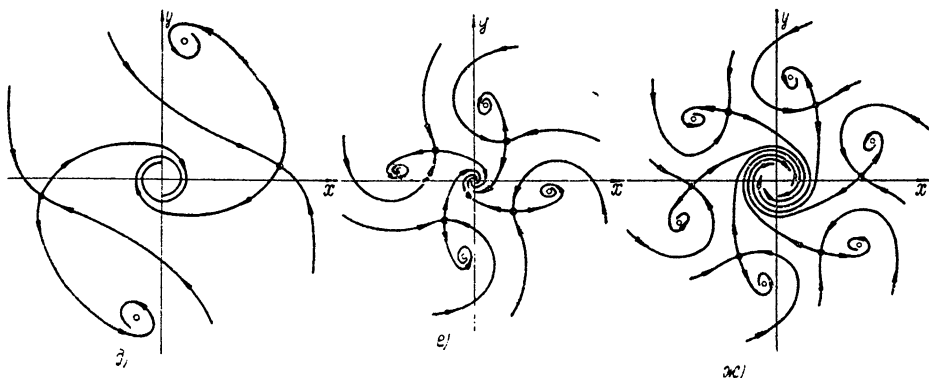


Рис. 4 д, е, ж.

Для случая $\varepsilon < 1/3$ (рис. 3а) структура разбиения, подобная рис. 4а, в, г, не наблюдается.

Проделанный анализ позволяет сделать следующие выводы.

В симметричном индуктивном параметроне без смещения мягкий режим возбуждения колебаний возможен только на первой субгармонике ($n=1$). Субгармоники более высоких номеров ($n>1$) возбуждаются жестко.

Амплитуда установившихся колебаний, количество существующих субгармоник и ширина полосы допустимых расстроек зависят от отношения δ/ε^2 и растут вместе с уменьшением этого отношения.

На первой субгармонике, в зависимости от параметров системы и амплитуды подкачки, возможен как двухстабильный режим (области частот $[a_1a_2]$, $[b_2b_3]$ на рис. 3а, б) — две возможные фазы установившихся колебаний, так и трехстабильный режим (области частот $[a_2a_3]$, $[b_1b_2]$, $[b_4b_5]$ на рис. 3а, б) — две возможные фазы и отсутствие колебаний. Кроме того, при $\varepsilon > 1/3$ возможен особый двухстабильный режим (область частот $[b_3b_4]$ рис. 3б), при котором каждой из двух возможных фаз соответствуют, в зависимости от начальных условий, два возможных значения установившейся амплитуды.

На второй субгармонике возможен только пятистабильный режим, на третьей — семистабильный и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1959.
2. Р. М. Кантор, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 5, № 3, 356 (1962).
3. Ю. Н. Ефимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 5, № 3, 347 (1962),

4. К. М. Поливанов, Ф. П. Жарков, В. А. Соколов, Изв. высш. уч. зав.— Радиотехника, 5, № 4, 417; № 5, 543 (1962).
5. А. Б. Ляско, Л. И. Островская, Е. М. Кац, М. В. Ляско, Магнитные элементы, изд. Наукова думка, Киев, 1964 (Тр. 8 Всесоюзного совещания по магнитным элементам).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 января 1967 г.

SOME PROBLEMS CONCERNING DYNAMICS OF AN INDUCTIVE PARAMETRON WITHOUT BIAS VOLTAGE

L. V. Postnikov, A. S. Tarantovech

Dynamics of an inductive parametron without constant bias in ferromagnetic cores is considered using slow varying amplitudes method. Gain-frequency characteristics for the main frequency and subharmonics are obtained. Conditions for the existence of subharmonics as function of feeding amplitude and of losses in resonator are found. For some values of feeding frequency and amplitude the phase space decomposition is determined.

УДК 538.565.4

К ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ВЫСШИХ СУБГАРМОНИКАХ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Г. Я. Карасик, А. Б. Ляско

Исследованы свойства параметрически возбужденного колебательного контура на r -й ($r > 2$) субгармонике, глубина модуляции реактивного элемента которого является нелинейной функцией.

ВВЕДЕНИЕ

Колебания неавтономных систем, так же как и сами системы, описываемые уравнениями вида

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad (1)$$

где $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ — периодическая функция времени t периода T и аналитическая относительно переменных x, \dot{x}, \ddot{x} , подразделяются на [1] вынужденные и параметрические.

Колебания называют вынужденными, если функцию $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ можно представить в виде

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = F_1(x, \dot{x}, \ddot{x}) + F_2(t). \quad (2)$$

Такое представление функции F равносильно тому, что на нелинейный осциллятор действует вынужденная сила $F_2(t)$.

Если указанное разложение (2) функции $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ произвести нельзя, то систему называют параметрической. В параметрической системе могут возникнуть как параметрические (по Мандельштаму [2], гетеропараметрические), так и вынужденные параметрические колебания [3].

Если функцию F можно представить в виде

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = F_1(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) + f(t), \quad (3)$$

то колебания в системе (1) называются вынужденными параметрическими колебаниями.

В настоящей работе рассматриваются параметрические колебания параметрических систем, когда в (3) $f(t) \equiv 0$.

Необходимо различать два режима работы параметрических систем: мягкий и жесткий. Параметрическая система обладает мягким режимом возбуждения колебаний в том случае, когда тривиальное решение этой системы является неустойчивым. В противном случае имеет место жесткий режим возбуждения колебаний. Если накачка или возмущающее воздействие на параметрическую систему осуществляется с периодом T , а колебания, возникающие в системе, имеют период rT , где $r=2, 3, 4, \dots$, то такие колебания называются субгармоническими, а r является номером субгармоники.

В [2,4] субгармонические колебания включены в более общее понятие резонанса n -го рода, где n — положительное рациональное число. Если n целое число, большее единицы, то колебания происходят на n -й субгармонике, если n равно единице, то имеет место главный резонанс, если n неправильная дробь, то происходят колебания на субгармонике соответствующей гармоники или, что то же, на гармонике соответствующей субгармонике частоты накачки или вынуждающего воздействия.

Еще в 30-е годы вынужденные (по Мандельштаму [2] автопараметрические) и параметрические колебания на второй субгармонике ($r=2$) и на гармониках второй субгармонике исследовала большая группа советских ученых, возглавляемая Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси и др. Однако не было обращено внимание на тот факт, что колебания на второй субгармонике могут происходить с одной из двух возможных фаз, отличающихся одна от другой на 180° .

Только двадцать лет спустя на этот факт обратил внимание Гсто [5] и использовал параметрически возбужденный на второй субгармонике колебательный контур в качестве параметрического реле с двумя устойчивыми состояниями по фазе, названного им параметром.

Развивая метод Мандельштама, Хаяси обстоятельно экспериментально и теоретически исследовал [6] автопараметрические колебания на 2, 3, 4, 5 субгармониках в нелинейной электрической цепи (с нелинейной индуктивностью), описываемой дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + 2\gamma \frac{d\vartheta}{d\tau} + f(\vartheta) = B \cos(\nu\tau). \quad (4)$$

В силу приведенной классификации неавтономных систем Хаяси исследовал субгармонические колебания нелинейного осциллятора под воздействием вынуждающей силы $B \cos(\nu\tau)$. При рассмотрении вынужденных колебаний на третьей субгармонике ($r=3$) Хаяси [6] обнаружил, что они могут происходить в зависимости от начальных условий с одной из трех возможных фаз, отличающихся одна от другой на 120° .

Указанные исследования параметрических колебаний на второй субгармонике и вынужденных колебаний на третьей субгармонике наводят на мысль о существовании r возможных фаз при параметрических колебаниях на r -й субгармонике.

Если указанный факт действительно свойственен параметрическим системам при существовании в них колебаний на r -й субгармонике, то они могли бы быть использованы в качестве параметрических реле с r устойчивыми состояниями по фазе в цифровых вычислительных устройствах с основанием счисления выше 2 или в системах передачи информации при алфавите, превышающем 2.

В [7] были рассмотрены параметрические колебания на высших субгармониках, но автор пришел к выводу, что параметрические колебания возможны лишь на четных субгармониках. Метод рассмотрения колебаний в нелинейном колебательном контуре, используемый в [7], не позволил автору обнаружить квантовые фазы параметрических колебаний в параметрически возбужденном на r -й субгармонике колебательном контуре.

Поэтому цель настоящей работы доказать, во-первых, возможность существования параметрических колебаний на нечетных субгармониках в параметрически возбужденном колебательном контуре, и, во-вторых, что колебания параметрической системы на r -й субгармонике происхо-

дят с одной из r возможных фаз (свойство квантования фазы параметрических колебаний на субгармониках).

1. УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ВЫСШИХ СУБГАРМОНИКАХ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим последовательный колебательный контур, состоящий из индуктивности L , конденсатора C и сопротивления R . Его уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} Li + Ri + \frac{1}{C} \int idt = 0. \quad (1.1)$$

Пусть

$$L = L_0(1 + m \cos \theta), \quad (1.2)$$

$$\theta = \nu t, \quad \nu = rs, \quad (1.3)$$

где L_0 , m — постоянные величины.

Поясним упрощенно, что в рассматриваемом случае в контуре не могут возникнуть параметрические колебания на высших ($r > 2$) субгармониках. Для этого применим к системе (1.1) при условии выполнения (1.2) и (1.3) метод баланса энергии [2].

Параметрические колебания могут возникнуть только в том случае, когда происходит регенерация энергии за счет параметрического изменения одного из реактивных элементов (в нашем случае — индуктивности). Они действительно возникнут, если величина мощности W_p , обусловливаемой энергией регенерации, не меньше мощности потерь W_n .

Предполагается, что контур обладает достаточной избирательностью для того, чтобы в нем существовали гармонические колебания частоты s , поэтому для контурного тока $i(t)$ можем записать

$$i(t) = a \cos \psi, \quad \psi = st + \vartheta. \quad (1.4)$$

Выражение баланса энергий имеет вид

$$W_E = W_n - W_o, \quad (1.5)$$

где

$$W_n = \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi/s} Ri^2 dt, \quad (1.6)$$

$$W_L = 0, \quad (1.7)$$

$$W_p = \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi/s} i \frac{d}{dt} (L_0 m i \cos \theta) dt, \quad (1.8)$$

при этом

$$W_p = \begin{cases} \frac{1}{4} smL_0 a^2 \sin(2\vartheta) & (r = 2) \\ 0 & (r \neq 2) \end{cases} \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что в рассматриваемой системе при $m = \text{const}$ могут возникнуть параметрические колебания только на второй субгармонике.

Чтобы возникли параметрические колебания на высших субгармониках в одиночном параметрически возбужденном контуре, необходимо варьировать параметр m ,

Остановимся на случае, когда коэффициент глубины модуляции m реактивного элемента можно представить в виде

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k i^k \quad (m_k = \text{const}). \quad (1.10)$$

Тогда

$$L(t) = L_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} m_k i^k \cos \theta \right), \quad (1.11)$$

и выражение для W_p имеет вид

$$W_p = \frac{sh_0}{4} a^2 \sin(r\vartheta) \sum_{p=0}^{\infty} b_p a^{r-2+2p}, \quad (1.12)$$

где b_p — некоторые постоянные. Если $b_0 \neq 0$, то в выражении (1.12) можно ограничиться лишь первым слагаемым; в этом случае

$$W_p = \frac{sh_0}{2^r} m_{r-2} a^r \sin(r\vartheta). \quad (1.13)$$

Таким образом, необходимым условием возникновения параметрических колебаний на r -й субгармонике в одноконтурном параметрическом генераторе является зависимость коэффициента глубины модуляции m реактивного элемента от $r-2+2p$ ($p=0, 1, 2, \dots$) степени переменной.

Точно такие же необходимые условия возникновения параметрических колебаний получим при рассмотрении дифференциального уравнения, описывающего колебания в рассматриваемом контуре.

Отыскивая стационарные колебания на r -й субгармонике в данном колебательном контуре при законе изменения индуктивности (1.11) методом Крылова—Боголюбова [8], найдем выражения для скорости изменения амплитуды a и фазы ϑ контурного тока $i(t)$. Аналогичные выражения для $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\vartheta}{dt}$ получим, решая этим же методом уравнение вида

$$x f(x, \theta) + \dot{x} P(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0, \quad (1.14)$$

где

$$f(x, \theta) = 1 + m(x) \cos \theta, \quad (1.15)$$

$$P(x, \dot{x}) = P/L_0, \quad (1.16)$$

$$\omega^2 = 1/CL_0. \quad (1.17)$$

Поэтому в дальнейшем рассмотрим колебания на r -й субгармонике в параметрической системе, описываемой дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}[1 + Q_1(x) + Q_2(x) \cos \theta] + \dot{x} P(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0, \quad (1.18)$$

так как управляемая индуктивность одноконтурного параметрического генератора, как правило, изменяется по закону

$$L(t) = L_0 [1 + Q_1(x)] + Q_2(x) \cos \theta]. \quad (1.19)$$

Если в качестве магнитопровода управляемой индуктивности применяется ферромагнетик, обладающий гистерезисными потерями по пе-

ременному полю, то $P(x, \dot{x})$ является аналитической функцией выражения $[x^2 + (x/s)^2]^{1/2}$ с положительными коэффициентами, т. е.

$$P(x, \dot{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{s^2} \right)^{k/2} \quad (\delta_k > 0). \quad (1.20)$$

2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ (ПЕРИОДА $2\pi/s$) РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.18)

Рассмотрим параметрические колебания на r -й субгармонике системы, описываемой уравнением (1.18), где $Q_i(x)$ — аналитические функции переменной x . Предположим, что

$$Q_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^i x^k \quad (i = 1, 2), \quad (2.1)$$

$\theta = \omega t$ — мгновенное значение фазы источника накачки, ω — собственная частота системы; функция $P(x, \dot{x})$ обуславливает потери в системе.

Пусть

$$\omega^2 = s^2 + \Delta, \quad (2.2)$$

где s — круговая частота возникающих в системе колебаний, Δ — среднеквадратичная расстройка. Уравнение (1.18) принимает вид

$$\ddot{x} + s^2 x = -\Delta x - [Q_1(x) + Q_2(x) \cos \theta] \dot{x} - P(x, \dot{x}). \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) ищем в виде

$$x = a \cos \psi, \quad \psi = st + \vartheta, \quad (2.4)$$

где a — амплитуда параметрических колебаний на r -й субгармонике, ϑ — начальная фаза колебаний.

Применяя метод Крылова-Боголюбова [8], распространенный на уравнения вида (2.3), [9] получим следующие дифференциальные уравнения для отыскания амплитуды a и фазы ϑ колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{s}{2} a [M(a) + Q(a) \sin(r\vartheta)], \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{s}{2} [\gamma_1^2 - 1 - N(a) - Q(a) \cos(r\vartheta)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(\gamma_1^2 = \omega^2/s^2),$$

где

$$\begin{aligned} M(a) &= \frac{1}{\pi s} \int_0^{2\pi} P(a \cos \psi, -as \sin \psi) \sin^2 \psi \, d\psi, \\ N(a) &= \frac{1}{2\pi s} \int_0^{2\pi} P(a \cos \psi, -as \sin \psi) \sin(2\psi) \, d\psi + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k+1}{k} \frac{\alpha'_{2k}}{2^{2k}} a^{2k}, \end{aligned}$$

$$Q(a) = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{r-1+2p}{p} a_{r-2+2p}^2 a^{r-2+2p} 2^{-(r-2+2p)}. \quad (2.6)$$

Из выражения (2.6) следует, что $Q(a)$ тождественно не равна нулю лишь в том случае, когда в $Q_2(x)$ присутствует хотя бы одно слагаемое с x в степени $r-2+2p$, где $p=0, 1, 2, \dots$. Поэтому для существования в параметрических системах вида (1.18) параметрических колебаний на r -й субгармонике необходимо наличие в выражении $Q_2(x)$ слагаемых, содержащих амплитуду параметрических колебаний в степенях $r-2+2p$, наименьшая из которых $r-2$.

3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА r -Й СУБГАРМОНИКЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (1.18)

Для отыскания стационарных значений амплитуды a и фазы ϑ параметрических колебаний приравниваем нулю правые части уравнений (2.5). Тогда

$$\sin(r\vartheta_0) = -M(a_0) Q^{-1}(a_0), \quad (3.1)$$

$$\cos(r\vartheta_0) = [\eta^2 - 1 - N(a_0)] Q^{-1}(a_0) \quad (3.2)$$

для нетривиальных решений системы (2.5).

Исключая из уравнения (3.2) фазу, имеем

$$\eta^2 = 1 + N(a_0) \pm [Q^2(a_0) - M^2(a_0)]^{1/2}, \quad (3.3)$$

т. е. зависимость амплитуды стационарных колебаний a_0 на r -й субгармонике от относительной частоты η^2 (расстройки $1-\eta^2$), (так называемая АЧХ).

Из (3.3) следует, что достаточным условием существования параметрических колебаний на r -й субгармонике является выполнение неравенства

$$|Q(a_0)| \geq |M(a_0)|, \quad (3.4)$$

которое накладывает на коэффициенты функций $Q_2(x)$ и $P(x, x)$ определенные ограничения.

АЧХ в плоскости (η^2, a_0) (см. (3.3)) есть алгебраическая сумма двух кривых, т. е.

$$\eta^2 = y_1(a_0) \pm y_2(a_0), \quad (3.5)$$

где

$$y_1(a_0) = 1 + N(a_0), \quad y_2(a_0) = [Q^2(a_0) - M^2(a_0)]^{1/2}. \quad (3.6)$$

Известно [8], если АЧХ пересекает ось η^2 , то система обладает мягким режимом возбуждения колебаний (тривиальное решение является неустойчивой особой точкой), в противном случае может иметь место только жесткий режим возбуждения колебаний (тривиальное решение a_{01} — устойчивая особая точка). При $r=2$ условие (3.4) может выполняться при $a_0=0$, так как, вообще говоря, $Q(0) \neq 0$. Значит, в системе может иметь место мягкий режим возбуждения колебаний. При $r>2$ условие (3.4) может выполняться только при $a_0>0$ (точнее, при a_0 , заключенном на отрезке, концами которого являются положительные корни $y_2(a_0)=0$), так как $M(0) \neq 0$, а $Q(0)=0$. Значит, при $r \neq 2$ всегда может иметь место только жесткий режим возбуждения колебаний (a_{01} — устойчивая особая точка).

Точки пересечения прямой $\eta^2 = \text{const}$ с АЧХ дают значения возможных стационарных амплитуд a_{0i} (отличных от нуля). Каждому

значению стационарной амплитуды согласно (3.1), (3.2) соответствует одна из r возможных фаз стационарных колебаний. Таким образом, если при $\eta^2 = \text{const}$ имеется k точек пересечения ветвей АЧХ, то на стробоскопическом [1] портрете имеют место $kr+1$ (с учетом тривиального решения) особых точек $(a_{0i}, \vartheta_{0ij})$, где $i=1, \dots, k, j=0, 1, \dots, r-1$.

В частном случае, когда функция $P(x, \dot{x})$ имеет вид (1.20), причем $\delta_{r-1} \neq 0$, $Q_2(x)$ является полиномом $r-2$ степени, коэффициенты разложения функции $Q_1(x)$ при четных степенях x имеют одинаковые знаки, выражения для $M(a)$, $Q(a)$, $N(a)$ имеют вид:

$$M(a) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{r-1} \delta_k a^k \quad (\delta_0 \neq 0, \delta_{r-1} \neq 0, \delta_k \geq 0), \quad (3.7)$$

$$Q(a) = 2^{-(r-1)} a_{r-2}^2 a^{r-2}, \quad (3.8)$$

$$N(a) = \sum_{k=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{2k+1}{k} 2^{-2k} a_{2k}^1 a^{2k}. \quad (3.9)$$

Именно этот случай имеет место при анализе двухторового [5] и одноторового [10, 11] вариантов параметронов, параметрических генераторов, выполненных на плоской ферромагнитной пленке, и др. [12].

В рассмотренном случае при выполнении условия (3.4), когда для существования параметрических колебаний при $r \neq 2$ (при $r=2$) необходимо и достаточно существования у многочлена $y_2(a_0)$ двух неравных (одного) положительных корней a_0^I и a_0^{II} ($a_0^I < a_0^{II}$), АЧХ при $r=2$ и $r>2$ имеет вид, изображенный на рис. 1 и 2 соответственно. Режим А соответствует случаю $\alpha_{2k}^1 > 0$, режим В — $\alpha_{2k}^1 < 0$.

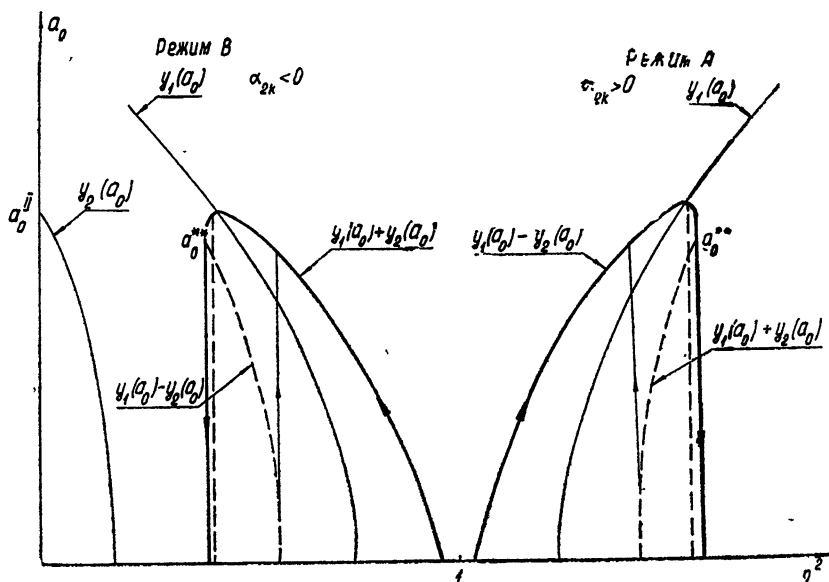


Рис 1.

Из вида АЧХ следует, что при $r=2$ и $\eta^2 = \text{const}$ возможно одно или два значения амплитуды стационарных колебаний, при $r \neq 2$ и $\eta^2 = \text{const}$ — существование двух неравных значений амплитуд стационарных колебаний.

Каждому из указанных значений амплитуд стационарных параметрических колебаний соответствует r возможных фаз колебаний (см. (3.1) и (3.2)).

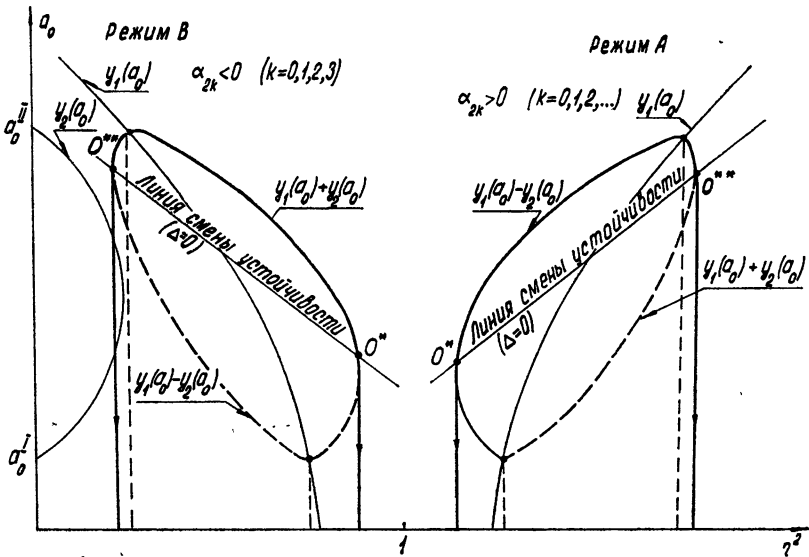


Рис. 2.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙДЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Для исследования устойчивости особых точек системы (2.5) применим метод Ляпунова [8]. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + x\lambda + \Delta = 0, \quad (4.1)$$

$$x = \frac{s}{2} \left[rM(a) + a \frac{\partial M}{\partial a} - a \frac{M}{Q} \frac{\partial Q}{\partial a} \right] \Big|_{a=a_0, \vartheta_0}, \quad (4.2)$$

$$\Delta = \frac{s^2}{4} ra \left[M \frac{\partial M}{\partial a} - Q \frac{\partial Q}{\partial a} - Q \frac{\partial N}{\partial a} \cos(r\vartheta) \right] \Big|_{a=a_0, \vartheta_0}. \quad (4.3)$$

Особая точка (a_0, ϑ_0) системы устойчива, если

$$x > 0, \quad (4.4)$$

$$\Delta > 0. \quad (4.5)$$

Покажем, что проверку выполнения условия (4.5) можно осуществлять по виду АЧХ, для чего преобразуем выражение (4.3). Учитывая (3.1) и (3.2), получим

$$\Delta|_{a_0, \vartheta_0} = \left[\pm (Q^2 - M^2)^{1/2} \frac{s^2}{4} ra / (-1) \frac{da}{d\gamma^2} \right]_{a=a_0, \vartheta=\vartheta_0} \quad (4.6)$$

или

$$\Delta = \left[-\frac{s^2}{4} raQ(a) \cos(r\vartheta) / \frac{da}{d\gamma^2} \right]_{a=a_0, \vartheta=\vartheta_0} \quad (4.7)$$

Выражения (4.6), (4.7) справедливы при $a_0 \neq 0$, $\cos(r\vartheta_0) \neq 0$.

Из (4.6) видим, что по углу наклона касательных к АЧХ (по знаку $\frac{da}{d\tau^2}$) можно определить, какой из участков ветвей АЧХ соответствует положительному или отрицательному значениям Δ .

Условие (4.4) проверяется в каждом конкретном случае независимо от вида АЧХ.

В рассмотренном ранее частном случае (3.7), (3.8), (3.9) условие (4.4) всегда выполняется. Поэтому ветвь АЧХ, лежащая в плоскости (η^2, a_0) , выше прямой O^* , O^{**} (см. рис. 2), проходящей через точки, в которых АЧХ имеет вертикальную касательную, является геометрическим местом устойчивых стационарных амплитуд. Ветвь АЧХ, лежащая ниже указанной прямой, — геометрическое место неустойчивых стационарных амплитуд.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СЕКТОРОВ РАСПОЛОЖЕНИЯ (ПРИ $\eta^2 = \text{const}$) ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМЫ (2.5) НА СТРОБОСКОПИЧЕСКОМ ПОРТРЕТЕ. ТИП ОСОБЫХ ТОЧЕК

Известно, что при выполнении условия (4.4) неустойчивые особые точки $(a_{0n}, \vartheta_{0ni})$ являются особыми точками типа седло; устойчивые особые точки $(a_{0y}, \vartheta_{0yi})$ являются особыми точками типа фокус, если имеет место неравенство

$$x^2/4 - \Delta > 0, \quad (5.1)$$

и особыми точками типа узел, если

$$x^2/4 - \Delta < 0. \quad (5.2)$$

Поскольку в большинстве случаев $[12]$ функции $M(a)$, $N(a)$ и $Q(a)$ имеют вид (3.7), (3.8), (3.9) и условие (4.4) всегда выполняется, то неустойчивые особые точки $(a_{0n}, \vartheta_{0ni})$ будут типа седло, устойчивые особые точки $(a_{0y}, \vartheta_{0yi})$ могут быть либо фокусами, либо узлами. Легко видеть, что особая точка, соответствующая началу координат стробоскопического портрета (a_0, ϑ_0) , всегда является особой точкой типа фокус ($r \neq 2$). Особые точки $(a_{0y}, \vartheta_{0yi})$, лежащие на ветви АЧХ, расположенной выше прямой O^* , O^{**} (см. рис. 2) вблизи точек пересечения ее с АЧХ, будут также особыми точками типа фокус.

Для определения расположения особых точек $(a_{0n}, \vartheta_{0ni})$ и $(a_{0y}, \vartheta_{0yi})$ системы на стробоскопическом портрете достаточно установить знак синуса и косинуса $r\vartheta_0$ в указанных точках.

Из выражения (3.1) видим, что знак $\sin(r\vartheta_0)$ не зависит ни от режима работы (режима А и Б), ни от устойчивости особой точки системы и зависит только от знака коэффициента m_0 , где

$$m_0 = a_{r-2}^2/2^{r-2}. \quad (5.3)$$

Знак $\cos(r\vartheta_0)$ определяется с помощью выражения (4.7).

Из указанных соображений следует, что, например, в режиме А при $m_0 > 0$ $\sin(r\vartheta_{0i}) < 0$, для устойчивой ветви АЧХ с положительным наклоном $\cos(r\vartheta_{0y}) < 0$, для устойчивой ветви с отрицательным наклоном $\cos(r\vartheta_{0y}) > 0$. Очевидно, для рассматриваемого случая и для каждой из указанных частей устойчивой ветви АЧХ имеем соответственно

$$\frac{\pi}{r} + 2i \frac{\pi}{r} < \vartheta_{0yi} \leq \frac{3}{2} \frac{\pi}{r} + 2i \frac{\pi}{r} \quad (i=0, 1, \dots, r-1),$$

$$\frac{3}{2} \frac{\pi}{r} + 2i \frac{\pi}{r} \leq \vartheta_{0yi} < \frac{2\pi}{r} + 2i \frac{\pi}{r} \quad (i=0, 1, \dots, r-1).$$

Аналогично можно найти сектора расположения устойчивых и неустойчивых особых точек для остальных интересующих нас случаев.

При использовании параметрических индуктивных генераторов, собранных по схеме двухторового варианта параметрона [5] и схеме «фазо-логического параметрического элемента» [10] (одноторовый вариант), обычно работают при таком значении напряженности магнитного поля смещения H_0 [11, 12], при котором имеет место режим А, а $m_0 > 0$ для r нечетных и $m_0 < 0$ для r четных. Вид стробоскопического портрета у таких одноконтурных параметрических генераторов, например, на третьей и пятой субгармониках показан соответственно на рис. 3 и рис. 4. Из изложенного выше следует, что при $r > 2$ одноконтурный параметрический генератор обладает $r + 1$ устойчивой особой точкой и является $r + 1$ стабильным параметрическим реле, устойчивые колебания в котором могут происходить при одной и той же амплитуде колебаний с одной из r возможных фаз.

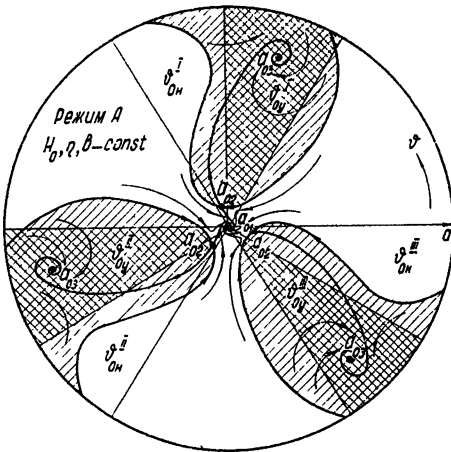


Рис. 3.

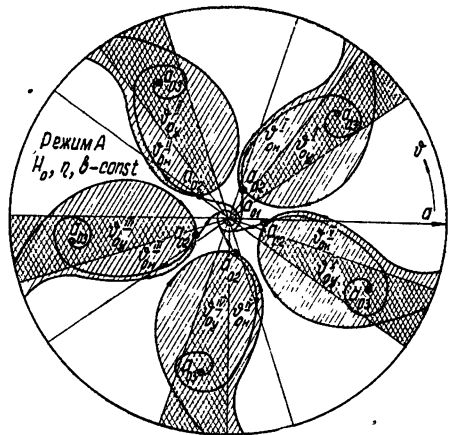


Рис. 4.

6. УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ АВТОМОДУЛЯЦИИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ В НЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИИ НА ВЫСШИХ СУБГАРМОНИКАХ

Известно [6], что автомодуляция колебаний вида (2.4) существует, если существуют замкнутые циклы вокруг особых точек системы (2.5).

Известно, что отсутствие замкнутых циклов может быть установлено применением критерия Бендиксона: если $\text{div } P\{A(a, \vartheta), B(a, \vartheta)\}$ сохраняет постоянный знак (нуль исключается) в замкнутом двумерном пространстве Ω , то Ω не содержит ни предельных циклов, ни даже овалов, составленных из траекторий системы и начинающихся и кончающихся в особых точках. Таким образом, для отсутствия предельных циклов системы (2.5) достаточно выполнения условия

$$\text{sgn } \text{div } P\{A(a, \vartheta), B(a, \vartheta)\} = \text{const}. \quad (6.1)$$

Раскрывая (6.1), переходим к условию

$$\text{sgn } x(a, \vartheta) = \text{sgn } \left[\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial \vartheta} \right] = \text{const}. \quad (6.2)$$

Учитывая (2.5), можем записать

$$x(a, \vartheta) = \frac{s}{2} \left\{ M + a \frac{\partial M}{\partial a} + \left[a \frac{\partial Q}{\partial a} - (r-1) Q \right] \sin(r\vartheta) \right\}. \quad (6.3)$$

Для отсутствия автомодуляции в рассматриваемой системе, поскольку в особых точках (a_0, ϑ_0) x всегда больше нуля, достаточно выполнения следующего неравенства:

$$M + a \frac{\partial M}{\partial a} > \left[(r-1) Q - a \frac{\partial Q}{\partial a} \right] \sin(r\vartheta). \quad (6.4)$$

В силу зависимости правой части неравенства (6.4) от $\sin(r\vartheta)$ на коэффициенты $M(a)$ и $Q(a)$ можем наложить более жесткое условие

$$M(a) + a \frac{\partial M}{\partial a} > \left| (r-1) Q - a \frac{\partial Q}{\partial a} \right|. \quad (6.5)$$

С учетом (3.7), (3.8) и (5.3), (6.5) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \frac{\delta_k}{s} a^k - |m_0| a^{r-2} > 0 \quad (\delta_{r-1}, \delta_{r-2} \neq 0). \quad (6.6)$$

Неравенство (6.6) выполняется, если

$$|m_0| \leq (r-1) \frac{\delta_{r-2}}{s}. \quad (6.7)$$

С другой стороны, чтобы колебания на r -й субгармонике были возможны, необходимо выполнение условия (3.4), но последнее выполняется лишь в случае выполнения условия

$$\frac{\delta_{r-2}}{s} < |m_0|. \quad (6.8)$$

Поскольку коэффициент m_0 прямо пропорционален амплитуде источника накачки [12], то из выражений (6.7) и (6.8) следует, что существует вполне определенная граница для амплитуды источника накачки. нижняя является порогом возбуждения параметрических колебаний на данной субгармонике; верхняя — порогом возможного появления неустойчивости параметрических колебаний в виде самопроизвольной амплитудной и фазовой модуляции возникающих колебаний.

В заключение можно отметить следующее. при выполнении условий (6.7), (6.8) в одноконтурном параметрическом генераторе возможны колебания как на четных, так и на нечетных субгармониках; при $r > 2$ параметрический генератор обладает всегда жестким режимом возбуждения колебаний, каждому стационарному значению амплитуды колебаний соответствуют r возможных фаз.

Эксперимент подтверждает теоретические положения настоящей работы [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Каудерер, *Нелинейная механика*, ИЛ, М., 1961.
2. Л. И. Мандельштам, *Полн. собр. тр.*, 2, изд. АН СССР, М., 1947, стр. 31.
3. В. С. Эткин, Е. М. Гершензон, *Параметрические системы на полупроводниковых диодах*, изд. Сов. радио, М., 1961.
4. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, М., 1956.

5. Параметроны, ИЛ, М., 1962
- 6 Т. Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, М, 1957
7. И Т Турбович, Метод близких систем и его применение для создания инженерных методов расчета линейных и нелинейных радиотехнических систем, изд АН СССР, М, 1961.
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М, 1958.
- 9 Г. Я. Карасик, А. Б. Ляско, Радиотехника, 19, № 12, 73 (1964)
- 10 А. Б. Ляско, Г. Я. Карасик, Л. И. Островская, Э. П. Матафонова, В. А. Большиков, Фазологический параметрический элемент, Авторское свидетельство № 163424, 1963, Бюллетень изобретений и товарных знаков, № 12, 1964
11. А. Б. Ляско, Г. Я. Карасик, М. В. Ляско, сб. тр Магнитные аналоговые элементы, изд Наука, М., 1965, стр 144.
- 12 А. Б. Ляско, Диссертация, университет, Иркутск, 1966

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
11 июля 1967 г.

TO THE THEORY OF HIGHER SUBHARMONIC PARAMETRIC
EXCITATION IN THE OSCILLATING CIRCUIT

G. Ya. Karasic, A. B. Lyasko

The parametric excitation of r -th ($r > 2$) subharmonic in the oscillating circuit is studied for the case when level of modulation of the reactance is a nonlinear function.

К АНАЛИЗУ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА ПО ЕГО СИГНАЛУ*

Л. И. Гудзенко

УДК 519.2

Обсуждаются возможности практического анализа автономного макроскопического объекта, движущегося вблизи устойчивого равновесия вследствие взаимодействия микрочастей. Исходя из того, что основным источником сведений об этом объекте служит его одномерный сигнал, записанный на конечном интервале времени, предлагается схема расчета, отличающаяся от обычных методов математической статистики.

1. Как обоснование применимости математической статистики к ряду разделов естествознания, так и трактовка получаемых при этом результатов часто вызывают ощущение неадекватности традиционных методов рассматриваемым вопросам. Мы интересуемся здесь изучением динамической структуры автономного макроскопического объекта, движущегося вблизи устойчивой точки покоя под действием быстропеременных внутренних микросил. Упомянем операции над установившимся сигналом объекта, которые полагаются произвести, следуя традиционным методам, при решении этой конкретной задачи [2] в ее простейшем варианте.

Прежде всего для придания конструктивного смысла понятию вероятности вокруг единственной записи сигнала $x(t)$ на интервале наблюдения (t_1, t_2) строят в явной или неявной форме статистический ансамбль $\{x_\alpha(t); t \in (t_1, t_2)\}$ сигналов. Не все на первый взгляд допустимые упрощающие предположения о структуре такого ансамбля могут быть обоснованы. Например, привычное допущение о том, что запись сигнала на конечном интервале времени является выборкой стационарного случайного процесса, может привести к существенным ошибкам. Затем ведут исследования, исходя из усреднений по ансамблю.

Предположив малость обусловленных микродвижениями внутренних флуктуаций объекта и пренебрежимость внешним шумом, в частности, помехами на пути сигнала от объекта до записи, будем считать, что сигнал удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{d^q x}{dt^q}(t) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k \frac{d^k x}{dt^k}(t) = f(t), \quad (1a)$$

где флуктуации $f(t)$ некоррелированы при достаточных сдвигах:

$$\overline{f(t)} = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \quad \overline{f(t)f(t+\tau)} = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \quad (2a)$$

$$t + \tau \in (t_1, t_2), \quad |\tau| > \tau_0.$$

* При подготовке этой заметки появилась статья [1], где обсуждается смысл сценков непосредственно по сигналу, наблюдаемому на бесконечном интервале времени. Здесь подход радикально отличается от традиционной статистики; мы ограничиваемся задачей отыскания параметров динамической аппроксимации макрообъекта.

Требуется найти набор чисел $\{A_k, k = 0, \overline{q-1}\}$, составляющий линеаризованную около точки покоя $\left(x=0, \frac{dx}{dt} = 0, \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}} = 0\right)$ динамическую характеристику объекта*.

Решение выглядит просто. Домножая поочередно уравнение (1а) на сдвинутые во времени значения сигнала и различные его производные при сдвиге $\tau > \tau_0$, усредним каждое получаемое равенство. В силу линейности уравнения (1а)

$$x(t) = \int_{-\infty}^t H_{\{A_k\}}(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (16)$$

а значит, в соответствии с (2а),

$$\overline{\frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau) f(t)} = 0 \quad (\tau > \tau_0). \quad (26)$$

Поэтому можно написать

$$\overline{\frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau) \frac{d^q x}{dt^q}(t)} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k \overline{\frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau) \frac{d^k x}{dt^k}(t)} = 0 \quad (3а)$$

$$(\tau > \tau_0, m = \overline{0, q-1}).$$

Величины A_k найдем, решая систему линейных алгебраических уравнений (3а). Правда, остается вычислить корреляционные функции

$\overline{\frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau) \frac{d^k x}{dt^k}(t)}$ по единственной записи сигнала, воспользовавшись эргодическими свойствами случайных процессов. Допущения же, при которых эти свойства обоснованы, в экспериментах полностью не реализуются, и замена средних статистических средними временными приводит к новым ошибкам в расчетах. Надо отметить, что в естественнонаучных задачах, составляющих основу приложений математической статистики, точность статистических оценок при хороших условиях наблюдения сигнала обычно удовлетворяет практические требования. Но сами выводы о величине ошибок имеют вероятностный характер, т. е. вычисления по данным, содержащимся в единственно имеющемся сигнале, приводят к оценкам, справедливым лишь для всего статистического ансамбля.

Обращение к несуществующему ансамблю при теоретических рассуждениях с тем, чтобы для практических оценок вернуться к единственно имеющемуся сигналу, представляется обходным путем, найденным в свое время, а теперь разрабатываемым и используемым. Естественно пытаться отыскать более прямой путь, не использующий построения ансамбля (а значит, и вероятностей), не обращающийся к эргодичности. Можно ожидать, что для такого анализа будут характерны менее универсальные схемы расчета, меняющиеся в соответствии с конкретными требованиями задачи.

Целью исследования, небольшой вклад в которое хотелось бы сделать в этой заметке, должно явиться раскрытие свойств единичной записи сигнала объекта, проявляющихся в самой возможности плодо-

* Обозначение $m = \overline{a, b}$, где a и b — целые числа, $b > a$, имеет смысл. $m = a, a + 1, \dots, b - 1, b$.

творного анализа методами математической статистики*. Затем в соответствии с этими результатами надо решать задачу оптимизации схемы обработки сигнала при заданных условиях его регистрации.

2. Невозможно восстановить все детали истинного сигнала объекта, освободив запись от регулярных искажений, даже в предельном случае отсутствия внешних шумов. Учитывая это, ограничимся учетом лишь $q^{(0)}$ первых производных сигнала по времени, считая $x(t)$ гладкой, по крайней мере $q^{(0)}$ раз непрерывно дифференцируемой функцией. Число $q^{(0)} = Q[x(t)]$ ($q^{(0)} \geq q$), называемое индексом $x(t)$, будет одним из параметров обработки. Аналогично числа $Q[y(t)]$ вводятся для различных функций $y(t)$; например, для индекса s -й производной сигнала имеем $Q\left[\frac{d^s x}{dt^s}(t)\right] = q^{(0)} - s$. Другим параметром является интервал T усреднений: $T = t_2 - t_1 - 2\Delta t$ ($\tau_0 < \Delta t$). Выберем отсчет времени, полагая $t_1 + \Delta t = 0$, тогда $t_2 = T + \Delta t$. Приводимые ниже оценки требуют введения новых понятий, близких к традиционным, но, конечно, не совпадающих с ними.

Ограничившись здесь рассмотрением установившегося движения автономного объекта вблизи устойчивой точки динамического покоя, будем считать среднее значение функции $y(t)$ на интервале $(\tau, \tau + T)$ при $|\tau| < \Delta t$ аналогом математического ожидания:

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} y(t) dt. \quad (4a)$$

Если $\bar{y} = 0$, будем говорить, что $y(t)$ вибрирует на $(\tau, \tau + T)$; очевидно, вибрирующее значение первообразной функции определяется формулой

$$J_{\tau}[y(t)] = \int_{\tau}^t y(\mu) d\mu - \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} d\lambda \int_{\tau}^{\lambda} y(\mu) d\mu. \quad (4b)$$

Вводя аналог флуктуаций, назовем вибрацией функции $y(t)$ на интервале $(\tau, \tau + T)$ функцию $\tilde{y}_{\tau}(t)$, определяемую условиями

$$\begin{aligned} \frac{d^{q'} \tilde{y}_{\tau}}{dt^{q'}}(t) &= \frac{d^{q'} y}{dt^{q'}}(t) - \frac{d^{q'} \bar{y}}{dt^{q'}} \quad (t \in (\tau, \tau + T)), \\ \frac{d^k \tilde{y}_{\tau}}{dt^k} &= 0 \quad (k = \overrightarrow{0, q'}, q' = Q[y(t)]). \end{aligned} \quad (5a)$$

Выделить из $y(t)$ вибрацию можно, q' раз интегрируя (согласно (4b))

$$\text{функцию } \frac{d^{q'} y}{dt^{q'}}(t) - \frac{d^{q'} \bar{y}}{dt^{q'}}.$$

Поступим иначе, вычислив новую функцию $\langle y(t) \rangle_{\tau}$ определяемую формулой

$$y(t) = \bar{y} + \tilde{y}_{\tau}(t) + \langle y(t) \rangle_{\tau} \quad (t \in (\tau, \tau + T)). \quad (6a)$$

* Общему пересмотру оснований теории вероятностей посвящена работа [3].

Из (5а) следует важное свойство вибраций*

$$\left[\frac{d^k y}{dt^k} \right]_{\tau} = \frac{d^k \tilde{y}}{dt^k}(t) \quad (k = \overrightarrow{0, q'}, t \in (\tau, \tau + T)), \quad (56)$$

поэтому

$$\frac{d^k}{dt^k} \langle y(t) \rangle_{\tau} = \frac{d^k y}{dt^k} + \left\langle \frac{d^k y}{dt^k}(t) \right\rangle_{\tau} \quad (k = \overrightarrow{1, q'}, t \in (\tau, \tau + T)); \quad (66)$$

$$\left\langle \frac{d^{q'}}{dt^{q'}} y(t) \right\rangle_{\tau} = 0.$$

Для $\langle y(t) \rangle_{\tau}$, называемой уходами функции $y(t)$ на интервале $(\tau, \tau + T)$, имеем

$$\frac{d^{q'}}{dt^{q'}} \langle y(t) \rangle_{\tau} = \frac{d^{q'} y}{dt^{q'}} \quad (t \in (\tau, \tau + T)), \quad (6в)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} \langle y(t) \rangle_{\tau} = \frac{d^k y}{dt^k}; \quad (k = \overrightarrow{1, q'}); \quad \langle y(t) \rangle_{\tau} = 0.$$

Уходы $y(t)$ удобно представить суммой

$$\langle y(t) \rangle_{\tau} = \sum_{k=1}^q \frac{d^k y}{dt^k} B_k^{(\tau)}(t), \quad (7а)$$

в которой

$$B_k^{(\tau)}(t) = \sum_{l=0}^k B_{k,l} \left(t - \tau - \frac{T}{2} \right)^l \quad (t \in (\tau, \tau + T)),$$

а коэффициенты $B_{k,l}$ не зависят от $y(t)$. Условия (6в) удовлетворяются, если

$$\frac{d^m B_k^{(\tau)}}{dt^m} = \delta_{k,m} \quad (k = \overrightarrow{1, q'}, m = \overrightarrow{0, q'})$$

или

$$\sum_{l=m}^k B_{k,l} \frac{l!}{(l-m)!} \left(t - \tau - \frac{T}{2} \right)^{l-m} = \delta_{k,m} \quad (k = \overrightarrow{1, q'}, m = \overrightarrow{0, k}).$$

Треугольная форма матрицы позволяет выписать решение этой системы в явном виде

$$B_{k,k} = (k!)^{-1}, \quad B_{k,l} = (l!)^{-1} \sum_i (-1)^{m_i} N_i \prod_{j=1}^{s_i} (\beta_{p_{i,j}})^{m_{i,j}}, \quad i(l=0, k-1, k=1, q'), \quad (76)$$

где $\beta_p = \frac{1 + (-1)^{p+1}}{2 \cdot (p+1)!} T^p$, $m_i = \sum_{j=1}^{s_i} m_{i,j}$, $N_i = (m_i!) \prod_{j=1}^{s_i} (m_{i,j}!)^{-1}$; $p_{i,j}$, $m_{i,j}$,

* Формула (56) существенна для перехода от уравнения (1а) к уравнениям вида (3а), позволяющим оценить динамические параметры.

s_i —всевозможные различные наборы натуральных чисел, для которых
 $\sum_{i=1} p_{i,j} m_{i,j} = k - l, p_{i,j_1} \neq p_{i,j_2}$ при $j_1 \neq j_2$.

По аналогии с корреляционной функцией компонент стационарного случайного процесса определим связанность $\overline{y(t+\tau)z(t)}$ функции $y(t)$ при сдвиге τ с функцией $z(t)$, полагая

$$\overline{y(t+\tau)z(t)} = \frac{1}{2T} \int_0^T [\tilde{y}_{-\tau}(t+\tau)\tilde{z}_0(t) + \tilde{y}_0(t)\tilde{z}_{\tau}(t-\tau)] dt. \quad (8)$$

Построение в рамках обсуждаемой методики теории, подобной в деталях теории стационарных случайных процессов, встречает ряд трудностей. Практическая проверка так или иначе понимаемой стационарности $y(t)$ в общем случае возможна лишь при $\Delta t \gg T$, при обработке же сигнала целесообразно взять $\Delta t \sim T/10$. Но и при сколь угодно больших Δt , что временно (в этом абзаце—для введения определения (10) в общем случае) будем считать выполненным, нельзя, например,

полагать, что x не зависит от τ , поскольку тогда $x(t+T) = x(t), t \in (t_1, t_2), (t+T) \in (t_1, t_2)$. Аналог же стационарных флуктуаций ввести можно. Вместо вибрации $y_{\tau}(t)$, определенной лишь на $(\tau, \tau+T)$, будем пользоваться продолженной на всю ось времени функцией $y_{\tau}(t)$:

$$y_{\tau}(t) = \tilde{y}_{\tau}(t) \quad (t \in (\tau, \tau+T)), \quad y_{\tau}(t+T) = y_{\tau}(t) \quad (t \in (-\infty, \infty)). \quad (9a)$$

Условия (5a) $\frac{d^k \tilde{y}_{\tau}}{dt^k} = 0$ ($k = \overrightarrow{0, q'}$) принимают для нее вид

$$\frac{d^k y_{\tau}}{dt^k}(t+T) = \frac{d^k y_{\tau}}{dt^k}(t) \quad (k = \overrightarrow{0, q'-1}, t \in (-\infty, \infty)), \quad (9b)$$

$$\int_a^{a+1} y_{\tau}(t) dt = 0,$$

т. е. $\{y_{\tau}(t)\}$ — семейство зависящих от параметра τ ($|\tau| \leq \Delta t$) периодических функций времени с нулевым средним значением и с $q'-1$ непрерывными производными по t во всех точках, причем каждая из этих функций имеет кусочно-непрерывную q' -ю производную, совпадающую с $\frac{d^{q'} y}{dt^{q'}}(t) - \frac{d^{q'} y}{dt^{q'}}(t+T)$ на «своем» интервале $(\tau, \tau+T)$. Обозначим через $Y_p(\tau) = Y_{-p}(\tau)$ и $\varphi_{-p}(\tau) = -\varphi_p(\tau)$ вещественные амплитуды и фазы гармонических составляющих вещественной функции $y_{\tau}(t)$:

$$y_{\tau}(t) = \sum_{\nu \neq 0} \dot{Y}_{\nu}(\tau) \exp\left(i \frac{2\nu\pi}{T} t\right), \quad \dot{Y}_{\nu}(\tau) = Y_{\nu}(\tau) \exp[i\varphi_{\nu}^{(y)}(\tau)]. \quad (9в)$$

Обозначим также $\Theta_p(Y, \Delta Y; \varphi, \Delta\varphi; \tau', \Delta\tau)$ —длительность по τ одновременного осуществления условий $\{Y_p \in (Y, Y+\Delta Y), \varphi_p^{(y)} \in (\varphi, \varphi+\Delta\varphi), \tau \in (\tau', \tau'+\Delta\tau)\}$. Будем называть вибрацию $y_{\tau}(t)$ устанавливающейся, если для всех ее гармоник существует при росте Δt предел функции $\frac{1}{\Delta\tau} \Theta_p$, причем [4]

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta\tau} \Theta_p(Y, \Delta Y; \varphi, \Delta\varphi; \tau', \Delta\tau) = \Delta\varphi U_p(Y, \Delta U) \quad (|\Delta\varphi| \leq 2\pi). \quad (10)$$

Можно различными способами оценить числами $\Delta\tau_p$ ($p = \overline{1, \infty}$) интервалы установления каждой функции $\frac{\Theta_p}{\Delta\tau}$. Мы не имеем достаточного материала для обоснованной конкретизации одного из таких способов. Поэтому ограничимся пока качественным определением, считая, что величины $\Delta\tau_p$ как-то оцениваются. Если все функции $Y_p(\tau)$ $\varphi_p^{(y)}(\tau)$ столь быстро осциллируют, что $|\Delta\tau_p| < \Delta\tau^{(0)} \ll \Delta t$ ($p = \overline{1, \infty}$) будем говорить, что $y(t)$ имеет короткий интервал установления вибрации. Вернемся теперь к рассуждениям раздела 1, где в рамках традиционной схемы при максимальных упрощениях указан путь оценки параметров $\{A_k, k = \overline{0, q-1}\}$.

3. Пусть $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1а), в котором набор $\{A_k, k = \overline{0, q-1}\}$ представляет искомую динамическую структуру объекта, $f(t)$ — возмущение динамической системы, характеризующееся теперь коротким интервалом $\Delta\tau^{(0)}$ установления вибрации. Усредняя (1а), получим

$$\frac{d^q x}{dt^q} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k \frac{d^k x}{dt^k} = \bar{f} \quad (|\tau| \leq \Delta t). \quad (11a)$$

Линейность операции выделения уходов позволяет написать*

$$\left\langle \frac{d^q x}{dt^q} (t) \right\rangle_{\tau} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k \left\langle \frac{d^k x}{dt^k} (t) \right\rangle_{\tau} = \langle f(t) \rangle_{\tau}, \quad (11b)$$

что при учете (6б), (6в), (11а) дает

$$\frac{d^q x_{\tau}}{dt^q} (t) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k \frac{d^k x_{\tau}}{dt^k} (t) = f_{\tau}(t). \quad (11в)$$

В соответствии с определением (8) находим отсюда

$$X_{q,m}(\tau) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k X_{k,m}(\tau) = \Phi_m(\tau) \quad (m = \overline{0, q-1}, |\tau| \leq \Delta t), \quad (3б)$$

где $X_{k,m}(\tau) = \frac{d^k x}{dt^k}(t) \frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau)$, $\Phi_m(\tau) = f(t) \frac{d^m x}{dt^m}(t - \tau)$. Допустим, что все характеристические времена τ_k релаксации динамической системы $\{A_k, k = \overline{0, q-1}\}$ удовлетворяют соотношениям $\Delta\tau^{(0)} \ll \tau_k < T$ ($k = \overline{1, q}$). При этом абсолютные величины связанностей $|X_{k,m}(\tau)|$ с ростом τ спадают значительно медленнее, чем $|\Phi_m(\tau)|$. Если

$$|\Phi_m(\tau)| \ll |X_{q,m}(\tau)| \quad (\tau \in (\tau_0, \Delta t), m = \overline{0, q-1}),$$

* Из (11а) видно, что при $A_0 \neq 0$ (точка покоя как и раньше предполагается асимптотически устойчивой) порядки полиномов $\langle f(t) \rangle_{\tau}$ и $\langle x(t) \rangle_{\tau}$ должны совпадать, значит, $Q[f(t)] = q^{(0)}$.

то в качестве нулевого приближения $\{A_k^{(0)}, k = \overline{0, q-1}\}$ можно взять усредненное по τ ($\tau \in (\tau_0, \Delta t)$) решение системы

$$X_{q, m}(\tau) + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(\tau) X_{k, m}(\tau) = 0 \quad (m = \overline{0, q-1}, \tau \in (\tau_0, \Delta t)). \quad (3в)$$

Формула

$$x_{\tau}^{(0)}(t) = \int_{\tau}^t H_{\{A_k^{(0)}\}}(t - \mu) f_{\tau}(\mu) d\mu + x_{\tau}(\tau)$$

при учете априорного безвероятностного предположения—типа конкретизированной формулы (10)—о характере осцилляций вибрационной составляющей $f(t)$ позволяет оценить величины $|\Phi_m(\tau)|$ ($m = \overline{0, q-1}$, $\tau \in (\tau_0, \Delta t)$). Наконец, ошибки $\{|A_k - A_k^{(0)}|, k = \overline{0, q-1}\}$ определяются уравнением

$$\sum_{k=0}^{q-1} [A_k - A_k(\tau)] X_{k, m}(\tau) = \Phi_m(\tau) \quad (m = \overline{0, q-1}, \tau \in (\tau_0, \Delta t)). \quad (12)$$

Уравнения (3в), (12), позволяющие оценить параметры A_k , получаются при разнообразных определениях понятий среднего значения \bar{y} и связанности $\overline{y(t)z(t-\tau)}$, удовлетворяющих небольшому числу требований. Предпочтительнее определения, приводящие к минимальным ошибкам в оценках параметров. И использованные же здесь таковыми не являются, поскольку они не учитывают нестационарность решения динамической системы, движущейся из фиксированного начального состояния $\frac{dmx}{dt^m}(\tau) = x^{(m)}(\tau)$ ($m = \overline{0, q-1}$, $|\tau| \leq \Delta t$) Для уменьшения

ошибок $\{|A_k - A_k^{(1)}|, k = \overline{0, q-1}\}$ оценку $\{A_k^{(1)}\}$ следует вести, переопределив в соответствии, например, с работами [4] понятия среднего значения и связанности, учитывая нулевое приближение динамических параметров $\{A_k^{(0)}\}$ и начальные значения $x^{(m)}(\tau)$ и проводя аналогию уже не со стационарным случайным процессом, а исходя из близости $x(t)$ к процессу с q -ми стационарными приращениями. Этот этап расчета, как и ряд других, лишь отмеченных в данной заметке, требует более детального обсуждения.

Автор благодарен Б. Ф. Курьянову, С. М. Рытову и А. Н. Ширяеву за дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ю И Алимов, Автоматика и телемеханика, 27, № 2, 28 (1966).
- 2 Л И Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 3, 572 (1962).
- 3 Л И Гудзенко, В. Е Чертопруд, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3 (1967).
- 4 А. Н. Колмогоров, Sankhya, The Indian J. Statistik, Ser. A, 25, N 4, 369 (1963).
- 5 Ф. В. Бункин, Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 3, вып. 7, 968 (1958)
- 6 У Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, И. Л. М., 1961.
- 7 Л И Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 2, 267 (1961).

TO THE PLANT STRUCTURE ANALYSIS ON THE BASIS OF ITS SIGNAL

L. I. Goodzenko

The possibility for practical analysis of noninteracting macroscopic plant moving in the stable stationary state environment due to the microparts interactions is discussed in this paper. Assuming the one-dimensional signal recorded in a finite time interval to be the only available information about the plant a computational scheme is derived which is different from the conventional statistical methods.

УДК 681.142.6:519.83

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕОСТАТНО-ТРАНЗИСТОРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ*Д. И. Батищев, Г. К. Шевякова*

Предлагается метод расчета оптимальных параметров реостатно-транзисторных схем «или-не», обеспечивающий надежную работу логических схем при изменении напряжений источников питания и разбросе величин сопротивлений. Дается математическая формулировка задачи расчета схемы «или-не» и приводится ее решение как задача нелинейного программирования.

В последние годы транзисторные логические схемы, работающие в ключевом режиме, находят широкое применение в вычислительной технике, промышленной автоматике и телемеханике. Благодаря высокой надежности, небольшому числу деталей, простоте эксплуатации и перспективности с точки зрения микроминиатюризации наиболее распространенными в устройствах дискретной автоматики являются реостатно-транзисторные схемы, реализующие логическую функцию «или-не». Схема «или-не» является логически полной и позволяет реализовать любую логическую функцию. Путем соответствующего соединения схем «или-не» можно получить схемы триггера, сумматора, двоичного счетчика и т. д. Это позволяет на базе одной типовой ячейки создавать сложные узлы и блоки. При этом упрощается производство блоков и их элементы становятся взаимозаменяемыми. Однако такой подход к конструированию сложных систем из типовых модулей «или-не» накладывает на сами модули два требования: во-первых, они должны надежно работать при любых отклонениях параметров деталей схемы и величин питающих напряжений в поле допусков и, во-вторых, иметь оптимальные технико-экономические показатели. Поэтому задачи, связанные с применением математических методов и цифровых вычислительных машин для выбора оптимальных параметров транзисторных модулей, в настоящее время вполне закономерно привлекают все большее и большее внимание. При этом возможны различные подходы как к постановкам таких задач, так и к методам их решения [1-5].

В настоящей работе подход, предложенный ранее для оптимизации электромагнитных систем [6], распространяется на транзисторные переключающие схемы. Предлагаемая методика расчета позволяет выбирать такие параметры элементов схемы, при которых обеспечиваются оптимальные технико-экономические показатели. При этом в процессе проектирования учитываются возможные отклонения питающих напряжений и разброс величин сопротивлений. Для определенности рассматривается расчет реостатно-транзисторных схем «или-не» с M входами и N выходами. Однако предлагаемая методика может быть использована для расчета переключающих схем других типов.

1. ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ, ОПТИМАЛЬНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В настоящее время не существует какой-либо стройной методики топологического синтеза* транзисторных схем на основе только требований, предъявляемых к ним. Поэтому будем считать, что топология элемента задана. На рис. 1 приведена принципиальная схема модуля «или-не», в которой транзистор выполняет роль усилителя мощности с одновременным инвертированием сигнала, а входная логика выполнена на сопротивлениях. Схема имеет M логических входов и может

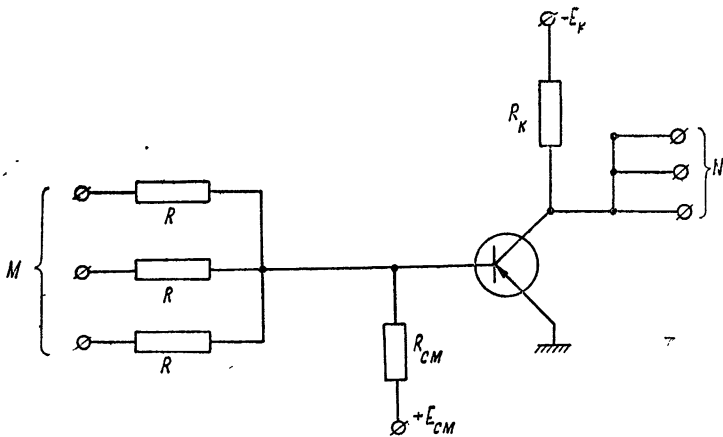


Рис. 1.

быть нагружена на N аналогичных элементов, т. е. предполагается, что в сложных системах элементы «или-не» работают друг на друга. При отсутствии входных сигналов транзистор заперт и напряжение на выходе схемы отрицательно. Этот уровень напряжения принимается за логическую единицу. При подаче отрицательного напряжения хотя бы на один из входов схема открывается и напряжение на коллекторе открытого триода принимается за логический нуль. Задача решается для конкретного типа транзистора с заданными электрическими характеристиками. Кроме этого, известны пределы изменения температуры окружающей среды, точность номиналов сопротивлений и допуски на величины напряжений источников питания. По этим исходным данным необходимо выбрать значения всех сопротивлений и напряжений источников питания так, чтобы проектируемый элемент удовлетворял заданным технико-эксплуатационным ограничениям, накладываемым на схему. Эти требования весьма разнообразны и определяются условиями надежной эксплуатации, требованиями ГОСТов и технических условий, условиями практической реализуемости и т. п. Практически эти ограничения можно выразить через параметры схемы либо аналитическими формулами, характеризующими операции системы или процессы, которые происходят в ней, либо при помощи экспериментально снятых таблиц и записать в виде системы нелинейных неравенств

$$\beta_i \leq f_i(x, y) \leq \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — оптимизируемые параметры схемы; $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ — постоянные параметры схемы; $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, \dots, m)$ — предельные значения технико-эксплуатационных требований.

* Здесь под «топологией» элемента понимается фиксирование таких характерных черт модуля, которые полностью определяют его принципиальную схему.

Будем говорить, что устройство работоспособно, если одновременно выполняются все неравенства системы (1.1). В противном случае, если нарушилось хотя бы одно ограничение, будем считать, что схема неработоспособна.

В процессе проектирования стремятся выбирать параметры работоспособного элемента так, чтобы он был оптимальным. Однако надо заметить, что оптимальный модуль может быть получен лишь на основе учета всех требований, предъявляемых к современному полупроводниковому элементу данного типа: минимум веса и габаритов, высокая надежность в эксплуатации и дешевизна изготовления, максимальное быстродействие и минимальная потребляемая мощность и т. д. Учет всех этих требований очень труден (но в принципе возможен), в то время, как совместное оптимальное удовлетворение их практически невозможно. Поэтому мы будем понимать под оптимальной такую схему, которая является работоспособной и одновременно оптимальной относительно некоторого критерия, определяемого в зависимости от назначения и особенностей модуля. В большинстве случаев этот критерий можно задать как функцию параметров системы, экстремальное значение которой численным образом характеризует определенные свойства схемы

$$Q = Q(x, y). \quad (1.2)$$

Например, в качестве оптимальной можно принять схему, обеспечивающую минимальное потребление мощности от источников питания [2] или обладающую максимальной нагрузочной способностью [5]. Если таких критериев несколько, то расчет можно вести по сводному критерию. Например, по критерию, характеризующему относительную величину потребляемой мощности на единицу частоты переключения:

$$Q = P/f_{\text{пер}}, \quad (1.3)$$

где P — суммарная мощность, рассеиваемая на триоде и на сопротивлениях схемы, $f_{\text{пер}} = 1/2\pi t_{\text{пер}}$ — рабочая частота переключения элемента; $t_{\text{пер}} = \max(t_{\text{вкл}}, t_{\text{выкл}})$ — время переключения элемента; $t_{\text{вкл}}$ — время включения схемы; $t_{\text{выкл}}$ — время выключения схемы.

Обычно от модуля требуется, чтобы он был работоспособным при определенных условиях в течение определенного времени. Однако нормальное функционирование элементов нарушается за счет внезапных и постепенных отказов. Отказы первого вида изменяют топологию схемы и поэтому не будут рассмотрены. Постепенные отказы, которые не изменяют топологии схемы, а делают ее неработоспособной, в большинстве схем составляют 50—80% от общего числа отказов [3]. Поэтому для обеспечения надежной работы схемы и исключения отказов такого рода необходимо в процессе проектирования учитывать разброс величин сопротивлений и колебания напряжений источников питания. Одним из методов обеспечения надежности в процессе проектирования является метод наилучшего случая. Он характеризуется следующим требованием: схема должна оставаться работоспособной при наиболее неблагоприятных сочетаниях параметров элемента в поле допусков. Модуль, спроектированный таким образом, будет обладать высокой надежностью.

Однако ценой, которой приходится платить за это, является снижение экономичности и ухудшение других эксплуатационных характеристик элемента. Другим принципом расчета полупроводниковых схем, обеспечивающим надежную работу элемента при колебаниях параметров схемы в пределах поля допусков, является метод статистического моделирования. При этом считается, что параметры схемы в поле допу-

сков имеют известные вероятностные распределения. Например, статистические исследования показывают, что закон распределения случайных величин сопротивлений приближается к равномерному [4], а отклонения параметров транзисторов от номинальных значений подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

Сущность метода состоит в следующем. По известным законам распределения из поля допусков выбираются случайные значения параметров схемы. Эта процедура повторяется L раз, что дает некоторое множество параметров схемы x^1, x^2, \dots, x^L . Для этих значений проверяются условия работоспособности (1.1). Для обеспечения необходимой надежности схемы требуется, чтобы вероятность выполнения условий работоспособности (1.1) $P\{\beta_i \leq f_i(x^k, y) \leq \alpha_i; i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, L\}$ была не меньше заданной p_1 :

$$P\{\beta_i \leq f_i(x^k, y) \leq \alpha_i; i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, L\} \geq p_1, \quad (1.4)$$

где

$$P\{\beta_i \leq f_i(x^k, y) \leq \alpha_i; i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, L\} = l/L,$$

l — число случайных реализаций параметров схемы в поле допусков, при которых условие (1.1) выполняется.

Если условие (1.4) выполняется, то будем говорить, что схема работоспособна при любых возможных отклонениях параметров схемы в поле допусков с вероятностью $p_1 \leq 1$.

Для обеспечения надежной работы схемы при различных входных и выходных нагрузках и при изменении рабочих температур в заданном диапазоне расчетные соотношения (см. Приложение) выводятся для самого неблагоприятного сочетания входных и выходных нагрузок из условия надежного закрывания схемы при максимальной положительной температуре и открывания при минимальной отрицательной температуре.

Вышеизложенный подход к задаче оптимального проектирования транзисторных схем позволяет сформулировать ее как задачу нелинейного программирования: найти параметры схемы $x = (x_1, \dots, x_n)$, минимизирующие функцию качества $Q(x, y)$ при удовлетворении нелинейных условий работоспособности (1.1). При этом каждая точка x , удовлетворяющая системе неравенств (1.1), должна обеспечивать выполнение неравенства (1.4) при изменении параметров схемы в поле допусков с заданным законом распределения

Сведение задачи оптимального проектирования к задаче нелинейного программирования позволяет применять для расчета транзисторных схем современные математические методы решения экстремальных задач: градиентные методы [6], статистические методы поиска [7], комбинацию метода Лагранжа и градиентной процедуры [8] и др. Эти методы требуют большого объема вычислений, поэтому, чтобы их использование было наиболее эффективным, расчет оптимальных параметров реостатно-транзисторных схем целесообразно осуществлять с помощью цифровых вычислительных машин.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РЕОСТАТНО-ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ

По исходным данным: 1) заданной топологии схемы; 2) данном рабочем температурном диапазоне; 3) для определенных входных и выходных нагрузок M и N схемы; 4) известным предельным (при максимальной и минимальной рабочей температуре) электрическим характеристикам данного типа транзистора: B — статический коэффициент

усиления по току; $i_{к0}$ — неуправляемый ток коллектора; $V_{бэ0}$ — напряжение между базой и эмиттором открытого триода в режиме насыщения; $V_{кэ0}$ — напряжение между коллектором и эмиттором открытого триода в режиме насыщения; C_k — емкость коллекторного перехода; $C_э$ — емкость эмиттерного перехода, f_n — предельная частота транзистора и 5) заданным требованиям к точности номиналов сопротивлений и стабильности источников питания требуется выбрать номинальные значения сопротивлений и значения напряжений источников питания, которые определяют схему, обладающую максимальным быстродействием и минимальной потребляемой мощностью, т. е. обеспечивают минимум функции качества

$$Q = P(x)/f_{пер}(x),$$

где $x = (R_k, R_{см}, R, E_k, E_{см})$ — оптимизируемые параметры схемы. При этом выбранные параметры схемы должны удовлетворять условиям работоспособности, которые определяются следующими технико-эксплуатационными требованиями.

1) Схема должна надежно работать в ключевом режиме: «отсечка-насыщение». Это требование сводится к условию полного запираания и отпираания триодов при поступлении рабочих сигналов: а) для надежного запираания триода (режим отсечки) напряжение между базой и эмиттором закрытого триода должно быть больше некоторой граничной величины $V_0 = 0 \div 0,1$ в:

$$U_{бэз}(x) \geq V_0; \quad (2.1)$$

б) для обеспечения надежного открывания транзистора ток базы открытого триода должен быть больше некоторого критического значения $i_k(x)/B$, которое полностью открывает триод при наличии в схеме транзистора с минимальным коэффициентом усиления B (условие насыщения):

$$i_b(x) \geq i_k(x)/B, \quad (2.2)$$

где i_k — ток коллектора открытого триода.

2) Схема не должна работать в предельно-допустимых режимах, т. е. предельно-допустимые ограничения, накладываемые на полупроводниковые приборы, не должны нарушаться: а) мощность на коллекторе открытого триода должна быть меньше допустимой мощности рассеяния:

$$P_k(x) < P_{доп}; \quad (2.3)$$

б) коллекторный ток не должен превышать предельно-допустимого тока, указанного в паспортных данных для этого режима:

$$i_k(x) < (i_k)_{доп}; \quad (2.4)$$

в) для предохранения транзистора от возможного пробоя перехода база-эмиттор требуется, чтобы напряжение между базой и эмиттором закрытого триода было меньше напряжения пробоя:

$$U_{бэз}(x) < U_{проб}; \quad (2.5)$$

3) Для предотвращения явления «засыпания» коллекторный ток при любой температуре должен удовлетворять условию [9]

$$i_k(x) \geq \gamma U_{кэз}(x), \quad (2.6)$$

где $U_{кэз}$ — напряжение на коллекторе закрытого триода;
 γ — коэффициент надежности (для транзисторов П13—П15
 $\gamma = 0,4 \div 0,5$ ма·с⁻¹).

4) Для повышения надежности схем необходимо, чтобы при нагрузке их друг на друга использовался один и тот же стандартный сигнал, т. е. схемы согласовывались без дополнительных переходных элементов. Это требование сводится к ограничениям на уровни выходного сигнала: а) верхний уровень выходного сигнала находится в области допустимых значений:

$$V_B^- \leq V_B(x) \leq V_B^+; \quad (2.7)$$

б) нижний уровень выходного сигнала находится в области допустимых значений:

$$V_H^- \leq V_H(x) \leq V_H^+. \quad (2.8)$$

5) Схема должна обладать заданной помехоустойчивостью. (Здесь под помехоустойчивостью схемы понимается минимальный порог срабатывания максимально-чувствительной схемы). В зависимости от исходного состояния для схемы представляет опасность либо помеха на запирающие $V_{\text{пом н}}$, либо помеха на отпирающие $V_{\text{пом в}}$: а) допустимой помехой на запирающие будем считать тот входной сигнал, положительный относительно нижнего уровня, при котором схема остается открытой. Этот сигнал должен быть не меньше заданного:

$$V_{\text{пом н}}(x) \geq V^+; \quad (2.9)$$

б) допустимой помехой на отпирающие будем считать тот входной сигнал, отрицательный относительно верхнего уровня, при котором схема остается закрытой. Амплитуда этого сигнала должна быть больше заданного значения:

$$V_{\text{пом в}}(x) \geq V^-. \quad (2.10)$$

6) Номинальные значения источников питания и сопротивлений должны выбираться согласно «шкалы стандартных напряжений» и «шкалы номинальных значений сопротивлений».

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА РЕОСТАТНО-ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ

В качестве примера на ЦВМ «БЭСМ-3М» нами был проведен расчет оптимального варианта реостатно-транзисторной схемы «или-не»*, спроектированной на основе транзистора типа П16 для интервала рабочих температур от -55° до $+60^\circ$ с числом входов $M=3$ и выходов

Таблица 1

Параметры и характеристики	R_k [ком]	R_{cm} [ком]	R [ком]	E_k [е]	E_{cm} [е]	P [мвт]	$t_{\text{пер}}$ [мксек]	$U_{бэз}$ [е]	i_b [ма]	$i_{кВ}$ [ма]	i_k [ма]	$V_H = V_{кэз}$ [е]
Типовой элемент	0,82	4,7	1,5	12	6	182	2,5	1,4	3,8	0,5	14,6	7,8
Оптимальная схема	1,8	30	2,4	8	8	38	2,9	0,44	1,6	0,2	4,4	4,6
Ограничения								$0 < U_{бэз} \leq 2$	$i_b \geq \frac{i_k}{B}$	$0,5 V_H \leq i_k \leq \leq 25$	$4 \leq V_H \leq 12$	

* Время поиска оптимального решения составляет несколько минут.

$N = 1$. Схема должна надежно работать (с вероятностью безотказной работы $p_1 = 1$ при $L = 1000$) при использовании в ней сопротивлений с допуском $\pm 10\%$ и источников питания, напряжение которых изменяется в пределах $\pm 10\%$.

В результате поиска наилучшего решения по критерию $\min [P(x)/f_{\text{пер}}(x)]$ при удовлетворении всех условий работоспособности (раздел 2) была получена оптимальная схема модуля «или-не», параметры и некоторые характеристики которой приведены в таблице 1. Для сравнения в таблице также даны параметры и характеристики типового модуля, выпускаемого промышленностью (типовой элемент).

Из таблицы 1 видно, что за счет оптимального выбора параметров схемы, выполненного по предложенной методике с помощью ЦВМ, получен модуль с минимальной мощностью рассеивания и быстродействием того же порядка, что и у типовой схемы.

Проведенные исследования показали, что результаты расчета хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Для оптимальной схемы $M = N = 1$ на рис. 2 приведена экспериментальная зависимость $U_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}})$, а на рис. 3 показаны эпюры входного (верхний импульс) и выходного (нижний импульс) сигналов.

Предложенная методика расче-

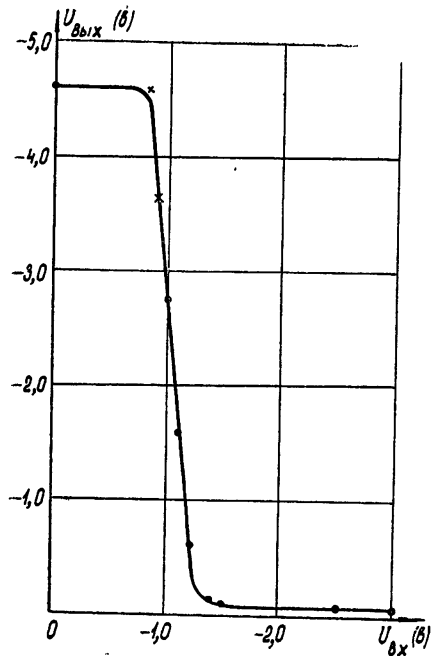


Рис. 2.

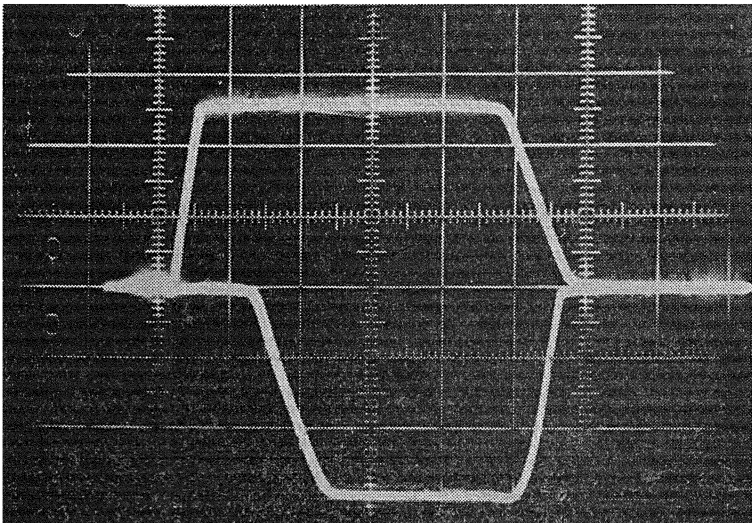


Рис. 3.

та по заданному критерию позволяет находить оптимальные параметры реостатно-транзисторных схем, которые надежно работают при разбросе величин сопротивлений и отклонении значений напряжения питания в поле допусков. При этом рассчитанные схемы не требуют регулировки и наладки при изготовлении и эксплуатации.

Данная постановка задачи без труда позволяет учесть в уравнениях работоспособности зависимость параметров схемы и триода от температуры, режимов работы и времени эксплуатации.

Предлагаемый подход может быть использован для расчета переключающих схем других типов, создаваемых как на дискретных элементах, так и в виде интегральных твердых схем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Статика. Наиболее тяжелым для отпираания является случай, когда только на один вход подано отпирающее напряжение с выхода закрытого триода, нагруженного на $(N-1)$ вход аналогичных схем «или-не». Остальные $(M-1)$ входов рассматриваемой схемы подключены к коллекторам открытых триодов. Из решения уравнений Кирхгофа имеем

$$i_b = \frac{E_k - i_{k0} R_k - V_{бэ0}}{R + NR_k} - (M-1) \frac{V_{бэ0} - V_{кэ0}}{R} - \frac{E_{см} + V_{бэ0}}{R_{см}}. \quad (\text{П.1})$$

Ток коллектора открытого транзистора будет максимальным, если этот транзистор нагружен по всем N выходам схемами, каждая из которых открыта и имеет на базе напряжение $V_{бэ0}$. В этом случае коллекторный ток складывается из тока, протекающего через коллекторное сопротивление, и суммарного тока через N входных сопротивлений R .

$$i_k = \frac{E_k - V_{кэ0}}{R_k} + N \frac{V_{бэ0} - V_{кэ0}}{R}. \quad (\text{П.2})$$

Наихудшим для закрывания транзистора является случай, когда на все M входов подается напряжение с открытых триодов. Для этого режима выражение для напряжения между базой и эмиттером закрытого транзистора имеет вид

$$U_{бэз} = \frac{R(E_{см} - i_{k0} R_{см}) - MR_{см} V_{кэ0}}{R + MR_{см}}. \quad (\text{П.3})$$

Нижний уровень выходного сигнала зависит от напряжения источника коллекторного питания и падения напряжения на сопротивлении R_k закрытого транзистора (без учета нагрузки):

$$V_n = U_{кэз} = E_k - i_{k0} R_k. \quad (\text{П.4})$$

Верхний уровень выходного сигнала определяется напряжением между коллектором и эмиттером открытого триода в режиме насыщения:

$$V_B = V_{кэ0}. \quad (\text{П.5})$$

2. Помехоустойчивость. Амплитуда помехи зависит от переходной характеристики переключающей схемы и от продолжительности действия помехи. Предположим, что длительность помехи много больше времени переключения. Тогда влиянием переходной характеристики можно пренебречь.

Пусть все M входов схемы подключены к коллекторам открытых триодов, и на одном из входов появился входной сигнал с максимальной помехой по верхнему уровню

$$V_{вх} = V_{кэ0} + V_{помв}.$$

Нетрудно показать, что для этого режима

$$V_{вх} = \left[\frac{E_{см} + V_{бэз}}{R_{см}} + \frac{i_k}{B} - (M-1) \frac{V_{кэ0} - V_{бэз}}{R} \right] R + V_{бэз}.$$

Окончательно получаем

$$V_{помв} = V_{бэз}(M+R/R_{см}) + \frac{E_{см} R}{R_{см}} + \frac{i_k R}{B} - MV_{кэ0}.$$

Если в первом приближении считать граничное значение потенциала, соответствующее переходу из закрытого состояния в открытое, равным нулю ($V_{бэ} = 0$), то для максимально-допустимой помехи по верхнему уровню имеем

$$V_{\text{пом в}} = \frac{E_{\text{см}}R}{R_{\text{см}}} + \frac{i_{\text{к}}R}{B} - MV_{\text{кэ}0}, \quad (\text{П.6})$$

где $i_{\text{к}}$ — ток коллектора открытого триода, определяемый по формуле (П.2).

Величина допустимой помехи по нижнему уровню определяется амплитудой входного сигнала, поданного только на один вход с коллектора закрытого транзистора: $V_{\text{вх}} = V_{\text{н}} - V_{\text{пом н}}$. Остальные $(N-1)$ выхода закрытого транзистора пусть нагружены аналогичными схемами. Тогда напряжение на коллекторе закрытого транзистора (с учетом нагрузки на N элементов) равно

$$V_{\text{н}} = E_{\text{к}} - i_{\text{к}0} R_{\text{к}} - \frac{E_{\text{к}} - i_{\text{к}0} R_{\text{к}} - V_{бэ}}{R + NR_{\text{к}}} NR_{\text{к}}. \quad (\text{П.7а})$$

Считая, что граничное напряжение база-эмиттор равно нулю ($V_{бэ} = 0$), нетрудно показать, что

$$V_{\text{вх}} = E_{\text{см}} R / R_{\text{см}}.$$

Окончательно получаем, что помеха по нижнему уровню определяется по следующей формуле:

$$V_{\text{пом н}} = E_{\text{к}} - i_{\text{к}0} R_{\text{к}} - \frac{E_{\text{см}} R}{R_{\text{см}}} - \frac{E_{\text{к}} - i_{\text{к}0} R_{\text{к}}}{R + NR_{\text{к}}} NR_{\text{к}}. \quad (\text{П.7б})$$

3. Динамика. Динамические характеристики схемы рассчитываются при условии, что управляющие сигналы подаются на все входы, так как при этом степень насыщения триода оказывается наибольшей.

Перепад уровней напряжения выходного сигнала длится некоторое время, которое принято называть временем переключения ($t_{\text{пер}}$). Под временем переключения подразумевается большее из времени включения $t_{\text{вкл}}$ и выключения $t_{\text{выкл}}$:

$$t_{\text{пер}} = \max(t_{\text{вкл}}, t_{\text{выкл}}), \quad (\text{П.8})$$

где $t_{\text{вкл}} = t_3 + t_{\text{н}}$, $t_{\text{выкл}} = t_{\text{рас}} + t_{\text{сп}}$, t_3 — время задержки переднего фронта, $t_{\text{н}}$ — время нарастания переднего фронта, $t_{\text{рас}}$ — время рассасывания, $t_{\text{сп}}$ — время спада заднего фронта.

Поскольку схема собрана как токовый ключ (триод переключает токи, заданные внешними сопротивлениями), то при расчете скорости переключения для времени нарастания и спада с помощью метода заряда [10] можно получить уравнения, выражающие их зависимость от параметров схемы:

$$t_{\text{н}} = (\tau + \tau_{\text{сэ}} + \tau_{\text{с}}) \ln \frac{1}{1 - 0,9/n}, \quad (\text{П.9})$$

$$t_{\text{сп}} = (\tau + \tau'_{\text{сэ}} + \tau'_{\text{с}}) \ln \frac{\sigma + 0,9}{\sigma + 0,1}, \quad (\text{П.10})$$

где τ — эффективное время жизни неосновных носителей в базе; $\tau_{\text{сэ}} = BC_{\text{э}} R_{\text{экв}}(n, i_{\text{кн}})$, $\tau'_{\text{сэ}} = BC_{\text{э}} \nu(\sigma) / \lambda i_{\text{кн}}$ — постоянные времена, учитывающие влияние зарядной емкости эмиттора; $\tau_{\text{с}} = BC_{\text{к}} R_{\text{к}} \xi(n)$, $\tau'_{\text{с}} = BC_{\text{к}} R_{\text{к}} \xi(\sigma)$ — постоянные времена, учитывающие влияние емкости коллектора; $n = B(i_{\text{б}0}) / i_{\text{кн}}$, $\sigma = B(i_{\text{б}3}) / i_{\text{кн}}$, $i_{\text{кн}} = (E_{\text{к}} - V_{\text{кэ}0}) / R_{\text{к}}$ — ток коллектора в режиме насыщения. $(i_{\text{б}0})$, $(i_{\text{б}3})$ — ток в базовой цепи открытого и закрытого транзистора соответственно.

Выражения для коэффициентов $R_{\text{экв}}(n, i_{\text{кн}})$, $\nu(\sigma)$, $\xi(n)$ и $\xi(\sigma)$ определены в работе [10].

Время рассасывания вычисляется по формуле [1]

$$t_{\text{рас}} = \tau \ln \frac{(i_{\text{б}0}) + (i_{\text{б}3})}{i_{\text{кн}}/B + (i_{\text{б}3})}. \quad (\text{П.11})$$

При формировании фронта включения триод не начнет открываться до тех пор, пока не зарядятся паразитные емкости $C_{\text{п}}$. Можно считать, что этот заряд паразитных емкостей идет от источника постоянного тока по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau_{\text{п}} = C_{\text{п}} R$. При достижении величиной напряжения на конденса-

торе значения порога чувствительности схема срабатывает и начинается формирование фронта нарастания выходного сигнала. Следовательно,

$$t_3 = \tau_n \ln \frac{1}{1 - V_{\text{чув}}/V_H}, \quad (\text{П.12})$$

где V_H — нижний уровень выходного сигнала (формула П.7а); $V_{\text{чув}}$ — критическое напряжение на входе, при котором схема переходит из закрытого состояния в открытое (вычисляется по формуле (П.6)).

4. Мощность, рассеиваемая в схеме. Мощность, потребляемая от источников питания, рассеивается в схеме «или-не» на триоде и на сопротивлениях. Основное выделение тепла в триоде, работающем в ключевом режиме, происходит на фронтах переключения. Заменяя реальные импульсы тока и напряжения кусочно-линейными прямыми и интегрируя их произведение по времени, нетрудно найти выражение мощности, усреднив энергию по периоду следования импульсов T .

$$P_K = \frac{1}{T} \left\{ \frac{t_n + t_{\text{сп}}}{6} [(i_{K_n} - i_{K_0}) (V_{K_{\text{эз}}} + 2V_{K_{\text{эо}}}) + 3i_{K_0} (V_{K_{\text{эо}}} + V_{K_{\text{эз}}})] + \right. \\ \left. + i_{K_n} V_{K_{\text{эо}}} (t_n + t_{\text{рас}} - t_n) + i_{K_0} V_{K_{\text{эз}}} (T - t_n - t_{\text{рас}} - t_{\text{сп}}) \right\}, \quad (\text{П.13})$$

где t_n — длительность импульса.

В режиме насыщения общую мощность, рассеиваемую схемой, можно определить следующим образом:

$$P = P_K + P_{R_K} + P_{R_{\text{см}}} + MP_R, \quad (\text{П.14})$$

где $P_{R_K} = (E_K - V_{K_{\text{эо}}})^2/R_K$ — мощность, рассеиваемая на коллекторном сопротивлении; $P_{R_{\text{см}}} = (E_{\text{см}} - V_{B_{\text{эо}}})^2/R_{\text{см}}$ — мощность, рассеиваемая на сопротивлении смещения; $P_R = (V_{K_{\text{эо}}} - V_{B_{\text{эо}}})^2/R$ — мощность, рассеиваемая на сопротивлении базы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Каганова, А. А. Лукин, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 5, № 3, 331 (1962).
2. В. Н. Плотноков, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, вып. 9, 208 (1963).
3. С. М. Доманицкий, И. В. Прангшвили, Автоматика и телемеханика, 24, № 5, 657 (1964).
4. С. М. Доманицкий, И. В. Прангшвили, Автоматика и телемеханика, 25, № 6, 997 (1964).
5. Б. П. Петрухин, Автоматика и телемеханика, 27, № 9, 143 (1966).
6. Д. И. Батищев, Автоматика и телемеханика, 26, № 1, 140 (1965).
7. Л. А. Растринг, Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем, изд. Зинатне, Рига, 1965.
8. Д. И. Батищев, Тезисы докладов конференции молодых научных работников, ГГУ, секция физико-математических наук, Горький, 1966.
9. Е. М. Мартынов, Бесконтактные переключающие устройства, Госэнергоиздат, М., 1961.
10. В. Г. Маранц, М. П. Маркович, Л. П. Петрова, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, вып. 6, 200 (1960).

Научно-исследовательский институт прикладной математики Поступила в редакцию
и кибернетики при Горьковском университете 19 мая 1967 г.

DESIGN OF THE OPTIMAL PARAMETERS FOR THE RESISTOR-TRANSISTOR LOGICAL CIRCUITS

by D. I. Batishchev, T. K. Shevyakova

This paper suggests a new technique for the transistor OR-NOT logical circuits optimal parameters design which provides the reliability of the designed circuits when power supply voltage changes or impedance of the resistors varies in the specified limits. The mathematical formulation for OR-NOT logical circuit design problem is given and the corresponding solution obtained by the nonlinear programming methods is provided.

УДК 62 — 507

**К ТЕОРИИ ПРОСТЕЙШИХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ**

В. А. Дозоров, Т. В. Минчук

С целью исследования динамики логических схем полному логическому набору поставлена в соответствие система дифференциальных операторов.

Исследование переходных процессов в достаточно сложных логических схемах связано с большими математическими трудностями, из-за которых к настоящему времени изучена лишь динамика элементов, реализующих отдельные логические операции [1, 2].

Математические трудности могут быть в значительной мере преодолены при приближенном описании динамических связей между входами и выходами логических схем аналогично тому, как это делается [3, 4] при учете статических зависимостей.

В данной работе рассмотрен и проиллюстрирован на простейших примерах один из возможных способов написания систем дифференциальных уравнений путем формального уточнения соответствующих уравнений алгебры логики, аппарат которой широко используется для синтеза и анализа вычислительных и управляющих устройств [3-7].

Будем рассматривать логические схемы, элементы которых реализуют операции полного логического набора; отрицания ($x_1 = \overline{x_2}$), дизъюнкции ($x_1 = x_2 \vee x_3$) и конъюнкции ($x_1 = x_2 \wedge x_3$).

Элементом, реализующим функции полного логического набора, поставим в соответствие дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} x_1 = \overline{x_2} &\dot{\rightarrow} L_1 x_1 = L_2 \varphi_1(x_2), \\ x_1 = x_2 \vee x_3 &\dot{\rightarrow} L_3 x_1 = L_4 \varphi_2(x_2, x_3), \\ x_1 = x_2 \wedge x_3 &\dot{\rightarrow} L_5 x_1 = L_6 \varphi_3(x_2, x_3), \end{aligned} \tag{1}$$

$$L_k = \sum_{i=0}^{n_k} \alpha_{ki} \frac{d^i}{dt^i}.$$

Вид функций φ_i и параметры α_{ki} дифференциальных операторов L_k выбираются так, чтобы решение статической задачи совпадало с результатами решения соответствующих уравнений алгебры логики, а дифференциальные уравнения хотя бы приближенно описывали динамические процессы в реальных логических элементах. Так как в уравнениях алгебры логики входят лишь значения функций φ_k в точках (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1), то возможны различные статические и динамические модели, зависящие как от точности приближений, так и от конкретных физических реализаций элементов схемы.

Рассмотрим простейшую динамическую модель, полагая дифференциальные операторы L_2, L_4, L_6 — нулевого порядка, L_1, L_3, L_5 — первого порядка, а статические характеристики релейными [8]:

$$L_2 = L_4 = L_6 = 1, \quad L_k = \mu_k \frac{d}{dt} + 1 \quad (k = 1, 3, 5),$$

$$\varphi_1(x) = 1 - \varphi(x),$$

$$\varphi_2(x, y) = \varphi(x + y),$$

$$\varphi_3(x, y) = \varphi(x + y - 1),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (\text{при } x > x^0) \\ 0 \leq \varphi(x^0) \leq 1 & \\ 0 & (\text{при } x < x^0) \end{cases}.$$

В силу принятых идеализаций относительно вида статических характеристик математическая модель всякой логической схемы будет представлять собой релейную систему, специфическая особенность которой состоит в сравнительно большом числе релейных элементов.

Так как любая функция алгебры логики может быть представлена в дизъюнктивной нормальной форме [5], то представляет интерес, прежде всего, рассмотреть дифференциальные уравнения логической схемы, составленной из элементов «не», «или», «и» в соответствии с уравнениями алгебры логики вида [6, 7]

$$\dot{x}_j = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} \bigwedge_{l=1}^m \bar{x}_{li},$$

где

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & (\text{при } \bar{x}_j \supset \{ \bigwedge_{l=1}^m \bar{x}_{li} \}) \\ 0 & (\text{при } \bar{x}_j \subset \{ \bigwedge_{l=1}^m \bar{x}_{li} \}) \end{cases},$$

$$N = C_n^m \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Согласно (1), (2), уравнения динамики, соответствующие системе (3), могут быть записаны в виде

$$\mu_i \dot{x}_i + x_i = \varphi(\sum x_j).$$

Нетрудно видеть, что для любой функции φ , удовлетворяющей условию $0 \leq \varphi \leq 1$, логическая схема, процессы в которой описываются системой дифференциальных уравнений (4), абсолютно устойчива вне области $E_n + \varepsilon_n (-\varepsilon_{1i} \leq x_i \leq 1 + \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{ji} > 0; i = 1, 2, \dots, n)$ фазового пространства системы (4).

Поэтому при решении конкретных задач можно ограничиться исследованием поведения системы в области $E_n + \varepsilon_n$, так как только в этой области могут содержаться все особенности разбиения пространства состояний.

В качестве простейших примеров анализа поведения синтезированных из логических элементов систем рассмотрим схемы генератора и трюичного триггера, уравнения алгебры логики которых соответственно

$$x_1 = \bar{x}_3, \quad x_2 = x_1, \quad x_3 = \bar{x}_2; \quad (5)$$

$$x_1 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \quad x_2 = \bar{x}_1 \vee x_3, \quad x_3 = x_1 \vee \bar{x}_2. \quad (6)$$

Согласно формулам (1), система дифференциальных уравнений генератора имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{x}_1 + x_1 &= 1 - \varphi(x_3), \\ \mu_2 \dot{x}_2 + x_2 &= 1 - \varphi(x_1), \\ \mu_3 \dot{x}_3 + x_3 &= 1 - \varphi(x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Для определенности будем предполагать $\mu=1$ и $x^0=0,5$. Так как уравнения системы (7) содержат кусочно-постоянные функции φ , то пространство состояний E_3 может быть разбито плоскостями $x_i=x^0 (i=1, 2, 3)$ на восемь областей линейности $G_{m_1 m_2 m_3}$, где

$$m_i = \begin{cases} 0 & (\text{при } 0 \leq x_i < x^0) \\ 1 & (\text{при } x^0 \leq x_i \leq 1) \end{cases}. \quad (8)$$

Из системы (7) нетрудно видеть, что каждая фазовая траектория, начавшаяся внутри областей

$$G_{001}, \quad G_{011}, \quad G_{010}, \quad G_{110}, \quad G_{100}, \quad G_{101}, \quad (9)$$

при $t \rightarrow \infty$ стремится к одной из границ $\Gamma_i (x_i = x^0)$.

Поэтому, воспользовавшись точечным преобразованием границ Γ_i друг в друга, получим, что с помощью дробно-линейной функции вида

$$\begin{aligned} x_{26} &= \frac{4x_{30} - 7x_{20} + 2}{24x_{30} - 40x_{20} + 9} = T_2(x_{20}, x_{30}), \\ x_{36} &= \frac{17x_{30} - 28x_{20} + 6}{24x_{30} - 40x_{20} + 9} = T_3(x_{20}, x_{30}), \end{aligned} \quad (10)$$

каждая точка $M_0(x_{10}^0, x_{20}, x_{30})$ плоскости $x_1 = x^0$, проходя последовательно области линейности (9), однозначно преобразуется в другую ее точку $M_6(x_{16}^0, x_{26}, x_{36})$.

Определяя координаты неподвижных точек $M^*(0,5; 0,5; 0,5)$, $M_0^*(0,5; 0,21; 0,69)$ и исследуя их устойчивость [9, 10], получаем, что первой из них соответствует неустойчивое состояние равновесия, а второй — устойчивый предельный цикл.

На основании системы (7) нетрудно установить, что $x_i(t)$ колеблется около среднего положения $\bar{x}_i = 0,5$ с амплитудой $A = 0,3$ и периодом $T = \sum_{i=1}^6 \ln |x_{ij} - x_{ij-1}| = 2,89$.

Аналогично, рассматривая систему (6), получим, что соответствующие дифференциальные уравнения при условии малости постоянной времени элемента «не» по сравнению с постоянной времени элемента «или» имеют вид

$$\begin{aligned} \mu \dot{x}_1 + x_1 &= \varphi[2 - \varphi(x_2) - \varphi(x_3)], \\ \mu \dot{x}_2 + x_2 &= \varphi[2 - \varphi(x_1) - \varphi(x_3)], \\ \mu \dot{x}_3 + x_3 &= \varphi[2 - \varphi(x_1) - \varphi(x_2)]. \end{aligned} \quad (11)$$

В пространстве состояний E_3 системы (11) имеется три устойчивых состояния равновесия M_1 (110), M_2 (101) и M_3 (011) с областями притяжения, соответственно равными

$$\begin{aligned} g_1 &= \{x_1 - x_2 > 0; x_3 - x_2 > 0\}, \\ g_2 &= \{x_1 - x_3 > 0; x_3 - x_2 < 0\}, \\ g_3 &= \{x_1 - x_2 < 0; x_1 - x_3 < 0\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $0 \leq x_i \leq 1$. Откуда следует, что состояния равновесия M_1 , M_2 , M_3 имеют одинаковый запас устойчивости.

Нетрудно видеть, что в этом примере имеет место абсолютная устойчивость системы не только вне, но и внутри куба E_3 , так как при любых начальных условиях система приходит к устойчивому состоянию равновесия [1].

В заключение отметим, что при рассмотрении динамики логических схем, уравнения алгебры логики которых имеют вид (3), предположение о релейности характеристик элементов дизъюнкции и конъюнкции не является обязательным (кроме, может быть, случая скользящего движения по плоскостям $x_i = x^0$), достаточно предположения о релейности статической характеристики и безынерционности инвертора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. М. И. Фейгин, К теории триггера, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 300.
3. М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, Анализ и синтез структуры релейно-контактных схем, изд. АН СССР, М—Л., 1950.
4. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, под ред. В. И. Шестакова, ИЛ, М., 1954.
5. С. В. Яблонский, Тр. математического института им. В. А. Стеклова, 51, 5 (1958).
6. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 169 (1958).
7. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 3, 588 (1962).
8. Ю. И. Неймарк, Труды ГИФТИ и радиофакультета ГГУ, 30, серия физическая, (1956).
9. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 146 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 февраля 1967 г.

TO THE THEORY OF SIMPLEST DYNAMIC MODELS FOR LOGICAL CIRCUITS

V. A. Dozorov, T. V. Minchook

To study the dynamics of logical circuits a system of differential operators corresponding to a full logical set is constructed.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВИБРОМОЛОТА

В. С. Метрикин

Методом точечных отображений исследуется устойчивость одноударного периодического движения двухмассовой модели вибромолота.

Рассматриваемая модель вибромолота состоит из упруго закрепленной массы m_2 (вибратора), на которую действует внешняя периодическая сила $F \sin(\omega t)$, и массы m_1 , упруго соединенной с вибратором (рис. 1). Движение массы m_1 ограничено снизу неподвижной преградой, при соприкосновении с которой происходит неупругий удар с коэффициентом восстановления скорости R . Предполагается, что между массами m_1 и m_2 столкновения отсутствуют и что диссипация энергии происходит только через удары. Уравнения движения системы в период между ударами в безразмерных переменных запишутся в виде*

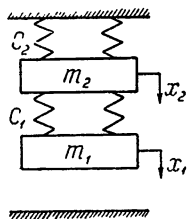


Рис. 1

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \lambda_1^2 (\xi_1 - x\xi_2) &= 0, \\ \ddot{\xi}_2 + \lambda_1^2 (x\xi_2 - \xi_1) + \lambda_2^2 \xi_2 &= \sin \tau, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\omega t = \tau, \quad \lambda_1^2 = \frac{C_1}{m_1 \omega^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{C_2}{m_2 \omega^2}, \quad x = \frac{m_1}{m_2}, \quad (2)$$

$$\xi_1 = \frac{m_1 \omega^2}{F} \left(x_1 - \frac{P_1}{C_1} - \frac{P_1 + P_2}{C_2} \right),$$

$$\xi_2 = \frac{m_2 \omega^2}{F} \left(x_2 - \frac{P_1 + P_2}{C_2} \right).$$

При $\xi_1 = \xi_0$ происходит неупругий удар. Скорость $\dot{\xi}_1^0$ непосредственно до удара связана со скоростью $\dot{\xi}_1^{0'}$ непосредственно после удара соотношением

$$\dot{\xi}_1^{0'} = -R \dot{\xi}_1^0. \quad (3)$$

Систему (1)–(3) характеризуют пять параметров $\lambda_1, \lambda_2, \xi_0, x, R$, изменяющихся в пределах $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, x < \infty, -\infty < \xi_0 < +\infty, 0 \leq R \leq 1$.

Фазовое пространство системы (1)–(3) $\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \tau$ является пятимерным. Гиперплоскостью $\xi_1 = \xi_0$ оно разбивается на две области $\xi_1 < \xi_0$ и $\xi_1 > \xi_0$. Все возможные движения системы лежат в области $\xi_1 \leq \xi_0$. В случае ударных движений системы изображающая точка будет снова и снова приходить на гиперплоскость $\xi_1 = \xi_0$; исследование этих

* За начало отсчета системы принято положение, при котором обе пружины находятся в ненапряженном состоянии.

движений сводится к исследованию точечного отображения гиперплоскости $\xi_1 = \xi_0$ самой в себя.

Интегрируя систему (1)–(3) с начальными условиями $\xi_1 = \xi_0$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_1^0$, $\xi_2 = \xi_2^0$, $\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_2^0$ при $\tau = \tau_0$ и полагая $\xi_1 = \xi_0$ в решении, получим точечное преобразование гиперплоскости $\xi_1 = \xi_0$ в себя (T -преобразование):

$$\begin{aligned}\xi_0 &= a \sin \tau_1 + \sum_{i=1}^2 k_i \{ B_i \cos [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] + A_i \eta_i^{-1} \sin [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] \}, \\ \dot{\xi}_1 &= a \cos \tau_1 + \sum_{i=1}^2 k_i \{ A_i \cos [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] - B_i \eta_i \sin [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] \}, \\ \xi_2 &= b \sin \tau_1 + \sum_{i=1}^2 \{ B_i \cos [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] + \eta_i^{-1} A_i \sin [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] \}, \\ \dot{\xi}_2 &= b \cos \tau_1 + \sum_{i=1}^2 \{ A_i \cos [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] - \eta_i B_i \sin [\eta_i (\tau_1 - \tau_0)] \},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$A_1 = (k_2 - k_1) [R\dot{\xi}_0 + k_2 \dot{\xi}_2^0 + (a - bk_2) \cos \tau_0],$$

$$B_1 = (k_2 - k_1) [-\xi_0 + k_2 \xi_2^0 + (a - bk_2) \sin \tau_0],$$

B_2 и A_2 получаются из B_1 и A_1 заменой $k_1 = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 x - \eta_1^2}{\lambda_1^2}$ и

$k_2 = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 x - \eta_2^2}{\lambda_1^2}$ соответственно на k_2 и k_1 , где η_1 и η_2 являются корнями уравнения частот

$$\eta^4 - [\lambda_1^2 (1 + x) + \lambda_2^2] \eta^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 0, \quad (5)$$

а $a = \frac{\lambda_1^2 x}{\Delta}$ и $b = \frac{\lambda_1^2 - 1}{\Delta}$ — амплитуды вынужденных колебаний нижней и верхней масс соответственно, здесь $\Delta = (1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2^2)$, в дальнейшем за η_1 условимся принимать больший корень.

Из первого уравнения (4) определяется момент следующего удара τ_1 , причем из всех корней этого уравнения надо брать наименьший корень, удовлетворяющий условию $\tau_1 > \tau_0$, остальные уравнения определяют положение и скорость вибратора в момент удара и скорость нижней массы.

Исследование одноударных периодических движений и их устойчивости. Нахождение периодических режимов сводится к исследованию неподвижных точек T -преобразования. Полагая в (4) $\tau_1 - \tau_0 = 2\pi n$, $\xi_1 = \xi_0$, $\xi_2 = \xi_2^0$, $\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_2^0$, получим систему уравнения для нахождения координат неподвижной точки T -преобразования. Координаты неподвижной точки и границы существования одноударных периодических режимов с периодом, кратным периоду внешней силы, имеют такой же вид, как в [1], однако под k_1 , k_2 , a , b , η_1 и η_2 надо понимать указанные выше обозначения.

Для исследования устойчивости периодического режима составляется характеристическое уравнение $x(z) = 0$, для чего варьируются

уравнения (4) по всем переменным в окрестности неподвижной точки T -преобразования [2].

Характеристическое уравнение $x(z) = 0$ имеет вид*

$$\left| \begin{array}{l} +R\eta_2^{-1}S_2 k_1(z-C_2) - k_1\eta_2^{-1}S_2 z(\xi_0 - k_1\xi_2^0) + \bar{A}_2C_2 + \eta_2^{-1}S_2(a - bk_1)S_0 - \\ \quad - \eta_2\bar{B}_2S_2 - C_2(a - bk_1)C_0 \\ z + C_1R \quad k_2\eta_1S_1 \quad k_2(z-C_1) z(\xi_0^0 - k_2\xi_2^0) - \bar{A}_1\eta_1S_1 + C_1(a - bk_2)S_0 - \\ \quad - \bar{B}_1\eta_1^2C_1 + \eta_1S_1(a - bk_2)C_0 \\ R\eta_1^{-1}S_1 \quad k_2(z-C_1) - k_2\eta_1^{-1}S_1 z(\xi_0 - k_2\xi_2^0) + \bar{A}_1C_1 + \eta_1^{-1}S_1(a - bk_2)S_0 - \\ \quad - \eta_1\bar{B}_1S_1 - C_1(a - bk_2)C_0 \\ z + C_2R \quad k_1\eta_2S_2 \quad k_1(z-C_2) z(\xi_0^0 - k_1\xi_2^0) - \bar{A}_2\eta_2S_2 + C_2(a - bk_1)S_0 - \\ \quad - \bar{B}_2\eta_2^2C_2 + \eta_2S_2(a - bk_1)C_0 \end{array} \right| = 0. \quad (6)$$

Здесь $S_i = \sin(2\pi n\eta_i)$, $C_i = \cos(2\pi n\eta_i)$, $S_0 = \sin \tau_0$, $C_0 = \cos \tau_0$ ($i=1,2$).

Границами устойчивости являются поверхности N_{+1} , N_{-1} и N_φ , получаемые из (6) путем подстановки $z = +1, -1$ и $e^{i\varphi}$ [3]. Кроме того, границей существования является бифуркационная граница, получаемая из разрывности точечного преобразования. Уравнения этой поверхности, соответствующие появлению лишних ударов за период, имеют вид

$$\xi_1(\tau^*) - \xi_0 = 0, \quad \xi_1(\tau^*) = 0,$$

где $\tau_0 < \tau^* < \tau_1$ ($\tau_1 - \tau_0 = 2\pi n$).

На рис. 2 в плоскости параметров ξ_0 , $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ построены области устойчивости (заштрихованная часть плоскости) для одноударного периодического движения при $n=1$, $x=1$, $\gamma = C_1/C_2 = 1$, $R=0,2$ [1]. Границы устойчивости, полученные из разрывности точечного отображения, не приводятся. Из всех областей устойчивости выделяются две наиболее широкие, лежащие вблизи резонансных частот соответствующей двухмассовой линейной модели (РЧ). Результаты исследования расположения этих областей при $n=1$, $\xi_0=0$, $R=0,2$ в зависимости от x и γ приведены на рис. 3.

В случае $x = \text{const} = 1$ на рис. 3 построены области устойчивости (штриховка слева направо вниз) в зависимости от γ . Штрих-пунктиром нанесены кривые РЧ. Область устойчивости, лежащая вблизи большей из этих частот, представляет собой множество изолированных областей, причем с ростом γ

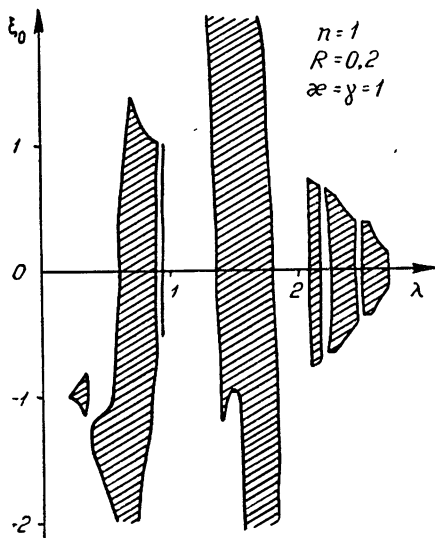


Рис. 2.

* $\bar{A}_i = \frac{A_i}{(k_2 - k_1)}$, $\bar{B}_i = \frac{B_i}{(k_2 - k_1)}$, ($i=1,2$).

они сдвигаются влево по λ_1 от РЧ, т. е. для попадания в эту область частоту внешней силы с ростом γ надо увеличивать. Область устойчивости, отвечающая меньшей частоте, с ростом γ сдвигается в сторону больших λ_1 , т. е. для попадания в эту область с ростом γ надо уменьшить частоту внешней силы. Следует отметить, что области устойчивости, лежащие в окрестности РЧ, наиболее широкие по λ_1 .

В случае $\gamma = \text{const} = 1$ на том же графике построены области устойчивости (штриховка слева вверх направо) в зависимости от x .

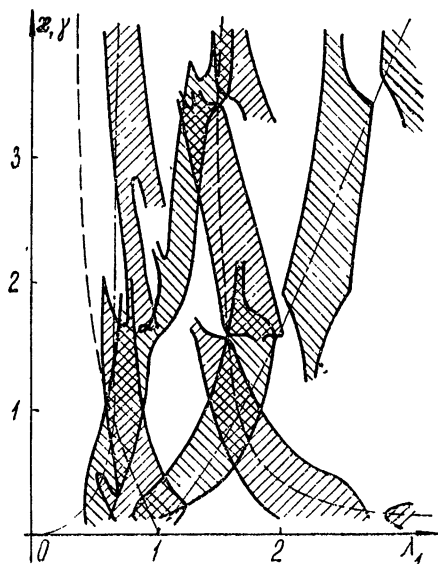


Рис. 3.

появляется со стороны отрицательных зазоров, в результате чего подобные зависимости расположения областей устойчивости от параметров x и γ (рис. 3) можно построить лишь для больших значений зазора ξ_0 .

С ростом n также происходит расчленение основных областей устойчивости и появление новых областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Беспалова, В. С. Метрикин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 363 (1966).
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
3. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 января 1967 г.

ON THE STABILITY OF A CERTAIN VIBROHAMMER MODEL

V. S. Myetrikhin

One — impact periodical motion in a two-mass model of a vibrohammer is studied in this paper with the aid of point-to-point mapping technique.

УДК 519.217 : 681.142.33

АНАЛИЗ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

В. Д. Разевиг

Рассматривается возможность определения вероятностных характеристик одномерных марковских случайных процессов путем решения уравнений параболического типа на аналоговых вычислительных машинах.

Анализ радиотехнических устройств, находящихся под случайным воздействием, приводит в ряде случаев к решению краевых задач для уравнений параболического типа. К такому анализу сводится, например, определение вероятности срыва в следящей системе, вероятность первого достижения границы марковским процессом и нахождение плотности распределения частоты в системе автоматической подстройки частоты (АПЧ). Эти задачи сводятся к решению диффузионного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u, \quad (1)$$

дополненного соответствующими краевыми условиями.

Метод Рунге [1] приближенного решения уравнения (1) в общем случае приводит к трудоемким вычислениям. Конечно-разностный метод решения краевых задач на сетке из пассивных элементов [2] невозможно использовать из-за членов $\frac{\partial u}{\partial x}$ и u . В настоящей работе рассматриваются способы решения уравнения (1) с произвольными коэффициентами на аналоговых вычислительных машинах (АВМ).

1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим решение параболического уравнения с постоянными во времени коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x) u \quad (2)$$

на АВМ. Дифференциальный оператор по координате x заменим конечно-разностным оператором. Пусть область определения G координаты x имеет длину L . Разобьем ее равномерно на N интервалов длины $\Delta x = L/N$ каждый. Производные по x внутри области G аппроксимируем стандартным образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_k} = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2\Delta x} \quad \text{с погрешностью} \quad - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_k} = \frac{\ddot{u}_{k+1} - 2\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{с погрешностью} \quad - \frac{(\Delta x)^2}{12} \left. \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|_{\theta}, \quad (4)$$

где $x_{k-1} \leq \theta \leq x_{k+1}$. Подставляя в уравнение (2) выражения (3), (4) и интегрируя по времени t , получим систему уравнений

$$u_k(t) = \int_0^t \left\{ u_{k-1}(\tau) \left[-\frac{b_k}{2\Delta x} + \frac{a_k}{(\Delta x)^2} \right] - u_k(\tau) \left[\frac{2a_k}{(\Delta x)^2} - c_k \right] + \right. \\ \left. + u_{k+1}(\tau) \left[\frac{b_k}{2\Delta x} + \frac{a_k}{(\Delta x)^2} \right] \right\} d\tau \quad (5)$$

$$(k = 0, 1, \dots, N),$$

где $a_k = a(x_k)$, $b_k = b(x_k)$, $c_k = c(x_k)$. Систему уравнений (5), дополненную краевыми условиями, можно [2] решить на АВМ. На рис. 1 показана структурная схема получения решения в k -м узле. Для экономии числа операционных усилителей в схеме отсутствуют инверторы, обычно,

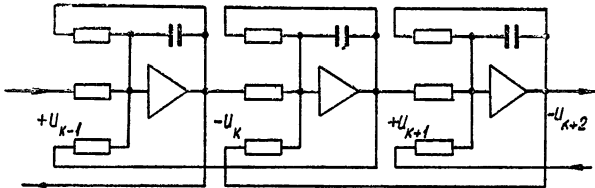


Рис. 1.

необходимые между узловыми точками. Вследствие этого полярность потенциалов $u_0, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_N$, являющихся решениями задачи, в соседних точках различна. В каждом узле стоит интегратор с тремя входами. Коэффициенты усиления по каждому входу равны соответствующим коэффициентам уравнения (5).

В качестве примеров рассмотрим следующие задачи.

1. При определении вероятности первого достижения границы одномерным марковским процессом возникает уравнение [3]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a(\xi) \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + b(\xi) \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (6)$$

с начальными и граничными условиями

$$P(\xi, 0) = P_0(\xi) = 0, \quad (7)$$

$$P(\xi, t) |_{\xi \in \Gamma} = 1, \quad (8)$$

где Γ — граница области G .

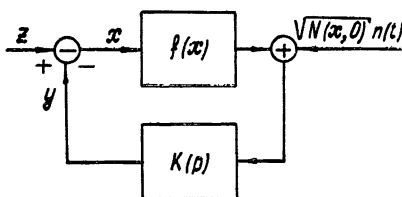


Рис. 2.

2. Некоторые системы автоподстройки при наличии помех могут быть представлены в виде структурной схемы, изображенной на рис. 2, где z и y — входное возмущение и реакция системы, $x = z - y$ — ошибка слежения, $K(p) = 1/(1+pT)$ — операторный коэффициент передачи цепи обратной связи, $f(x)$ — характеристика дискриминатора, $N(x, 0)$ [$\sigma^2 \cdot \epsilon u_{-1}$] —

спектральная плотность помехи на нулевой частоте, $n(t)$ — единичный белый шум. По структурной схеме системы составляется уравнение Фоккера — Планка [4] относительно плотности вероятности распределения ошибки слежения $W(x, t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial b(x) W}{\partial x} = \frac{\partial^2 a(x) W}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где

$$a(x) = \frac{N(x, 0)}{4T^2}, \quad b(x) = \frac{dz}{dt} + \frac{1}{T} z - \frac{1}{T} [x + f(x)] + \\ + \sqrt{a(x)} \frac{d\sqrt{a(x)}}{dx}$$

(предполагается $\frac{dz}{dt} = \text{const}$). Начальным условием уравнения (9) является распределение ошибки при $t = 0$:

$$W(x, 0) = W_0(x). \quad (10)$$

Если начальная ошибка $x(0) = \xi$ известна точно, то $W_0(x) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Граничные условия могут быть различные. Так, при анализе срыва слежения часто используют поглощающие границы

$$W(x, t) |_{x \in \Gamma} = 0. \quad (11)$$

Интегрирование уравнения (9) при указанных граничных условиях позволяет найти распределение ошибки слежения внутри всей области G . В случаях, когда можно ограничиться определением вероятности срыва $P_{\text{ср}}(t)$, следует пользоваться более простым уравнением (6). Если решение этого уравнения $P(x, t)$, то

$$P_{\text{ср}}(t) = \int_G W_0(x) P(x, t) dx. \quad (12)$$

При начальном распределении $W_0(x) = \delta(x - \xi)$ вероятность срыва

$$P_{\text{ср}}(t) = P(\xi, t).$$

В некоторых задачах используют отражающие границы

$$b(x) W - \frac{\partial a(x) W}{\partial x} \Big|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (13)$$

В системах фазовой автоподстройки коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ являются периодическими функциями. При этом возникает условие сшивания решений

$$W(x, t) = W(x + L, t), \quad (14)$$

где L — период коэффициентов.

Для реализации на АВМ начальных условий (7), (10) на интеграторах в момент времени $t = 0$ выставляются начальные условия в соответствии с $P_0(\xi_k)$, $W_0(x_k)$ ($k = 1, \dots, N - 1$). В точках поглощения (11) поддерживаются нулевые потенциалы, при условии (7) — единичные потенциалы. В точке отражения $x_N \in \Gamma$ граничное условие (13) заменяется конечно-разностной аппроксимацией, откуда получается дополнительная связь для уравнений (5)

$$W(x_N, t) = \frac{a_{N-1}}{\Delta x b_N - a_N} W(x_{N-1}, t). \quad (15)$$

Для удовлетворения условию периодичности согласно (14) имеем

$$W(x_0, t) = W(x_N, t). \quad (16)$$

В случае бесконечной области G при наличии устойчивой точки равновесия системы плотность вероятности $W(x, t)$ убывает при $x \rightarrow \pm \infty$. Тогда целесообразно ограничить область G либо поглощающими (11), либо отражающими (13) границами. Если при изменении характера границ решение $W(x, t)$ меняется слабо, то ограничение бесконечной области G правомерно.

2. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Вопросы сходимости рассмотренного метода прямых и получения оценки погрешности метода в общем случае решить не удается. Эти вопросы решены лишь в некоторых частных случаях [5]. Поэтому при практическом использовании метода прямых следует проверить его сходимость, последовательно увеличивая число разбиений N области G .

В качестве примера рассмотрим сходимость метода при решении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 1. \end{aligned}$$

Применение метода Фурье к уравнению (17) приводит к выражению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n \exp(b/2)]}{\pi n + b^2/4\pi n} \times \\ &\times \exp\left[-\left(\pi^2 n^2 + \frac{b^2}{4}\right)t\right] \exp\left(-\frac{b}{2}x\right) \sin(\pi n x). \end{aligned} \quad (18)$$

В таблице 1 для $b=2$ показана сходимость к точному решению (18) при увеличении числа разбиений N (принята линейная интерполяция

Таблица 1

		N						
	t	2	4	6	8	10	Точное	
$x=0,5$	0,01	0,069	0,028	0,019	0,011	0,005	0,004	
	0,02	0,14	0,077	0,064	0,042	0,026	0,029	
	0,05	0,34	0,29	0,26	0,24	0,24	0,249	
	0,10	0,55	0,57	0,56	0,55	0,55	0,552	
	0,20	0,79	0,85	0,81	0,80	0,80	0,806	
	0,40	0,97	0,99	0,98	0,98	0,98	0,978	
$x=0,25$	0,01	0,52	0,081	0,11	0,072	0,077	0,075	
	0,02	0,58	0,20	0,18	0,15	0,16	0,154	
	0,05	0,67	0,39	0,41	0,37	0,38	0,376	
	0,10	0,77	0,62	0,63	0,60	0,61	0,594	
	0,20	0,89	0,88	0,85	0,83	0,83	0,824	
	0,40	0,98	1,00	0,97	0,99	0,99	0,980	

решений между узловыми точками). Для иллюстрации на рис. 3 приведена зависимость u от x , полученная на $N=10$ интеграторах при вариации коэффициента b (решение (18) отмечено кружками). В рассмотренных примерах ошибка конечно-разностного метода не превышает 5%, что вполне достаточно на практике.

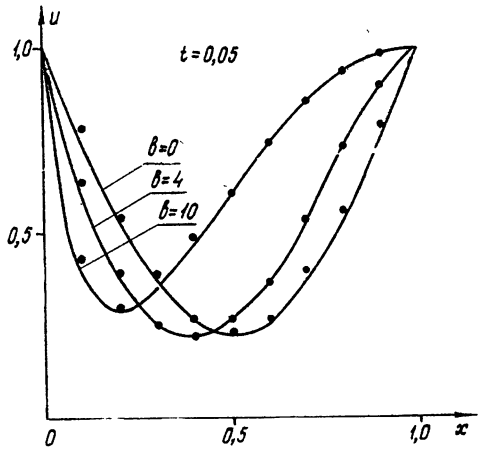


Рис. 3.

Рассмотрена также задача о срыве слежения в системе автоподстройки (рис. 2) с характеристикой дискриминатора

$$f(x) = \begin{cases} x & (|x| \leq 1) \\ 2-x & (1 \leq x \leq 2) \\ -2-x & (-2 \leq x \leq -1) \\ 0 & (|x| \geq 2) \end{cases} \quad (19)$$

при $a(x)=8$, $K(p) = 1/p$, $\frac{dz}{dt} = 0$. Вероятность срыва определяется из уравнения (6) с крайевыми условиями.

$$P(\xi, 0) = 0,$$

$$P(-2, t) = P(2, t) = 1.$$

В таблице 2 приведено сравнение конечно-разностного решения с решением по методу Рунге [1] при $\xi = 0$ (вычислено третье приближение). Заметим, что в этой задаче уравнение и крайевые условия симметричны по координате x , что позволило набрать на АВМ только половину области G .

Таблица 2

t	Конечно-разностный метод	Метод Рунге
0,5	0,25	0,232
1,0	0,53	0,505
2,0	0,80	0,808
3,0	0,91	0,926

В некоторых случаях имеющееся число интеграторов может оказаться недостаточным для хорошей сходимости решения. Тогда целесообразно распределить точки разбиения отрезка L неравномерно, сгущая их в области наибольшей скорости изменения $u(x, t)$ (см. оценки точности в (3), (4)). Кроме того, в случае замены бесконечной области G конечной используется увеличивающийся шаг по мере приближения к границам области. При разбиении с непостоянным шагом $h_{k, k-1} = x_k - x_{k-1}$ производные по координате аппроксимируются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_k} = u_{k,1} \frac{h_{k, k-1}}{h_{k-1, k} (h_{k+1, k} + h_{k, k-1})} - u_k \frac{h_{k, k-1} - h_{k+1, k}}{h_{k+1, k} h_{k, k-1}} + u_{k-1} \frac{h_{k+1, k}}{h_{k, k-1} (h_{k+1, k} + h_{k, k-1})}, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_k} = \frac{u_{k+1} h_{k, k-1} - u_k (h_{k, k-1} + h_{k+1, k}) + u_{k-1} h_{k+1, k}}{h_{k, k-1} h_{k+1, k} (h_{k+1, k} + h_{k, k-1})/2}. \quad (21)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены способы решения на аналоговых машинах краевых задач для одномерных диффузионных уравнений как с постоянными, так и с переменными по координате коэффициентами. На конкретных примерах показано, что погрешность конечно-разностного решения составляет не более 5% при сравнительно небольшом числе операционных усилителей $N=10-20$. Характерно, что в рассмотренном случае аналоговые машины имеют преимущество перед цифровыми не только в стоимости, но и в скорости получения решения. Кроме того, на программирование задачи требуется меньшее время, модификация уравнения может быть выполнена без труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Вишняк, Матем сб, 39, (81), № 1, 51 (1956).
2. У. Карплус, Моделирующие устройства для решения задач теории поля, ИЛ, М., 1962.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 3, № 3, 165 (1933).
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1962.
5. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
17 апреля 1967 г.

ANALYSIS OF THE MARKOVIAN STOCHASTIC PROCESSES IN LINEAR AND NONLINEAR SYSTEMS WITH THE USE OF ANALOGUE COMPUTERS

V. D. Razyevig

The possibility to determine the probability characteristics of one-dimensional Markovian stochastic process by solving an equation of a parabolic type with the use of an analogue computer is under consideration in this paper.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.373.001.24

К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ LC - АВТОГЕНЕРАТОРА

В. Ф. Скупой

Аналізу синхронизации LC-автогенератора посвящено много работ. Общим для них является предположение синусоидальности автоколебаний и внешней ЭДС, что не всегда выполняется. В данном сообщении выводятся уравнения, описывающие в первом приближении синхронизацию автогенератора с учетом спектрального состава автоколебаний и внешней силы.

Дифференциальное уравнение неавтономного генератора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta_0(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e_0(t)$$

после введения безразмерного времени $\tau = pt$ записывается в виде

$$\ddot{x} + x = hx + \varepsilon \sqrt{1 - hf(x)} \dot{x} + e(\tau), \tag{1}$$

где

$$h = \frac{p^2 - \omega_0^2}{p^2}, \quad \varepsilon f(x) = -\frac{2\delta_0(x)}{\omega_0}, \quad f(x)|_{x=0} = 1. \tag{2}$$

Заменой переменных

$$x = A^* \cos(\tau - \theta^*), \quad \dot{x} = -A^* \sin(\tau - \theta^*) \tag{3}$$

оно приводится к уравнениям в стандартной форме [1]

$$\dot{A}^* = -\{A^* h \cos(\tau - \theta^*) - \varepsilon \sqrt{1 - hf[A^* \cos(\tau - \theta^*)]} A^* \sin(\tau - \theta^*)\} \times \\ \times \sin(\tau - \theta^*) - e \sin(\tau - \theta^*), \tag{4}$$

$$\dot{\theta}^* = \{h \cos(\tau - \theta^*) - \varepsilon \sqrt{1 - hf[A^* \cos(\tau - \theta^*)]} A^* \sin(\tau - \theta^*)\} \times \\ \times \cos(\tau - \theta^*) + \frac{e}{A^*} \cos(\tau - \theta^*). \tag{5}$$

Как видно из (4), (5), A^* и θ^* в общем случае являются суммами плавно меняющихся компонент (A и θ соответственно) и вибрационных величин с частотами $n(\tau - \theta)$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как при анализе синхронизации представляют интерес именно плавно меняющиеся компоненты амплитуды и фазы, точные уравнения (4), (5) можно заменить приближенными относительно A и θ , усреднив (4), (5) на интервале $(0, 2\pi)$ по явно содержащемуся времени. Наиболее просто усреднение выполняется в случае почти гармонических колебаний, когда вибрационными величинами, входящими в A^* и θ^* , можно пренебречь. В общем случае вибрационные компоненты определяются спектром автоколебаний.

Пусть в автономном режиме установившиеся колебания имеют вид

$$x_0 = A_0 \sum_k a_k \cos(k\tau + \alpha_k). \tag{6}$$

Интересуясь изменениями только плавно меняющихся величин, будем полагать, что форма колебаний не зависит от внешней силы (такое предположение вносит некоторую погрешность [2], величина которой, однако, при достаточно малых ε незначительна). Тогда неавтономные колебания

$$x = A^* \cos(\tau - \theta^*) = A \sum a_k \cos[k(\tau - \theta) + \alpha_k], \tag{7}$$

а их производная

$$\dot{x} = -A \sum_k k a_k \sin [k(\tau - \theta) + \alpha_k]. \quad (8)$$

Из (3), (7), (8) можно найти входящие в (4), (5)

$$\cos(\tau - \theta^*) = \frac{x}{(x^2 + \dot{x}^2)^{1/2}}, \quad \sin(\tau - \theta^*) = \frac{-\dot{x}}{(x^2 + \dot{x}^2)^{1/2}}, \quad \frac{\cos(\tau - \theta^*)}{A^*} = \frac{x}{(x^2 + \dot{x}^2)A}$$

Очевидно, величины $\cos(\tau - \theta^*)$, $\sin(\tau - \theta^*)$ не зависят от A и определяются лишь формой колебаний в автономном режиме. Подставляя в (4), (5) эти величины и внешнее воздействие

$$e = \sum_m E_m \sin \left(m \frac{\omega}{p} \tau + \delta_m \right) \quad (9)$$

и усредняя, получим уравнения, описывающие синхронизацию автогенератора при произвольном ϵ и негармонической внешней ЭДС

$$\dot{A} = P(A, h) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_m E_m \sin \left(m \frac{\omega}{p} \tau + \delta_m \right) \right] \left\{ \sum_k b_k \sin [k(\tau - \theta) + \beta_k] \right\} d\tau, \quad (10)$$

$$\dot{\theta} = Q(A, h) + \frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} \left[\sum_m E_m \sin \left(m \frac{\omega}{p} \tau + \delta_m \right) \right] \left\{ \sum_k c_k \cos [k(\tau - \theta) + \gamma_k] \right\} d\tau. \quad (11)$$

Здесь b_k , β_k , c_k , γ_k — амплитуды и фазы разложений в ряды Фурье соответственно $\sin(\tau - \theta^*)$ и $\cos(\tau - \theta^*)/A^*$. В случае колебаний, близких к гармоническим, эти разложения совпадают с (7), (8).

В автономном режиме уравнения

$$P(A_0, h_0) = 0, \quad Q(A_0, h_0) = 0 \quad (12)$$

определяют амплитуду и частоту p_0 стационарных колебаний (через первое из соотношений (2)). При малых ϵ первые слагаемые уравнений (10), (11) можно записать в виде

$$P(A, h) = P'_A(A_0, p_0) \Delta A + P'_p(A_0, p_0) \Delta p, \quad (13)$$

$$Q(A, h) = Q'_A(A_0, p_0) \Delta A + Q'_p(A_0, p_0) \Delta p. \quad (14)$$

Вторые слагаемые уравнений (10), (11) дают плавно меняющиеся величины, когда ω/p близко к k/m . При этом (10), (11) с учетом (13) записываются в следующей форме:

$$\dot{A} = P'_A \Delta A + P'_p \Delta p - \frac{1}{2} \sum_{pk=m\omega} E_m b_k \cos(k\theta - \beta_k + \delta_m), \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = Q'_A \Delta A + Q'_p \Delta p + \frac{1}{2A} \sum_{pk=m\omega} E_m c_k \sin(k\theta - \gamma_k + \delta_m). \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) справедливы в режимах синхронизации на основном тоне, деления и умножения частоты, в том числе и при дробно-рациональном соотношении частот для произвольной величины ϵ . Насколько известно, использование допущения о синусоидальности автоколебаний не позволило достичь такой общности усредненных уравнений. Полученные уравнения наглядно отражают многие особенности синхронизации автоколебаний в перечисленных выше режимах, исследованные ранее в ряде работ [3-6].

Так, ограничиваясь для простоты рассмотрением только фазового уравнения (полагая $A = A_0$, что допустимо при условии малости внешнего воздействия), нетрудно заметить, что, в частности, в случае деления частоты относительная ширина полосы синхронизации возрастает с ростом амплитуды соответствующей гармоники автоколебаний и уменьшается с повышением коэффициента деления, причем в режиме релаксационных колебаний скорость этого уменьшения определяется величиной $1/k$ в соответствии с порядком убывания гармоник. Уравнение (6) отражает также фазо-

вое правило при делении частоты [7]. Действительно, если k -коэффициент деления частоты синусоидальной ЭДС, то стационарная фаза может быть равна

$$\theta = \frac{1}{k} \left(\gamma_k - \arcsin \frac{Q_p' \Delta p A_0}{E c_k} \right) + \frac{2\pi n}{k}. \quad (17)$$

Особый интерес представляет малоисследованный случай синхронизации на основной частоте негармоническим воздействием.

Из усредненного фазового уравнения видно, что в этом случае в полосе синхронизма могут иметь место разрывы и гистерезисные явления, подобные рассмотренным в [5, 6] для случаев синхронизации на гармониках и субгармониках.

Вследствие того, что в выражении (7) не учтена составляющая вынужденного движения, уравнения (15), (16) не описывают синхронизацию на субгармонике синусоидальной внешней силой, а также упомянутые выше эффекты в режиме деления частоты гармонической ЭДС. Хотя учет вынужденного движения в рамках изложенной здесь методики не представляет принципиальных затруднений, он приводит к существенному усложнению усредненных уравнений. Поэтому в данном сообщении нецелесообразно подробно останавливаться на этом вопросе, тем более, что практическое значение умножения частоты с помощью синхронизированного автогенератора весьма невелико [7].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, М., 1958
- 2 И. И. Миннакова, К. Ф. Теодорчик, Радиотехника и электроника, 1, № 10, 1317 (1956)
- 3 В. И. Сифоров, Радиотехника, 1, № 5, 3 (1946).
- 4 В. В. Виткевич, ЖТФ, № 10, 1245 (1950).
- 5 Р. В. Хохлов, Вестник Московского ун-та, вып. 5, № 8, 51 (1954)
- 6 Р. В. Хохлов, Вестник Московского ун-та, вып. 8, № 12, 33 (1954)
- 7 И. Х. Ризкии, Умножители и делители частоты, изд. Связь, М., 1966.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
5 июля 1966 г.

УДК 62—501

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ф. Б. Конев, Ю. Б. Конев

В настоящее время в литературе широко обсуждается вопрос об анализе линейных систем, содержащих элемент запаздывания с дисперсией (например, [1—4]). Один из примеров таких систем подробно рассмотрен в [5]. При этом применение стандартных методов теории управления к анализу таких систем наталкивается на трудности связанные с неоднозначностью их передаточных функций. В работе дается математическая постановка задачи, выясняющая возможности стандартных методов и ограничения их применимости.

Простейшей моделью элемента с диспергирующим запаздыванием является элемент с передаточной функцией $\exp(-\sqrt{p\tau})$. Такой передаточной функцией описывается, например, электрический кабель, распространение тепла в образце и т. д. при отсутствии отражений. В случае, когда элемент с запаздыванием включен в главную цепь, передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k\Psi_m(p) \exp(-\sqrt{p\tau})}{\Phi_n(p) + k\Psi_m(p) \exp(-\sqrt{p\tau})}, \quad (1)$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы от $p = \delta + i\omega$ целых степеней n и m соответственно с постоянными действительными коэффициентами, $n \geq m$, k — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Переходная характеристика рассматриваемой системы (реакция на единичный скачок) представляется в виде.

$$c(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp \frac{W(p)}{p} e^{pt}. \quad (2)$$

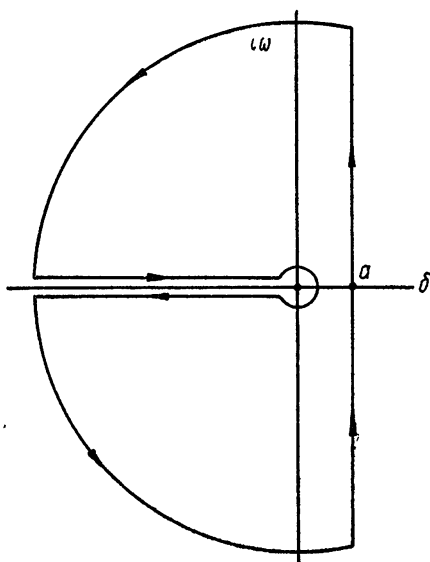


Рис. 1.

Для вычисления интеграла обращения (2) рассмотрим контур интегрирования, изображенный на рис. 1. Внутри этого контура можно выделить однозначную ветвь подынтегральной функции. Возьмем ту ветвь двузначной функции $s = \sqrt{p\tau}$ которая на положительной действительной полуоси комплексной плоскости p имеет $\arg s = 0$. Выбор этой ветви обусловлен с самого начала предположением об отсутствии отраженных волн в линии и связанным с этим выбором знака в показателе степени экспоненты передаточной функции элемента запаздывания.

Будем считать для простоты, что функция $W(p)$ не имеет особенностей на отрицательной вещественной полуоси. Если это не так, то нужно обойти эти особенности по бесконечно малым полукружностям на верхнем и нижнем берегах разреза.

В результате интегрирования (2) получим:

$$c(t) = \sum_i \text{Res}_{p_i} \left[\frac{W(p)}{p} e^{pt} \right] + \frac{k\Psi_m(0)}{\Phi_n(0) + k\Psi_m(0)} + \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_n(-x) \Psi_m(-x)}{x} \sin \sqrt{x\tau} e^{-xt} dx \left[\Phi_n^2(-x) + 2k\Phi_n(-x) \Psi_m(-x) \cos \sqrt{x\tau} + k^2 \Psi_m^2(-x) \right]^{-1}. \quad (3)$$

Точки p_i являются корнями характеристического уравнения системы

$$\Phi_n(p) + k\Psi_m(p) \exp(-\sqrt{p\tau}) = 0. \quad (4)$$

Последний член в (3) ограничен при всех t и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отсюда ясно, что устойчивость систем управления с диспергирующим запаздыванием определяется корнями характеристического уравнения (4). Для исследования устойчивости нужно применять известные методы, позволяющие оценивать расположение корней на плоскости p , например, метод траекторий корней [6]. Действительно, внутри контура интегрирования (рис. 1) можно построить траектории корней характеристического уравнения (4), принимая за свободный параметр коэффициент усиления k . При этом, естественно, должна рассматриваться выбранная нами ветвь двузначной функции $s = \sqrt{p\tau}$. Точки пересечения траекторий корней с мнимой осью комплексной плоскости дают критические значения частоты ω_k . Они могут быть определены из уравнения

$$\text{tg} \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} = \omega \frac{\Phi_r(0, \omega^2) \Psi_i(0, \omega^2) - \Phi_i(0, \omega^2) \Psi_r(0, \omega^2)}{\Phi_r(0, \omega^2) \Psi_r(0, \omega^2) + \omega^2 \Phi_i(0, \omega^2) \Psi_i(0, \omega^2)}, \quad (5)$$

где [6]

$$\begin{aligned} \Phi_n(p) &= \Phi_r(\delta, \omega^2) + i\omega\Phi_i(\delta, \omega^2), \\ \Psi_m(p) &= \Psi_r(\delta, \omega^2) + i\omega\Psi_i(\delta, \omega^2); \end{aligned} \quad (6)$$

критическое значение параметра k_k , соответствующее какой-либо точке $\omega = \omega_k$, вычисляется по формуле

$$k_k^2 = \exp(2\omega_k\tau)^{1/2} \left| \frac{\Phi_n(p)}{\Psi_m(p)} \right|_{\substack{\delta=0 \\ \omega=\omega_k}}^2 = \exp(2\omega_k\tau)^{1/2} \frac{\Phi_r^2(0, \omega_k^2) + \omega_k^2 \Phi_i^2(0, \omega_k^2)}{\Psi_r^2(0, \omega_k^2) + \omega_k^2 \Psi_i^2(0, \omega_k^2)}. \quad (7)$$

Формулы (5) и (7) аналогичны соответствующим формулам для систем с «чистым» запаздыванием [7] и получены таким же образом.

Если система устойчива при малых $|k|$, то наименьшее значение $|k_k|$ соответствует границе устойчивости системы, т. е. выходу пары комплексно-сопряженных корней уравнения (4) на мнимую ось p -плоскости. Соответствующая критическая частота ω_k есть частота возбуждения системы (в линейном приближении).

Для определения переходного процесса и оценки качества системы необходимо вычислить интеграл в (3). Этот интеграл в элементарных функциях не выражается, и вычислить его в каждом конкретном случае можно приближенными методами. Например, в [3] для этого используется импульсное представление непрерывной системы.

Таким образом, в работе показано, что устойчивость линейных систем с диспергирующим запаздыванием определяется, как обычно, корнями характеристического уравнения (4), но расчет переходного процесса только по корням этого уравнения [1] не обоснован. При использовании предлагаемой постановки задачи нет необходимости исследовать передаточную функцию (1) на всей римановой поверхности двузначной функции $s = \sqrt{p\tau}$, как это делают некоторые авторы [2, 4].

В заключение авторы благодарят К. Ф. Теодорчика и Г. А. Бендрикова за обсуждение результатов этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Дж. М. Смит, Автоматическое регулирование, гл. X, Физматгиз, М., 1962.
2. D. A. Pierre, T. J. Higgins, Proc. Natl. Electron. Conf., 20, 801 (1964).
3. D. A. Pierre, T. J. Higgins, ISA Trans., 3, 262 (1964).
4. B. J. Ball, M. J. Repoff, ISA Trans., 5, 146 (1966).
5. Ю. М. Азьян, В. В. Мигулин, Радиотехника и электроника, 1, № 4, 418 (1956).
6. Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик, Траектории корней линейных автоматических систем, изд. Наука, М., 1964.
7. Г. А. Бендриков, Ф. Б. Конев, Вестник Московского ун-та, сер. III, № 4 (1967).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
17 июня 1967 г.